

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Н. С. Аркашов, А. П. Ковалевский

**Теория игр
с элементами
линейного
программирования**

Утверждено редакционно-издательским советом
университета в качестве учебного пособия

Новосибирск
2016

УДК 519.21

Рецензенты: канд. физ.-мат. наук, доцент *К. А. Джафаров*,
д-р физ.-мат. наук, профессор *А. Г. Пинус*

Работа подготовлена на кафедре высшей математики
для студентов факультета бизнеса

Н. С. Аркашов

Теория игр с элементами линейного программирования: учеб.
пособие/ Н. С. Аркашов, А. П. Ковалевский. — Новосибирск:
Изд-во НГТУ, 2016. — 142 с.

ISBN

Настоящее учебное пособие подготовлено для студентов факультета бизнеса, изучающих теорию игр.

Пособие содержит теоретический материал, задачи для самостоятельного решения, индивидуальные задания.

Все замечания по содержанию пособия просим передавать на кафедру высшей математики. Они будут с благодарностью приняты и учтены в следующих изданиях.

УДК

ISBN

- © Н. С. Аркашов, А. П. Ковалевский, 2016
- © Новосибирский государственный
технический университет, 2016

Оглавление

Глава 1. Матричные игры	4
1.1 Простая матричная игра	4
1.2 Игры (2×2)	8
1.3 Игры $(m \times 2)$, $(2 \times n)$	13
1.4 Доминирование, подобие, симметрия, равномерность . .	18
1.5 Игры с разделением на равномерные	21
1.6 Задачи для самостоятельного решения	24
Глава 2. Линейное программирование	27
2.1 Задача линейного программирования	27
2.2 Симплекс-метод решения задачи линейного программирования	31
2.3 Решение расширенной матричной игры	34
2.4 Задачи для самостоятельного решения	36
Глава 3. Позиционные игры	40
3.1 Понятие позиционной игры	40
3.2 Байесовские стратегии	43
3.3 Статистические игры	43
3.4 Биматричные игры	46
3.5 Задачи для самостоятельного решения	47
Глава 4. Индивидуальные задания	52
Список литературы	97

Глава 1

Матричные игры

1.1. Простая матричная игра

По характеру выигрышей игры подразделяются на два типа: игры с нулевой суммой и игры с ненулевой суммой. Игра с нулевой суммой — это игра, в которой сумма выигрышей всех игроков в каждой партии равна нулю, т. е. в игре с нулевой суммой общий капитал всех игроков не меняется, а перераспределяется между игроками в зависимости от получающихся исходов. Многие экономические и военные ситуации можно рассматривать как игры с нулевой суммой. В дальнейшем мы будем рассматривать так называемые антагонистические игры, т. е. игры двух игроков с нулевой суммой. В таких играх цели игроков прямо противоположные: выигрыш одного игрока происходит за счет проигрыша другого.

По виду функций выигрышей мы выделим матричные игры. Матричная игра — это конечная игра двух игроков с нулевой суммой, в которой задаются проигрыши первого игрока в виде матрицы, строка матрицы соответствует номеру применяемой стратегии первого игрока, столбец — номеру применяемой стратегии второго игрока; на пересечении строки и столбца матрицы находится проигрыш первого игрока, соответствующий применяемым стратегиям. Отметим, что проигрыш первого игрока равен выигрышу второго игрока, т. е. для второго иг-

рока это матрица выигрышей. Если какой-либо элемент матрицы отрицателен, то в соответствующей ситуации (при использовании этой пары стратегий) выигрывает первый игрок, а второй проигрывает. Если элемент матрицы равен нулю, то в этой ситуации ни один из игроков ничего не выигрывает и не теряет.

Итак, матричная игра двух игроков с нулевой суммой может рассматриваться как следующая абстрактная игра двух игроков.

Первый игрок имеет m стратегий $i = 1, 2, \dots, m$, второй имеет n стратегий $j = 1, 2, \dots, n$. Каждой паре стратегий (ситуации игры) (i, j) поставлено в соответствие число a_{ij} , показывающее проигрыш первого игрока, если первый игрок применит i -ю стратегию, а второй — свою j -ю стратегию.

Каждая стратегия игрока $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$ называется чистой стратегией. Для задания матричной игры достаточно задать матрицу $A = (a_{ij})$ порядка $m \times n$ проигрышей первого игрока.

Если рассмотреть матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

то проведение каждой партии матричной игры с матрицей A сводится к выбору первым игроком i -й строки, а вторым игроком j -го столбца и получению вторым игроком за счет первого выигрыша a_{ij} . Матрицу A в дальнейшем мы будем называть *платежной матрицей* или *матрицей проигрышей* первого игрока. Следующим этапом является определение оптимальных стратегий и выигрышей игроков.

Число a^* , определяемое по формуле

$$a^* = \min_i \max_j a_{ij},$$

называется чистой верхней ценой игры и показывает верхнюю границу проигрыша, которую может гарантировать себе первый игрок за счет

применения своих чистых стратегий при всевозможных действиях второго игрока.

Число a_* , определяемое по формуле

$$a_* = \max_j \min_i a_{ij},$$

называется чистой нижней ценой игры и показывает нижнюю границу выигрыша, которую может гарантировать себе второй игрок за счет применения своих чистых стратегий при всевозможных действиях первого игрока.

Другими словами, применяя свои чистые стратегии, второй игрок может обеспечить себе выигрыш не меньше чем a_* , а первый игрок за счет применения своих чистых стратегий может не допускать выигрыш второго игрока больше, чем a^* . Легко доказывается, что выполняется следующее неравенство:

$$a_* \leq a^*.$$

Если в игре с матрицей A нижняя и верхняя чистые цены игры совпадают, т. е. $a_* = a^*$, то говорят, что игра имеет седловую точку в чистых стратегиях и чистую цену игры:

$$a = a_* = a^*.$$

Седловая точка — это пара чистых стратегий (i_0, j_0) соответственно первого и второго игрока, при которых достигается равенство $a_* = a^*$. В понятие седловой точки вложен следующий смысл: если один из игроков придерживается стратегии, соответствующей седловой точке, то другой не может поступить лучше, чем придерживаться стратегии, соответствующей седловой точке. Математически это можно записать в виде следующих неравенств:

$$a_{i_0 j} \leq a_{i_0 j_0} \leq a_{i j_0}.$$

Пару чистых стратегий (i_0, j_0) первого и второго игрока, образующих седловую точку и седловой элемент $a_{i_0 j_0}$, называют *решением простой матричной игры*. Отметим, что решение простой матричной игры описывает, как должен действовать каждый из игроков, и каков при этом будет проигрыш первого игрока (равный выигрышу второго игрока).

Чистые стратегии i_0 и j_0 , образующие седловую точку, называются *оптимальными чистыми стратегиями* соответственно первого и второго игрока.

Рассмотрим следующий простой пример.

Пример. Каждый из двух игроков загадывает целое число от 1 до 3. Первый игрок платит второму количество рублей, равное сумме загаданных чисел.

Решение. Заполним матрицу проигрышей первого игрока.

	θ_1	θ_2	θ_3
δ_1	2	3	4
δ_2	3	4	5
δ_3	4	5	6

Здесь через δ_i обозначены стратегии первого игрока «загадать число i ». Через θ_j обозначены такие же стратегии второго игрока.

Найдем чистую верхнюю цену игры. Для этого в каждой строке найдем наибольшее значение $a_{i\uparrow}$, а затем наименьшее из этих найденных значений:

	θ_1	θ_2	θ_3	$a_{i\uparrow}$
δ_1	2	3	4	4
δ_2	3	4	5	5
δ_3	4	5	6	6
				$a^* = 4$

Найдем чистую нижнюю цену игры. Для этого в каждом столбце найдем наименьшее значение $a_{\downarrow j}$, а затем наибольшее из этих найденных значений:

	θ_1	θ_2	θ_3	$a_{i\uparrow}$
δ_1	2	3	4	4
δ_2	3	4	5	5
δ_3	4	5	6	6
$a_{\downarrow j}$	2	3	4	$a_* = 4$

Итак, $a = a_* = a^* = 4$. Следовательно, существует седловая точка. Чтобы ее найти, выберем значения $a_{i\uparrow}$ и $a_{\downarrow j}$, равные a . Формально ответ записывается как седловая точка $(1, 3)$ и цена простой игры $a = 4$. В терминах условия получаем следующий ответ: первый игрок загадывает 1, второй игрок загадывает 3, в результате первый игрок проигрывает 4 рубля второму игроку.

В некотором смысле все игры с седловой точкой подобны приведенному выше примеру: ответ интуитивно ясен из условий задачи.

1.2. Игры (2×2)

Однако не каждая матричная игра имеет решение в чистых стратегиях. Исследование матричной игры начинается с нахождения ее седловой точки в чистых стратегиях. Если матричная игра имеет седловую точку в чистых стратегиях, то нахождением этой точки заканчивается исследование игры.

Если же седловой точки нет, т. е. выполнено неравенство $a_* < a^*$, то необходимо перейти к решению игры в так называемых смешанных стратегиях, о которых речь пойдет ниже.

Смешанной стратегией игрока называется полный набор вероятностей применения его чистых стратегий. Таким образом, если первый игрок имеет m чистых стратегий, то его смешанная стратегия $\vec{p}$ — это набор чисел $\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_m)$, удовлетворяющих соотношениям

$$p_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad \sum_{i=1}^m p_i = 1.$$

Аналогично для второго игрока, который имеет n чистых стратегий, смешанная стратегия $\vec{q}$ — это набор чисел $\vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$, удовлетворяющих соотношениям

$$q_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad \sum_{j=1}^n q_j = 1.$$

В понятие смешанных стратегий заложены следующие вероятностные предположения: каждый игрок выбирает случайным образом одну из своих чистых стратегий в соответствии со своим вектором вероятностей и независимо от другого игрока. Предполагается, что игра происходит многократно, и каждый раз чистые стратегии выбираются независимо от результатов предыдущих игр, и суммарный проигрыш игрока, деленный на число игр, сходится с вероятностью единица к числу, которое называется средним проигрышем.

Средний проигрыш первого игрока (средний выигрыш второго игрока) в матричной игре с матрицей A выражается в виде математического ожидания его проигрышей

$$\tilde{a}(\vec{p}, \vec{q}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} p_i q_j.$$

Здесь используется формула математического ожидания функции от двух независимых дискретных случайных величин.

Поясним сказанное на следующем примере.

Пример (угадывание стороны монеты). Первый игрок прячет монету либо орлом вверх, либо решкой вверх. Второй игрок пытается угадать сторону монеты, называя орел или решку. Если второй игрок угадал, первый отдает ему монету. Если не угадал, то он отдает первому игроку такую же монету.

Чтобы формализовать эту игру, введем обозначения: δ_1 — первый игрок загадал орла, δ_2 — решку; θ_1 — второй игрок назвал орла, θ_2 — решку. Построим матрицу проигрышей первого игрока, найдем верхнюю и нижнюю цену простой игры.

	θ_1	θ_2	$a_{i\uparrow}$
δ_1	1	-1	1
δ_2	-1	1	1
$a_{\downarrow j}$	-1	-1	$a^* = 1$ $a_* = -1$

Если первый игрок зафиксирует свою чистую стратегию (например, будет каждый раз загадывать решку), то второй игрок после

нескольких партий это поймет и будет выигрывать игру за игрой. В этом случае средний проигрыш первого игрока составит $a^* = 1$. Поэтому первому игроку надо каждый раз выбирать орла или решку случайным образом, чтобы второй игрок не знал его выбора.

Предположим для примера, что первый игрок загадывает орла с вероятностью 0,1, а второй игрок с вероятностью 0,2. Тогда $\vec{p} = (0,1; 0,9)$ (сумма вероятностей равна единице), $\vec{q} = (0,2; 0,8)$:

	θ_1	θ_2	p_i
δ_1	1	-1	0,1
δ_2	-1	1	0,9
q_j	0,2	0,8	

Средний проигрыш первого игрока

$$\tilde{a}(\vec{p}, \vec{q}) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 a_{ij} p_i q_j =$$

$$1 \cdot 0,1 \cdot 0,2 - 1 \cdot 0,1 \cdot 0,8 - 1 \cdot 0,9 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,9 \cdot 0,8 = 0,48.$$

Итак, при таком выборе смешанных стратегий игра оказывается выгодной для второго игрока, поскольку $\tilde{a}(\vec{p}, \vec{q}) > 0$.

Первый игрок за счет применения своих смешанных стратегий $\vec{p}$ стремится уменьшить свой средний проигрыш $\tilde{a}(\vec{p}, \vec{q})$, а второй – за счет своих смешанных стратегий имеет цель сделать $\tilde{a}(\vec{p}, \vec{q})$ максимальным. По аналогии с играми, имеющими седловые точки в чистых стратегиях, вводится следующее определение: оптимальными смешанными стратегиями первого и второго игрока называются такие векторы $\vec{p}^0$, $\vec{q}^0$ соответственно для первого и второго игрока, которые удовлетворяют неравенствам

$$\tilde{a}(\vec{p}^0, \vec{q}) \leq \tilde{a}(\vec{p}^0, \vec{q}^0) \leq \tilde{a}(\vec{p}, \vec{q}^0),$$

т. е. образуют седловую точку в смешанных стратегиях. При этом $\tilde{a} = \tilde{a}(\vec{p}^0, \vec{q}^0)$ называется ценой расширенной матричной игры, и выполнены равенства

$$\max_{\vec{q}} \min_{\vec{p}} \tilde{a}(\vec{p}, \vec{q}) = \max_{\vec{q}} \tilde{a}(\vec{p}^0, \vec{q}) = \min_{\vec{p}} \max_{\vec{q}} \tilde{a}(\vec{p}, \vec{q}) = \tilde{a}.$$

Оптимальные смешанные стратегии и цена игры называют решением матричной игры. Нейманом было доказано, что всякая матричная игра имеет решение (см. [3]).

Сформулируем теорему.

Теорема 1.1. *Для того чтобы $\vec{p}^0 = (p_1^0, \dots, p_i^0, \dots, p_m^0)$ была оптимальной смешанной стратегией матричной игры с матрицей A и ценой игры $\tilde{a}$, необходимо и достаточно выполнение следующих неравенств:*

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} p_i^0 \leq \tilde{a}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Аналогично для второго игрока: чтобы $\vec{q}^0 = (q_1^0, \dots, q_j^0, \dots, q_n^0)$ была оптимальной смешанной стратегией, необходимо и достаточно выполнение следующих неравенств:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} q_j^0 \geq \tilde{a}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

В дальнейшем нам понадобится также следующее интересное свойство матричных игр, которое мы сформулируем в виде теоремы.

Теорема 1.2. *Пусть дана матричная игра с матрицей $A = (a_{ij})$ и ценой игры $\tilde{a}$. Тогда оптимальные смешанные стратегии игроков игры с матрицей $B = (b_{ij}) = (ba_{ij} + c)$, где $b > 0$, совпадают с оптимальными смешанными стратегиями соответствующих игроков в исходной матричной игре Γ , а цена игры с матрицей B равна*

$$\tilde{b} = b\tilde{a} + c.$$

Следующая теорема сводит решение матричной игры порядка 2×2 к решению системы линейных уравнений.

Теорема 1.3. *Пусть матрица проигрышей первого игрока имеет вид:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $\vec{p} = (p_1, p_2)$ и $\vec{q} = (q_1, q_2)$ оптимальные стратегии первого и второго игрока соответственно. Если матричная игра не имеет седловой точки в чистых стратегиях, то оптимальные стратегии первого и второго игрока удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = \tilde{a}, & a_{11}q_1 + a_{12}q_2 = \tilde{a}, \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = \tilde{a}, & a_{21}q_1 + a_{22}q_2 = \tilde{a}, \\ p_1 + p_2 = 1, & q_1 + q_2 = 1, \end{cases}$$

где $\tilde{a}$ — цена игры.

Пример. Рассмотрим предыдущий пример (игру в угадывание стороны монеты). Так как в этой игре нет седловой точки в чистых стратегиях ($a_* = -1 < a^* = 1$), рассмотрим расширенную матричную игру и найдем оптимальную обобщенную стратегию первого игрока $\vec{p} = (p_1, p_2)$ и второго игрока $\vec{q} = (q_1, q_2)$:

	θ_1	θ_2	p_i
δ_1	1	-1	p_1
δ_2	-1	1	p_2
q_j	q_1	q_2	

Согласно теореме 1.3 запишем системы уравнений

$$\begin{cases} p_1 - p_2 = \tilde{a}, & q_1 - q_2 = \tilde{a}, \\ -p_1 + p_2 = \tilde{a}, & -q_1 + q_2 = \tilde{a}, \\ p_1 + p_2 = 1, & q_1 + q_2 = 1, \end{cases}$$

Приравнивая левые части, получаем $p_1 = p_2$, $q_1 = q_2$. Используя равенство суммы вероятностей единице, получаем $p_1 = p_2 = q_1 = q_2 = 1/2$. Подставляя найденные значения в любое из первых четырех уравнений, находим цену расширенной игры: $\tilde{a} = 0$. Формально ответ записывается так: $\vec{p} = (1/2, 1/2)$, $\vec{q} = (1/2, 1/2)$, $\tilde{a} = 0$. Проинтерпретируем его в терминах условия. Первый игрок загадывает орла с вероятностью $1/2$, решку с вероятностью $1/2$. Второй игрок называет орла с вероятностью $1/2$, решку с вероятностью $1/2$. Средние потери каждого из игроков равны нулю. В этом случае говорят, что игра является

справедливой. В каждой партии каждый из игроков либо выигрывает 1, либо проигрывает 1, но если игра происходит достаточно много раз, то суммарный выигрыш, деленный на число партий, в этой игре стремится к нулю, если игроки придерживаются своих оптимальных смешанных стратегий.

1.3. Игры $(m \times 2)$, $(2 \times n)$

Решение расширенных игр с матрицами $(m \times 2)$ и $(2 \times n)$ можно свести к решению игр (2×2) с помощью графического изображения средних потерь.

В игре $(m \times 2)$ обозначим через $\tilde{a}_i(\vec{q})$ средние потери первого игрока в случае, когда первый игрок выбирает свою чистую j -ю стратегию, а второй игрок — смешанную стратегию $\vec{q}$. Так как у второго игрока всего две стратегии, то $q_2 = 1 - q_1$, и средние потери $\tilde{a}_i(\vec{q})$ оказываются линейными функциями от q_1 :

$$\tilde{a}_1(\vec{q}) = a_{11}q_1 + a_{12}(1 - q_1),$$

$$\dots,$$

$$\tilde{a}_m(\vec{q}) = a_{m1}q_1 + a_{m2}(1 - q_1).$$

Построим эти прямые графически для $q_1 \in [0, 1]$ (рис. 1). У каждой линии подпишем номер стратегии первого игрока.

Для первого игрока значения каждой из линейных функций — это его средние потери при использовании соответствующей чистой стратегии. Поэтому первый игрок в каждой точке выбирает функцию, принимающую наименьшие значения, т. е. строит нижнюю огибающую множества функций (на рисунке показана жирной линией).

Для второго игрока значения этих функций — его средние выигрыши. Поэтому он в нижней огибающей, выбранной первым игроком, выбирает точку с наибольшим значением, т. е. точку максимума

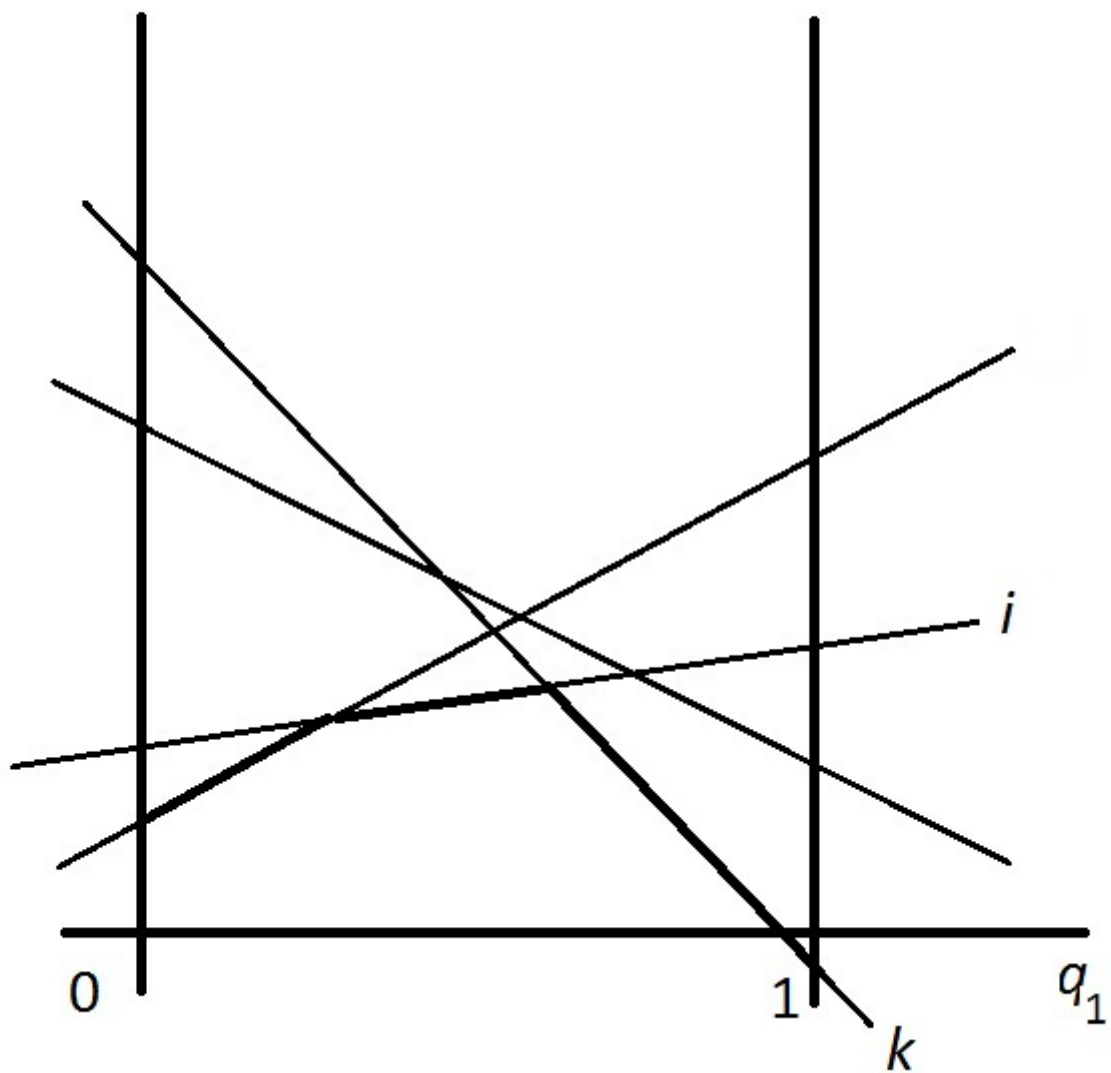


Рис. 1. Функции потерь первого игрока.

нижней огибающей. Для решения расширенной игры надо найти номера чистых стратегий первого игрока, соответствующих этой точке. На рисунке это номера i и k . Все остальные чистые стратегии не будут использоваться первым игроком, так как средние потери оказываются больше. В результате этого графического рассмотрения матричная игра сводится к игре (2×2) с матрицей

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} \\ a_{k1} & a_{k2} \end{pmatrix}.$$

Расширенная игра $(2 \times n)$ анализируется аналогично, но здесь строятся зависимости средних потерь от вероятности p_1 использования первой стратегии первым игроком. Затем второй игрок выбирает верхнюю огибающую, а первый игрок — минимум верхней огибающей.

В следующем примере поясним не только решение расширенной матричной игры (4×2) , но и интерпретацию смешанной стратегии как распределения ресурса игрока в соответствии с найденными вероятностями.

Пример. Первый игрок — природа. Ее стратегии: δ_1 — лето сухое, жаркое, δ_2 — лето сухое, холодное, δ_3 — лето влажное, жаркое, δ_4 — лето влажное, холодное.

Второй игрок — фермер. Его стратегии: θ_1 — выращивать картофель, θ_2 — выращивать тыквы. По результатам многолетних наблюдений фермер составил матрицу своих выигрышей (в миллионах рублей):

	θ_1	θ_2
δ_1	4	-1
δ_2	3	1
δ_3	1	5
δ_4	0	4

Проанализируем простую матричную игру — найдем верхнюю и нижнюю цены простой игры:

	θ_1	θ_2	$a_{i\uparrow}$
δ_1	4	-1	4
δ_2	3	1	3
δ_3	1	5	5
δ_4	0	4	4
$a_{\downarrow j}$	0	-1	$a_*^* = 0$

Так как в этой игре нет седловой точки в чистых стратегиях ($a_* < a^*$), рассмотрим расширенную матричную игру и найдем средние потери первого игрока при использовании им его чистых стратегий:

$$a_1(\vec{q}) = 4q_1 - (1 - q_1); \quad a_2(\vec{q}) = 3q_1 + (1 - q_1);$$

$$a_3(\vec{q}) = q_1 + 5(1 - q_1); \quad a_4(\vec{q}) = 4(1 - q_1).$$

Изобразим эти функции на чертеже и построим нижнюю огибающую (рис.2).

Максимум нижней огибающей достигается на пересечении функций средних потерь для первой и четвертой стратегии первого игрока. Использование остальных стратегий оказывается для него невыгодным. Поэтому можно принять $p_2 = p_3 = 0$, и игра сводится к следующей игре (2×2):

	θ_1	θ_2
δ_1	4	-1
δ_4	0	4

Седловой точки по-прежнему нет, поэтому решим расширенную матричную игру:

	θ_1	θ_2	p_i
δ_1	4	-1	p_1
δ_2	0	4	p_4
q_j	q_1	q_2	

Для этого составим систему уравнений

$$4p_1 = \tilde{a}, \quad -p_1 + 4p_4 = \tilde{a}, \quad p_1 + p_4 = 1,$$

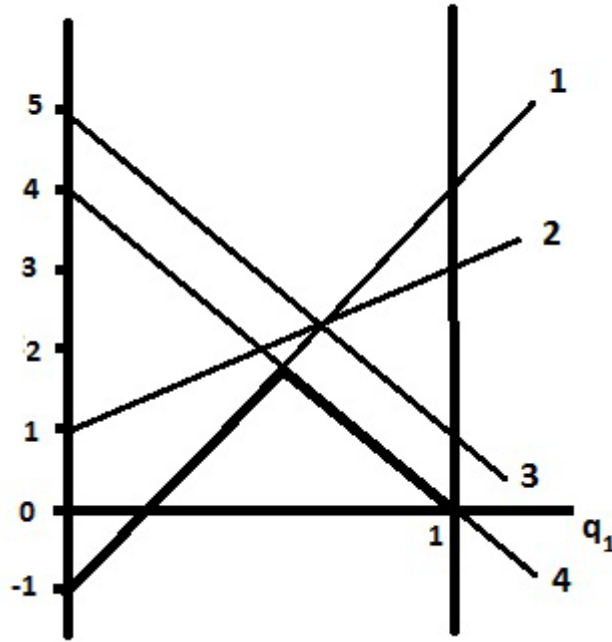


Рис. 2. Графическое решение примера.

$$4q_1 - q_2 = \tilde{a}, \quad 4q_2 = \tilde{a}, \quad q_1 + q_2 = 1.$$

Там, где правые части равны $\tilde{a}$, приравниваем левые части уравнений. Получаем $5p_1 = 4p_4$, поэтому $p_1 = \frac{4}{5}p_4$, $\frac{4}{5}p_4 + p_4 = 1$. Находим $p_4 = 5/9$, $p_1 = 4/9$. Аналогично для второго игрока: $4q_1 = 5q_2$, $q_1 = 5/9$, $q_2 = 4/9$.

Цену игры найдем из первого уравнения: $\tilde{a} = 16/9$.

Формально ответ записывается так: $\vec{p} = \left(\frac{4}{9}, 0, 0, \frac{5}{9}\right)$, $\vec{q} = \left(\frac{5}{9}, \frac{4}{9}\right)$, $\tilde{a} = 16/9$.

Проинтерпретируем ответ в терминах условия. Для этого заметим, что ресурсы второго игрока являются разделяемыми: он может поделить свои посевные площади между разными культурами в нужной пропорции. При такой стратегии второго игрока никакая стратегия первого игрока не может привести к уменьшению выигрыша второго игрока по сравнению с найденной ценой расширенной игры.

Итак, второй игрок (фермер) посадит картофель на $5/9$ своих посевных площадей, тыкву — на оставшихся $4/9$. При этом его гарантированный выигрыш равен $16/9$ от миллиона рублей — примерно 1 778 тысяч рублей. Наименее благоприятная стратегия природы состоит в том, что с вероятностью $4/9$ лето будет сухим и жарким, а с вероятностью $5/9$ — влажным и холодным.

Подобные стратегии (рассмотрения вариантов прогнозов и распределения ресурсов для обеспечения гарантированного выигрыша) называют хеджированием рисков и широко применяют в страховом и банковском деле.

1.4. Доминирование, подобие, симметрия, равномерность

Теперь рассмотрим некоторые вопросы, касающиеся упрощения решения матричных игр, для этого сформулируем ряд теорем.

Квадратная матрица $A = (a_{ij})$ называется кососимметрической, если $a_{ij} = -a_{ji}$ для всех i, j . Матричная игра называется симметричной, если ее матрица кососимметрическая.

Теорема 1.4. *Цена симметричной игры равна нулю. Если $\vec{p}$ — оптимальная смешанная стратегия для первого игрока, то $\vec{p}$ есть также оптимальная смешанная стратегия второго игрока.*

Часто при решении матричной игры существенно помогает превосходство одной стратегии над другой.

Если для i -й и k -й стратегии первого игрока выполняются соотношения

$$a_{ij} \geq a_{kj}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (1.1)$$

причем хотя бы одно из неравенств (1.1) является строгим, то говорят, что стратегия i превосходит (или доминирует) стратегию k .

Аналогично для второго игрока: стратегия j доминирует стратегию r , если выполняются неравенства

$$a_{ij} \geq a_{ir}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (1.2)$$

причем хотя бы одно из неравенств (1.2) является строгим.

Теорема 1.5. Пусть Γ — матричная игра с матрицей A порядка $m \times n$ и i -я стратегия первого игрока доминирует k -ю стратегию. Пусть A^1 — матрица, полученная из A исключением ее i -й строки, и пусть Γ^1 — матричная игра с матрицей A^1 . Тогда цена игры Γ^1 совпадает с ценой игры Γ . Если $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_m)$ есть оптимальная смешанная стратегия первого игрока в игре Γ^1 , то его смешанная стратегия $\vec{p} = (u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, 0, u_{i+1}, \dots, u_m)$ является оптимальной в игре Γ .

Доминирование стратегий второго игрока также дает возможность сокращения размерности матрицы проигрышей.

Теорема 1.6. Пусть Γ — матричная игра с матрицей A порядка $m \times n$ и j -я чистая стратегия второго игрока доминирует r -ю стратегию. Пусть A^1 — матрица, полученная из A исключением ее r -го столбца, и пусть Γ^1 — матричная игра с матрицей A^1 . Тогда цена игры Γ^1 совпадает с ценой игры Γ . Если $\vec{w} = (w_1, w_2, \dots, w_{r-1}, w_{r+1}, \dots, w_n)$ есть оптимальная смешанная стратегия второго игрока в игре Γ^1 , то его смешанная стратегия $\vec{q} = (w_1, w_2, \dots, w_{r-1}, 0, w_{r+1}, \dots, w_n)$ является оптимальной в игре Γ .

Рассмотрим один класс расширенных матричных игр, решение которых оказывается особенно простым. Матричная игра называется *равномерной*, если:

- 1) сумма элементов каждой строки матрицы равна одному и тому же числу;
- 2) сумма элементов каждого столбца равна одному и тому же числу.

Теорема 1.7. Пусть матричная игра равномерна.

Тогда $\vec{p} = \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m}\right)$, $\vec{q} = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$, $\tilde{a} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m a_{ij}$, где j — любое от 1 до n , образуют ее решение. Также $\tilde{a} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_{ij}$, где i — любое от 1 до m .

С использованием теоремы 1.7 решение равномерной расширенной матричной игры сводится к простым арифметическим действиям.

Пример (игра в разведку). Каждый из игроков отправляет в разведку либо танк, либо автоматчиков, либо саперов. Танк побеждает автоматчиков, автоматчики побеждают саперов, а саперы побеждают танк.

Решение. Обозначим $\delta_1 = \theta_1$ — послать в разведку танк, $\delta_2 = \theta_2$ — автоматчиков, $\delta_3 = \theta_3$ — саперов. Заполним матрицу потерь первого игрока:

	θ_1	θ_2	θ_3
δ_1	0	-1	1
δ_2	1	0	-1
δ_3	-1	1	0

По диагонали матрицы нули, так как в этих ситуациях ни одна из сторон не имеет превосходства.

Сумма элементов каждой строки равна нулю, и сумма элементов каждого столбца равна нулю. Следовательно, игра равномерна, и ее решение $\vec{p} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $\vec{q} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $\tilde{a} = 0$.

В терминах условия стратегия каждого из игроков состоит в следующем: с вероятностями по $1/3$ отправлять в разведку танк, автоматчиков и саперов. При этом средние потери каждого из игроков равны нулю, т. е. игра является справедливой.

1.5. Игры с разделением на равномерные

Более широкий класс матричных игр — *игры, допускающие разделение на равномерные*. Это игры, матрицы которых состоят из блоков, являющихся матрицами равномерных игр:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1N} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{M1} & \dots & A_{MN} \end{pmatrix}.$$

В этом случае найдем цену $\tilde{a}_{ij}$ каждой равномерной расширенной игры с матрицей A_{ij} (в соответствии с теоремой 1.7) и составим матрицу $\tilde{A}$ из цен равномерных игр. Через $\vec{P} = (P_1, \dots, P_M)$ и $\vec{Q} = (Q_1, \dots, Q_N)$ обозначим оптимальные смешанные стратегии игроков в игре с матрицей $\tilde{A}$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.8. Пусть матричная игра с матрицей A допускает разделение на равномерные. Тогда цены игр с матрицами A и $\tilde{A}$ совпадают, и оптимальные стратегии игроков в исходной игре могут быть найдены делением вероятностей P_i (Q_j) на число строк (столбцов) матрицы A_{ij} .

Поясним теорему на следующем примере.

Пример. Каждый из двух игроков голосует за одного из пяти кандидатов. За первых трех кандидатов уже подано по одному голосу. Кандидат побеждает, если он набрал относительное большинство голосов. Первый игрок проигрывает второму игроку 1 рубль, если выборы состоялись, т. е. какой-либо из кандидатов победил.

Решение. Обозначим стратегии $\delta_i = \theta_i$ — голосовать за i -го кандидата, $i = 1, \dots, 5$.

Первый игрок проигрывает в ситуациях, когда оба игрока проголосовали за одного и того же кандидата, а также в ситуациях, когда один из игроков голосовал за одного из первых трех кандидатов, а другой — за одного из последних двух. Получаем следующую матрицу потерь первого игрока (выигрышей второго игрока):

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5
δ_1	1	0	0	1	1
δ_2	0	1	0	1	1
δ_3	0	0	1	1	1
δ_4	1	1	1	1	0
δ_5	1	1	1	0	1

Эта игра не является равномерной, но допускает разделение на равномерные:

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5
δ_1	1	0	0	1	1
δ_2	0	1	0	1	1
δ_3	0	0	1	1	1
—	—	—	—	—	—
δ_4	1	1	1	1	0
δ_5	1	1	1	0	1

Матрицы

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

являются матрицами равномерных игр. Используя теорему 1.7, получаем, что цены этих игр равны $\tilde{a}_{11} = 1/3$, $\tilde{a}_{12} = 1$, $\tilde{a}_{21} = 1$, $\tilde{a}_{22} = 1/2$. Получаем матричную игру (2×2) с матрицей

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Так как верхняя цена простой игры равна 1, а нижняя $1/2$, то нет седловой точки в чистых стратегиях. Поэтому рассмотрим расширенную игру

$$\begin{array}{cc|c} 1/3 & 1 & P_1 \\ 1 & 1/2 & P_2 \\ \hline Q_1 & Q_2 & \end{array}$$

Решая систему уравнений

$$\frac{1}{3}P_1 + P_2 = \tilde{a}, \quad P_1 + \frac{1}{2}P_2 = \tilde{a}, \quad P_1 + P_2 = 1,$$

$$\frac{1}{3}Q_1 + Q_2 = \tilde{a}, \quad Q_1 + \frac{1}{2}Q_2 = \tilde{a}, \quad Q_1 + Q_2 = 1,$$

получаем

$$P_1 = Q_1 = \frac{3}{7}, \quad P_2 = Q_2 = \frac{4}{7}, \quad \tilde{a} = \frac{5}{7}.$$

Вернемся к исходной игре.

$$\begin{array}{cccc|cc} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & & \theta_4 & \theta_5 \\ \delta_1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \delta_2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \delta_3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline - & - & - & - & - & - \\ \delta_4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \delta_5 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{cccc|cc} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & & \theta_4 & \theta_5 \\ \delta_1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \delta_2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \delta_3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \delta_4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \delta_5 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} P_1 = \frac{3}{7} \\ \\ P_2 = \frac{4}{7} \end{array}$$

Получаем $p_1 = p_2 = p_3 = P_1/3 = 1/7$, $p_4 = p_5 = P_2/2 = 2/7$. То же для второго игрока. Формально ответ записывается как

$$\vec{p} = \vec{q} = \left(\frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{2}{7} \right), \quad \tilde{a} = \frac{5}{7}.$$

Проинтерпретируем ответ в терминах условия. Каждый из игроков выбирает кандидата, за которого он будет голосовать, случайным образом: с вероятностями по $1/7$ голосует за каждого из первых трех кандидатов, и с вероятностями по $2/7$ — за каждого из последних двух. Вероятность проигрыша первого игрока равна $5/7$, т. е. его средний проигрыш равен $5/7 \cdot 1 \text{ руб.} \approx 71 \text{ коп.}$

1.6. Задачи для самостоятельного решения

1. Найти верхнюю и нижнюю цену простой матричной игры для игр со следующими матрицами. Если существует решение в чистых стратегиях, найти его.

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 8 \\ 7 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & -4 \\ 8 & 10 & 2 \\ 6 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Рассмотреть следующую игру. Есть два игровых поля. Каждый из двух игроков распределяет 4 свои фишки между этими полями. Если на поле у игрока больше фишек, чем у противника, он выигрывает все фишки противника на этом поле. Найти все седловые точки в чистых стратегиях.

3. Решить расширенные матричные игры: а) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$,
б) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

4. Первый игрок прячет монету либо в правой, либо в левой руке. Второй игрок пытается угадать. Если второй игрок угадывает, что монета в правой руке, то он получает эту монету. Если угадывает, что монета в левой руке, то получает 5 таких же монет. Найти решение расширенной матричной игры и проинтерпретировать его в терминах условия.

5. Двое играют в игру, которая заключается в следующем: каждый из них одновременно показывает от одного до двух пальцев. Если сумма числа пальцев четная, то первый игрок платит количество рублей, равное суммарному числу показанных пальцев, второму игроку. Если сумма нечетная, то второй игрок по тем же правилам платит первому. Составить платежную матрицу: существует ли для данной игры седловая точка? Если седловой точки не существует, найти решение игры в смешанных стратегиях.

6. Решить расширенные матричные игры: а) $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -8 \end{pmatrix}$,
 б) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -6 & 4 \end{pmatrix}$.

7. Пусть матрица проигрышей (в млн руб.) первого игрока имеет вид

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решить матричную игру, перейдя к задаче линейного программирования. Найти оптимальную смешанную стратегию для первого игрока (использовать симплекс-метод).

8. Состояние погоды в летний период времени можно рассматривать как следующие стратегии природы (второго игрока): лето жаркое сухое, лето жаркое влажное, лето теплое влажное, лето теплое сухое, лето прохладное сухое, лето прохладное влажное. Стратегии фермера: выращивает первую культуру, выращивает вторую культуру. Соответствующая платежная матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} -10 & -8 & -6 & -4 & -2 & -3 \\ -1 & -2 & -4 & -3 & -12 & -6 \end{pmatrix}.$$

Существует ли седловая точка? Если нет, решить задачу в смешанных стратегиях.

9. Два игрока играют в игру «камень—ножницы—бумага», которая заключается в следующем: камень выигрывает у ножниц, бумага выигрывает у камня, ножницы выигрывают у бумаги; если выигрывает первый игрок, то второй платит одну единицу, в противном случае первый платит одну единицу второму. Составить платежную матрицу, выяснить, существует ли седловая точка. Если таковой не существует, найти решение игры в смешанных стратегиях.

10. Решить расширенные матричные игры: а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$

б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix},$ в) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$

Глава 2

Линейное программирование

2.1. Задача линейного программирования

Основная задача линейного программирования ставится следующим образом. Имеется ряд переменных

$$x_1, \dots, x_n.$$

Требуется найти такие неотрицательные значения этих переменных, которые бы удовлетворяли системе линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad (2.1)$$

и, кроме того, обращали в минимум функцию, называемую в дальнейшем целевой функцией

$$L = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n. \quad (2.2)$$

Очевидно, случай, когда линейную функцию нужно обратить не в минимум, а в максимум, легко сводится к предыдущему, если изменить знак функции и рассмотреть вместо нее функцию

$$L_1 = -c_1x_1 - c_2x_2 - \dots - c_nx_n.$$

Допустимыми решениями задачи линейного программирования будем называть любую совокупность переменных

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0,$$

удовлетворяющую системе (2.1).

Оптимальным решением будем называть то из допустимых решений, на котором функция (2.2) достигает своего минимума.

Для составления модели экономической задачи линейного программирования, заданной в текстовой форме, следует:

- 1) ввести обозначения для неизвестных величин задачи;
- 2) исследовать и зафиксировать ограничения для них, скажем, неотрицательность;
- 3) составить систему ограничений задачи;
- 4) составить целевую функцию и выявить вид экстремума.

Здесь следует обратить внимание на то, что некоторые ограничения могут иметь противоположные направления или быть равенствами.

Далее мы составим модели для двух задач с экономическим содержанием.

Пример. Для трех видов продукции P_1, P_2, P_3 используется три вида сырья C_1, C_2, C_3 . Предприятие может израсходовать 32 т сырья вида C_1 , не менее 40 т сырья вида C_2 и не более 50 т сырья C_3 . Нормы расхода сырья на единицу продукции того или иного вида приведены в табл. 1. В этой же таблице приведены трудовые и энергетические затраты на производство единицы продукции P_1, P_2, P_3 . Определить

количество продукции видов P_1, P_2, P_3 , которые следует производить при минимальных затратах энергетических и трудовых ресурсов.

Таблица 1.

Сырье	Запасы (т)	Нормы расхода на единицу продукции (т)		
		P_1	P_2	P_3
C_1	32	2	3	0
C_2	40	4	1	2
C_3	50	3	1	3
Расходы (руб.)		4	5	6

Обозначим через x_1, x_2, x_3 количества продукции видов P_1, P_2, P_3 соответственно, которые предполагается производить. Тогда целевую функцию и ограничения задачи можно записать в виде

$$L = 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 32, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 40, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 50, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Пример (задача о рационе питания). Для сохранения здоровья человек должен употреблять в пищу в течение суток определенное количество белков, жиров, углеводов, витаминов, микроэлементов и др.

Пусть имеется n различных продуктов $P_1, P_2, \dots, P_n$ и перечень из m необходимых питательных веществ $S_1, S_2, \dots, S_m$. Обозначим через a_{ij} количество питательного вещества S_i , содержащегося в единице продукта P_j . Требуется так организовать питание, чтобы удовлетворялась суточная потребность в питательных веществах и чтобы стоимость использованных продуктов была минимальной.

Для наглядности данные задачи поместим в табл. 2.

Таблица 2.

Питательные вещества	Виды продукции				Суточная потребность одного человека
	P_1	P_2	...	P_n	
S_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	b_1
S_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	b_2
...	...	...	...	...	...
S_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	b_m
Стоимость единицы продукта	c_1	c_2	...	c_n	

Обозначим через $x_1, x_2, \dots, x_n$ количества единиц продукта вида $P_1, P_2, \dots, P_n$ соответственно, которые предполагается найти. В таком случае целевая функция и ограничения задачи запишутся в виде

$$L = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2; \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m; \\ x_1, \dots, x_n \geq 0. \end{cases}$$

Рассмотрим задачу линейного программирования с двумя переменными

$$L(X) = c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow \text{extr}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq (\geq) b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq (\geq) b_2; \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq (\geq) b_m; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Такая задача может быть решена графически, поскольку легко строить ОДР (область допустимых решений). Она представляет собой многоугольник (ограниченный или нет, либо вовсе пустое множество), стороны которого лежат на прямых, получаемых из системы ограничений

задачи

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Алгоритм графического решения задачи линейного программирования состоит в выполнении следующих действий.

- 1) Построить ОДР.
- 2) Построить вектор нормали $n = (c_1, c_2)$ целевой функции (он указывает направление возрастания целевой функции).
- 3) Построить нижнюю и верхнюю опорные прямые p и q , т. е. крайние линии уровня целевой функции, имеющие общие точки с ОДР.
- 4) Определить координаты экстремальных точек ($P = p \cap \text{ОДР}$, $Q = q \cap \text{ОДР}$) и вычислить значение целевой функции на них.

Примечания.

- 1) Если ОДР — пустое множество, то задача не имеет решения ввиду несовместности системы ограничений.
- 2) Если ОДР не ограничена в направлении вектора $n = (c_1, c_2)$, то сама целевая функция не ограничена сверху в этой области, и принимаем $L_{\max}(X) = +\infty$. Если целевая функция не ограничена в направлении, противоположном n , то принимаем $L_{\min}(X) = -\infty$.

2.2. Симплекс-метод решения задачи линейного программирования

Пусть в задаче линейного программирования имеется n переменных и m независимых линейных ограничений, заданных в форме уравнений. Известно, что оптимальное решение (если оно существует) достигается в одной из опорных точек, где, по крайней мере,

$k = n - m$ переменных равны 0. Выберем какие-то k переменных в качестве свободных и выразим через них остальные m базисных переменных. Пусть, например, в качестве свободных переменных выбраны $x_1, \dots, x_k$, а остальные m выражены через них:

$$\begin{cases} x_{k+1} = a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + \dots + a_{k+1,k}x_k + b_{k+1}; \\ x_{k+2} = a_{k+2,1}x_1 + a_{k+2,2}x_2 + \dots + a_{k+2,k}x_k + b_{k+2}; \\ \dots \\ x_n = a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,k}x_k + b_n. \end{cases} \quad (2.3)$$

Предположим, что все свободные переменные $x_1, \dots, x_k$ равны 0. При этом мы получим

$$\begin{cases} x_{k+1} = b_{k+1}; \\ x_{k+2} = b_{k+2}; \\ \dots \\ x_n = b_n. \end{cases}$$

Это решение может быть допустимым или недопустимым. Оно допустимо, если все свободные члены неотрицательны. Предположим, это условие выполнено. Тогда мы получим опорное решение. Но является ли оно оптимальным? Чтобы проверить это, выразим целевую функцию L через свободные переменные $x_1, \dots, x_k$:

$$L = g_0 + g_1x_1 + g_2x_2 + \dots + g_kx_k. \quad (2.4)$$

Очевидно, что при $x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0$, $L = g_0$. Проверим, может ли быть улучшено решение, т. е. получено уменьшение функции L с увеличением каких-нибудь из переменных $x_1, \dots, x_k$ (уменьшить их мы не можем, так как все они равны 0, а отрицательные значения переменных недопустимы). Если все коэффициенты $g_1, \dots, g_k$ в (2.4) положительны, то увеличение каких-либо из переменных $x_1, \dots, x_k$ не может уменьшить L , следовательно, найденное опорное решение является оптимальным. Если же среди коэффициентов $g_1, \dots, g_k$ есть отрицательные, то, увеличивая некоторые из переменных $x_1, \dots, x_k$ (те, коэффициенты при которых отрицательны), мы можем улучшить решение. Пусть, например, коэффициент g_1 в (2.4) отрицателен. Значит, есть смысл увеличить x_1 , т. е. перейти от данного опорного решения к другому, где переменная

x_1 не равна 0, а вместо нее равна нулю какая-то другая. Однако увеличивать x_1 следует с осторожностью, так чтобы не стали отрицательными другие переменные $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$, выраженные через свободные переменные, в частности через x_1 , формулами (2.3).

Например, если коэффициент при x_1 в соответствующем x_j уравнении (2.3) отрицателен, то увеличение x_1 может сделать x_j отрицательным. Наоборот, если среди уравнений (2.3) нет уравнения с отрицательным коэффициентом при x_1 , то величину x_1 можно увеличивать беспредельно, а, значит, функция L не ограничена снизу (в этом случае полагают, что минимальное значение L равно $-\infty$) и оптимального решения задачи линейного программирования не существует.

Допустим, что это не так и среди уравнений (2.3) есть такие, в которых коэффициент при x_1 отрицателен. Для переменных, стоящих в левых частях этих уравнений, увеличение x_1 опасно — оно может сделать их неотрицательными.

Возьмем одну из таких переменных x_l и посмотрим, до какой степени можно увеличить x_1 , пока переменная x_l не станет отрицательной. Выпишем l -е уравнение из системы (2.3)

$$x_l = a_{l,1}x_1 + a_{l,2}x_2 + \dots + a_{l,k}x_k + b_l.$$

Здесь свободный член $b_l \geq 0$, а коэффициент $a_{l,1}$ — отрицателен, отсюда видно, что если мы оставим $x_2 = x_3 = \dots = x_k = 0$, то x_1 можно увеличивать только до значения, равного $-\frac{b_l}{a_{l,1}}$, а при дальнейшем увеличении x_1 переменная x_l станет отрицательной.

Выберем ту из переменных $x_{k+1}, \dots, x_n$, которая раньше всех обратится в 0 при увеличении x_1 , т.е. ту, для которой величина $-\frac{b_l}{a_{l,1}}$ наименьшая. Пусть это будет x_r , тогда имеет смысл разрешить систему уравнений (2.3) относительно других базисных переменных, исключая из числа свободных x_1 и переводя вместо нее в группу свободных переменных x_r . Действительно, мы хотим перейти от опорного решения, задаваемого равенствами $x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0$, к опорному решению, в котором уже $x_1 \neq 0$, а $x_2 = \dots = x_k = x_r = 0$. Первое опорное решение мы получили, положив равными нулю все прежние свободные

переменные $x_1, x_2, \dots, x_k$, второе мы получим, если обратим в нуль все новые свободные переменные $x_2, x_3, \dots, x_k, x_r$. Базисными переменными при этом будут $x_1, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{r-1}, x_{r+1}, \dots, x_n$.

Предположим, что уравнения типа (2.3) для нового набора базисных и свободных переменных составлены. Тогда можно выразить через новые свободные переменные и функцию L . Если все коэффициенты при переменных в этой формуле неотрицательны, то мы нашли оптимальное решение, оно получится, если все свободные переменные положить равными нулю. Если среди коэффициентов при переменных есть отрицательные, то процедура улучшения решения продолжается: система вновь разрешается относительно других базисных переменных, и так далее, пока не будет найдено оптимальное решение, дающее минимальное значение для функции L .

2.3. Решение расширенной матричной игры

Далее мы рассмотрим сведение матричных игр к задачам линейного программирования. Будем предполагать, что все элементы матрицы строго положительны, это нисколько не нарушает общности, так как согласно теореме 1.2 всегда можно подобрать такое c , прибавление которого ко всем элементам матрицы проигрышей дает матрицу с положительными элементами. При этом оптимальные смешанные стратегии игроков не изменяются.

Итак, пусть дана матричная игра с матрицей $A = (a_{ij})$ порядка $m \times n$. Согласно теореме 1.1, оптимальные смешанные стратегии $\vec{p} = (p_1, \dots, p_m)$ и $\vec{q} = (q_1, \dots, q_n)$ соответственно первого и второго игрока и цена игры $\tilde{a}$ должны удовлетворять соотношениям:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m p_i = 1, & p_i \geq 0, & i = 1, 2, \dots, m, \\ \sum_{i=1}^m a_{ij} p_i \leq \tilde{a}, & & j = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \quad (2.5)$$

и, кроме того,

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n q_j = 1, & q_j \geq 0, & j = 1, 2, \dots, n, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} q_j \geq \tilde{a}, & & i = 1, 2, \dots, m. \end{cases} \quad (2.6)$$

Разделим все уравнения и неравенства в (2.5) и (2.6) на $\tilde{a}$ (это можно сделать, так как предполагается, что $\tilde{a} > 0$) и введем обозначения:

$$\frac{p_i}{\tilde{a}} = x_i, \quad i = 1, \dots, m; \quad \frac{q_j}{\tilde{a}} = y_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

тогда получим

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m p_i = \frac{1}{\tilde{a}}, & p_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ \sum_{i=1}^m a_{ij} p_i \leq 1, & j = 1, 2, \dots, n, \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n q_j = \frac{1}{\tilde{a}}, & q_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} q_j \geq 1, & i = 1, 2, \dots, m. \end{cases}$$

Поскольку первый игрок стремится найти такие значения p_i , а следовательно, и x_i , чтобы цена игры была минимальной, решение первой задачи сводится к нахождению таких неотрицательных x_i , $i = 1, \dots, m$, при которых

$$\sum_{i=1}^m x_i \rightarrow \max, \quad \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i \leq 1.$$

В свою очередь второй игрок стремится найти такие значения q_j , следовательно, и y_j , чтобы цена игры была максимальной, поэтому решение второй задачи сводится к нахождению таких неотрицательных y_j , $j = 1, \dots, n$, при которых

$$\sum_{j=1}^n y_j \rightarrow \min, \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \geq 1.$$

В итоге мы свели решения матричной игры к двум задачам линейного программирования, которые можно решить, скажем, используя симплекс-метод.

2.4. Задачи для самостоятельного решения

11. Найти максимальное значение линейной функции $L(X) = x_1 + x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 1, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

12. Найти максимальное значение линейной функции $L(X) = x_1 + x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 1, \\ 3x_1 + x_2 \leq 1, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

13. Найти минимальное значение линейной функции $L(X) = x_1 + 2x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 3, \\ 7x_1 + 5x_2 \geq 35, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

14. $L(X) = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 1, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 1, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

15. Двум погрузчикам разной мощности за 24 часа нужно погрузить на первой площадке 230 т, на второй - 68 т. Первый погрузчик на 1-ой площадке может погрузить 10 т в час, а на 2-ой - 12 т в час. Второй погрузчик на каждой площадке может погрузить по 13 т в час. Стоимость работ, связанных с погрузкой 1 т первым погрузчиком на первой площадке 8 руб., на второй - 7 руб., вторым погрузчиком на первой площадке - 12 руб., на второй - 13 руб. Нужно найти, какой объем работ должен выполнить каждый погрузчик на каждой площадке, чтобы стоимость всех работ по погрузке была минимальной.

16. При составлении суточного рациона кормления скота используют сено и силос. Рацион должен обладать определенной питательностью и содержать белка не менее 1 кг, кальция не менее 100 г и фосфора не менее 80 г. При этом количество питательного рациона должно быть не менее 60 кг. Содержание питательных компонентов в 1 кг сена и силоса приведено в следующей таблице. В ней указана также стоимость единицы того или иного корма. Требуется определить оптимальный суточный рацион кормления животных, обеспечивающий минимальную стоимость корма.

Название ингредиента	Норма (г)	Содержание ингредиента в 1 кг корма (г/кг)	
		Сено	Силос
Белок	1000	40	10
Кальций	100	1,25	2,5
Фосфор	80	2	1
Стоимость ед. корма (ден. ед.)		12	8

17. Пусть матрица проигрышей (в млн руб.) первого игрока имеет вид

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решить матричную игру, перейдя к задаче линейного программирования. Найти оптимальную смешанную стратегию для первого игрока (использовать симплекс-метод).

18. Пусть матрица проигрышей (в млн руб.) первого игрока имеет вид

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решить матричную игру, перейдя к задаче линейного программирования. Найти оптимальную смешанную стратегию для второго игрока (использовать симплекс-метод).

19. Пусть матрица проигрышей первого игрока имеет вид

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Решить соответствующую матричную игру. Чему равно математическое ожидание проигрыша первого игрока, если и первый игрок, и второй игрок используют свои оптимальные стратегии?

20. Платежная матрица в некоторой игре имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Пусть первый игрок придерживается следующей смешанной стратегии: $(6/13, 3/13, 4/13)$, а второй $(6/13, 4/13, 3/13)$. Вычислить математическое ожидание проигрыша первого игрока.

21. Найти решение матричных игр:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 8 \end{pmatrix}, \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 6 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

22. Проверить, являются ли данные смешанные стратегии

$$x = (1/6, 1/6, 1/6), \quad y = (1/2, 0, 0, 1/2), \quad \tilde{a} = 0, 4$$

решением следующей матричной игры:

$$\begin{pmatrix} 0,8 & 0 & 0 & 0 \\ 0,4 & 0,6 & 0,6 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

23. Пусть матрица проигрышей первого игрока имеет вид

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Предполагая, что в теореме 1.1 в соответствующих нестрогих неравенствах выполняются равенства, составить и решить систему линейных уравнений. Будут ли полученные решения оптимальными стратегиями первого и второго игрока? В чем причина невозможности в данном случае найти оптимальные стратегии таким образом?

24. Перейти от следующей задачи линейного программирования:
 $L(X) = x_1 + x_2 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 \geq 1, \\ x_1 + 11x_2 \geq 1, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

к матричной игре. Решить матричную игру любым известным вам способом.

25. Перейти от следующей задачи линейного программирования:
 $L(X) = x_1 + x_2 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 \leq 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 1, \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 \leq 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 6x_4 \leq 1, \\ x_1 \geq 0, \dots, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

к матричной игре. Можно ли упростить матричную игру, используя понятие доминирования стратегий? Решить матричную игру любым известным вам способом.

Глава 3

Позиционные игры

3.1. Понятие позиционной игры

Позиционной игрой называют игру, в которой игроки делают ходы по очереди. Каждый ход состоит в выборе одной из альтернатив. Игроков может быть любое конечное число. Возможен случайный ход, в этом случае говорят, что это ход игрока с номером 0. При случайном ходе известны вероятности, с которыми выбирается каждая альтернатива.

Позиционную игру удобно изображать в виде дерева. На рис. 3 показано дерево игры, в которой 1-й и 3-й ход делает первый игрок, а 2-й ход — второй игрок. Игра заканчивается в одной из вершин дерева $t_1, \dots, t_8$, после чего происходит распределение выигрышей. Узлы одного игрока могут объединяться в информационные множества. Каждое информационное множество состоит из узлов, неразличимых для игрока. На примере (информационные множества показаны тонкими линиями) второй игрок не знает, что выбрал первый игрок, а первый игрок на 3-м ходе не знает выбора второго игрока и забыл, что он сам выбрал на 1-м ходе.

Упражнение Для дерева игры с рис. 3 нарисовать информационные множества, если:

1) второй игрок не знает, что выбрал первый игрок, а первый игрок на 3-м ходе не знает выбора второго игрока, но помнит свой собственный выбор;

2) второй игрок не знает, что выбрал первый игрок, а первый игрок на 3-м ходе знает выбор второго игрока, но забыл свой собственный выбор;

3) второй игрок не знает, что выбрал первый игрок, а первый игрок на 3-м ходе знает выбор второго игрока и помнит свой собственный выбор;

4)-6) то же, что в 1)-3), но второй игрок знает выбор первого.

Чистая стратегия в позиционной игре — это выбор альтернативы на каждом из информационных множеств. Партия игры — путь от корня дерева к вершине.

Игра называется игрой с полной информацией, если каждый из игроков помнит результаты всех предыдущих ходов (в том числе и случайных ходов). В этой игре каждое информационное множество состоит из одного узла.

Например, крестики-нолики, шашки, шахматы — игры с полной информацией, а карточные игры, каркассон, морской бой, компьютерные стратегические игры — с неполной информацией.

Теорема (Кун) Игра с полной информацией всегда имеет решение (седловую точку) в чистых стратегиях.

Таким образом, любая игра с полной информацией либо несправедлива (при правильной игре всегда выигрывает один и тот же игрок), либо бесплодна (при правильной игре заканчивается вничью).

Позиционная игра называется игрой с нулевой суммой, если в каждой вершине суммарные потери игроков равны нулю.

Теорема (об играх двух лиц с нулевой суммой) Позиционная игра двух лиц с нулевой суммой сводится к матричной игре.

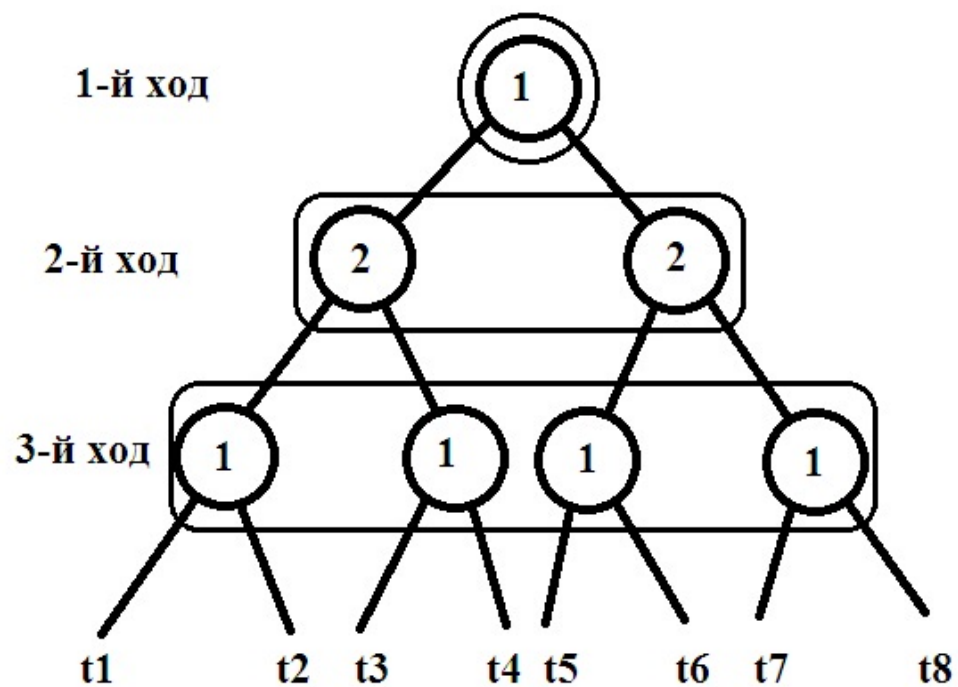


Рис. 3. Пример позиционной игры.

3.2. Байесовские стратегии

Очень часто противник не старается выбрать самую выгодную для себя и невыгодную для нас стратегию (например, в случае, когда наш противник — природа). Итак, рассмотрим матричную игру с платежной матрицей $A(n \times m)$. Предположим, что нам дополнительно известно, с какой вероятностью второй игрок применяет свою j -ю стратегию, пусть эта вероятность равна q_j , $j = 1, \dots, m$, $\sum_{j=1}^m q_j = 1$. Такое распределение на множестве стратегий второго игрока называется априорным. Постановку задачи, в которой дополнительно присутствуют априорные распределения, называют байесовской.

В байесовской постановке, если первый игрок следует своей i -й чистой стратегии, можно вычислить его средние проигрыши a_i по формуле

$$a = Aq^T, \quad a = (a_1, \dots, a_n),$$

где $q = (q_1, \dots, q_m)$.

Будем называть i_0 -ю стратегию первого игрока байесовской оптимальной, если для нее средние проигрыши a_i минимальны:

$$a_{i_0} = \min_{1 \leq i \leq n} a_i.$$

3.3. Статистические игры

Статистические игры мы рассмотрим, используя следующий пример. Первый игрок (покупатель) должен приобрести либо товар фирмы А, либо товар фирмы В. Он считает, что у какой-то из этих фирм доля бракованного товара больше, чем у другой. Он предположил, что у одной из фирм доля брака в ее продукции 10 %, а у другой 0 %. Свои потери при приобретении бракованного товара он оценивает в 1000 рублей. Покупатель опрашивает двух своих знакомых, независимо друг от друга купивших товар фирмы А. В зависимости от их ответов он принимает решение о покупке.

Обозначим стратегии первого игрока (покупателя):

δ_1 — покупать товар фирмы А;

δ_2 — покупать товар фирмы В.

Обозначим стратегии природы (второго игрока):

θ_1 — брак в продукции фирмы А составляет 0 %, а в продукции фирмы В 10 %;

θ_2 — брак в продукции фирмы А составляет 10 %, а в продукции фирмы В 0 %.

Матрица средних потерь первого игрока:

	θ_1	θ_2
δ_1	$1000 \cdot 0 = 0$	$1000 \cdot 0,1 = 100$
δ_2	$1000 \cdot 0,1 = 100$	$1000 \cdot 0 = 0$

Обозначим τ_k — число бракованных товаров среди двух приобретенных знакомыми, $k = 0; 1; 2$.

Матрица условных вероятностей имеет вид:

θ	$\mathbf{P}\{\tau = \tau_0 \theta = \theta_j\}$	$\mathbf{P}\{\tau = \tau_1 \theta = \theta_j\}$	$\mathbf{P}\{\tau = \tau_2 \theta = \theta_j\}$
θ_1	1	0	0
θ_2	$0,9^2 = 0,81$	$2 \cdot 0,9 \cdot 0,1 = 0,18$	$0,1^2 = 0,01$

Стратегии первого игрока в статистической игре:

$$\delta_{ijk} = \begin{cases} \delta_i & \text{если } \tau = \tau_0; \\ \delta_j & \text{если } \tau = \tau_1; \\ \delta_k & \text{если } \tau = \tau_2. \end{cases}$$

Здесь $i, j, k = 1; 2$.

Статистическая игра сводится к матричной игре с $2^3 = 8$ стратегиями первого игрока. Приведем примеры подсчета средних потерь:

$$\tilde{a}(\delta_{112}, \theta_1) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 100 = 0;$$

$$\tilde{a}(\delta_{112}, \theta_2) = 0,81 \cdot 100 + 0,18 \cdot 100 + 0,01 \cdot 0 = 99.$$

Матрица средних потерь первого игрока в статистической игре имеет вид:

	θ_1	θ_2
δ_{111}	0	100
δ_{112}	0	99
δ_{121}	0	82
δ_{122}	0	81
δ_{211}	100	19
δ_{212}	100	18
δ_{221}	100	1
δ_{222}	100	0,

т. е. фактически статистическая игра свелась к матричной игре порядка 8×2 . Легко проверяется, что приведенная матрица потерь не имеет седловой точки, поэтому будем искать решение матричной игры в смешанных стратегиях. Обратим внимание, что такой подход к поиску оптимальных стратегий в статистических играх называется *минимаксным*.

Используя понятие доминирования стратегий (см. теорему 1.5), мы можем упростить матрицу средних потерь первого игрока:

	θ_1	θ_2
δ_{122}	0	81
δ_{222}	100	0.

В итоге, имеем матричную игру порядка 2×2 . Используя теорему 1.3, получаем, что стратегию δ_{122} следует применять с вероятностью $100/181$, а стратегию δ_{222} с вероятностью $81/181$, остальные стратегии применяются с нулевой вероятностью.

Обратимся теперь к байесовской постановке задачи. В этом случае дополнительно известно априорное распределение

$$q_1 = \mathbf{P}(\theta = \theta_1), \quad q_2 = \mathbf{P}(\theta = \theta_2).$$

Иными словами, нам заранее известно, что вероятность события {брак в продукции фирмы А составляет 0 %, а в продукции фирмы В 10 %} равна q_1 , и вероятность события {брак в продукции фирмы А составляет 10 %, а в продукции фирмы В 0 %} равна q_2 . Далее, используя

матрицу средних потерь первого игрока, можно определить байесовскую оптимальную стратегию (см. подраздел 2.2). Пусть, например, $q_1 = 1/100$ и $q_2 = 99/100$, в этом случае стратегия δ_{222} является оптимальной в байесовском смысле, поскольку именно для этой стратегии соответствующие средние проигрыши минимальны (см. подраздел 2.2). Средний проигрыш первого игрока равен в данном случае $100 \cdot 1/100 + 0 \cdot 99/100 = 1$.

3.4. Биматричные игры

Нередко бывает так, что выигрыш одного игрока не равен проигрышу другого, т. е. оба игрока могут уменьшить свои проигрыши (увеличить выигрыши), выбрав подходящие стратегии. Такое положение дел формализуется как биматричная игра: у каждого игрока своя матрица потерь. Ситуацией в биматричной игре называется пара чистых стратегий. Ситуация называется *равновесием по Нэшу*, если для каждого игрока отклонение от соответствующей стратегии не приводит к уменьшению проигрыша. Ситуация называется *оптимальной по Парето*, если нет другой ситуации, которая была бы более выгодной для одного игроков и не менее выгодной для другого.

Равновесием по Штакельбергу с лидерством первого игрока называется ситуация, определяемая следующим образом. Первый игрок выбирает свою чистую стратегию и объявляет об этом второму игроку, и второй игрок выбирает свою чистую стратегию на основании этой информации так, чтобы минимизировать свой проигрыш. Таким образом, выбор второго игрока известен первому игроку, и первый игрок выбирает свою чистую стратегию так, чтобы минимизировать свой проигрыш. Аналогично определяется равновесие по Штакельбергу с лидерством второго игрока.

Пример (дилемма узника). Два бандита арестованы и находятся в тюрьме. Каждый из бандитов может либо сознаться в совершении преступления, либо молчать. Если оба бандита сознаются, то потери каждого равны 8 (годам тюрьмы). Если один сознается, а другой молчит, то тот, кто сознается, выходит на свободу — его потери равны

нулю, а потери другого бандита равны 10. Если оба бандита молчат, то потери каждого равны 2.

Равновесием по Нэшу в этой игре является ситуация, когда потери каждого равны 8. Но это единственная ситуация, не оптимальная по Парето — существует ситуация, в которой потери каждого из игроков меньше. Рассмотрение равновесия по Штакельбергу с лидерством любого из игроков приводит также к ситуации, когда оба бандита соглашаются, и потери каждого равны 8.

Выйти из этой ситуации они могут за счет применения метаигр. В первой метаигре стратегии второго игрока являются функциями от стратегий первого игрока. Во второй метаигре стратегии первого игрока являются функциями от стратегий, используемых вторым игроком в первой метаигре. Согласно теореме о метаиграх, во второй метаигре всегда существует ситуация, равновесная по Нэшу и оптимальная по Парето. В рассматриваемом примере одна из таких ситуаций состоит в следующем. Второй игрок сообщает первому игроку, что поступит так же, как он: будет сознаваться, если первый сознается, и молчать, если первый будет молчать. Первый игрок в ответ на это объявляет свою стратегию: он будет молчать, если второй игрок будет следовать объявленной выше стратегии, и сознаваться в случае любой другой стратегии второго игрока. В этой ситуации второй метаигры оба игрока будут молчать, и потери каждого составят 2.

Отметим, что использование метаигр предполагает общение между игроками, и стабильность возникает на основе угроз.

3.5. Задачи для самостоятельного решения

26. В колоде 4 карты: тройка, семерка, дама, туз. Туз старше дамы, дама старше семерки, а семерка старше тройки. Карты тасуются, затем каждый из игроков получает по одной карте. Первый игрок либо отказывается от игры, выплачивая второму игроку 1 фишку, либо

соглашается на игру. Если первый игрок согласился на игру, то второй игрок должен принять решение: либо отказаться от игры, выплатив первому игроку 1 фишку, либо согласиться на игру. Если оба игрока согласились играть, то выигрывает тот, чья карта старше. Выигравший получает от проигравшего 2 фишки. Формализовать условие как матричную игру и найти ее решение.

27. Молодой бизнесмен планирует взять кредит в банке на сумму пять тысяч долларов. Если его дела пойдут успешно, он обещает через три месяца вернуть банку взятые деньги плюс десять процентов; в противном случае он не сможет вернуть эти деньги. Как мала должна быть вероятность неудачи бизнесмена, чтобы банку выгодно было выделить кредит? (*Указание:* в задаче используются байесовские стратегии).

28. Пусть некий человек имеет миллион рублей; он может хранить их дома либо поместить в банк под десять процентов годовых. Банк в течение года может работать нормально, а может и разориться. Насколько мала должна быть вероятность разорения банка, чтобы было выгодно хранить деньги именно там? Что будет, если человек выберет минимаксный подход для решения проблемы выбора правильной стратегии хранения денег?

29. Мистер Нельсон, выходя из дома, решает, брать ему зонт или нет. Если он не возьмет зонт, а дождь будет, его потери равны 5 (единиц комфорта). Если не возьмет зонт, а дождя не будет, то потери равны 0. В случае, если он возьмет зонт, его потери равны 1 при дожде и 2 при отсутствии дождя. Перед выходом мистер Нельсон смотрит на барометр, который может показывать либо «ясно», либо «пасмурно». Мистер Нельсон заметил, что в случае, когда идет дождь, барометр показывает «пасмурно» с вероятностью 0,6, а в случае, когда нет дождя — с вероятностью 0,2. Формализовать условие как статистическую игру. Найти минимаксную стратегию первого игрока. Найти байесовскую стратегию в предположении, что вероятность дождя 0,3.

30. Первый игрок (покупатель) задумывается о приобретении товара некой китайской фирмы. Известно, что доля брака в продукции этой фирмы составляет либо 5 %, либо 20 %. Свои потери при приобретении бракованного товара он оценивает в 1000 рублей, выигрыш же

от приобретения качественного товара этой фирмы оценивается в 100 рублей. Покупатель опрашивает двух своих знакомых, которые независимо друг от друга купили товар этой фирмы. В зависимости от их ответов он принимает решение о покупке. Составить модель статистической игры и привести ее решение для минимаксного подхода. Найти решение статистической игры для байесовского подхода, если известно, что с вероятностью 0,01 доля брака фирмы составляет 5 % и соответственно с вероятностью в 0,99 доля брака составляет 20 %.

31. Первый игрок (покупатель) должен приобрести либо товар фирмы А, либо товар фирмы В. Он считает, что у какой-то из этих фирм доля бракованного товара больше, чем у другой. Он предположил, что у одной из фирм доля брака в ее продукции 10 %, а у другой 5 %. Свои потери при приобретении бракованного товара он оценивает в 1000 рублей, выигрыш же от приобретения качественного товара фирмы А составляет 200 рублей, соответственно качественного товара фирмы В — 100 рублей. Покупатель опрашивает двух своих знакомых, один из которых купил товар фирмы А, а другой, независимо от первого, товар фирмы В. В зависимости от их ответов он принимает решение о покупке. Составить модель статистической игры и привести ее решение для минимаксного подхода.

32. Первый игрок (покупатель) должен приобрести либо товар фирмы А, либо товар фирмы В. Он считает, что у какой-то из этих фирм доля бракованного товара больше, чем у другой. Он предположил, что у одной из фирм доля брака в ее продукции 15 %, а у другой 5 %. Свои потери при приобретении бракованного товара он оценивает в 1000 рублей, выигрыш же от приобретения качественного товара фирмы А составляет 400 рублей, соответственно качественного товара фирмы В — 100 рублей. Покупатель опрашивает двух своих знакомых, каждый из которых купил независимо от другого товар фирмы А, кроме того, он опрашивает третьего своего знакомого, который покупал товар позже предыдущих двух покупателей, ориентируясь на их мнение следующим образом: если каждый из них купил качественный товар, то он покупает также товар фирмы А, если каждый из них купил бракованный товар, то он покупает товар фирмы В, если же только один из них купил бракованный товар, то он подбрасывает монетку и,

если выпадает герб, он покупает товар фирмы А, если решка — товар фирмы В. В зависимости от их ответов первый игрок принимает решение о покупке. Составить модель статистической игры и привести ее решение для минимаксного подхода.

33. Первый игрок (покупатель) должен приобрести либо товар фирмы А, либо товар фирмы В. Он считает, что у какой-то из этих фирм доля бракованного товара больше, чем у другой. Он предположил, что у одной из фирм доля брака в ее продукции 10 %, а у другой 5 %. Свои потери при приобретении бракованного товара он оценивает в 1000 рублей, выигрыш же от приобретения качественного товара составляет 200 рублей. Покупатель опрашивает одного своего знакомого, который совершенно не помнит, покупал ли он товар фирмы А или товар фирмы В, но помнит, что для выбора фирмы он решил подбросить монету и в случае выпадения герба выбрать фирму А, в случае выпадения решки — фирму В. В зависимости от его ответа о качестве приобретенного продукта первый игрок принимает решение о покупке. Составить модель статистической игры и привести ее решение для минимаксного подхода.

34. Первый игрок (коммерческий банк) должен сделать выбор между кредитованием авиапредприятия и агропромпредприятия. По разным сведениям у одного из этих предприятий вероятность банкротства составляет 5 %, а у другого 10 %. Свои потери при банкротстве предприятия банк оценивает в 100 млн руб., прибыль же от кредитования составит 30 млн руб. Руководство банка решило посоветоваться с другим коммерческим банком, один раз уже осуществлявшим кредитование авиапредприятия. В зависимости от ответа другого банка первый игрок принимает решение о кредитовании. Составить модель статистической игры и привести ее решение для минимаксного подхода.

35. Игра «семейный спор». Муж и жена решают, куда пойти — в театр или на футбол. Если они пойдут в театр, потери мужа равны 1, потери жены равны 0. Если они пойдут на футбол, потери мужа равны 0, потери жены равны 1. Если им не удастся договориться, то потери каждого равны 2. Формализовать условие как биматричную игру. Найти ситуации равновесия по Нэшу, оптимальности по Парето,

равновесия по Штакельбергу с лидерством мужа; жены.

36. Игра «перекресток». Два водителя с разных сторон подъезжают к перекрестку. Очередность проезда правилами не оговаривается. Если один водитель пропускает другого, то его потери равны 1, потери другого 0. Если если оба выезжают на перекресток или оба пропускают, потери каждого равны 2. Формализовать условие как биматричную игру. Найти, на какую из игр она больше похожа: на игру «дилемма узника» или на игру «семейный спор».

37. Игра «дистрибьютор». Продавец может предложить товар либо по высокой цене, либо по низкой цене. Покупатель может либо соглашаться на высокую цену, либо не соглашаться. Если продавец предложил высокую цену, а покупатель согласился на высокую цену, потери продавца равны 0, а покупателя 2 (млн руб.). Если продавец предложил низкую цену, а покупатель согласился на низкую цену, потери продавца равны 2, а покупателя 0. Если продавец согласен продавать по низкой цене, а покупатель согласен покупать по высокой, то они договариваются о том, что потери каждого равны 1. Если продавец предложил высокую цену, а покупатель низкую, то сделка не состоялась, и потери каждого равны 2. Формализовать условие задачи как биматричную игру. Найти ситуации равновесия по Нэшу и ситуации, оптимальные по Парето. Найти ситуации равновесия по Штакельбергу с лидерством продавца; с лидерством покупателя. Рассмотреть первую метаигру и вторую метаигру. Найти в этих метаиграх ситуации равновесия по Нэшу и ситуации, оптимальные по Парето.

Глава 4

Индивидуальные задания

Вариант 1

1. Найти верхнюю и нижнюю цену игры с матрицей потерь первого игрока $\begin{pmatrix} 5 & 9 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 0 & 6 \\ 6 & 0 & 7 & 9 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Найти седловые точки, если они существуют.

2. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Две фирмы проводят рекламные акции. Первая выбирает для проведения акций два из трех праздничных дней, вторая — один из трех дней. Фирма выигрывает, если в данный день проходит только ее рекламная акция. Выигрыш равен одному очку для первых двух праздничных дней и двум очкам для последнего.

Решить матричные игры со следующими матрицами потерь первого игрока.

3. $\begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 6 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 9 & 2 & 0 & 7 \\ 8 & -2 & -8 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 6 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$$5. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

На солдата движется шеренга из 3 неприятельских танков. Он может сделать 2 выстрела. Он победит, если поразит командирский танк. Центральный танк в шеренге он поражает с вероятностью 1, остальные — с вероятностями по 0,2.

7. Найти байесовскую стратегию первого игрока в играх с матрицами задач 3–4 в предположении, что второй игрок выбирает каждую последующую стратегию с вероятностью вдвое большей, чем предыдущую.

8. Найти минимаксную и байесовскую (с равными вероятностями применения стратегий вторым игроком) стратегии первого игрока в статистической игре с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 9 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Здесь δ_1 — купить пакет акций, δ_2 — не покупать пакет акций, θ_1 — нефть подорожает, θ_2 — нефть подешевеет, τ_1 — биржевые индексы растут, τ_2 — биржевые индексы падают. Элементы матрицы A — потери первого игрока в тысячах рублей.

Вариант 2

1. Найти верхнюю и нижнюю цену игры с матрицей потерь первого игрока

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & 4 \\ 6 & 5 & 6 & 2 \\ 7 & 4 & 6 & 3 \\ 8 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \text{ Найти седловые точки, если они существуют.}$$

2. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Каждая из двух конкурирующих фирм выбирает способы рекламы из списка: телевидение, радио, листовки, плакаты. Эффективность рекламы этими способами соотносится как 4 : 2 : 2 : 1. Первая фирма выбирает два способа рекламы, а вторая — три способа рекламы. Фирма получает соответствующее число очков, если ее реклама распространяется каким-либо способом, а реклама конкурента нет.

Решить матричные игры со следующими матрицами потерь первого игрока.

3. $\begin{pmatrix} -5 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$

4. $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & -1 \\ 5 & 4 & -3 & 1 \\ 7 & 7 & 7 & 7 \\ 2 & 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$

5. $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 0 \\ 7 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 6 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$

6. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Два друга решили ехать поездом. В нужном направлении идут 4 поезда, на один из них могут напасть бандиты. Друзья считают, что вероятность погибнуть от рук бандитов в 1,5 раза выше для того, кто едет в одиночку.

7. Найти байесовскую стратегию первого игрока в играх с матрицами задач 3–4 в предположении, что второй игрок выбирает каждую последующую стратегию с вероятностью вдвое большей, чем предыдущую.

8. Найти минимаксную и байесовскую (с равными вероятностями применения стратегий вторым игроком) стратегии первого игрока в статистической игре с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Здесь δ_1 — купить пакет акций, δ_2 — не покупать пакет акций, θ_1 — нефть подорожает, θ_2 — нефть подешевеет, τ_1 — биржевые индексы растут, τ_2 — биржевые индексы падают. Элементы матрицы A — потери первого игрока в тысячах рублей.

Вариант 3

1. Найти верхнюю и нижнюю цену игры с матрицей потерь первого игрока $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 & 3 \\ 5 & 8 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Найти седловые точки, если они существуют.

2. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Два телеканала борются за зрительскую аудиторию. У каждого есть три рейтинговые передачи, каждую из которых нужно разместить на одну из пяти позиций (три дневные и две вечерние) в сетке вещания. Телеканал получает прибыль на позиции в сетке вещания, если в этот момент транслируется только его рейтинговая передача. Прибыль равна одному очку для дневных передач и двум очкам для вечерних.

Решить матричные игры со следующими матрицами потерь первого игрока.

3. $\begin{pmatrix} 2 & -7 & 0 \\ 0 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$

$$4. \begin{pmatrix} 4 & 7 & -6 & 0 \\ 3 & 0 & 8 & 0 \\ -5 & 1 & -6 & -1 \\ 2 & -8 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$5. \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 8 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

6. Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).

Каждая из сторон отправляет в разведку одну из 3 боевых единиц: танк, саперов, автоматчиков. Саперы побеждают танк с вероятностью 0,7, автоматчики побеждают саперов с вероятностью 0,7, танк побеждает автоматчиков наверняка.

7. Найти байесовскую стратегию первого игрока в играх с матрицами задач 3–4 в предположении, что второй игрок выбирает каждую последующую стратегию с вероятностью вдвое большей, чем предыдущую.

8. Найти минимаксную и байесовскую (с равными вероятностями применения стратегий вторым игроком) стратегии первого игрока в статистической игре с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,9 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}.$$

Здесь δ_1 — купить пакет акций, δ_2 — не покупать пакет акций, θ_1 — нефть подорожает, θ_2 — нефть подешевеет, τ_1 — биржевые индексы растут, τ_2 — биржевые индексы падают. Элементы матрицы A — потери первого игрока в тысячах рублей.

Вариант 4

1. Найти верхнюю и нижнюю цену игры с матрицей потерь первого игрока $\begin{pmatrix} 9 & 7 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 6 & 9 & 0 \end{pmatrix}$. Найти седловые точки, если они существуют.

2. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Каждая из двух конкурирующих фирм размещает два рекламных ролика в четырех информационных блоках. Фирма выигрывает очко, если ее ролик есть в информационном блоке, а ролика конкурирующей фирмы нет. В последнем (вечернем) информационном блоке фирма в этом случае выигрывает 4 очка.

Решить матричные игры со следующими матрицами потерь первого игрока.

3. $\begin{pmatrix} 8 & 0 & -4 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 7 \\ 3 & 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$.

6. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Одна маленькая фирма решила конкурировать с корпорацией. Корпорация выбирает для размещения рекламы три из четырех газет, маленькая фирма может опубликовать либо рекламный блок в одной из газет, либо объявления в трех газетах. Фирма получает прибыль от рекламы только в том случае, если в газете нет рекламы корпорации. Если в такой газете размещено объявление фирмы, она получает одно очко, если рекламный блок — 4 очка.

7. Найти байесовскую стратегию первого игрока в играх с матрицами задач 3–4 в предположении, что второй игрок выбирает каждую последующую стратегию с вероятностью вдвое большей, чем предыдущую.

8. Найти минимаксную и байесовскую (с равными вероятностями применения стратегий вторым игроком) стратегии первого игрока в статистической игре с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,9 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

Здесь δ_1 — купить пакет акций, δ_2 — не покупать пакет акций, θ_1 — нефть подорожает, θ_2 — нефть подешевеет, τ_1 — биржевые индексы растут, τ_2 — биржевые индексы падают. Элементы матрицы A — потери первого игрока в тысячах рублей.

Вариант 5

1. Найти верхнюю и нижнюю цену игры с матрицей потерь первого игрока $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 9 & 9 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 6 \\ 3 & 8 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Найти седловые точки, если они существуют.

2. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Два телеканала борются за зрительскую аудиторию. У каждого есть три рейтинговые передачи, каждую из которых нужно разместить на одну из четырех позиций (три дневные и одну вечернюю) в сетке вещания. Телеканал получает прибыль на позиции в сетке вещания, если в этот момент транслируется только его рейтинговая передача. Прибыль равна одному очку для дневных передач и трем очкам для вечерних.

Решить матричные игры со следующими матрицами потерь первого игрока.

$$3. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$4. \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 6 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & -1 \\ 0 & 7 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$5. \begin{pmatrix} 2 & 9 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 5 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Бомбить аэродром отправляются 5 самолетов, один из них — бомбардировщик. Противник может выстрелить по одному из самолетов. При выстреле по самолету он поражает летящий первым с вероятностью 0,6, летящий вторым, третьим, четвертым или пятым — с вероятностью 0,5. Аэродром разбомблен, если бомбардировщик уцелел.

7. Найти байесовскую стратегию первого игрока в играх с матрицами задач 3–4 в предположении, что второй игрок выбирает каждую последующую стратегию с вероятностью вдвое большей, чем предыдущую.

8. Найти минимаксную и байесовскую (с равными вероятностями применения стратегий вторым игроком) стратегии первого игрока в статистической игре с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}.$$

Здесь δ_1 — купить пакет акций, δ_2 — не покупать пакет акций, θ_1 — нефть подорожает, θ_2 — нефть подешевеет, τ_1 — биржевые индексы растут, τ_2 — биржевые индексы падают. Элементы матрицы A — потери первого игрока в тысячах рублей.

Вариант 6

1. Найти верхнюю и нижнюю цену игры с матрицей потерь первого игрока $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 & 7 \\ 6 & 7 & 0 & 0 \\ 5 & 9 & 4 & 0 \\ 9 & 6 & 2 & 9 \end{pmatrix}$. Найти седловые точки, если они существуют.

2. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Каждая из двух конкурирующих фирм выбирает два способа рекламы из списка: телевидение, радио, листовки, плакаты. Эффективность рекламы этими способами соотносится как $6 : 1 : 2 : 1$. Фирма получает соответствующее число очков, если ее реклама распространяется каким-либо способом, а реклама конкурента нет.

Решить матричные игры со следующими матрицами потерь первого игрока.

3. $\begin{pmatrix} -6 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 6 & 1 \\ 7 & 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 5 & 3 \\ 6 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 7 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.

6. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Покупатель может купить 1 коробок спичек в одном из трех магазинов или 2 коробка в разных магазинах. Он уверен, что не более чем в двух из магазинов продают сырые спички. Оставшись без сухих спичек, несет ущерб, равный стоимости 5 коробков.

7. Найти байесовскую стратегию первого игрока в играх с матрицами задач 3–4 в предположении, что второй игрок выбирает каждую

последующую стратегию с вероятностью вдвое большей, чем предыдущую.

8. Найти минимаксную и байесовскую (с равными вероятностями применения стратегий вторым игроком) стратегии первого игрока в статистической игре с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}.$$

Здесь δ_1 — купить пакет акций, δ_2 — не покупать пакет акций, θ_1 — нефть подорожает, θ_2 — нефть подешевеет, τ_1 — биржевые индексы растут, τ_2 — биржевые индексы падают. Элементы матрицы A — потери первого игрока в тысячах рублей.

Вариант 7

1. Найти верхнюю и нижнюю цену игры с матрицей потерь первого игрока $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 & 4 \\ 7 & 1 & 2 & 8 \\ 6 & 3 & 9 & 6 \\ 6 & 7 & 8 & 7 \end{pmatrix}$. Найти седловые точки, если они существуют.

2. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Два телеканала борются за зрительскую аудиторию. У каждого есть три рейтинговые передачи, каждую из которых нужно разместить на одну из четырех позиций (три дневные и одну вечернюю) в сетке вещания. Телеканал получает прибыль на позиции в сетке вещания, если в этот момент транслируется только его рейтинговая передача. Прибыль равна одному очку для дневных передач и пяти очкам для вечерних.

Решить матричные игры со следующими матрицами потерь первого игрока.

3. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

$$4. \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$5. \begin{pmatrix} 8 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & 5 & 8 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

6. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Пират спрятал клад в одном из пяти гротов пещеры. Кладовискатель может обследовать либо два из трех ближайших гротов, либо один из двух более удаленных.

7. Найти байесовскую стратегию первого игрока в играх с матрицами задач 3–4 в предположении, что второй игрок выбирает каждую последующую стратегию с вероятностью вдвое большей, чем предыдущую.

8. Найти минимаксную и байесовскую (с равными вероятностями применения стратегий вторым игроком) стратегии первого игрока в статистической игре с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Здесь δ_1 — купить пакет акций, δ_2 — не покупать пакет акций, θ_1 — нефть подорожает, θ_2 — нефть подешевеет, τ_1 — биржевые индексы растут, τ_2 — биржевые индексы падают. Элементы матрицы A — потери первого игрока в тысячах рублей.

Вариант 8

1. Найти верхнюю и нижнюю цену игры с матрицей потерь первого игрока $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 7 \\ 2 & 6 & 2 & 5 \\ 6 & 6 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 7 & 7 \end{pmatrix}$. Найти седловые точки, если они существуют.

2. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Две фирмы проводят рекламные акции. Первая выбирает для проведения акций два из четырех праздничных дней, вторая — три из четырех дней. Фирма выигрывает, если в данный день проходит только ее рекламная акция. Выигрыш равен трем очкам для первых двух праздничных дней и двум очкам для двух последних.

Решить матричные игры со следующими матрицами потерь первого игрока.

3. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & -5 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & -2 \\ 4 & 4 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 & 6 \\ 1 & 2 & 6 & 7 \\ 4 & 8 & 0 & 3 \\ 8 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

6. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Два преступника могут быть задержаны на одном из трех КПП. Каждый из них одерживает победу в борьбе с одним милиционером. Для задержания выделено 4 милиционера.

7. Найти байесовскую стратегию первого игрока в играх с матрицами задач 3–4 в предположении, что второй игрок выбирает каждую последующую стратегию с вероятностью вдвое большей, чем предыдущую.

8. Найти минимаксную и байесовскую (с равными вероятностями применения стратегий вторым игроком) стратегии первого игрока в статистической игре с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}.$$

Здесь δ_1 — купить пакет акций, δ_2 — не покупать пакет акций, θ_1 — нефть подорожает, θ_2 — нефть подешевеет, τ_1 — биржевые индексы растут, τ_2 — биржевые индексы падают. Элементы матрицы A — потери первого игрока в тысячах рублей.

Вариант 9

1. Найти верхнюю и нижнюю цену игры с матрицей потерь первого игрока $\begin{pmatrix} 9 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 1 & 3 \\ 9 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$. Найти седловые точки, если они существуют.

2. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Каждая из двух конкурирующих фирм размещает два рекламных ролика в четырех информационных блоках. Фирма выигрывает очко, если ее ролик есть в информационном блоке, а ролика конкурирующей фирмы нет. В последнем (вечернем) информационном блоке фирма в этом случае выигрывает 2 очка.

Решить матричные игры со следующими матрицами потерь первого игрока.

3. $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

4. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 6 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

$$5. \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 5 & 7 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

6. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

В караване из трех кораблей противника одно судно с ценным грузом. Подводная лодка может атаковать 2 судна. Если она атакует первое судно в караване, она поражает его с вероятностью 0,6, любое другое — с вероятностью 0,2.

7. Найти байесовскую стратегию первого игрока в играх с матрицами задач 3–4 в предположении, что второй игрок выбирает каждую последующую стратегию с вероятностью вдвое большей, чем предыдущую.

8. Найти минимаксную и байесовскую (с равными вероятностями применения стратегий вторым игроком) стратегии первого игрока в статистической игре с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}.$$

Здесь δ_1 — купить пакет акций, δ_2 — не покупать пакет акций, θ_1 — нефть подорожает, θ_2 — нефть подешевеет, τ_1 — биржевые индексы растут, τ_2 — биржевые индексы падают. Элементы матрицы A — потери первого игрока в тысячах рублей.

Вариант 10

1. Найти верхнюю и нижнюю цену игры с матрицей потерь первого игрока $\begin{pmatrix} 3 & 9 & 0 & 1 \\ 7 & 4 & 8 & 0 \\ 6 & 3 & 1 & 9 \\ 2 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Найти седловые точки, если они существуют.

2. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Два телеканала борются за зрительскую аудиторию. У каждого есть три рейтинговые передачи, каждую из которых нужно разместить на одну из пяти позиций (три дневные и две вечерние) в сетке вещания. Телеканал получает прибыль на позиции в сетке вещания, если в этот момент транслируется только его рейтинговая передача. Прибыль равна двум очкам для дневных передач и пяти очкам для вечерних.

Решить матричные игры со следующими матрицами потерь первого игрока.

3.
$$\begin{pmatrix} 3 & -8 & -1 \\ -7 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

4.
$$\begin{pmatrix} -6 & 2 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 6 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

5.
$$\begin{pmatrix} 7 & 8 & 6 & 3 \\ 6 & 7 & 8 & 3 \\ 8 & 6 & 7 & 3 \\ 5 & 5 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

6. Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).

Две бабушки решили ехать на курорт. Они должны выбрать, чем ехать — самолетом, поездом или теплоходом (полагая, что авария может произойти не более чем с одним из этих транспортных средств). Выигрыш равен числу уцелевших бабушек (ценой билетов пренебречь).

7. Найти байесовскую стратегию первого игрока в играх с матрицами задач 3–4 в предположении, что второй игрок выбирает каждую последующую стратегию с вероятностью вдвое большей, чем предыдущую.

8. Найти минимаксную и байесовскую (с равными вероятностями применения стратегий вторым игроком) стратегии первого игрока в статистической игре с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,9 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

Здесь δ_1 — купить пакет акций, δ_2 — не покупать пакет акций, θ_1

— нефть подорожает, θ_2 — нефть подешевеет, τ_1 — биржевые индексы растут, τ_2 — биржевые индексы падают. Элементы матрицы A — потери первого игрока в тысячах рублей.

Вариант 11

1. Найти верхнюю и нижнюю цену игры с матрицей потерь первого игрока $\begin{pmatrix} 9 & 3 & 1 & 3 \\ 5 & 8 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & 9 & 9 \\ 2 & 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$. Найти седловые точки, если они существуют.

2. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Два телеканала борются за зрительскую аудиторию. У каждого есть три рейтинговые передачи, каждую из которых нужно разместить на одну из четырех позиций (три дневные и одну вечернюю) в сетке вещания. Телеканал получает прибыль на позиции в сетке вещания, если в этот момент транслируется только его рейтинговая передача. Прибыль равна одному очку для дневных передач и двум очкам для вечерних.

Решить матричные игры со следующими матрицами потерь первого игрока.

3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 6 & -5 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 5 \\ -6 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 7 & 8 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

6. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Первый, второй, третий, четвертый избиратели участвуют в голосовании за кандидатов A , B , C . Известно, что третий избиратель с равной вероятностью голосует за A и C , четвертый избиратель будет голосовать за B . Первый избиратель выигрывает у второго, если будет зафиксирована ничья, и проигрывает, если один из кандидатов побеждает.

7. Найти байесовскую стратегию первого игрока в играх с матрицами задач 3–4 в предположении, что второй игрок выбирает каждую последующую стратегию с вероятностью вдвое большей, чем предыдущую.

8. Найти минимаксную и байесовскую (с равными вероятностями применения стратегий вторым игроком) стратегии первого игрока в статистической игре с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}.$$

Здесь δ_1 — купить пакет акций, δ_2 — не покупать пакет акций, θ_1 — нефть подорожает, θ_2 — нефть подешевеет, τ_1 — биржевые индексы растут, τ_2 — биржевые индексы падают. Элементы матрицы A — потери первого игрока в тысячах рублей.

Вариант 12

1. Найти верхнюю и нижнюю цену игры с матрицей потерь первого игрока $\begin{pmatrix} 7 & 9 & 1 & 9 \\ 8 & 2 & 1 & 6 \\ 8 & 8 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$. Найти седловые точки, если они существуют.

2. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Каждая из двух конкурирующих фирм выбирает способы рекламы из списка: телевидение, радио, листовки, плакаты. Эффективность рекламы этими способами соотносится как $3 : 2 : 1 : 1$. Первая фирма выбирает два способа рекламы, а вторая — три способа рекламы.

Фирма получает соответствующее число очков, если ее реклама распространяется каким-либо способом, а реклама конкурента нет.

Решить матричные игры со следующими матрицами потерь первого игрока.

3. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

4. $\begin{pmatrix} 7 & 4 & -1 & 2 \\ 9 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

5. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 0 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$

6. Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).

Лошадь решила купить 2 пары галош. Галошами торгуют 3 магазина. Можно купить обе пары в одном, а можно — в разных магазинах. Стоимость перемещения от магазина к магазину равна 1. Потери при приобретении бракованной пары равны 2. Если купленные в разных магазинах пары оказались бракованными, лошадь подает рекламацию и компенсирует свои расходы.

7. Найти байесовскую стратегию первого игрока в играх с матрицами задач 3–4 в предположении, что второй игрок выбирает каждую последующую стратегию с вероятностью вдвое большей, чем предыдущую.

8. Найти минимаксную и байесовскую (с равными вероятностями применения стратегий вторым игроком) стратегии первого игрока в статистической игре с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Здесь δ_1 — купить пакет акций, δ_2 — не покупать пакет акций, θ_1 — нефть подорожает, θ_2 — нефть подешевеет, τ_1 — биржевые индексы

растут, τ_2 — биржевые индексы падают. Элементы матрицы A — потери первого игрока в тысячах рублей.

Вариант 13

1. Найти верхнюю и нижнюю цену игры с матрицей потерь первого игрока $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 7 & 1 \\ 9 & 6 & 6 & 4 \\ 9 & 4 & 7 & 0 \\ 2 & 0 & 9 & 9 \end{pmatrix}$. Найти седловые точки, если они существуют.

2. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Две корпорации проводят рекламные акции. Первая выбирает для проведения акций один из четырех праздничных дней, вторая — три из четырех дней. Корпорация выигрывает, если в данный день проходит только ее рекламная акция. Выигрыш равен трем очкам для первых трех праздничных дней и двум очкам для последнего.

Решить матричные игры со следующими матрицами потерь первого игрока.

3. $\begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 7 & -6 & 5 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 7 & 4 & 0 & 5 \\ -2 & 0 & -3 & 8 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 8 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 0 \\ 9 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 9 \end{pmatrix}$.

6. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Покупатель может приобрести 1 или 2 бутылки напитка в одном из трех магазинов. Покупатель уверен, что в одном из магазинов (неиз-

вестно, в каком) вместо напитка — суррогат. Потери равны разности между числом купленных бутылок суррогата и напитка.

7. Найти байесовскую стратегию первого игрока в играх с матрицами задач 3–4 в предположении, что второй игрок выбирает каждую последующую стратегию с вероятностью вдвое большей, чем предыдущую.

8. Найти минимаксную и байесовскую (с равными вероятностями применения стратегий вторым игроком) стратегии первого игрока в статистической игре с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}.$$

Здесь δ_1 — купить пакет акций, δ_2 — не покупать пакет акций, θ_1 — нефть подорожает, θ_2 — нефть подешевеет, τ_1 — биржевые индексы растут, τ_2 — биржевые индексы падают. Элементы матрицы A — потери первого игрока в тысячах рублей.

Вариант 14

1. Найти верхнюю и нижнюю цену игры с матрицей потерь первого игрока $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 9 & 2 \\ 0 & 8 & 3 & 6 \\ 5 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$. Найти седловые точки, если они существуют.

2. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Каждая из двух конкурирующих фирм размещает два рекламных ролика в четырех информационных блоках. Фирма выигрывает очко, если ее ролик есть в информационном блоке, а ролика конкурирующей фирмы нет. В последнем (вечернем) информационном блоке фирма в этом случае выигрывает 3 очка.

Решить матричные игры со следующими матрицами потерь первого игрока.

$$3. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$4. \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 6 \\ -2 & 2 & -4 & 1 \\ -2 & -2 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$5. \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 6 & 6 & 6 \\ 5 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

3 бабушки решили ехать на курорт. Они должны выбрать, чем ехать — самолетом, поездом или теплоходом (полагая, что авария может произойти не более чем с двумя из этих транспортных средств). Выигрыш равен числу уцелевших бабушек (ценой билетов пренебречь).

7. Найти байесовскую стратегию первого игрока в играх с матрицами задач 3–4 в предположении, что второй игрок выбирает каждую последующую стратегию с вероятностью вдвое большей, чем предыдущую.

8. Найти минимаксную и байесовскую (с равными вероятностями применения стратегий вторым игроком) стратегии первого игрока в статистической игре с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Здесь δ_1 — купить пакет акций, δ_2 — не покупать пакет акций, θ_1 — нефть подорожает, θ_2 — нефть подешевеет, τ_1 — биржевые индексы растут, τ_2 — биржевые индексы падают. Элементы матрицы A — потери первого игрока в тысячах рублей.

Вариант 15

1. Найти верхнюю и нижнюю цену игры с матрицей потерь первого игрока $\begin{pmatrix} 6 & 3 & 8 & 7 \\ 3 & 3 & 7 & 4 \\ 4 & 9 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \end{pmatrix}$. Найти седловые точки, если они существуют.

2. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Два телеканала борются за зрительскую аудиторию. У каждого есть три рейтинговые передачи, каждую из которых нужно разместить на одну из четырех позиций (три дневные и одну вечернюю) в сетке вещания. Телеканал получает прибыль на позиции в сетке вещания, если в этот момент транслируется только его рейтинговая передача. Прибыль равна двум очкам для дневных передач и трем очкам для вечерних.

Решить матричные игры со следующими матрицами потерь первого игрока.

3. $\begin{pmatrix} -6 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 7 & -8 & 2 & -6 \\ 8 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & -9 & -3 & -9 \\ -3 & -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 & 6 \\ 8 & 9 & 7 & 6 \\ 9 & 7 & 8 & 6 \\ 5 & 5 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.

6. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Бомбить аэродром отправляются 5 самолетов, 1 из них — бомбардировщик. Противник может выстрелить по одному самолету. При выстреле по самолету он поражает летящий первым с вероятностью 0,6, любой другой — с вероятностью 0,4. Аэродром разбомблен, если бомбардировщик уцелел.

7. Найти байесовскую стратегию первого игрока в играх с матрицами задач 3–4 в предположении, что второй игрок выбирает каждую

последующую стратегию с вероятностью вдвое большей, чем предыдущую.

8. Найти минимаксную и байесовскую (с равными вероятностями применения стратегий вторым игроком) стратегии первого игрока в статистической игре с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

Здесь δ_1 — купить пакет акций, δ_2 — не покупать пакет акций, θ_1 — нефть подорожает, θ_2 — нефть подешевеет, τ_1 — биржевые индексы растут, τ_2 — биржевые индексы падают. Элементы матрицы A — потери первого игрока в тысячах рублей.

Вариант 16

1. Найти верхнюю и нижнюю цену игры с матрицей потерь первого игрока $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 & 3 \\ 5 & 5 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 7 \\ 5 & 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$. Найти седловые точки, если они существуют.

2. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Две фирмы проводят рекламные акции. Каждая выбирает для проведения акций два из трех праздничных дней. Фирма выигрывает, если в данный день проходит только ее рекламная акция. Выигрыш равен одному очку для первых двух праздничных дней и трем очкам для последнего.

Решить матричные игры со следующими матрицами потерь первого игрока.

3. $\begin{pmatrix} 7 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
4. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 8 \\ 3 & -2 & -6 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$.

$$5. \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 8 \\ 6 & 1 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

6. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Одна маленькая фирма решила конкурировать с корпорацией. Корпорация выбирает для размещения рекламы три из четырех газет, маленькая фирма может опубликовать либо рекламный блок в одной из газет, либо объявления в трех газетах. Фирма получает прибыль от рекламы только в том случае, если в газете нет рекламы корпорации. Если в такой газете размещено объявление фирмы, она получает одно очко, если рекламный блок — два очка.

7. Найти байесовскую стратегию первого игрока в играх с матрицами задач 3–4 в предположении, что второй игрок выбирает каждую последующую стратегию с вероятностью вдвое большей, чем предыдущую.

8. Найти минимаксную и байесовскую (с равными вероятностями применения стратегий вторым игроком) стратегии первого игрока в статистической игре с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Здесь δ_1 — купить пакет акций, δ_2 — не покупать пакет акций, θ_1 — нефть подорожает, θ_2 — нефть подешевеет, τ_1 — биржевые индексы растут, τ_2 — биржевые индексы падают. Элементы матрицы A — потери первого игрока в тысячах рублей.

Вариант 17

1. Найти верхнюю и нижнюю цену игры с матрицей потерь первого игрока $\begin{pmatrix} 8 & 9 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 9 \\ 9 & 4 & 3 & 0 \\ 6 & 8 & 3 & 8 \end{pmatrix}$. Найти седловые точки, если они существуют.

2. Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).

Каждая из двух конкурирующих фирм выбирает способы рекламы из списка: телевидение, радио, листовки, плакаты. Эффективность рекламы этими способами соотносится как 3 : 1 : 1 : 1. Первая фирма выбирает два способа рекламы, а вторая — три способа рекламы. Фирма получает соответствующее число очков, если ее реклама распространяется каким-либо способом, а реклама конкурента нет.

Решить матричные игры со следующими матрицами потерь первого игрока.

3. $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$

4. $\begin{pmatrix} -8 & -7 & 7 & 0 \\ -4 & -3 & -3 & 4 \\ -6 & 5 & -5 & 8 \\ -1 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$

5. $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 7 \\ 6 & 6 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$

6. Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).

Каждая из сторон может отправить в разведку танк, либо саперов, либо автоматчиков. Саперы побеждают танк с вероятностью 0,8, автоматчики побеждают саперов с вероятностью 0,8, танк побеждает автоматчиков наверняка.

7. Найти байесовскую стратегию первого игрока в играх с матрицами задач 3–4 в предположении, что второй игрок выбирает каждую последующую стратегию с вероятностью вдвое большей, чем предыдущую.

8. Найти минимаксную и байесовскую (с равными вероятностями применения стратегий вторым игроком) стратегии первого игрока в

статистической игре с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}.$$

Здесь δ_1 — купить пакет акций, δ_2 — не покупать пакет акций, θ_1 — нефть подорожает, θ_2 — нефть подешевеет, τ_1 — биржевые индексы растут, τ_2 — биржевые индексы падают. Элементы матрицы A — потери первого игрока в тысячах рублей.

Вариант 18

1. Найти верхнюю и нижнюю цену игры с матрицей потерь первого игрока $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 8 & 8 \\ 2 & 3 & 8 & 3 \\ 9 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. Найти седловые точки, если они существуют.

2. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Два телеканала борются за зрительскую аудиторию. У каждого есть три рейтинговые передачи, каждую из которых нужно разместить на одну из четырех позиций (две дневные и две вечерние) в сетке вещания. Телеканал получает прибыль на позиции в сетке вещания, если в этот момент транслируется только его рейтинговая передача. Прибыль равна трем очкам для дневных передач и четырем очкам для вечерних.

Решить матричные игры со следующими матрицами потерь первого игрока.

3. $\begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

4. $\begin{pmatrix} 4 & 8 & 3 & 6 \\ 8 & 4 & 0 & 0 \\ 9 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$

$$5. \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 5 \\ 2 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

6. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Одна маленькая фирма решила конкурировать с корпорацией. Корпорация выбирает для размещения рекламы две из четырех газет, маленькая фирма может опубликовать либо рекламный блок в одной из газет, либо объявления в трех газетах. Фирма получает прибыль от рекламы только в том случае, если в газете нет рекламы корпорации. Если в такой газете размещено объявление фирмы, она получает 5 очков, если рекламный блок — 9 очков.

7. Найти байесовскую стратегию первого игрока в играх с матрицами задач 3–4 в предположении, что второй игрок выбирает каждую последующую стратегию с вероятностью вдвое большей, чем предыдущую.

8. Найти минимаксную и байесовскую (с равными вероятностями применения стратегий вторым игроком) стратегии первого игрока в статистической игре с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Здесь δ_1 — купить пакет акций, δ_2 — не покупать пакет акций, θ_1 — нефть подорожает, θ_2 — нефть подешевеет, τ_1 — биржевые индексы растут, τ_2 — биржевые индексы падают. Элементы матрицы A — потери первого игрока в тысячах рублей.

Вариант 19

1. Найти верхнюю и нижнюю цену игры с матрицей потерь первого игрока $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 9 & 7 \\ 8 & 7 & 6 & 4 \\ 8 & 3 & 8 & 2 \\ 9 & 4 & 8 & 1 \end{pmatrix}$. Найти седловые точки, если они существуют.

2. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Две фирмы проводят рекламные акции. Первая выбирает для проведения акций два из пяти входов в метро, вторая — один из пяти входов. Фирма выигрывает, если у данного входа проходит только ее рекламная акция. Выигрыш равен одному очку для первых двух входов, трем очкам для третьего входа, двум очкам для четвертого и пятого входов.

- Решить матричные игры со следующими матрицами потерь первого игрока.**

3. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 9 & 9 & 9 & 0 \\ 2 & 8 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 & 4 \\ 3 & 7 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 5 & 5 \\ 1 & 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

6. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Илья Муромец может поехать либо вправо, либо влево, либо прямо, либо повернуть назад. Змей Горыныч может оказаться либо слева, либо прямо, либо справа, но никак не сзади. Слева и справа Илья Муромец побеждает с вероятностью 0,6, погибает с вероятностью 0,4. Прямо он побеждает с вероятностью 0,9. Если же он не найдет Змея

Горыныча, то вернуться ему не суждено. Он считает, что в 3 раза более ценно победить, чем уцелеть.

7. Найти байесовскую стратегию первого игрока в играх с матрицами задач 3–4 в предположении, что второй игрок выбирает каждую последующую стратегию с вероятностью вдвое большей, чем предыдущую.

8. Найти минимаксную и байесовскую (с равными вероятностями применения стратегий вторым игроком) стратегии первого игрока в статистической игре с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,9 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

Здесь δ_1 — купить пакет акций, δ_2 — не покупать пакет акций, θ_1 — нефть подорожает, θ_2 — нефть подешевеет, τ_1 — биржевые индексы растут, τ_2 — биржевые индексы падают. Элементы матрицы A — потери первого игрока в тысячах рублей.

Вариант 20

1. Найти верхнюю и нижнюю цену игры с матрицей потерь первого игрока $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 7 & 4 \\ 8 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 7 & 5 & 2 \\ 8 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$. Найти седловые точки, если они существуют.

2. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Два телеканала борются за зрительскую аудиторию. У каждого есть три рейтинговые передачи, каждую из которых нужно разместить на одну из четырех позиций (три дневные и одну вечернюю) в сетке вещания. Телеканал получает прибыль на позиции в сетке вещания, если в этот момент транслируется только его рейтинговая передача. Прибыль равна трем очкам для дневных передач и четырем очкам для вечерних.

Решить матричные игры со следующими матрицами потерь первого игрока.

3. $\begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$

4. $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 & 0 \\ 3 & 9 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 8 & 0 \\ 3 & 8 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$

5. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ 6 & 6 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$

6. Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).

Продавец птиц перевозит 6 попугаев в двух клетках (в одну клетку все попугаи не помещаются). У одной из клеток ненадежный замок, и в случае теплой погоды помещенные туда попугаи могут улететь. Одинокий попугай в случае холодной погоды может замерзнуть. При этом (с учетом затрат на похороны) ущерб равен стоимости трех попугаев. Прогноз погоды неизвестен.

7. Найти байесовскую стратегию первого игрока в играх с матрицами задач 3–4 в предположении, что второй игрок выбирает каждую последующую стратегию с вероятностью вдвое большей, чем предыдущую.

8. Найти минимаксную и байесовскую (с равными вероятностями применения стратегий вторым игроком) стратегии первого игрока в статистической игре с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Здесь δ_1 — купить пакет акций, δ_2 — не покупать пакет акций, θ_1 — нефть подорожает, θ_2 — нефть подешевеет, τ_1 — биржевые индексы растут, τ_2 — биржевые индексы падают. Элементы матрицы A — потери первого игрока в тысячах рублей.

Вариант 21

1. Найти верхнюю и нижнюю цену игры с матрицей потерь первого игрока $\begin{pmatrix} 8 & 9 & 2 & 2 \\ 6 & 1 & 4 & 5 \\ 5 & 7 & 5 & 9 \\ 5 & 4 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Найти седловые точки, если они существуют.

2. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Каждая из двух конкурирующих фирм выбирает способы рекламы из списка: телевидение, радио, листовки, плакаты. Эффективность рекламы этими способами соотносится как 2 : 1 : 2 : 1. Первая фирма выбирает три способа рекламы, а вторая — два способа рекламы. Фирма получает соответствующее число очков, если ее реклама распространяется каким-либо способом, а реклама конкурента нет.

Решить матричные игры со следующими матрицами потерь первого игрока.

3. $\begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 7 & 1 & 8 \\ 4 & 2 & 8 & 2 \\ 5 & 8 & 5 & 8 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} 7 & 2 & 7 & 7 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

6. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Рыбак может купить 1 коробок спичек в одном из 4 магазинов или 2 коробка в разных магазинах. Он уверен, что не более чем в двух из них спички сырые. Оставшись без сухих спичек, несет ущерб, равный стоимости 10 коробков.

7. Найти байесовскую стратегию первого игрока в играх с матрицами задач 3–4 в предположении, что второй игрок выбирает каждую

последующую стратегию с вероятностью вдвое большей, чем предыдущую.

8. Найти минимаксную и байесовскую (с равными вероятностями применения стратегий вторым игроком) стратегии первого игрока в статистической игре с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Здесь δ_1 — купить пакет акций, δ_2 — не покупать пакет акций, θ_1 — нефть подорожает, θ_2 — нефть подешевеет, τ_1 — биржевые индексы растут, τ_2 — биржевые индексы падают. Элементы матрицы A — потери первого игрока в тысячах рублей.

Вариант 22

1. Найти верхнюю и нижнюю цену игры с матрицей потерь первого игрока $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 2 & 5 \\ 6 & 5 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Найти седловые точки, если они существуют.

2. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Два телеканала борются за зрительскую аудиторию. У каждого есть три рейтинговые передачи, каждую из которых нужно разместить на одну из четырех позиций (две дневные и две вечерние) в сетке вещания. Телеканал получает прибыль на позиции в сетке вещания, если в этот момент транслируется только его рейтинговая передача. Прибыль равна одному очку для дневных передач и трем очкам для вечерних.

Решить матричные игры со следующими матрицами потерь первого игрока.

3. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 6 & 3 & -6 \end{pmatrix}.$

$$4. \begin{pmatrix} 3 & 9 & 8 & 7 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 8 & 8 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$5. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 7 & 0 \\ 6 & 6 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Разбойник спрятал клад в одном из семи подвалов замка. Кладовискатель может обследовать либо два из трех ближайших подвалов, либо один из четырех более удаленных.

7. Найти байесовскую стратегию первого игрока в играх с матрицами задач 3–4 в предположении, что второй игрок выбирает каждую последующую стратегию с вероятностью вдвое большей, чем предыдущую.

8. Найти минимаксную и байесовскую (с равными вероятностями применения стратегий вторым игроком) стратегии первого игрока в статистической игре с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Здесь δ_1 — купить пакет акций, δ_2 — не покупать пакет акций, θ_1 — нефть подорожает, θ_2 — нефть подешевеет, τ_1 — биржевые индексы растут, τ_2 — биржевые индексы падают. Элементы матрицы A — потери первого игрока в тысячах рублей.

Вариант 23

1. Найти верхнюю и нижнюю цену игры с матрицей потерь первого игрока $\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 & 9 \\ 1 & 6 & 5 & 3 \\ 4 & 3 & 9 & 8 \\ 7 & 1 & 9 & 8 \end{pmatrix}$. Найти седловые точки, если они существуют.

2. Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).

Два телеканала борются за зрительскую аудиторию. У каждого есть три рейтинговые передачи, каждую из которых нужно разместить на одну из четырех позиций (три дневные и одну вечернюю) в сетке вещания. Телеканал получает прибыль на позиции в сетке вещания, если в этот момент транслируется только его рейтинговая передача. Прибыль равна одному очку для дневных передач и четырем очкам для вечерних.

Решить матричные игры со следующими матрицами потерь первого игрока.

3.
$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -7 \end{pmatrix}.$$

4.
$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 6 \\ 6 & 1 & 8 & 2 \\ 6 & 2 & 7 & 2 \\ 2 & 6 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

5.
$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 6 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).

Два преступника могут быть задержаны на одном из трех КПП. Каждый из них одерживает победу в борьбе с одним милиционером. Для задержания выделено 5 милиционеров.

7. Найти байесовскую стратегию первого игрока в играх с матрицами задач 3–4 в предположении, что второй игрок выбирает каждую последующую стратегию с вероятностью вдвое большей, чем предыдущую.

8. Найти минимаксную и байесовскую (с равными вероятностями применения стратегий вторым игроком) стратегии первого игрока в

статистической игре с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Здесь δ_1 — купить пакет акций, δ_2 — не покупать пакет акций, θ_1 — нефть подорожает, θ_2 — нефть подешевеет, τ_1 — биржевые индексы растут, τ_2 — биржевые индексы падают. Элементы матрицы A — потери первого игрока в тысячах рублей.

Вариант 24

1. Найти верхнюю и нижнюю цену игры с матрицей потерь первого игрока $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 8 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$. Найти седловые точки, если они существуют.

2. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Два телеканала борются за зрительскую аудиторию. У каждого есть три рейтинговые передачи, каждую из которых нужно разместить на одну из пяти позиций (три дневные и две вечерние) в сетке вещания. Телеканал получает прибыль на позиции в сетке вещания, если в этот момент транслируется только его рейтинговая передача. Прибыль равна двум очкам для дневных передач и четырем очкам для вечерних.

Решить матричные игры со следующими матрицами потерь первого игрока.

3. $\begin{pmatrix} 9 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

4. $\begin{pmatrix} 7 & 2 & 6 & 2 \\ 8 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 8 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$

$$5. \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 & 6 \\ 5 & 0 & 6 & 4 \\ 2 & 7 & 2 & 2 \\ 6 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

6. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

В караване из 6 кораблей противника одно судно с ценным грузом. Подводная лодка может атаковать одно из судов. Если она атакует первое судно в караване, она поражает его с вероятностью 0,6, любое другое — с вероятностью 0,3.

7. Найти байесовскую стратегию первого игрока в играх с матрицами задач 3–4 в предположении, что второй игрок выбирает каждую последующую стратегию с вероятностью вдвое большей, чем предыдущую.

8. Найти минимаксную и байесовскую (с равными вероятностями применения стратегий вторым игроком) стратегии первого игрока в статистической игре с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}.$$

Здесь δ_1 — купить пакет акций, δ_2 — не покупать пакет акций, θ_1 — нефть подорожает, θ_2 — нефть подешевеет, τ_1 — биржевые индексы растут, τ_2 — биржевые индексы падают. Элементы матрицы A — потери первого игрока в тысячах рублей.

Вариант 25

1. Найти верхнюю и нижнюю цену игры с матрицей потерь первого игрока $\begin{pmatrix} 5 & 8 & 8 & 9 \\ 8 & 8 & 6 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 9 & 8 \end{pmatrix}$. Найти седловые точки, если они существуют.

2. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Каждая из двух конкурирующих фирм выбирает способы рекламы из списка: телевидение, радио, листовки, плакаты. Эффективность рекламы этими способами соотносится как 3 : 2 : 2 : 1. Первая фирма выбирает три способа рекламы, а вторая — два способа рекламы. Фирма получает соответствующее число очков, если ее реклама распространяется каким-либо способом, а реклама конкурента нет.

Решить матричные игры со следующими матрицами потерь первого игрока.

$$3. \begin{pmatrix} -8 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$4. \begin{pmatrix} 7 & 5 & 8 & 6 \\ 3 & 6 & 0 & 9 \\ 0 & 5 & 0 & 9 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$5. \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).

Студент может поехать на автобусе, электричке или маршрутном такси. Цена билета соответственно 10, 20, 25. Если водители автобусов объявили забастовку, решивший ехать на автобусе опаздывает и несет потери, равные 50. В случае забастовки билеты на маршрутное такси дешевеют до 15.

7. Найти байесовскую стратегию первого игрока в играх с матрицами задач 3–4 в предположении, что второй игрок выбирает каждую последующую стратегию с вероятностью вдвое большей, чем предыдущую.

8. Найти минимаксную и байесовскую (с равными вероятностями применения стратегий вторым игроком) стратегии первого игрока в статистической игре с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}.$$

Здесь δ_1 — купить пакет акций, δ_2 — не покупать пакет акций, θ_1 — нефть подорожает, θ_2 — нефть подешевеет, τ_1 — биржевые индексы растут, τ_2 — биржевые индексы падают. Элементы матрицы A — потери первого игрока в тысячах рублей.

Вариант 26

1. Найти верхнюю и нижнюю цену игры с матрицей потерь первого игрока $\begin{pmatrix} 9 & 6 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 8 \\ 9 & 6 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Найти седловые точки, если они существуют.

2. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Два телеканала борются за зрительскую аудиторию. У каждого есть три рейтинговые передачи, каждую из которых нужно разместить на одну из четырех позиций (две дневные и две вечерние) в сетке вещания. Телеканал получает прибыль на позиции в сетке вещания, если в этот момент транслируется только его рейтинговая передача. Прибыль равна одному очку для дневных передач и четырем очкам для вечерних.

Решить матричные игры со следующими матрицами потерь первого игрока.

3. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
4. $\begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 \\ 2 & 3 & 7 & 5 \\ 6 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & 8 & 7 \end{pmatrix}$.
5. $\begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 & 6 \\ 3 & 7 & 4 & 6 \\ 3 & 3 & 8 & 6 \\ 5 & 5 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).

Первый, второй, третий и четвертый избиратели участвуют в голосовании за кандидатов A , B , C . Известно, что третий избиратель проголосует за A , а четвертый с равными вероятностями за A или за B . Первый избиратель проигрывает второму, если выборы закончились ничьей, и выигрывает, если победил один из кандидатов.

7. Найти байесовскую стратегию первого игрока в играх с матрицами задач 3–4 в предположении, что второй игрок выбирает каждую последующую стратегию с вероятностью вдвое большей, чем предыдущую.

8. Найти минимаксную и байесовскую (с равными вероятностями применения стратегий вторым игроком) стратегии первого игрока в статистической игре с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,9 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

Здесь δ_1 — купить пакет акций, δ_2 — не покупать пакет акций, θ_1 — нефть подорожает, θ_2 — нефть подешевеет, τ_1 — биржевые индексы растут, τ_2 — биржевые индексы падают. Элементы матрицы A — потери первого игрока в тысячах рублей.

Вариант 27

1. Найти верхнюю и нижнюю цену игры с матрицей потерь первого игрока $\begin{pmatrix} 4 & 7 & 7 & 6 \\ 6 & 8 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 8 & 8 & 6 & 1 \end{pmatrix}$. **Найти седловые точки, если они существуют.**

2. Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).

Два телеканала борются за зрительскую аудиторию. У каждого есть три рейтинговые передачи, каждую из которых нужно разместить

на одну из пяти позиций (три дневные и две вечерние) в сетке вещания. Телеканал получает прибыль на позиции в сетке вещания, если в этот момент транслируется только его рейтинговая передача. Прибыль равна трем очкам для дневных передач и четырем очкам для вечерних.

Решить матричные игры со следующими матрицами потерь первого игрока.

$$3. \begin{pmatrix} 7 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$4. \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 & 5 \\ 0 & 4 & 4 & 7 \\ 0 & 8 & 3 & 8 \\ 6 & 4 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$5. \begin{pmatrix} 9 & 9 & 9 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & 4 & 7 \\ 3 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

6. Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).

Лошадь решила купить 2 пары калош. Калошами торгуют 4 магазина. Можно купить обе пары в одном, а можно — в разных магазинах. Стоимость перемещения от магазина к магазину равна 1. Потери при приобретении бракованной пары равны 2. Если купленные в разных магазинах пары оказались бракованными, лошадь подает рекламацию и компенсирует свои расходы.

7. Найти байесовскую стратегию первого игрока в играх с матрицами задач 3–4 в предположении, что второй игрок выбирает каждую последующую стратегию с вероятностью вдвое большей, чем предыдущую.

8. Найти минимаксную и байесовскую (с равными вероятностями применения стратегий вторым игроком) стратегии первого игрока в статистической игре с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,9 \\ 0,9 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

Здесь δ_1 — купить пакет акций, δ_2 — не покупать пакет акций, θ_1

— нефть подорожает, θ_2 — нефть подешевеет, τ_1 — биржевые индексы растут, τ_2 — биржевые индексы падают. Элементы матрицы A — потери первого игрока в тысячах рублей.

Вариант 28

1. Найти верхнюю и нижнюю цену игры с матрицей потерь первого игрока $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 8 & 6 \\ 5 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 0 & 1 \\ 8 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$. Найти седловые точки, если они существуют.

2. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Каждая из двух конкурирующих фирм выбирает способы рекламы из списка: телевидение, радио, листовки, плакаты. Эффективность рекламы этими способами соотносится как $3 : 2 : 2 : 3$. Первая фирма выбирает два способа рекламы, а вторая — три способа рекламы. Фирма получает соответствующее число очков, если ее реклама распространяется каким-либо способом, а реклама конкурента нет.

Решить матричные игры со следующими матрицами потерь первого игрока.

3. $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 0 \\ -2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 4 & 9 & 3 & 9 \\ 8 & 2 & 6 & 2 \\ 7 & 6 & 6 & 2 \\ 5 & 9 & 3 & 9 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

6. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Покупатель должен купить 1 или 2 бутылки напитка в одном из двух магазинов. Он уверен, что в одном из них (неизвестно, в каком) вместо напитка — суррогат. Потери равны разности между числом купленных бутылок суррогата и напитка.

7. Найти байесовскую стратегию первого игрока в играх с матрицами задач 3–4 в предположении, что второй игрок выбирает каждую последующую стратегию с вероятностью вдвое большей, чем предыдущую.

8. Найти минимаксную и байесовскую (с равными вероятностями применения стратегий вторым игроком) стратегии первого игрока в статистической игре с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Здесь δ_1 — купить пакет акций, δ_2 — не покупать пакет акций, θ_1 — нефть подорожает, θ_2 — нефть подешевеет, τ_1 — биржевые индексы растут, τ_2 — биржевые индексы падают. Элементы матрицы A — потери первого игрока в тысячах рублей.

Вариант 29

1. Найти верхнюю и нижнюю цену игры с матрицей потерь первого игрока $\begin{pmatrix} 6 & 8 & 8 & 3 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 6 & 5 & 7 & 0 \\ 9 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$. Найти седловые точки, если они существуют.

2. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Два телеканала борются за зрительскую аудиторию. У каждого есть три рейтинговые передачи, каждую из которых нужно разместить на одну из четырех позиций (три дневные и одну вечернюю) в сетке вещания. Телеканал получает прибыль на позиции в сетке вещания, если в этот момент транслируется только его рейтинговая передача.

Прибыль равна трем очкам для дневных передач и пяти очкам для вечерних.

Решить матричные игры со следующими матрицами потерь первого игрока.

$$3. \begin{pmatrix} 0 & -5 & -6 \\ -4 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$4. \begin{pmatrix} 4 & 7 & 5 & 6 \\ 8 & 3 & 8 & 3 \\ 8 & 6 & 9 & 6 \\ 0 & 9 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$5. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).

Одна маленькая фирма решила конкурировать с корпорацией. Корпорация выбирает для размещения рекламы одну из пяти газет, маленькая фирма может опубликовать либо рекламный блок в одной из газет, либо объявления в четырех газетах. Фирма получает прибыль от рекламы только в том случае, если в газете нет рекламы корпорации. Если в такой газете размещено объявление фирмы, она получает одно очко, если рекламный блок — три очка.

7. Найти байесовскую стратегию первого игрока в играх с матрицами задач 3–4 в предположении, что второй игрок выбирает каждую последующую стратегию с вероятностью вдвое большей, чем предыдущую.

8. Найти минимаксную и байесовскую (с равными вероятностями применения стратегий вторым игроком) стратегии первого игрока в статистической игре с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}.$$

Здесь δ_1 — купить пакет акций, δ_2 — не покупать пакет акций, θ_1 — нефть подорожает, θ_2 — нефть подешевеет, τ_1 — биржевые индексы

растут, τ_2 — биржевые индексы падают. Элементы матрицы A — потери первого игрока в тысячах рублей.

Вариант 30

1. Найти верхнюю и нижнюю цену игры с матрицей потерь первого игрока $\begin{pmatrix} 7 & 3 & 9 & 7 \\ 3 & 5 & 8 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}$. Найти седловые точки, если они существуют.

2. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Два телеканала борются за зрительскую аудиторию. У каждого есть три рейтинговые передачи, каждую из которых нужно разместить на одну из пяти позиций (три дневные и две вечерние) в сетке вещания. Телеканал получает прибыль на позиции в сетке вещания, если в этот момент транслируется только его рейтинговая передача. Прибыль равна одному очку для дневных передач и пяти очкам для вечерних.

Решить матричные игры со следующими матрицами потерь первого игрока.

3. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -5 & 5 & -4 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 8 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 0 & 3 \\ 7 & 3 & 6 & 2 \\ 9 & 8 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

6. **Формализовать и решить матричную игру. Ответ записать словами (в терминах условия).**

Бомбить аэродром отправляются 3 самолета, 2 из них — бомбардировщики. Защитники аэродрома могут сбить любые два самолета. Аэродром разбомблен, если хотя бы один бомбардировщик уцелел.

7. Найти байесовскую стратегию первого игрока в играх с матрицами задач 3–4 в предположении, что второй игрок выбирает каждую последующую стратегию с вероятностью вдвое большей, чем предыдущую.

8. Найти минимаксную и байесовскую (с равными вероятностями применения стратегий вторым игроком) стратегии первого игрока в статистической игре с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}.$$

Здесь δ_1 — купить пакет акций, δ_2 — не покупать пакет акций, θ_1 — нефть подорожает, θ_2 — нефть подешевеет, τ_1 — биржевые индексы растут, τ_2 — биржевые индексы падают. Элементы матрицы A — потери первого игрока в тысячах рублей.

Список литературы

- 1.
2. *Джафаров К. А.* Элементы теории игр/ Джафаров К. А., Могольский А. А. — Новосибирск: изд-во НГТУ, 1997.
3. *Крушевский А. В.* Теория игр/ Крушевский А. В. — Киев: Вища школа, 1977.
4. *Лунгу К. Н.* Линейное программирование/ Лунгу К. Н. — М.: Физматлит, 2009.
5. *Мулен Э.* Теория игр/ Мулен Э. — М.: Мир, 1985.
6. *Палий И. А.* Линейное программирование/ Палий И. А. — М.: Эксмо, 2008.