Операционное исчисление

Задачи для индивидуальных заданий и типовых расчетов и методические указания к их решению

I Найти изображение функций

1. $f(t)=\dfrac{\sin at\cdot sh\,at}{2}$ 2. $f(t)=\dfrac{\sin t\,ch\,t-\cos t\,sh\,t}{2}$

3. $f(t)=\sin^4 t$ 4. $f(t)=e^{-4t}\sin 3t\cos 2t$

5. $f(t)=\dfrac{\sin t}{t}$ 6. $f(t)=\dfrac{e^{-\alpha t}\sin kt}{t}$

7. $f(t)=\dfrac{\cos bt-\cos at}{t}$ 8. $f(t)=\dfrac{1-e^{at}}{te^{t}}$

9. $f(t)=\dfrac{\sin 7t\cdot\sin 3t}{t}$ 10. $f(t)=\dfrac{t^3}{3}+4\cos 2t$

11. $f(t)=\frac{1}{3}\sin 3t-5$ 12. $f(t)=t^2e^t+2te^{-t}+4ch2t$

13. $f(t)=\cos 2t\sin 3t$ 14. $f(t)=\dfrac{e^{at}-e^{bt}}{t}$

15. $f(t)=\sin^2 t$ 16. $f(t)=sh\,at\cos bt-1$

17. $f(t)=2t^2-ch\,at\sin bt$ 18. $f(t)=e^{at}+ch\,at\cdot\cos bt$

19. $f(t)=5e^{-t}+e^{t}\cos^2 t$ 20. $f(t)=\dfrac{e^{-at}\sin^2 bt}{t}$

21. $f(t)=\dfrac{\sin^2 t}{t}$ 22. $f(t)=t^2e^{3t}$

23. $f(t)=te^{-\frac{t}{2}}$ 24. $f(t)=3t^3e^{-t}+2t^2-1$

25. $f(t)=2\sin 2t+3sh2t$ 26. $f(t)=4t^2-2t+3$

27. $f(t)=\cos^2 4t$ 28. $f(t)=\cos^3 t$

29. $f(t) = e^{t}\cos^{2} t$

30. $f(t) = \sin^{3} t$

31. $f(t) = t\cos bt$

32. $f(t) = t^{2}\sin bt$

33. $f(t) = t\,\operatorname{sh} at \sin at$

34. $f(t) = t\,\operatorname{ch} at \cos at$

35. $f(t) = e^{t-a}\sin(t-a)$

36. $f(t) = \cos(at-b)$

37. $f(t) = te^{t}\sin t$

38. $f(t) = \dfrac{\sin t + t\cos t}{2}$

39. $f(t) = e^{-t}\cos 3t + \frac{2}{3}e^{-t}\sin 3t$

40. $f(t) = \frac{t}{2} - \frac{3}{4} + e^{-t} + \frac{1}{4}e^{-2t}$

41. $f(t) = (3t-8)e^{t} + t^{2} - 5t + 3$

42. $f(t) = \cos t - \frac{t}{2}\cdot \sin t$

43. $f(t) = t^{3} + e^{-3(t+2)}\cdot(t+2)^{3}$

44. $f(t) = te^{2t} + \frac{1}{2}\sin 2t$

45. $f(t) = ((\alpha-\beta)t+1)e^{-\alpha t}$

46. $f(t) = te^{-\alpha t}e^{-\beta t}$

47. $f(t) = e^{\beta t}\sin^{2}\alpha t$

48. $f(t) = e^{\beta t}\cos^{2}\alpha t$

49. $f(t) = a^{t}$

50. $f(t) = \frac{t}{4} - \frac{1}{8}\sin 2t$

II Найти оригинал функции

1. $F(p)=\dfrac{p+8}{p^2+4p+5}$

2. $F(p)=\dfrac{p^2+1}{p(p+1)(p+2)(p+3)}$

3. $F(p)=\dfrac{p+1}{p^2+2p}$

4. $F(p)=\dfrac{p+1}{p^2(p-1)(p+2)}$

5. $F(p)=\dfrac{a^2}{p(p+a)^2}$

6. $F(p)=\dfrac{1}{(p-1)^2(p-2)^3}$

7. $F(p)=\dfrac{p+5}{(p+2)(p+1)^2}$

8. $F(p)=\dfrac{1}{(p+1)^3(p+3)}$

9. $F(p)=\dfrac{5p+3}{(p-1)(p^2+2p+5)}$

10. $F(p)=\dfrac{1}{(p-1)(p-2)^2}$

11. $F(p)=\dfrac{p^2+1}{p(p+1)(p+2)}$

12. $F(p)=\dfrac{1}{(p-1)(p-2)}$

13. $F(p)=\dfrac{p^2+14}{(p^2+4)(p^2+9)}$

14. $F(p)=\dfrac{1}{p^2(p+1)^3}$

15. $F(p)=\dfrac{1}{(p+1)(p+2)^2}$

16. $F(p)=\dfrac{1}{(p^2+6p+13)(p^2+6p+10)}$

17. $F(p)=\dfrac{1}{p(p^2+1)}$

18. $F(p)=\dfrac{p}{(p^2+1)(p^2+4)}$

19. $F(p)=\dfrac{p}{(p^2-1)(p-2)}$

20. $F(p)=\dfrac{1}{p^2(p^2-1)}$

21. $F(p)=\dfrac{p^2}{(p^2+4)(p^2+9)}$

22. $F(p)=\dfrac{5p^3+5p^2-11p+3}{p^3(p+3)}$

23. $F(p)=\dfrac{p}{(p+1)^3}$

24. $F(p)=\dfrac{p}{(p^2+1)(p^2+4)}$

25. $F(p)=\dfrac{p+2}{p^2-1}$

26. $F(p)=\dfrac{4-p}{(p-2)^3}$

27. $F(p)=\dfrac{p^2}{(p^2+1)(p^2+4)}$

28. $F(p)=\dfrac{1}{p(p^2-4)}$

29. $F(p)=\dfrac{3p^2-1}{(p^2+1)^3}$

30. $F(p)=\dfrac{1}{p^2(p-a)}$

31. $F(p)=\dfrac{1}{(p^2+1)p^2}$

32. $F(p)=\dfrac{5p^3+3p^2+12p-12}{p^4-16}$

33. $F(p)=\dfrac{6p^3+4p+1}{p^4+p^2}$

34. $F(p)=\dfrac{p}{(p-1)^3(p+2)^2}$

35. $F(p)=\dfrac{p^2}{(p^2+1)^2}$

36. $F(p)=\dfrac{k}{p(p^2+k^2)}$

37. $F(p)=\dfrac{1}{p(p^4-5p^2+4)}$

38. $F(p)=\dfrac{3p+2}{(p^2-4p+6)^2}$

39. $F(p)=\dfrac{k}{p^2(p^2+k^2)}$

40. $F(p)=\dfrac{p+3}{p(p^2-4p+3)}$

41. $F(p)=\dfrac{p}{(p^2+a^2)^2}$

42. $F(p)=\dfrac{3p^4-12p^3+16p^2-6p+3}{p^5-4p^4+5p^3}$

43. $F(p)=\dfrac{1}{(p-1)(p^2-4)}$

44. $F(p)=\dfrac{p+3}{p^2-6p+11}$

45. $F(p)=\dfrac{p+1}{p(p-1)(p-2)(p-3)}$

46. $F(p)=\dfrac{1}{p^2-2p+5}$

47. $F(p)=\dfrac{7}{p^2+10p+20}$

48. $F(p)=\dfrac{1}{p(p^2+9)}$

49. $F(p)=\dfrac{1}{(p^2+1)(p^2+2p+5)}$

50. $F(p)=\dfrac{p^2+3p+8}{p^3+1}$

III Решить дифференциальные уравнения операционным методом

1. $x''' - 2x'' + x' = 4, \quad x(0) = 1,\ x'(0) = 2,\ x''(0) = -2$

2. $x^{IV} - 5x'' + 10x' - 6x = 0, \quad x(0) = 1,\ x'(0) = 0,\ x''(0) = 6,\ x'''(0) = -14$

3. $x^{IV} + 2x'' + x = 0, \quad x(0) = 0,\ x'(0) = 1,\ x''(0) = 2,\ x'''(0) = -3$

4. $x'' + x = t\cos 2t, \quad x(0) = x'(0) = 0$

5. $x''' - x'' = 0, \quad x(0) = 3,\ x'(0) = 2,\ x''(0) = 1$

6. $x''' - 6x'' + 11x' - 6x = 0, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$

7. $x'' - 3x' + 2x = t^2 + t + 1, \quad x(0) = 0,\ x'(0) = 1$

8. $x'' - 3x' + 2x = e^t, \quad x(0) = x'(0) = 0$

9. $x^{IV} + 2x'' + x = t\sin t, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0$

10. $x^{IV} + 4x = t^2, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0$

11. $4x''' - 8x'' - x' - 3x = -8e^t, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 1$

12. $x^{IV} + x'' = \cos t, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0,\ x'''(0) = 2.$

13. $x''' + x' = e^{2t}, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$

14. $x'' + 4x = \cos 3t, \quad x(0) = x'(0) = 2$

15. $x'' - 2x' - 3x = e^{3t}, \quad x(0) = x'(0) = 0$

16. $x'' + x' - 2x = e^t, \quad x(0) = -1,\ x'(0) = 0$

17. $x''' - 6x'' + 11x' - 6x = 0, \quad x(0)=0,\ x'(0)=1,\ x''(0)=0$

18. $x'' - x' - 2x = 4e^{3t}, \quad x(0)=0,\ x'(0)=-1$

19. $x''' - x'' - 6x' = 0, \quad x(0)=15,\ x'(0)=2,\ x''(0)=56$

20. $x' + ax = b, \quad x(0)=0$

21. $x'' + 2x' + 2x = 0, \quad x(0)=x'(0)=1$

22. $x'' - 6x' + 9x = 0, \quad x(0)=-1,\ x'(0)=1$

23. $x'' - x' - 6x = 2, \quad x(0)=1,\ x'(0)=0$

24. $x'' - 9x = 2 - t, \quad x(0)=0,\ x'(0)=1$

25. $x'' - 4x = 4t, \quad x(0)=1,\ x'(0)=0$

26. $x'' + x = \sin 2t, \quad x(0)=x'(0)=0$

27. $x'' + x = e^{-t} + 2, \quad x(0)=x'(0)=0$

28. $x'' + x = \cos t + \sin 2t, \quad x(0)=x'(0)=0$

29. $x'' - 4x = 4e^{2t}, \quad x(0)=x'(0)=0$

30. $x''' + x' = 10e^{2t}, \quad x(0)=$ [illegible] $x'(0)=0$

31. $x'' + x' = t, \quad x(0)=x'(0)=0$

32. $x''' - 3x' + 2x = (4t^2 + 4t - 10)e^{-t}, \quad x(0)=1,\ x'(0)=-1,\ x''(0)=2$

33. $x''' - 6x'' + 11x' - 6x = 12t^2e^{3t} - e^{2t}, \quad x(0)=x''(0)=-1,\ x'(0)=1$

34. $x^{IV} + x''' = \cos t, \quad x(0)=x'(0)=x''(0)=x'''(0)=1$

35. $x'' + 4x' + 4x = t^3e^{-2t}, \quad x(0)=1,\ x'(0)=2$

36. $x'' + 2x' + 5x = \sin t, \quad x(0)=1,\ x'(0)=2$

37. $x'' + 3x' + 2x = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$

38. $x''' - x'' = 0$, $x(0) = 2$, $x'(0) = 0$, $x''(0) = 1$

39. $x'' - 3x' + 2x = e^{5t}$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$

40. $x'' - x' = t^2$, $x(0) = x'(0) = 0$

41. $x''' + x = \frac{1}{2} t^2 e^t$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$

42. $x''' + x = 1$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$

43. $x^{IV} - 2x'' + x = \sin t$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0$

44. $x'' + 4x = \sin 3t$, $x(0) = x'(0) = 0$

45. $x'' + 3x' + 2x = t$, $x(0) = x'(0) = 0$

46. $x'' + 9x = 1$, $x(0) = x'(0) = 0$

47. $x' + x = 1$, $x(0) = 0$

48. $x'' + x = t^3 + 6t$, $x(0) = x'(0) = 0$

49. $x''' + 3x' + 2x = (4t^2 + 4t - 10)e^{-t}$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$

50. $x'' + x' = t$, $x(0) = x'(0) = 0$

IV Решить систему дифференциальных уравнений операционным методом

1. $\begin{cases} 3x' + 2x + y' = 1 \\ x' + 4y' + 3y = 0 \end{cases}, \quad x(0) = y(0) = 0$

2. $\begin{cases} x' - x - 2y = t \\ -2x + y' - y = t \end{cases}, \quad x(0) = 2, \ y(0) = 4$

3. $\begin{cases} 2x'' - x' + 9x - y'' - y' - 3y = 0 \\ 2x'' + x' + 7x - y'' + y' - 5y = 0 \end{cases}, \quad \begin{matrix} x(0) = x'(0) = 1 \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{matrix}$

4. $\begin{cases} x'' - x + y + z = 0 \\ x + y'' - y + z = 0 \\ x + y - z'' - z = 0 \end{cases}, \quad \begin{matrix} x(0) = 1, \ y(0) = z(0) = 0, \\ x'(0) = y'(0) = z'(0) = 0 \end{matrix}$

5. $\begin{cases} x'' - 4x' - y' + y = 1, \\ x' + 6x + y'' - y' = e^{4t} \end{cases}, \quad \begin{matrix} x(0) = x'(0) = 0 \\ y(0) = 1, \ y'(0) = -1 \end{matrix}$

6. $\begin{cases} x' - x + 2y = 0 \\ x'' - 2y' = 2t - \cos 2t \end{cases}, \quad \begin{matrix} x(0) = 0, \ x'(0) = -1, \\ y(0) = \frac{1}{2} \end{matrix}$

7. $\begin{cases} y' - z' - 2y + 2z = 1 - 2t \\ y'' + 2z' + y = 0 \end{cases}, \quad y(0) = z(0) = y'(0) = 0$

8 $\begin{cases} y' = 3z - y \\ z' = y + z + e^t \end{cases}, \quad x(0) = z(0) = 0$

10. $\begin{cases} x' = y \\ y' = z \\ z' = x \end{cases}$, $x(0) = z(0) = 1$, $y(0) = 1$.

11. $\begin{cases} x' = y - z \\ y' = x + y \\ z' = x + z \end{cases}$, $x(0) = 1$, $y(0) = 2$, $z(0) = 3$.

12. $\begin{cases} x' + 2x + 2y = 10e^{2t} \\ y' - 2x + y = 7e^{2t} \end{cases}$, $y(0) = 3$, $x(0) = 1$.

13. $\begin{cases} x' + y = 0 \\ y' - 2x - 2y = 0 \end{cases}$, $x(0) = y(0) = 1$

14. $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 2x + y + 1 \end{cases}$, $x(0) = 0$, $y(0) = 5$

15 $\begin{cases} y' = -y + z + x \\ z' = y - z + x \\ x' = y + z + x \end{cases}$, $y(0) = 1$, $x(0) = z(0) = 0$.

16) $\begin{cases} x'' - 4x - y' - 2y + z' - 2z = 0 \\ 2x' - y'' + 3y + z'' - 4z = 0 \\ x' - 2x - y + z'' - 4z = 0 \end{cases}$, $x(0) = y(0) = z(0) = 1$, $x'(0) = 2$, $y'(0) = 3$, $z'(0) = 1$

17. $\begin{cases} y' + 7y - z = 0 \\ z' + 2y + 5z = 0 \end{cases}$, $y(0) = z(0) = 1$

18. $\begin{cases} y' - y + z = \frac{3}{2}t^2 \\ x' + 4y + 2z = 4t + 1 \end{cases}$, $y(0) = z(0) = 0$.

19. $\begin{cases} x'' + y = 1 \\ y'' + x = 0 \end{cases}$, $x(0) = y(0) = x'(0) = y'(0) = 0$.

20. $\begin{cases} y' + z' - z = e^t \\ 2y' + z' + 2z = \cos t \end{cases}$, $y(0) = z(0) = 0$

21. $\begin{cases} x'' + y = 1 \\ y'' + x = 0 \end{cases}$, $x(0) = y(0) = x'(0) = y'(0) = 0$

22. $\begin{cases} x' = y - 7x \\ y' = -2x + 5y \end{cases}$, $x(0) = y(0) = 1$

23. $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$, $x(0) = 1$, $y(0) = -1$

24. $\begin{cases} x' = x - 3y \\ y' = 3x + y \end{cases}$, $x(0) = 1$, $y(0) = 0$

25. $\begin{cases} x' = y \\ y' = x + e^t + e^{-t} \end{cases}$, $x(0) = y(0) = 1$

26. $\begin{cases} x' = 2y - 5x + e^t \\ y' = x - 6y + e^{-2t} \end{cases}$, $x(0) = y(0) = 0$

27. $\begin{cases} 4x' - y' + 3x = \sin t \\ x' + y = \cos t \end{cases}$, $x(0) = 0$, $y(0) = 2$

28. $\begin{cases} x' = 1 - \frac{2x}{t} \\ y' = x + y - 1 + \frac{2x}{t} \end{cases}$, $x(1) = \frac{1}{3}$, $y(1) = -\frac{1}{3}$.

29 $\begin{cases} x' = z + y - x \\ y' = z + x - y \\ z' = x + y + z \end{cases}$, $x(0) = 1$, $y(0) = z(0) = 0$

30. $\begin{cases} x' = y + z \\ y' = z + x \\ z' = x + y \end{cases}$, $x(0) = -1$, $y(0) = 1$, $z(0) = 0$

31. $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = x - y \end{cases}$, $x(0) = 2$, $y(0) = 0$

32. $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = x + 2y \end{cases}$, $x(0) = 1$, $y(0) = 3$

33. $\begin{cases} x' = y + t \\ y' = x + e^{t} \end{cases}$, $x(0) = 1$, $y(0) = 0$

34. $\begin{cases} x' = e^{3t} - y \\ y' = 2e^{3t} - x \end{cases}$, $x(0) = y(0) = 1$

35 $\begin{cases} y' = e^{-t} - z \\ z' = e^{-t} + y \end{cases}$, $y(0) = z(0) = 1$

36 $\begin{cases} x' + y' = 2(x + y) \\ y' = 3x + y \end{cases}$, $x(0) = y(0) = 1$

37 $\begin{cases} x' = -ay \\ y' = -ax \end{cases}$, $x(0) = 1$, $y(0) = 0$

38 $\begin{cases} x' = 8y - x \\ y' = x + y \end{cases}$, $x(0) = 0$, $y(0) = 1$

39. $\begin{cases} x' = 12x - 5y \\ y' = 5x + 12y \end{cases}, \quad x(0) = y(0) = 2$

40. $\begin{cases} x' = x - 2y \\ y' = x - y \end{cases}, \quad x(0) = y(0) = 1$

41. $\begin{cases} x' = 7x + 3y \\ y' = 6x + 4y \end{cases}, \quad x(0) = 1, \ y(0) = 0$

42. $\begin{cases} x' = 6x - 12y - z \\ y' = x - 3y - z \\ z' = -4x + 12y + 3z \end{cases}, \quad x(0) = y(0) = 0, \ z(0) = 1$

43. $\begin{cases} x' = x - z \\ y' = x \\ z' = x - y \end{cases}, \quad x(0) = y(0) = 0, \ y(0) = 1$

44. $\begin{cases} x' = x - y + z \\ y' = x + y - z \\ z' = 2x - y \end{cases}, \quad x(0) = 1, \ y(0) = z(0) = 0$

45. $\begin{cases} x' = x - 4y \\ y' = x + y \end{cases}, \quad x(0) = y(0) = 1$

46. $\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = -4x - y \end{cases}, \quad x(0) = 1, \ y(0) = -1$

47. $\begin{cases} x' = 3x - 4y + e^{-2t} \\ y' = x - 2y - 3e^{-2t} \end{cases}, \quad x(0) = y(0) = 0$

48. $\begin{cases} x' = 2x - 2y \\ y' = x - 2y + 2\sin t \end{cases}, \quad x(0) = y(0) = 0$

49. $\begin{cases} x' = 3x - y + z \\ y' = x + y + z \\ z' = 4x - y + z \end{cases}, \quad x(0) = z(0) = 0, \ y(0) = 1$

50. $\begin{cases} x' = 4y - 2z - 3x \\ y' = z + x \\ z' = 6x - 6y + 5z \end{cases}, \quad x(0) = 1, \ z(0) = y(0) = 0$

Основные понятия и свойства операционного исчисления

Пусть $f(t)$ – функция действительного переменного, удовлетворяющая условиям:

а) $f(t)$ – кусочно-непрерывная при $t \geq 0$;

б) $f(t) = 0$ при $t < 0$;

в) $f(t)$ может расти не быстрее некоторой показательной функции, т.е. существуют такие константы M и α, что $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$.

Преобразованием Лапласа функции $f(t)$ называется функция комплексного переменного $F(p)$, определяемая формулой

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt. \qquad (1)$$

Функцию $F(p)$, определяемую формулой (1) называют изображением функции $f(t)$. Функцию $f(t)$ называют оригиналом.

В дальнейшем, записывая аналитическое выражение для оригинала $f(t)$, мы будем считать, что оно задано на $[0, +\infty)$, а при $t < 0$ полагаем, что $f(t) = 0$.

Для обозначения соответствия между $f(t)$ и $F(p)$ используются следующие формы записи:

$f(t) \risingdotseq F(p)$ или $f(t) \doteqdot F(p)$, или $F(p) = L\{f(t)\}$.

Свойства, которые используются для нахождения изображений:

1. Если $f(t) \doteq F(p)$, $g(t) \doteq G(p)$, то

$Af(t) + Bg(t) \doteq AF(p) + BG(p) \quad \forall A, B \in \mathbb{R}$

(свойство линейности)

2. $f(\lambda t) \doteq \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right) \quad \forall \lambda > 0$,

если $f(t) \doteq F(p)$ (свойство подобия).

3. $e^{at} f(t) \doteq F(p-a)$, если $f(t) \doteq F(p)$

(свойство затухания).

4. $f(t-\tau) \doteq e^{-p\tau} F(p)$, если $f(t) \doteq F(p)$, $\tau > 0$

(свойство смещения).

5. $f'_x(t, x) \doteq F'_x(p, x)$, если $f(t, x) \doteq F(p, x)$

(свойство дифференцирования по параметру)

6. $f'(t) \doteq pF(p) - f(0)$

$f^{(n)}(t) \doteq p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$

(свойство дифференцирования оригинала)

7. $\int\limits_0^t f(t)dt \doteq \frac{F(p)}{p}$

(свойство интегрирования оригинала)

8. $-tf(t) \doteq F'(p)$, если $f(t) \doteq F(p)$

(свойство дифференцирования изображение)

9. $\frac{f(t)}{t} \risingdotseq \int_p^\infty F(p)\,dp$, если $f(t) \risingdotseq F(p)$

(свойство интегрирования изображения)

Оригиналы и их изображения
(формулы соответствия)

ТАБЛИЦА 1

1) $1 \risingdotseq \frac{1}{p}$

2) $e^{\alpha t} \risingdotseq \frac{1}{p-\alpha}$

3) $\sin\omega t \risingdotseq \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$

4) $\cos\omega t \risingdotseq \frac{p}{p^2+\omega^2}$

5) $sh\,\omega t \risingdotseq \frac{\omega}{p^2-\omega^2}$

6) $ch\,\omega t \risingdotseq \frac{p}{p^2-\omega^2}$

7) $e^{\alpha t}\sin\omega t \risingdotseq \frac{\omega}{(p-\alpha)^2+\omega^2}$

8) $e^{\alpha t}\cos\omega t \risingdotseq \frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\omega^2}$

9) $e^{\alpha t}sh\,\omega t \risingdotseq \frac{\omega}{(p-\alpha)^2-\omega^2}$

10) $e^{\alpha t}ch\,\omega t \risingdotseq \frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2-\omega^2}$

11) $t \risingdotseq \frac{1}{p^2}$

12) $t^n \risingdotseq \dfrac{n!}{p^{n+1}}$

13) $t \cdot e^{\alpha t} \risingdotseq \dfrac{1}{(p-\alpha)^2}$

14) $t^n e^{\alpha t} \risingdotseq \dfrac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$

15) $t \sin \omega t \risingdotseq \dfrac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$

16) $t \cos \omega t \risingdotseq \dfrac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$

17) $t \operatorname{sh} \omega t \risingdotseq \dfrac{2p\omega}{(p^2-\omega^2)^2}$

18) $t \operatorname{ch} \omega t \risingdotseq \dfrac{p^2+\omega^2}{(p^2-\omega^2)^2}$

19) $\dfrac{e^{at}-e^{bt}}{a-b} \risingdotseq \dfrac{1}{(p-a)(p-b)}$

20) $\dfrac{1}{a} e^{-\frac{t}{a}} \risingdotseq \dfrac{1}{1+ap}$

21) $t^k \; (k>-1) \risingdotseq \dfrac{\Gamma(k+1)}{p^{k+1}}$

Примеры (поиск изображений):

Задача 1. Найти изображения следующих функций:

1) $f(t)=e^{-2t}$; 2) $f(t)=\cos 5t$;

3) $f(t)=7$; 4) $f(t)=4-5e^{2t}$;

5) $f(t)=2\sin 2t+3\,\mathrm{sh}\,2t$; 6) $f(t)=\frac{1}{3}\sin 3t-5$.

Решение. При нахождении изображений в заданиях 1)–4) используются соответствия из табл. 1 и свойство линейности

1) $e^{-2t} \risingdotseq \frac{1}{p+2}$; 2) $\cos 5t \risingdotseq \frac{p}{p^2+25}$;

3) $7 \risingdotseq \frac{7}{p}$; 4) $4-5e^{2t} \risingdotseq \frac{4}{p}-\frac{5}{p-2}$.

5) $2\sin 2t+3\,\mathrm{sh}\,2t \risingdotseq \frac{4}{p^2+4}+\frac{6}{p^2-4}$

(использовали формулы 3 и 5 из табл. 1 и свойство линейности).

6) $\frac{1}{3}\sin 3t-5 \risingdotseq \frac{1}{3}\,\frac{3}{p^2+9}-\frac{5}{p}=\frac{1}{p^2+9}-\frac{5}{p}$.

Задача 2. Найти изображения следующих функций:

1) $f(t)=\cos^2 t$; 2) $f(t)=\sin 3t\cos 2t$;

3) $f(t)=\mathrm{ch}\,\alpha t\cos\alpha t$; 4) $f(t)=e^{-4t}\cos 2t\sin 3t$.

Решение

1) $\cos^2 t=\frac{1+\cos 2t}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t \risingdotseq \frac{1}{2p}+\frac{1}{2}\,\frac{p}{p^2+4}$

2) $\sin 3t \cos 2t = \frac{1}{2}\left(\sin(3t+2t)+\sin(3t-2t)\right) =$

$= \frac{1}{2}\sin 5t + \frac{1}{2}\sin t \risingdotseq \frac{1}{2}\frac{5}{p^2+25} + \frac{1}{2}\frac{1}{p^2+1}$.

3) $\operatorname{ch}\alpha t \cos\alpha t = \frac{1}{2}(e^{\alpha t}+e^{-\alpha t})\cos\alpha t =$

$= \frac{1}{2}e^{\alpha t}\cos\alpha t + \frac{1}{2}e^{-\alpha t}\cos\alpha t \risingdotseq \frac{1}{2}\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\alpha^2} +$

$+ \frac{1}{2}\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\alpha^2} = \frac{p^3}{p^4+4\alpha^4}$.

4) $e^{-4t}\cos 2t \sin 3t \risingdotseq \frac{3(p+4)^2+15}{((p+4)^2+25)((p+4)^2+1)}$

(т.к. можно воспользоваться результатом задания 2) и свойством затухания.)

Задача 3. Найти изображения следующих функций.

1) $f(t)=\cos(t-5)$; 2) $f(t)=\sin(at-b)$;

3) $f(t)=e^{2-t}$; 4) $f(t)=\operatorname{ch}(2t-1)$.

Решение.

1) $\cos(t-5) \risingdotseq e^{-5p}\cdot\frac{p}{p^2+1}$

(можно воспользоваться свойством смещения и соответствием 4 из табл. 1)

2) $\sin(at-b)=\sin a\left(t-\frac{b}{a}\right) \risingdotseq \frac{a}{p^2+a^2}e^{-\frac{b}{a}p}$

3) $e^{2-t}=e^{-(t-2)} \risingdotseq \frac{e^{-2p}}{p+1}$

4) $\operatorname{ch}(2t-1)=\operatorname{ch}2\left(t-\frac{1}{2}\right) \risingdotseq \frac{p}{p^2-4}e^{-\frac{1}{2}p}$

Задача 4. Найти изображение функции

$$f(t)=\frac{1-e^{\alpha t}}{te^{t}}$$

Решение.

$$\frac{1-e^{\alpha t}}{te^{t}}=\frac{1}{te^{t}}-\frac{e^{\alpha t}}{te^{t}}=\frac{e^{-t}-e^{t(\alpha-1)}}{t}$$

$$e^{-t}-e^{t(\alpha-1)} \risingdotseq \frac{1}{p+1}-\frac{1}{p-\alpha+1}.$$

Теперь используем свойство интегрирования изображения

$$\int_p^\infty\left(\frac{1}{p+1}-\frac{1}{p-\alpha+1}\right)dp=\lim_{A\to\infty}\ln\frac{p+1}{p-\alpha+1}\Big|_p^A=$$

$$=\lim_{A\to\infty}\left(\ln\frac{A+1}{A-\alpha+1}-\ln\frac{p+1}{p-\alpha+1}\right)=$$

$$=\lim_{A\to\infty}\ln\frac{A+1}{A-\alpha+1}\cdot\frac{p-\alpha+1}{p+1}=$$

$$=\lim_{A\to\infty}\ln\frac{1+\frac{1}{A}}{1+\frac{\alpha}{A}+\frac{1}{A}}\cdot\frac{p-\alpha+1}{p+1}=\ln\frac{p-\alpha+1}{p+1}.$$

Следовательно, $\dfrac{e^{-t}-e^{(\alpha-1)t}}{t}\risingdotseq\ln\dfrac{p-\alpha+1}{p+1}.$

Нахождение оригинала по изображению

Для решения обратной задачи, т.е для восстановления оригинала по изображению, кроме отмеченных выше свойств и табл.1, используют свойство свёртки двух функций и теорему обращения.

Свертка функций $f(t)$ и $g(t)$

$$f * g = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau .$$

Свертка обладает свойством коммутативности, т.е

$$f * g = g * f .$$

Умножению изображений соответствует свертка оригиналов, т.е. если $f(t) \risingdotseq F(p)$, $g(t) \risingdotseq G(p)$, то

$$f * g \risingdotseq F(p) G(p).$$

В дальнейшем будет применяться формула

$$p F(p) G(p) \risingdotseq f'(t) * g(t) + f(0) g(t) =$$

$$= g'(t) * f(t) + g(0) f(t) \quad \text{(интеграл Дюамеля)}.$$

Теорема обращения. Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то в любой точке t, где функция $f(t)$ непрерывна

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-\infty}^{\gamma+\infty} F(p) e^{pt}\, dp \quad , \text{ где}$$

интегрирование производится по любой прямой $\operatorname{Re} p = \gamma$, лежащей в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \alpha$, в которой интеграл Лапласа абсолютно сходится.

Формула вычисления оригинала с помощью теоремы обращения:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-\infty}^{\gamma+\infty}F(p)e^{pt}dp=\sum_{k=1}^{m}\operatorname*{res}_{a_k}F(p)e^{pt}$$

Примеры нахождения оригинала по изображению.

Задача 1. Найти оригинал по изображению

$$F(p)=\frac{1}{p(p^2+1)}$$

Решение. $F(p)=\frac{1}{p(p^2+1)}=\frac{(1+p^2)-p^2}{p(p^2+1)}=\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+1}\risingdotseq 1-\cos t$

Задача 2. Найти оригинал по изображению

$$F(p)=\frac{1}{(p-1)(p-2)}$$

Решение.

Способ 1. $\frac{1}{(p-1)(p-2)}=\frac{1}{p-1}\cdot\frac{1}{p-2}$.

$\frac{1}{p-1}\risingdotseq e^t$, $\frac{1}{p-2}\risingdotseq e^{2t}$. Используем свойства свертки двух функций.

$$f(t)=e^t*e^{2t}=\int_0^t e^{2t}e^{t-\tau}d\tau=$$

$$=\int_0^t e^{t+\tau}d\tau=\int_0^t e^te^\tau d\tau=e^t\int_0^t e^\tau d\tau=$$

$$=e^te^\tau\Big|_0^t=e^t(e^t-1)=e^{2t}-e^t$$

Способ 2. Разложим $F(p)$ на сумму простейших дробей:

$$\frac{1}{(p-1)(p-2)} = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{p-2} = \frac{Ap-2A+Bp-B}{(p-1)(p-2)}$$

$$p: \quad Ap+Bp=0, \quad A+B=0, \quad A=-B$$
$$p^0: \quad -2A-B=1, \quad B=1, \quad A=-1.$$

Отсюда $\dfrac{1}{(p-1)(p-2)} = \dfrac{1}{p-2} - \dfrac{1}{p-1} \doteqdot e^{2t}-e^{t}$.

Способ 3. Найдем вычеты функции $F(p)e^{pt}$ относительно полюсов $p=1$ и $p=2$.

$$\underset{1}{\mathrm{res}}\, \frac{e^{pt}}{(p-1)(p-2)} = \frac{e^{pt}}{p-2}\bigg|_{p=1} = -e^{t};$$

$$\underset{2}{\mathrm{res}}\, \frac{e^{pt}}{(p-1)(p-2)} = \frac{e^{pt}}{p-1}\bigg|_{p=2} = e^{2t}.$$

Отсюда $\dfrac{1}{(p-1)(p-2)} \doteqdot e^{2t}-e^{t}$.

Задача 3. Найти оригинал функции

$$F(p) = \frac{1}{(p+1)(p+2)^2}.$$

Оригинал $f(t) = \sum\limits_{k=1}^{2} \underset{a_k}{\mathrm{res}}\, F(p)e^{pt} =$

$$= \underset{-1}{\mathrm{res}}\, \frac{e^{pt}}{(p+1)(p+2)^2} + \underset{-2}{\mathrm{res}}\, \frac{e^{pt}}{(p+1)(p+2)^2} =$$

$$= \frac{e^{pt}}{(p+2)^2}\Big|_{p=-1} + \left(\frac{e^{pt}}{p+1}\right)'\Big|_{p=-2} =$$

$$= e^{-t} + \frac{te^{pt}(p+1) - e^{pt}}{(p+1)^2}\Big|_{p=-2} =$$

$$= e^{-t} - e^{-2t}(t+1).$$

Задача 4. Найти оригинал по изображению

$$F(p) = \frac{p^2}{(p^2+4)(p^2+9)}.$$

Решение

Способ 1 $\quad F(p) = \frac{p}{p^2+4} \cdot \frac{p}{p^2+9}$, где

$$\frac{p}{p^2+4} \risingdotseq \cos 2t \; ; \quad \frac{p}{p^2+9} \risingdotseq \cos 3t .$$

Тогда по теореме умножения изображений (свойства свертки):

$$f(t) = \cos 2t * \cos 3t = \int_0^t \cos 2\tau \cos(3t-3\tau)d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t (\cos(2\tau+3t-3\tau) + \cos(2\tau-3t+3\tau))\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t (\cos(3t-\tau) + \cos(5\tau-3t))\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin(\tau-3t) + \frac{1}{5}\sin(5\tau-3t)\right)\Big|_0^t =$$

$$= \frac{3}{5}\sin 3t - \frac{2}{5}\sin 2t$$

Способ 2.

$$\frac{p^2}{(p^2+4)(p^2+9)} = \frac{p^2}{(p+2i)(p-2i)(p+3i)(p-3i)}.$$

По теореме обращения

$$f(t) = \sum_{k=1}^{4} \operatorname*{res}_{a_k} \frac{e^{pt}p^2}{(p+2i)(p-2i)(p+3i)(p-3i)} =$$

$$= \left.\frac{p^2 e^{pt}}{(p+2i)(p^2+9)}\right|_{p=2i} + \left.\frac{p^2 e^{pt}}{(p-2i)(p^2+9)}\right|_{p=-2i} +$$

$$+ \left.\frac{p^2 e^{pt}}{(p+3i)(p^2+4)}\right|_{p=3i} + \left.\frac{p^2 e^{pt}}{(p-3i)(p^2+4)}\right|_{p=-3i} =$$

$$= -\frac{e^{2it}}{5i} + \frac{e^{-2it}}{5i} + \frac{3e^{3it}}{10i} - \frac{3e^{-3it}}{10i} =$$

$$= -\frac{2}{5}\left(\frac{e^{2it}-e^{-2it}}{2i}\right) + \frac{3}{5}\left(\frac{e^{3it}-e^{-3it}}{2i}\right) =$$

$= -\frac{2}{5}\sin 2t + \frac{3}{5}\sin 3t$, т.к. по формулам Эйлера $\sin 2t = \frac{e^{2it}-e^{-2it}}{2i}$, $\sin 3t = \frac{e^{3it}-e^{-3it}}{2i}$.

Применение операционного исчисления к решению дифференциальных уравнений и систем линейных дифференциальных уравнений

При применении операционного метода к решению линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами предполагается, что искомая функция, все её производные и функция, стоящая в правой части уравнения, являются оригиналами. Вследствие чего записывают данное уравнение в операторной форме, которое будет алгебраическим. Решив это алгебраическое уравнение, получим изображение искомой функции. Переходя к оригиналу, находим искомую функцию.

Пусть дано уравнение

$$x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n x(t) = f(t) \qquad (1)$$

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_0', \quad \ldots, \quad x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}.$$

Полагаем $x(t) \doteqdot \bar{x}(p)$, $f(t) \doteqdot F(p)$.

На основании правил дифференцирования оригинала

$$x'(t) \doteqdot p\bar{x}(p) - x(0) = p\bar{x}(p) - x_0,$$

$$x''(t) \doteqdot p^2\bar{x}(p) - px_0 - x_0',$$

$$x'''(t) \doteqdot p^3\bar{x}(p) - p^2x_0 - px_0' - x_0'',$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$x^{(n)}(t) \doteqdot p^n\bar{x}(p) - p^{n-1}x_0 - \ldots - x_0^{(n-1)}.$$

Уравнение в операторной форме

$$p^n \bar{x}(p) - p^{n-1}x_0 - \ldots - x_0^{(n-1)} + a_1\left(p^{n-1}\bar{x}(p) - \ldots\right.$$

$$\left. - \ldots - x_0^{(n-2)}\right) + \ldots + a_n \bar{x}(p) = F(p)$$

Отсюда находим $\bar{x}(p)$ и затем восстанавливаем для него оригинал $x(t)$, которая и будет решением первоначального уравнения.

Примеры решения дифференциальных уравнений операционным методом.

Задача 1. Решить операционным методом

$$x'' + x(t) = \sin t, \quad x(0) = 0,\ x'(0) = -\frac{1}{2}.$$

Решение. $x(t) \doteqdot \bar{x}(p)$,

$$x'(t) \doteqdot p\bar{x}(p) - x(0) = p\bar{x}(p)$$

$$x''(t) \doteqdot p^2\bar{x}(p) - px(0) - x'(0) = $$
$$= p^2\bar{x}(p) + \frac{1}{2},$$

$$\sin t \doteqdot \frac{1}{p^2+1},$$

и уравнение в операторной форме

$$p^2\bar{x}(p) + \frac{1}{2} + \bar{x}(p) = \frac{1}{p^2+1}.$$

Решаем его:

$$(p^2+1)\bar{x}(p) = \frac{1}{p^2+1} - \frac{1}{2},$$

$$\bar{x}(p) = -\frac{1}{2}\,\frac{p^2-1}{(p^2+1)^2}.$$ Отсюда $x(t) = -\frac{1}{2}t\cos t$ (см. табл 1)

Задача 2. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' - x - 2y = 2e^{t} \\ y' + 2x - y = 0 \end{cases}, \quad x(0)=0, \; y(0)=1.$$

Решение. Запишем систему в операторной форме

$$\begin{cases} p\bar{x}(p) - \bar{x}(p) - 2\bar{y}(p) = \dfrac{2}{p-1} \\ p\bar{y}(p) + 2\bar{x}(p) - \bar{y}(p) = 1 \end{cases},$$

где $\bar{x}(p) \div x(t)$, $\bar{y}(p) \div y(t)$,

$$x'(t) \leftarrow \bar{x}(p)\cdot p - x(0) = p\bar{x}(p),$$
$$y'(t) \leftarrow \bar{y}(p)\cdot p - y(0) = p\bar{y}(p) - 1.$$

Решаем систему в операторной форме

$$\begin{cases} (p-1)\bar{x}(p) - 2\bar{y}(p) = \dfrac{2}{p-1} \\ 2\bar{x}(p) + (p-1)\bar{y}(p) = 1 \end{cases}$$

По формулам Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} p-1 & -2 \\ 2 & p-1 \end{vmatrix} = (p-1)^2 + 4;$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} \frac{2}{p-1} & -2 \\ 1 & p-1 \end{vmatrix} = 2+2 = 4$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} p-1 & \frac{2}{p-1} \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = p-1 - \frac{4}{p-1} = \frac{(p-1)^2 - 4}{p-1};$$

$$\bar{x}(p) = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{4}{(p-1)^2+4} \risingdotseq 2e^{t}\sin 2t = x(t)$$

$$\bar{y}(p) = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{(p-1)^2-4}{((p-1)^2+4)(p-1)} =$$

$$\risingdotseq \ldots 2t = y(t)$$

Искомое решение $\begin{cases} x(t) = 2e^{t}\sin 2t \\ y(t) = 2e^{t}\cos 2t - e^{t}. \end{cases}$

Пример решения дифференциального уравнения с помощью интеграла Дюамеля

Задача 1. Решить уравнение

$$x'' + x = 5t^2 \quad , \quad x(0) = 0 , \quad x'(0) = 0$$

Решение. Сначала находим решение вспомогательного уравнения

$$x_1'' + x_1 = 1 \quad , \quad x_1(0) = 0 , \quad x_1'(0) = 0 .$$

$$p^2 \bar{x}_1(p) + \bar{x}_1(p) = \frac{1}{p} \quad \text{или} \quad \bar{x}_1(p) = \frac{1}{p(p^2+1)} =$$

$$= \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1} \;\dot{\to}\; 1 - \cos t = x_1(t) .$$

Тогда $x_1'(t) = \sin t$, $f(t) = 5t^2$ и

$$x(t) = \int_0^t \sin\tau \cdot 5(t-\tau)^2 d\tau = \left| \begin{array}{l} t-\tau = z \\ -dz = d\tau \\ \tau = t - z \end{array} \quad \begin{array}{c|c|c} \tau & 0 & t \\ \hline z & t & 0 \end{array} \right| =$$

$$= -\int_t^0 \sin(t-z)\, 5z^2 dz = \int_0^t \sin(t-z) \cdot 5z^2 dz =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} z^2 = u & du = 2z\,dz \\ dv = \sin(t-z)dz & v = \cos(t-z) \end{array} \right| =$$

$$= 5\left(z^2 \cos(t-z) \Big|_0^t - 2\int_0^t z\cos(t-z)dz \right) = \left| \begin{array}{l} z = u \\ du = dz \\ dv = \cos(t-z)dz \\ v = -\sin(t-z) \end{array} \right| =$$

$$= 5t^2 - 10\left(-\tau\sin(t-\tau)\Big|_0^t + \int_0^t \sin(t-\tau)d\tau\right) =$$

$$= 5t^2 - 10\cos(t-\tau)\Big|_0^t = 5t^2 - 10 + 10\cos t$$

Искомое решение $x(t) = 5(t^2 - 2 + 2\cos t)$.