

Преобразование Фурье. Формула обращения

Разложение $2l$ -периодической функции в ряд Фурье:

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{i\pi n x}{l}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{-N}^N c_n e^{\frac{i\pi n x}{l}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{-N}^N e^{ix \frac{n\pi}{l}} \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) e^{-it \frac{n\pi}{l}} dt$$

Обозначим $\frac{\pi}{l} = \Delta\xi$, $\frac{n\pi}{l} = n\Delta\xi = \xi_n$, тогда $\frac{1}{2l} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \Delta\xi$, и

$$f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{-N}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ix\xi_n} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-l}^l f(t) e^{-it\xi_n} dt \right) \Delta\xi$$

Обозначим $\hat{f}_l(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-l}^l f(t) e^{-it\xi} dt$. Перепишем строку выше:

$$f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{-N}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ix\xi_n} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-l}^l f(t) e^{-it\xi_n} dt \right) \Delta\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{-N}^N e^{ix\xi_n} \hat{f}_l(\xi_n) \Delta\xi$$

Сумма под знаком $\lim_{N \rightarrow \infty}$ — это интегральная сумма функции $e^{ix\xi} \hat{f}_l(\xi)$ на промежутке $[-N\Delta\xi, N\Delta\xi]$.

При $N \rightarrow \infty$ и $l \rightarrow \infty$ $\Delta\xi \rightarrow 0$ и эта сумма стремится к $\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_l(\xi) e^{ix\xi} d\xi$, и $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_l(\xi) e^{ix\xi} d\xi$.

Напомним: Это равенство получено для $2l$ -периодической функции $f(x)$. Если формально перейти в этом равенстве к пределу при $l \rightarrow \infty$, то, исходя из соотношения

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-l}^l f(t) e^{-it\xi} dt = \lim_{l \rightarrow \infty} \hat{f}_l(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-it\xi} dt = \hat{f}(\xi), \text{ получим равенство}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi.$$

Это так называемая формула обращения преобразования Фурье.

Таким образом введены два интегральных преобразования функций. Первое $\mathcal{F}$ сопоставляет функции f ее преобразование Фурье $\hat{f}$

$$\mathcal{F} : f \rightarrow \hat{f}, \quad \hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-it\xi} dt.$$

Второе $\mathcal{F}^{-1}$ сопоставляет функции g функцию $\check{g}$

$$\mathcal{F}^{-1} : g \rightarrow \check{g}, \quad \check{g}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{ix\xi} d\xi.$$

Формула обращения говорит о том, что преобразование $\mathcal{F}^{-1}$ является обратным к $\mathcal{F}$, то есть, если к некоторой функции f применить $\mathcal{F}$, а затем к результату $\hat{f}$ применить $\mathcal{F}^{-1}$, то мы получим в результате исходную функцию f . Бросается в глаза удивительная симметричность прямого и обратного преобразований: если к одной и той же функции h применить и $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}^{-1}$, то

$$\hat{h}(\zeta) = \check{h}(-\zeta),$$

то есть разница — знак аргумента.

Свойства преобразования Фурье

- I. **Линейность:** $\widehat{\alpha f + \beta g} = \alpha \hat{f} + \beta \hat{g}$, (α, β — постоянные).
- II. **Теорема подобия:** $\widehat{f(\lambda x)} = \frac{1}{\lambda} \hat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)$, ($\lambda \neq 0$ — постоянная).
- III. **Теорема запаздывания:** $\widehat{f(x-a)} = \hat{f}(\xi) \cdot e^{-ia\xi}$, (a — постоянная).
- IV. **Теорема смещения:** $\widehat{e^{iax} \cdot f(x)} = \hat{f}(\xi - a)$, (a — постоянная).
- V. **Теорема о дифференцировании оригинала:** $\widehat{f'(x)} = (i\xi) \hat{f}(\xi)$.
- VI. **Теорема о дифференцировании изображения:** $\widehat{xf(x)} = \left(i \frac{d}{d\xi}\right) \hat{f}(\xi)$.
- VII. **Теорема о преобразовании свертки:** $\widehat{f * g} = \sqrt{2\pi} \hat{f} \cdot \hat{g}$.

$$((f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt \text{ — свертка функций } f \text{ и } g)$$

Теорема о преобразовании произведения:

VIII.

$$\widehat{f \cdot g} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\eta) \hat{g}(\xi - \eta) d\eta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{f} * \hat{g}.$$

Доказательства можно посмотреть в пособии Будылин А. М. Ряды и интегралы Фурье. (.pdf файл.)
Основное можно представить таблицей.

Свойства

$f(x)$	$\hat{f}(\xi)$
$f(\lambda x)$	$\frac{1}{\lambda} \hat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)$
$f(x-a)$	$\hat{f}(\xi) \cdot e^{-ia\xi}$
$e^{iax} \cdot f(x)$	$\hat{f}(\xi - a)$
$f^{(n)}(x)$	$(i\xi)^n \hat{f}(\xi)$
$x^n f(x)$	$\left(i \frac{d}{d\xi}\right)^n \hat{f}(\xi)$
$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt$	$\sqrt{2\pi} \hat{f}(\xi) \cdot \hat{g}(\xi)$

Таблица преобразований

$f(x)$	$\hat{f}(\xi)$
$\frac{a}{x^2 + a^2}, a > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-a \xi }$
$e^{-a^2 x^2}, a > 0$	$\frac{1}{a\sqrt{2}} e^{-\frac{\xi^2}{4a^2}}$
$e^{-a x }, a > 0$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{\xi^2 + a^2}$
$\frac{x}{x^2 + a^2}, a > 0$	$-i \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-a \xi } \text{sign} \xi$
$e^{-a x } \text{sign} x, a > 0$	$-i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\xi}{\xi^2 + a^2}$

Пример представления функции интегралом Фурье

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-3x}, & 0 \leq x \leq 4, \\ 0, & x < 0 \text{ или } x > 4. \end{cases}$$

$$1) \hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^4 e^{-3x} e^{-i\xi x} dx =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{3+i\xi} (1 - e^{-4(3+i\xi)}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{(1-i\xi)(1-e^{-4(3+i\xi)})}{9+\xi^2}.$$

$$2) f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1-i\xi)(1-e^{-4(3+i\xi)})}{9+\xi^2} e^{i\xi x} d\xi.$$

ВСЁ !

Пример использования преобразования Фурье

Одно из направлений применения преобразования Фурье — исследование дифференциальных уравнений, то есть уравнений, содержащих неизвестные функции и их производные. Приведем вначале пример решения конкретной задачи. Найдем решение дифференциального уравнения

$$3y' + y = 2e^{-2|x|},$$

стремящееся к нулю на бесконечности. Применим преобразование Фурье к обеим частям уравнения. При этом будем использовать таблицы и свойства. Для $\hat{y} = \hat{y}(\xi)$ — преобразования неизвестной функции $y = y(x)$ получим уравнение

$$3i\xi\hat{y} + \hat{y} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{4}{\xi^2 + 4}.$$

Это уравнение, в отличие от исходного, является не дифференциальным, а алгебраическим. Решая его как в 4-м классе средней школы, получим

$$\hat{y} = 4\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{(\xi^2 + 4)(1 + 3i\xi)}.$$

Применив к $\hat{y}$ обратное преобразование Фурье, получим искомое решение. Для решения последней задачи представим дробь $\frac{1}{(\xi^2 + 4)(1 + 3i\xi)}$ в виде суммы простейших дробей методом неопределенных коэффициентов.

$$\frac{1}{(\xi^2 + 4)(1 + 3i\xi)} = \frac{1 - 3i\xi}{(\xi^2 + 4)(1 + 9\xi^2)} = \frac{A\xi + B}{\xi^2 + 4} + \frac{D\xi + E}{1 + 9\xi^2}.$$

Для коэффициентов получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 9A + D = 0; \\ 9B + E = 0; \\ D + 4E = 1; \\ A + 4D = -3i. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем

$$\frac{1}{(\xi^2 + 4)(1 + 3i\xi)} = \frac{3i}{35} \cdot \frac{\xi}{\xi^2 + 4} - \frac{1}{70} \cdot \frac{2}{\xi^2 + 4} - \frac{3i}{35} \cdot \frac{\xi}{\xi^2 + 1/9} + \frac{3}{35} \cdot \frac{1/3}{\xi^2 + 1/9}.$$

Таблица преобразований Фурье вместе с линейностью дает окончательный ответ:

$$\begin{aligned} y = 4\sqrt{\frac{2}{\pi}} & \left(\frac{3i}{35} \cdot i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-2|x|} \operatorname{sign} x - \frac{1}{70} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-2|x|} - \frac{3i}{35} \cdot i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-|x|/3} \operatorname{sign} x + \right. \\ & \left. + \frac{3}{35} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-|x|/3} \right) = -\frac{12}{35} \cdot e^{-2|x|} \operatorname{sign} x - \frac{2}{35} \cdot e^{-2|x|} + \frac{12}{35} \cdot e^{-|x|/3} \operatorname{sign} x + \frac{12}{35} \cdot e^{-|x|/3}. \end{aligned}$$