

Распространение тепла в бесконечном стержне

Рассмотрим задачу о распространении тепла в бесконечном стержне, если задана начальная температура $u(x, 0) = \phi(x)$: найти температуру $u(x, t)$, если

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & x \in \mathbb{R}, t \geq 0; \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Эту задачу принято называть задачей Коши для уравнения теплопроводности. Фиксируя t , подвергнем функцию $u(x, t)$ преобразованию Фурье:

$$U(\xi, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} u(x, t) dx$$

Тогда $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} dx = \frac{\partial U}{\partial t}$, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} dx = -a^2 \xi^2 U$, и рассматриваемая задача Коши будет для функции $U(\xi, t)$ иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = -a^2 \xi^2 U, & \xi \in \mathbb{R}, t \geq 0; \\ U(\xi, 0) = \Phi(\xi), & \xi \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Здесь $\Phi = \hat{\phi}$. Фиксируя ξ , решим полученное дифференциальное уравнение. Для этого умножим это уравнение, перенеся все в левую часть, на $e^{a^2 \xi^2 t}$ и перепишем результат:

$$\frac{\partial}{\partial t} (e^{a^2 \xi^2 t} U) = 0.$$

Получаем, что функция $e^{a^2 \xi^2 t} U$ не зависит от t , откуда, учитывая, что при $t = 0$ $U(\xi, 0) = \Phi(\xi)$, для всех $t \geq 0$

$$U(\xi, t) = \Phi(\xi) e^{-a^2 \xi^2 t}.$$

Решение исходной задачи находится по формуле $u(x, t) = \mathcal{F}^{-1} (\Phi(\xi) e^{-a^2 \xi^2 t})$, $\mathcal{F}^{-1}$ —обратное преобразование Фурье.

Здесь полезно воспользоваться теоремой о свертке

$$\mathcal{F}^{-1} (\Phi(\xi) e^{-a^2 \xi^2 t}) = \phi * \mathcal{F}^{-1} (e^{-a^2 \xi^2 t})$$

Заметим, что в силу четности (по ξ) и теоремы подобия (роль множителя играет

$$a\sqrt{t}) \quad \mathcal{F}^{-1} (e^{-a^2 \xi^2 t}) = \mathcal{F} (e^{-a^2 \xi^2 t}) = \frac{1}{a\sqrt{2t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}$$

(Здесь также поменялись ролями переменные x и ξ). Тогда

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} dy$$

Эта формула называется (как и многие другие!) формулой Пуассона. Как видно из полученного решения, скорость распространения тепла бесконечна (с точки зрения данной модели): в любой сколь угодно малый момент времени $t > 0$ изменение температуры $u(x, t)$ происходит на всем протяжении бесконечного стержня (для всех x)!