НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
УНИВЕРСИТЕТ

Э.Г. СОСНИНА

# ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Индивидуальные домашние задания
для студентов 1-го курса факультета Бизнеса
экономической специальности

НОВОСИБИРСК
2013

ВАРИАНТ 1

1. Найти и изобразить на плоскости О.Д.З. функции двух переменных

$$z=\sqrt{x+\sqrt{y-1}}$$

2. Вычислить производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ сложной функции в заданной точке, предварительно записав формулы дифференцирования

$$z=u\cdot v+\sqrt{v}\quad,\ u=x^2y\ ,\ v=xy^2\ ;\ x=1,\ y=1.$$

3. Дана функция $u=\ln(3+x^4)-8xyz$, точка $M_0(1,1,1)$ и вектор $\bar{a}=\vec{i}-2\vec{j}-2\bar{k}$. Найти:

а) $\overline{grad}\,u(M_0)$ - градиент функции $u$ в точке $M_0$;

б) $\frac{\partial u(M_0)}{\partial a}$ --- производную функции $u$ по направлению вектора $\bar{a}$ в точке $M_0$.

4. Дана функция $z=x^3+3x^2y-y^3+2x-2y+1$ и точка $M_0(0,1)$.

Найти: а) $dz(M_0)$ --- дифференциал функции в точке $M_0$;

б) $d^2z(M_0)$ --- второй дифференциал функции в точке $M_0$.

в) Записать многочлен Тейлора второго порядка для функции $z=f(x,y)$ по степеням $x-x_0,\ y-y_0$ . $[x_0=0,\ y_0=1]$.

5. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной уравнением $x^2+y^2+z^2-4x+6y-8z-1=0$, в точке $M_0(1,2,2)$.

6. Исследовать заданную функцию на экстремум

$$z=x^3+y^3-3xy$$

7. Задана функция двух переменных $z=x^2-2xy-y^2+4x+1$.

а) Найти наибольшее и наименьшее значения функции в области

$$D:\{x\geq-3,\ y\geq0,\ x+y+1\leq0$$

б) Используя метод неопределенных множителей Лагранжа, исследовать заданную функцию на условный экстремум при условии В1

$$\cdot\ \varphi(x,y)=0\Rightarrow x+y+1=0.$$

## ВАРИАНТ 2

1. Найти и изобразить на плоскости О.Д.З. функции двух переменных

$$z = \frac{x}{\sqrt{y-x}} + \frac{y}{\sqrt{y+x}}$$

2. Вычислить производные $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ сложной функции в заданной точке, предварительно записав формулы дифференцирования

$$z = \frac{1}{\sqrt{u}} - \sin v \quad , \quad u = xy \ , \ v = x^2 + y^2 \ , \ x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, y = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

3. Дана функция $u = \frac{x^2 y}{4} - \sqrt{x^2 + 5z^2}$, точка $M_0\left(-2, \frac{1}{2}, 1\right)$, вектор $\vec{a} = 4\vec{j} + 3\vec{k}$. Найти:

а) $\overrightarrow{grad}\, u(M_0)$ --- градиент функции $u$ в точке $M_0$;

б) $\frac{\partial u(M_0)}{\partial a}$ --- производную функции $u$ по направлению вектора $\vec{a}$ в точке $M_0$.

4. Дана функция $z = 2x^3 - 3x^2 y + 2y^3 - 5y + 3$ и точка $M_0(1, 0)$

Найти: а) $dz(M_0)$ --- дифференциал функции в точке $M_0$;

б) $d^2 z(M_0)$ --- второй дифференциал функции в точке $M_0$.

в) Записать многочлен Тейлора второго порядка для функции $z = f(x, y)$ по степеням $(x - x_0), (y - y_0)$ : $[x_0 = 1, y_0 = 0]$

5. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной уравнением $z = y + \ln \frac{x}{z}$, в точке $M_0(1, 1, 1)$.

6. Исследовать заданную функцию на экстремум

$$z = x^2 - y^2 + 3xy - 13y + 5$$

7. Задана функция двух переменных $z = 4x^2 + 9y^2 - 4x - 6y + 3$.

а) Найти наибольшее и наименьшее значения функции в области

$$D: \{ x \geq 0, \ y \geq 0 \ , \ x + y \leq 1 \}$$

б) Используя метод неопределенных множителей Лагранжа, исследовать заданную функцию на условный экстремум при условии

$$\varphi(x, y) = 0 \implies x + y - 1 = 0.$$

В2

## ВАРИАНТ 3

1. Найти и изобразить на плоскости О.Д.З. функции двух переменных

$$z = \ln\left(\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} - 1\right)$$

2. Вычислить производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ сложной функции в заданной точке, предварительно записав формулы дифференцирования

$$z = \operatorname{arctg} x - \frac{x}{y}, \quad x = u^2 + v^2, \quad y = uv.$$

3. Дана функция $u = -2\ln(5 - x^2) - 4xyz$, точка $M_0(1,1,1)$ и вектор $\vec{a} = \vec{AB}$, $A(-1,0,2)$ Найти, $B(1,2,1)$. Найти:

а) $\operatorname{grad} u(M_0)$ --- градиент функции $u$ в точке $M_0$;

б) $\frac{\partial u(M_0)}{\partial a}$ --- производную функции $u$ по направлению вектора $\vec{a}$ в точке $M_0$.

4. Дана функция $z = x^3 + 3x^2y - y^3 - 2y + 2$ и точка $M_0(1,1)$

Найти: а) $dz(M_0)$ --- дифференциал функции в точке $M_0$;

б) $d^2z(M_0)$ --- второй дифференциал функции в точке $M_0$.

в) Записать многочлен Тейлора второго порядка для функции $z = f(x,y)$ по степеням $(x - x_0)$, $y - y_0$. $[x_0 = 1, y_0 = 1]$.

5. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной уравнением $\frac{x^2}{4} + y^2 - \frac{z^2}{2} = 0$, в точке $M_0(2,-1,2)$.

6. Исследовать заданную функцию на экстремум

$$z = x^3 + y^3 + 3xy$$

7. Задана функция двух переменных $z = 4x + 2y + 4x^2 + y^2 + 6$.

а) Найти наибольшее и наименьшее значения функции в области

$$D: \{x \le 0,\ y \le 0,\ x + y + 2 \ge 0\}$$

б) Используя метод неопределенных множителей Лагранжа, исследовать заданную функцию на условный экстремум при условии

$$\varphi(x,y) = 0 \Rightarrow x + y + 2 = 0.$$

В 5

## ВАРИАНТ 4

1. Найти и изобразить на плоскости О.Д.З. функции двух переменных
$z=\ln(x^2+y+1)$

2. Вычислить производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ сложной функции в заданной точке, предварительно записав формулы дифференцирования

$z=\sqrt{u}\cdot e^{v}$ , $u=x^2-y^2$ , $v=x^2y$ , $x=1,\ y=0$.

3. Дана функция $u=xz^2-\sqrt{x^3y}$ , точка $M_0(1,1,2)$ и вектор $\vec{a}=(3\vec{i}-4\vec{j})$ . Найти

а) $\operatorname{grad} u(M_0)$ --- градиент функции $u$ в точке $M_0$ ;

б) $\frac{\partial u(M_0)}{\partial a}$ --- производную функции $u$ по направлению вектора $\vec{a}$ в точке $M_0$ .

4. Дана функция $z=2x^3-x^2y+xy^2-3y^3$ и точка $M_0(0,-1)$.

Найти: а) $dz(M_0)$ --- дифференциал функции в точке $M_0$ ;

б) $d^2z(M_0)$ --- второй дифференциал функции в точке $M_0$ .

в) Записать многочлен Тейлора второго порядка для функции $z=f(x,y)$ по степеням $(x-x_0)$, $(y-y_0)$, $[x_0=0,\ y_0=-1]$.

5. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной уравнением $z=\sin\frac{y}{xz}+2x-4$ , в точке $M_0(2,\pi,1)$

6. Исследовать заданную функцию на экстремум
$z=12x+4y-x^3+y^2$

7. Задана функция двух переменных $z=3-2x^2-xy-y^2$.

а) Найти наибольшее и наименьшее значения функции в области
$D:\{x\le 1,\ y\le 2,\ 2x+y\ge 2\}$

б) Используя метод неопределенных множителей Лагранжа, исследовать заданную функцию на условный экстремум при условии
$\varphi(x,y)=0 \Rightarrow 2x+y-2=0.$

В 8

# ВАРИАНТ 5

1. Найти и изобразить на плоскости О.Д.З. функции двух переменных

$$z = \sqrt{1-(x^2+y)}$$

2. Вычислить производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ сложной функции в заданной точке, предварительно записав формулы дифференцирования

$$z = x^2 + \sqrt{y}, \quad x = \frac{u}{v}, \quad y = u + v; \quad u = 2, v = -2$$

3. Дана функция $u = \ln(1+x^2) - xy\sqrt{z}$, точка $M_0(1,-2,4)$ и вектор $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$. Найти:

а) $\operatorname{grad} u(M_0)$ --- градиент функции $u$ в точке $M_0$;

б) $\frac{\partial u(M_0)}{\partial a}$ --- производную функции $u$ по направлению вектора $\vec{a}$ в точке $M_0$.

4. Дана функция $z = y^3 - 2x^2y + 4xy^2 - 4x + 2y$ и точка $M_0(-1,0)$

Найти: а) $dz(M_0)$ --- дифференциал функции в точке $M_0$;

б) $d^2z(M_0)$ --- второй дифференциал функции в точке $M_0$.

в) Записать многочлен Тейлора второго порядка для функции $z = f(x,y)$ по степеням $(x-x_0), (y-y_0)$ $[x_0 = -1, y_0 = 0]$.

5. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной уравнением $x = \ln(z^2 + y^2)$, в точке $M_0(0,0,1)$

6. Исследовать заданную функцию на экстремум

$$z = x^3 - y^3 - 3xy$$

7. Задана функция двух переменных $z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4$

а) Найти наибольшее и наименьшее значения функции в области

$$D: \{x \geq -1,\ y \geq -1,\ x + y \leq 1\}$$

б) Используя метод неопределенных множителей Лагранжа, исследовать заданную функцию на условный экстремум при условии

$$\varphi(x,y) = 0 \Rightarrow x + y - 1 = 0$$

В3

# ВАРИАНТ 6

1. Найти и изобразить на плоскости О.Д.З. функции двух переменных

$$z = \ln\frac{x}{y}$$

2. Вычислить производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ сложной функции в заданной точке, предварительно записав формулы дифференцирования

$$z = u^v, \quad u = x^2 + y^2, \quad v = x^2 - y^2, \quad x_0 = y_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

3. Дана функция $u = x\sqrt{y} - (z+y)\sqrt{x}$, точка $M_0(1, 1, -2)$ и вектор $\vec{a} = (4\vec{i} - 3\vec{k})$. Найти

а) $\operatorname{grad} u(M_0)$ - градиент функции $u$ в точке $M_0$;

б) $\frac{\partial u(M_0)}{\partial a}$ --- производную функции $u$ по направлению вектора $\bar{a}$ в точке $M_0$.

4. Дана функция $z = 2x^3 + 3x^2y - xy^2 - y^3 + 2y - 1$ и точка $M_0(1, -1)$.

Найти: а) $dz(M_0)$ --- дифференциал функции в точке $M_0$;

б) $d^2z(M_0)$ --- второй дифференциал функции в точке $M_0$.

в) Записать многочлен Тейлора второго порядка для функции $z = f(x, y)$ по степеням $(x - x_0), (y - y_0)$. $[x_0 = 1, y_0 = -1]$.

5. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной уравнением $(8 - z^2)x^2 - 4y^2 = 0$, в точке $M_0(2, 2, 2)$

6. Исследовать заданную функцию на экстремум

$$z = x^3 + 6y^2 + 6xy - 3$$

7. Задана функция двух переменных $z = x^2 - xy$

а) Найти наибольшее и наименьшее значения функции в области

$$D: \{x \geq 0, \ y \geq 0, \ 3x + 2y \leq 6\}$$

б) Используя метод неопределенных множителей Лагранжа, исследовать заданную функцию на условный экстремум при условии

$$\varphi(x, y) = 0 \Rightarrow 3x + 2y - 6 = 0.$$

B.11

## ВАРИАНТ 7

1. Найти и изобразить на плоскости О.Д.З. функции двух переменных

$$z = \ln\left(\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} - 1\right)$$

2. Вычислить производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ сложной функции в заданной точке, предварительно записав формулы дифференцирования

$$z = \ln u + \frac{1}{v}, \quad u = \sqrt{x^2+y^2}, \quad v = \frac{x}{y}; \quad x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

3. Дана функция $u = \frac{1}{x} + \sqrt{y^2 + z^2}$, точка $M_0(1,-3,4)$ и

вектор $\bar{a} = \overline{AB}$, $A(1,-1,2)$, $B(2,1,2)$. Найти:

а) $\overrightarrow{grad}\, u(M_0)$ --- градиент функции $u$ в точке $M_0$;

б) $\frac{\partial u(M_0)}{\partial a}$ --- производную функции $u$ по направлению вектора $\bar{a}$

в точке $M_0$.

4. Дана функция $z = 2y^3 + y^2x - x^2y + 3x^3 + 5x - 4$ и точка $M_0(-1,1)$.

Найти: а) $dz(M_0)$ --- дифференциал функции в точке $M_0$;

б) $d^2z(M_0)$ --- второй дифференциал функции в точке $M_0$.

в) Записать многочлен Тейлора второго порядка для функции $z = f(x,y)$ по степеням $(x-x_0), (y-y_0)$. $[x_0 = -1, y_0 = 1]$.

5. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности,

заданной уравнением $x + y + \ln(z^2 + y^2) = 0$, в точке $M_0(-1,1,0)$.

6. Исследовать заданную функцию на экстремум

$$z = y^3 - 5x^2 - 27y + 10$$

7. Задана функция двух переменных $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$

а) Найти наибольшее и наименьшее значения функции в области

$$D: \{x \le 3,\ y \ge 0,\ y \le x+1\}$$

б) Используя метод неопределенных множителей Лагранжа, исследовать заданную функцию на условный экстремум при условии

$$\varphi(x,y) = 0 \implies x - y + 1 = 0.$$

В.13

# ВАРИАНТ 8

1. Найти и изобразить на плоскости О.Д.З. функции двух переменных

$$z=\sqrt{x+\sqrt{y+1}}$$

2. Вычислить полную производную $\frac{dz}{dt}$ сложной функции в заданной точке, предварительно записав формулу дифференцирования

$$z=u^{v},\quad u=1+t^2,\quad v=\cos t,\quad t_0=0.$$

3. Дана функция $u=\sqrt{x}+\ln(z^2+y^2)$, точка $M_0(\frac{1}{4},-1,\ 1)$ и вектор $\vec{a}=-2\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$. Найти :

а) $\overrightarrow{grad}\,u(M_0)$ -- градиент функции $u$ в точке $M_0$;

б) $\frac{\partial u(M_0)}{\partial a}$ --- производную функции $u$ по направлению вектора $\vec{a}$ в точке $M_0$.

4. Дана функция $z=2x^3-3xy^2+2y^3-4y+1$ и точка $M_0(-1,-1)$.

Найти: а) $dz(M_0)$ --- дифференциал функции в точке $M_0$;

б) $d^2z(M_0)$ --- второй дифференциал функции в точке $M_0$.

в) Записать многочлен Тейлора второго порядка для функции $z=f(x,y)$ по степеням $(x-x_0),(y-y_0)$ $\cdot[x_0=-1,y_0=-1]$.

5. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной уравнением $z=\ln\frac{y}{z}-x^2$, в точке $M_0(1,-1,-1)$.

6. Исследовать заданную функцию на экстремум

$$z=\frac{x^2}{2}-2x+\frac{y^2}{2}-3y+1$$

7. Задана функция двух переменных $z=2x^2+2xy-\frac{y^2}{2}-4x$.

а) Найти наибольшее и наименьшее значения функции в области

$$D:\{x\geq 0,\ y\leq 2,\ y\geq 2x\}$$

б) Используя метод неопределенных множителей Лагранжа, исследовать заданную функцию на условный экстремум при условии

$$\varphi(x,y)=0 \Rightarrow 2x-y=0$$

В.18

# ВАРИАНТ 9

1. Найти и изобразить на плоскости О.Д.З. функции двух переменных

$$z = \ln\frac{x^2+y^2}{x-y}.$$

2. Вычислить полную производную $\frac{dz}{dt}$ сложной функции в заданной точке, предварительно записав формулу дифференцирования

$$z = x\,\mathrm{arctg}\frac{y}{x},\ y=\ln t,\ x=t^2,\ t_0=1.$$

3. Дана функция $u = x(\ln y - \mathrm{arctg}\, z)$, точка $M_0(-2,1,-1)$ и вектор $\vec{a} = 8\vec{i} + 4\vec{j} + 8\vec{k}$. Найти:

а) $\mathrm{grad}\, u(M_0)$ - градиент функции $u$ в точке $M_0$;

б) $\frac{\partial u(M_0)}{\partial a}$ --- производную функции $u$ по направлению вектора $\vec{a}$ в точке $M_0$.

4. Дана функция $z = x^3 - y^3 + 3xy + 6y + 1$ и точка $M_0(0,2)$.

Найти: а) $dz(M_0)$ --- дифференциал функции в точке $M_0$;

б) $d^2z(M_0)$ --- второй дифференциал функции в точке $M_0$.

в) Записать многочлен Тейлора второго порядка для функции $z=f(x,y)$ по степеням $(x-x_0),(y-y_0)$. $[x_0=0,\ y_0=2]$.

5. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной уравнением $x = y\cdot \mathrm{tg}\frac{z}{3}$, в точке $M_0(3,3,\frac{3\pi}{4})$.

6. Исследовать заданную функцию на экстремум

$$z = x^3 + 6y^2 - 6xy + 5.$$

7. Задана функция двух переменных $z = x^2 + 2xy - y^2 + 2x + 2y$.

а) Найти наибольшее и наименьшее значения функции в области

$$D: \{ y\geq 0,\ x\leq 2,\ y\leq x+2 \}$$

б) Используя метод неопределенных множителей Лагранжа, исследовать заданную функцию на условный экстремум при условии

$$\varphi(x,y)=0 \Longrightarrow x-y+2=0.$$

В 15

ВАРИАНТ 10

1. Найти и изобразить на плоскости О.Д.З. функции двух переменных

$z = \sqrt{\ln(2-x-y)}$

2. Вычислить производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ сложной функции в заданной точке, предварительно записав формулы дифференцирования

$$z = \operatorname{tg} u \cdot e^{v}, \quad u = x^2 y, \quad v = \frac{y}{x} \quad ; \quad x = 1, y = 0.$$

3. Дана функция $u = y \operatorname{arctg} z + 2\sqrt{x+y}$, точка $M_0(3,-2,1)$

и вектор $\bar{a} = 4\vec{i} - 3\vec{k}$. Найти

а) $\overrightarrow{grad}\, u(M_0)$ --- градиент функции $u$ в точке $M_0$ ;

б) $\frac{\partial u(M_0)}{\partial a}$ --- производную функции $u$ по направлению вектора $\vec{a}$ в точке $M_0$.

4. Дана функция $z = x^2 y + y^2 x - 3xy + 2x - 1$ и точка $M_0(2,-1)$.

Найти: а) $dz(M_0)$ --- дифференциал функции в точке $M_0$ ;

б) $d^2 z(M_0)$ --- второй дифференциал функции в точке $M_0$.

в) Записать многочлен Тейлора второго порядка для функции $z = f(x,y)$ по степеням $(x-x_0), (y-y_0)$ $[x=2, y=-1]$.

5. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности,

заданной уравнением $y = \ln(z^2 + x^2) + z$, в точке $M_0(1,0,0)$.

6. Исследовать заданную функцию на экстремум

$$z = x^3 - 3x^2 + y^2 - 2y + 5$$

7. Задана функция двух переменных $z = y^2 + 2xy - x^2 - 4y$

а) Найти наибольшее и наименьшее значения функции в области

$D: \{ x \le 3, y \ge 0, y \le x+1 \}$

б) Используя метод неопределенных множителей Лагранжа, исследовать заданную функцию на условный экстремум при условии  В.26

$\varphi(x,y) = 0 \Rightarrow y - x - 1 = 0.$