Министерство образования Российской Федерации

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФОРМАЛИЗМА ДЛЯ ФИЛОЛОГОВ

Рекомендовано Редакционно–издательским советом университета для студентов I курса ФГО (направление “Филология”)

НОВОСИБИРСК
2000

СЕЛЕЗНЕВ В. А. Элементы математического формализма для филологов: Учеб. пособие. – Новосибирск: Изд–во НГТУ, 2000 г., 68 с.

Настоящее пособие подготовлено для студентов I курса филологического отделения факультета гуманитарного образования и содержит разделы: математический формализм, свойства аксиоматических систем.

Объем пособия соответствует краткому семестровому курсу «введение в математику для филологов», читаемому автором в течение нескольких лет.

Цель пособия – познакомить филологов с идеями математического формализма на основе традиционных аксиоматических теорий и классических моделей.

Автор выражает благодарность студентам I курса, оказавшим помощь в подготовке макета.

Список библ. 12 названий.
Рецензент *К. Н. Пономарев*, д–р физ.–мат. наук, проф.
Работа выполнена на кафедре высшей математики.

Оглавление

Введение

Развитие информационных систем и компьютерных технологий открыло новые возможности в исследовании человеческого интеллекта. Цель такого исследования состоит в моделировании интеллекта и, в конечном счёте, автоматизации ряда процессов интеллектуальной деятельности.

Интеллект является процессом и продуктом мышления и отражает отношения объектов различной природы в виде мыслительных образов. Эти образы составляют субъективный информационный мир личности, а обмен информацией между людьми осуществляется посредством различных языковых систем. Знаковые или символьные языковые системы позволяют каждому индивидууму реализовать мысленную систему образов в виде языковых единиц – слов и их структурных образований – текстов.

Различают следующие три основные функции языка:

- отслеживание мысли (опорная функция);
- формирование умозаключений (логическая функция);
- средство общения (коммуникационная функция).

Такую роль языку отводил великий математик Леонард Эйлер (1707 – 1763). Он писал: "Язык нужен людям, чтобы они могли следить за своими мыслями и развивать их, а также общаться друг с другом", ([1, с.282]).

Опорную функцию языка впервые систематически исследовал известный логик конца XIX в. Готлоб Фреге (1848 – 1925). Вот его слова: "Нам удаётся управлять нашим вниманием и направлять мысль в желательное для нас русло благодаря знакам. Когда мы воспроизводим знак, то мы тем самым создаём определённую опору нашей мысли, – определённый центр, вокруг которого возникают различные представления. Из этих представлений мы выбираем одно и опять фиксируем его с помощью знака. Так удаётся шаг за шагом проникнуть во внутренний мир наших представлений и двигаться в этом мире в нужном направлении. Чувственно–наглядное (в форме знаков) позволяет нам не потонуть в потоке восприятий и представлений, непрерывно захлёстывающих наше внимание"

Можно считать, что Фреге открыл акт и цикл процесса организации мыслительных образов в слова и тексты. Представим этот акт в виде схемы 0.

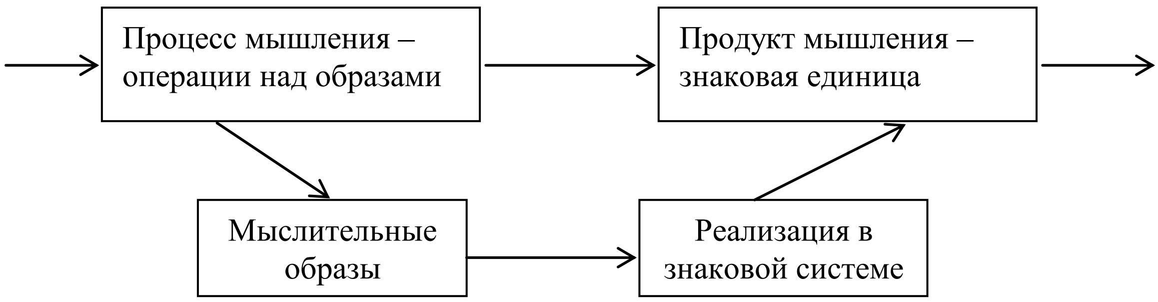


Схема 1

Тогда текст является итерацией, т.е. последовательной композицией таких актов.

Прежде чем сформулировать цели и задачи нашего пособия, приведём языковые понятия, при помощи которых формируется понятие текста.

Ф.1	Определение символьного или знакового языка
Знаковая или символьная система, используемая для такой организации структуры мыслительных образов, которая представляет информацию, называется символьным или знаковым языком	

Пример 1

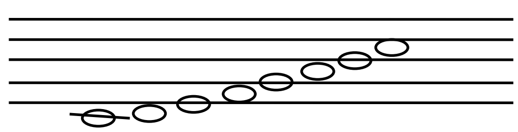
Система дискретных звуковых знаков есть общепринятое понятие человеческого языка, являющегося средством общения.

Пример 2

Система последовательностей двух символов 0 и 1 представляет язык числовых кодов: 110001, 100100100 и т.д.

Пример 3

Система знаков, представляющих музыкальные звуки, называется нотами.

Ф.2	Нотные знаки гаммы целых звуков одной октавы
	

Языковой способ коммуникации, то есть передачи информации, основан на композиции знаковых единиц – потоке слов, организованных в предложения – тексты.

Ф.3	Определение формального слова

Языковую знаковую или символьную единицу, представляющую мыслительный образ, назовём формальным словом

Ф.4	Определение формального предложения
Упорядоченное множество формальных слов, несущее в себе информацию законченного характера, назовём формальным предложением	

Ф.5	Определение формального текста
Последовательность формальных предложений, синтезирующую информационный поток, назовём формальным текстом	

Тексты, организованные в самостоятельные блоки, как это сделано выше, назовём файлами.

Ф.6	Определение файла
Текст	

Файлы несут свой мыслительный образ, и поэтому их можно использовать для организации более сложных, нелинейных текстовых структур: каталогов, диаграмм, блок–схем и т.д. Пример – Схема 1, приведённая ниже. Ещё пример – синтезирование понятия символьного языка в виде блок–схемы:

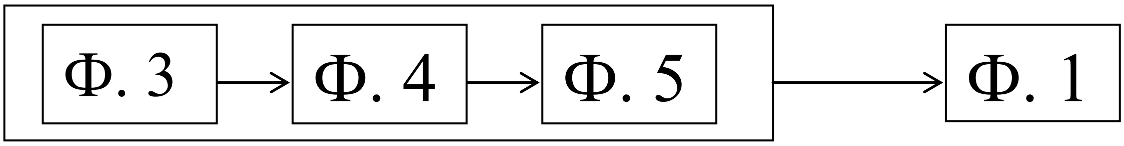


Схема 1

Каждый предмет (литература, математика, экономика и т. д.) имеет свой язык. Разные модели одного предмета имеют разные языки, например:

- литературное произведение на русском и английском языках;
- геометрический и координатный языки в математических моделях;
- геометрическая и аналитическая теория интеграла и т. д.

Каждый из этих предметов и моделей является реализацией процесса мышления в виде языковой модели–текста. Поэтому текст можно считать основным продуктом интеллектуальной деятельности. Следовательно, исследование интеллектуального уровня и интеллектуальных функций – это исследование языковых продуктов.

Вывод

Сущность языковых систем состоит в том, что закономерности мыслительных процессов реализуются в законах организации текстовых структур.

Вопрос

Каковы закономерности знаковых систем, представляющих интеллектуальную продукцию в текстовой форме?

Ответ на этот вопрос не возможен без анализа современного научного направления, синтезированного исследованиями психологии, лингвистики, математики, физики информационных процессов и др. Остановимся кратко на избранных достижениях исследований языковых текстов.

В первой половине XX столетия исследования Эсту, Кондона и Ципфа завершились открытием статистического рангового распределения элементов словаря.

В чём суть этого открытия? Известно, что одни слова как знаковые единицы употребляются чаще, чем другие. Упорядочим их так: в качестве номера слова возьмём частоту n вхождения этого слова в тексты. Эту частоту назовём рангом, так что самое частое слово имеет ранг 1, второе по частоте слово имеет ранг 2 и т. д. Пусть P_n обозначает случайную частоту появления в тексте слова с рангом n. Тогда существует статистическое распределение, выражающее функциональную зависимость частоты P_n от ранга n. Бенуа Мандельброт объявил ранговое распределение законом языка. Этот закон представляется аналитической зависимостью [2], [12]:

$$P_n = k/(\beta+n)^{\gamma},$$

где «гамма» приблизительно равна 1, постоянные величины k и β выражаются через частоту вхождения самого частого слова и длину текста.

Компьютерная обработка текстов показала, что закон Мандельброта не выражает математического ожидания, к которому, по вероятности, сходятся ранговые распределения слов длинных текстов. То есть не выполняется статистический закон больших чисел. Более того, на разных текстовых выборках слова не сохраняют вероятности вхождения. Таким образом, гипотеза Мандельброта о законе языка в форме рангового распределения не подтвердилась.

В 70–х гг. советский кибернетик Ю. Орлов предположил, что закон Мандельброта справедлив для завершённых текстов [2]. Тем самым поставлена задача исследования закономерностей целостного восприятия текстов различной природы: художественных, музыкальных, специализированных. Фактически, это подводит нас к проблеме моделирования смысловых отношений в знаковых системах, представляющих тексты.

В историческом плане работа в этом направлении только начинается. Впереди – открытия, которые помогут нам осознать закономерности функционирования интеллектуальных систем посредством изучения текстовых структур – основного интеллектуального продукта. Современное состояние исследований в этом направлении можно отражено в трудах научных конференций (см., например [2], [3], [12], а также указанную там библиографию).

Данное учебное пособие выполняет скромные функции семестрового курса математики, читаемого автором на гуманитарном факультете НГТУ. Целью курса является ознакомление студентов с идеями и методами математического формализма, т. е. математического языка. Автор считает, что математические тексты и структуры в определённом смысле являются образцами, представляющими простейшие интеллектуальные продукты. Насколько значительна роль математических стереотипов в исследовании общих текстовых структур, автору неизвестно. Очевидно лишь то, что рождение новых информационных технологий и автоматизация интеллектуального труда требует ревизии многих сложившихся формализаций в науке, и соответствующие исследования лежат в пересечении гуманитарных и точных наук.

Мы будем знакомиться с математикой как с искусственным языком и рассматривать ее в качестве интеллектуального ремесла. Поэтому главная наша задача состоит в том, чтобы понять назначение этого ремесла. Мы считаем, что смысл математического языка заключается в знаковой формализации канонических образов, которыми оперирует интеллект в различных информационных областях. Под знаковой формализацией образов мы понимаем направленное или волевое действие трех функций языка:

- присваивание мыслительному образу знака (действие опорной функции);
- оперирование образами как знаками (действие логической функции);
- реализация мысли в виде системы знаков (коммуникационная функция).

В указанном языковом смысле математику следует считать искусственной составляющей естественного интеллекта, развиваемой самим интеллектом для оптимизации своей деятельности.

Будем, например, считать одной из целей развития информационных технологий автоматизацию интеллектуального труда. Тогда мы с необходимостью признаем, что возможность компьютерного оперирования «образами» связано с преобразованием образов человеческих мыслей на язык отношений в определенных математических структурах. Поэтому для начала необходимо ответить на следующие вопросы:

- Как возникают математические структуры и что это такое?
- Как устроены такие структуры и как они функционируют?

Изучению этих вопросов мы посвящаем первую и вторую главы, названные нами, соответственно, «Математический формализм» и «Свойства аксиоматических систем».

Господь Бог создал натуральные числа; все остальное дело рук человеческих.
Леопольд Кронекер (1823–1891)

ГЛАВА I
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФОРМАЛИЗМ

§ 1. О понятии действительных чисел

1.1. Формализм натуральных чисел

Человек обладает способностью образно различать количества предметов и представлять количественные образы в знаковой или символьной системе. Эта способность отражает свойство нашего интеллекта, а соответствующая символьная реализация называется натуральным рядом. Проанализируем процесс построения натурального ряда. Для этого вначале построим файл, определяющий эмпирические, то есть опытные, способности человека, на которых основана интересующая нас символьная формализация.

Ф.1.	Эмпирические свойства, предопределяющие структуру натурального ряда.
1^{o}. Любой объект может быть выбран начальным элементом перечисления	
2^{o}. Для любого количества перечисленных элементов определено единственное следующее за ним количество	
3^{o}. начальному элементу не предшествует никакое количество	
4^{o}. Двум одинаковым количествам предшествуют два одинаковых количества	
5^{o}. Построенное множество количеств однозначно в том смысле, что все другие построенные таким образом количества совпадают и могут отличаться только символьными системами	

Теперь займемся формализацией сформулированных свойств. Это означает, что требуется построить систему аксиом (правил), отражающих операции 1^{o}–5^{o} в символьной форме.

Дадим символьную реализацию операций 1^{o}–5^{o}. Свойство 1^{o} позволяет выбрать первый элемент, обозначим его 1. Свойство 2^{o} устанавливает операцию следования на множестве элементов. Эту операцию представим в виде схемы

$$\ldots \to x \to s(x) \to \ldots \qquad (1)$$

Заметим, что свойству 1 также удовлетворяет схема

$$\begin{tikzcd} \ldots \arrow[r] & x \arrow[r] & s(x) \arrow[r] & \ldots \\ \ldots \arrow[r] & y \arrow[ur] & & \end{tikzcd} \qquad (2)$$

Свойство 4^{o} указывает, что схема (2) реализоваться не может. Свойство 3^{o} устанавливает первый элемент, и мы приходим к линейной цепочке

$$1 \to s(1) \to \ldots \to x \to s(x) \to \ldots \qquad (3)$$

Наконец, свойство 5° утверждает, что всякая другая линейная цепочка со свойствами 1°–4° будет отличаться только знаковой системой

$$1 \to \alpha \to \ldots \to \beta \to \gamma \to \ldots \tag{4}$$

Приведем в немного измененном виде систему аксиом Джузеппе Пеано (1858–1932), формализующую построение цепочки (3). При этом каждую аксиому сформулируем подробно и представим кратко на языке символов формальной логики.

Ф.2.	Структура натурального ряда
Множество, элементы которого удовлетворяют следующим свойствам 1°–5°, имеет структуру линейной цепочки (3) и называется натуральным рядом N 1°. Некоторый элемент называется первым и обозначается символом 1 $\exists$ x (x:= 1) 2°. Для всякого элемента x существует единственный элемент S(x), следующий за x $\forall x \, \exists y \, (y = S(x))$ $\forall x, y \, (y = x \Rightarrow S(x) = S(y))$ 3°. Единице не предшествует никакой элемент $\forall x \, (S(x) \neq 1)$ 4°. Всякому элементу предшествует единственный элемент $\forall x, y \, (S(x) = S(y) \Rightarrow x=y)$ 5°. Аксиома индукции. Пусть подмножество $M \subset N$ содержит 1, и для его элементов x выполняются свойства 2°–4° (обозначим выполнение свойств 1°–4° T(x)). Тогда $N \subset M$ $\forall x \, (x \in M) \Lambda (T(x)) \Rightarrow M=N$	

Заметим, что далеко не все свойства, “приписываемые” натуральному ряду, следуют из этой аксиоматики. Рассмотрим модель натурального ряда, предложенную норвежским математиком Торальфом Сколемом (1887–1963). К линейной цепочке (3) добавляются последовательности блоков вида

$$\ldots \to a_{-2} \to \alpha_{-1} \to \alpha_0 \to \alpha_1 \to a_2 \to \ldots$$

тогда в новой цепочке найдутся новые элементы, которые нельзя представить в виде конечного числа операций *S*. То есть некоторые элементы “*y*” модели Сколема не удовлетворяют условию

$$y = S\,(S\,(\ldots S(1))),$$

где $S\,(S\,(\ldots S(1)))$ – конечное число композиций.

Такие элементы *y* назовем недостижимыми.

С другой стороны, в десятичной символьной модели натурального ряда 1, 2, 3, …, n, n+1, …, свойство конечной достижимости выполняется, так как десятичная запись содержит информацию о порядке числа. Десятичная система использует конечный цифровой алфавит 0, 1, 2, …, 9. Суть построения символа целого числа в этой системе в том, что вводятся операции сложения и умножения, и закон записи имеет вид $\forall a \in N$

$$a = \alpha_n \alpha_{n-1 \ldots} \alpha_1 \alpha_0 = \alpha_n \cdot 10^n + \alpha_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + \alpha_1 \cdot 10 + \alpha_0\,,$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in (0, 1, \ldots, 9) \wedge (\alpha_n \neq 0)$.

Поскольку операции сложения и умножения ранее не фигурировали в модели Ф.2, то следует добавить аксиомы, определяющие свойства этих операций. Добавляя новые операции вместе с определяющими их аксиомами, мы не только расширяем свойства натурального ряда, но и само множество натуральных чисел. Рассмотрим этот процесс подробнее.

1.2. Операции, определяющие формирование множества рациональных чисел

Практическая необходимость перечислять предметы привела к формированию понятия натурального ряда. Практическая же необходимость арифметических операций над натуральными числами приводит к формированию более широкого класса величин – рациональным числам. Схематично это выглядит так:

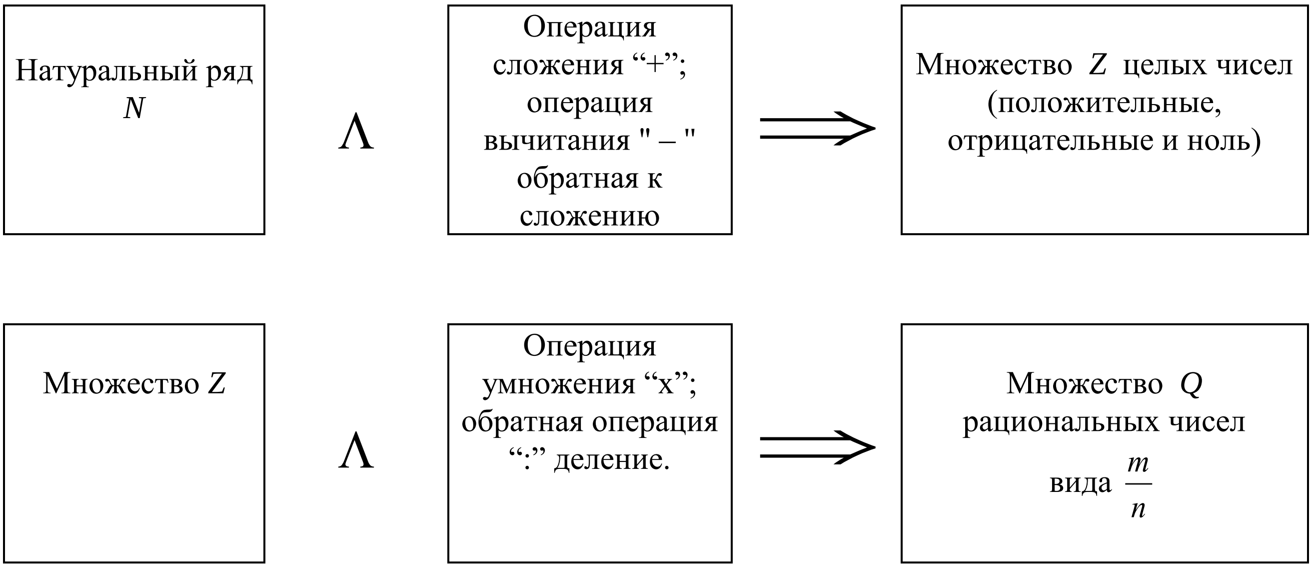


Схема 2

Вывод 1

Множество чисел представимых в виде несократимых дробей m/n, где: $m, n, \in N, n \neq 0$ называется множеством рациональных чисел и обозначается Q. На этом множестве определим операции $\pm, \times, :,$ и результат действия этих операций над рациональными числами есть снова рациональное число.

Мы не будем обсуждать все свойства рациональных чисел, а ограничимся напоминанием свойств систематического представления рациональных чисел, известных из элементарного курса математики.

Наличие операций сложения и умножения позволяет построить представление целых чисел при помощи алфавита, содержащего K знаков, называемых цифрами.

Такое представление дается записью вида: $\forall a \in \boldsymbol{N}$

$$a = a_n K^n + \ldots + a_1 K + a_0 \quad (5)$$

и называется систематической K–ичной записью по основанию K. Символы a_0, a_1, ... , a_n принимают одно из K значений 0,1,2, ... , K–1. Если $K \leq 10$, то для обозначения K цифр используют первые K цифр десятичной системы 0,1,2, ... , K–1. Для обозначения степеней оснований (классов) K^1, K^2, ..., K^n используются уже введенные числовые обозначения (классы “тиражируются медленнее”, чем числа, входящие в эти классы).

Запись целых чисел в K–ичной системе позволяет реализовать арифметические операции над рациональными числами в виде некоторых алгоритмов, то есть правил выполнения последовательности простых операций над цифрами, представляющими рациональные числа.

В школьном курсе изучаются алгоритмы арифметических операций в десятичной системе.

Напомним для примера алгоритм сложения целых чисел.

Пусть $a = 247 = 2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 7$, $в = 378 = 3 \cdot 10^2 + \mathbf{7} \cdot 10 + 8$

Найти $C = a + в$.

Складывая цифры, нумерующие разряды единиц, десятков и сотен, получаем:

$$7+8 = 10+5 \quad \text{(единицы)}$$
$$4 \cdot 10 + 7 \cdot 10 = 10^2+10 \quad \text{(десятки)}$$
$$2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^2 = 5 \cdot 10^2 \quad \text{(сотни)}$$

Учитывая правила формирования разрядов, составляем десятичную запись числа $C = a + в$:

$$C = (10^2 + 5 \cdot 10^2) + (10+10)+5 = 6 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 5 = 625$$

Кроме реализации арифметических операций систематическое представление чисел дает алгоритм сравнения чисел по величине.

Для сравнения целых положительных чисел достаточно сравнить цифры разрядов по старшинству, например 197<211, так как $197 < 2 \cdot 10^2$, а $211 > 2 \cdot 10^2$.

Алгоритм представления рационального числа $\frac{m}{n}$ в десятичной записи приводит к двум типам записи, известным из школьного курса.

Всякое рациональное число может быть представлено конечной десятичной дробью вида

$$\alpha_m .. \alpha_1 \alpha_0 , \beta_1 .. \beta_n = 10^m \cdot \alpha_m + \ldots + \alpha_1 \cdot 10 + \alpha_0 + \frac{\beta_1}{10} + \frac{\beta_2}{10^2} + \ldots + \frac{\beta_n}{10^n} ,$$

(6)

либо бесконечной периодической дробью вида:

$$\begin{aligned} &\alpha_m .. \alpha_1 \alpha_0 , \beta_1 .. \beta_n \beta_1 .. \beta_n \ldots = \alpha_m \bullet 10^m + \ldots + \alpha_1 \bullet 10 + \alpha_0 \ldots + \\ &+ \frac{\beta_1}{10} + \frac{\beta_2}{10^2} + \ldots + \frac{\beta_n}{10^n} + \frac{\beta_1}{10^{n+1}} + \frac{\beta_2}{10^{n+2}} + \ldots + \frac{\beta_n}{10^{2n}} + \ldots \end{aligned} \qquad (7)$$

Напомним также, что алгоритм представления рационального числа в виде (6) или (7) основан на следующем свойстве целых чисел.

Для любых $a, b \in \mathbf{N}$, $(a > b)$ существуют $m, n \in \mathbf{N}$, $(m<a, n<b)$ такие, что

$$a = bm + n \qquad (8)$$

Вывод 2

Аксиоматика рациональных чисел должна содержать правила, определяющие операции сложения, умножения, сравнения чисел и связь между этими операциями.

Замечание 1

Запись рациональных чисел в виде (7) требует обоснования, которое заключается в объяснении сходимости числового ряда, т.е. существования конечного числа, являющегося результатом бесконечного суммирования в следующей записи:

$$\frac{\beta_1}{10}+\ldots+\frac{\beta_n}{10^n}+\frac{\beta_1}{10^{n+1}}+\ldots+\frac{\beta_n}{10^{2n}}+\ldots+\frac{\beta_1}{10^{pn+1}}+\ldots+\frac{\beta_n}{10^{pn+n}}+.. \tag{9}$$

Объяснение того, что эта сумма представляет конечное число, основано на формальных оценках

$$\frac{\beta_k}{10^{pn+k}}\le\frac{9}{10^{pn+k}}\left(k=1,\ldots,n;\ p=1,2,3,\ldots\right),$$

позволяющих показать, что сумма (9) не превосходит n сумм геометрических прогрессий:

$$\left(\frac{\beta_1}{10}+\ldots+\frac{\beta_n}{10^n}\right)+\left(\frac{\beta_1}{10^{n+1}}+\ldots+\frac{\beta_n}{10^{2n}}\right)+\ldots+\left(\frac{\beta_1}{10^{pn+1}}+\ldots+\frac{\beta_n}{10^{pn+n}}\right)+\ldots=$$

$$=\left(\frac{\beta_1}{10}+\frac{\beta_1}{10^{n+1}}+\ldots+\frac{\beta_1}{10^{pn+1}}+\ldots\right)+\ldots+$$

$$+\left(\frac{\beta_n}{10^n}+\frac{\beta_n}{10^{2n}}+\ldots+\frac{\beta_n}{10^{pn+n}}+\ldots\right)\le\frac{9}{10}\left(1+\frac{1}{10^n}+\ldots+\frac{1}{10^{pn}}+\ldots\right)+\ldots+$$

$$+\frac{9}{10^n}\left(1+\frac{1}{10^n}+\ldots+\frac{1}{10^{pn}}+\ldots\right)=9\left(1+\frac{1}{10^n}+\ldots+\frac{1}{10^{pn}}+\ldots\right)\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\ldots+\frac{1}{10^n}\right)=$$

$$=9\frac{1}{\left(1-\frac{1}{10^n}\right)}\bullet\frac{\frac{1}{10}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)}{\left(1-\frac{1}{10}\right)}=1$$

1.3. Аксиоматика рациональных чисел

Конструктивное определение рациональных чисел Q дано в схеме 2 предыдущего пункта. Приведем аксиоматическое определение. Оно содержит тот минимум правил, который обеспечил построение множества Q в предыдущем пункте.

Определение 1

Множество Q называется множеством рациональных чисел, а его элементы – рациональными числами, если выполняется следующий комплекс условий, называемый аксиоматикой рациональных чисел:

Аксиомы операции сложения

Для всякой упорядоченной пары x,y элементов из Q определен некоторый элемент $x+y \in Q$, называемый суммой x и y. При этом выполняются следующие условия:

1. (Существование нуля) Существует элемент 0 (нуль) такой, что для любого $x \in Q$

$$x+0=0+x=x.$$

2. Для любого элемента $x \in Q$ существует элемент $-x \in Q$ (противоположный x) такой, что

$$x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

3. (Коммутативность) Для любых $x,y \in Q$

$$x + y = y + x.$$

4. (Ассоциативность) Для любых $x,y,z \in Q$

$$x + (y + z) = (x + y) + z.$$

Аксиомы операции умножения

Для всякой упорядоченной пары x, y элементов из Q определен некоторый элемент $xy \in Q$, называемый произведением x и y. При этом выполняются следующие условия:

5. (Существование единичного элемента) Существует элемент $1 \in Q$ такой, что для любого $x \in Q$

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x.$$

6. Для любого элемента $x \in Q$, ($x \neq 0$) существует обратный элемент $x^{-1} \neq 0$ такой же, что

$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1.$$

7. (Ассоциативность) Для любых $x, y,z \in Q$

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z.$$

8. (Коммутативность) Для любых $x, y \in Q$

$$x \cdot y = y \cdot x.$$

Аксиома связи сложения и умножения

9. (Дистрибутивность) Для любых $x, y, z \in Q$

$$(x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$$

Аксиомы порядка

Всякие два элемента $x, y, \in Q$ вступают в отношение сравнения $\leq$. При этом выполняются следующие условия:

10. $(x \leq y) \wedge (y \leq x) \Longleftrightarrow x=y.$

11. $(x \leq y) \wedge (y \leq z) \Longrightarrow x \leq z.$

12. Для любых $x, y \in Q$ либо $x< y$, либо $y < x$.

Отношение < называется строгим неравенством,

Отношение = называется равенством элементов из Q.

Аксиома связи сложения и порядка

13. Для любых $x, y, z \in Q$, $(x \leq y) \Rightarrow x+z \leq y+z.$

Аксиома связи умножения и порядка

14. $(0 \leq x) \cap (0 \leq y) \Rightarrow (0 \leq x \times y).$

Аксиома непрерывности Архимеда

15. Для любых $a > b > 0$ существует $m \in N$ и $n \in Q$ такие, что $m \geq 1$, $n < b$ и $a = mb+n$.

Следствие

Аксиомы множества Q позволяют:

1. Построить систематическую запись рациональных чисел при помощи конечного алфавита (цифровых символов).
2. Определить алгоритмы реализации операций $\pm$, $\times$, :, $\leq$ в систематической записи рациональных чисел.

1.4. *Задачи, приводящие к расширению множества рациональных чисел*

Решение задач, имеющих практический интерес, не исчерпывается арифметическими операциями над числами. Рассмотрим следующие две задачи.

Задача 1

Измерить длину диагонали квадрата, считая, что единица длины есть сторона этого квадрата.

Теорема Пифагора дает результат: искомая длина равна $\sqrt{2}$. Предположение о том, что $\sqrt{2} = p/q$ – рациональное число опровергается известным доказательством от противного. Предположим, что $\sqrt{2} = k/q \Rightarrow p^2 = 2q^2 \Rightarrow p=2k \Rightarrow 2q^2 = 4k^2 \Rightarrow q = 2m \Rightarrow \sqrt{2} = \dfrac{2k}{2m}$ – сократимая дробь, что противоречит несократимости дроби $\sqrt{2} = p/q$.

Заметим, что величина $\sqrt{2}$ является решением уравнения $x^2 - 2 = 0$. Действительные рациональные числа, являющиеся решениями алгебраических уравнений

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a = 0 \qquad (10)$$

с целочисленными коэффициентами $a_k \in Z$, $k=1, \ldots, n$, называются алгебраическими числами. Таким образом, число $\sqrt{2}$ является алгебраическим числом и результатом алгебраической операции – извлечения корня.

Карл Фридрих Гаусс (1777 – 1855) доказал (см., например, ([4, с. 63])), что алгебраические числа являются либо целыми числами, либо не представимы в виде p/q ни для каких целых $p, q \in Z$.

Задача 2

Измерить длину окружности, считая, что диаметр этой окружности есть единица длины.

Длина окружности $L = 2\pi R$, где R – радиус. В нашем случае L=3,1415… . Число π не является ни рациональным, ни алгебраическим, [4]. То, что число π не является рациональным числом, впервые было установлено в 1761 г. французским математиком Иоганном Генрихом Ламбертом (1728 – 1777).

Подчеркнем, что число π не является результатом применения алгебраических операций. Оно может быть выражено согласно алгоритму Ф. Гаусса ([5, с. 41]), который представляет последовательность некоторых простых операций, пронумерованных числами натурального ряда.

Вывод 3

Существуют числа, не являющиеся результатом конечного числа арифметических операций над целыми числами и не представимые в виде p/q ни для каких целых p, q.

Числа, не представимые в виде p/q ни для каких целых p, q, называются иррациональными.

1.5. Аксиоматизация множества действительных чисел

Конструктивное построение множества действительных чисел можно представить в виде схемы 3.

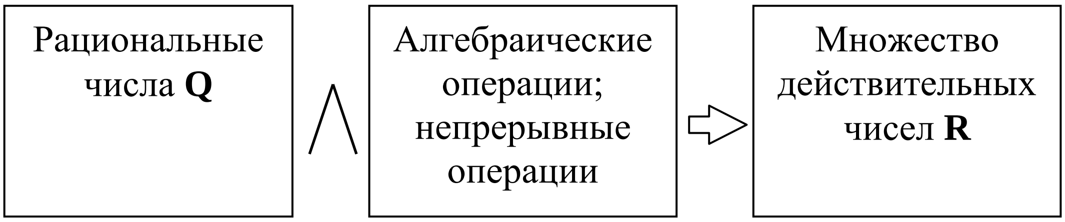


Схема 3

Непрерывными операциями мы называем вычислительные алгоритмы, состоящие из арифметических и других простых операций, пронумерованных натуральным рядом. Описание непрерывных операций потребует разработки вспомогательных понятий. Избежать такой дополнительной работы можно аксиоматическим заданием множества действительных чисел.

Добавим к аксиомам, определяющим в п. 3. множество рациональных чисел Q, еще одну.

Аксиома непрерывности Кантора.

16. Пусть элементы $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots, y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ удовлетворяют условию $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots < y_n < \ldots y_2 < y_1$ и пусть для любого положительного элемента $\varepsilon > 0$, начиная с некоторого номера n, выполняются условия $y_k - x_k < \varepsilon$, $k = n, n+1, \ldots$. Тогда существует элемент Z такой, что при всех значениях n выполняется $x_n < Z < y_n$.

То, что элемент Z, о котором говорится в этой аксиоме, является единственным, несложно доказать от противного.

Определение 2

Множество R называется множеством действительных чисел, а его элементы действительными числами, если они удовлетворяют всем тем же аксиомам 1–15, что и рациональные числа и, дополнительно, аксиоме непрерывности Кантора.

1.6. О представлении действительных чисел

Мы видели, что формирование аксиоматик множеств натуральных рациональных и действительных чисел связано с выполнением определенных операций над числами. Система записи или представления чисел связана и с другими задачами.

Задача 1

Построить символьную запись числа, в которой эффективно реализуются алгоритмы арифметических и алгебраических операций. Мы уже отмечали, что наиболее подходящей для этой цели является систематическая запись числа (десятичная, двоичная и др.)

Задача 2

Построить представление чисел, в котором иррациональные числа приближаются рациональными числами наилучшим образом. Рациональная дробь p/q приближает иррациональное число α наилучшим образом, если для любого рационального числа m/n с $n \le q$ выполняется равенство $|\alpha - p/q| < |\alpha - m/n|$.

Рассмотрим десятичные приближения. Пусть $m = a_0, a_1, \ldots, a_k$ – десятичное приближение с "k" знаками после запятой числа $\alpha = a_0, a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots$. Тогда погрешность этого приближения определяется разностью

$$|\alpha - m/n| = a_{k+1}/10^{k+1} + a_{k+2}/10^{k+2} + \ldots < 9/10^{k+1}\ (1 + 1/10 + \ldots) = 9/10^{k+1} \times 1/(1 - 1/10) = 1/10^{k} \sim 1/n.$$

Для лучших приближений используется представление иррационального числа цепной дробью [6]. Если p/q – конечная цепная дробь, приближающая число α, то ([6, с. 46]), $|\alpha - p/q| < 1/q^2$.

Таким образом, представление числа цепной дробью «более экономично», чем представление десятичной дробью.

Напомним, что до сих пор не найдены эффективные алгоритмы арифметических операций для представлений чисел в виде цепных дробей, ([6, с. 29–30]).

§ 2. Аксиоматическое обоснование евклидовой геометрии

2.1. О "Началах" Евклида

Александрийский ученый Евклид, живший в третьем веке до нашей эры, впервые в истории предпринял попытку глобальной систематизации математических фактов. Его "Начала" состояли из 13 книг, которые представляли собой, по существу, главы, посвященные отдельным вопросам математики. В них дано безупречное для того времени построение геометрии. Евклид начинал изложения с определений, постулатов и аксиом. Затем идут теоремы, которые представляют собой умозаключения, основанные на постулатах, аксиомах, определениях и ранее доказанных теоремах.

Математические построения начинаются с 23 определений. Приведем некоторые из них:

- Точка есть то, что не имеет частей
- Линия же – длина без ширины
- Концы линии – точки
- Прямая линия есть та, которая равно расположена по отношению к точкам на ней
- Параллельные прямые – это прямые которые находятся в одной плоскости и при неограниченном продолжении ни с той, ни с другой стороны не пересекаются и т.д.

Далее Евклид излагает постулаты и аксиомы, формулировки которых представляют для нас лишь исторический интерес.

Постулаты

1. От всякой точки до всякой точки можно провести прямую линию.
2. Каждую прямую можно непрерывно продолжать по прямой.
3. Из любого центра можно описать окружность любым радиусом.
4. Все прямые углы равны между собой.
5. Если прямая, падающая на две прямые, образует внутренние по одну сторону углы, меньшие в сумме двух прямых, то продолженные эти прямые неограниченно встретятся с той стороны, где углы в сумме меньше двух прямых.

Аксиомы

1. Равные одному и тому же равны между собой.
2. Если к равным прибавляются равные, то целые будут равны.
3. Если от равных отнимаются равные, то остатки будут равны.
4. Если к неравным прибавляются неравные, то целые будут не равны.
5. Удвоенные одного и того же равны между собой.
6. Половины одного и того же равны между собой.
7. Совмещающиеся друг с другом равны между собой.
8. Целое больше части.
9. Две прямые не содержат пространства.

Построения оснований геометрии были проделаны Евклидом с большим мастерством. “Начала” Евклида затмили сочинения его предшественников и на протяжении более чем двух тысяч лет “Начала” представляли образец математической строгости.

С точки зрения современной математики дедуктивные построения Евклида не отражают всех отношений между геометрическими элементами, часть определений логически не задействована, а сами доказательства опираются на ряд неопределяемых понятий.

Существуют различные объяснения роли аксиом и постулатов в “Началах”. Постулаты играют роль модельной аксиоматики, а аксиомы “Начал” являются прообразом аксиоматики действительных чисел. На интуитивном уровне “Начала” предвосхищают многие математические построения.

2.2. Аксиоматика Д. Гильберта(1862–1943)

Появилась в 1899 г. и считается одним из современных аксиоматических обоснований евклидовой геометрии. Вся система аксиом состоит из 20 аксиом и содержит 26 требований, которые описывают 5 видов отношений между тремя геометрическими объектами – точками, прямыми и плоскостями. Отметим, что эти геометрические объекты – точки, прямые и плоскости никак не определяются, рассматриваются как первичные понятия, суть которых раскрывается через описываемые отношения. По типам отношений аксиомы образуют 5 групп и формируются следующим образом.

Группа 1. Аксиомы соединения

Эта группа аксиом описывает отношения инцидентности (связи и принадлежности) между точками, прямыми и плоскостям.

1. Для любых двух различных точек существует прямая, инцидентная этим точкам.
2. Для любых двух различных точек существует не более одной прямой инцидентной этим точкам.
3. Для каждой прямой существуют, по крайней мере, две точки, ей инцидентные. Существуют три точки, не инцидентные одной прямой.
4. Для любых трех точек, не инцидентных прямой, существует плоскость, инцидентная этим точкам. Для каждой плоскости существует, по крайней мере, одна точка, ей инцидентная.
5. Для трех различных точек, не инцидентных прямой, существует не более одной плоскости, инцидентной этим точкам.
6. Если две точки прямой инцидентны плоскости, то каждая точка этой прямой инцидентна плоскости (т.е. вся прямая инцидентна плоскости).
7. Если две плоскости имеют точку им инцидентную, то существует, по крайней мере, еще одна точка, им инцидентная.
8. Существуют четыре точки, не инцидентные одной плоскости.

Заметим, что аксиомы 3 и 4 содержат по два требования. Приведем примеры типичных утверждений, доказываемых в группе 1.

Теорема 1

Две различные точки определяют одну и только одну прямую им инцидентную.

Теорема 2

Три точки, не инцидентные одной прямой, определяют одну и только одну плоскость им инцидентную.

Теорема 3

Прямая и не инцидентная ей точка определяют одну и только одну плоскость, им инцидентную.

И так далее.

Группа 2. Аксиомы порядка

Аксиомы этой группы определяют линейный порядок точек на прямой и понятие полуплоскости относительно прямой на плоскости. Первая аксиома содержит два требования.

9. Если *A, B, C* – три точки, инцидентные прямой, и точка *B* лежит между точками *A, C*, то: а) точки *A, B, C* различны; б) точка *B* лежит между точками *C, A*.

10.Для любых двух точек *A, B,* инцидентных прямой *a*, существует точка *C* прямой *a* такая, что точка *B* лежит между точками *A* и *C*.

11.Для трех различных точек, инцидентных прямой, существуют не более одной из них, которая лежит между двумя оставшимися.

Для формулировки следующей аксиомы требуется дать некоторые определения, являющиеся логическими следствиями уже сформулированных аксиом 1–11.

Определение

Две точки на прямой A и B определяют отрезок.

Следствие

Согласно аксиомам 9–11 *на этой прямой существуют точки, внешние и внутренние по отношению к отрезку AB*.

Определение

Совокупность трех точек A, B, C, не инцидентных одной прямой, и трех отрезков AB, AC и BC называется треугольником.

Аксиома Паша

12.Пусть задан треугольник *ABC* и в его плоскости прямая а, не проходящая через *A, B, C*. Если прямая а пересекает одну сторону *AC* треугольника, то она пересекает по крайней мере еще одну сторону.

Вот типичная теорема этой группы аксиом.

Теорема 4

Отрезок *AB* имеет бесконечное множество внутренних точек (т.е. точек, лежащих между *A* и *B*).

Схема доказательства.

(1) существует точка *C*, не принадлежащая прямой *AB* (акс.3) (рис. 1);

(2) существует точка *D* на прямой *AC* и точка *C* лежит между *A* и *D*;

(3) существует прямая *BD*, (акс.1–2) и существует точка *E* и *D* лежит между *B* и *E*;

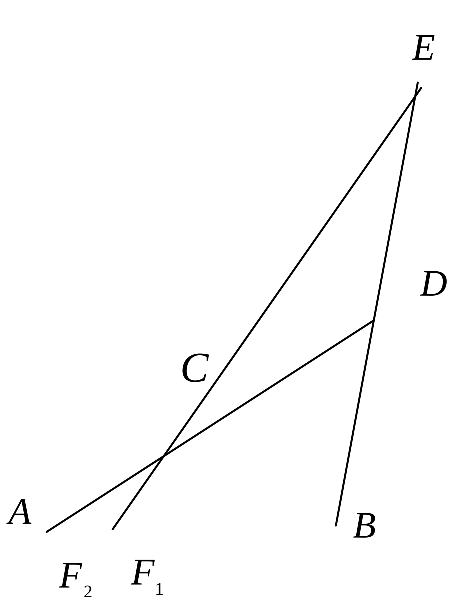


Рис. 1

(4) прямая EC по аксиоме Паша имеет общую~~ с AB точку F_1 ~~(иначе EC совпадет с ED).

(5) аналогично доказывается, что на AF_1 существует еще одна точка F_2, и т.д.

Теорема доказана.

Примечательно то, что для доказательства существования внутренних точек отрезка приходится "выходить" на плоскость. Далее можно определить понятия луча, полуплоскости, угла, многоугольника и т.д.

Группа 3. Аксиомы конгруэнтности

Группы аксиом 1–3 позволяют доказать основные свойства отношения конгруэнтности между геометрическими фигурами, определить понятие движения в геометрии и установить признаки конгруэнтности геометрических фигур. Первая аксиома этой группы содержит два требования, а четвертая–три.

13. Пусть даны отрезок AB а также прямая a' и точка $A' \in a'$. $\exists$ точка $B' \in a'$ с заданной стороны относительно точки A' такая, что отрезок AB конгруэнтен отрезку $A'B'$ (обозначим это $AB \equiv A'B'$), требуется также, чтобы $AB \equiv BA$.

14. $AB \equiv A''B'', A'B' \equiv A''B'' \Rightarrow AB \equiv A'B'$.

15. Пусть AB и BC – отрезки на прямой a, $AB \cap BC = B$, тогда $AB \equiv A'B', BC \equiv B'C'$ и B' лежит между A' и $C' \Rightarrow AC = A'C'$.

16. Пусть $\angle a_1 b_1$ есть угол с вершиной O. Для любой точки O' и любого выходящего из нее луча a_1' можно построить в заданной плоскости, инцидентной a', по любую сторону от a' один и только один, второй луч b_1' такой, что $\angle a_1 b_1 \equiv \angle a_1' b_1'$.

Требуется также, чтобы $\angle a_1 b_1 \equiv \angle a_1 b_1$ (угол конгруэнтен самому себе) и $\angle a_1 b_1 \equiv \angle b_1 a_1$

17. Пусть даны два треугольника ABC и $A'B'C'$ таких, что $AB \equiv A'B'$, $BC \equiv B'C', \angle ABC = \angle A'B'C'$, тогда $\angle BAC = \angle B'A'C'$.

На основании аксиом конгруэнтности вводятся понятия прямого угла, смежных и вертикальных конгруэнтных углов, операции сравнения углов и отрезков. Отрезок AB больше отрезка CD, обозначается $AB>CD$, если при совмещении точек A и C и откладывании точек B и D по одну сторону от точки A на некоторой прямой, точка D будет лежать между A и C.

В этой группе аксиом доказываются три признака конгруэнтности треугольников, свойства равнобедренных и равносторонних треугольников и т.д. Справедлива также теорема о внешнем угле треугольника в слабом варианте (известная еще Евклиду).

Теорема (о внешнем угле треугольника)

Внешний угол треугольника больше любого не смежного с ним угла треугольника.

Аксиомы 13–17 позволяют ввести операцию движения в геометрии.

Определение движения

Взаимно однозначное соответствие точек плоскости $f: A \leftrightarrow A'$ называется движением, если соответствующим парам точек $f: A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$ соответствуют конгруэнтные отрезки $AB \equiv A'B'$.

Замечание 1

В этой группе вместо аксиом 13–17 можно аксиоматически задать движение и некоторые его свойства. Тогда аксиомы 13–17 будут являться теоремами, которые доказываются на основании аксиом движения.

Вывод 1

Аксиомы 1–17 первых трех групп позволяют построить геометрию, в которой на прямой существует последовательность примыкающих друг к другу конгруэнтных отрезков, пронумерованных натуральным рядом. В этой геометрии есть конгруэнтные и правильные фигуры, определено понятие движения, совмещающего конгруэнтные фигуры и т. д.

Но в этой геометрии еще нет понятия параллельного переноса, не определено соответствие между действительными числами и точками прямой. Отсутствуют понятия длины отрезка, площади и объема геометрических фигур. Следовательно, в этой геометрии еще нет понятия расстояния и понятий близости и непрерывности, связанных со свойствами расстояния между точками. Хотя абстрактные понятия близости и непрерывности уже можно вести на языке шаровых окрестностей.

Действительно, шаром B $(O,\ OA)$ с центром в точке O и радиусом OA назовем все точки M такие, что $OM<OA$. Далее, шар $B(O,OA_1) \subset B(O,OA_2)$, если $OA_1<OA_2$, таким образом, множество окрестностей точки O есть множество всех шаров $B(O,\ OP_к\ )$, $k\in N$, где $P_к$– любая точка пространства. Определим последовательность точек $M_к\in B(O,OP_к)$, $k\in N$ условиями a) и b):

a) $OP_1>OP_2>\ldots>OP_к>\ldots$, что означает последовательность вложенных шаров $B(O,OP_1)\supset B(O,OP_2)\supset\ldots\supset B(O,OP_к)\supset\ldots$;

b) $M_к\notin B_{к+1}$ $\forall к\in N$, что означает выбор каждой последующей точки в следующем вложенном шаре.

Вывод 2

Используя лишь аксиомы I–III *групп, мы не сможем установить существование предела у последовательности* $M_1, M_2, \ldots, M_к, \ldots$ *, а в случае существования мы не сможем доказать его единственность.*

Группа 4. Аксиомы непрерывности

Для описания свойства непрерывности расположения точек на прямой, определения длины отрезка и величины угла, установления взаимно однозначного соответствия между длинами всех отрезков и множеством действительных чисел вводим две следующие аксиомы.

18. *Аксиома Архимеда*. Пусть даны два произвольных отрезка AB и CD; существует такое натуральное n, что $n\cdot CD>AB$ ($n\cdot CD$ – обозначаем отрезок, полученный откладыванием отрезка CD n раз так, что конец предыдущего откладывания есть начало следующего и два последовательных отрезка имеют только одну общую точку, рис. 2.).

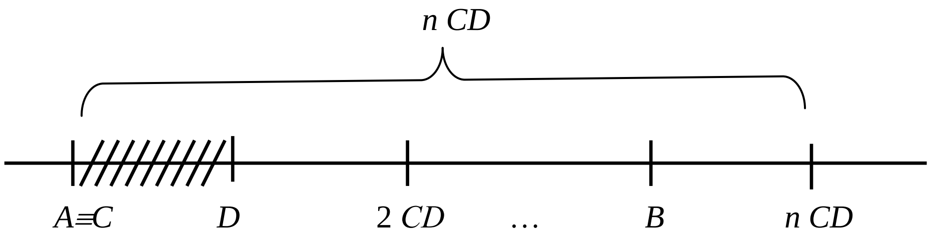


Рис. 2

19. *Аксиома Кантора*. Пусть на прямой дана последовательность отрезков, удовлетворяющая двум требованиям: 1) каждый последующий отрезок содержится в предыдущем 2) не существует отрезка, принадлежащего всем отрезкам последовательности. Тогда существует точка, принадлежащая всем отрезкам последовательности.

Аксиомы непрерывности 18–19 в геометрии и аксиомы непрерывности Архимеда и Кантора действительных чисел позволяют установить взаимно однозначное соответствие между значениями длин всех отрезков и действительными числами так, что конгруэнтным отрезкам соответствуют равные значения длин.

Замечание 2

Геометрия, построенная на 19 аксиомах групп 1–4, называется абсолютной геометрией. В этой геометрии ещё нет понятия параллельного переноса, поэтому ей принадлежат те и только те утверждения, которые не используют явно или неявно свойства параллельности.

Замечание 3

Конгруэнтные отрезки в абсолютной геометрии имеют равные длины, а конгруэнтные фигуры – равные числовые меры углов, площадей и объемов. Поэтому отношение двух фигур «быть конгруэнтными» в абсолютной геометрии превращается в числовые равенства длин, углов, площадей и объемов фигур или их частей.

В абсолютной геометрии определено расстояние $\rho(A,B)$ между любыми точками A и B, если определено понятие длины на прямой.

$$\rho\,(A,B) = \text{длине отрезка } AB.$$

Расстояние обладает свойствами:

$$\rho\,(A,B) > 0 \Leftrightarrow A \not\equiv B$$

$$\rho\,(A,C) \le \rho(A,B)+\rho(B,C), \quad \forall\ A,B,C$$

Причем равенство выполняется только для точек A, B, C, лежащих на одной прямой так, что $A<B<C$.

Вывод 3

Абсолютная геометрия содержит понятия числовых равенств элементов фигур (сторон, углов и т. д.). В этой геометрии существуют понятия близости и непрерывности, основанные на понятии расстояния между точками фигур.

Группа 5. Аксиома параллельности

20. Через любую точку A, не инцидентную прямой “a” , можно провести в плоскости (определяемой этой точкой A и прямой “a”) не более одной прямой, не пересекающейся с “a”.

Замечание 4

То, что через точку A вне прямой “a” можно провести хотя бы одну прямую “b”, не пересекающуюся с “a”, $a \cap b = \varnothing$, мог доказать еще Евклид.

Действительно, опустим перпендикуляр AB на прямую “a”. Затем восстановим в точке A перпендикуляр “b” к прямой AB (рис. 3.).

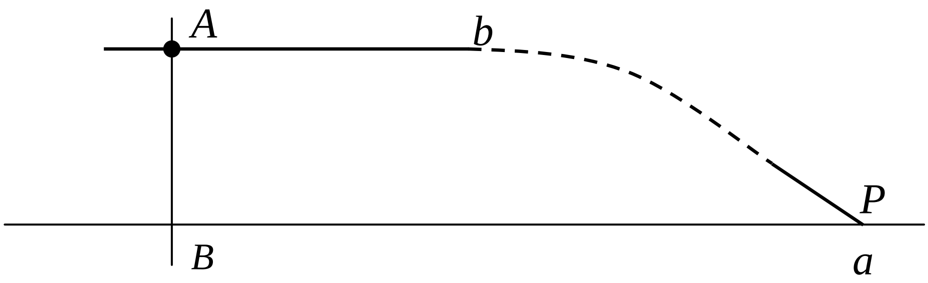


Рис. 3

Если существует пересечение прямых “a” и “b” в точке P, то в треугольнике ABP имеем прямой угол B равный внешнему прямому же углу при вершине A. Это противоречит теореме о внешнем угле треугольника (доказанной на основании I–III групп аксиом!). Следовательно, “b”$\cap$”a”$=\varnothing$.

Итак, одна прямая, проходящая через точку и не пересекающая заданную прямую, существует. Но другую, отличную от этой, прямую никто построить не мог. Это породило иллюзию, что аксиома параллельности (V постулат в «началах» Евклида) может быть доказана. На протяжении почти двух тысяч лет геометры пытались вывести V постулат из остальных, рассуждая от противного. Лишь в XIX в. Николаю Ивановичу Лобачевскому (1792–1856) удалось построить мыслимую непротиворечивую геометрию, основанную на отрицании V постулата. Историческую роль V постулата мы исследуем отдельно, познакомившись с требованиями, предъявляемыми к системе аксиом.

2.3. Два недостатка аксиоматики Д. Гильберта

Огромное значение аксиоматики Д. Гильберта для всей математики, и геометрии в частности, неоспоримо и продолжает исследоваться до сих пор. А о той роли, которую сыграли выделенные ниже два «недостатка» упоминается не часто.

Первым недостатком является «язык» аксиоматики. Дело в том, что часть формулируемых аксиом содержит понятия, обоснование которых проводится на уровне теорем существования, доказываемых из предыдущих аксиом. Например, формулировка аксиомы Паша требует понятия отрезка и существования его внутренних точек. Последнее приходится доказывать (см. теорему 4 в группе II Аксиом порядка). Далее, требование откладывания конгруэнтного угла с заданной стороны прямой в аксиоме 16 требует же доказательства существования двух сторон, на которые всякая прямая разбивает плоскость. Есть еще ряд замечаний, которые вместе с отмеченными выше двумя, приводят к вопросам о взаимной совместимости и зависимости аксиоматических требований и критериях проверки этих свойств.

Второй «недостаток» состоит в том, что описание отношений между основными геометрическими объектами – точками, прямыми и плоскостями, приведенное в аксиоматике Д. Гилберта, не может быть индуктивно перенесено на «мыслимые» свойства «мыслимых» же геометрических объектов размерности большее трех. Необходимость построения многомерной геометрии была продиктована задачами аналитической механики систем n–точек уже в XIX в. В XX в. модель многомерной геометрии возникла в экономических задачах линейного программирования и других задачах естествознания и социальной практики человека.

Для аксиоматического построения многомерной евклидовой геометрии потребовалось переосмыслить процесс арифметизации (введения координат) трехмерного евклидова пространства, связать этот процесс со структурой n–мерного векторного пространства. Начнем с изучения структуры векторного пространства на множестве обыкновенных направленных отрезков.

§ 3. Структура векторного пространства

3.1. *Модель направленных отрезков*

Задачи механики и физики используют модели, элементами которых являются объекты, характеризуемые величиной действия в заданном направлении. Такими объектами являются силы, скорости, ускорения и др. Над этими объектами определены операции сложения по определенному закону и умножения на число. При этом как сами объекты, так и результаты операции над ними не зависят от параллельного переноса в пространстве. В качестве геометрической модели или знаковой системы для определения этих объектов удобно использовать направленные отрезки, которые имеют заданное направление и длину. Сформулируем нашу первую задачу.

А. Построить систему свойств (аксиоматику), достаточную для описания модели направленных отрезков с операциями сложения и умножения на число.

Решение сформулированной задачи состоит из двух частей: 1) в определении направленных отрезков, определении указанных операций, доказательстве основных свойств этих операций и 2) указании критерия, согласно которому проверяется, достаточно ли сформулированных свойств для описания модели.

Вначале определим операции и построим систему свойств (аксиом). Направленный отрезок $\overline{AB}$ есть отрезок *AB* заданной длины, направленный параллельно некоторой прямой «*l*», причем порядок пары точек означает, что точка *A* – начало, *B* – конец направленного отрезка.

Для простоты будем направленные отрезки обозначать также одной буквой $\overline{AB} = \overline{a}$ и т.д.

Так как направление и длина направленного отрезка не зависит от параллельного переноса, то направленный отрезок изображает класс направленных отрезков, совместимых с параллельными переносами. Этот факт будем называть инвариантностью направленного отрезка относительно параллельного переноса.

На множестве направленных отрезков $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, ... определим операции сложения и умножения на действительное число и установим свойства этих операций.

Суммой направленных отрезков $\overline{a}$ и $\overline{b}$ назовем направленный отрезок $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$, который имеет то же начало, что и $\overline{a}$ и тот же конец, что и $\overline{b}$, если начало отрезка $\overline{b}$ параллельным переносом совместить с концом $\overline{a}$ (рис 11, а).

Учитывая инвариантность направленного отрезка относительно параллельного переноса, заключаем, что $\overline{c}$ является направленной диагональю параллелограмма, построенного на сторонах $\overline{a}$ и $\overline{b}$ (рис. 4, b). Правило сложения (a) называется правилом треугольника, а правило сложения (b) – правилом параллелограмма.

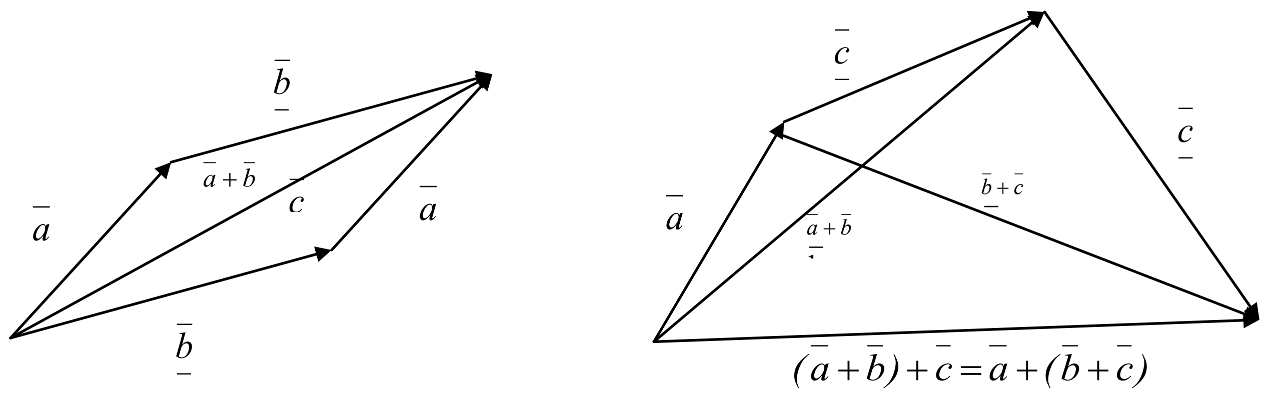
a *Рис. 4* b

Сложение обладает свойствами:

1. $\forall$ $\bar a$ и $\bar b$ $\quad \bar a + \bar b = \bar b + \bar a$
2. $\forall$ $\bar a$, $\bar b$ и $\bar c$ $\quad (\bar a + \bar b) + \bar c = \bar a + (\bar b + \bar c)$
3. Существует вектор $\bar o$ такой, что $\forall$ $\bar a$ $\quad \bar a + \bar o = \bar a$ ($\bar o$ – нулевой вектор)
4. $\forall$ $\bar a$ $\exists$ «$-\bar a$» такой, что $\bar a + (-\bar a) = \bar o$.

(«$-\bar a$» называется противоположным вектору $\bar a$).

Свойства 1 и 2 схематично представлены на рис 12, a и 12, b, соответственно.



a *Рис. 5* b

Свойство 3 представляет возможность вырождения в точку одного из слагаемых:

$$\overline{AB} + \overline{BB} = \overline{AB}\ ,\ \overline{BB} = \bar o$$

Свойство 4 представляет правило сложения

$$\overline{AB} + \overline{BA} = \overline{AA} = \bar o\ ,$$

в котором естественно считать $\overline{BA} = -\overline{AB}$. Длину направленного отрезка $\bar a$ будем обозначать $|\bar a|$. Очевидно, что $|\overline{AB}| = |\overline{BA}|$.

Операция умножения отрезка $\bar a$ на число α определяет направленный отрезок $\bar c = \alpha \bar a$. Длина $|\bar c| = |\alpha|\,|\bar a|$; направление $\bar c$ то же, что и у отрезка $\bar a$, если $\alpha > 0$, и обратное, если $\alpha < 0$.

Свойства операции умножения:

1. $\forall$ $\bar a$ $\quad \bar a \cdot 1 = \bar a$.
2. $\forall$ $\alpha, \beta \in R$ и $\forall$ $\bar a$ $\quad \alpha(\beta \bar a) = (\alpha\beta)\bar a$.
3. $\forall$ $\alpha \in R$ и $\forall$ $\bar a$, $\bar b$ $\quad \alpha(\bar a + \bar b) = \alpha \bar a + \alpha \bar b$.

4. $\forall\ \alpha, \beta \in R$ и $\forall\ \bar{a}$ $\quad (\alpha+\beta)\bar{a} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{a}$.

Доказательство восьми свойств сложения и умножения на число направленных отрезков можно найти в школьных учебниках, и мы их опускаем.

Теперь сформулируем понятие вектора.

Определение

Направленные отрезки с операциями сложения по правилу треугольника (параллелограмма) и умножения на число называются векторами.

В силу инвариантности направленных отрезков относительно параллельного переноса заключаем, что: 1) вектор – это класс направленных отрезков, определяемый всеми параллельными переносами любого из его представителей; 2) свойства операций сложения векторов и умножения на число также инвариантны относительно параллельного переноса.

Множество всех векторов назовем векторным пространством, а построенную модель направленных отрезков – геометрической моделью векторного пространства.

Первая часть сформулированной задачи А нами решена. Для решения второй части этой задачи построим арифметическую (координатную) модель векторного пространства.

3.2. Арифметическая модель векторного пространства

Выражения вида $\alpha\bar{a}+\beta\bar{b}+\ldots+\gamma\bar{c}$ называются линейными комбинациями векторов с действительными числами.

Теорема размерности

1. Пусть вектор $\bar{a}$ параллелен вектору $\bar{e}_1$, тогда существует $x \in R$ такое, что $\bar{a} = x\bar{e}_1$.

2. Пусть векторы лежат в плоскости Π и $\bar{e}_1$ не параллелен $\bar{e}_2$. Тогда всякий вектор $\bar{b} \in \Pi$ есть линейная комбинация векторов $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$:

$$\bar{b} = x\,\bar{e}_1 + y\bar{e}_2.$$

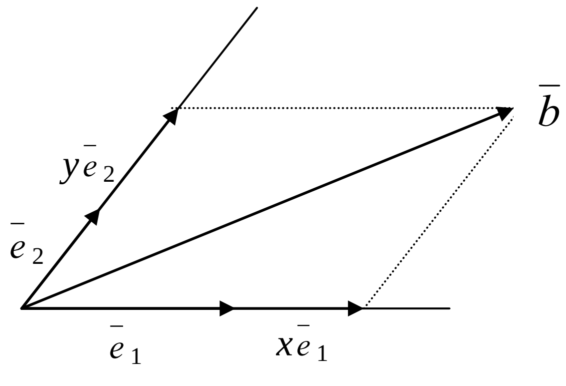


Рис. 6

3. Пусть векторы $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ и $\bar{e}_3$ не лежат в одной плоскости. Тогда всякий вектор $\bar{d}$ есть их линейная комбинация:

$$\bar{d} = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2 + z\bar{e}_3$$

Доказательство проведем только для случая 2.

Выберем произвольную точку O на плоскости Π и отложим из нее векторы $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ и $\bar{b}$. На направления $O\bar{e}_1$ и $O\bar{e}_2$ отложим направленные проекции вектора $\bar{b}$ (рис. 6), обозначив их, соответственно, $x\bar{e}_2$ и $y\bar{e}_2$. Тогда получим требуемое равенство $\bar{b} = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2$. Случай 2 доказан. Случай 1 – тривиален, а случай 3 доказывается аналогично с построением параллелепипеда.

Будем говорить, что векторы $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ на рис. 6 образуют векторный базис на плоскости векторов, а числа x и y назовем координатами вектора $\bar{b}$ в этом базисе. Аналогично можно определить базис на прямой и в пространстве, используя случаи 1 и 3 рассмотренной теоремы.

Таким образом, каждый вектор имеет свои координаты в заданном базисе и, наоборот, всякая тройка чисел (x,y,z) (в заданном порядке) определяет единственный вектор в этом базисе.

Вывод 1

Если в пространстве задан базис $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, то между множеством векторов и упорядоченными тройками чисел (x,y,z) установлено взаимно однозначное соответствие

$$\bar{a} \leftrightarrow (x,y,z), \tag{1}$$

определяемое разложением вектора $\bar{a}$ в заданном базисе: $\bar{a} = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2 + z\bar{e}_3$.

Чтобы объявить множество упорядоченных троек чисел *(x,y,z)* арифметической или координатной моделью трехмерного векторного пространства, покажем, что операции сложения векторов и умножения на число определены в координатной форме и, что координаты вектора определяют его длину и направление.

Для удобства будем считать, что $\bar{e}_1 = \bar{i}$, $\bar{e}_2 = \bar{j}$, $\bar{e}_3 = \bar{k}$ – известный в элементарной геометрии базис, состоящий из единичных взаимно перпендикулярных векторов. Для простоты также ограничимся случаем плоскости.

Пусть $\bar{a} = x_a\bar{i} + y_a\bar{j}$, $\bar{b} = x_b\bar{i} + y_b\bar{j}$. Тогда $\bar{a}$ и $\bar{b}$ элементы геометрической модели и для них определена сумма

$$\bar{a} + \bar{b} = (x_a\bar{i} + y_a\bar{j}) + (x_b\bar{i} + y_b\bar{j}).$$

Учитываем, что $x_a\bar{i}$, $y_a\bar{j}$, $x_b\bar{i}$ и $y_b\bar{j}$ также элементы геометрической модели и, используя свойства 1–4 сложения и свойства 1–4 умножения, получаем

$$\bar{a} + \bar{b} = \bar{i}(x_a + x_b) + \bar{j}(y_a + y_b)$$

Согласно соответствию (1), установленному выше, заключаем, что $(x_a + x_b, y_a + y_b)$ – координаты вектора $\bar{a} + \bar{b}$. Аналогично показывается, что вектор $\alpha\bar{a}$ имеет координаты $(\alpha x_a, \alpha y_a)$.

Используя теорему Пифагора, находим длину вектора на плоскости

$$|\bar{a}| = \sqrt{x^2{}_a + y^2{}_a}$$

и в пространстве

$$|\bar{a}| = \sqrt{x^2{}_a + y^2{}_a + z^2{}_a}.$$

Наконец, для противоположного вектора $-\bar{a} = -(\bar{i}x_a + \bar{j}y_a + \bar{k}z_a)$ находим координаты: $(-x_a, -y_a, -z_a)$.

Вывод 2

Координаты (x, y, z) вектора $\overline{a}$ определяют его длину и направление. В координатной форме определены операции сложения векторов и умножение векторов на число. Доказательство этих фактов требует в точности восемь свойств сложения и умножения, доказанных в геометрической модели. Поэтому эти восемь свойств называют аксиомами модели векторного пространства.

Мы завершили решение сформулированной в начале параграфа задачи А. Вот это решение

На множестве направленных отрезков система восьми свойств операции сложения направленных отрезков и умножения на число определяет арифметическую <u>модель векторного пространства</u>.

Попутно мы устанавливаем следующее свойство.

Вывод 3

Между элементами геометрической модели векторного пространства и элементами арифметической модели векторного пространства существует взаимно однозначное соответствие (1), обозначим его

$$L(\overline{a}) = (x, y, z),\ L : \overline{a} \leftrightarrow (x, y, z). \tag{2}$$

Это соответствие сохраняет результат линейных операций сложения векторов и умножения на число

$$L(\alpha\overline{a} + \beta\overline{b}) = \alpha L(\overline{a}) + \beta L(\overline{b}) \tag{3}$$

и называется изоморфизмом арифметической и геометрической моделей векторного пространства.

3.3. Абстрактное векторное пространство

Восемь свойств сложения и умножения, установленных в геометрической модели, позволяют построить арифметическую модель и называются аксиомами векторного пространства.

Рассмотрим примеры моделей, удовлетворяющих этим аксиомам.

Пример 1

Множество многочленов степени не выше n

$$Pn(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

образует векторное пространство, в котором мономы $1, x, \ldots, x^n$ – базисные элементы, а коэффициенты многочлена $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ – координаты вектора $\overline{P}_n(x)$ в этом базисе.

Пример 2

Пусть $\overline{e}_1 = (1,0,\ldots,0)$, $\overline{e}_2 = (0,1,0,\ldots,0)$, …, $\overline{e}_n = (0,\ldots,0,1)$ – «n–местные наборы», $\overline{e}_k$ имеет 1 на k–м месте и нули на остальных местах, $(k = 1,2,\ldots,n)$. Тогда объекты

$$\overline{x} = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{e}_k = (x_1, 0, \ldots, 0) + (0, x_2, \ldots, 0) + \ldots + (0, \ldots, 0, x_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

образуют векторное пространство с базисными элементами $\bar{e}_1,...,\bar{e}_n$. Обозначим это пространство E^n.

Векторное пространство $E^n, n \geq 1$, позволяет определить размерность всякого векторного пространства X при помощи следующей аксиомы.

9. Аксиома размерности. Существует изоморфизм $L: X \to E^n$.

Определение абстрактного векторного пространства

Пусть для элементов $\bar{x}$ множества X выполняется 8 аксиом векторного пространства и аксиома размерности. Тогда X есть n–мерное абстрактное векторное пространство, а E^n является его арифметической моделью.

Элементы множества X могут быть произвольной природы. Например:

- выборки n измерений $x_1, x_2,..., x_n$;
- цены m наименований $p_1, p_2,..., p_m$;
- наборы продуктов, расстояния между заводом изготовителем и сырьевыми складами и т.д.

Следствие

Все n–мерные векторные пространства имеют одну и ту же арифметическую модель, поэтому изоморфны.

Множество многочленов степени не выше n в примере 1 образуют $n+1$–мерное пространство. Изоморфизм, устанавливающий размерность, задается в этом случае так

$$L(x^k) = \bar{e}_{k+1},\ k = 0,1,...,n.$$

Здесь x^k – мономы, а $\bar{e}_{k+1}$ – базисные орты в E^n.

Если векторное пространство X содержит для всякого $n \in N$ подмножество, X^n, которое само является векторным пространством и для него выполняется аксиома размерности с заданным n, то X назовем бесконечномерным векторным пространством. Примером такого пространства является множество всех многочленов. Подмножества многочленов степени не выше n образуют n–мерные подпространства в этом пространстве.

3.4. Аксиомы скалярного произведения векторов

Модель n–мерного пространства E^n не содержит понятия длины вектора при $n > 3$. Для определения длины вектора в E^n при $n > 3$ воспользуемся связью между длиной вектора и скалярным произведением. При этом скалярное произведение зададим аксиоматически теми свойствами, которыми оно определяется в трехмерном векторном пространстве.

Напомним, что в геометрической модели трехмерного скалярного произведения задается представлением

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos(\bar{a} \wedge \bar{b}). \qquad (4)$$

В школьном курсе геометрии из этого представления выводятся три свойства:

1) $\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a},\ \forall \bar{a}, \bar{b}$;

2) $(\alpha\bar{a}+\beta\bar{b})\bar{c}=\alpha\bar{a}\bar{c}+\beta\bar{b}\bar{c}$, $\forall\bar{a},\bar{b}$ и $\forall\alpha,\beta\in R^1$;

(5)

3) $\bar{a}\bar{a}=\bar{a}^2>0$; $\bar{a}^2=0\Leftrightarrow\bar{a}=0$.

Следствие

Из формулы (4) находим представление длины вектора через скалярное произведение

$$|\bar{a}|^2=\bar{a}^2,\ |\bar{a}|=\sqrt{a^2}. \qquad (6)$$

Если в качестве базиса выбрать векторы $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$, то, используя свойства 1–3, можно найти координатное представление скалярного произведения

$$\forall\bar{a}=x_1\bar{i}+y_1\bar{j}+z_1\bar{k},\ \forall\bar{b}=x_2\bar{i}+y_2\bar{j}+z_2\bar{k}$$

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=(x_1\bar{i}+y_1\bar{j}+z_1\bar{k})(x_2\bar{i}+y_2\bar{j}+z_2\bar{k})=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 \qquad (7)$$

Мы воспользовались тем, что $\bar{i}^2=\bar{j}^2=\bar{k}^2=1,\ \bar{i}\bar{j}=\bar{i}\bar{k}=\bar{j}\bar{k}=0$.

Следствие

Используя (6) и (7), заключаем, что

$$|\bar{a}|=\sqrt{x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}+z_1^{\ 2}}. \qquad (8)$$

Схему, по которой мы из определения скалярного произведения (4) получили формулу длины вектора (8), повторим в абстрактном векторном пространстве с той разницей, что: 1) скалярное произведение векторов зададим при помощи трех аксиом (5) и 2) существование скалярного произведения в координатной модели E^n установим формулой, аналогичной (7):

$$\forall\bar{a},\bar{b}\in E^n\quad \bar{a}\cdot\bar{b}=x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n \qquad (9)$$

где $\bar{a}=x_1\bar{e}_1+\ldots+x_n\bar{e}_n$, $\bar{b}=y_1\bar{e}_1+\ldots+y_n\bar{e}_n$ в E^n.

Теперь согласно нашей схеме длина вектора определена формулой (6). Из (6) с учетом (9) получаем формулу длины вектора в n–мерном арифметическом пространстве аналогичную (8) в виде

$$|\bar{a}|=\sqrt{x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+\ldots+x_n^{\ 2}}. \qquad (10)$$

Вывод 4

В трехмерном векторном пространстве длина вектора (8) находится благодаря теореме Пифагора. В абстрактном векторном пространстве размерности больше трех аксиомами (5) задается скалярное произведение, а длина выражается через скалярное произведение по формуле (6). В арифметической модели E^n скалярное произведение существует в виде (9), а длина вектора определяется согласно формуле (10).

Определение

*Абстрактное n–мерное векторное пространство, в котором задано скалярное произведение векторов, удовлетворяющее трем аксиомам (*5*), называем n–мерным векторным евклидовым пространством. Его координатная модель E^n со скалярным произведением (*9*) называется декартовой моделью. (Рене Декарт (*1596–1650*) впервые ввел координатную модель трехмерного евклидова пространства).*

§ 4. Модель Вейля евклидовой геометрии

4.1. Арифметизация трехмерного евклидова пространства

Геометрической моделью трехмерного евклидова пространства будем называть множество точек, прямых плоскостей, удовлетворяющих двадцати аксиомам Д. Гильберта, сформулированным в §2. Эту модель будем обозначать ε^3 и называть евклидовым пространством.

Построим арифметическую, или координатную, модель евклидова пространства ε^3, используя координатную модель евклидова векторного пространства E^3, построенную в §3. Для этого введем операцию откладывания вектора. Эта операция сопоставляет всяким двум точкам $A,B \in \varepsilon^3$ вектор $\overline{AB} \in E^3$ и обозначается как отображение $\varphi(A,B) = \overline{AB}$. Операцию $\varphi(A,B)$ можно представить как изображение направленного отрезка и определить следующими основными свойствами.

Свойства операции откладывания вектора

1. Для всякой фиксированной точки $A_0 \in \varepsilon^3$ и произвольной точки $B \in \varepsilon^3$ отображение $\varphi(A_\circ, B) = \overline{A_\circ B}$

$$\varphi(A_\circ, ...) : B \to \overline{A_\circ B} \qquad (1)$$

является взаимно однозначным отображением точек $B \in \varepsilon^3$ на множество векторов E^3.

2. (Аксиома треугольников). Для любых трех точек $A,B,C \in \varepsilon^3$ справедливо равенство

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}.$$

3. (Аксиома реализуемости операции откладывания). Существует хотя бы одна точка $0 \in \varepsilon^3$, для которой определена операция откладывания вектора $\varphi(0, M) = \overline{0M}$ для любой точки $M \in E^3$.

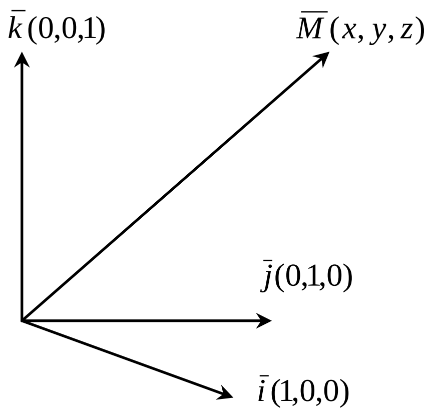


Рис. 7

Точку 0 в аксиоме 3 называют началом координат в евклидовом пространстве ε^3, а вектор $\overline{0M}$ – радиус–вектором точки M в этом пространстве. Координатами (x, y, z) точки $M \in \varepsilon^3$ называют координаты радиус–вектора $\overline{0M}$ (рис. 7), где $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ – направленные отрезки в ε^3, соответствующие базисным векторам $\bar{e}_1(1,0,0)$, $\bar{e}_2(0,1,0)$, $\bar{e}_3(0,0,1)$ векторного пространства E^3 при отображении (1) с $A_{\circ} \equiv 0$. Таким образом, по построению операции откладывания вектора в $\mathcal{E}^3$ приходим к векторному равенству

$$\varphi(0, M) = \overline{0M} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}\ . \qquad (2)$$

Это равенство, с учетом фиксированной точки $0 \in \mathcal{E}^3$, представляет взаимно однозначное соответствие между точками $M \in \mathcal{E}^3$ и арифметическими упорядоченными тройками чисел (x, y, z) и является определяющим равенством для координат точек евклидова пространства.

Для вычисления длин отрезков и углов между ними воспользуемся свойствами скалярного произведения (4), (6), (7), (8) из §3, а также свойством 1 операции откладывания отрезка.

Пусть требуется найти длину отрезка $|\overline{AB}|$, если заданы координаты его концов $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$. Учитывая, что $\overline{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, из формулы (8) § 3 находим длину

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{\overline{AB}^2} \qquad (3)$$

Пусть $\overline{AB} = \bar{a}(u_1,v_1,w_1)$ и $\overline{CD} = \bar{b}(u_2,v_2,w_2)$ – направленные отрезки в $\mathcal{E}^3$ и пусть их координаты $\bar{a}(u_1,v_1,w_1)$ $\bar{b}(u_1,v_1,w_1)$ в E^3. Тогда, используя формулы (4), (7) и (8) из §3, получаем формулу для косинуса угла между $\bar{a}$ и $\bar{b}$

$$\cos(\widehat{ab}) = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} = \frac{u_1u_2 + v_1v_2 + w_1w_2}{\sqrt{u_1^2 + v_1^2 + w_1^2} \cdot \sqrt{u_2^2 + v_2^2 + w_2^2}} \qquad (4)$$

Определение

Арифметической, или координатной, моделью евклидова пространства $\mathcal{E}^3$ *называется множество упорядоченных троек чисел, определяемых соответствием (*2*) вместе с формулами длины отрезка (*3*) и углов между направленными отрезками (*4*), выраженными через скалярное произведение. Арифметическую модель трехмерного евклидова пространства будем обозначать* R^3.

Вывод 1

Для построения модели R^3 требуется задать или построить:

- геометрическую модель трехмерного векторного пространства (модель направленных отрезков $\mathcal{E}^3$);
- изоморфную модель координатного векторного пространства E^3;
- операцию откладывания вектора (1);
- скалярное произведение, посредством которого вычисляются длины и
- углы.

Основные объекты геометрии – точки, прямые и плоскости в R^3 определяются на «языке» векторов и координат. Например, пусть плоскость *П* определяется точкой $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и вектором нормали (A,B,C). Это эквивалентно тому, что если $M(x,y,z)$ – произвольная точка плоскости Π, то $\overline{M_0M}\perp\overline{N}$, что эквивалентно условию $(\overline{M_0M}\ \overline{N})=0$, или в координатной форме П:

$$(x-x_0)A+(y-y_0)B+(z-z_0)C=0$$

Таким образом, искомая плоскость Π в R^3 – это множество троек чисел (x, y, z), удовлетворяющих этому алгебраическому уравнению.

Аналогичным образом, в виде алгебраических соотношений представляются все геометрические объекты в R^3 и их метрические характеристики: длина, углы, площади и т.д.

Вывод 2

Решение геометрических задач в модели R^3 сводится к решению систем уравнений.

4.2. Многомерное арифметическое евклидово пространство

Мы отмечали в п.2.3 §2 что аксиоматика Д. Гилберта не может быть обобщена в случае описания отношений между точками, прямыми и плоскостями высоких размерностей в мыслимом многомерном евклидовом пространстве. Обратимся к схеме, согласно которой строилось арифметическое пространство R^3. На самом деле эта схема не зависит от размерности вспомогательного векторного пространства E^n. При n=2 и n=3 она просто одна и та же. В случае «мыслимой» многомерной геометрии операция откладывания вектора (1) является формальным определением арифметического n–мерного евклидова пространства R^n, а в остальном схема построения R^n при $n>3$ такова же, как и при $n\leq 3$. Эта схема называется обоснованием евклидовой геометрии по Вейлю (Герман Вейль, 1885–1955); она базируется на системе аксиом Вейля, называемой точечно–векторной, так как в ней неопределяемыми понятиями являются точки и векторы. Точки и векторы называются основными геометрическими объектами, вступающими в отношения, определяемыми тремя группами аксиом, образующими аксиоматике Г. Вейля.

I. Группа аксиом векторного пространства.

Эта группа включает восемь аксиом векторного пространства, сформулированных в п. 3.1 §3, и дополнительную девятую аксиому размерности, сформулированную в п. 3.2 §3. Эти аксиомы определяют арифметическую модель E^n n–мерного векторного пространства (см. п. 3.3 §3).

II. Аксиомы скалярного произведения.

Сюда входят три аксиомы 1) – 3), 5), приведенные в виде свойств в §4.

III. Аксиомы складывания векторов.

Эта группа аксиом состоит из трех свойств операции откладывания векторов, определенной в начале этого параграфа.

Вывод 3

Система аксиом Г. Вейля определяет абстрактное n–мерное арифметическое евклидово пространство R^n, в котором основные геометрические объекты – прямые, плоскости размерности 2, 3, ..., n–1 – задаются системами алгебраических уравнений. При $n>3$ отсутствует «геометрическая модель» евклидова пространства, отождествляемая с реальными объектами. Объектами R^4 являются лишь мыслимые объекты, представляемые арифметической моделью и «несущие геометрические свойства» по аналогии с R^3. Именно поэтому для определения координат точек «мыслимого» многомерного евклидова пространства требуется аксиома 3 – существования хотя бы одной точки O, для которой определена операция откладывания векторов из E^4 и которая считается началом координат в R^4: $O(0,0,0)\in R^4$.

Замечание

Аксиоматическое обоснование евклидовой геометрии по Вейлю – наиболее распространенная схема построения арифметической модели R^n, применяемой в задачах линейного программирования, исследования операций и т.д.

§ 5. Модель А. Пуанкаре плоскости Лобачевского

5.1. Основные понятия модели А. Пуанкаре плоскости Лобачевского

Аксиомы 1–3 I группы аксиом Д. Гильберта вместе с остальными аксиомами II–V групп образуют систему 15 аксиом евклидовой плоскости (см. п.2.2 §2). Заменим аксиому параллельности V этой группы на следующую аксиому.

V’. Аксиома параллельности Лобачевского

Через любую точку A, не инцидентную прямой a, можно провести в плоскости, определяемой точкой A и прямой a, по крайней мере, две различные прямые, не пересекающиеся с прямой a.

Определение плоскости Лобачевского

Плоскостью Лобачевского называется мыслимая планиметрия, определяемая аксиомами 1–3 *группы* I*, всеми аксиомами групп* II–IV *системы аксиом Д. Гильберта и аксиомой параллельности* V’ *Лобачевского.*

Эта модель неевклидовой геометрии была опубликована Н. И. Лобачевским в его известной работе «О началах геометрии» в журнале «Казанский вестник» в 1829–1830 г. г. Созданная им геометрия получила название мыслимой геометрии, так как в течение длительного времени в математическом мире отсутствовала общепризнанная реализация этой модели.

То, что существует хотя бы одна прямая, проходящая через точку A вне прямой а и не пересекающая прямую a, было доказано еще Евклидом без ссылки на постулат о параллельности (см. замечание 3 §3). Одна из моделей, в которой через точку A вне прямой a проходит более одной прямой, не имеющей общих точек с a, была построена великим французским математиком Жюлем Анри Пуанкаре (1854–1912). Эта модель (опубликована около 1883 г.) представляет множество точек полуплоскости, на которой «прямые» определены так, что реализуются все 15 аксиом планиметрии Лобачевского.

Рассмотри кратко эту модель, опуская доказательства, которые можно найти, например, в [7].

1. Представление основных объектов – точек и прямых в модели Пуанкаре. Пусть l – произвольная прямая евклидовой плоскости. Точками плоскости Лобачевского будем называть все точки одной из полуплоскостей, например, верхней, лежащих по одну сторону от l. Прямыми плоскости Лобачевского назовем либо вертикальные лучи, лежащие в заданной полуплоскости, либо полуокружности с центрами на l, также лежащими в этой полуплоскости, (рис. 8).

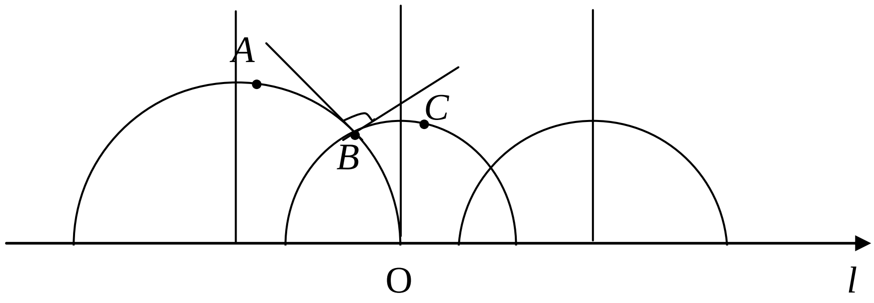


Рис. 8

2. Прямая l представляет «бесконечно удаленные точки» плоскости Лобачевского и называется абсолютом.

3. Углы между прямыми – это обычные евклидовы углы, образованные касательными в точке пересечения полуокружностей, представляющих эти прямые (рис. 8).

4. Движение в модели Пуанкаре плоскости Лобачевского представляется специальными дробно–линейными преобразованиями верхней полуплоскости на себя. Это преобразование сохраняет отношение 4 точек, через которое определяется функция расстояния между двумя точками в модели Пуанкаре. Мы не будем иллюстрировать свойства конгруэнтности на плоскости Лобачевского, поэтому не приводим формулы, представляющие функцию расстояния. Подробно изложение свойств движения в модели Пуанкаре плоскости Лобачевского можно найти, например, в [7].

В модели, определяемой перечисленными выше условиями 1–4, выполняются все 15 аксиом планиметрии Лобачевского. Эту модель будем обозначать L_2 и ограничимся проверкой нескольких аксиом.

Проверим две первые аксиомы I группы. Они должны определять единственную прямую в модели L_2 по двум любым точкам. Пусть абсолют l – линия OX в евклидовой плоскости. Тогда уравнения окружностей с центром в точках $A(x_0, O) \in l$ и радиусом R имеют вид

$$(x - x_0)^2 + y^2 = R^2 . \tag{5}$$

Две точки $B(x_1,y_1)$, $C(x_2,y_2)$ лежат на некоторой «прямой» α тогда и только тогда, когда их координаты удовлетворяют уравнению (5) для некоторых значений x_0 и R:

$$\begin{cases} (x_1 - x_0)^2 + y_1^2 = R^2 \\ (x_2 - x_0)^2 + y_2^2 = R^2 \end{cases} \tag{6}$$

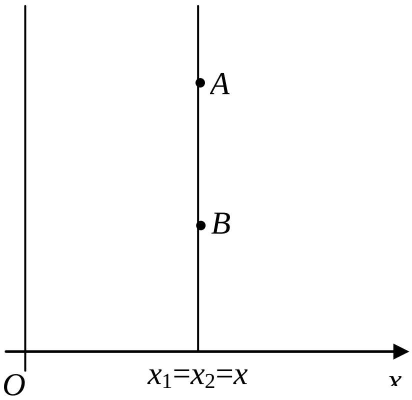
В полученной алгебраической системе уравнений числа x_1, y_1 и x_2, y_2 заданы, а величины x_0 и R – искомые. Раскрывая квадраты и вычитая второе уравнение из первого, находим

$$x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2 = 2x_0(x_1 - x_2).$$

Откуда

$$x_0 = \frac{x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2}{2(x_1 - x_2)}$$

Это решение определено, если $x_1 \neq x_2$, т.е. точки B и C не лежат на общем перпендикуляре $x_1=x_2=x$ к оси OX. (Если $x_1=x_2=x$, то этот перпендикуляр представляет прямую в L_2 (рис. 9, a)). Подставляя найденное значение x_0, в любое из уравнений (6), находим значение радиуса R. Тем самым найдена окружность (5), проходящая через точки B и C. Эта окружность единственная и в модели L_2 представляет единственную же «прямую» α, инцидентную точкам B и C (рис. 9, b).



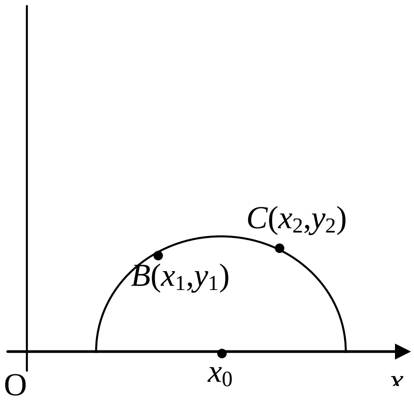


Рис. 9

Таким образом, аксиомы 1 и 2 группы I выполнены. Аксиома 3 этой группы выполняется очевидным образом.

Оставляя проверку аксиом группы II–IV, займемся проверкой аксиомы V' (параллельности по Лобачевскому) в модели L_2. Пусть α – некоторая прямая и точка $A \notin \alpha$ в модели L_2, рис.3. Пусть A_∞ и B_∞ – точки на абсолюте l, представляющие бесконечно удаленные точки прямой α (рис. 10). Используя формулу (5) точно так же, как при проверке аксиом 1–2 группы I, заключаем, что существует единственная окружность с центром на l, проходящая через точки A и A_∞, обозначим ее $\gamma_1(A,A_\infty)$, и,

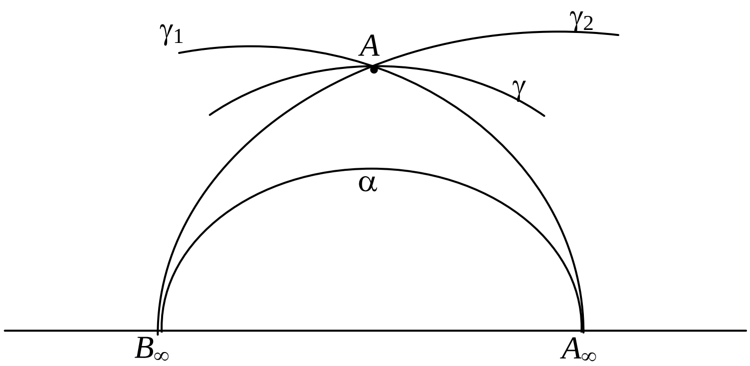


Рис. 10

аналогично, единственная окружность $\gamma_2(A,B_\infty)$ (рис. 10). Полуокружности γ_1 и γ_2 в верхней полуплоскости L_2 представляют две прямые, параллельные прямой α, так как имеют с ней общие точки $A_\infty=\gamma_1\cap\alpha$ и $B_\infty=\gamma_2\cap\alpha$, лежащие на абсолюте l и являющиеся, по определению, бесконечно удаленными точками. Кроме этого, существует еще бесконечно много прямых γ, представляемых окружностями, проходящими через точку A внутри вертикального угла, образованного γ_1, и γ_2 (рис. 10). Эти прямые не имеют общих точек с α в L_2 даже на абсолюте и называются прямыми, расходящимися с α.

Следствие 1

В плоскости L_2 через точку A вне прямой α проходит бесконечное множество прямых, не имеющих общих точек с α (расходящихся с α). При этом существует в точности две параллельные γ_1 и γ_2, имеющие общие точки с α на абсолюте l

$$A_\infty = \gamma_1 \cap \alpha \in l,\ A_\infty = \gamma_2 \cap \alpha \in l,$$

Вывод

В модели L_2 выполняются 15 аксиом планиметрии Лобачевского.

5.2. Основные факты в планиметрии Лобачевского

Принятие столь экзотической аксиомы параллельности V' позволяет «обнаружить» (точнее, строго доказать) на плоскости L_2 неевклидовы «эффекты», т.е. такие отношения между геометрическими объектами, которые не реализуются в евклидовой плоскости.

Ограничимся иллюстрацией ряда свойств взаимного расположения прямых на плоскости L_2. Строгое доказательство этих фактов можно найти, например, в [7].

1. Сумма углов многоугольника в плоскости L_2

Рассмотрим треугольник (рис. 11, а) с вершинами, лежащими на абсолюте. Так как, по определению абсолюта вершины, A_1,A_2,A_3 бесконечно удалены, то

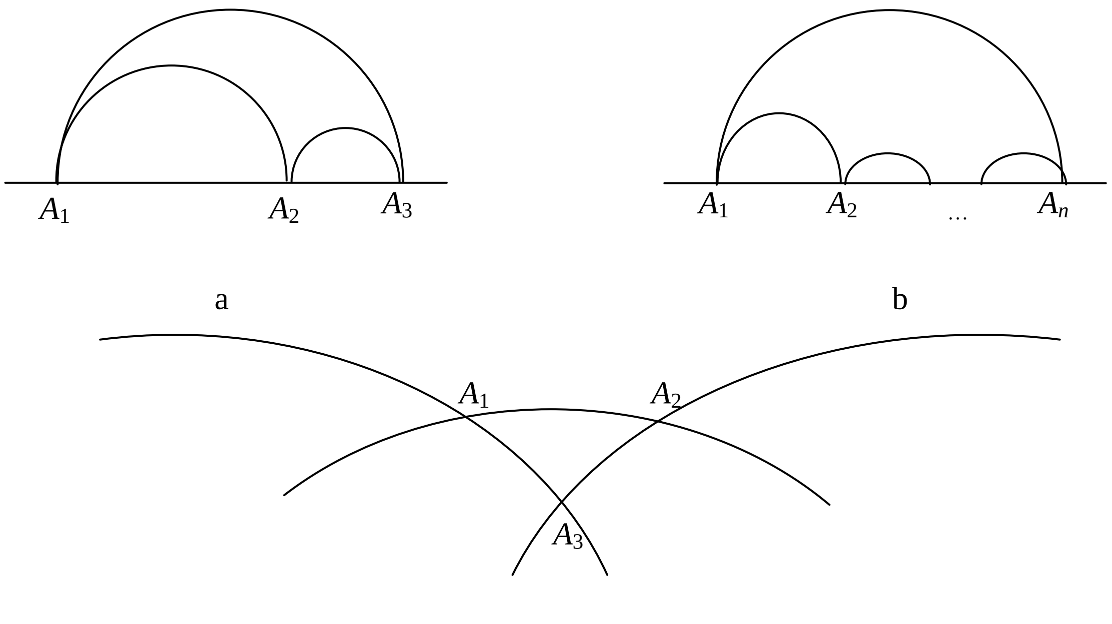


Рис. 11

этот треугольник образован тремя сторонами A_1A_2, A_1A_3 и A_2A_3 бесконечной длины. Так как в вершинах A_1, A_2 и A_3 окружности касаются друг друга, то представляемые ими «прямые» A_1A_2, A_1A_3 и A_2A_3 образуют нулевые углы между собой. Аналогично, на рис. 11, b представлен n–угольник с бесконечно длинными сторонами и суммой углов, равной нулю.

Если внутренние окружности на рис. 11, a и b взять чуть большего радиуса, то точки $A_1A_2 \ldots A_n$ попадут в плоскость L_2 (не будут лежать на абсолюте), перестанут считаться бесконечно удаленными. Тогда длины сторон многоугольника станут конечными, а сумма углов многоугольника станет несколько больше нуля. С другой стороны, если треугольник образован «малыми» кусками дуг окружностей (рис. 11, c), то сумма его углов приближается к 180°, но остается все же несколько меньше 180°.

Следствие 2

В плоскости Лобачевского L_2 сумма углов треугольника не постоянна и может принимать любое значение больше нуля и меньше π.

2. Взаимное расположение прямых в плоскости $\mathbf{L_2}$

Всякие две прямые в плоскости L_2 либо пересекаются, либо параллельны, либо являются расходящимися, т.е. не параллельны и не пересекаются, рис. 3.

3. Перпендикуляр к стороне угла

Для любого угла, образованного пересечением прямых OA_∞ и OB_∞ (рис. 12), на любой из его сторон (например, на стороне OA_∞) существует такая точка M, что перпендикуляр, восстановленный к OA_∞ из точки M, будет параллелен второй стороне угла OB_∞ (рис. 12):

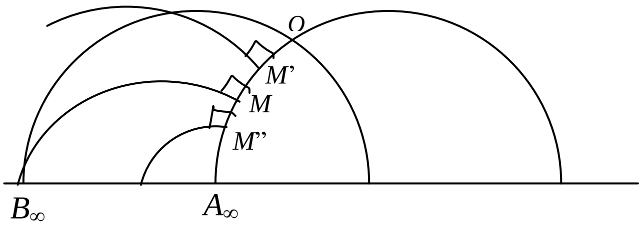


Рис. 12

$MB_\infty \perp OA_\infty$, и $MB_\infty \| OB_\infty$. При этом всякий перпендикуляр, выходящий из точки $M' \in OM$, пересекает противоположную сторону угла OB_∞, а всякий перпендикуляр, восстановленный из точки $M'' \in MA_\infty$, не имеет общих точек со стороной OB_∞.

4. Четвертый признак конгруэнтности треугольников

В абсолютной геометрии без привлечения аксиомы параллельности доказываются три признака конгруэнтности треугольников. В планиметрии Лобачевского справедлив еще один, четвертый признак. Если три угла одного треугольника конгруэнтны соответствующим трем углам второго треугольника, то эти треугольники конгруэнтны [7].

Вывод 2

Рассмотренные выше неевклидовы отношения 1–4 между прямыми на плоскости Лобачевского являются логическим следствием 15 аксиом планиметрии Лобачевского и реализуются в модели Пуанкаре L_2.

5.3. О роли открытия неевклидовой геометрии

Открытие мыслимой неевклидовой геометрии задолго до построения ее реализаций и последовавшие затем открытия ее реализаций Гауссом, Клейном, Бельтрами и Пуанкаре явились прологом пересмотра многих устоявшихся фундаментальных понятий в теории познания. Вначале подверглись анализу идеи и методы доказательства в классической математике и математической логике. Это привело к рождению теории множеств и развитию дедуктивного формализма в математике на новом структурном уровне. Новые геометрические идеи математического формализма подняли научный уровень теоретической физики, а затем и всего естествознания.

В современной науке понятие реализации или модели некоторой системы аксиом используется для проверки основных требований, предъявляемых к аксиоматическому методу в моделировании вообще и в математическом моделировании в частности.

Вывод 3

Открытие и построение неевклидовой геометрии предшествовало, а затем и сопутствовало развитию современного математического формализма. Роль математического формализма в современной науке не сводится только к формированию математического аппарата. Многие законы, открытые в теории математического формализма, т.е. в математических языках, моделируют интеллектуальную деятельность вообще и исследовательскую деятельность в частности.

Формирование математических текстов на основе дедуктивного метода, т.е. построение теории на базе системы аксиом, должно удовлетворять некоторым законам – свойствам аксиоматических систем. К изучению этих законов мы приступаем в следующей главе.

Лучший метод для предвидения будущего развития математических наук заключается в изучении истории и нынешнего состояния этих наук

Анри Пуанкаре

ГЛАВА II

СВОЙСТВА АКСИОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

§ 6. Математические структуры и аксиоматические теории

6.1. Понятие отношений между объектами

Принято считать, что всякое отношение выражает связи между объектами или, что то же, элементами x, y, … , некоторых множеств $A\ni x$, $B\ni y$, … . Отношения между двумя элементами $x\in A$ и $y\in B$ называют двухместными или бинарными отношениями. Все такие отношения будем обозначать Đ(x,y), $x\in A$, $y\in B$. Отношение Đ (x,y) можно представлять разными способами: описывать словами, изображать чертежами и задавать формулами. Удобным является «язык» множеств. Всякое отношение Đ(x,y) определяет множество $P(x,y)$ упорядоченных пар (x,y) некоторых элементов $x\in A$ и $y\in B$ по следующему правилу:

$$(x,y)\in P \Leftrightarrow \{\text{выполняется Đ } (x,y)\} \qquad (1)$$

Множество упорядоченных пар (x,y) $\forall x\in A$ и $\forall y\in B$ называется декартовым произведением множеств A и B и обозначается $A\times B$.

Следствие 1

Всякое бинарное или двухместное отношение Đ(x,y) между элементами x, y двух множеств $A\ni x$ и $B\ni y$ представляется некоторым подмножеством $P(x,y)\subset A\times B$ по закону (1). Обратно, всякое подмножество $P\subset A\times B$ по этому же закону (1) представляет некоторое отношение Đ(x,y).

Пример 1

Пусть $A=B=R$ – множество действительных чисел. Тогда $R\times R$ есть декартово произведение евклидовых прямых. Это произведение представляет собой арифметическую модель евклидовой плоскости. (Другими словами, множество числовых упорядоченных пар (x,y), $\forall x\in R$, $\forall y\in R$ представляет все точки евклидовой плоскости.)

Определение

Отношение Ð*(x,y) между элементами множества M называется отношением эквивалентности, обозначим его* Ð*(x,y)≡(x~y), если выполняются три условия:*

1. *Рефлексивности x~x;*
2. *Симметричности: если x~y, то y~x;*
3. *Транзитивности: если, x~y, y~z, то x~z.*

Примеры отношений эквивалентности: числовые равенства, конгруэнтность фигур, подобие фигур, параллельность прямых и т.д.

Любое отношение эквивалентности Ð(x,y) для $(x,y)\in M\times M$ определяет новое множество классов эквивалентности: два элемента $x,y\in M$ попадают в один класс тогда и только тогда, когда x~y. Множество классов эквивалентности называется фактор множеством M по отношению Ð и обозначается $M/$Ð или M/P, что равносильно в силу следствия 1.

Отношение эквивалентности разбивает множество M на непересекающиеся классы. Обратно, всякое разбиение M на непересекающиеся классы задает на M отношение эквивалентности. Действительно, если $M=M_1\cup M_2\cup\ldots\cup M_n\ldots$ и $M_i\cap M_j=\varnothing$ при $i\neq j$, то отношение принадлежности элементов одному классу $(x\in M_i)\wedge(y\in M_i)\equiv$Ð$(x,y)$ удовлетворяет условиям 1) – 3) отношения эквивалентности.

Следствие 2

Задание отношения эквивалентности на некотором множестве равносильно разбиению этого множеств на непересекающиеся подмножества.

Аналогично двухместному определяются n–местные отношения между элементами $x_1\in A_1,\ldots,x_n\in A_n$ некоторых множеств $A_1,\ \ldots,\ A_n$.

Декартово произведение $A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$ есть множество упорядоченных наборов $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ элементов $x_1\in A_1,\ldots,x_n\in A_n$. n–местное отношение Ð$(x_1,\ldots,x_n)$ представляется некоторым подмножеством $P\subset A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$ по закону

$$\{\text{Ð}(x_1,x_2,\ldots,x_n)\ \text{выполняется}\}\Leftrightarrow(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in P\subset A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$$

6.2. Понятие математической структуры

В главе I рассмотрены системы аксиом:

Пеано для натуральных чисел.

Аксиоматика действительных чисел.

Аксиоматика векторных пространств.

Аксиоматика Гильберта евклидовой геометрии.

Аксиоматика Вейля арифметического евклидова пространства.

Их можно охарактеризовать как системы утверждений $T=\{T_1, \ldots, T_n\}$, задающих системы отношений Đ$=\{$Đ$_1, \ldots,$ Đ$_p\}$ между элементами некоторых множеств $M_1, \ldots, M_p$.

Например, 20 аксиом Гильберта $T=\{T_1, T_2, \ldots, T_{20}\}$ описывают отношения: Đ$_1$ инцидентности, Đ$_2$ порядка, Đ$_3$ конгруэнтности, Đ$_4$ отношения, определяющие свойства непрерывности, Đ$_5$ отношение параллельности. Каждое из этих отношений определено на некоторых из множеств: M_1 – множество точек, M_2 – множество прямых, M_3 – множество плоскостей, M_4 – множество отрезков, M_5 – множество углов, M_6 – множество натуральных чисел. При этом, множества объектов M_1, M_2, M_3 остаются основными, а множества M_4, M_5, M_6 – вспомогательными.

Аналогичным образом, в остальных системах аксиом можно выделить все три указанных понятия: $T=\{T_1, \ldots, T_n\}$ – собственно систему аксиом (систему утверждений), Đ $=\{$ Đ$_1$, …, Đ$_p\}$ – систему отношений и $\{\mathrm{M}_1, \ldots, \mathrm{M}_m\}=\mathrm{M}$ – систему базовых множеств. Эти понятия вступают в новое отношение, называемое математической структурой.

Определение

Математической структурой называется система отношений Đ $=\{$Đ$_1, \ldots,$ Đ$_p\}$*, заданная на базовых множествах* $M_1, \ldots, M_m$ *посредством системы аксиом* $T=\{T_1, \ldots, T_n\}$.

Таким образом определенную математическую структуру будем обозначать $\sum_T = \{T,$ Đ$, M\}$. Для краткости эту структуру, соответствующую системе аксиом T, иногда будем обозначать $\sum_T$.

Примеры

Указанные в начале пункта аксиоматики задают, соответственно, структуры: натуральных чисел, действительных чисел, векторных пространств, структуру геометрического евклидова пространства и структуру арифметического евклидова пространства.

Определение

Система всех утверждений, доказываемых логическим путем в структуре $\sum_T$, называется аксиоматической теорией этой структуры. Аксиоматическую теорию структуры $\sum_T$ будем обозначать символом T_Σ.

Пример

Теорема о внешнем угле треугольника: внешний угол треугольника больше любого не смежного с ним угла треугольника является элементом теории структуры абсолютной планиметрии (геометрии плоскости, построенной в системе 14 аксиом планиметрии без аксиом параллельности).

6.3. *Модель или реализация системы аксиом*

Модель системы аксиом T представляет собой такую совокупность некоторых объектов и отношений между ними, для которой выполняются все требования системы аксиом T, [9, с. 117–118].

Модель или реализация системы аксиом T называется также моделью или реализацией как аксиоматической теории T_Σ, так и структуры $\sum_T$. Эту реализацию будем обозначать $R(T)=R(T_1, \ldots, T_n)$.

Приведем примеры реализаций.

Модель линейного порядка Торальфа Сколема (см. п. 1.1 §1) является моделью, или реализацией, аксиоматики Пеано или структуры натурального ряда.

Множество действительных чисел является реализацией евклидовой прямой.

Арифметическая модель векторного пространства E^3 (см. п. 3.2 §3) является реализацией системы аксиом векторного пространства размерности три.

Арифметическая модель евклидова пространства R^3 (см. п. 4.1 §4) является реализацией как системы аксиом Гильберта, так и системы аксиом Вейля евклидовой геометрии.

Множество n–местных наборов чисел $(x_1,\ldots,x_n)$ является реализацией n–мерного арифметического евклидова пространства R^n (см. п. 4.2 §4).

Модель Пуанкаре L_2 является реализацией планиметрии Лобачевского.

Замечание 1

Понятия «модель» и «структура» часто используются как понятия «конкретного множества» и «множества с заданными свойствами». Именно в таком контексте мы использовали эти понятия в §3–5. Это не вступает в противоречие с точными определениями этих понятий, приведенными в этом §6.

6.4. *Формальная и содержательная аксиоматики. Теории и структуры*

Пусть $R(T)$ – реализация некоторой системы аксиом T. Рассмотрим подробнее, что означает реализация $R\left(\sum_T\right)$ аксиоматической структуры $\sum_T = \{T, Đ, M\}$. Согласно определению реализации, данному в предыдущем п. 6.3, объект $R\left(\sum_T\right)$ содержит:

1) некоторые объекты R_i (M_i), являющиеся реализациями базовых множеств $M_1\ldots$, M_m так, что существует взаимно однозначное соответствие $x_i \leftrightarrow r_i(x_i)$ между элементами $x_i \in M_i$ и элементами $r_i \in R_i$, $i = 1,2,\ldots,m$;

2) некоторые отношения $p_i(r_1,\ldots, r_m)$, представляющие или отражающие отношения Đ$_\mathrm{i}(x_1,\ldots,x_m)$ соответствующих элементов $x_i \leftrightarrow r_i(x_i)$;

3) некоторые объекты $R(T)$, представляющие или отражающие в виде некоторых отношений утверждения в системе аксиом T (обычно $R(T)$ называют реализацией системы аксиом).

Рассмотрим пример

Пусть R^2 – арифметическая модель евклидовой плоскости. Тогда базовое множество M_1 – это все точки $M \in R^2$, реализующиеся как упорядоченные числовые пары (x,y). Множество H_2 – это множество всех прямых $l \subset R^2$, реализующихся уравнениями вида $ax+by+c = 0$. Отношение Ð$_1(M,l) \equiv (M \in l)$ – точка M принадлежит прямой l, реализуется свойством P_1: пара (x,y) удовлетворяет уравнению $ax+by+c = 0$, и т.д.

Вывод 1

Всякая реализация $R(T)$ системы аксиом T устанавливает взаимно однозначное соответствие $x_i \leftrightarrow r_i(x_i)$ между элементами x_i базовых множеств M_i и объектами r_i реализаций $R_i(M_i)$, базовых множеств. При этом отношения Ð$_i(x_1,\ldots,x_m)$ между элементами $x_i \in M_{i,}$ заданные в системе аксиом T, представляются или реализуются некоторыми отношениями $P_i(r_i,\ldots, r_m)$ между соответствующими объектами $r_i(x_i)$.

Вывод 2

Всякое утверждение A теории T_Σ получается логическим заключением (выводом) и в реализации $R(T)$ находится соответствующее отношение между объектами, отражающее утверждение A.

Определение

Система аксиом T, ее аксиоматическая теория T_Σ и аксиоматическая структура $\sum_T$, определенные вне какой–либо реализации, называются абстрактными или формальными системой аксиом, теорий или структурой соответственно.

Если существует реализация R(T) этой системы, то система T, теория T_Σ и структурой $\sum_T$ называются содержательными.

Классическим примером формальной теории является геометрия Лобачевского. Эта мыслимая геометрия долгое время не воспринималась однозначно как аксиоматическая теория, пока не были найдены ее реализации, например, реализация Пуанкаре L_2, построенная в п.6. Таким образом, исторический опыт с геометрией Лобачевского имеет "хороший конец": были найдены реализации и сняты все вопросы в рамках этих реализаций.

Чтобы использовать реализации $R(T)$ для исследования аксиоматических систем T, введем понятие изоморфизма реализаций (структур).

6.5. Изоморфизм

Пусть система аксиом T имеет две реализации $R(T)$ и $R^{'}(T)$. Тогда согласно выводу 1 (п.6.4) между объектами R_i и $R^{'}_i$ реализующими базовые множества M_i, устанавливается взаимно однозначное соответствие по схеме

$$\begin{array}{ccccc} R'_i(M_i) & \leftrightarrow & M_i & \leftrightarrow & R_i(M_i) \\ \psi & & \psi & & \psi \qquad (i=1,2,\ldots,m) \\ r'_i & \leftrightarrow & x_i & \leftrightarrow & r_i \end{array} \qquad (2)$$

Что можно сказать о соответствии между реализациями соотношений P_i в R_i и реализациями отношений P'_i в R'_i? Рассмотрим два примера.

Пример 1

Пусть система аксиом T состоит из 14 аксиом аксиоматики Гильберта, определяющих абсолютную геометрию плоскости (геометрию без аксиомы параллельности). Мы имеем две реализации этой планиметрии:

(1) арифметическая модель R^2 (евклидовой плоскости);

(2) модель Пуанкаре L_2 (плоскости Лобачевского). Можно установить взаимно однозначное соответствие между точками $M\in R^2$ и точками $N\in L_2$, а также между прямыми $l\in R^2$ и прямыми $a\in L_2$. В то же время не всем отношениям между точками и прямыми в L_2 можно найти соответствующие отношения в R^2. Например, отношение Đ$(a_1, a_2) \equiv \{$ прямые a_1 и a_2 не параллельны и не пересекаются $\}$ может выполняться в L_2 и не имеет аналога в R^2. (Другие неевклидовы отношения между точками и прямыми на плоскости L_2 см. в п. 5.2 §5).

Пример 2

Пусть ε^2 – геометрическая модель направленных отрезков (выполненная, например, карандашом на бумаге или реализованная на мониторе компьютера). Пусть E^2– арифметическая модель векторного пространства. Операция откладывания вектора, указанная в модели Вейтеля (п.4.1 §4), устанавливает взаимно однозначное отображение φ: $\overline{a}\leftrightarrow(x,y)$ модели $\varepsilon^2\ni\overline{a}$ на модель $E^2\ni(x,y)$. При этом, отображение φ сохраняет все определенные в векторной структуре отношения между соответствующими векторами $\overline{a}$ и $\varphi(\overline{a})=(x,y)$.

Определение изоморфизма

Две реализации $R(T)$ и $R'(T)$ системы аксиом T будем называть изоморфными, если выполняется два условия:

1) существует взаимно–однозначное соответствие (2) между реализациями $R_i(M_i)$ и $R'_i(M_i)$ базовых множеств M_i, i=1,2,…, m;

2) отображение (2) устанавливает взаимно однозначное соответствие между всеми свойствами $P'_i(r'_1,\ldots,r'_m)$ и $P_i(r_1,\ldots, r_m)$, представляющими в моделях R и R' свойства Đ$_i(x_1,\ldots, x_m)$ соответствующих при отображении (2) элементов $r'_i\leftrightarrow x_i\leftrightarrow r_i$.

Само отображение (2) при этом называется как изоморфизмом моделей или реализацией $R(T)$ и $R'(T)$, так и изоморфизмом аксиоматических структур $\sum_T\{\ T;P;R\ \}$ и $\sum_T\{\ T;P';R'\ \}$.

Другими словами, изоморфизм моделей – это такое взаимно однозначное соответствие между элементами моделей, которое сохраняет отношения элементов, задаваемые системой аксиом.

В примере 1, приведенном выше, модели R^2 и L_2 не изоморфны. В примере 2 модели ε^2 и E^2 изоморфны.

Вывод 3

Если систему аксиом T и ее аксиоматическую теорию T_Σ рассматривать как мыслимые или абстрактные объекты, и если существует реализация $R(T)$ этой системы T, то соответствие между элементами базового множества M и элементами объекта $R(M)$, реализующего M, устанавливает изоморфизм между мыслимой структурой $\sum_T \{\ T, \text{Ð}; M\ \}$ и моделью этой структуры $\sum_T^{/} \{\ T; P; R(M)\ \}$.

Вывод 4

Разница между абстрактной (формальной) системой аксиом с некоторой реализацией и содержательной системой аксиом состоит только в способе построения структуры. Действительно, можно вначале построить абстрактную систему аксиом, а затем указать ее модель. Можно наоборот, вначале выбрать те свойства модели, которые определяют ее с точностью до изоморфизма, а затем эти свойства принять за аксиомы. Оба способа определяют две изоморфные структуры.

Вывод 5

Всякая аксиоматическая структура $\sum_T \{\ T, \text{Ð}; M\ \}$ определена с точностью до изоморфизма. Это означает, что любая ее изоморфная модель $\sum_T^{'} \{\ T; P; R(M)\ \}$ рассматривается как совокупность тех и только тех свойств, которые выводятся логическим путем в теории T_Σ.

§ 7. Требования , предъявляемые к системам аксиом

7.1. Непротиворечивость системы аксиом

Система аксиом называется непротиворечивой, или совместной, если в теории T_Σ этой системы невозможно доказать какое–нибудь утверждение A и его отрицание $\rceil A$. В противном случае система аксиом называется противоречивой.

Теория T_Σ , содержащая вместе с некоторым утверждением $A \in T_\Sigma$ и отрицание этого утверждения $\rceil A \in T_\Sigma$ называется не классической теорией. С точки зрения "здравого смысла" такая теория абсурдна, так как в мире "реальных вещей" некоторое свойство A "выражает" отношение этих реальных вещей и не может одновременно "не выражать" это отношение.

Теоретическая проверка совместности системы аксиом, основанная на непосредственном определении совместности, затруднительна. Действительно, пусть мы доказали утверждения $A_1,A_2,\ldots,A_n$ теории T_Σ и пусть отрицание этих свойств $\rceil A_1,\ldots, \rceil A_n$ невозможны в T_Σ . Где гарантия, что не найдется свойство A_{n+1} , которое доказуемо вместе со своим отрицанием $\rceil A_{n+1}$ в теории T_Σ? Такой гарантии нет, поскольку перебрать все возможные утверждения некоторой теории практически невозможно. Например, евклидова геометрия, согласно работе профессора Гарвардского университета Гаррета Биркгоффа [10], основанная на 20 аксиомах Гильберта, включает около 20.000 утверждений, получаемых логическим путем. Ясно, что нет никакой возможности проверить на непротиворечивость все эти 20.000 утверждений, составляющий предмет геометрической теории $T_\Sigma = \{ A_1,A_2,\ldots,A_{20.000} \}$.

Мы уже говорили, что с точки зрения здравого смысла противоречивая система аксиом не должна допускать никакой реализации или модели (кроме, быть может, мыслимой модели), так как ни одно свойство в реальной модели не может иметь место вместе со своим отрицанием. Отсюда легко получаем следующее достаточное условие совместности.

Система аксиом T совместна или непротиворечива, если существует хотя бы одна реализация $R(T)$ этой системы.

Доказательство. Пусть $\Rightarrow$A и $T\Rightarrow\rceil A$. Тогда реализация $R(T)$ содержит свойство A и его отрицание, что невозможно в непротиворечивой реализации.

Вывод 1

Непротиворечивость всякой системы аксиом T сводится к существованию хотя бы одной априорно не противоречивой реализации.

В качестве примера обратимся к трехмерной евклидовой геометрии. Так как одной из ее реализаций является арифметическая модель R^3 (координатная модель), то евклидова геометрия непротиворечива, если непротиворечива арифметика действительных чисел. Таким образом, вопрос о непротиворечивости евклидовой геометрии сводится к вопросу о непротиворечивости арифметики действительных чисел.

Если в качестве реализации евклидовой геометрии рассматривать окружающий нас мир, то непротиворечивость этой геометрии будет сведена к опытной проверке. Однако расширение границ опыта в конце XIX – начале XX столетия привело к открытию неевклидовых геометрий в мире электромагнитных явлений, в мире гравитации. Так возникла специальная теория относительности, которая построена на законах неевклидовой геометрии, связанной с геометрией Лобачевского.

В качестве второго примера рассмотрим планиметрию Лобачевского. Она имеет реализацию Пуанкаре L_2, см. §5. В свою очередь L_2 имеет арифметическую модель: $\{(x,y);\, y>0\}$ –"точки", $\{(x–a)^2+y^2=k^2\ ,y>0\}$ – "прямые", и так далее. Следовательно, вопрос о непротиворечивости планиметрии Лобачевского сводится, как и в случае евклидовой геометрии, к непротиворечивости арифметики.

7.2. Независимость аксиоматической системы

Непротиворечивая система аксиом называется независимой, если ни одна из аксиом этой системы не может быть выведена из остальных аксиом как теорема. В противном случае система аксиом называется зависимой.

Для иллюстрации этого свойства обратимся снова к геометрической теории, основанной на аксиоматике Гильберта. Ясно, что непосредственная проверка независимости каждой из 20 аксиом затруднительна. История V постулата "Начал" Евклида является поучительным тому примером. Четвертый постулат о конгруэнтности всех прямых углов впоследствии был доказан как логическое следствие других аксиом и постулатов (точнее, других "очевидных" утверждений). Возник вопрос о независимости или прямом доказательстве следующего, пятого постулата о параллельных прямых. Тем более (см. замечание к аксиоме параллельности в §2), что как бы "половина доказательства" аксиомы параллельности уже была известна. Боле двух тысяч лет предпринимались попытки доказать одно из двух: либо то, что V постулат есть логическое следствие других "более очевидных" утверждений, либо то, что он не доказывается исходя из каких–либо "очевидных" утверждений, аксиом и постулатов. Обсуждением той роли, которую сыграл V постулат в теории познания вообще и в математике в частности, мы займемся чуть позже.

Сформулируем назревший вопрос. Существует ли эффективное достаточное условие для проверки независимости какого–либо утверждения A от системы аксиом T (проверенной уже на совместность)? Такое условие существует и для совместной системы аксиом формируется следующим образом в терминах реализаций.

Пусть T – непротиворечивая система аксиом. Утверждение (аксиома) A не зависит от системы T, если вместе с некоторой реализацией $R_1\,(T\,,A)$ системы T и A существует некоторая реализация $R_2(T,\ \rceil A)$ системы T и $\rceil A$.

Доказательство. Пусть существует реализация $R_2(T,\ \rceil A)$ системы T и $\rceil A$ и пусть $T\Rightarrow A$. Тогда реализация $R_2(T,\ \rceil A)$ содержит вместе со свойством $\rceil A$ и его отрицание $A=\rceil\,(\rceil A)$, что несовместимо с понятием реализации (см. п.6.3,

§6). Следовательно, предположение $T\Rightarrow$A (о том, что A следует из T) неверно. В качестве применения этого достаточного условия докажем независимость аксиомы параллельности от всех остальных 14 аксиом планиметрии.

7.3. Независимость аксиомы параллельности

Напомним, что планиметрия строится на системе 15 аксиом, включая аксиому параллельности (см. Аксиоматику Д. Гильберта в п.2.2 §2). Пусть $T=\{T_1,...,T_{14}\}$ – система аксиом без аксиомы параллельности, $П$ – аксиома параллельности евклидовой геометрии. В качестве реализации $R_1(T,П)$ системы аксиом T и $П$ возьмем модель R^2 – арифметической евклидовой плоскости: $R^2= R_1(T,П)$. В качестве реализаций $R_2(T,\neg П)$ возьмем модель Пуанкаре $L_2= R_2(T,\neg П)$. Непротиворечивость этих реализаций сводится, как было замечено в п.7.1, к непротиворечивости арифметики действительных чисел. Существование реализаций $R_1(T,П)$ и $R_2(T,\neg П)$, согласно достаточному условию, сформулированному и доказанному в п.7.2, влечет независимость аксиомы параллельности $П$ евклидовой геометрии от остальных 14 аксиом планиметрии.

Замечание 1

Доказательство независимости всех аксиом евклидовой геометрии можно найти, например, в [7], [8].

7.4. Дедуктивная полнота и категоричность системы аксиом

Для структуры $\sum\{T,$Ð $,M\}$ всякой системы аксиом T определено множеств $И$ – утверждений или высказываний, связывающих элементы T, Ð, M этой структуры. (Напомним, что M – множество базовых элементов, а Ð – множество отношений между элементами M (см п.6.1–6.2 §6). Любое высказывание "$и$"$\in И$ обладает одним из следующих трех свойств. Высказывание "$и$" является доказуемым в теории T_Σ, обозначим множество таких высказываний $Д$. Высказывание "$и$"$\in И$ опровержимо в системе T_Σ, обозначим множество таких высказываний $О$. Наконец, высказывание "$и$"$\in И$ не является ни доказуемым, ни опровержимым, то есть неопределенным; множество таких "$и$" обозначим $Н$. Таким образом, множество всех высказываний $И$, касающихся понятий структуры $\sum_T$, есть сумма непересекающихся классов

$$И=Д\cup О\cup Н. \qquad (1)$$

Определение (дедуктивной полноты)

Непротиворечивая система аксиом Т называется дедуктивно полной, если в определяемой ею теории всякое предложение либо доказуемо, либо опровержимо.

Другими словами, в теории всех высказываний такой системы *T* недоказуемые и неопровержимые (неопределенные) утверждения отсутствуют и разложение (1) принимает вид

$$И=Д \cup О. \quad (2)$$

Например, система аксиом *T* абсолютной геометрии, состоящая из аксиом *Д*. Гильберта с исключенной аксиомой *П* – параллельности прямых, дедуктивно неполна. Действительно, аксиома параллельности *П* не доказуема и не опровержима в системе *T*, так как *П* не зависит от *T*.

Вся система аксиом Гильберта обладает свойством дедуктивной полноты (см., например [7], [8]).

В случае дедуктивно неполной системы аксиом можно найти две неизоморфные модели. В качестве примера можно взять систему аксиом абсолютной планиметрии и две ее реализации в модели R^2 и в модели L_2. Мы уже показали (см. пример п.6.5. §6), что модели R^2 и L_2 неизоморфны.

Критерием дедуктивной полноты является свойство категоричности системы аксиом.

Определение (категоричности)

Непротиворечивая, система аксиом называется категоричной, если любые ее модели (реализации) изоморфны.

Рассмотренная выше система аксиом абсолютной геометрии представляет пример некатегоричной системы аксиом, так как существуют две неизоморфные реализации L_2 и R^2 этой системы.

Приведем без доказательства следующий критерий дедуктивной полноты. **Если система аксиом категорична, то она и дедуктивно полна**.

Обратное утверждение не справедливо. Существуют примеры дедуктивно полных систем аксиом, у которых имеются неизоморфные реализации (см. далее пример 2 из п.8.8).

7.5. Историческая роль V постулата Евклида в развитии оснований математики

Исключительная роль V постулата "Начал" Евклида состоит в том, что в течение почти двух тысяч лет предпринимались безуспешные попытки доказательства этого постулата в качестве Теоремы. Около 1826 г. Н. И. Лобачевским была впервые осознана независимость этого утверждения от остальных аксиом геометрии.

Этот факт является историческим моментом в развитии современной Теории оснований математики.

Следующий исторический шаг, совершенный Лобачевским же, состоял в построении непротиворечивой Теории, основанной на принятии утверждения, противоположного постулату параллельности Евклида.

Следующий шаг – принятие математиками этой "мыслимой" геометрии и математическое исследование отношений между Теорией и ее моделью. Этот шаг бы проделан благодаря трудам А. Пуанкаре, Феликса Христиана Клейна (1842–1925), К. Ф. Гаусса и др. математиков XIX в.

Эти геометрические открытия второй половины XIX в. послужили мощным импульсом исследования аксиоматических начал всей математики.

Георг Фердинанд Людвиг Филипп Кантор (1843–1918) предпринял попытку аксиоматического построения Теории множеств. Исследование противоречий языкового характера, с которыми столкнулись математики в его "наивной" Теории множеств, привели к современному пониманию требований, предъявляемых к системам аксиом. Наконец, в 1899 г. появляется практически современная геометрическая аксиоматика Д. Гильберта, которая легла в основу современного математического формализма, названного в математике Гильбертовым формализмом. В современных приложениях геометрии используется аксиоматика А. Вейля арифметической модели евклидова пространства (см. §4).

§ 8. Анализ текстовых парадоксов

8.1. Языковые свойства имен объектов

Готлоб Фреге впервые обратил внимание на то, что имя каждого объекта имеет два значения: **предметное** и **смысловое**. Согласно его “теории смысла” с понятием имени связаны три отношения к объекту: предметное, смысловое и знаковое. Определим их:

Денотат имени – это предметное значение имени, т.е. сам именуемый объект.

Концепт имени – это смысловое значение имени, т.е. то объективное содержание, которое выражается именем.

Константы – это сами имена индивидуальных предметов, но не имена свойств и отношений.

Наличие у имен двух значений – предметного и смыслового – приводит к двузначности имени: если имеется в виду концепт имени, то говорят об *интенциональном* значении имени, если же имеется в виду денотат имени, то говорят об *экстенциональном* значении имени.

Рассмотрим примеры.

Пример 1

“Число 2” – это имя имеет определенный денотат и концепт.

Пример 2

Имена: “Отношение эквивалентности”, “подобие”, “параллельность” имеют определенный концепт, как некоторые отношения. В то же время денотаты этих имен не определены.

Пример 3

Имя “$\sqrt{4}$“ – символ, представляющий определенный денотат – число 2. Однако, его концепт неопределен: $\sqrt{4}$ – операция или $\sqrt{4}$ – величина?

8.2. Проблема выразимости

Двузначность “имени” придает гибкость языку как средству коммуникации и в то же время делает его несовершенным как знаковое средство передачи информации. Действительно, последовательность слов как знаковых единиц накапливает неопределенность или многозначность от слова к слову.

В конце концов, смысл предложения как знаковой цепочки становится неопределенным. Мера определенности, по-видимому, является мерой символьной длины формального предложения, состоящего из знаков-слов.

Математики всегда сознавали несовершенство естественного языка. Громоздкие языковые конструкции затрудняли математическую деятельность, которая сводилась к описанию моделей, структур и изоморфизмов. Это послужило причиной возникновения символьного языка математической логики, предметных языков геометрии, теории множеств и т.д.

Однако символьный язык не смог полностью заменить естественный язык, так как *язык изложения по необходимости всегда шире предметного языка самой теории.*

Требование математической строгости, с одной стороны, заключается в изоморфном описании структур, т.е. требуется, чтобы некоторый минимум свойств-аксиом однозначно представлял объекты по их отношениям. С другой стороны, всякое рассуждение должно начинаться с явного описания соответствующей предметной области. Эти два требования, как правило, несовместимы. А эта несовместимость и порождает проблему выразимости.

8.3. Понятие искусственного языка

Всякий предметный или искусственный язык состоит из следующих компонентов:

1. Алфавит (конечный список исходных символов).
2. Правила построения термов (имен и именных форм).
3. Правила построения формул (высказываний и высказывательных форм).
4. Интерпретации языка.

Пункты 1–3 представляют *синтаксис языка*; пункт 4 – *семантику языка.*

Искусственный язык является математическим языком и носит исключительно информативный характер. В этих языках используются только повествовательные предложения (высказывания). Формы мышления, не представляющиеся повествовательными предложениями, в этих языках невыразимы.

Самым простым искусственным языком является язык математической логики первого порядка [11].

Предметные языки – геометрический и теории множеств считаются более сложными, так как содержат отношения включения и другие, не заданные в языке логики первого порядка.

Искусственные языки делятся по уровням сложности в зависимости от типов отношений, которые они описывают.

Описание свойств моделей в зависимости от уровня языка требует специальных сведений по математической логике [11] которые не входят в круг рассматриваемых нами вопросов.

Мы ограничимся нестрогим анализом текстов некоторых парадоксов, используя лишь понятия модели, совместимости, независимости и категоричности систем аксиом.

8.4. Понятие парадокса

Проблема выразимости отражает несоответствие естественного и искусственного языков, а также несоответствие между самими искусственными языками, относящимися к моделям разного уровня сложности. Эти несоответствия мы обнаруживаем в виде различных парадоксов.

Парадоксами будем называть текстовое утверждение, логическое следствие которого приводит к противоречиям.

Мы выделим два типа соответствия между языками моделей.

Первый тип. Согласно выводу 3, §6, изоморфизм мыслимой модели на некоторою внешнюю модель дает возможность “воспринимать объект” или, наоборот, “выражать мысль в виде каких–то внешних отношений”. При этом внешние отношения фиксируются в виде некоторого текста.

Второй тип. Соответствие между языками моделей представляется структурными изоморфизмами.

Рассмотрим текстовые противоречия с точки зрения нарушения одного из двух указанных типов соответствия между языками моделей на примерах известных парадоксов.

8.5. “Ахиллес и черепаха”

Понятийный аппарат человеческого разума способен создавать автономные модели. Эти мыслимые модели могут не иметь образов в реальном мире. Противоречие в таком случае снимается исследованием изоморфизма между мыслимой моделью и моделью определенного объекта. Рассмотрим пример.

Апория “Ахиллес и черепаха” принадлежит Зенону из Элен (483–375 гг. до н.э.) и состоит в следующем.

«Легендарный бегун Ахиллес движется в два раза быстрее черепахи. В момент старта черепаха находилась на расстоянии “*a*” от Ахиллеса. Когда Ахиллес пробежит этот отрезок “*a*”, то черепаха уползет вперед на расстояние “*a*”/2. Когда Ахиллес пробежит отрезок “*a*”/2, то черепаха уползет вперед на “*a*”/4. Когда Ахиллес пробежит “*a*”/4, то черепаха продвинется вперед еще на “*a*”/8 и т.д. Этот процесс бесконечен, и Ахиллес никогда не догонит черепаху».

Апория построена на интуитивном убеждении, что никакие бесконечные процессы завершиться не могут. Именно это и приводит к противоречию. Надо объяснить каким образом рассматриваемый “мысленно” бесконечный процесс все же закончится.

Герман Вейль в начале XX в. дал следующее объяснение этой апории. В мыслимой модели существует бесконечная последовательность $1,2,3,\ldots,n,\ldots$ временных событий (Ахиллес проходит расстояние “a”$/2^n$) с неограниченно убывающим временным интервалом $t_n = 1/2^n$. Сумма таких интервалов существует и равна 2 единицам времени.

В реальном мире каждая физическая операция требует некоторого времени, которое больше некоторого фиксированного временного интервала. Поэтому всякая бесконечная последовательность физических операций “выполнима” лишь за бесконечный промежуток времени.

Таким образом, в апории «Ахиллес и черепаха» нет изоморфизма между мыслимой и реальной моделями.

8.6. Парадокс пустого множества

Рассмотрим высказывание $T\equiv$\{то, что я скажу, ложь\}. Зададимся вопросом, истинно это утверждение или ложно? Если T истинно, то по своему смыслу оно ложно. Если T ложно, то отрицание лжи есть истинно. Таким образом, T не является ни истинным, ни ложным. В чем суть противоречия?

Рассмотрим утверждение “T” как аксиому и рассмотрим существование реализации $R(T)$ мыслимой модели с аксиомой T. Реализация есть пустое множество. В противном случае на этой реализации мы имеем некоторое свойство с его отрицанием. Поэтому не существует изоморфизма мыслимой модели T ни на какую реализацию $R(T)$.

Утверждение такого типа, когда мыслимые модели не имеют реальных моделей, можно называть бессмысленными.

8.7. Парадокс достижимости в натуральном ряде

Натуральный ряд N – это множество, определяемое системой аксиом Пеано, см. п.1.1. § 1. Элемент $x\in N$ будем называть **достижимым**, если этот элемент $x=S(\ldots S(S(1)))$ получен конечным числом операций последования S из первого элемента “1”.

Вопрос: всякий ли элемент $x\in N$ достижим? Для ответа воспользуемся аксиомой 5 “Математической индукции” аксиоматики Пеано (см. п.1.1. §1). Пусть M – множество всех достижимых элементов: $1\in M$, $S(1)\in M$; если $x\in M$, то $S(x)\in M$. Следовательно, по аксиоме 5, заключаем, что $M\equiv N$, т.е. все элементы натурального ряда достижимы.

С другой стороны, как мы знаем (п.1.1. § 1), линейная цепь

$$T = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ \ldots;\ \ldots,\ a_{-2},\ a_{-1},\ a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots;\ \ldots,$$

является моделью натурального ряда (все аксиомы Пеано выполняются). В этой модели второй и следующие за ним блоки имеют вид

$$\ldots,\ a_{-2},\ a_{-1},\ a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots$$

и содержат недостижимые элементы. Получили противоречие с тем, что все элементы достижимы.

Покажем, что свойство достижимости (назовем его аксиомой *Д*) не зависит от аксиом Пеано, следовательно, не является логически выводимым в теории этой аксиоматики.

Пусть $П = \{П_1, \ldots, П_5\}$ – аксиоматика Пеано (п.1.1, §1).

Модель Сколема *T* реализует систему аксиом *П* и отрицание аксиомы $Д$: $T = R_1\{П, \rceil Д\}$. Модель десятичного систематического представления *N* натурального ряда реализует аксиомы *П* и $Д$: $N = R_2(П, Д)$. Следовательно, согласно достаточным условиям независимости системы аксиом (п.7.3., §7) заключаем, что аксиома *Д* не зависит от *П*.

Вывод

В теории аксиом Пеано свойство достижимости не доказуемо и не опровержимо, подобно тому, как в абсолютной планиметрии не доказуема и не опровержима аксиома параллельности.

8.8. “Одно и то же, но по–разному”

– именно так характеризуется аксиоматическая теория, имеющая две неизоморфные модели. Напомним, п.7.4 §7, что такие аксиоматики, аксиоматические теории и структуры называются **некатегоричными,** и рассмотрим примеры.

Вначале напомним, что система 15 аксиом (часть аксиом Гильберта) определяет геометрию ε^2 плоскости Евклида. Если заменить аксиому параллельности Евклида на аксиому параллельности Лобачевского, то получим систему 15 аксиом планиметрии Лобачевского с моделью Пуанкаре L_2. Напомним также, что обе эти геометрии образуют дедуктивно полные и категоричные аксиоматические теории. Теперь сформулируем пример.

Пример 1

Из 15 аксиом планиметрий E^2 и L_2 удалим аксиомы параллельности. Оставшиеся 14 аксиом составляют Теорию абсолютной планиметрии. Эта теория не категорична, так как L_2 не изоморфна R^2. Эта теория дедуктивно не полна, т.к. аксиома параллельности не выводима из остальных аксиом.

Таким образом, одна и та же система аксиом абсолютной планиметрии в разных моделях имеет различные “визуальные” эффекты. Например, в плоскости L_2, (см. §5) мы “видим” два равных треугольника по трем равным углам, а также две прямые, которые не параллельны и не пересекаются. Этого “увидеть” в плоскости R^2 мы не можем.

Пример 2

Рассмотрим теорию, определяемую следующими 7 аксиомами:

1. Аксиома рефлексивности: $\forall x(x \le x)$.
2. Аксиомы антисимметричности: $\forall x, y(x \le y \wedge y \le x \Rightarrow x = y)$.
3. Аксиома транзитивности: $\forall x, y, z(x \le y \wedge y \le z \Rightarrow x \le y)$.

4. Аксиома линейности: $\forall x,y(x\leq y \vee y\leq x)$.
5. Аксиома плотности: $\forall x,y\exists z(x\neq y \Rightarrow x<z<y \vee y<z<x)$
6. Аксиома отсутствия наименьшего элемента: $\forall x\exists z\ (z<y)$.
7. Аксиома отсутствия наибольшего элемента: $\forall x\exists z\ (z>y)$.

Эта система аксиом дедуктивно полна (см., например, [11]) но не категорична, так как имеет две неизоморфные модели: Q – множество рациональных чисел и R – множество действительных чисел.

Заключение

Мы закончили экскурс в математику кратким анализом текстовых парадоксов. Любой парадокс является интеллектуальным продуктом. Как противоречие он обнаруживается при построении изоморфизмов моделей и выражается в виде текста символьного и описательного языков. Поэтому все парадоксы можно в определенном смысле считать текстовыми.

Язык изложения нашего чрезвычайно краткого курса по алгоритмичности не выходит за рамки школьной программы, но по культуре мышления требует дополнительных интеллектуальных усилий.

По возможности мы демонстрировали язык геометрического формализма и геометрических моделей. Этот язык максимально приближен к наглядности. Наглядность – это визуальное представление информации. Строгость такого представления не “ниже”, чем в абстрактной символьной модели. Строгость языка рассмотренных геометрических моделей определяется свойствами непротиворечивости, независимости, категоричности и дедуктивной полноты аксиоматик Гильберта, Вейля и Лобачевского.

Таким образом, уровень строгости языка определяется свойствами выразимости и не зависит от степени “наглядности” или абстрактности.

Примеры п.8.8 §8 показывают, что “дефекты” выразимости присущи как визуальным, так и абстрактным аксиоматическим системам.

Какой мы сделаем вывод в конце нашего краткого курса?

Напомним три основные функции естественного языка: 1) отслеживание мысли, 2) формирование умозаключений и 3) средство коммуникаций.

Первые две функции в естественном языке используются для построения мыслимых моделей и являются инструментом процесса мышления (интеллекта). Третья функция использует знаковые системы для связи субъекта с внешним миром и является инструментом для реализации продукта мышления. Поскольку интеллект есть процесс или продукт мыслительной деятельности, то язык является единственным инструментом интеллекта.

Математический язык – это искусственный язык, который позволяет оптимально кодировать, хранить и передавать информацию. Например, 20 аксиом геометрии вместе с заданием точек, прямых, плоскостей и отношениями (принадлежности, порядка, конгруэнтности, параллельности и непрерывности) образуют геометрический язык и позволяют «хранить» в геометрической структуре около 20.000 утверждений, которые составляют предмет геометрической теории и могут быть выведены в рамках этой теории.

Язык геометрии строился несколько тысячелетий. Можно предположить, что основные геометрические структуры, изученные нами, являются каноническими моделями, по образу и подобию которых строятся многие естественно–научные модели и теории. Мы видели, что визуальность евклидовой геометрии не делает ее «менее строгой», чем чисто логические построения. Действительно, геометрические аксиоматики обладают свойствами совместности, независимости (при условии, что этими свойствами обладают действительные числа) и дедуктивной полнотой, которая следует из категоричности. Поэтому можно считать, что качество модели, иллюстрирующих какие–либо явления, также определяются наличием свойств совместности, независимости и дедуктивной полноты системы аксиом, определяющих эти модели.

Рассмотрим пример. Компьютерную игру назовем «Абсолютная геометрия». Ее правила – законы структуры планиметрии без аксиомы параллельности. Результат игры состоит в правильном ответе “да” или “нет” на любое утверждение, сформулированное на языке геометрических отношений, задаваемых 14 аксиомами планиметрии без аксиомы параллельности (см. замечание 2, п. 2 §2).

- Вопрос: Равны или нет два треугольника по трем равным сторонам?
- Ответ : Да.

Действительно, этот признак равенства треугольников не зависит от аксиомы параллельности.

- Вопрос: Равны два треугольника по трем равным углам?
- Ответ: Ни да, ни нет!

Действительно, в арифметической модели евклидовой плоскости R^2 ответ: “нет”; в модели Пуанкаре плоскости Лобачевского ответ: “да!” Такая неопределенность ответа связана с дедуктивной неполнотой абсолютной планиметрии. Следовательно, абсолютная планиметрия “некачественная” модель плоскости, так как некоторые вопросы не имеют определенного ответа.

Геометрическая визуальность – понятие относительное. Действительно, стоило нам поменять аксиому параллельности Евклида на аксиому Лобачевского, и мы получили абстрактную планиметрию Лобачевского. Визуальность практически исчезает, но высшая “степень качества” геометрической модели остается.

Мы выяснили, что объектами математического языка являются только математические структуры. Основу Теории математических структур составляют те же три функции, которые выделяют в естественном языке. Поэтому математике отводится роль имитации мыслительных процессов в формализованной знаковой системе. **Можно считать, что математика создает искусственный интеллект, который развивается параллельно естественному интеллекту и в определенном смысле оптимизирует работу последнего.**

Формы познания человеком окружающей действительности имеет единую сущность, которая выражается в законах самоорганизации сложных систем. В знаковых системах, используемых человеком для создания мыслительного образа, его преобразования и реализации в виде модели, концентрируются законы, по которым организуется любое мыслительное познание мира. Применяя математику как языковой инструмент исследования, в любом случае, мы накапливаем интеллектуальный опыт и концентрируем его в знаковой системе по закону математической структуры. Отношение интеллектуального опыта к реальности определяется различными реализациями, возникающими в человеческой практики.

Обозначения.

В тексте используются следующие общепринятые обозначения:

$\Rightarrow$ – знак логического следствия “отсюда следует, что”;

$\Leftrightarrow$ – знак эквивалентности утверждений “тогда и только тогда, когда”;

$\cap$ – знак пересечения множеств;

$\cup$ – знак объединения множеств;

$a \in A$, ($a \notin A$) – знак принадлежности (не принадлежности) элемента “a” множеству A;

$\wedge$ – знак конъюнкции “и”;

$\vee$ – знак дизъюнкции “или”;

$\forall x, y(P(x,y))$ – для всякого x, для всякого y, обладающих свойством $P(x,y)$;

$\exists\, z(P(z))$ – существует z со свойством $P(z)$;

$\forall x\ \exists\ y\ P(x,y) \Rightarrow Q(x,y))$ – для всякого x существует y такое, что из свойства $P(x,y)$ следует $Q(x,y)$;

$\leftrightarrow$ – знак взаимно–однозначного соответствия;

$\overline{a}$, $\overline{AB}$ – векторы;

$L(\ )$ – изоморфизм;

$\overline{a}\,(x_1, \ldots, x_n)$ – координаты вектора;

E^n, (n=1,2,3) – арифметическая модель n–мерного векторного пространства;

R^n – арифметическая модель n–мерного евклидова пространства;

ε^n – геометрическая модель n–мерного евклидова пространства;

L_2 – модель Пуанкаре плоскости Лобачевского;

$\|$ – знак параллельности;

$\sim$ – знак отношения эквивалентности;

$\varnothing$ – пустое множество;

T_Σ – аксиоматическая теория;

Σ_T – аксиоматическая структура;

T – система аксиом;

$R(T)$ – реализация системы аксиом T.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Клайн М*. Математика. Утрата определенности. – М.: Мир, 1988.
2. *Орлов Ю.К*. Невидимая гармония. Число и мысль. – М.: 1980. Вып.3.-с. 73/
3. Квантитативная лингвистика и семантика. Сборник научных трудов. вып.1.– Новосибирск, изд–во НГПУ,1999.
4. *Бухштаб А.А*. Теория чисел. – М.:1960.
5. *Гильберт Д., Кон–Фоссен.* Наглядная геометрия. – М.: Наука, 1981.
6. *Хинчин А.Я*. Цепные дроби. – М.: ФМ, 1961.
7. *Ефимов Н.В*. Высшая геометрия. – М.: Наука, 1978.
8. *Пуанкаре А.* О науке. – М.: Наука, 1983.
9. *Александров А.Д*. Основание геометрии. – М.: Наука, 1987.
10. *Биркгофф Г*. Математика и психология. – М.: Советское радио, 1977.
11. *Колмогоров А.Н., Драгалин А.Г.* Введение в математическую логику. – М.: Изд-во МГУ, 1982.
12. *Мандельброт. Б*. Теория информации и психолингвистика: теория частот слов. //Математические методы в социальных науках. – М.: Прогресс, 1973,-с. 316–337.