Министерство образования и науки Российской Федерации
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Н.В. ВАХРУШЕВ, Т.М. НАЗАРОВА, В.В. ХАБЛОВ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ
ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

2-е издание, переработанное

Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

НОВОСИБИРСК
2011

УДК 517.9(075.8)
В225

Рецензенты: *В. Г. Чередниченко,* д-р физ.-мат. наук, проф.,
А. А. Харьков, кандидат физ.-мат. наук, доц.

Работа подготовлена на кафедре высшей математики
для студентов технических специальностей с углубленной математической подготовкой

Васхрушев Н.В.

В225 Специальные функции. Интегральные уравнения. Вариационное исчисление : учеб. пособие. / Н. В. Вахрушев, Т. М. Назарова, В. В. Хаблов. – 2-е издание, переработанное. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2011. – 72 с.

ISBN 978-5-7782-1834-5

В третьем и четвёртом семестрах на физико-техническом факультете в курсе математического анализа кроме традиционных разделов математики (теория функций комплексного переменного, операционное исчисление, теория вероятностей и математическая статистика) программой предусмотрено изучение основ специальных функций, интегральных уравнений и вариационного исчисления, причём на каждый раздел отводится около десяти часов лекций и столько же практических занятий. Поэтому из большого запаса задач авторы выбрали те, которые, по их мнению, способствуют достаточному усвоению основных понятий по каждому разделу.

Данное пособие предназначено для проведения практических занятий по этим темам. Все задачи не являются оригинальными, а заимствованы из учебников и сборников задач, список которых представлен в конце пособия.

Во втором издании исправлены замеченные опечатки и отредактировано изложение.

УДК 517.9(075.8)

ISBN 978-5-7782-1834-5

Оглавление

Глава 1

Специальные функции

Решение многих задач теоретической и математической физики, таких, например, как распространение звуковых и электромагнитных волн, задач теплопроводности, теоретических основ ядерных реакторов, астрофизики приводит к необходимости использования функций, не являющихся элементарными, хотя они ничем не «хуже» последних ни в смысле дифференцируемости или других свойств — ни в степени изученности. Эти функции настолько часто появляются в этих разделах науки, что их снабдили стандартными обозначениями, вычислили значения при различных аргументах, посвятили им разделы учебников и монографий. Фактически с их помощью расширен круг элементарных функций. Они называются *специальными*.

Обычно на практике специальные функции возникают как решения различных дифференциальных уравнений. Наиболее распространенными являются *цилиндрические* (Бесселя), *сферические* (Лежандра) функции и *классические ортогональные многочлены* (Чебышева, Лежандра, Эрмита, Якоби и др.).

Целью настоящего пособия является лишь ознакомление с основными свойствами специальных функций, совершенно не претендующее на какую-либо полноту.

1.1 Функции Эйлера

Определение 1. Гамма-функцией (интегралом Эйлера второго рода) комплексного аргумента z называется

$$\Gamma(z) = \int\limits_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt. \tag{1.1}$$

Этот интеграл сходится абсолютно и является аналитической функцией в правой полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$.

Для гамма-функции справедлива *формула приведения*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \tag{1.2}$$

Непосредственным вычислением легко убедиться, что $\Gamma(1) = 1$. отсюда и из (1.2) получаем, что для любого натурального n

$$\Gamma(n+1) = n! \tag{1.3}$$

Формула (1.2) позволяет распространить $\Gamma(z)$ на левую полуплоскость $\operatorname{Re} z < 0$, кроме целочисленных отрицательных точек $z = n$ и точки $z = 0$. В самом деле, если $0 < \operatorname{Re}(z+1) < 1$, то $\Gamma(z+1)$ определена и, значит, определена $\Gamma(z) = \dfrac{\Gamma(z+1)}{z}$. Итак, $\Gamma(z)$ определена теперь при $-1 < \operatorname{Re} z < 0$. Применяя формулу приведения (1.2) несколько раз к $\Gamma(z+n)$ получаем, что при $-n < \operatorname{Re} z < -n+1$

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\ldots(z+n-1)}. \tag{1.4}$$

Полученная функция $\Gamma(z)$ будет аналитической на всей комплексной плоскости, за исключением точек $z = 0, -1, -2, \ldots$, в которых она имеет простые полюсы. Гамма-функция не обращается в нуль, то есть $\dfrac{1}{\Gamma(z)}$ аналитична на всей плоскости.

Для всех комплексных z справедлива *формула дополнения*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \tag{1.5}$$

(при целых значениях z обе части этого равенства обращаются в бесконечность). Практическое значение формулы доплнения заключается в том, что она позволяет явно вычислить произведение значений гамма-функции для значений аргумента, отличающихся друг от друга на целое число. Примеры таких вычислений в упражнениях.

Определение 2. Бета-функцией $\mathrm{B}(x,y)$ для $x>0$ и $y>0$ называется

$$\mathrm{B}(x,y)=\int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt. \tag{1.6}$$

Замена $t=\cos^2\varphi$ сводит (1.6) к интегралу

$$\mathrm{B}(x,y)=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-1}\varphi\sin^{2y-1}\varphi\,d\varphi. \tag{1.7}$$

Между бета-функцией и гамма-функцией существует тесная связь, выражаемая формулой

$$\mathrm{B}(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{1.8}$$

В самом деле, для значений x и y, при которых ссходятся написанные ниже интегралы, рассмотрим произведение

$$\Gamma(x)\cdot\Gamma(y)=\int\limits_0^\infty u^{x-1}e^{-u}du\cdot\int\limits_0^\infty v^{y-1}e^{-v}\,dv=\begin{vmatrix}u=\xi^2\\ v=\eta^2\end{vmatrix}=$$

$$=4\int\limits_0^\infty d\xi\int\limits_0^\infty \xi^{2x-1}\eta^{2y-1}e^{-\xi^2-\eta^2}d\eta=\begin{vmatrix}\xi=\rho\cos\varphi\\ \eta=\rho\sin\varphi\end{vmatrix}=$$

$$=4\int\limits_0^\infty \rho^{2x+2y-1}e^{-\rho^2}d\rho\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{2x-1}\varphi\sin^{2y-1}\varphi d\varphi=\left|\rho^2=\tau\right|=$$

$$=\int\limits_0^\infty \tau^{x+y-1}e^{-\tau}d\tau\cdot 2\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{2x-1}\varphi\sin^{2y-1}\varphi d\varphi=\Gamma(x+y)\cdot\mathrm{B}(x,y)$$

Отсюда

$$\mathrm{B}(x,y)=\frac{\Gamma(x)\cdot\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

Если в интеграле (1.6) положить $t=\dfrac{u}{1+u}$, то получим

$$\mathrm{B}(x,y)=\int\limits_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\,du. \tag{1.9}$$

Бета-функция симметрична относительно своих аргументов, т.е.

$$\mathrm{B}(x,y)=\mathrm{B}(y,x).$$

Используя формулы (1.3) и (1.8), получаем, что для любых целых положительных чисел m и n
$$\mathrm{B}(m,n)=\frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}. \tag{1.10}$$
Если применить к формуле (1.6) интегрирование по частям, то получим формулы
$$\mathrm{B}(x,y)=\frac{y-1}{x+y-1}\mathrm{B}(x,y-1), x>0, y>1;$$
$$\mathrm{B}(x,y)=\frac{x-1}{x+y-1}\mathrm{B}(x-1,y), x>1, y>0;$$
$$\mathrm{B}(x,y)=\frac{y}{x}\mathrm{B}(x+1,y), x>0, y>0.$$

Последовательное применение этих формул, в частности, позволяет свести вычисление значений бета-функции к вычислению ее значений с аргументами $x,y\in(0,1)$, а для таких аргументов $\mathrm{B}(x,y)$ табулирована.

Задачи

1.1.1. Найти $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

Решение. Подставив в формулу дополнения (1.5) $z=1/2$, получим $\Gamma^2(1/2)=\pi$. Очевидно, что при любом $x>0$ подынтегральная функция в (1.1) положительна, поэтому и $\Gamma(x)>0$, в частности $\Gamma(1/2)>0$. Значит, $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$.

1.1.2. Доказать тождества
$$\Gamma(z)\Gamma(-z)=\frac{-\pi}{z\sin\pi z};$$
$$\Gamma(1+z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi z}{\sin\pi z};$$
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+z\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-z\right)=\frac{\pi}{\cos\pi z}.$$

1.1.3. Найти $\Gamma(2),\Gamma(3),\Gamma(4).\Gamma(5)$.

Ответ: $\Gamma(n)=(n-1)!$.

1.1.4. Найти $\Gamma(3/2),\Gamma(5/2),\Gamma(n+1/2)$.

Ответы: $\Gamma(3/2)=\sqrt{\pi}/2,\Gamma(5/2)=3\sqrt{\pi}/4,\Gamma(n+1/2)=(2n-1)!!\sqrt{\pi}/2^n$.

1.1.5. Найти $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right),\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right),\Gamma(-n-1/2)$.

Ответы: $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=-2\sqrt{\pi},\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)=4\sqrt{\pi}/3,\Gamma(-n-1/2)=$
$=(-1)^{n+1}2^{n+1}\sqrt{\pi}/(2n+1)!!$.

1.1.6. Показать, что $\Gamma(z)$ при $\mathrm{Re}\,z>0$ можно представить в виде

$$\Gamma(z)=\int\limits_0^1\left(\ln\frac{1}{t}\right)^{z-1}dt;\qquad \Gamma(z)=2\int\limits_0^\infty t^{2z-1}e^{-t^2}\,dt.$$

1.1.7. Показать, что

$$\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\pi;\qquad \mathrm{B}(x,1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}.$$

1.1.8. Показать, что:

$$\mathrm{B}(x,x)=\frac{1}{2^{2x-1}}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},x\right).$$

Решение. $\mathrm{B}(x,x)=\int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{x-1}dt=\int\limits_0^1[1/4-(1/2-t)^2]^{x-1}dt=$ $\lfloor$*замена* $\frac{1}{2}-t=\tau\rfloor=-\int\limits_{1/2}^{-1/2}[1/4-\tau^2]^{x-1}d\tau$. Меняя порядок интегрирования и учитывая четность подынтегральной функции, получаем

$$\mathrm{B}(x,x)=2\int\limits_0^{1/2}[1/4-\left(\tau^2\right)]^{x-1}d\tau=\lfloor\textit{замена } \tau^2=u/4\rfloor=$$

$=2\int\limits_0^1\left(\frac{1-u}{4}\right)^{x-1}\frac{du}{4\sqrt{u}}=\frac{1}{2^{2x-1}}\int\limits_0^1 u^{1/2-1}(1-u)^{x-1}dx.$ Что и требовалось.

1.1.9. Вывести *формулу Лежандра*

$$\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}}\Gamma(2x).$$

1.1.10. Выразить через гамма-функцию интеграл

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m\varphi\sin^n\varphi\,d\varphi,(m,n>-1).$$

Ответ: $\dfrac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{m+n}{2}+1\right)}$.

1.1.11. Вычислить интеграл

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\varphi\sin^3\varphi\,d\varphi.$$

Ответ: $1/24$.

1.1.12. Вычислить интеграл

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^r \varphi \, d\varphi \; (-1 < r < 1).$$

Ответ: $\pi/(2\cos\pi r/2)$.

1.1.13. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-tx^2} dx.$$

Ответ: $t^{-n-1/2}\Gamma(n+1/2)$.

1.1.14. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{-1}^{1} (1-x)^p (1+x)^q dx.$$

Ответ: $2^{p+q+1}\mathrm{B}(p+1, q+1)$. Положить $x+1 = 2u$.

1.1.15. Найти площадь области, ограниченной кривой $\rho^4 = \sin^3\varphi\cos\varphi$.

Решение. Определим расположение данной области. Так как $\rho \geqslant 0$, то $\sin^3\varphi\cos\varphi \geqslant 0$, т.е. $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$ и $\pi \leqslant \varphi \leqslant 3\pi/2$. При замене φ на $\pi+\varphi$ уравнение не меняется, следовательно, область симметрична относительно начала координат. Поэтому искомая площадь

$$\mathrm{S} = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt[4]{\sin^3\varphi\cos\varphi}} \rho \, d\rho = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^3\varphi\cos\varphi}\, d\varphi.$$

Сделаем замену $\sin\varphi = x$

$$\mathrm{S} = \int\limits_0^1 x\sqrt{x\sqrt{1-x^2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int\limits_0^1 x^{3/2}(1-x^2)^{-1/4} dx.$$

Замена $x^2 = t$ приводит к бета-функции

$$\mathrm{S} = 1/2 \int\limits_0^1 t^{1/4}(1-t)^{-1/4} dt = \frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{\Gamma(5/4)\Gamma(3/4)}{2\Gamma(2)} =$$

$$= \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma(3/4) = \frac{1}{8}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{8}.$$

1.1.16. Найти длину кривой $\rho^n = a^n \cos n\varphi$, где $a > 0$; n – натуральное число.

Ответ: $a\mathrm{B}(1/(2n), 1/2)$.

1.2 Функции Бесселя

Уравнение

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \nu^2\right)y = 0 \tag{1.11}$$

называется *уравнением Бесселя*, а любое его решение – *функцией Бесселя* (или цилиндрической функцией). Здесь ν – некоторый числовой параметр– *индекс* уравнения (функции) Бесселя.

Решения уравнения Бесселя

$$\mathrm{J}_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(x/2)^{\nu+2k}}{k!\Gamma(k+\nu+1)}; \tag{1.12}$$

$$\mathrm{J}_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(x/2)^{-\nu+2k}}{k!\Gamma(k-\nu+1)} \tag{1.13}$$

называются *функциями Бесселя первого рода*

Если ν не является целым числом, то $\mathrm{J}_\nu(x)$ и $\mathrm{J}_{-\nu}(x)$ линейно независимы и поэтому общее решение уравнения (1.11) записать в виде

$$y(x) = \mathrm{C}_1\mathrm{J}_\nu(x) + \mathrm{C}_2\mathrm{J}_{-\nu}(x),$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

В случае целого неотрицательного индекса $\nu = n$ имеем

$$\mathrm{J}_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(x/2)^{n+2k}}{k!(n+k)!}; \tag{1.14}$$

$$\mathrm{J}_{-n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(x/2)^{-n+2k}}{k!\Gamma(k-n+1)} = (-1)^n \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{(x/2)^{n+2m}}{m!(n+m)!}. \tag{1.15}$$

Таким образом,

$$\mathrm{J}_{-n}(x) = (-1)^n \mathrm{J}_n(x). \tag{1.16}$$

Это, в частности, означает, что $\mathrm{J}_n(x)$ и $\mathrm{J}_{-n}(x)$ линейно зависимы.

Функции Бесселя второго рода (функции Неймана) определяются формулами

$$\mathrm{Y}_\nu(x) = \frac{\mathrm{J}_\nu(x)\cos\nu\pi - \mathrm{J}_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi} \quad (\nu \text{ – нецелое число}); \tag{1.17}$$

$$\mathrm{Y}_n(x)=\lim_{\nu\to n}\mathrm{Y}_\nu(x),\ \text{если}\ n-\text{целое}. \tag{1.18}$$

Функции $\mathrm{J}_n(x)$ и $\mathrm{Y}_n(x)$ всегда линейно независимы, поэтому общее решение уравнения Бесселя при любом ν может быть представлено в виде

$$y(x)=\mathrm{C}_1\mathrm{J}_\nu(x)+\mathrm{C}_2\mathrm{Y}_\nu(x).$$

Для бесселевых функций 1-го рода справедливы *формулы приведения*:

$$\left(\frac{d}{xdx}\right)^m\frac{\mathrm{J}_\nu(x)}{x^\nu}=(-1)^m\frac{\mathrm{J}_{\nu+m}(x)}{x^{\nu+m}},m=1,2,\ldots; \tag{1.19}$$

$$\left(\frac{d}{xdx}\right)^m[x^\nu\mathrm{J}_\nu(x)]=x^{\nu-m}\mathrm{J}_{\nu-m}(x),m=1,2,\ldots; \tag{1.20}$$

$$2\mathrm{J}'_\nu=\mathrm{J}_{\nu-1}-\mathrm{J}_{\nu+1};\ \frac{2\nu}{x}\mathrm{J}_\nu=\mathrm{J}_{\nu-1}+\mathrm{J}_{\nu+1};\mathrm{J}'_\nu=\mathrm{J}_{\nu-1}-\frac{\nu}{x}\mathrm{J}_\nu. \tag{1.21}$$

Здесь символ $\left(\dfrac{d}{xdx}\right)^m$ означает, что m раз применяется операция дифференцирования, а затем деления на x. Например, $\left(\dfrac{d}{xdx}\right)^2f(x)=$

$$=\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\frac{d}{dx}f(x)\right]=\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}f'(x)\right]=\frac{1}{x}\frac{f''(x)x-f'(x)}{x^2}=\frac{f''(x)x-f'(x)}{x^3}.$$

Функции Бесселя с полуцелым индексом

$$\mathrm{J}_{1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x;\mathrm{J}_{-1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x. \tag{1.22}$$

При целом положительном n

$$\mathrm{J}_{n+1/2}(x)=(-1)^n\sqrt{\frac{2}{\pi}}x^{n+1/2}\left(\frac{d}{xdx}\right)^n\frac{\sin x}{x};$$

$$\mathrm{J}_{-(n+1/2)}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}x^{n+1/2}\left(\frac{d}{xdx}\right)^n\frac{\cos x}{x}.$$

Производящая функция системы бесселевых функций 1-го рода с целыми индексами

$$e^{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{J}_n(x)z^n.$$

Интегральное представление для $\mathrm{J}_n(x)$:

$$\mathrm{J}_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\cos(x\sin\varphi-n\varphi)d\varphi,n=0,\pm1\pm2,\ldots$$

Асимптотическое представление для функции Бесселя 1-го рода с целым индексом

$$\mathrm{J}_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos[x-(n+1/2)\pi/2]+\mathrm{O}(1/x)\ \text{при}\ x\to+\infty,$$

где $\mathrm{O}(1/x)$ означает, что $\exists x_0$ и M,что $\forall x>x_0:|\mathrm{O}(1/x)|\leqslant \mathrm{M}/x$.

Задачи

1.2.1. Привести к уравнению Бесселя

$$y'' + \frac{2p+1}{x}y' + y = 0.$$

Решение. Сделаем замену $y = x^{-p}z$. Тогда
$y' = -px^{-p-1}z + x^{-p}z'; y'' = p(p+1)x^{-p-2}z' - 2px^{-p-1} + x^{-p}z'' = 0$. Уравнение примет вид $x^{-p}z'' + x^{-p-1}z' + \left(x^{-p} - p^2x^{-p-2}\right)z = 0$. Умножая обе части на x^{p+2}, получим

$$x^2z'' + xz' + \left(x^2 - p^2\right)z = 0.$$

Общее решение исходного уравнения $y = x^{-p}[\mathrm{C}_1\mathrm{J}_p(x) + \mathrm{C}_2\mathrm{Y}_p(x)]$, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

1.2.2. Привести к уравнению Бесселя и записать его общее решение

$$x^2y'' + xy' + \left(k^2x^2 - \nu^2\right)y = 0$$

Ответ: $y = \mathrm{C}_1\mathrm{J}_\nu(kx) + \mathrm{C}_2\mathrm{Y}_\nu(kx)$.

1.2.3. Написать общие решения уравнений Бесселя:

a) $x^2y'' + xy' + +(x^2 - 4)y = 0$;

b) $x^2y'' + xy' + (x^2 - 5)y = 0$;

c) $xy'' + 5y' + xy = 0$.

1.2.4. Показать, что ряд (1.12) сходится абсолютно на всей числовой прямой.

1.2.5. Показать, что функция $\mathrm{J}_\nu(x)$, определенная равенством (1.12), является решением уравнения (1.11).

1.2.6. Показать, что функция $\mathrm{J}_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \cos(x\sin\varphi - n\varphi)d\varphi$ при целом индексе n удовлетворяет уравнению Бесселя.

1.2.7. Написать ряды, интегральные и асимптотические представления для бесселевых функций $\mathrm{J}_0(x), \mathrm{J}_1(x), \mathrm{J}_{-1}(x), \mathrm{J}_2(x)$.

1.2.8. Показать, что $|\mathrm{J}_n(x)| < 1, n = 0, \pm1 \pm 2, \ldots$

1.2.9. Показать, что $\mathrm{J}_0(0) = 1, \mathrm{J}_n(0) = 0\,(n = 0, 1, 2, \ldots)$

1.2.10. Доказать равенство (1.16).

1.2.11. Выписать ряды для $\mathrm{J}_{1/2}(x)$ и $\mathrm{J}_{-1/2}(x)$ и доказать равенства (1.22).

1.2.12. Доказать рекуррентные формулы (1.21).

1.2.13. Показать, что $\mathrm{J}_0'(x) = -\mathrm{J}_1(x), \qquad \mathrm{J}_0''(x) = 1/2[\mathrm{J}_2(x) - \mathrm{J}_0(x)]$

1.2.14. Выразить $\mathrm{J}_2(x), \mathrm{J}_3(x)$ и $\mathrm{J}_4(x)$ через $\mathrm{J}_0(x)$ и $\mathrm{J}_1(x)$.

1.2.15. Доказать равенство $[x^\nu\mathrm{J}_\nu(x)]' = x^\nu\mathrm{J}_{\nu-1}(x)$.

1.2.16. Показать, что формулы задач 1.12–1.15 справедливы для функций $Y_\nu(x)$.

1.2.17. Выразить $J_{3/2}(x), J_{-3/2}(x), J_{5/2}(x)$ и $J_{-5/2}(x)$ через элементарные функции.

Ответ: $J_{3/2}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\Big(\sin x/x - \cos x\Big)$,

$J_{-3/2}(x) = -\sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\big(\sin x + \cos x/x\big)$,

$J_{5/2}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\Big(3\sin x/x^2 - 3\cos x/x - \sin x\Big)$,

$J_{-5/2}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\Big(3\cos x/x^2 + 3\sin x/x - \cos x\Big)$,

1.2.18. Показать, что при $x \to 0 \quad J_0(x) = 1 - \dfrac{x^2}{4} + O(x^4)$.

Указание: использовать признак Лейбница.

1.2.19. Показать, что при $x \to 0$ $J_\nu(x) \approx \dfrac{x^\nu}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}$, $J_{-\nu}(x) \approx \dfrac{2^\nu}{x^\nu\Gamma(1-\nu)}$.

1.2.20. Используя асимптотическое представление функции Бесселя 1-го рода с целым индексом $J_n(x)$ показать, что при больших значениях x для корней этой функции справедлива формула

$$x_k \approx (2k+n)\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4}.$$

1.2.21. Доказать теорему сложения для бесселевых функций: при любом целом n

$$J_n(x+y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(x)J_{n-k}(y).$$

Доказательство. По определению производящей функции

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(x+y)z^k = e^{\frac{x+y}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)} = e^{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}e^{\frac{y}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)} =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x)z^m \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(y)z^n.$$

Оба последних ряда сходятся абсолютно, поэтому их можно почленно перемножить

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x)z^m \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(y)z^n = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_m(x)J_n(y)z^{m+n}.$$

Сделаем замену $n+m=k$, тогда $k \in (-\infty, \infty)$ и, следовательно, сумма принимает вид $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} z^k \sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x) J_{k-m}(y) z^{m+n}$. Таким образом, $\forall x,y$ и $z \neq 0$ будем иметь

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(x+y) z^k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x) J_{k-m}(y) \right) z^k.$$

Слева и справа стоят ряды Лорана, которые тождественно равны тогда и только тогда, когда равны коэффициенты при одинаковых степенях z. Отсюда $J_n(x+y) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} J_k(x) J_{n-k}(y)$.

1.2.22. Показать, что

$$e^{ix\sin\varphi} = J_0(x) + 2i \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k-1}(x) \sin(2k-1)\varphi + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(x) \cos 2k\varphi.$$

Указание: в производящей функции сделать замену $z = e^{i\varphi}$.

1.3 Ортогональные многочлены

Функция $\rho(x)$ называется *весовой функцией (весом)* на интервале (a,b), если на этом интервале $\rho(x) \geqslant 0$ и выполняются условия $0 < \int\limits_a^b \rho(x)dx < \infty$. Кроме того, если интервал (a,b) бесконечен, то должны абсолютно сходиться интегралы $\rho_n = \int\limits_a^b x^n \rho(x) dx$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Пусть задана последовательность многочленов

$$Q_0(x), Q_1(x), Q_2(x), \ldots, Q_n(x), \ldots,$$

в которой каждый многочлен $Q_n(x)$ имеет степень n. Эти многочлены называются *ортогональными* с весом $\rho(x)$ на интервале (a,b) , если для любых двух многочленов из этой системы выполняется условие

$$\int_a^b \rho(x) Q_n(x) Q_m(x) dx = 0, n \neq m. \tag{1.23}$$

Система ортогональных многочленов называется *ортонормированной*, если каждый многочлен имеет положительный старший коэффициент и его *норма* с весом $\rho(x)$ равна единице, то есть

$$\|Q_n\| = \left[\int_a^b \rho(x) Q_n^2(x) dx \right]^{1/2} = 1. \tag{1.24}$$

Для всякой весовой функции $\rho(x)$ существует единственная последовательность многочленов $\{Q_n(x)\}$, с положительными старшими коэффициентами и удовлетворяющих условиям ортонормированности (1.23), (1.24), т.е. весовая функция однозначно определяетõртонормированную систему многочленов.

В теории и приложениях наиболее важны следующие системы классических ортогональных многочленов:

Автор	Лежандр	Чебышев	Эрмит	Лагерр
Интервал	$(-1,1)$	$(-1,1)$	$(-\infty,\infty)$	$(0,\infty)$
Вес	1	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$e^{-x^2/2}$ (или e^{-x^2})	e^{-x}
Обозначение	$P_n(x)$	$T_n(x)$	$H_n(x)$	$L_n(x)$

Эти многочлены удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

a) многочлены Лежандра

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0; \tag{1.25}$$

b) многочлены Чебышева

$$(1-x^2)y'' - xy'^2 y = 0; \tag{1.26}$$

c) многочлены Эрмита

$$y'' - xy' + ny = 0 \ \ (\text{или } y'' - 2xy' + 2ny = 0); \tag{1.27}$$

d) многочлены Лагерра

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0. \tag{1.28}$$

Обобщенная формула Родрига

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n; \tag{1.29}$$

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) = \frac{(-1)^n}{(2n-1)!!} \sqrt{1-x^2} \frac{d^n}{dx^n} (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}; \tag{1.30}$$

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2/2}) \tag{1.31}$$

$$(\text{или } \mathrm{H}_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}));$$

$$\mathrm{L}_n(x) = (-1)^n e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}). \tag{1.32}$$

Производящие функции

$$\frac{1}{\sqrt{1-2zx+z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}_n(x) z^n; \tag{1.33}$$

$$\frac{1-zx}{1-2zx+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{T}_n(x) z^n, \qquad \text{если } |z| < 1; \tag{1.34}$$

$$e^{zx-z^2/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{H}_n(x) \frac{z^n}{n!} \ \Big(\text{ или } e^{2zx-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{H}_n(x) \frac{z^n}{n!}\Big); \tag{1.35}$$

$$\frac{e^{-x\frac{z}{1-z}}}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{L}_n(x) \frac{z^n}{n!}, \quad \text{если} \quad 0 < x < \infty. \tag{1.36}$$

Рекуррентные формулы:

$$\mathrm{P}_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x \mathrm{P}_n(x) - \frac{n}{n+1} \mathrm{P}_{n-1}(x) = \tag{1.37}$$

$$= x\mathrm{P}_n(x) + \frac{x^2-1}{n+1} \frac{d\mathrm{P}_n}{dx}; \tag{1.38}$$

$$\mathrm{T}_{n+1}(x) = 2x\mathrm{T}_n(x) - \mathrm{T}_{n-1}(x); \tag{1.39}$$

$$\mathrm{H}_{n+1}(x) = x\mathrm{H}_n(x) - n\mathrm{H}_{n-1}(x) \tag{1.40}$$

$$\Big(\text{ или } \mathrm{H}_{n+1}(x) = 2x\mathrm{H}_n(x) - 2n\mathrm{H}_{n-1}(x)\Big); \tag{1.41}$$

$$\mathrm{L}_{n+1}(x) = (2n+1-x)\mathrm{L}_n(x) - n^2 \mathrm{L}_{n-1}(x). \tag{1.42}$$

Нормы многочленов (см.(1.24)): $\|\mathrm{P}_n(x)\|^2 = 2/(2n+1)$,

$$\|\mathrm{T}_n(x)\|^2 = \begin{cases} \pi/2, & \text{если } n \neq 0, \\ \pi, & \text{если } n = 0; \end{cases}$$

$\|\mathrm{H}_n(x)\|^2 = n!\sqrt{2\pi}$, $\Big(\text{ или } \|\mathrm{H}_n(x)\|^2 = 2^n n! \sqrt{\pi}\Big)$,

$\|\mathrm{L}_n(x)\|^2 = (n!)^2$.

Задачи

1.3.1. Показать, что многочлен Лежандра $P_n(x)$,определенный формулой (1.29), удовлетворяет уравнению (1.25).

Решение. Рассмотрим функцию $R_n(x) = (x^2-1)^n$. Ее производная

$$R_n'(x) = 2nx(x^2-1)^{n-1} = \frac{2nx}{x^2-1}(x^2-1)^n = \frac{2nx}{x^2-1}R_n(x),$$

Следовательно,

$$(x^2-1)R_n'(x) = 2nxR_n(x).$$

Дифференцируя это равенство $(n+1)$ раз по формуле Лейбница $(uv)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}$ и, перенося все члены в одну сторону, получим

$$(x^2-1)R_n^{(n+2)} + 2(n+1)xR_n^{(n+1)} + \frac{n(n+1)}{2}2R_n^{(n)} =$$
$$= 2nxR_n^{(n+1)} + 2n(n+1)R_n^{(n)},$$

Следовательно, функция $R_n(x)$ а значит и $P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!}R_n(x)$ удовлетворяет уравнению (1.24).

1.3.2. Показать, что $P_n(1) = 1$. (Указание. Применить формулу Лейбница к $(x^2-1)^n = (x-1)^n(x+1)^n$.)

1.3.3. Показать, что многочлен $P_{2n}(x)$ – четная функция, а $P_{2n-1}(x)$– нечетная. Получить отсюда равенство $P_n(-1) = (-1)^n$.

1.3.4. Показать, что $P_{2n-1}(0) = 0$; $P_{2n}(x) = (-1)^n \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$.

1.3.5. Выписать многочлены $P_1(x)$ и $P_2(x)$ по формуле Родрига и непосредственно из дифференциального уравнения (1.25) методом неопределенных коэффициентов. Ответ: $1, x$.

1.3.6. Выписать многочлены $P_3(x), P_4(x), P_5(x)$ и $P_6(x)$, используя рекуррентную формулу (1.37).

Ответ: $(3x^2-1)/2, (5x^3-3x)/2, (35x^4-30x^2+3)/8, (63x^5-70x^3+15x)/8$.

1.3.7. Доказать формулу Шлефли

$$P_n(z) = \frac{n!}{2^{n+1}\pi i} \oint\limits_C \frac{(t^2-1)^n}{(t-z)^{n+1}}dt.$$

Решение. Функция $(z^2-1)^n$ комплексного аргумента z аналитична на всей комплексной плоскости и по формуле Коши

$$\frac{d^n}{dz^n}(z^2-1)^n = \frac{n!}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{(t^2-1)^n}{(t-z)^{n+1}}dt,$$

где C – произвольный замкнутый контур, содержащий точку z внутри. Используя формулу Родрига, получим требуемое.

1.3.8. Вывести формулу Лапласа

$$\mathrm{P}_n(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} (z+\sqrt{z^2-1}\cos\varphi)^n d\varphi.$$

Указание: В формуле Шлефли взять $\mathrm{C}: |t-z| = |\sqrt{z^2-1}|$.

1.3.9. Используя интегральное представление многочленов Лежандра

$$\mathrm{P}_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} (x+\sqrt{x^2-1}\cos\psi)^n d\psi,$$

показать, что $|\mathrm{P}_n(x)| \le 1$ при $|x| \le 1$.

1.3.10. Показать, что производящая функция $\mathrm{W}(x,z) = \dfrac{1}{\sqrt{1-2zx+z^2}}$ удовлетворяет уравнению $z\dfrac{\partial \mathrm{W}}{\partial z} = (x-z)\dfrac{\partial \mathrm{W}}{\partial x}$.

1.3.11. Доказать рекуррентные формулы

$$x\mathrm{P}'_n(x) - \mathrm{P}'_{n-1}(x) = n\mathrm{P}_n(x), \quad \mathrm{P}'_{n+1}(x) - x\mathrm{P}'_n(x) = (n+1)\mathrm{P}_n(x).$$

Указание: Применить задачу (3.8).

1.3.12. Пусть A_n – старший коэффициент $\mathrm{P}_n(x)$. Показать, что $\mathrm{A}_{n+1} = \dfrac{2n+1}{n+1}\mathrm{A}_n$. Зная, что $\mathrm{A}_0 = 1$, получить выражение для A_n.

Ответ: $\mathrm{A}_n = \dfrac{(2n-1)!!}{n!}$. Использовать рекуррентную формулу (1.37).

1.3.13. Проверить, что многочлены Чебышева $\mathrm{T}_n(x)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению (1.26).

1.3.14. Выписать многочлены $\mathrm{T}_0(x), \mathrm{T}_1(x)$ и $\mathrm{T}_2(x)$ по формуле Родрига и непосредственно из дифференциального уравнения (1.25) методом неопределенных коэффициентов. Ответ: $1, x, 2x^2-1$.

1.3.15. Выписать многочлены $\mathrm{T}_3(x), \mathrm{T}_4(x)$ и $\mathrm{T}_5(x)$, используя рекуррентную формулу (1.38). Ответ: $4x^3-3x, 8x^4-8x^2+1, 16x^5-20x^3+5x$.

1.3.16. Вычислить следующие значения многочленов Чебышева: $\mathrm{T}_n(1); \mathrm{T}_n(-1); \mathrm{T}_{2n}(0); \mathrm{T}_{2n+1}(0)$. Ответ: $1, (-1)^n, (-1)^n, 0$.

1.3.17. Показать, что многочлен Чебышева $\mathrm{T}_n($x имеет n различных действительных корней и что все они лежат на отрезке $[-1, 1]$.

Указание. Применить формулу (1.30).

1.3.18. Показать, что для многочленов Чебышева $\mathrm{T}_n(x)$ справедливо равенство $\mathrm{T}_n(\mathrm{T}_m(x)) = \mathrm{T}_{nm}(x)$.

1.3.19. Показать, что $\mathrm{T}_n(2x-1) = \mathrm{T}_{2n}(\sqrt{x})$.

1.3.20. Проверить, что многочлены Эрмита $\mathrm{H}_n(x)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению (1.27).

1.3.21. Показать, что для многочленов Эрмита $\mathrm{H}_n(x)$ $\left(\text{с весом } e^{-x^2/2}\right)$ справедливы рекуррентные формулы

$$\mathrm{H}_{n+1}(x) = x\mathrm{H}_n(x) - \mathrm{H}_n'(x); \qquad \mathrm{H}_n'(x) = n\mathrm{H}_{n-1}(x).$$

1.3.22. Показать, что при $n > 0$

$$\mathrm{H}_n^{(k)}(x) = n(n-1)\ldots(n-k+1)\mathrm{H}_{n-k}(x), \qquad (0 < k \leq n).$$

1.3.23. Выписать многочлены Эрмита $\mathrm{H}_0(x), \mathrm{H}_1(x)$ и $\mathrm{H}_2(x)$ по формуле Родрига и непосредственно из дифференциального уравнения (1.25) методом неопределенных коэффициентов.

1.3.24. Выписать многочлены Эрмита $\mathrm{H}_3(x), \mathrm{H}_4(x)$ и $\mathrm{H}_5(x)$ используя рекуррентную формулу (1.39).

1.3.25. Показать, что $\mathrm{H}_{2n}(0) = \dfrac{(-1)^n(2n)!}{2^n n!}$, $\mathrm{H}_{2n+1}(0) = 0$, $\mathrm{H}_{2n}'(0) = 0, \mathrm{H}_{2n+1}'(0) = \dfrac{(-1)^n(2n+1)!}{2^n n!}$.

1.3.26. Проверить, что многочлены Лагерра $\mathrm{L}_n(x)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению (1.28).

1.3.27. Выписать многочлены $\mathrm{L}_1(x)$ и $\mathrm{L}_2(x)$ по формуле Родрига и непосредственно из дифференциального уравнения (1.25) методом неопределенных коэффициентов.

1.3.28. Выписать многочлены Лагерра $\mathrm{L}_3(x)$, $\mathrm{L}_4(x)$, $\mathrm{L}_5(x)$ и $\mathrm{L}_6(x)$, используя рекуррентную формулу (1.40).

1.3.29. Показать, что для многочленов Лагерра $\mathrm{L}_n(x)$ справедливы рекуррентные формулы:

$$\mathrm{L}_n'(x) = n\mathrm{L}_{n-1}'(x) - n\mathrm{L}_{n-1}(x); \qquad x\mathrm{L}_n'(x) = n\mathrm{L}_n(x) - n^2\mathrm{L}_{n-1}(x).$$

Глава 2

Интегральные уравнения

2.1 Различные типы уравнений

Пусть функция $K(x,t)$ определена в области

$$Q : a \leqslant x \leqslant b, a \leqslant t \leqslant b;$$

$f(x)$ и $g(x)$ – функции, определенные на промежутке $a \leqslant x \leqslant b$.

Определение. Уравнение вида

$$g(x)y(x) + \int\limits_a^b K(x,t)y(t)\,dt + f(x) = 0$$

называется линейным интегральным уравнением. Функция $y(x)$, определенная на промежутке (a,b), называется решением этого уравнения, если при ее подстановке уравнение превращается в тождество.

По разным причинам удобно рассматривать не одно интегральное уравнение, а семейство уравнений, зависящих от числового параметра λ.

Определение. Линейное уравнение вида

$$y(x) = \lambda \int\limits_a^b K(x,t)y(t)\,dt + f(x) \tag{2.1}$$

называется уравнением Фредгольма 2-го рода, а уравнение

$$\lambda \int\limits_a^b K(x,t)y(t)\,dt + f(x) = 0$$

– уравнением Фредгольма 1-го рода. Если $f(x) = 0$, то уравнение называют однородным. Функция $K(x,t)$ называется ядром интегрального уравнения.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$y(x) = e^x + \int\limits_0^x e^{x-t} y(t) dt.$$

Это уравнение Фредгольма 2-го рода, в котором $f(x) = e^x$. Если считать, что параметр $\lambda = 1$, то ядро $K(x,t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t > x; \\ e^{x-t}, & \text{если } 0 \le t \le x. \end{cases}$ Промежуток $[a,b] = [0,b]$, где число b – произвольное.

Подставим в правую часть уравнения функцию $y(x) = e^{2x}$:

$$e^x + \int\limits_0^x e^{x-t} e^{2t}\, dt = e^x + e^x(e^x - 1) = e^{2x}.$$

Таким образом, эта функция является решением рассматриваемого уравнения.

Определение. Если ядро уравнения Фредгольма $K(x,t) = 0$ при $t > x$, то такое уравнение называется уравнением Вольтерра. Таким образом, уравнение Вольтерра 1-го рода имеет вид

$$\lambda \int\limits_a^x K(x,t) y(t)\, dt + f(x) = 0,$$

а уравнение Вольтерра 2-го рода – это уравнение вида

$$y(x) = \lambda \int\limits_a^x K(x,t) y(t)\, dt + f(x). \tag{2.2}$$

Уравнение, рассмотренное в примере, – уравнение Вольтерра 2-го рода.

2.2 Решение уравнения Фредгольма резольвентным методом

Если искать решение уравнения (2.1) приближенно, считая параметр λ малым по абсолютной величине, то в качестве «нулевого» приближения можно принять $y(x) \approx u_0(x) = f(x)$.

Представим решение в виде суммы ряда по степеням параметра λ

$$y(x) = u_0(x) + \lambda u_1(x) + \lambda^2 u_2(x) + \ldots \tag{2.3}$$

Подстановка этого ряда в уравнение (2.1) приводит к равенствам

$$u_0(x) = f(x), u_1(x) = \int\limits_a^b \mathrm{K}_1(x,t) f(t)\, dt, \ldots,$$

$$u_n(x) = \int\limits_a^b \mathrm{K}_n(x,t) f(t)\, dt. \tag{2.4}$$

Здесь

$$\mathrm{K}_1(x,t) = \mathrm{K}(x,t), \qquad \mathrm{K}_n(x,t) = \int\limits_a^b \mathrm{K}(x,\tau)\mathrm{K}_{n-1}(\tau,t)\, d\tau, n \geq 2. \tag{2.5}$$

Функции $\mathrm{K}_n(x,t)$ называются *итерированными ядрами*. Имеет место

Теорема. *Если ядро* $\mathrm{K}(x,t)$ *уравнения* (2.1) *непрерывно в квадрате* Q : $a \leqslant x, t \leqslant b, |\lambda| < (b-a)^{-1} \max\limits_{a \leqslant x,t \leqslant b}{}^{-1} |\mathrm{K}(x,t)|$ *и функция* $f(x)$ *непрерывна на* $[a,b]$, *то ряд* (2.3) *равномерно сходится на* (a,b), *и его сумма* $y(x)$ *является единственным непрерывным решением уравнения* (2.1).

Замечание 1. Условие относительно λ можно заменить на

$$|\lambda| < \left(\int\limits_a^b \int\limits_a^b \mathrm{K}^2(x,t)\, dxdt \right)^{-1/2}$$

Замечание 2. Формулу (2.3) для решения $y(x)$ можно записать в виде

$$y(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \int\limits_a^b \mathrm{K}_n(x,t) f(t)\, dt.$$

Или

$$y(x) = \lambda \int\limits_a^b \mathrm{R}(x,t,\lambda) f(t)\, dt + f(x), \tag{2.6}$$

где функция

$$\mathrm{R}(x,t,\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} \mathrm{K}_n(x,t) \tag{2.7}$$

называется *резольвентой ядра* $K(x,t)$. Ряд справа в (2.7) называется *рядом Неймана*. Заметим, что формула (2.6) дает выражение для $y(x)$ в той же форме, что и в исходном уравнении (2.1) с заменой $y(x)$ под знаком интеграла на $f(x)$ и ядра $K(x,t)$ на резольвенту $R(x,t,\lambda)$. Поэтому иногда резольвенту называют разрешающим ядром.

Замечание 3. Ряд Неймана дает представление для резольвенты лишь для значений параметра λ достаточно малых по абсолютной величине, но формула (2.6) решения уравнения Фредгольма (2.1) имеет смысл для любых λ, при которых это уравнение имеет единственное решение. Для нахождения резольвенты $R(x,t,\lambda)$ в этих случаях используют другие методы.

Пример. Найти решение уравнения

$$y(x) = x + \lambda \int\limits_0^1 xt^2 y(t)\,dt$$

с помощью резольвенты.

Решение. $K(x,t) = xt^2$. Отсюда, $(b-a)\max\limits_{a\leqslant x,t\leqslant b} |K(x,t)| = 1$. При $|\lambda| < 1$ условия теоремы о сходимости ряда (2.3) выполнены. Найдем итерированные ядра:

$K_1(x,t) = K(x,t) = xt^2$;

$$K_2(x,t) = \int\limits_0^1 K(x,\tau)K(\tau,t)\,d\tau = \int\limits_0^1 x\tau^2\tau t^2\,d\tau = \frac{1}{4}xt^2;$$

$$K_3(x,t) = \int\limits_0^1 K(x,\tau)K_2(\tau,t)\,d\tau = \int\limits_0^1 x\tau^2\frac{1}{4}\tau t^2\,d\tau = \frac{1}{4^2}xt^2.$$

Для произвольного $n > 1$ получаем $K_n(x,t) = \dfrac{1}{4^{n-1}}xt^2$.

Резольвента

$$R(x,t,\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1}K_n(x,t) = xt^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^{n-1}}{4^{n-1}} = \frac{4xt^2}{4-\lambda}.$$

Решение уравнения по формуле (2.6) для $\lambda < 1$

$$y(x) = x + \lambda\int\limits_0^1 \frac{4xt^2}{4-\lambda}t\,dt = x + \frac{\lambda}{4-\lambda}x = \frac{4}{4-\lambda}x.$$

Заметим, что хотя формула $R(x,t,\lambda)=\frac{4xt^2}{4-\lambda}$ получена для $|\lambda|<1$, на самом деле она дает разрешающее ядро при любом (в том числе и комплексном) $\lambda\neq 4$. Полученная с помощью резольвенты формула $y(x)=\frac{4}{4-\lambda}x$ определяет решение интегрального уравнения при любом $\lambda\neq 4$.

Задачи

Решить уравнения с помощью резольвенты:

2.2.1. $y(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi} y(t)\,dt+\sin x.$

2.2.2. $y(x)=\frac{\ln 2}{2}\int\limits_0^{1} 2^{x+t}y(t)\,dt+x.$

2.2.3. $y(x)+\pi\int\limits_0^{1} x\sin 2\pi t y(t)\,dt=\cos 2\pi x.$

2.2.4. $y(x)=\frac{1}{2}\int\limits_0^{1} xe^t y(t)\,dt+e^{-x}.$

2.2.5. $y(x)=\int\limits_0^{\pi/2} \sin x\cos t\, y(t)\,dt+1.$

Ответы:2.2.1: $y=\frac{2}{\pi}+\sin x$. 2.2.2: $y=\frac{2\ln 2-1}{\ln 2}2^{x+1}+x$. 2.2.3: $y=\cos 2\pi x$. 2.2.4: $y=e^{-x}+x$. 2.2.5: $y=2\sin x+1$.

2.3 Метод последовательных приближений для решения уравнения Фредгольма 2-го рода

Согласно методу последовательных приближений, решение интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода

$$y(x)=\lambda\int\limits_a^b K(x,t)y(t)dt+f(x) \qquad (2.1)$$

ищут как предел последовательности функций
$y_0(x), y_1(x), \ldots, y_n(x), \ldots$, которая строится следующим образом: $y_0(x)$, берется произвольно (часто берут $y_0(x) \equiv 0$, или $y_0(x) = f(x)$); для $n > 0$ члены последовательности определяются рекуррентно формулой

$$y_n(x) = \lambda \int_a^b K(x,t) y_{n-1}(t)dt + f(x).$$

Теорема. Если ядро $K(x,t)$ непрерывно в области $Q: a \leqslant x, t \leqslant b$, функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и $|\lambda| < \left(\int_a^b \int_a^b K^2(x,t)dxdt \right)^{-1/2}$, то последовательность $y_n(x)$, начинающаяся произвольной непрерывной функцией $y_0(x)$, при $n \to \infty$ равномерно сходится на $[a,b]$ к единственному решению $y(x)$ уравнения (2.1).

Пример. Решить уравнение

$$y(x) + \frac{1}{2} \int_0^1 y(t)dt = \sin \pi x$$

методом последовательных приближений.

Решение. В нашем случае можно считать

$$K(x,t) \equiv 1; \lambda = -1/2; \left(\int_0^1 \int_0^1 K^2(x,t)dxdt \right)^{-1/2} = 1.$$

Поскольку $|\lambda| = 1/2 < 1$, то условия теоремы о сходимости последовательных приближений выполнены. Возьмем, например, в качестве нулевого приближения функцию $y_0(x) \equiv 1$. Тогда

$$y_1(x) = -1/2 \int_0^1 y_0(t)dt + \sin \pi x = -1/2 + \sin \pi x;$$

$$y_2(x) = -1/2 \int_0^1 y_1(t)dt + \sin \pi x = 1/4 - 1/\pi + \sin \pi x;$$

$$y_3(x) = -1/2 \int_0^1 y_2(t)dt + \sin\pi x = -1/8 - 3/2\pi + \sin\pi x;$$

. . . .

$$y_n(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^k}{2^{k-1}} + \sin\pi x.$$

При $n \to \infty$ находим: $y_n(x) \to y(x) = -\frac{2}{3\pi} + \sin\pi x$, причем равномерно. Эта функция является единственным непрерывным решением уравнения.

Замечание. Сравнивая методы решения интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода – резольвентный метод и метод последовательных приближений, заметим, что оба метода, по существу, совпадают, если во втором в качестве нулевого приближения выбрать $y_0(x) = f(x)$. В этом случае последовательные приближения $y_n(x)$ совпадают с частичными суммами ряда (2.3). Поэтому метод последовательных приближений можно рассматривать как обобщение метода разложения решения в ряд по степеням «малого» параметра λ. Произвол в выборе нулевого приближения $y_0(x)$ придает методу последовательных приближений некоторую дополнительную гибкость.

Задачи

Решить уравнения методом последовательных приближений:

2.3.1. $y(x) = \int_0^1 xty(t)\,dt + 2x.$

2.3.2. $y(x) + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos^2 t\, y(t)\,dt = 1.$

2.3.3. $y(x) = \pi\int_0^1 (1-x)\sin 2\pi t\, y(t)\,dt + \frac{1-x}{2}.$

2.3.4. $y(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi t\sin x\, y(t)\,dt + 2\sin x.$

2.3.5. $y(x) + \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi (\cos(x+t) + \cos(x-t))y(t)\,dt = \cos x.$

Ответы: 2.3.1: $y = 3x$. 2.3.2: $y = 2/3$. 2.3.3: $y = 1 - x$. 2.3.4: $y = 4\sin x$. 2.3.5: $y = 2/3\cos x$.

2.3.6. Найти решения уравнений 2.1– 2.5 методом последовательных приближений и уравнений 3.1–3.5 резольвентным методом. Сравнить возможности методов и ответить на вопрос: в чем преимущества и недостатки каждого?

2.4 Уравнения Фредгольма с вырожденным ядром

В этом параграфе мы рассмотрим интегральные уравнения, решение которых сводится к решению конечных систем линейных алгебраических уравнений.

Определение. Ядро $\mathrm{K}(x,t)$ интегрального уравнения Фредгольма называется вырожденным, если его можно представить в виде

$$\mathrm{K}(x,t) = \sum_{k=1}^{m} p_k(x) q_k(t)$$

с непрерывными функциями $p_1(x), \ldots, p_m(x), q_1(t), \ldots, q_m(t)$.

Заметим, что системы непрерывных функций $\{p_1(x), \ldots, p_m(x)\}$ и $\{q_1(t), \ldots, q_m(t)\}$ можно считать линейно независимыми (каждую) на рассматриваемом промежутке (a,b). Далее будем считать, что это условие выполнено.

Рассмотрим уравнение (2.1) Фредгольма 2-го рода

$$y(x) = \lambda \int_a^b \mathrm{K}(x,t) y(t)\,dt + f(x) =$$

$$= \lambda \sum_{k=1}^{m} p_k(x) \int_a^b q_k(t) y(t)\,dt + f(x). \tag{2.1}$$

с вырожденным ядром. Правая часть этого уравнения является суммой функции $f(x)$ и некоторой линейной комбинации функций $p_1(x), \ldots, p_m(x)$. Поэтому, для того чтобы функция $y(x)$ была решением этого уравнения, необходимо представление

$$y(x) = \sum_{k=1}^{m} c_k p_k(x) + f(x) \tag{2.8}$$

с некоторыми постоянными $c_1, c_2, \ldots, c_m$.

Подставим выражение (2.8) в уравнение (2.1)

$$\sum_{i=1}^{m} c_i p_i(x) = \lambda \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{m} c_j \int_a^b p_j(t) q_i(t)\, dt \right) p_i(x) + \lambda \sum_{i=1}^{m} p_i(x) \int_a^b q_i(t) f(t)\, dt.$$

Так как система функций $p_1(x), \ldots, p_m(x)$ линейно независима на (a, b), то последнее равенство равносильно системе равенств для коэффициентов c_i

$$c_i = \lambda \sum_{j=1}^{m} \Big(\int_a^b p_j(t) q_i(t) dt \Big) c_j + \lambda \int_a^b q_i(t) f(t) dt (i = 1, 2, \ldots, m). \qquad (2.9)$$

В матричных обозначениях: $(a_{ij}) = \mathrm{A}; \mathrm{C} = (c_1, c_2, \ldots, c_m)^\top$;
$\mathrm{F} = (f_1, f_2, \ldots, f_m)^\top$,

где $a_{ij} = \int_a^b p_j(t) q_i(t) dt, f_i = \lambda \int_a^b q_i(t) f(t) dt;\ \ (i, j = 1, 2, \ldots, m)$ система уравнений (2.9) принимает вид

$$\Big(\mathrm{E} - \lambda \mathrm{A}\Big) \mathrm{C} = \mathrm{F}. \qquad (2.10)$$

Таким образом, справедлива

Теорема. Функция $y(x)$ является решением уравнения (2.1) с вырожденным ядром тогда и только тогда, когда она имеет вид $y(x) = \sum_{k=1}^{m} c_k p_k(x) + f(x)$ с коэффициентами $(c_1, c_2, \ldots, c_m) = \mathrm{C}^\top$, которые удовлетворяют системе (2.10) линейных алгебраических уравнений.

Пример 1. Решить уравнение

$$y(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin x \sin t + \pi t) y(t)\, dt + \sin 2x.$$

Решение. Ядро $\mathrm{K}(x, t) = \sin x \sin t + \pi t$ вырождено. Каждая из систем функций $\{p_1; p_2\} = \{\sin x; \pi\}$ и $\{q_1; q_2\} = \{\sin t; t\}$ линейно независима на промежутке $(\pi; \pi)$. Согласно сформулированной выше теореме будем искать решение уравнения в виде $y(x) = c_1 \sin x + c_2 \pi + \sin 2x$.

Составим систему алгебраических уравнений (2.10) для коэффициентов c_1 и c_1. Элементы матрицы A этой системы:

$$a_{11} = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t\, dt = \pi; \qquad a_{12} = \pi \int_{-\pi}^{\pi} \sin t\, dt = 0;$$

$$a_{21} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} t\sin t\,dt = 2\pi; \qquad a_{22} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \pi t\,dt = 0.$$

Элементы столбца F:

$$f_1 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin t\sin 2t\,dt = 0; \qquad f_2 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} t\sin 2t\,dt = -1.$$

В нашем случае $\lambda = \dfrac{1}{\pi}$, и система уравнений (2.10) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Общее решение этой системы $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, где c—произвольное число.

Итак, решения интегрального уравнения – это функции

$$y(x) = c\sin x + (2c-1)\pi + \sin 2x = c(\sin x + 2\pi) + \sin 2x - \pi.$$

Пример 2. Решить уравнение

$$y(x) = x + \int\limits_0^1 xt^2 y(t)\,dt.$$

Решение. Правая часть имеет вид cx, где $c = 1 + \int\limits_0^1 t^2 y(t)\,dt.$

Найдем c, подставив выражение $y = cx$ в уравнение

$$cx = x + c\int\limits_0^1 xt^2 t dt = x\left(1 + \frac{c}{4}\right).$$

Отсюда $c = 1 + \dfrac{c}{4}; c = \dfrac{4}{3}$. Решение уравнения $y = \dfrac{4}{3}x$. Этот же результат был получен ранее методом построения резольвенты ядра $\mathrm{K}(x,t) = xt^2$.

Задачи

Решить уравнения или установить их неразрешимость:

2.4.1. $y(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} y(t) \cos x \sin t \, dt + \sin x.$

2.4.2. $y(x) = \frac{2e}{e^2 - 1} \int\limits_0^1 y(t) \operatorname{ch} x \, dt + 1.$

2.4.3. $y(x) = x + \frac{24}{7} \int\limits_0^1 y(t)(1 - x^2)(1 - 3t/2) \, dt.$

2.4.4. $y(x) = \int\limits_0^1 y(t)(1 + x) \cos 2\pi t \, dt + x.$

2.4.5. $y(x) = \int\limits_0^{\pi/4} y(t) \operatorname{tg} t \, dt + \cos^2 x.$

2.4.6. $y(x) = 4 \int\limits_0^1 xt^2 y(t) \, dt.$

2.4.7. $y(x) + \int\limits_0^1 te^x y(t) \, dt = 0.$

2.4.8. $y(x) = \int\limits_0^1 (2x - t) y(t) \, dt + \cos 2\pi x.$

2.4.9. $y(x) = \int\limits_0^1 (1 + 2xt) y(t) \, dt - \frac{1}{6}(x + 3).$

2.4.10. $y(x) = \int\limits_{-1}^1 \left(\frac{3}{2} xt + x^2(t - 1)\right) y(t) \, dt.$

2.4.11. $y(x) = \frac{4}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} \cos^2(x-t)y(t)\,dt + \sin 2x.$

2.4.12. $y(x) + \int\limits_{0}^{1} \left(x - \sqrt{t}\right)y(t)\,dt = \frac{5}{3}x + \sqrt{x} - \frac{1}{6}.$

2.4.13. $y(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos(x-t)y(t)\,dt.$

2.4.14. $y(x) = 3 \int\limits_{0}^{1} (x^2t^2 + 4xt + 1)y(t)\,dt + 2\pi^2 \cos 2\pi x.$

2.4.15. $y(x) = \int\limits_{-1}^{1} (xt + x^2)y(t)\,dt.$

Ответы: 2.4.1: $y = \cos x + \sin x$. 2.4.2: решений нет. 2.4.3: $y = x + c(1 - x^2)$. 2.4.4: $y = x$. 2.4.5: $y = \cos^2 x + \frac{1}{2(2-\ln 2)}$. 2.4.6: $y = cx$. 2.4.7: $y = 0$. 2.4.8 : $y = \cos 2\pi x$. 2.4.9: $y = x + 1/2$; 2.4.10 : $y = c\left(\frac{5}{2}x + x^2\right)$. 2.4.11: решений нет. 2.4.12: $y = \sqrt{x} + 1$. 2.4.13: $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$. 2.4.14: $y = 2\pi^2 \cos 2\pi x + \frac{5}{3}(2x^2 - 1)$. 2.4.15: $y = 0$.

2.5 Уравнения Вольтерра: методы решения.

Уравнения Вольтерра являются частным случаем уравнений Фредгольма и к ним относится все, что сказано о последних. Однако, имеются некоторые особенности, выделяющие уравнения Вольтерра. Например, (докажите это в качестве упражнения): любое вырожденное ядро в уравнении Вольтерра тождественно равно нулю. Таким образом, из приведенных в предыдущих разделах методов решения уравнений Фредгольма остаются: метод построения резольвенты и метод последовательных приближений. Сформулируем результаты применения этих 2-х методов для решения уравнения Вольтерра.

$$y(x) = \lambda \int\limits_{a}^{x} \mathrm{K}(x,t)y(t)dt + f(x). \tag{2.2}$$

Если искать решение этого уравнения в виде суммы ряда по степеням параметра λ

$$y(x) = u_0(x) + \lambda u_1(x) + \lambda^2 u_2(x) + \ldots, \tag{2.3}$$

то для членов этого ряда были получены представления (2.4—2.5). Для уравнения Вольтерра $K(x,t) = 0$ при $x < t$. Используя это, формулы (2.4 –2.5) можно преобразовать к виду

$$u_n(x) = \int_a^x K_n(x,t) f(t)\, dt.$$

Здесь

$$K_1(x,t) = K(x,t); \qquad K_2(x,t) = \int_t^x K(x,\tau) K(\tau,t)\, d\tau;$$

$$K_n(x,t) = \int_t^x K(x,\tau) K_{n-1}(\tau,t)\, d\tau. \tag{2.11}$$

Теорема. Если ядро $K(x,t)$ непрерывно в области $Q_1 : a \leqslant x \leqslant b,\ a \leqslant t \leqslant x$, функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и $\int_a^b dx \int_a^x K^2(x,t)\, dt$, конечен, то функциональный ряд (2.3) равномерно на $[a,b]$ сходится к единственному непрерывному решению $y(x)$ уравнения (2.2).

Формула представления решения через резольвенту ядра $K(x,t)$ приобретает вид

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x R(x,t,\lambda) f(t) dt,$$

а ряд Неймана для резольвенты сходится при любом значении параметра λ.

Таким образом, в отличие от общего уравнения Фредгольма, при применении данного метода к решению уравнения Вольтерра не возникает ограничений на значения параметра λ.

Это же относится и к методу последовательных приближений. Пусть функция $y_0(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и выбрана произвольно; члены последовательности $y_n(x)$ при $n \geq 1$ определены равенствами

$$y_n(x) = \lambda \int\limits_a^x K(x,t) y_{n-1}(t)dt + f(x).$$

Теорема. Если выполнены условия предыдущей теоремы, то при $n \to \infty$ последовательность $y_n(x)$ равномерно сходится на $[a,b]$ к единственному решению уравнения (2.2).

Пример 1. Решить уравнение Вольтерра

$$y(x) = e^x + \int\limits_0^x e^{x-t}\, y(t)\, dt$$

с помощью резольвенты.

Решение. Найдем итерированные ядра:

$K_1(x,t) = K(x,t), \qquad 0 \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant t \leqslant x;$

$K_2(x,t) = \int\limits_t^x K(x,\tau)K(\tau,t)d\tau = \int\limits_t^x e^{x-\tau}e^{\tau-t}\, d\tau = (x-t)e^{x-t};$

$K_3(x,t) = \int\limits_t^x K(x,\tau)K_2(\tau,t)\, d\tau = \int\limits_t^x e^{x-\tau}(\tau-t)e^{\tau-t}\, d\tau = \frac{(x-t)^2}{2}e^{x-t};$

$K_n(x,t) = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}e^{x-t}, n \geq 1;$

$R(x,t,\lambda) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1}K_n(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n-1}(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}e^{x-t} = e^{x-t}e^{\lambda(x-t)} =$

$= e^{(\lambda+1)(x-t)}.$

При любом λ решение уравнения Вольтерра

$$y(x) = f(x) + \lambda \int\limits_a^x R(x,t,\lambda)f(t)\, dt = e^x + \lambda \int\limits_0^x e^{(\lambda+1)(x-t)}e^t\, dt = e^{(\lambda+1)x}.$$

В нашем случае $\lambda = 1$, поэтому $y(x) = e^{2x}$ единственное решение рассматриваемого уравнения.

Пример 2. То же уравнение

$$y(x) = e^x + \int\limits_0^x e^{x-t}\, y(t)\, dt.$$

решим методом последовательных приближений.

$$y_0(x) = f(x) = e^x;$$

$$y_1(x) = f(x) + \int_0^x e^{x-t}\, y_0(t)\, dt = e^x + \int_0^x e^{x-t} e^t\, dt = e^x(1+x);$$

$$y_2(x) = e^x + \int_0^x e^{x-t}\, y_1(t)\, dt = e^x\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right);$$

$$y_n(x) = e^x\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right).$$

При $n \to \infty \qquad y_n \to e^x e^x = e^{2x}$.

Задачи

Решить уравнения резольвентным методом и методом последовательных приближений.

2.5.1. $y(x) = x - \frac{1}{2}\int_0^x x\, y(t)\, dt;$

2.5.2. $y(x) = 1 - \int_0^x t\, y(t)\, dt;$

2.5.3. $y(x) = \int_0^x xt\, y(t)\, dt + x;$

2.5.4. $y(x) = 2\int_0^x e^{x-t}\, y(t)\, dt + \sin x;$

2.5.5. $y(x) = \operatorname{ch} x \int_0^x \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch} t}\, y(t)\, dt;$

2.5.6. $y(x) = \frac{1}{1+x^2} + \int_0^x \frac{1+t^2}{1+x^2}\, y(t)\, dt;$

2.5.7. $y(x)=1+\int\limits_0^x y(t)\,dt;$

2.5.8. $y(x)=\frac{x^2}{2}+x-\int\limits_0^x y(t)\,dt;$

$$a)\, y_0(x)=1; \quad b)\, y_0(x)=\frac{x^2}{2}+x;$$

2.5.9. $y(x)=\int\limits_0^x xy(t)dt+1-x^2;$

$$a)\, y_0(x)=1-x^2; b)\, y_0(x)=1;$$

2.5.10. $y(x)=x-\int\limits_0^x (x-t)\,y(t)\,dt;$

2.5.11. $y(x)=2^x+\int\limits_0^x 2^{x-t}\,y(t)\,dt;$

Ответы: 2.5.1: $y=xe^{-x^2/4}$. 2.5.2: $y=e^{-x^2/2}$. 2.5.3: $y=xe^{x^3/3}$. 2.5.4: $y=\frac{1}{5}e^{3x}-\frac{1}{5}\cos x+\frac{2}{5}\sin x$. 2.5.5: $y=e^x\operatorname{ch}x$. 2.5.6: $y=\frac{e^x}{1+x^2}$. 2.5.7: $y=e^x$. 2.5.8: $y=x$; 2.5.9: $y=1$. 2.5.10: $y=\sin x$. 2.5.11: $y=(2e)^x$.

2.6 Интегральные уравнения и краевые задачи для дифференциальных уравнений.

К интегральным уравнениям приводят краевые задачи для дифференциальных уравнений и их систем. В частности, к интегральному уравнению Вольтерра приводит задача Коши для линейного дифференциального уравнения.

Пример 1. Рассмотрим задачу Коши

$$y'-xy=xe^{x^2}, y(0)=1. \tag{2.12}$$

Если y(x)– решение этой задачи, то, интегрируя дифференциальное уравнение (2.12) с учетом начального условия, получим

$$y(x)-1-\int\limits_0^x ty(t)\,dt=\frac{1}{2}e^{x^2}-\frac{1}{2}. \tag{2.13}$$

Таким образом, решение задачи Коши является решением интегрального уравнения Вольтерра (2.13). Обратно, если $y(x)$–непрерывное решение уравнения (2.13), то оно является дифференцируемым (что следует из равенства (2.13)), удовлетворяет начальному условию $y(0)=1$,и из (2.13) следует уравнение $y'-xy=xe^{x^2}$–это результат дифференцирования уравнения (2.13).

Задачу Коши можно приводить к интегральному уравнению относительно функции, совпадающей не с решением задачи Коши, а его производными.

Пример 2. Рассмотрим задачу Коши

$$u''+xu=0; \quad u(0)=1; \quad u'(0)=0.$$

Обозначим $y(x)=u''(x)$. Интегрируя это равенство с учетом граничных условий, получим

$$u'(x)=u'(0)+\int_0^x u''(t)dt=\int_0^x y(t)dt.$$

Повторное интегрирование с применением формулы интегрирования по частям

$$u(x)=u(0)+\int_0^x u'(t)dt=1+\int_0^x dt\int_0^t y(s)ds=$$

$$=\left\lfloor u=\int_0^t y(s)ds, dv=dt \right\rfloor=1+\int_0^x (x-t)y(t)dt. \tag{2.14}$$

Выражая функцию $u(x)$ и её производные в исходном дифференциальном уравнении через $y(x)$, получим интегральное уравнение Вольтерра

$$y(x)+\int_0^x x(x-t)y(t)dt+x=0. \tag{2.15}$$

Обратно, если $y(x)$ – непрерывное решение уравнения (2.15), то функция $u(x)$, вычисленная по формуле (2.14), удовлетворяет начальным условиям $u(0)=1$; $u'(0)=0$ и является решением уравнения $u''+xu=0$.

Иногда интегральное уравнение легче исследовать, сводя его к решению некоторой краевой задачи для дифференциального уравнения или для системы дифференциальных уравнений. Это не всегда возможно. Важный класс интегральных уравнений, для которых такое сведение удается сделать – уравнения Вольтерра, чьи ядра K(x,t) совпадают при $t<x$ с вырожденными.

Пример 3. Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра

$$y(x) = \frac{1}{1+x^2} + \int\limits_0^x \sin(x-t)\,y(t)\,dt.$$

Решим это уравнение, сведя его к задаче Коши для системы дифференциальных уравнений. Для этого заметим, во-первых, что ядро уравнения при $0 < t < x$ совпадает с вырожденным:
$\mathrm{K}(x,t) = \sin(x-t) = \sin x \cos t - \cos x \sin t$. Перепишем уравнение в виде

$$y(x) = \frac{1}{1+x^2} + \sin x \int\limits_0^x y(t)\cos t dt - \cos x \int\limits_0^x y(t)\sin t dt. \qquad (2.16)$$

Обозначим

$$u_1(x) = \int\limits_0^x y(t)\cos t dt, \qquad u_2(x) = \int\limits_0^x y(t)\sin t dt. \qquad (2.17)$$

Продифференцируем равенство (2.17)

$$u_1'(x) = \cos x\, y(x); \quad u_2'(x) = \sin x\, y(x).$$

Отсюда, используя (2.16) и (2.17), получим

$$\begin{cases} u_1' = \cos x \sin x\, u_1 - \cos^2 x\, u_2 + \dfrac{\cos x}{1+x^2}; \\ u_2' = \sin^2 x\, u_1 - \sin x \cos x\, u_2 + \dfrac{\sin x}{1+x^2}. \end{cases} \qquad (2.18)$$

Как следует из (2.17) для данной системы дифференциальных уравнений должны выполняться начальные условия: $u_1(0) = u_2(0) = 0$. Для решения этой задачи Коши получим из системы (2.18) простейшее дифференциальное уравнение, умножая первое из уравнений (2.18) на $\cos x$, второе – на $\sin x$ и складывая их:

$$u_1' \cos x + u_2' \sin x = u_1 \sin x - u_2 \cos x + \frac{1}{1+x^2}.$$

Это уравнение можно переписать в виде

$$(u_1 \cos x + u_2 \sin x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Отсюда,интегрируя с учетом начальных условий,получим

$$u_1 \cos x + u_2 \sin x = \operatorname{arctg} x. \tag{2.19}$$

Умножая теперь первое уравнение системы (2.18) на $\sin x$, второе – на $\cos x$ и вычитая, получим

$$u_1' \sin x - u_2' \cos x = 0.$$

Это уравнение можно переписать в виде

$$(u_1 \sin x - u_2 \cos x)' - (u_1 \cos x + u_2 \sin x) = 0,$$

или с учетом (2.19)

$$(u_1 \sin x - u_2 \cos x)' = \operatorname{arctg} x.$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$u_1 \sin x - u_2 \cos x = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2).$$

Окончательно решение $y(x)$ интегрального уравнения получим из представления (2.16)

$$y(x) = \frac{1}{1+x^2} + x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2).$$

Задачи

Составить интегральные уравнения, соответствующие задачам Коши:

2.6.1. $u' + 2xu = e^x$;

$u(0) = 1; \quad$ (для $y = u'$).

2.6.2. $u'' - 2u' + u = 0$;

$u(2) = 1, \quad u'(2) = -2; \quad$ (для $y = u''$).

2.6.3. $u'' - u' \sin x + e^x u = x$;

$u(0) = 1, \quad u'(0) = -1; \quad$ (для $y = u''$).

2.6.4. $u''' + xu = e^x$;

$u(0) = 1, \quad u'(0) = u''(0) = 0; \quad$ (для $y = u'''$).

Решить интегральные уравнения, сведя их к задачам Коши для дифференциальных уравнений.

2.6.5. $y(x)=e^{x}+\int\limits_{0}^{x} y(t)dt.$

2.6.6. $y(x)=1+\int\limits_{0}^{x} ty(t)dt.$

2.6.7. $y(x)=\frac{1}{1+x^{2}}+\int\limits_{0}^{x} \sin(x-t)y(t)dt.$

2.6.8. $y(x)=e^{-x}\cos x-\int\limits_{0}^{x} \cos xe^{-(x-t)}y(t)dt.$

2.6.9. $y(x)=4e^{x}+3x-4-\int\limits_{0}^{x} (x-t)y(t)dt.$

2.6.10. $y(x)=x-1+\int\limits_{0}^{x} (x-t)y(t)dt.$

2.6.11. $y(x)=\sin x+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{x} (x-t)^{2}y(t)dt.$

2.6.12. $y(x)=\mathrm{ch}\,x-\int\limits_{0}^{x} y(t)\,\mathrm{sh}(x-t)dt.$

2.6.13. $y(x)=x+\int\limits_{0}^{x} (4\sin(x-t)-x+t)y(t)dt.$

2.6.14. $y(x)=1+\int\limits_{0}^{x} ((x-t)^{2}-(x-t))y(t)dt.$

Ответы: 2.6.1: $y(x)=e^{x}-\int\limits_{0}^{x} 2xy(t)dt.$ 2.6.2: $y(x)=\int\limits_{2}^{x} (2-x+t)y(t)dt+$

$2x-9$. 2.6.3: $y(x)=\int\limits_0^x (y(t)\sin x - e^x(x-t))dt + e^x(x-1)-\sin x + x$.
2.6.4: $y(x)=e^x-x-\frac{1}{2}\int\limits_0^x x(x-t)^2\,y(t)dt$. 2.6.5: $y(x)==e^x(x+1)$. 2.6.6: $y(x)=e^{x^2/2}$. 2.6.7: $y(x)=\frac{1}{1+x^2}+x\,\mathrm{arctg}\,x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$. 2.6.8: $y(x)= =\cos x\; e^{-(x+\sin x)}$. 2.6.9: $y(x)=2e^x-2\cos x+5\sin x$. 2.6.10: $y(x)=-e^{-x}$. 2.6.11: $y(x)=\frac{1}{6}\left(e^x+3\cos x+3\sin x-4e^{-x/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$. 2.6.12: $y(x)=1$. 2.6.13: $y(x)=x\,\mathrm{ch}\,x$. 2.6.14: $y(x)=\frac{1}{4}e^x+\frac{1}{4}e^{\frac{-x}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\sin\frac{\sqrt{7}}{2}x+3\cos\frac{\sqrt{7}}{2}x\right)$.

2.7 Уравнения типа свертки

Определение: Уравнение Вольтерра вида

$$y(x)=\int\limits_0^x \mathrm{K}(x-t)y(t)dt+f(x). \tag{2.20}$$

называется уравнением типа свертки.

Будем предполагать, что ядро K,функция f и неизвестная функция y определены на промежутке $[a,\infty)$. Кроме того, будем для удобства считать, что $a=0$. Этого всегда можно добиться, сделав замену $\overline{x}=x-a,\ \ \overline{t}=t-a.$

Предположим, что функции $f(x)$ и $\mathrm{K}(t)$ являются оригиналами для изображений при преобразовании Лапласа. В этом случае решение уравнения (2.20) тоже является оригиналом. Используя символ свертки, уравнение (2.20) можно переписать в виде

$$y(x)=\mathrm{K}*y(x)+f(x). \tag{2.21}$$

Применим к обеим частям уравнения (2.21) преобразование Лапласа. Если $y(x)\risingdotseq \mathrm{Y}(p), f(x)\risingdotseq \mathrm{F}(p), \mathrm{K}(u)\risingdotseq \overline{\mathrm{K}}(p)$, то по свойствам преобразования Лапласа

$$\mathrm{Y}(p)=\overline{\mathrm{K}}(p)\mathrm{Y}(p)+\mathrm{F}(p),$$

откуда

$$\mathrm{Y}(p) = \frac{\mathrm{F}(p)}{1 - \overline{\mathrm{K}}(p)}.$$

Решение уравнения (2.20) находим восстановлением оригинала по изображению $\mathrm{Y}(p)$.

Пример. Решить интегральное уравнение

$$y(x) = 1 + \int\limits_0^x \operatorname{ch}(x-t)y(t)dt.$$

Решение. Применим к уравнению преобразование Лапласа, заметив, что $1 \risingdotseq \frac{1}{p}$, $\operatorname{ch} u \risingdotseq \frac{p}{p^2-1}$.

$$\mathrm{Y}(p) = \frac{1}{p} + \frac{p}{p^2-1}\mathrm{Y}(p).$$

Отсюда

$$\mathrm{Y}(p) = \frac{p^2-1}{p(p^2-p-1)} = \frac{1}{p} + \frac{1}{(p-1/2)^2 - 5/4}.$$

Полученное изображение имеет оригинал

$$y(x) = 1 + \frac{2}{\sqrt{5}} e^{\frac{x}{2}} \operatorname{sh} \frac{\sqrt{5}}{2} x,$$

который и является решением данного интегрального уравнения.

Задачи

Решить уравнения типа свертки.

2.7.1. $y(x) = e^x - x - 1 + \int\limits_0^x y(t)\,dt.$

2.7.2. $y(x) = \frac{x^2}{2} + \int\limits_0^x (x-t)\,y(t)\,dt.$

2.7.3. $y(x) = xe^{2x} - \int\limits_0^x e^{2(x-t)}\,y(t)\,dt.$

2.7.4. $y(x)=\sin x+\int\limits_0^x \cos(x-t)\,y(t)\,dt.$

2.7.5. $y(x)=e^x+\int\limits_0^x \sin(x-t)\,y(t)\,dt.$

2.7.6. $y(x)=\sin x-\int\limits_0^x \mathrm{sh}(x-t)\,y(t)\,dt.$

2.7.7. $y(x)=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{2}\int\limits_0^x (x-t)^2\,y(t)\,dt.$

2.7.8. $y(x)=e^{2x}+\int\limits_0^x te^t\,y(x-t)\,dt.$

2.7.9. $y(x)=1+\int\limits_0^x \cos t\sin t\,y(x-t)\,dt.$

2.7.10. $y(x)=1+x\cos x-\sin x+\int\limits_0^x t\sin t\,y(x-t)\,dt.$

Ответы: 2.7.1: $y(x)=e^x(x-1)+1$. 2.7.2: $y(x)=\mathrm{ch}\,x-1$. 2.7.3: $y(x)=$ $=e^{2x}-e^x$. 2.7.4: $y(x)=\dfrac{2}{\sqrt{3}}e^{\frac{x}{2}}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$. 2.7.5: $y(x)=2e^x-x-1$; 2.7.6: $y(x)=$ $2\sin x-x$. 2.7.7: $y(x)=\dfrac{1}{3}e^x-\dfrac{2}{3}e^{\frac{-x}{2}}\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+\dfrac{\pi}{6}\right)$. 2.7.8: $y(x)=\dfrac{1}{4}e^{2x}(2x+$ $3)+\dfrac{1}{4}$. 2.7.9: $y(x)=\dfrac{4}{3}-\dfrac{1}{3}\cos\sqrt{3}x$. 2.7.10: $y(x)=1$.

2.8 Характеристические числа и собственные функции. Уравнения Фредгольма 2-го рода с симметричными ядрами.

Если для некоторого числа λ ненулевая функция $y(x)$ является решением однородного уравнения Фредгольма

$$y(x) = \lambda \int\limits_a^b \mathrm{K}(x,t)\, y(t)\, dt, \tag{2.22}$$

то это число называется характеристическим числом ядра $\mathrm{K}(x,t)$, число $\mu = \lambda^{-1}$ – собственным числом ядра $\mathrm{K}(x,t)$, а $y(x)$ – собственной функцией, соответствующей характеристическому числу λ.

Заметим, что из определения следует неравенство $\lambda \neq 0$ для характеристического числа.

2.8.1 Случай вырожденного ядра

Если ядро уравнения вырождено: $\mathrm{K}(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{m} p_k(x) q_k(t)$, то уравнение (2.22) для собственных функций равносильно (теорема на с.32) тому, что столбец $\mathrm{C} = (c_1, c_2, \ldots, c_m)^\top$ является решением однородной системы алгебраических уравнений

$$(\mathrm{A} - \lambda^{-1}\mathrm{E})\mathrm{C} = 0, \text{ где } \mathrm{A} = (a_{ij}),\ a_{ij} = \int\limits_a^b q_i(x) p_j(x)\, dx.$$

Таким образом, собственные числа уравнения с вырожденным ядром являются собственными числами матрицы A, а собственные функции определяются равенствами

$$y(x) = \sum_{k=1}^{m} c_k p_k(x),$$

где $\mathrm{C} = (c_1, c_2, \ldots, c_m)^\top$ – собственный вектор матрицы A, отвечающий собственному значению λ^{-1}.

2.8.2 Симметричное ядро. Метод Фурье решения интегральных уравнений.

Ядро $K(x,t)$ интегрального уравнения Фредгольма называется симметричным, если $K(x,t) \equiv K(t,x)$. Если ядро уравнения

$$y(x) = \lambda \int\limits_a^b K(x,t) y(t)\,dt + f(x) \tag{2.1}$$

симметрично и удовлетворяет условию

$$\int\limits_a^b \int\limits_a^b |K(x,t)|^2\,dxdt < \infty,$$

то в случае, когда λ не является характеристическим числом, решение уравнения (2.1) можно найти следующим образом. Пусть $(y_n(x); \lambda_n)$—последовательность, в которой:

1) $y_n(x)$ – собственная функция, соответствующая характеристическому числу λ_n;

2) количество собственных функций в этой последовательности, отвечающих одному и тому же характеристическому числу равно рангу этого числа, т.е. количеству линейно независимых функций, соответствующих этому характеристическому числу;

3) последовательность функций $y_n(x)$ ортонормирована

$$\int\limits_a^b y_n(x) y_m(x)\,dx = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n; \\ 1, & \text{если } m = n. \end{cases}$$

В этом случае, согласно методу Фурье, решение уравнения (2.1) можно найти по формуле

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\lambda_n - \lambda} y_n(x), \tag{2.23}$$

где

$$f_n = \int\limits_a^b f(x) y_n(x)\,dx, n = 1, 2, \ldots \tag{2.24}$$

В этом подходе наиболее трудной частью решения интегрального уравнения является нахождение собственных функций и характеристических чисел его ядра. Иногда это можно сделать, сводя уравнение (2.22) для собственных функций к краевым задачам.

Пример. Найти характеристические числа и собственные функции ядра

$$\mathrm{K}(x,t)=\begin{cases}(t-1)x, & \text{если } \ 0\leqslant x\leqslant t;\\ t(x-1), & \text{если } \ t\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

Решение. Заметим вначале, что ядро $\mathrm{K}(x,t)$ симметричное. Перепишем уравнение (2.22) в следующем виде:

$$y(x)=\lambda\left(\int\limits_0^x \mathrm{K}(x,t)y(t)\,dt+\int\limits_x^1 \mathrm{K}(x,t)y(t)\,dt\right)=$$

$$=\lambda\left(\int\limits_0^x t(x-1)y(t)\,dt+\int\limits_x^1 (t-1)xy(t)\,dt\right)=$$

$$=\lambda(x-1)\left(\int\limits_0^x ty(t)\,dt+x\int\limits_x^1 (t-1)y(t)\,dt\right). \tag{2.25}$$

Продифференцируем равенство (2.25) дважды:

$$y'(x)=$$

$$\lambda\left(\int\limits_0^x ty(t)dt+(x-1)xy(x)+\int\limits_x^1 (t-1)y(t)dt-x(x-1)y(x)\right)=$$

$$\lambda\left(\int\limits_0^x ty(t)dt+\int\limits_x^1 (t-1)y(t)dt\right).$$

$$y''(x)=\lambda(xy(x)-(x-1)y(x))=\lambda y(x).$$

Таким образом, собственные функции ядра $\mathrm{K}(x,t)$ являются решениями дифференциального уравнения 2-го порядка

$$y''=\lambda y. \tag{2.26}$$

Из равенства (2.25) следует, что $y(0)=y(1)=0$. Исследуем решения полученной краевой задачи в зависимости от значений λ.

1) $\lambda>0$. Общее решение уравнения (2.26) имеет вид

$$y=C_1e^{-\sqrt{\lambda}x}+C_2e^{\sqrt{\lambda}x}.$$

Условия $y(0)=y(1)=0$ равносильны системе уравнений

$$\begin{cases}C_1+C_2=0;\\ C_1e^{-\sqrt{\lambda}}+C_2e^{\sqrt{\lambda}}=0.\end{cases}$$

Определитель системы $\Delta=2\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}\neq 0$, откуда следует, что собственных функций при $\lambda>0$ ядро не имеет, так как все решения соответствующей краевой задачи равны нулю.

2) $\lambda<0$, или $\lambda=-\omega^2,\omega\neq 0$. В этом случае общее решение уравнения (2.26) имеет вид

$$y=C_1\cos\omega x+C_2\sin\omega x.$$

Краевые условия $y(0)=y(1)=0$ приводят к системе уравнений

$$\begin{cases}C_1=0;\\ C_2\sin\omega=0.\end{cases}$$

Эта система имеет ненулевые решения при $\omega=\pi n, n=1,2,\ldots$

Итак, характеристические числа $\lambda_n=\pi^2n^2$; соответствующие им собственные функции

$$y_n(x)=c_n\sin\pi nx, c_n\neq 0.$$

Условия ортонормированности

$$\int\limits_0^1 y_n(x)y_m(x)\,dx=\begin{cases}0, & \text{если}\ \ m\neq n;\\ 1, & \text{если}\ \ m=n\end{cases}$$

будут выполнены, если положить $c_n = \sqrt{2}$. Таким образом, последовательность $(y_n(x), \lambda_n) = (\sqrt{2}\sin\pi nx; -\pi^2 n^2)$ построена.

Пример. Решить уравнение

$$y(x) - \lambda \int_0^{\pi} \frac{1}{2}\sin|x-t| y(t)\,dt = 1, (\lambda \neq 1 - 4n^2, n \in \mathrm{N}).$$

Решение. Очевидно, что ядро $\mathrm{K}(x,t) = \frac{1}{2}\sin|x-t|$ симметрично. Найдем характеристические числа и собственные функции.

Перепишем уравнение

$$y(x) = \lambda \int_0^{\pi} \mathrm{K}(x,t) y(t)\,dt$$

для собственных функций

$$y(x) = \lambda\left(\int_0^{x} \frac{1}{2}\sin(x-t)y(t)\,dt + \int_x^{\pi} \frac{1}{2}\sin(t-x)y(t)\,dt\right). \tag{2.27}$$

Продифференцируем уравнение (2.25) дважды

$$y'(x) = \lambda\left(\int_0^{x} \frac{1}{2}\cos(x-t)y(t)\,dt - \int_x^{\pi} \frac{1}{2}\cos(t-x)y(t)\,dt\right); \tag{2.28}$$

$$y''(x) = \\ = \frac{\lambda}{2}\left(y(x) - \int_0^{x} \sin(x-t)y(t)\,dt - \int_x^{\pi} x\sin(t-x)y(t)\,dt\right) + \frac{1}{2}y(x). \tag{2.29}$$

Из соотношений (2.27) и (2.29) следует, что

$$y''(x) = -y(x) + \lambda y(x).$$

Подстановка в (2.28) и (2.29) значений $x = 0$ и $y = 0$ дает

$$y(0) = \frac{\lambda}{2}\int_0^{\pi} \sin t\, y(t)\,dt; y(\pi) = \frac{\lambda}{2}\int_0^{\pi} \sin t y(t) dt;$$

$$y'(0) = -\frac{\lambda}{2} \int_0^\pi \cos t y(t) dt; y'(\pi) = -\frac{\lambda}{2} \int_0^\pi \cos t y(t) dt.$$

Итак, собственные функции ядра $K(x,t)$ являются решениями следующей задачи:

$$y'' + y = \lambda y; y(0) = y(\pi), y'(0) = y'(\pi). \tag{2.30}$$

Рассмотрим возможные случаи.

1) $\lambda > 1$. В этом случае общее решение дифференциального уравнения в (2.30)

$$y = C_1 e^{-\sqrt{\lambda-1}x} + C_2 e^{\sqrt{\lambda-1}x}.$$

Краевые условия дают для C_1 и C_2 систему

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = C_1 e^{-\pi\sqrt{\lambda-1}} + C_2 e^{\pi\sqrt{\lambda-1}}; \\ -C_1 + C_2 = -C_1 e^{-\pi\sqrt{\lambda-1}} + C_2 e^{\pi\sqrt{\lambda-1}}. \end{cases}$$

Определитель этой системы уравнений равен $\Delta = 4(1 - \operatorname{ch}\pi\sqrt{\lambda-1}) = 8\operatorname{sh}^2\pi\sqrt{\lambda-1}$. Так как $\lambda > 1$,т о $\Delta \neq 0$ и, следовательно, собственных функций нет.

2) $\lambda = 1$. Общее решение уравнения задачи (2.30)

$$y = C_1 + C_2 x.$$

Так как $y(0) = y(\pi)$, то $C_2 = 0$. Пространство решений задачи (2.30) одномерно: $y(x) = C$. Условие нормировки $\int_0^\pi y^2(x)dx = 1$ дает пару $(y_1(x); \lambda_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}; 1\right)$.

3) $\lambda - 1 = -\omega^2 < 0, \omega.0$. В этом случае общее решение уравнения задачи (2.30) $y = C_1 \cos\omega x + C_2 \sin\omega x$. Краевые условия

$$\begin{cases} C_1 = C_1 \cos\omega\pi + C_2 \sin\omega\pi; \\ C_2 = -C_1 \sin\omega\pi + C_2 \cos\omega\pi. \end{cases}$$

Определитель этой системы $\Delta = 2(1-\cos\omega\pi)$. Ненулевое решение существует при условии $\cos\omega\pi = 1$, то есть $\omega = 2n, n = 1,2,\ldots$ В этом случае ранг системы равен нулю и решением является произвольная пара (C_1, C_2). Характеристическому числу $\lambda = 1-4n^2, n = 1,2,\ldots$ соответствуют собственные функции $C_1\cos 2nx$ и $C_2\sin 2nx$.

Определим пары $(y_n(x); \lambda_n)$ равенствами

$$\lambda_{2m} = 1-16m^2; \quad y_{2m}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos 4mx; m = 1,2,\ldots$$

$$\lambda_{2m+1} = 1-16m^2; \quad y_{2m+1}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin 4mx;\ m = 1,2,\ldots$$

$$\lambda_1 = 1; \quad y_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Построенная последовательность $(y_n(x)\ ;\ \lambda_n)$ удовлетворяет условиям (1)–(3), сформулированным в начале параграфа. Построим решение интегрального уравнения по формуле (2.23). В нашем случае $f(x) \equiv 1$ и, в соответствии с (2.24),

$$f_n = \int\limits_0^b f(x)y_n(x)dx = \begin{cases}\sqrt{\pi}, & \text{если } n = 1;\\ 0, & \text{если } n = 2,3,\ldots\end{cases}$$

Следовательно, решение

$$y(x) = f(x) + \lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n}{\lambda_n-\lambda}y_n(x) = 1+\lambda\frac{\sqrt{\pi}}{1-\lambda}\frac{1}{\sqrt{\pi}} \equiv \frac{1}{1-\lambda},$$

Задачи

Найти характеристические числа и собственные функции.

2.8.1. $K(x,t) = \begin{cases}-x, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant t;\\ -t, & \text{если } t \leqslant x \leqslant 1.\end{cases}$

2.8.2. $K(x,t) = \begin{cases}-x-1, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant t;\\ -t-1, & \text{если } t \leqslant x \leqslant 1.\end{cases}$

2.8.3. $K(x,t) = \begin{cases}\cos t\sin x, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant t;\\ \sin t\cos x, & \text{если } t \leqslant x \leqslant \pi.\end{cases}$

2.8.4. $K(x,t) = \begin{cases} \sin t \cos x, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant t; \\ \cos t \sin x, & \text{если } t \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$

2.8.5. $K(x,t) = \begin{cases} \dfrac{\sin(t-1)\sin x}{\sin 1}, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant t; \\ \dfrac{\sin t \sin(x-1)}{\sin 1}, & \text{если } t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

2.8.6. $K(x,t) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh}(t-1)\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 1}, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant t; \\ \dfrac{\operatorname{sh} t \operatorname{sh}(x-1)}{\operatorname{sh} 1}, & \text{если } t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

2.8.7. $K(x,t) = \begin{cases} -e^{-t}\operatorname{ch} x, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant t; \\ -e^{-x}\operatorname{ch} t, & \text{если } t \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$

Найти решения интегральных уравнений методом Фурье. (Сведения о характеристических числах и собственных функциях в № 2.8.1–2.8.7 и в примерах в тексте).

2.8.8. $y(x) = \lambda \int\limits_0^1 K(x,t)y(t)dt + 1,$

$\lambda \neq -\pi^2 n^2$, $n \in \mathrm{N}$.

$K(x,t) = \begin{cases} (t-1)x, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant t; \\ (x-1)t, & \text{если } t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

2.8.9. $y(x) = \lambda \int\limits_0^1 K(x,t)y(t)dt + \sin \pi x \cos \dfrac{\pi x}{2},$

$\lambda \neq \dfrac{-\pi^2}{4}(2n+1)^2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

$K(x,t) = \begin{cases} -x, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant t; \\ -t, & \text{если } t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

2.8.10. $y(x) = \lambda \int\limits_0^\pi K(x,t)y(t)dt + x - \pi,$

$\lambda \neq 1 - \left(\dfrac{2n+1}{2}\right)^2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

$K(x,t) = \begin{cases} \sin t \cos x, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant t; \\ \cos t \sin x, & \text{если } t \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$

Ответы: 2.8.1: $\lambda_n = -\frac{\pi^2}{4}(2n+1)^2$, $y_n(x) = \sin\pi\frac{2n+1}{2}x$, $n = 0, 1, 2, \dots$

2.8.2: $\lambda_n = -\omega_n^2$, $y_n(x) = \cos\omega_n(x-1)$, $n \in \mathrm{N}$. ω_n – корни уравнения $\omega = \operatorname{ctg}\omega$.

2.8.3: $\lambda_n = -1 + \left(\frac{2n+1}{2}\right)^2$, $y_n(x) = \sin\frac{2n+1}{2}x$, $n = 0, 1, 2, \dots$

2.8.4: $\lambda_n = 1 - \left(\frac{2n+1}{2}\right)^2$, $y_n(x) = \cos\frac{2n+1}{2}x$, $n = 0, 1, 2, \dots$

2.8.5: $\lambda_n = 1 - \pi^2 n^2$, $y_n(x) = \sin\pi n x$, $n \in \mathrm{N}$.

2.8.6: $\lambda_n = -1 - \pi^2 n^2$, $y_n(x) = \sin\pi n x, n \in \mathrm{N}$.

2.8.7: $\lambda_n = 1 + \omega_n^2$, $y_n(x) = \cos\omega_n x$, $n \in \mathrm{N}$.

ω_n – корни уравнения $\omega = \operatorname{ctg} 2\omega$.

2.8.8: $y(x) = 1 + \lambda\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_{2k+1}-\lambda}\frac{4\sin\pi(2k+1)x}{\pi(2k+1)}$.

2.8.9: $y(x) = \sin\pi x\cos\frac{\pi x}{2} - \frac{\lambda}{2}\left(\frac{\sin\frac{\pi x}{2}}{\lambda+\frac{\pi^2}{4}} + \frac{\sin\frac{3\pi x}{2}}{\lambda+\frac{9\pi^2}{4}}\right)$.

2.8.10: $y(x) = x - \pi + \lambda\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\left(\frac{2}{2n+1}\right)^2}{\lambda-\lambda_n}\cos\frac{2n+1}{2}x$.

Глава 3

Вариационное исчисление

3.1 Функционалы. Задачи вариационного исчисления.

Вариационное исчисление – раздел математического анализа, посвященный методам исследования на экстремум числовых функций, областями определения которых являются, в свою очередь, некоторые множества функций, заданных на промежутке, или, более общо, на некотором подмножестве пространства R^n. Такие числовые функции называют по традиции функционалами, оставляя термин «функция» для отображений подмножеств R^n.

Многие законы механики и физики сводятся к утверждению, что некоторый функционал в рассматриваемом процессе достигает экстремума. В такой формулировке эти законы называются вариационными принципами механики или физики. Например: принцип наименьшего действия; законы сохранения энергии, импульса, количества движения; различные вариационные принципы классической и релятивистской теории поля; принцип Ферма в оптике и т.д.

Большое влияние на развитие вариационного исчисления оказали следующие три задачи:

1) Найти кривую, соединяющую две заданные точки A и B, не лежащие на одной вертикальной прямой, и обладающую тем свойством, что материальная точка под действием силы тяжести скатится по этой кривой из точки A в точку B за кратчайшее время. Оказалось, что линией наискорейшего ската является циклоида.

2) На некоторой поверхности $S : F(x,y.z) = 0$ заданы две точки. Требует-

ся найти кривую наименьшей длины, соединяющую эти две точки (задача о нахождении геодезической).

3) Требуется найти замкнутую кривую заданной длины l, ограничивающую максимальную площадь S. (Изопериметрическая задача).

Простейшая задача вариационного исчисления состоит в том, чтобы среди функций $y(x)$, непрерывных на отрезке $[a,b]$ вместе со своими производными, найти ту, на которой функционал

$$\mathrm{I}[y] = \int\limits_a^b \mathrm{F}(x,y,y')dx \tag{3.1}$$

достигает своего экстремального (наибольшего или наименьшего) значения. В такой постановке задача может не иметь единственного решения и простейшую задачу вариационного исчисления формулируют более точно так:

Найти функцию, которая среди всех функций, удовлетворяющих требованию

$$y(a) = \mathrm{A},\ y(b) = \mathrm{B}, \tag{3.2}$$

доставляет функционалу (3.1) экстремум.

В этой задаче A и B – заданные числа. Заметим,что задача вариационного исчисления будет далее рассматриваться в *локальной* постановке. Это означает, что возможный экстремум функционала $\mathrm{I}[y]$, т. е. функция $y(x)$, является минимумом или максимумом только в некоторой окрестности функции $y(x)$, иными словами – только среди функций, достаточно близких к $y(x)$. Если эта близость измеряется для непрерывных функций $y(x)$ и $y_1(x)$ числом (нормой)

$$\|y-y_1\|_{\mathrm{C}[a,b]} = \max_{x\in[a,b]} |y(x)-y_1(x)|,$$

то в этом случае говорят, о сильном экстремуме, если же окрестность функции $y(x)$ определяется малостью величины

$$\|y-y_1\|_{\mathrm{C}^1[a,b]} = \left\|y'-y_1'\right\|_{\mathrm{C}[a,b]} + \|y-y_1\|_{\mathrm{C}[a,b]},$$

то в этом случае говорят о слабом экстремуме. Задача нахождения слабого экстремума несколько легче, и далее в тексте слово «экстремум» следует понимать как «слабый экстремум». Символ $\|.\|$ будем считать сокращением Для $\|.\|_{\mathrm{C}^1[a,b]}$.

Пример простейшей задачи вариационного исчисления.

Найти функцию $y = f(x)$, $x \in [a,b]$, принимающую на концах отрезка $[a,b]$ заданные значения $f(a) = \mathrm{A}$, $f(b) = \mathrm{B}$, график которой при вращении вокруг оси $\mathrm{O}x$ даст поверхность с наименьшей площадью.

Используя формулу из математического анализа для площади поверхности тела вращения, эту задачу можно переформулировать так: среди функций $y(x)$, непрерывных на $[a,b]$ вместе со своими производными, найти ту, которая доставляет минимум функционалу

$$\mathrm{S}[y] = 2\pi \int\limits_a^b y\sqrt{1+y'^2}dx, \quad y(x) \geqslant 0 \text{ на } [a,b]$$

при условиях

$y(a) = \mathrm{A}, y(b) = \mathrm{B}.$

Условия $y(a) = \mathrm{A}, y(b) = \mathrm{B}$ называются краевыми условиями. В задачах вариационного исчисления они могут быть и другими, например,

$$\alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = \mathrm{A} \tag{3.3}$$

$$\alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = \mathrm{B}. \tag{3.4}$$

Условия такого типа, не связывающие между собой значения функции и ее производных в разных точках, называются локальными.

3.2 Вариация функционала. Уравнения Эйлера. Экстремали.

Рассмотрим простейшую задачу вариационного исчисления (3.1–3.2) для функционала $\mathrm{I}[y]$. Пусть $y(x)$ – функция его области определения, $h(x)$ функция с конечной нормой

$$\|h\| = \|h\|_{\mathrm{C}^1[a,b]},$$

удовлетворяющая условиям $h(a) = h(b) = 0$. Тогда $y(x) + h(x)$ – снова функция из области определения $\mathrm{I}[y]$ и имеет смысл приращение

$$\Delta\mathrm{I}[y] = \mathrm{I}[y+h] - \mathrm{I}[y]$$

функционала $\mathrm{I}[y]$, соответствующее h.

Определение. Если для приращения $\Delta\mathrm{I}[y]$ функционала имеет место представление

$$\Delta\mathrm{I}[y] = \mathrm{L}[h] + o(||h||),$$

с линейным непрерывным функционалом $\mathrm{L}[h]$, то $\mathrm{I}[y]$ называется *дифференцируемым* на функции $y(x)$, и $\mathrm{L}[h]$ называется его (первой) *вариацией*. *

*Напомним,что линейность означает выполнение равенства $\mathrm{L}[c_1h_1 + c_2h_2] = c_1\mathrm{L}[h_1] + c_2\mathrm{L}[h_2]$ для любых приращений h_1 и h_2 и любых постоянных c_1 и c_2.

Можно показать, что для дифференцируемого функционала вариация единственна. Она обозначается $\delta_y[h]$.

Необходимое условие экстремума. Если функция $y(x)$ доставляет функционалу $\mathrm{I}[y]$ экстремум, то $\delta_y[h] = 0$ для любого приращения h.

Пример. $\mathrm{I}[y] = \int\limits_a^b (y^2 + y'^2)dx, \quad y(a) = \mathrm{A}, y(b) = \mathrm{B}.$

Приращение $\Delta\mathrm{I}[y] = \int\limits_a^b \left((y+h)^2 + (y+h)'^2\right) dx - \int\limits_a^b (y^2 + y'^2)dx =$

$$= 2\int\limits_a^b (yh + y'h')dx + \int\limits_a^b \left(h^2 + h'^2\right) dx = 2\int\limits_a^b yhdx + 2y'(x)h(x)\Big|_a^b -$$

$$-2\int\limits_a^b y''hdx + o(\|h\|) = 2\int\limits_a^b (y - y'')hdx + o(\|h\|).$$

Таким образом, рассматриваемый функционал имеет вариацию

$$\delta_y[h] = 2\int\limits_a^b \left(yh + y'h'\right) dx$$

для любой функции $y(x)$ области определения. Если же эта функция имеет вторую производную, то

$$\delta_y[h] = 2\int\limits_a^b \left(y - y''\right) hdx$$

Необходимое условие экстремума переписывается для такой функции в виде дифференциального уравнения $\quad y - y'' = 0.$

Теорема 1. Если $y(x)$ - функция, доставляющая экстремум функционалу $\mathrm{I}[y] = \int\limits_a^b \mathrm{F}(x,y,y')dx$ при условиях (3.2) (или, более общо, (3.3)), а F - дважды дифференцируемая функция своих аргументов и $\dfrac{\partial^2\mathrm{F}}{\partial y'^2} \neq 0$, то $y(x)$ дважды дифференцируема и удовлетворяет *уравнению Эйлера*

$$\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial y'}(x,y,y')\right) = 0 \tag{3.5}$$

Решения уравнения Эйлера (3.4) называются *экстремалями*. Частные случаи.

1. F зависит только от y'. Уравнение Эйлера $-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}(y')\right)=0$, или $F''\left(y'\right)y''=0$.

Так как $F''\left(y'\right)\neq 0$, то $y''=0$. Экстремали могут быть только функциями $y=c_1x+c_2$, где c_1 и c_2 - постоянные.

2. $F=F(x,y')$, то есть F не зависит от y. Уравнение Эйлера
$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0,$

что равносильно уравнению первого порядка $\frac{\partial F}{\partial y'}=c_1$, где c_1 - произвольная постоянная.

3. $F=F(y,y')$. Если уравнение Эйлера (3.4) умножить на y', то получим

$$y'\frac{\partial F}{\partial y}-\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y'}y'^2+\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}y'y''\right)=0$$

Это уравнение можно записать в виде

$$\frac{d}{dx}\left(F-y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0,$$

которое равносильно уравнению первого порядка

$$F-y'\frac{\partial F}{\partial y'}=c_1, \tag{3.6}$$

c_1 - произвольная постоянная.

Пример. Вернемся к рассмотренному ранее примеру функционала

$$S[y]=2\pi\int\limits_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Найдем вид экстремалей этого функционала, используя уравнение (3.5)

$$y\sqrt{1+y'^2}-\frac{yy'^2}{\sqrt{1+y'^2}}=c_1,$$

или, что то же самое,

$$\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}}=c_1. \tag{3.7}$$

Проще всего найти решение этого уравнения в параметрическом задании, положив $y\prime=\operatorname{sh}t$. Тогда из уравнения (3.6) $y=c_1\operatorname{ch}t$. Далее: $\frac{dx}{dt}=\frac{dx}{dy}\frac{dy}{dt}=\frac{c_1}{y'}\operatorname{sh}t=c_1$, откуда $x=c_1t+c_2$. Таким образом $\begin{cases} x=c_1t+c_2; \\ y=c_1\operatorname{ch}t. \end{cases}$ или $y=c_1\operatorname{ch}\frac{x-c_2}{c_1}$.

Задачи

Найти общий вид экстремалей функционалов, предполагая краевые условия локальными.

3.2.1. $\displaystyle\int\limits_a^b \left(y + \frac{1+x^2}{2}y' + x^2y'^2\right)dx, \quad 0 < a < b.$

3.2.2. $\displaystyle\int\limits_0^1 \left(y + 2xy' + y'^2\right)dx, \quad y(0) = y_0, \quad y(1) = y_1.$

3.2.3. $\displaystyle\int\limits_a^b \left(y'^2 - 4y^2\right)dx.$

3.2.4. $\displaystyle\int\limits_a^b \left(e^{2y} + 2y'^2\right)dx.$

3.2.5. $\displaystyle\int\limits_a^b \frac{1+y^2}{y'}dx.$

3.2.6. $\displaystyle\int\limits_a^b \left(y^2 - 2y\cos x - y'^2\right)dx.$

3.2.7. $\displaystyle\int\limits_a^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}dx.$

3.2.8. $\displaystyle\int\limits_a^b \left(x^2y'^2 + 12y^2\right)dx, \quad 0 < a < b.$

Ответы: 3.2.1: $y = \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{4} + c_1\right) + \dfrac{1}{2}\ln x - \dfrac{x}{4} + c_2$;
3.2.2: $y = -\dfrac{x^2}{4} + x\left(y_1 - y_0 + \dfrac{1}{4}\right) + y_0$; 3.2.3: $y = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x$;
3.2.4: $y = \ln c - \ln\cos(cx + c_1)$;
3.2.5: $y = \operatorname{tg}(cx + c_1)$; 3.2.6: $y = c_1\cos x + c_2\sin x + \dfrac{x}{2}\sin x$;
3.2.7: $y = \pm\sqrt{c_1 - (x + c_2)^2}$; 3.2.8: $y = c_1x^3 + \dfrac{c_2}{x^4}$.

3.3 Уравнение Якоби. Достаточные условия экстремума функционала.

Достаточные условия экстремума рассмотрим только для простейшей задачи вариационного исчисления,т.е.задачи отыскания экстремумов функционала

$$\mathrm{I}[y] = \int_a^b \mathrm{F}(x,y,y')dx \tag{3.8}$$

при краевых условиях

$$y(a) = \mathrm{A},\ y(b) = \mathrm{B}, \tag{3.9}$$

Предположим,что функция F имеет непрерывные частные производные до третьего порядка, $y(x)$ – экстремаль функционала (3.1), удовлетворяющая краевым условиям (3.2).

Определение. Линейное дифференциальное уравнение второго порядка для функции $u(x)$

$$\left(\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial y^2} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial y \partial y'}\right)\right)u - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial y'^2}u'\right) = 0 \tag{3.10}$$

называется *уравнением Якоби*.

Пусть $u(x)$ – решение уравнения Якоби,удовлетворяющее условиям $u(a) = 0$; $u'(a) = 1$.

Определение. Точка $x_0 \in (a,b]$ называется сопряженной, если $u(x_0) = 0$.

Исследовать характер экстремали $y(x)$ простейшей задачи вариационного исчисления можно с помощью следующей теоремы:

Теорема 2.

1. Если экстремаль $y(x)$ доставляет минимум (максимум) функционалу (3.1) при краевых условиях (3.2), то

1) $\dfrac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial y'^2}\big(x,y(x),y'(x)\big) \geqslant (\leqslant) 0$ для всех $x \in [a,b]$;

2) на интервале (a,b) нет сопряженных точек.

2. Если для экстремали $y(x)$ функционала (3.1) при краевых условиях (3.2)

1) $\dfrac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial y'^2}\big(x,y(x),y'(x)\big) > (<) 0$ для всех $x \in [a,b]$;

2) на промежутке $(a,b]$ нет сопряженных точек, то $y(x)$ доставляет минимум (максимум) функционалу (3.1).

Пример. Исследовать на экстремум однопараметрическое семейство функционалов

$$\mathrm{I}_\lambda[y] = \int\limits_0^\pi \left(y'^2 + \lambda y^2\right) dx; \quad y(0) = y(\pi) = 0.$$

Решение. Экстремали этого функционала являются решениями уравнения Эйлера $2\lambda y - 2y'' = 0$. Возможны случаи:

1) $\lambda = k^2$, $k \neq 0$. Общее решение уравнения Эйлера $y = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx}$. Краевые условия равносильны системе уравнений

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0; \\ c_1 e^{k\pi} + c_2 e^{-k\pi} = 0 \end{cases}$$ с определителем $\Delta = -2\,\mathrm{sh}\,k\pi$. При $k \neq 0$ $\Delta \neq 0$, поэтому $y \equiv 0$ – единственная экстремаль. Уравнение Якоби имеет вид $2\lambda u - 2u'' = 0$. Его общее решение $u = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx}$. Начальным условиям $u(0) = 0; u'(0) = 1$ удовлетворяет функция $u(x) = \frac{1}{k}\,\mathrm{sh}\,kx$.

На промежутке $(0, \pi]$ $u(x) \neq 0$, поэтому сопряженных точек нет и, так как $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = 2 > 0$, то $y \equiv 0$ дает минимум функционалу.

2) $\lambda = 0$. В этом случае $y \equiv 0$ тоже единственная экстремаль. Решение уравнения Якоби $u'' = 0$ с начальными условиями $u(0) = 0; u'(0) = 1$ имеет вид $u = x$. Сопряженных точек нет, $y \equiv 0$ – минимум функционала.

3) $\lambda = -k^2$, $k > 1$. Решение уравнения Якоби с начальными условиями $u(0) = 0; u'(0) = 1$ имеет вид $u(x) = \frac{1}{k}\sin kx$.

Так как $k > 0$, то на промежутке $(0, \pi)$ есть сопряженные точки. В соответствии с 1-й частью теоремы 3.2 любая экстремаль не дает функционалу ни минимума, ни максимума.

4) $\lambda = -k^2$, $0 < k < 1$. Единственное решение уравнения Эйлера, удовлетворяющее краевым условиям $y \equiv 0$. Решение уравнения Якоби $u(x) = \frac{1}{k}\sin kx \neq 0$ на $(0, \pi]$. Поэтому, в соответствии с теоремой (3.2) экстремаль $y \equiv 0$ дает минимум функционалу.

5) $\Delta = -1$. Экстремалями функционала

$$\mathrm{I}[y] = \int\limits_0^\pi \left(y'^2 - y^2\right) dx$$

являются функции $y = c\sin x, c$ - произвольная постоянная. Средствами математического анализа, выходящими за рамки рассматриваемой темы, можно доказать неравенство

$$\int\limits_0^{\pi} y'^2 dx \geqslant \int\limits_0^{\pi} y^2 dx$$

для произвольных функций, удовлетворяющих условиям $y(0) = y(\pi) = 0$. На экстремалях неравенство (3.8) переходит в равенство,следовательно функционал $\mathrm{I}[y]$ достигает на экстремалях своего минимального значения.

Задачи

Исследовать на экстремум функционалы

3.3.1. $\int\limits_0^{\ln 2} \left(y'^2 + 3y^2\right) e^{2x} dx; \quad y(0) = 0, y(\ln 2) = \frac{15}{8}.$

3.3.2. $\int\limits_0^{\mathrm{T}} \left(y'^2 + y^2 - 4\sin x\right) e^{2x} dx; \quad y(0) = 0, y(\mathrm{T}) = y_1.$

3.3.3. $\int\limits_1^{2} x^2 y'^2 dx; \quad y(1) = 3, y(2) = 1.$

3.3.4. $\int\limits_0^{6} \left(2xy - y'^2\right) dx; \quad y(0) = y(6) = 1.$

3.3.5. $\int\limits_0^{2} \left(xy' + y'^2\right) dx; \quad y(0) = 1, y(2) = 0.$

3.3.6. $\int\limits_0^{a} \left(y'^2 + 2yy' - 16y^2\right) dx; \quad a > 0, \quad y(0) = y(a) = 0.$

3.3.7. $\int\limits_1^{2} y' \left(1 + x^2 y'\right) dx; \quad y(1) = 3, y(2) = 5.$

3.3.8. $\int\limits_{-1}^{2} y' \left(1 + x^2 y'\right) dx; \quad y(-1) = y(2) = 1.$

3.3.9. $\int\limits_{0}^{\pi/4}\left(4y^2+8y-y'^2\right)dx;\quad y(1)=-1,\quad y(\frac{\pi}{4})=0.$

3.3.10. $\int\limits_{0}^{2}\left(x^2y'^2+12y^2\right)dx;\quad y(0)=1,\quad y(2)=8.$

3.3.11. $\int\limits_{0}^{1}\left(y'^2+y^2+2ye^{2x}\right)dx;\quad y(0)=\frac{1}{3}, y(1)=\frac{e^2}{3}.$

3.3.12. $\int\limits_{0}^{\pi/4}\left(y^2-y'^2+6y\sin 2x\right)dx;\quad y(0)=0, y(\frac{\pi}{4})=1.$

3.3.13. $\int\limits_{1}^{2}\frac{x^3}{y'^2}dx;\quad y(0)=1,\quad y(2)=4.$

3.3.14. $\int\limits_{1}^{3}\left(12xy+y'^2\right)dx;\quad y(1)=0, y(3)=26.$

3.3.15. $\int\limits_{0}^{2}\left(y^2+y'^2-2xy\right)dx;\quad y(0)=0, y(2)=3.$

Ответы: 3.3.1: $y=e^x-e^{-3x}$, *минимум.* 3.3.2: $y=\frac{y_1-\sin T}{\operatorname{sh} T}\operatorname{sh} x+\sin x$, *минимум.* 3.3.3: $y=\frac{4}{x}-1$, *минимум.* 3.3.4: $y=\frac{x^3}{6}+6x+1$, *максимум.* 3.3.5: 1) $0<a<\frac{\pi}{4}$, $y\equiv 0$, *минимум*; $y=-\frac{x^2}{4}+1$, *минимум.* 3.3.6: 2) $a>\frac{\pi}{4}$: экстремума нет. 3.3.7: $y=7-\frac{4}{x}$, *минимум.* 3.3.8: $y\equiv 1$, *минимум.* 3.3.9: $y=\sin 2x-1$, *максимум.* 3.3.10: $y=x^3$, *минимум.* 3.3.11: y = $\frac{e^{2x}}{3}$, *минимум.* 3.3.12: $y=\sin 2x$, *максимум.* 3.3.13: $y=x^2$, *минимум.* 3.3.14: $y=x^3-1$, *максимум.* 3.3.15: $y=\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 2}+x$, *минимум.*

3.4 Функционалы, зависящие от производных высших порядков.

Рассмотрим функционал вида

$$\mathrm{I}[y] = \int\limits_a^b \mathrm{F}(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) dx \tag{3.11}$$

В простейшем случае экстремум этого функционала ищут на множестве функций, удовлетворяющих краевым условиям вида

$$y^{(k)}(a) = \mathrm{A}_k, \quad y^{(k)}(b) = \mathrm{B}_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{3.12}$$

Замечание. В более общем случае рассматривается $2n$ краевых условий, связывающих значения функции $y(x)$ и ее производных порядка, меньшего, чем $2n$ в точках a и b.

Теорема 3.Если функция $y(x)$ доставляет экстремум функционалу (3.9) при условиях (3.10) (или более общих, как в замечании локальных условиях), то она является решением дифференциального уравнения Эйлера-Пуассона

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y''}\right) - \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y^{(n)}}\right) = 0. \tag{3.13}$$

Решения уравнения (3.11) называются экстремалями функционала (3.9).

Пример. Найти экстремали функционала

$$\mathrm{I}[y] = \int\limits_0^1 \left(y^2 + y''^2\right) dx$$

при условиях $y(0) = y'(0) = 1, y(1) = 0, y'(1) = 2.$

Решение. Составим уравнение Эйлера-Пуассона $\quad 2y + 2y^{\mathrm{IV}} = 0.$

Его общее решение

$$y = e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(c_1 \cos\frac{x}{\sqrt{2}} + c_2 \sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(c_3 \cos\frac{x}{\sqrt{2}} + c_4 \sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right).$$

Значения c_1 - c_4 находят из краевых условий. Предлагаем сделать это самостоятельно.

Задачи

Найти экстремали функционалов.

3.4.1. $\int\limits_a^b \left(4y^2+5y'^2+y''^2\right)dx;\quad y(a)=\mathrm{A}_0,\quad y'(a)=\mathrm{A}_1,\quad y(b)=\mathrm{B}_0,$ $y'(b)=\mathrm{B}_1.$

3.4.2. $\int\limits_0^1 \left(2xy+y'''^2\right)dx;\quad y^{(k)}(i)=0,\quad i=0,1;\quad k=0,1,2.$

3.4.3. $\int\limits_0^{\pi/2} \left(4y^2-5y'^2+y''^2\right)dx;\quad y(0)=3,\quad y'(0)=4,\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,$ $y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-4.$

3.4.4. $\int\limits_a^b \left(yy'+y'^2+y'y''+y''^2\right)dx;\quad y(a)=\mathrm{A}_0,\quad y'(a)=\mathrm{A}_1,$ $y(b)=\mathrm{B}_0,\quad y'(b)=\mathrm{B}_1.$

3.4.5. $\int\limits_a^b \left(16y^2-y''^2+x^2\right)dx;\quad y(a)=\mathrm{A}_0,\quad y'(a)=\mathrm{A}_1,\quad y(b)=\mathrm{B}_0,$ $y'(b)=\mathrm{B}_1.$

3.4.6. $\int\limits_a^b \left(y''^2+y^2-2y'^2-2y\sin x\right)dx;\quad y(a)=\mathrm{A}_0,\quad y'(a)=\mathrm{A}_1,$ $y(b)=\mathrm{B}_0,\quad y'(b)=\mathrm{B}_1.$

3.4.7. $\int\limits_a^b \left(y'''^2+y^2-2y'^2-2yx^3\right)dx;\quad y(a)=\mathrm{A}_0,\quad y'(a)=\mathrm{A}_1,$ $y(b)=\mathrm{B}_0,\quad y'(b)=\mathrm{B}_1.$

Ответы: 3.4.1: $y=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3e^{2x}+c_4e^{-2x}$. 3.4.2: $y=\frac{1}{5040}\left(x^7-6x^5+8x^4-3x^3\right)$. 3.4.3: $y=2(\cos x+\sin x)+\cos 2x+\sin 2x$. 3.4.4: $y=c_1+c_2x+c_3x^2+c_4x^3$. 3.4.5: $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}+c_3\cos 2x+c_4\sin 2x$. 3.4.6: $y=(c_1+c_2x)\cos x+(c_3+c_4x)\sin x-\frac{x^2\sin x}{4}$. 3.4.7: $y=$

$$c_1e^x + c_2e^{-x} + e^{\frac{\pi}{2}}\left(c_3\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_4\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) +$$
$$+e^{-\frac{\pi}{2}}\left(c_5\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_6\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + x^3.$$

3.5 Функционалы, зависящие от нескольких функций.

Рассмотрим функционал вида

$$\mathrm{I}[y_1, y_2, \ldots, y_n] = \int\limits_a^b \mathrm{F}(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')dx \tag{3.14}$$

зависящий от функций $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$, которые принимают на концах промежутка $[a, b]$ заданные значения (простейшие краевые условия).

Теорема 4. Если набор функций $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ доста вляет функционалу (3.12) экстремум, то этот набор является решением системы дифференциальных уравнений Эйлера

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y_i'}\right) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Решения системы Эйлера называют,как и в предыдущих случаях, экстремалями функционала.

Пример. Найти экстремали функционала

$$\mathrm{I}[y_1, y_2] = \int\limits_a^b \sqrt{1 + y_1'^2 + y_2'^2}dx$$

при простейших краевых условиях.

Решение. Составим систему уравнений Эйлера.

$$\frac{d}{dx}\frac{y_i'}{\sqrt{1 + y_1'^2 + y_2'^2}} = 0, \quad i = 1, 2.$$

Эти уравнения можно один раз проинтегрировать:

$$\frac{y_i'}{\sqrt{1 + y_1'^2 + y_2'^2}} = k_i, \quad i = 1, 2; \quad k_i, - \text{постоянные.}$$

Если эту систему разрешить относительно y_1' и y_2', то решение будет иметь вид $y_1' = c_1, y_2' = c_2$ с произвольными постоянными c_1 и c_2. Общее решение этой простейшей системы дифференциальных уравнений $y_1 = c_1x + c_2, y_2 = c_3x + c_4$. Это общий вид экстремалей. Значения постоянных c_1 - c_4 находятся из краевых условий.

Аналогично находятся – из системы уравнений Эйлера-Пуассона – экстремали функционалов, зависящих от производных высших порядков нескольких функций одной переменной $x \in [a,b]$.

Задачи

Найти решения системы уравнений Эйлера-Пуассона для функционалов.

3.5.1. $\int\limits_a^b \left(2y_1\cos x + 2y_2^2 + 2y_1'y_2' + y_1'^2 - y_2'^2\right)dx.$

3.5.2. $\int\limits_a^b \left(2y_1y_2 + y_1'^2 + y_2'^2\right)dx.$

3.5.3. $\int\limits_a^b \left(y_1^2 + \left(y_1y_2' + y_1'y_2\right)\sin\left(y_1y_2 - y_1'^2 + y_2'^2\right)\right)dx.$

3.5.4. $\int\limits_a^b \left(2yz - 2y^2 + y'^2 - z'^2\right)dx.$

Ответы: 3.5.1: $y_1 = -\frac{x}{2}\sin x - \cos x - c_1\cos x - c_2\sin x + c_3x + c_4, y_2 = -\frac{x}{2}\sin x + c_1\cos x + c_2\sin x$. 3.5.2: $y_1 = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3\cos x + c_4\sin x$, $y_2 = c_1e^x + c_2e^{-x} - c_3\cos x - c_4\sin x$. 3.5.3: $y_1 = c_1\cos x + c_2\sin x, y_2 = c_3x + c_4$. 3.5.4: $y = (c_1x + c_2)\cos x + (c_3x + c_4)\sin x$, $z = 2y + y'' = \dots$

3.6 Условный экстремум. Изопериметрическая задача.

Рассмотрим функционал (3.12)

$$\mathrm{I}[y_1,y_2,\dots,y_n] = \int\limits_a^b \mathrm{F}(x,y_1,y_2,\dots,y_n,y_1',y_2',\dots,y_n')dx$$

Задача нахождения экстремумов этого функционала на множестве функций, принимающих заданные значения в точках a и & при дополнительных условиях

$$\int\limits_a^b \mathrm{G}_k(x,y_1,y_2,\dots,y_n,y_1',y_2',\dots,y_n')dx = c_k, \quad k = 1,2,\dots,m \qquad (3.15)$$

является разновидностью задач на условный экстремум и называется **изопериметрической задачей**.

Теорема 5. Если набор функций $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ доставляет экстремум изопериметрической задаче,то существуют такие постоянные λ_1, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, что набор $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\ldots$, $y_n(x)$ является экстремалью функционала (то есть экстремалью задачи безусловного экстремума)

$$\mathrm{I}^*[y_1, y_2, \ldots, y_n] = \int\limits_a^b \left(\mathrm{F} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \mathrm{G}_k\right) dx.$$

Функция $\Phi = \mathrm{F} + \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k \mathrm{G}_k$ называется функцией Лагранжа,

λ_1, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ – множителями Лагранжа, I^* – функционал Лагранжа.

Пример. Найти экстремали функционала $\mathrm{I}[y] = \int\limits_0^1 y'^2 dx$

при граничных условиях $y(0) = y(1) = 0$ и условии $\int\limits_0^1 xy\,dx = \frac{1}{3}$.

Решение. Составим функционал Лагранжа

$$\mathrm{I}^*[y] = \int\limits_0^1 \left(y'^2 + \lambda xy\right) dx.$$

Его экстремали находим из уравнения Эйлера $\lambda x - 2y'' = 0$;

$y = \frac{\lambda}{12} x^3 + c_1 x + c_2$.

Из условий $y(0) = y(1) = 0$ находим: $c_2 = 0$, $c_1 = -\frac{\lambda}{12}$.

Следовательно, $y = \frac{\lambda}{12}\left(x^3 - x\right)$. Значение λ найдем из дополнительного условия $\int\limits_0^1 xy\,dx = \frac{1}{3}$: $\frac{\lambda}{12} \int\limits_0^1 \left(x^4 - x^2\right) dx = \frac{\lambda}{12}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$.

Отсюда $\lambda = -30$. Единственная экстремаль

$$y = \frac{5}{2}\left(x - x^3\right).$$

Задачи

Найти экстремали функционалов.

3.6.1. $\int\limits_0^1 y'^2 dx, y(0) = y(1) = 1, \int\limits_0^1 y\,dx = 0.$

3.6.2. $\int\limits_0^\pi y \sin x dx, y(0) = y(\pi) = 0, \int\limits_0^\pi y'^2 dx = \frac{\pi}{2}.$

3.6.3. $\int\limits_{-1}^1 y\,dx, y(-1) = y(1) = 0, \int\limits_{-1}^1 \sqrt{1+y'^2}dx = \pi.$

3.6.4. $\int\limits_0^1 y'^2 dx, y(0) = 0, y(1) = 2, \int\limits_0^1 y^2 dx = 4.$

3.6.5. $\int\limits_0^1 y_1' y_2' dx, \quad (y_1(0), y_2(0)) = (0,0), \quad (y_1(1), y_2(1)) = (1,2),$

$\int\limits_0^1 y_i dx = 0, i = 1, 2.$

3.6.6. $\int\limits_0^1 \left(y_1'^2 + y_2'^2\right) dx, \quad (y_1(0), y_2(0)) = (y_1(1), y_2(1)) = (0,0),$

$\int\limits_0^1 y_1 y_2 dx = -2.$

3.6.7. $\int\limits_0^1 \left(y'^2 + x^2\right) dx, y(0) = y(1) = 0, \int\limits_0^1 y^2 dx = 2.$

3.6.8. $\int\limits_a^b y'^2 dx, \int\limits_0^1 y\,dx = a.$

3.6.9. $\displaystyle\int\limits_0^1 \left(y'^2 + z'^2 - 4xz - 4z\right) dx, \quad y(0) = z(0) = 0,$

$y(1) = z(1) = 1, \quad \displaystyle\int\limits_0^1 \left(y'^2 - xy' - z'^2\right) dx = 2.$

Ответы: 3.6.1: $y = 3x - 12x^2 + 10x^3$. 3.6.2: $y = \pm \sin x$. 3.6.3: $y = \pm\sqrt{1-x^2}$. 3.6.4: $y = 2\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 1}$. 3.6.5: $y_1 = 3x^2 - 2x$, $y_2 = 6x^2 - 4x$. 3.6.6: $y_1 = 2\sin k\pi x$, $y_2 = -2\sin k\pi x$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ 3.6.7: $y = \pm 2\sin k\pi x$, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ 3.6.8: $y = \lambda x^2 + c_1 x + c_2$, константы находятся из краевых и изопериметрического условий. 3.6.9: $y = -\dfrac{5}{2}x^2 + \dfrac{7}{2}x$, $z = x$.

3.7 Вариационная задача с подвижными границами.

В простейшей задаче вариационного исчисления краевые условия $y(a) = \mathrm{A}$ и $y(b) = \mathrm{B}$ геометрически означают, что точки графика функции $y(x)$ фиксированы. Если же условия задачи таковы, что концы графика искомой функции – экстремали вариационной задачи – могут перемещаться вдоль заданных линий, то мы приходим к задаче с подвижными границами: найти экстремум функционала

$$\mathrm{I}[y] = \int\limits_{x_0}^{x_1} \mathrm{F}(x, y, y')dx, \quad a \leqslant x_0 \leqslant x_1 \leqslant b \tag{3.16}$$

при условиях

$$y(x_0) = \varphi_0(x_0), \quad y(x_1) = \varphi_1(x_1), \tag{3.17}$$

где $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ – **заданные функции.**

Теорема 6. Если функция $y(x)$ доставляет экстремум задаче с подвижными границами, то она является решением уравнения Эйлера

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y'}(x, y, y')\right) = 0$$

на промежутке (x_0, x_1), а на концах этого промежутка выполнены **условия трансверсальности**:

$$\mathrm{F} + (\varphi_0 - y')\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y'} = 0 \text{ при } x = x_0;$$

$$\mathrm{F} + (\varphi_1 - y')\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y'} = 0 \text{ при } x = x_1.$$

Замечание 1. Если один из концов, например, левый, закреплен, то есть $y(a) = \mathrm{A}$ – заданное значение, то $x_0 = a$ и первого условия трансверсальности нет.

Замечание 2. Если какому-либо концу графика функции $y(x)$, например, правому, разрешены перемещения по вертикальной прямой, то $x_1 = b$, а соответствующее (в данном случае второе) условие трансверсальности переписывается так:

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y'} = 0 \text{ при } x = b.$$

Пример. Найти кратчайшее расстояние от точки $\mathrm{A}(7,0)$ до параболы $y = -x^2 - x$.

Решение. Пусть $y(x)$ – функция, вдоль графика которой определяется расстояние от точки A до параболы, точнее до точки $(x_0, y(x_0))$ на параболе. Расстояние вычисляется по формуле для длины кривой

$$r[y] = \int\limits_{x_0}^{7} \sqrt{1+y'^2}\,dx$$

при условиях $y(x_0) = -x_0^2 - x_0, \quad y(7) = 0.$

Таким образом, чтобы найти искомое минимальное расстояние, достаточно решить вариационную задачу с одним закрепленным концом и одним – подвижным.

Уравнение Эйлера для экстремали

$$\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = 0,$$

откуда $y' = c_1 = \mathrm{const}$, $y = c_1 x + c_2$. То есть наименьшее расстояние, как и следовало ожидать, следует искать по прямой. Условие трансверсальности

$$\sqrt{1+y'^2} + \left(-2x - 1 - y'\right)\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = 0 \text{ при } x = x_0,$$

откуда

$$\sqrt{1+c_1^2} - (2x_0 + 1 + c_1)\frac{c_1}{\sqrt{1+c_1^2}} = 0,$$

или

$$1 - (1 + 2x_0)\,c_1 = 0.$$

Вместе с краевыми условиями $y(7) = 0$ и $y(x_0) = -x_0^2 - x_0$ получим систему уравнений

$$\begin{cases} 1 - (1+2x_0)\,c_1 = 0; \\ 7c_1 + c_2 = 0; \\ c_1 x_0 + c_2 = -x_0^2 - x_0. \end{cases} \tag{3.18}$$

Решая эту систему, находим $c_1 = \frac{1}{3}$, $c_2 = -\frac{7}{3}$, $x_0 = 1$. Точка на параболе, расстояние до которой минимально, $B(1;-2)$. Это расстояние равно $2\sqrt{10}$.

Заметим, что поставленную задачу можно было бы решать и без привлечения средств вариационного исчисления, а обычными средствами элементарного математического анализа. При этом параметры искомого отрезка прямой $y = c_1x + c_2$ от точки A до точки $B(x_0, -x_0^2 - x_0)$ на параболе должны удовлетворять второму и третьему уравнениям системы (3.16). Геометрически очевидно требование перпендикулярности искомого отрезка прямой и касательной, проведенной к параболе в точке B. Это требование перпендикулярности $c_1(1+2x_0) = 1$ совпадает с условием трансверсальности – первым уравнением системы (3.16). Так мы приходим к той же системе уравнений относительно c_1, c_2 и x_0 и тому же решению поставленной задачи.

Пример. Найти наименьшее значение функционала

$I[y] = \int\limits_0^1 \left(y^2 + y'^2\right) dx$ при единственном ограничении $y(0) = 1$.

Решение. Отсутствие второго краевого условия означает, что правый конец графика функции $y(x)$ может скользить по вертикали $x = 1$. Уравнение Эйлера

$$2y - 2y'' = 0.$$

Его общее решение $y = c_1e^x + c_2e^{-x}$. Условие трансверсальности

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \text{ при } x = 1,$$

то есть $y'(1) = 0$, или $c_1e - c_2e^{-1} = 0$. Вместе с заданным краевым условием $y(0) = 1$ это дает систему уравнений относительно c_1 и c_2

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1; \\ c_1e - c_2e^{-1} = 0. \end{cases}$$

Решая ее, находим искомую экстремаль

$$y = \frac{e^x}{e^2+1} + \frac{e^{2-x}}{e^2+1} = \frac{\operatorname{ch}(x-1)}{\operatorname{ch}1}.$$

Задачи

Найти экстремали данных функционалов при заданных условиях на концах.

3.7.1. $\int\limits_0^{1} y'^2 dx$, $y(0) = 0$, $\quad y(x_1) + x_1 + 1 = 0$. Ответ: $y = -2x$, $x_1 = 1$.

3.7.2. $\int\limits_0^{x_1} \left(-2y+y'^2\right)dx,\ y(0)=0,\ y(x_1)=2.$ Ответ: $y=-2x,\ x_1=1$

3.7.3. $\int\limits_0^{x_1} \sqrt{1+y'^2}dx,\ y(0)=0,\ x_1-y(x_1)=1.$ Ответ: $y=-x,\ x_1=\frac{1}{2}.$

3.7.4. $\int\limits_0^{x_1} y'^2dx,\ \ y(0)=0,\ \ y^2(x_1)-x_1^2=1.$ Ответ: $y=\pm\sqrt{2}x,\ x_1=1.$

3.7.5. $\int\limits_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}dx,\quad y(0)=0,\quad (x_1-9)^2+y^2(x_1)=9.$

Ответ: $y=\pm\sqrt{8x-x^2}.$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. -М.: Наука, 1974.

2. *Кузнецов Д.С.* Специальные функции. -М.: Высшая школа, 1965.

3. *Лебедев Н.Н.* Специальные функции и их приложения. -М.: Физматгиз, 1963.

4. *Суэтин П.К.* Классические ортогональные многочлены. -М.: Наука, 1976.

5. *Никифоров А.Ф., Уваров В.Б.* Основы теории специальных функций. -М.: Наука, 1974.

6. *Евграфов М.А.* и др. Сборник задач по теории аналитических функций. -М.: Наука, 1969.

7. *Кожевников Н.И.* и др. Ряды и интеграл Фурье. Теория поля.
Аналитические и специальные функции. Теория поля. -М.: Наука, 1964.

8. *Краснов М.Л.* Интегральные уравнения. -М.: Наука, 1975.

9. *Шилов Г.Е.* Математический анализ. -М.: Наука, 1961.

10. Сборник задач по уравнениям математической физики.
Под ред. *В.С. Владимирова*.-М.: Наука, 1974.

11. *Петровский И.Г.* Лекции по теории интегральных уравнений. -М.: ОГИЗ-Гостехиздат, 1948.

12. *Вуколов Э.А.* и др. Сборник задач по математике для втузов.
Специальные курсы. -М.: Наука, 1984.

13. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. -М.: Наука, 1969.

Николай Викторович Вахрушев
Татьяна Михайловна Назарова
Владислав Владимирович Хаблов

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ
ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Учебное пособие
2-е издание, переработанное

В авторской редакции

Подписано в печать 01.12.11. Формат 60 х 84 1/16. Бумага офсетная. Тираж 300 экз.
Уч.-изд. л. 4,18. Печ. л. 4,5. Изд. № 353. Заказ № 2. Цена договорная.

Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета
630092, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20