ПРАКТИКУМ И ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО КУРСУ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ (*типовые расчеты*)

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

ЛАНЬ®
САНКТ-ПЕТЕРБУРГ • МОСКВА • КРАСНОДАР
2010

ББК 22.171я73
П 69

П 69 Практикум и индивидуальные задания по курсу теории вероятностей (типовые расчеты): Учебное пособие. — СПб.: Издательство «Лань», 2010. — 288 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 978-5-8114-0974-7

Настоящий практикум представляет собой сборник индивидуальных заданий (типовых расчетов) по комбинаторике и теории вероятностей. Излагаемые основные понятия и теоремы сопровождаются большим количеством примеров с решениями и вопросами для самоконтроля. Первая часть практикума содержит индивидуальные задания по следующим темам: комбинаторика; случайные события; формулы полной вероятности и Байеса; схема Бернулли. Вторая часть посвящена случайным величинам: дискретные случайные величины; непрерывные случайные величины и их числовые характеристики; важнейшие законы распределения непрерывных случайных величин и их свойства, важнейшие закономерности теории непрерывных случайных величин. Каждый типовой расчет содержит 30 вариантов. Большинство задач типовых расчетов первой части — сюжетные. Задачи второй части — прикладные.

Для студентов и преподавателей технических, экономических, аграрных, юридических и других вузов. Практикум также может быть использован учителями для проведения дополнительных занятий со школьниками.

ББК 22.171я73

Коллектив авторов

В. А. БОЛОТЮК, канд. пед. н., доц. (задачи для самоконтроля); *Л. А. БОЛОТЮК*, канд. пед. н., доц. (глава 1, глава 2, глава 3, глава 5, задачи для самоконтроля); *А. Г. ГРИНЬ*, д-р физ.-мат. н., проф. (глава 1, глава 2, глава 3); *И. П. ГРИНЬ*, ст. препод. (глава 1, глава 2, глава 3); *С. В. ОКИШЕВ*, канд. тех. н., доц. (главы 6–8); *Л. А. ОРАНСКАЯ*, ст. препод. (глава 5); *Т. А. ФИЛИМОНОВА*, канд. тех. н., доц. (глава 4); *Е. А. ШВЕД*, ст. препод. (глава 1, глава 2, глава 4).

Обложка
А. Ю. ЛАПШИН

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

ВВЕДЕНИЕ

Методы теории вероятностей широко применяются в теории надежности, теории массового обслуживания, в теоретической физике, геодезии, астрономии, теории автоматического управления и многих других отраслях техники и естествознания. Поэтому естественно, что стандартная программа курса высшей математики для технических специальностей содержит в качестве одного из разделов теорию вероятностей. Данное учебно-практическое пособие служит для ознакомления студентов с базовыми понятиями и методами теории вероятностей, позволяет выработать и закрепить навык решения вероятностных задач.

Пособие состоит из двух частей, задач для самоконтроля с ответами и приложения, включающего таблицы значений основных функций, использующихся при решении задач по теории вероятностей. Каждая часть состоит из глав. Каждая глава содержит теоретическую часть, вопросы для самоконтроля и варианты типового расчета. Теория изложена компактно, с большим числом примеров и методических рекомендаций по выбору методов решения задач по данной теме. Вопросы для самоконтроля могут быть использованы как преподавателями для составления экзаменационных билетов и контрольных заданий, так и студентами для подготовки к экзамену или зачету.

Первая глава пособия содержит все необходимые сведения, позволяющие решать задачи комбинаторного характера, и не требует базовых знаний по другим разделам высшей математики, в силу чего она может быть рекомендовано не только студентам, но и школьникам, интересующимся комбинаторикой. По аналогичным причинам вторая и третья главы могут также использоваться для дополнительных занятий со школьниками, причем возможно их изучение независимо от главы первой.

Четвертая глава подразумевает, что читатель владеет такими понятиями математического анализа, как функция и интеграл, что позволяет понимать устройство формул, использующихся при решении задач данной главы.

В пятой главе второй части непосредственно используются навыки, приобретенные при изучении первых четырех, следовательно, для решения задач приведенного здесь типового расчета необходимо последовательное изучение предыдущих глав первой части пособия.

Шестая глава предполагает наличие у читателя знаний и умений по интегральному исчислению в рамках стандартного курса высшей математики, поэтому пособие может быть рекомендовано студентам второго и старших курсов, для которых теория вероятностей не является профильной дисциплиной. Тематика задач седьмой и восьмой глав этой части позволяет проиллюстрировать применение теоретического материала к решению практических задач, возникающих в реальной действительности.

Учебно-практическое пособие написано в соответствии с действующей программой по курсу высшей математики.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ И ИХ ВЕРОЯТНОСТИ

Понятие вероятности известно с античных времен. Интересные мысли о детерминированных и случайных явлениях можно обнаружить в трудах Платона, Демокрита, Эпикура. Общие утверждения о случайном имеются в работах древнеиндийских и китайских мыслителей. Некоторые проблемы, связанные с вероятностью, ставил и решал еще Аристотель, который исследовал силлогизмы с вероятными суждениями. Однако ни представления древних философов, ни народный опыт (приметы, пословицы) не выходили за границы качественных оценок вероятности.

Мысль о количественной оценке вероятности возникла значительно позднее, в XVI–XVII веках, когда комбинаторные задачи азартных игр привели к открытию новых математических моделей и понятий. Как наука теория вероятностей начала развиваться лишь с середины XVII века — в работах французских исследователей Б. Паскаля, П. Ферма и голландского ученого Х. Гюйгенса. Известный швейцарский математик Я. Бернулли в своем труде «Наука предположений» впервые сформулировал классическое определение вероятности, которое оформилось потом в работах П. Лапласа.

Теория вероятностей, зародившаяся в XVII веке, к началу XX века стала одной из важнейших отраслей естествознания, имела огромное количество приложений; курсы теории вероятностей читались в крупнейших университетах мира.

Известно, что сегодня преподавание математики в вузе предусматривает формирование логического и алгоритмического мышления — в частности, вероятностно-статистического стиля мышления, развитие которого трудно представить без изучения основ теории вероятностей.

Основные понятия теории вероятностей легко запоминаются студентами, но далеко не сразу становятся инструментами мыслительной деятельности.

Основой вероятностно-статистического стиля мышления, который формируется при систематическом решении задач, использующих аппарат теории вероятностей, является комбинаторное мышление, способность «видеть» варианты. Поэтому первым этапом в изучении основ теории вероятностей является усвоение основных типов комбинаторных соединений, задач и методов их решения.

ГЛАВА 1

КОМБИНАТОРИКА

Понятия «классическая схема» и «классическая вероятность» сами по себе не вызывают у студентов особых затруднений, но техника вычисления таких вероятностей сопряжена с большими сложностями. Во-первых, это связано с тем, что в настоящее время учащихся средней школы не знакомят с комбинаторикой, которая является основной, а порой и единственной техникой вычисления вероятностей в классической схеме. Во-вторых, так называемая перечислительная комбинаторика (наука о способах подсчета вариантов) требует своеобразного комбинаторного мышления, чего школа также не прививает ученикам в полной мере. Наконец, имеющаяся литература по комбинаторике, как правило, перенасыщена специфической информацией и малопригодна для краткого ознакомления с данным разделом математики.

По замыслу авторов данная глава должна стать для студента кратким путеводителем в мир комбинаторики и помочь ему овладеть довольно трудным, но важным разделом теории вероятностей.

1.1. КЛАССИЧЕСКАЯ СХЕМА

Классическая схема — это случайный эксперимент с конечным числом *равновозможных* элементарных исходов.

Пример 1.1. Бросание симметричной игральной кости. Элементарные исходы эксперимента ω_i — выпадение

i очков на верхней грани, $i = 1, \ldots, 6$. Так как кость симметрична, все 6 исходов имеют одинаковые вероятности, равные $1/6$.

Пример 1.2. Двукратное бросание игральной кости. Исходы (i, j) — выпадение i очков на первой кости и j очков на второй — являются равновозможными с вероятностями, равными $1/36$. Если в качестве исходов взять $[i, j]$ — на одной кости (не важно на какой) выпало i очков, а на другой — j, то такие исходы уже не будут равновозможными. Например, исход $[1, 1]$ совпадает с $(1, 1)$ и имеет вероятность $1/36$, а исход $[1, 2]$ происходит тогда, когда выполняется или $(1, 2)$, или $(2, 1)$ и, следовательно, имеет вероятность $2/36$.

Проверяйте равновозможность исходов эксперимента. Если исходы не являются равновозможными, то эксперимент не будет классической схемой и применять к нему дальнейшие результаты нельзя.

Пусть классическая схема имеет n возможных исходов, из них k исходов являются *благоприятными* для случайного события A (т. е. A наступает тогда и только тогда, когда имеет место один из этих k исходов). Тогда

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega) = \frac{k}{n}, \tag{1}$$

т. е. вероятность события A равна отношению числа благоприятных исходов к числу всех возможных исходов в данном эксперименте.

Пример 1.3. Пусть в примере 1.2 событие A — выпадение семи очков в сумме при первом и втором бросании. Подсчитаем вероятность A. Все возможные исходы (i, j), $i, j = 1, \ldots, 6$ данного эксперимента можно расположить в виде квадратной таблицы 6×6 так, что число всех возможных исходов $n = 36$.

Благоприятными исходами являются $(1, 6)$, $(2, 5)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(5, 2)$ и $(6, 1)$. Число благоприятных исходов $k = 6$. По формуле (1) для вероятности события в классической схеме $P(A) = 6/36 = 1/6$.

1.2. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

Основной техникой, использующейся при решении задач на классическую схему, является комбинаторика.

Комбинаторика — раздел математики, в котором исследуется, сколько всевозможных комбинаций (вариантов), подчиненных тем или иным условиям их образования, можно составить из элементов данного множества.

Для того чтобы узнать количество комбинаций, обладающих определенными свойствами, можно сначала перечислить их и затем пересчитать. В большинстве случаев такой способ определения комбинаций занимает много времени, поэтому в комбинаторике, которая обслуживает теорию вероятностей, рассматривают несколько видов комбинаций: перестановки, размещения и сочетания. Эти виды комбинаций можно пересчитать по специальным формулам или с помощью основных правил комбинаторики, т. е. без непосредственного перечисления вариантов.

Правило суммы. Если элемент первого типа можно выбрать k_1 способами, элемент второго типа — k_2 способами, ..., элемент s-го типа — k_s способами, то один элемент можно выбрать $k_1 + k_2 + \ldots + k_s$ способами.

Правило произведения. Если элемент первого типа можно выбрать k_1 способами, элемент второго типа — k_2 способами, ..., элемент s-го типа — k_s способами, то выбрать по одному элементу каждого типа можно $k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_s$ способами.

П р и м е р 1.4. В мешке 6 груш, 4 яблока, 3 киви и 7 мандаринов. Сколькими способами можно выбрать один фрукт?

По правилу суммы: $6 + 4 + 3 + 7 = 20$ способами.

П р и м е р 1.5. На каникулы школьник получил задание: выучить доказательство любой из шести теорем, прочитать один из семи романов, написать сочинение на одну из четырех тем. Сколькими способами можно выполнить задание?

По правилу произведения: $6 \cdot 7 \cdot 4 = 168$ способами.

Рассмотрим некоторые комбинаторные понятия и результаты, часто использующиеся при решении вероятностных задач.

Пусть $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ — набор некоторых элементов. Сколькими способами из этого набора можно выбрать k элементов $u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_k}$? Набор из k элементов называется *выборкой объема k*. Выборки можно образовывать разными способами. Например, выборки, состоящие из одних и тех же элементов, но отличающиеся порядком их расположения, можно различать (*упорядоченные* выборки), а можно не различать (*неупорядоченные* выборки). Упорядоченные выборки объема k называются *размещениями из n по k* и обозначаются круглыми скобками: $(u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_k})$; неупорядоченные выборки объема k называются *сочетаниями из n по k* и обозначаются квадратными скобками: $[u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_k}]$. Например, $(1, 2) \neq (2, 1)$, но $[1, 2] = [2, 1]$.

Элементы в выборке могут повторяться сколько угодно раз, т. е. извлеченный элемент возвращается и затем может появиться снова на другом месте. Такие выборки называются выборками *с повторениями* (или *с возвращением*).

Если каждый элемент может встретиться в выборке только один раз, то такие выборки называются выборками *без повторений* (или *без возвращения*).

Таким образом, можно рассматривать, по крайней мере, четыре типа выборок: размещения с повторениями и без них и сочетания с повторениями и без них. Введем следующие обозначения:

A_n^k — число упорядоченных выборок без повторений или число размещений из n по k без повторений;

$\bar{A}_n^k$ — число упорядоченных выборок с повторениями или число размещений из n по k с повторениями;

C_n^k — число неупорядоченных выборок без повторений или число сочетаний из n по k без повторений;

$\bar{C}_n^k$ — число неупорядоченных выборок с повторениями или число сочетаний из n по k с повторениями.

Приведем результат, позволяющий вычислять число размещений и сочетаний из n по k.

Теорема 1.1.

1. $\bar{A}_n^k = n^k$; 2. $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$;

3. $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$; 4. $\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$.

Доказательство этой теоремы (хоть оно и не слишком сложно) здесь не приводится.

Вместо терминологии выборок иногда удобнее (нагляднее) использовать терминологию размещения шаров по ящикам. Каждой выборке $(u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_k})$ объема k из n элементов соответствует размещение k шаров по n ящикам, при этом первый шар помещают в ящик с номером i_1, ..., k-й шар — в ящик с номером i_k. Упорядоченным выборкам соответствует случай, когда все шары различимы (например, пронумерованы), а неупорядоченным выборкам — случай, когда все шары неразличимы (одинаковы). Выборкам с повторениями соответствуют размещения без запрета, когда в каждый ящик помещается сколько угодно шаров, а выборкам без повторений — размещения с запретом, когда в один ящик помещается только один шар. Например, неупорядоченным выборкам $[a, a]$ и $[a, b]$ из совокупности $U = \{a, b, c\}$ соответствуют следующие размещения двух одинаковых (одноцветных) шаров по трем ящикам: в первом случае оба шара помещают в первый ящик, а во втором — один шар кладут в первый ящик, другой — во второй. Упорядоченным выборкам соответствуют аналогичные размещения различных (разноцветных) шаров.

Таким образом, получаем:

$\bar{A}_n^k$ равно числу размещений k различимых шаров по n ящикам без запрета;

A_n^k равно числу размещений k различимых шаров по n ящикам с запретом;

$\bar{C}_n^k$ равно числу размещений k неразличимых шаров по n ящикам без запрета;

C_n^k равно числу размещений k неразличимых шаров по n ящикам с запретом.

Теорема проиллюстрирована на рис. 1 на примере выборок объема $k = 2$ из совокупности $U = \{a, b, c\}$ и соответствующих им размещений двух шаров по трем ящикам.

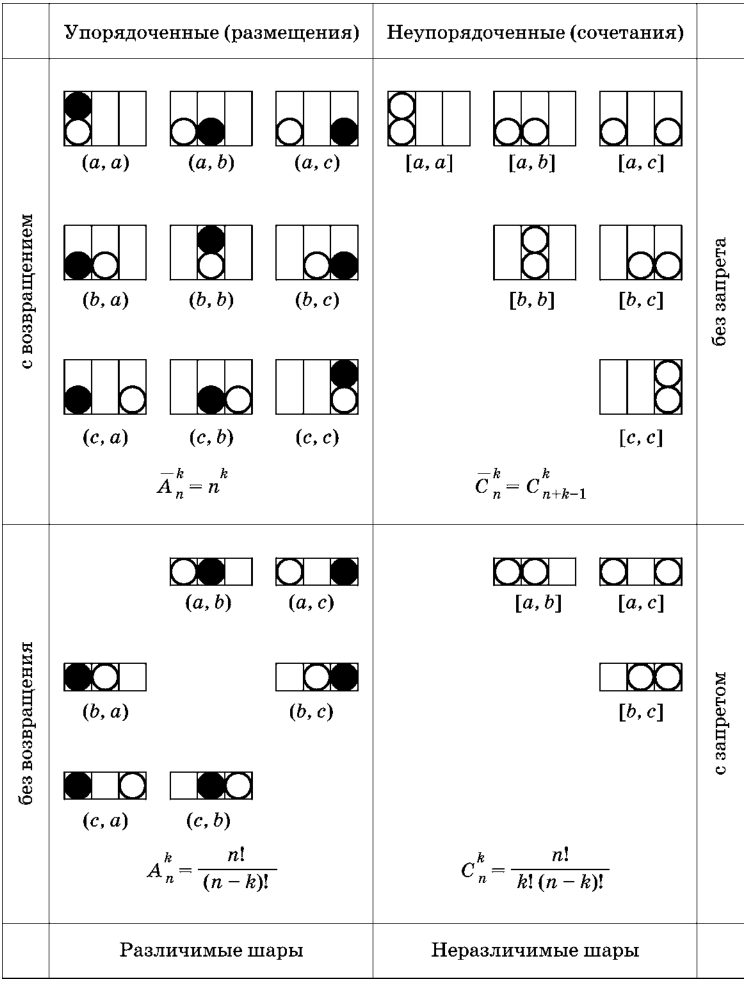


Рис. 1

Рассмотрим теперь различные упорядочивания данного множества, включающего n различных элементов. Получаемые при этом упорядоченные множества отличаются друг от друга лишь порядком входящих в них элементов. Их называют *перестановками без повторений из n элементов*, а их число обозначают P_n. Например, $P_3 = 6$, так как из трех элементов a, b, c можно составить шесть перестановок:

$$(a, b, c),\ (a, c, b),\ (b, a, c),\ (b, c, a),\ (c, a, b),\ (c, b, a).$$

Общая формула для P_n получается из формулы 2 теоремы 1.1, достаточно положить в этой формуле $k = n$. Получаем

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{0!} = \left|\begin{array}{c}\text{по определению,}\\ 0!=1\end{array}\right| = n!.$$

Если же среди элементов множества, состоящего из n элементов, не все элементы различны между собой, то перестановки на таком множестве называют *перестановками с повторениями*.

Рассмотрим частный случай — найдем число перестановок с повторениями из букв a, a, a, b, b, c, c. Сначала перенумеруем буквы: a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, c_1, c_2. Так как после нумерации все буквы стали различны (мы можем теперь отличить a_1 от a_3), то из них можно составить 7! перестановок, где $7 = 3 + 2 + 2$. Если стереть в каждой из этих перестановок значки при буквах, то получатся перестановки, которые различаются только порядком одинаковых элементов. Так как перестановки с таким свойством считаются неразличимыми, то следует не учитывать их при пересчете всех перестановок. Буквы a_1, a_2, a_3 можно переставлять 3! способами, буквы b_1, b_2 — 2! способами, буквы c_1, c_2 — 2! способами. Поскольку эти способы можно произвольным образом комбинировать друг с другом, то (a, a, a, b, b, c, c) получается из $3! \cdot 2! \cdot 2!$ перестановок букв a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, c_1, c_2.

Столькими же способами можно получить любую другую перестановку с повторениями букв a, a, a, b, b, c, c. Значит, число различных перестановок с повторениями в $3! \cdot 2! \cdot 2!$ раз меньше общего числа перестановок семи букв a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, c_1, c_2, т. е. равно $7!/3! \cdot 2! \cdot 2! = 210$.

Точно так же разбирается общий случай: количество $P(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ перестановок с повторениями, имеющих состав $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$, выражается формулой

$$P(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \frac{(k_1 + k_2 + \ldots + k_n)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!}.$$

Пример 1.6. Спортлото «5 из 36». Из 36 клеток на карточке зачеркивают 5. Исходы этого эксперимента можно интерпретировать, как выборки объема 5 из 36 чисел или как размещение 5 неразличимых шаров (крестиков) по 36 ящикам с запретом (в одну клетку — не более одного крестика). По теореме число всех способов заполнить карточку равно

$$C_{36}^{5} = \frac{36!}{5!31!} = 376\,992.$$

Пример 1.7. Спортпрогноз. Пусть, например, требуется назвать тройку призеров чемпионата России по футболу (18 команд). Исходы данного эксперимента — выборки объема 3 из 18 объектов (команд). Эти выборки упорядоченные («Спартак» на первом месте, а «Ротор» на втором или наоборот — это соответствует разным тройкам призеров) и без повторений (на каждое место ставится одна команда). Число всех способов назвать тройку призеров составляет

$$A_{18}^{3} = \frac{18!}{15!} = 16 \cdot 17 \cdot 18 = 4896.$$

Пример 1.8. Сколько «слов» можно получить, переставляя буквы *о, п, р, с, т*?

Переставляя буквы, получаем упорядоченные множества, которые отличаются друг от друга лишь порядком входящих в них букв. Имеем дело с перестановками без повторений, следовательно, «слов» получится

$$P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

Пример 1.9. На автоматической камере хранения — четыре диска с цифрами 0, 1, ..., 9. Шифр на камере хранения — это выборка объема 4 из 10 цифр. Шифры с разным порядком цифр различаются, и цифры в шифре могут повторяться. Следовательно, выборки упорядоченные и с повторениями, а число всех способов набрать шифр равно $\bar{A}_{10}^{4} = 10^4$.

Пример 1.10. Домино. На каждой костяшке домино по два числа от 0 до 6. Эти числа могут совпадать (дубли), а кости с разным порядком чисел (например, 2:1 и 1:2) не различаются. Таким образом, имеем неупорядоченные выборки объема 2 из 7 чисел с повторениями. Число всех таких выборок (число костей в домино) составляет

$$\bar{C}_7^2 = C_{7+2-1}^2 = \frac{8!}{2!6!} = 28.$$

Если «забивать козла» треугольными костями, на которых будет по три числа от 0 до 6, то число таких костей равно

$$\bar{C}_7^3 = C_{7+3-1}^3 = \frac{9!}{3!6!} = 84.$$

Пример 1.11. На карточках написаны буквы, составляющие слово «МИССИСИПИ». Маленький ребенок перемешивает все карточки и выкладывает их в ряд. Сколько различных «слов» он мог бы составить таким образом?

Результатом эксперимента будет некоторая расстановка имеющихся карточек. Поскольку среди букв встречаются одинаковые, то необходимо вычислить число перестановок с повторениями, имеющих состав (1, 4, 3, 1). Таким образом, различных слов можно составить $P(1, 4, 3, 1) = 9!/(1! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 1) = 2520$.

Пример 1.12. В студенческой группе 25 человек. Найти вероятность того, что:

а) в группе есть студенты, родившиеся в один и тот же день года;

б) в группе есть студенты, чьи дни рожденья совпадают с вашим.

Случайный эксперимент будет выглядеть так: выбирают случайную группу и составляют список дней рождения; исходами такого эксперимента являются списки дней рождения. Эти списки являются выборками объема 25 из 365 дней. Важный момент: равновозможными здесь являются только *упорядоченные* выборки. Для наглядности рассмотрим случай, когда в группе всего два студента, и сравним, например, два *неупорядоченных* списка:

1) оба дня рождения — 1 мая;

2) один день рождения — 1 мая, другой — 5 июня. Тогда второй список имеет в 2 раза большую вероятность (см. пример 1.2), т. е. выборки неравновозможны.

В данном примере списки — это выборки с повторениями (дни рождения могут совпадать). Таким образом, число всех возможных исходов (списков) равно числу размещений с повторениями из 365 по 25:

$$n = \bar{A}_{365}^{25} = 365^{25}.$$

Обозначим через B случайное событие, означающее, что в группе есть студенты, родившиеся в один и тот же день года. В данной задаче намного проще посчитать вероятность противоположного события: $\bar{B}$ = {в группе нет студентов, родившихся в один и тот же день}. Благоприятными для $\bar{B}$ являются исходы (списки), в которых нет одинаковых дат, т. е. выборки без повторений. Поскольку все исходы — это упорядоченные выборки, то такими же являются и благоприятные исходы. Таким образом, число благоприятных для $\bar{B}$ исходов равно числу размещений без повторений из 365 по 25, т. е. A_{365}^{25}, тогда

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{A_{365}^{25}}{\bar{A}_{365}^{25}} = 1 - \frac{365!}{340!365^{25}} \approx 0{,}57.$$

Результат кажется неправдоподобным: в группе из 25 человек с вероятностью, большей 1/2, найдутся студенты, родившиеся в один и тот же день года. Одно из объяснений несоответствия результата интуитивным представлениям состоит в том, что вместо искомой вероятности оценивается другая, а именно — вероятность события C = = {в группе есть студенты с вашим днем рождения}. Для вычисления вероятности C также удобно вычислить вероятность противоположного события $\bar{C}$ = {в группе нет студентов с вашим днем рождения}. Благоприятными для $\bar{C}$ являются исходы (списки), в которых не встречается один конкретный день (ваш день рождения), т. е. выборки объема 25 из 364 дней упорядоченные с повторениями. Число таких выборок равно $\bar{A}_{364}^{25}$, следовательно,

$$P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - \frac{\bar{A}_{364}^{25}}{\bar{A}_{365}^{25}} = 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^{25} \approx 0{,}07.$$

Для того чтобы безошибочно различать виды комбинаций (перестановки, размещения и сочетания), следует применять блок-схему «Комбинаторика» (см. приложение).

Комбинаторные задачи не всегда рассчитаны на одну формулу. Обычно встречаются задачи на применение нескольких формул или правил комбинаторики.

Пример 1.13. В мешке 25 шаров: 4 красных, 6 синих, 7 зеленых и 8 желтых. Сколькими способами можно достать 4 шара так, чтобы среди них были хотя бы три одинаковых?

«Хотя бы три» обозначает «ровно три» или «ровно четыре». Три красных шара можно выбрать из четырех имеющихся. Используем блок-схему «Комбинаторика» (см. приложение): порядок расположения элементов значения не имеет, используются не все элементы (3 из 4) и элементы не повторяются. Следовательно, имеем дело с сочетаниями без повторений. Тогда число способов, которыми можно достать 3 красных шара из 4, равно C_4^3. При этом четвертый шар может быть синим, зеленым или желтым. Число способов, которыми можно его выбрать, по правилу суммы равно 6 + 7 + 8. Три красных шара в четверку можно выбрать $C_4^3(6+7+8)$ способами (по правилу произведения). Таким образом, три одинаковых шара в четверку можно выбрать

$$C_4^3(6+7+8)+C_6^3(4+7+8)+C_7^3(4+6+8)+C_8^3(4+6+7)$$

способами (по правилу суммы), а четыре одинаковых — $C_4^4+C_6^4+C_7^4+C_8^4$ способами (по правилу суммы). Следовательно, общее число способов равно 2046 + 121 = 2167 (проверьте!).

1.3. ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

В этом разделе рассматривается распространенная комбинаторная схема, к которой можно свести решение большого числа вероятностных задач.

Пусть имеется n объектов (шаров), из которых n_1 отмеченных (окрашенных) и $n_2 = n - n_1$ неотмеченных (неокрашенных). Наугад без учета порядка и без возвращения извлекают k объектов. Требуется найти вероятность того, что среди k извлеченных объектов ровно k_1 отме-

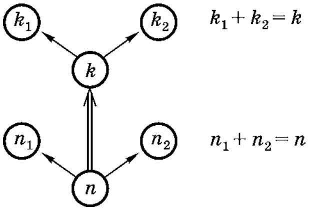


Рис. 2

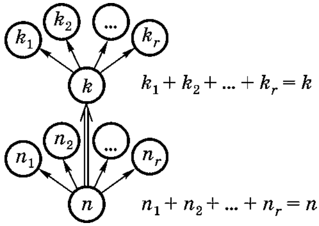


Рис. 3

ченных и, соответственно, $k_2 = k - k_1$ неотмеченных. Эта вероятность

$$p = \frac{C_{n_1}^{k_1} \cdot C_{n_2}^{k_2}}{C_n^k}. \qquad (2)$$

Набор таких вероятностей при $k_1 = 0, 1, ..., k$ называется *гипергеометрическим распределением*, или *гипергеометрическими вероятностями* (рис. 2).

Описанную выше схему можно распространить на случай нескольких типов объектов (шаров). Пусть имеется n_1 объектов 1-го типа, n_2 — 2-го типа и т. д., n_r — r-го типа, где $n_1 + n_2 + ... + n_r = n$. Наугад выбирают k объектов (выборка неупорядоченная и без повторений). Тогда вероятность того, что среди этих k объектов будет ровно k_1 объектов 1-го типа, k_2 — 2-го типа и т. д., k_r — r-го типа,

$$p = \frac{C_{n_1}^{k_1} \cdot C_{n_2}^{k_2} \cdot \ldots \cdot C_{n_r}^{k_r}}{C_n^k}. \qquad (3)$$

Набор таких вероятностей называется *многомерным гипергеометрическим распределением* (рис. 3).

П р и м е р 1.14. Найти вероятность минимального выигрыша в спортлото «5 из 36».

Имеется 36 клеточек, из которых 5 отмеченных (будем считать, что тираж уже прошел, есть 5 «счастливых» клеточек, но мы их не знаем). Наудачу выбирается (зачеркивается) 5 клеточек, и нужно найти вероятность того, что среди них 3 отмеченных («счастливых»). Согласно формуле для гипергеометрических вероятностей

$$p = \frac{C_5^3 \cdot C_{31}^2}{C_{36}^5} \approx 0{,}012.$$

По-видимому, полученная вероятность намного меньше, чем ожидают от вероятности минимального выигрыша.

Пример 1.15. 52 карты сдают на четверых. Найти вероятность того, что у конкретного игрока будет 5 карт пик, 4 червы, 3 бубны и 1 треф. Имеем по 13 карт четырех типов (мастей), и требуется найти вероятность того, что среди 13 наудачу выбранных (сданных) карт будут 5, 4, 3 и 1 карта указанных мастей. По формуле для вероятностей в многомерном гипергеометрическом распределении получаем

$$p = \frac{C_{13}^5 \cdot C_{13}^4 \cdot C_{13}^3 \cdot C_{13}^1}{C_{52}^{13}} \approx 0{,}0054.$$

1.4. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Что называется классической схемой?
2. Какие исходы называются благоприятными для события A?
3. Как вычисляется вероятность события в классической схеме?
4. Сформулируйте правило суммы.
5. Сформулируйте правило произведения.
6. Что называется выборкой объема k?
7. Какие выборки называются упорядоченными?
8. Какие выборки называются неупорядоченными?
9. Какие выборки называются размещениями?
10. Какие выборки называются сочетаниями?
11. Какие упорядоченные множества называются перестановками без повторений?
12. Какие упорядоченные множества называются перестановками с повторениями?
13. Какие выборки называются выборками с повторениями (с возвращением)?
14. Какие выборки называются выборками без повторений (без возвращений)?
15. Как обозначается число упорядоченных выборок с повторениями и без них?
16. Как обозначается число неупорядоченных выборок с повторениями и без них?
17. Чему равно число размещений из n по k без повторений (без возвращений)?
18. Чему равно число размещений из n по k с повторениями (с возвращениями)?
19. Чему равно число сочетаний из n по k без повторений?

20. Чему равно число сочетаний из n по k с повторениями?
21. Что называется гипергеометрическим распределением (гипергеометрическими вероятностями)?
22. Что называется многомерным гипергеометрическим распределением?

1.5. ВАРИАНТЫ ТИПОВОГО РАСЧЕТА

Вариант 1.

1. Наугад выбирается номер телефона из семи цифр. Найти вероятность того, что:

а) это номер телефона А. Б. Пугачевой;

б) все цифры номера различны.

2. Полная колода карт (52 листа) разбивается наугад на две равные стопки по 26 листов. Найти вероятность того, что:

а) в каждой стопке окажется по два туза;

б) в одной из стопок окажется хотя бы два туза.

Вариант 2.

1. Наугад выбирается автомобиль с четырехзначным номером. Найти вероятность того, что:

а) это автомобиль Ф. Киркорова;

б) номер не содержит одинаковых цифр.

2. Имеется девять лотерейных билетов, среди которых два выигрышных. Найти вероятность того, что среди пяти наудачу купленных билетов:

а) один билет выигрышный;

б) нет выигрышных.

Вариант 3.

1. Цифровой кодовый замок на сейфе имеет на общей оси пять дисков, каждый из которых разделен на десять секторов. Какова вероятность открыть замок, выбирая код наудачу, если кодовая комбинация:

а) неизвестна;

б) не содержит одинаковых цифр?

2. В зале имеется 20 белых и 10 синих кресел. Случайным образом места занимают 15 человек. Найти вероятность того, что они займут:

а) 5 белых и 10 синих кресел;

б) хотя бы одно синее кресло.

Вариант 4.

1. На книжной полке хранятся 20 томов собрания сочинений Л. Н. Толстого. Библиотекарь уронила все 20 томов с полки и наугад составила их обратно. Какова вероятность того, что:

а) она расставит книги в прежнем порядке;

б) тома с первого по пятый попадут на прежние места?

2. Из пакета, в котором лежат 12 пирожков с мясом, 5 — с капустой и 7 — с яблоками, берут 3 пирожка. Найти вероятность того, что среди них:

а) нет ни одного пирожка с яблоками;

б) все пирожки разные.

Вариант 5.

1. В конверте 10 фотографий, на двух из которых изображены отец и сын, объявленные в розыск. Следователь извлекает наугад последовательно без возвращения 5 фотографий. Найти вероятность того, что:

а) на первой из извлеченных фотографии будет отец, а на второй — сын;

б) фотография отца попадется раньше, чем фотография сына.

2. В кассе осталось 5 билетов по 10 рублей, 3 — по 30 рублей и 2 — по 50. Покупатели наугад берут 3 билета. Найти вероятность того, что из этих билетов имеют одинаковую стоимость:

а) два билета;

б) хотя бы два билета.

Вариант 6.

1. Десять вариантов контрольной работы по математике распределяются случайным образом среди восьми студентов, сидящих в одном ряду. Каждый получает по одному варианту. Найти вероятность того, что:

а) варианты 1-й и 2-й достанутся первым двум студентам;

б) первые 8 вариантов распределятся последовательно.

2. В розыгрыше кубка по футболу участвуют 16 команд, среди которых 5 команд первой лиги. Все команды по жребию делятся на две группы по 8 команд. Найти вероятность того, что:

а) все команды первой лиги попадут в одну группу;

б) в одну группу попадут хотя бы две команды первой лиги.

Вариант 7.

1. На сортировочном пункте в ожидании подачи на подъездной путь стоят шесть вагонов для разных направлений. Найти вероятность того, что в нужном порядке стоят:

а) все вагоны;

б) первые два вагона.

2. В группе из 25 человек трое занимаются армрестлингом, 10 — бодибилдингом, 5 — кикбоксингом, остальные — пауэр-лифтингом. Какова вероятность того, что среди трех наугад вызванных спортсменов:

а) хотя бы один занимается бодибилдингом;

б) один занимается армрестлингом, а другие два — кикбоксингом?

Вариант 8.

1. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 составляются разные трехзначные числа, которые записываются на отдельные карточки. Найти вероятность того, что в наугад взятой карточке:

а) написано число 123, если исходные цифры не повторяются;

б) написано число 123, если исходные цифры могут повторяться.

2. В шахматном турнире участвуют 10 гроссмейстеров, 6 международных мастеров и 4 мастера спорта. Найти вероятность того, что в первой паре встретятся шахматисты:

а) одной категории;

б) разных категорий.

Вариант 9.

1. Восемь гостей случайным образом занимают места за столом, сервированным на 12 персон. Какова вероятность того, что:

а) каждый гость займет место, приготовленное специально для него;

б) две самые важные персоны окажутся за столом рядом?

2. Среди десяти команд научно-технического конкурса г. Омска 4 команды из Университета путей сообщения

(ОмГУПС) и 2 — из Аграрного университета (ОмГАУ). Для участия в конкурсе на сцену по жребию вызывают 3 команды. Какова вероятность, что среди них:

а) все команды из ОмГУПСа;

б) одна команда из ОмГУПСа, а две другие — не из ОмГАУ?

Вариант 10.

1. Уставший пассажир набирает четырехзначный код камеры хранения на вокзале. Какова вероятность того, что пассажир откроет камеру, если он помнит лишь, что его код:

а) состоит из различных цифр;

б) не содержит цифр 1, 2, 3?

2. У мастера в ящике 30 деталей, из которых половина бракованных, треть — высшего качества, остальные стандартные. Мастер берет наугад 10 деталей. Найти вероятность того, что среди выбранных деталей:

а) половина бракованных;

б) две детали высшего качества и четыре стандартных.

Вариант 11.

1. Имеется пять отрезков, длины которых соответственно равны 1, 3, 6, 7 и 9 см. Наугад берут три из них. Какова вероятность того, что:

а) первый отрезок будет длиной 6, а второй — 7 см;

б) из этих отрезков можно построить треугольник?

2. Среди десяти подарков к Новому году три подарка с красной икрой, пять — с черной и два — с икрой заморской, баклажанной. Какова вероятность того, что среди трех наугад взятых подарков:

а) два содержат красную икру;

б) все три подарка с разной икрой?

Вариант 12.

1. К подъезду Транспортной академии в случайном порядке подъезжают 10 автомобилей разных марок. Какова вероятность того, что:

а) первая подъехавшая машина — «Таврия», вторая — «Мерседес», а третья — «Феррари»;

б) «Запорожец» подъедет раньше «Порше»?

2. На тридцати карточках нарисованы многоугольники, из которых 20 выпуклых, 10 правильных выпуклых и 10 невыпуклых. Найти вероятность того, что на пяти наугад выбранных карточках окажутся нарисованы:

а) три правильных многоугольника;

б) два правильных многоугольника и два невыпуклых.

Вариант 13.

1. Студент забыл четырехзначный идентификационный код своей кредитной карточки. Какова вероятность того, что студент получит стипендию, набирая код наудачу, если он помнит, что:

а) все цифры кода различны;

б) код не содержит цифр 0 и 1?

2. В детский дом города Алдан пришло 15 посылок из академии. В четырех из них — зимние вещи, в одной — кожаный пиджак, в остальных — книги. Наугад открывают три посылки. Какова вероятность того, что:

а) в двух из них — зимние вещи и в одной — кожаный пиджак;

б) все три посылки — с книгами?

Вариант 14.

1. На штрафной стоянке наугад выбирают автомобиль с четырехзначным номером. Найти вероятность того, что его номер:

а) не содержит четных цифр;

б) содержит цифру 7.

2. Для очередной передачи «Угадай мелодию» было подготовлено 30 песен, из которых 15 — о любви, 10 — о животных, остальные — о погоде. В первом туре прозвучало 12 песен. Найти вероятность того, что:

а) все 12 песен о любви;

б) пять песен о любви и пять — о животных.

Вариант 15.

1. Домашняя обезьянка бьет лапой по клавишам пишущей машинки пять раз. Какова вероятность, что напечатанные буквы:

а) составят имя ее хозяина «Сидор»;

б) образуют слово, начинающееся с буквы «И»?

2. В группе из тридцати человек 10 выполнили домашнее задание полностью, 15 — частично, остальные вообще не сделали его. Преподаватель берет наугад пять тетрадей с домашним заданием. Найти вероятность того, что среди этих тетрадей:

а) все пять — с выполненным полностью домашним заданием;

б) две — с частично выполненным заданием и две — вообще без домашнего задания.

Вариант 16.

1. Спортивный комментатор забыл счет баскетбольного матча, но помнит, что каждая команда набрала меньше 100 очков. Какова вероятность того, что, объявляя счет наугад, комментатор правильно назовет число очков, набранных первой командой, если ему подсказали, что это число:

а) не содержит цифр 5 и 6;

б) содержит цифру 9?

2. В третий тур конкурса красоты прошли 6 участниц из России, 5 — из Украины и 4 — из Болгарии. Для представления участниц на сцену наугад приглашают 5 девушек. Найти вероятность того, что среди приглашенных:

а) все девушки из России;

б) две девушки из России и две — из Болгарии.

Вариант 17.

1. В финальном забеге на 100 м участвуют по два студента с четырех курсов. Найти вероятность того, что:

а) первым пробежит дистанцию студент первого курса, вторым — студент четвертого курса и третьим — студент третьего курса;

б) в тройке призеров не будет студентов четвертого курса.

2. В студенческой столовой на обед предлагается по три вида салатов, первых и вторых блюд. Студент, как обычно, берет на обед пять блюд. Найти вероятность того, что он взял:

а) три салата;

б) два первых и два вторых блюда.

Вариант 18.

1. Студенты трех групп (по 25 человек в каждой) выбирают трех человек для участия в профсоюзной конференции: руководителя делегации, докладчика и содокладчика. Какова вероятность того, что:

а) для этого будут выбраны старосты первой, второй и третьей групп соответственно;

б) докладчиком и содокладчиком будут выбраны старосты?

2. В Зеленом зале художественного салона развешаны картины: 10 натюрмортов русских художников, 5 полотен французских импрессионистов и 3 картины представителей сюрреализма. Воры в темноте наугад снимают 5 картин. Какова вероятность того, что среди этих картин:

а) три натюрморта;

б) по две картины импрессионистов и сюрреалистов?

Вариант 19.

1. На экзамене по теории вероятностей предлагаются 10 задач на классическую схему и по 5 — на схему Бернулли и геометрическую схему. Студент последовательно пытается решить 3 задачи. Какова вероятность того, что:

а) первая задача окажется на классическую схему, вторая — на схему Бернулли и третья — на геометрическую схему;

б) первая задача была не на классическую схему?

2. В сборнике «Сказки» из 50 сказок — 20 русских и 10 татарских. Учитель наугад по оглавлению выбирает 4 сказки. Найти вероятность того, что среди выбранных сказок:

а) ни одной русской и ни одной татарской сказки;

б) две русских и одна татарская сказка.

Вариант 20.

1. В больнице у кабинета врача ожидают приема по одному больному из палат №№ 1–5 и двое больных из палаты № 6. Врач наугад приглашает по одному больному. Какова вероятность того, что:

а) первым будет приглашен больной из палаты № 6, а второй — не из палаты № 6;

б) трое первых больных, принятых врачом, окажутся соответственно из палат №№ 1, 2 и 3?

2. На прилавках супермаркета «Тройка» выставлены одинаковые банки: 5 — с соком смородины, 10 — с соком вишни и 5 — с вином. Неразборчивый покупатель не глядя берет 5 банок. Найти вероятность того, что:

а) три из них будут с вином;

б) две банки будут со смородиновым и две — с вишневым соком.

Вариант 21.

1. В университете после обеда оказались свободными 10 аудиторий. Преподаватели Иваненко, Петренко и Сидоренко случайным образом занимают аудитории для консультаций со студентами. Какова вероятность того, что:

а) аудитории № 401, 405 и 406 займут соответственно Иваненко, Петренко и Сидоренко;

б) аудитория № 433 не будет занята Иваненко?

2. На кафедре математики в шкафу хранятся 30 свернутых в рулоны плакатов, из которых 15 — для занятий по аналитической геометрии, а 10 — по математическому анализу. Преподаватель берет 5 рулонов наугад. Найти вероятность того, что среди них:

а) три плаката будут по аналитической геометрии;

б) два плаката — по аналитической геометрии и два — по математическому анализу.

Вариант 22.

1. Компьютер тайно от оператора формирует четырехзначный кодовый номер кредитной карточки для клиента банка, используя датчик случайных чисел. Какова вероятность, что оператор угадает код карточки, если он знает, что:

а) цифры в коде не повторяются;

б) код не содержит цифры 0 и 1?

2. Дети собрали в лесу 10 белых грибов, 15 груздей и 5 мухоморов. Бабушка наудачу извлекает из корзины 5 грибов. Какова вероятность того, что среди них:

а) три мухомора;

б) два груздя и два белых гриба?

Вариант 23.

1. В вагон, в котором 36 мест, 4 пассажира купили билеты (с указанием мест). Проводник рассаживает пассажиров по местам по только ему известному правилу. Найти вероятность того, что:

а) все пассажиры попадут на свои места;

б) кто-нибудь не попадет на свое место.

2. В городе Урюпинске три средние школы, три техникума и два училища. Три выпускника Омского университета получили распределение в Урюпинск в разные учебные заведения, которые они выбрали по жребию. Какова вероятность того, что:

а) все выпускники попадут в школы;

б) выпускники попадут в учебные заведения разных категорий?

Вариант 24.

1. У шестерых спортсменов кроссовки разных размеров. После душа в темной раздевалке каждый выбрал себе кроссовки наугад. Найти вероятность того, что:

а) все кроссовки достанутся своим хозяевам;

б) кроссовки 45-го и 46-го размеров достанутся своим хозяевам.

2. В читальном зале библиотеки на полке стоит 20 справочников, в том числе 10 — по математике, и в шести из них содержатся нужные студенту сведения. Студент наудачу набирает 5 справочников. Найти вероятность того, что:

а) в трех из них содержится нужная информация;

б) студент выберет три справочника по математике, а нужная информация будет в одном из них.

Вариант 25.

1. У ювелира имеется шесть различных драгоценных камней, и каждый из них по гороскопу народов Барбадоса соответствует одному из знаков зодиака. Шесть дам, родившихся под разными знаками зодиака и не знакомых с культурой Барбадоса, купили у ювелира по одному драгоценному камню. Какова вероятность того, что:

а) каждой даме достался камень, соответствующий ее знаку;

б) самой юной даме достался «ее» камень?

2. В ресторане на острове Занзибар в аквариуме ждут своей участи рыбы: 4 бельдюги, 3 простипомы и сельдь. Официант сачком наугад вылавливает 3 рыбы. Какова вероятность того, что он поймал:

а) две простипомы;

б) две бельдюги и сельдь?

Вариант 26.

1. Из карточек разрезной азбуки составлено слово ПОРТРЕТ. Маленький ребенок перемешал буквы, выбрал 4 из них и сложил слово. Какова вероятность, что это:

а) слово ПОРТ;

б) слово ТОРТ?

2. В канцелярском магазине продаются одинаковые по виду тетради в клетку, линейку и в специальную линейку для первоклассников. Продавец наугад достает пять тетрадей. Какова вероятность, что:

а) три из них в клетку;

б) одна в клетку и две в специальную линейку для первоклассников?

Вариант 27.

1. Садовод решил посадить вдоль дорожки к дому в ряд две рябины, две яблони и две вишни. Он подготовил саженцы и выкопал ямы для посадки. Пока садовод отдыхал, его племянник, решив помочь дяде, посадил деревца, не зная нужной последовательности. Какова вероятность, что:

а) посадка окажется точно такой, какой ее задумал дядя;

б) на своих местах окажутся только яблони?

2. В киоске продаются стаканчики мороженого разных видов: шоколадное, пломбир, а также с наполнителями из карамели, вареной сгущенки, черники. Студент для себя и своих друзей покупает наугад 7 стаканчиков мороженого. Какова вероятность, что он купил:

а) два пломбира, два шоколадных и три с черникой;

б) четыре стаканчика с черничным наполнителем и три с вареной сгущенкой?

Вариант 28.

1. На олимпиаде по математике в десятку сильнейших попали 4 команды теплоэнергетического факультета (ТЭФ), 3 команды электромеханического факультета (ЭМФ), 2 команды — института менеджмента и экономики (ИМЭК) и 1 команда — механического факультета (МФ). Какова вероятность того, что:

а) все призовые места будут заняты командами ТЭФа;

б) на первом, втором и третьем месте окажутся команды ЭМФа, МФа и ИМЭКа соответственно?

2. В корзине лежат 5 яблок, 6 груш и 4 апельсина. Наташа наугад вынимает четыре фрукта. Какова вероятность, что среди них:

а) два яблока и две груши;

б) яблоко, апельсин и две груши?

Вариант 29.

1. В эту сессию студенту предстоит сдать пять экзаменов, из которых три для него представляются несложными, а два требуют серьезной подготовки. Какова вероятность, что в расписании:

а) оба требующие серьезной подготовки экзамена будут в начале сессии;

б) трудные экзамены не будут следовать друг за другом?

2. В коробке перемешаны пакетики с чаем: 10 — с зеленым, 15 — с черным, 10 — с фруктовым. Хозяйка заваривает пятерым гостям чай из наугад вынутых пакетиков. Какова вероятность, что гостям подадут:

а) чай одного вида;

б) две чашки черного чая, две зеленого и одну чашку фруктового?

Вариант 30.

1. Код сейфа в банке содержит две латинские буквы и четыре цифры. Какова вероятность открыть сейф, набирая код наудачу, если известно, что:

а) ни буквы, ни цифры не повторяются;

б) буквы одинаковы, а среди цифр нет ни 3, ни 7?

2. В вазочке на столе остались 3 конфеты «Фея», 7 конфет «Ромашка», 8 конфет «Осень» и 2 ириски. Марина берет наугад три конфеты. Какова вероятность, что девочка взяла:

а) две ириски;

б) по одной шоколадной конфете всех трех сортов?

ГЛАВА 2

СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

В конце XIX — начале XX века теория вероятностей сложилась как самостоятельный раздел математики.

Однако согласно принятым взглядам ту или иную теорию нельзя считать строго обоснованным разделом математики до тех пор, пока она не станет формализованной, т. е. пока для нее не будет построена система аксиом. Для теории вероятностей эта проблема стояла настолько остро, что задача ее аксиоматики была включена под номером 6 в число 23 проблем, сформулированных Давидом Гильбертом и «завещанных» математикам XX века в 1899 году на втором Международном математическом конгрессе.

Включение этой задачи в ряд важнейших математических проблем века, безусловно, стимулировало многочисленные исследования в этом направлении; наиболее известны работы по формализации теории вероятностей Р. Мизеса, А. Бореля, Е. Слуцкого, П. Леви.

В 1933 году А. Н. Колмогоров в работе «Основные понятия теории вероятностей» предложил теоретико-множественную формализацию (аксиоматику) теории вероятностей, которая в настоящее время является общепринятой в математике.

В данной главе теоретико-множественная формализация теории вероятностей излагается на базе математических средств, доступных студентам технических вузов.

2.1. ИДЕЯ ФОРМАЛИЗАЦИИ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Идея теоретико-множественной формализации теории вероятностей состоит в том, чтобы каждое *случайное событие*, связанное со случайным экспериментом, отождествить с некоторым *множеством*. При этом обычным теоретико-множественным операциям (объединению, пересечению и т. д.) будут соответствовать некоторые операции над событиями.

Вероятностью в аксиоматике А. Н. Колмогорова является объект, который в метрической теории множеств обычно называют *мерой*.

Рассмотрим идею формализации более подробно.

Теория вероятностей изучает математические модели *случайных экспериментов*, т. е. таких, исход которых не определяется однозначно условиями опыта. Более того, эти математические модели строятся лишь для случайных экспериментов, обладающих свойством *статистической устойчивости*. Данное свойство описывается следующим образом. Повторим случайный эксперимент n раз и обозначим через k_A число появлений события A, связанного с нашим экспериментом. Тогда с ростом n *относительная частота* k_A/n появления события A «*стабилизируется*» около некоторого значения p_A. Заметим, что это описание не является определением, в нем никак не уточняется, что значит «частота стабилизируется»; по сути, речь идет лишь об интуитивной уверенности в том, что эксперимент обладает свойством статистической устойчивости.

Пусть, например, эксперимент состоит в подбрасывании симметричной монеты. Исход этого эксперимента («орел» или «решка») однозначно предсказать нельзя. Следовательно, рассматриваемый эксперимент — случайный. Если обозначить через k_0 число выпадений «орла» в n бросаниях монеты, то интуитивно понятно, что (поскольку монета симметричная) относительная частота k_0/n появления «орла» при больших n мало отличается от $1/2$, а это и означает, что эксперимент обладает статистической устойчивостью.

Введем понятие *элементарных* исходов случайного эксперимента. Предположим, среди исходов эксперимента можно выделить такие, что:

1) любые два из них не могут иметь место одновременно, и хотя бы один из них в данном эксперименте происходит обязательно;

2) каково бы ни было случайное событие A, связанное с данным экспериментом, по наступившему исходу можно сказать, произошло событие A или нет. Другими словами, элементарные исходы должны содержать всю информацию о случайном эксперименте.

Элементарные исходы (события) обычно обозначают ω, а совокупность всех элементарных исходов — $\Omega = \{\omega\}$.

П р и м е р 2.1. Случайный эксперимент состоит в бросании игральной кости. Исходы ω_i = {выпало i очков на верхней грани кости}, $i = 1, 2, \ldots, 6$, являются элементарными. Действительно, на верхней грани не может одновременно выпасть, например, два и шесть очков, при этом какое-то определенное (одно) число очков выпадет обязательно. Таким образом, первое условие в описании элементарных исходов выполнено. Рассмотрим какое-нибудь событие, связанное с данным экспериментом. Пусть, например, A = {выпадение четного числа очков}. По наступлению любого исхода ω_i можно судить о появлении (или о непоявлении) события A: если наступил исход ω_1, то A не произошло; если наступил исход ω_2, то A произошло, и т. д. Второе условие также выполнено. Следовательно, исходы ω_i — элементарные.

П р и м е р 2.2. Случайный эксперимент состоит в двукратном бросании монеты. Исходы ω_i = {выпало i орлов}, $i = 0, 1, 2$, не являются элементарными. Действительно, пусть A = {в первом бросании монеты выпал орел}. Если, например, наступил исход ω_1 = {выпал один орел}, то нельзя сказать, произошло событие A или нет. В качестве элементарных исходов в данном случае можно взять такие:

$\omega_1 = \{O_1O_2\}$ = {в первом и втором бросании монеты выпал орел};

$\omega_2 = \{O_1P_2\}$ = {в первом бросании выпал орел, во втором — решка};

$\omega_3 = \{P_1O_2\}$ = {в первом бросании выпала решка, во втором — орел};

$\omega_4 = \{P_1P_2\}$ = {в первом и во втором бросании монеты выпала решка}.

Пусть A — случайное событие. Те элементарные исходы, которые влечет за собой наступление A, назовем *благоприятными* для A. Обозначим через A' совокупность всех благоприятных для A исходов. Основная идея теоретико-множественной формализации теории вероятностей состоит в том, чтобы *отождествить* A и A', т. е. считать *множества* случайными *событиями*.

Таким образом, событие A наступает тогда и только тогда, когда происходит какой-либо исход $\omega \in A$. Скажем, в примере 2.1 событие A = {выпало четное число очков} отождествляется с множеством благоприятных исходов $A' = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$.

Рассмотрим, какие события будут соответствовать объединению и пересечению множеств. Событие A происходит тогда и только тогда, когда $\omega \in A$. Аналогичное утверждение имеет место для события B. Тогда $\omega \in A \bigcup B$, если $\omega \in A$ или $\omega \in B$, т. е. событие $A \bigcup B$ происходит тогда и только тогда, когда наступает событие A *или* событие B. Событие $A \bigcup B$ называют *суммой* событий A и B.

Аналогично $\omega \in A \bigcap B$, если $\omega \in A$ *и* $\omega \in B$, т. е. событие $A \bigcap B$ наступает, когда события A и B происходят вместе (т. е. происходит и событие A, и событие B). Событие $A \bigcap B$ называют *произведением* событий A и B.

Дополнению $\overline{A} = \{\omega : \omega \notin A\}$ соответствует событие, наступающее тогда, когда событие A *не* происходит. $\overline{A}$ называется событием, *противоположным* событию A.

Например, производится залп по мишени из двух орудий. Пусть событие A = {мишень поражена первым орудием}, событие B = {мишень поражена вторым орудием}. Тогда случайное событие, равное сумме этих событий, $A \bigcup B$ = {мишень поражена хотя бы одним орудием (первым или вторым)}. Событие, равное произведению этих событий, $A \bigcap B$ = {мишень поражена и первым, и вторым орудием}. Событие $\overline{A} \bigcap \overline{B}$ = {мишень не поражена ни первым, ни вторым орудием}.

Таблица 1

Основные обозначения и понятия теории вероятностей и соответствующие им теоретико-множественные понятия

Обозначение	**Теоретико-множественная терминология**	**Теоретико-вероятностная терминология**
ω	Неопределяемый объект	Элементарный исход
Ω	Множество всех ω (произвольное множество)	Пространство элементарных исходов или достоверное событие
F	σ-алгебра подмножеств из F	Множество всех случайных событий
$A \in F$	Элемент из F (множество)	Случайное событие
$\omega \in A$	Элемент из A	Благоприятный для A исход (событие происходит тогда и только тогда, когда имеет место хотя бы один исход из A)
$\varnothing$	Пустое множество	Невозможное событие
$A \bigcup B$	Объединение множеств A и B	Событие «A или B» (сумма событий)
$A \bigcap B (A \cdot B)$	Пересечение множеств A и B	Событие «A и B» (произведение событий)
$A \subset B$	A есть подмножество B	Если A, то B (импликация)
$\bar{A}$	Дополнение до A	Событие «не A» (противоположное для A)
$A \bigcap B = \varnothing$	A и B не пересекаются	A и B несовместны

Другим теоретико-множественным операциям соответствуют свои теоретико-вероятностные интерпретации (табл. 1).

Таким образом, в формализованной теории вероятностей случайными событиями являются подмножества из Ω. Однако существуют серьезные причины (в основном технического характера), в силу которых не всякое подмножество из Ω можно считать событием. Обычно выделяют *некоторый класс* F подмножеств из Ω, элементы которого считаются *случайными событиями*, при этом подмножества из Ω, не входящие в F, событиями не считаются. Предполагается, что такой класс F должен удовлетворять некоторым требованиям, а именно: образовывать так называемую σ-*алгебру* (п. 2.2., определение 2.1). В настоящей главе это понятие практически использоваться не будет, но совсем обойтись без него при грамотной аксиоматике теории вероятностей невозможно.

В формальной теории вероятностей вводится понятие *вероятности*. Можно сказать, что интуитивные представления о вероятности, которые имеются у нас в некоторых простых ситуациях, распространяются на произвольные случайные эксперименты. Рассмотрим, например, случайный эксперимент с конечным числом равновозможных исходов (далее это будет называться классической схемой). Интуитивно понятно, что вероятность случайного события, связанного с данным экспериментом, находится как отношение числа благоприятных исходов для этого события к числу всех элементарных исходов.

Очевидно, что, во-первых, вероятность, введенная таким образом, неотрицательна, во-вторых, вероятность достоверного события равна единице и, в-третьих, если два события не могут произойти вместе, то вероятность суммы этих событий равна сумме их вероятностей. В аксиоматической теории вероятностей *вероятностью* называется любой объект, обладающий перечисленными выше свойствами (только вместо последнего свойства в аксиомах теории вероятностей будет более сильное утверждение). В таких ситуациях говорят, что дано *дескриптивное* определение вероятности, т. е. вероятность задается перечислением свойств.

Тройка (Ω, F, P) называется *вероятностным пространством*, и оно является *математической моделью* случайного эксперимента.

Что же является предметом изучения теории вероятностей? Можно сказать, что теория вероятностей начинается словами: «пусть задано вероятностное пространство (Ω, F, P)», т. е. вероятностное пространство предполагается заданным, а изучают производные от него объекты (т. е. изучают, что можно получить на основе этого вероятностного пространства с помощью аксиом теории вероятностей).

Вопросы построения вероятностного пространства формально к теории вероятностей не относятся, хотя решение конкретных задач приходится начинать с вопроса о том, с каким именно вероятностным пространством предстоит работать. Иначе говоря, при решении вероятностных задач сначала приходится заниматься некоторой неформальной деятельностью: на интуитивном уровне устанавливать, является ли моделью данного эксперимента классическая схема, схема Бернулли или что-то еще, а затем, уже в рамках выбранной модели (вероятностного пространства), решать задачу формальной теории вероятностей.

2.2. АКСИОМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Пусть $\Omega = \{\omega\}$ — произвольное множество. Назовем Ω пространством элементарных исходов, а $\omega \in \Omega$ — *элементарными исходами* (элементарными событиями).

Замечание 2.1. В формальной теории вероятностей элементарный исход — неопределяемое понятие как, например, точка в геометрии. Однако, как указывалось в п. 2.1, при решении конкретных задач в качестве элементарных исходов будут выбираться конкретные исходы изучаемого эксперимента, обладающие определенными свойствами.

Определение 2.1. *σ-алгеброй* называется класс F подмножеств из Ω, удовлетворяющий условиям:

$$\Omega \in F;$$

если $A \in F$, то $\bar{A} \in F$;

если $A_n \in F$, $n = 1, 2, \ldots$, то $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in F$.

Пусть задана σ-алгебра подмножеств из Ω. Множество $A \in F$ назовем *случайным событием*, а элемент $\omega \in A$ — *благоприятным для A элементарным исходом*. Множество всех элементарных исходов Ω назовем *достоверным событием*, а пустое множество $\varnothing = \bar{\Omega}$ — *невозможным событием*.

Замечание 2.2. Из определения σ-алгебры следует, что если A — случайное событие, то $\overline{A}$ — тоже случайное событие; объединение и пересечение случайных событий также являются случайными событиями.

Определение 2.2. Вероятностью на σ-алгебре F называется числовая функция $P(A)$ аргумента $A \in F$, удовлетворяющая следующим свойствам (аксиомам):

$$P(A) \geq 0; \quad P(\Omega) = 1;$$

если $A_n \in F$, $n = 1, 2, \ldots$, и $A_i \bigcup A_j = \varnothing$, $i \neq j$, то

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

Определение 2.3. Тройка (Ω, F, P) называется *вероятностным пространством*.

Замечание 2.3. Формализация вероятностного эксперимента — это построение вероятностного пространства, подходящего для данного эксперимента. Вероятностное пространство является математической моделью случайного эксперимента.

Отметим (без доказательства) *свойства вероятностей*, которые выводятся из приведенных выше аксиом:

Свойство 1. $P(\varnothing) = 0$.

Свойство 2. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Свойство 3. Если $A \subseteq B$, то $P(A) \leq P(B)$.

Свойство 4. $P(A) \leq 1$.

Свойство 5. $P(A \bigcup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

Свойство 6. $P(A \bigcup B \bigcup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC)$.

2.3. ПРИМЕРЫ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Приведем два примера случайных экспериментов и соответствующих им вероятностных пространств (математических моделей этих экспериментов). Термин «схема» будет использоваться как для обозначения случайного эксперимента, так и для его математической модели.

Пример 2.3. Классическая схема.

Случайный эксперимент назовем *классической схемой*, если он имеет конечное число *равновозможных* элементарных исходов. Построим соответствующее этому эксперименту вероятностное пространство. Пусть $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ — *конечное* множество. В качестве случайных событий будем рассматривать *произвольные* подмножества из Ω, т. е. σ-алгеброй F является множество всех подмножеств из Ω. Положим $P(\omega_i) = 1/n$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Таким образом, вероятность P определена для любого события A: если $A \in F$, то в силу аксиомы 3

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega) = \frac{k}{n},$$

где k — число благоприятных для A исходов; n — число всех исходов.

Пример 2.4. Геометрическая схема.

Случайный эксперимент состоит в бросании точки наугад на отрезок $[0, 1]$. В качестве элементарных исходов можно взять события $\omega_x = \{$наугад брошенная точка попала в точку $x\}$, $x \in [0, 1]$. Следующий естественный шаг — отождествление исхода ω_x и точки x. Тогда событие $\{$попадание наугад брошенной точки в множество $A \subset [0, 1]\}$ отождествляется с множеством A, при этом $\Omega = [0, 1]$. Однако в этом случайном эксперименте нельзя любое подмножество из $[0, 1]$ считать случайным событием (о чем говорилось выше). Поэтому выделяется σ-алгебра F подмножеств из $[0, 1]$, содержащая все интервалы, отрезки, полуинтервалы и т. д., и множества из этой σ-алгебры называют *случайными событиями*. Понятие «наугад брошенная точка на $[0, 1]$» интерпретируется следующим образом: вероятность попадания точки в интервал длиной $\alpha < 1$ не зависит от положения данного интервала внутри $[0, 1]$. Можно показать, что единственной вероятностью, удовлетворяющей этому свойству, является вероятность, приписывающая интервалу его длину α.

Аналогично показывается, что если точку бросают наугад на отрезок (интервал) длиной L, то вероятность попасть на отрезок (интервал) длиной d равна d/L, т. е. отношению длин множества благоприятных и множества всех возможных исходов.

2.4. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. В чем состоит идея теоретико-множественной формализации теории вероятностей?
2. Разъясните суть свойства *статистической устойчивости*.
3. Сформулируйте понятие *элементарного исхода* случайного эксперимента.
4. Какие элементарные исходы называют *благоприятными*?
5. Какие события соответствуют объединению и пересечению? произведению? дополнению?
6. В чем смысл равенств $A \cdot B = B$ и $A + B = A$?
7. Что называется *вероятностным пространством*?
8. Составить пространства элементарных исходов для следующих экспериментов:

а) подбрасывание двух игральных костей;

б) стрельба по мишени до первого попадания.

9. Дайте определение σ-*алгебры*.
10. Что называется вероятностью на σ-*алгебре* F?
11. Перечислите свойства вероятностей.
12. Когда случайный эксперимент называется *классической схемой*?
13. На новогоднем вечере участники лотереи тянут билетики с номерами от 1 до 100. Найти вероятность того, что номер первого наудачу извлеченного билетика не содержит цифры 4.
14. Что является обобщением понятия *классическая схема* на случай экспериментов с бесконечным (несчетным) числом исходов?

2.5. ВАРИАНТЫ ТИПОВОГО РАСЧЕТА

Вариант 1.

1. Эксперимент состоит в двух выстрелах по мишени. Событие A — попадание в мишень первым выстрелом; событие B — попадание в мишень вторым выстрелом. Постройте множество элементарных исходов и выявите состав подмножеств, соответствующих событиям:

а) $A \bigcup B$;

б) $A \bigcap B$;

в) $\bar{A} \bigcup \bar{B}$.

2. В библиотеке университета путей сообщения есть две книги по теории вероятностей: В. Е. Гмурмана и А. А. Боровкова. Вероятность того, что в течение семестра будет затребована книга первого автора, равна 0,7, второго — 0,9. Какова вероятность того, что к концу семестра:

а) ни одна, ни другая книга не будут затребованы;

б) хотя бы одна из книг будет выдана;

в) будет выдана только книга А. А. Боровкова?

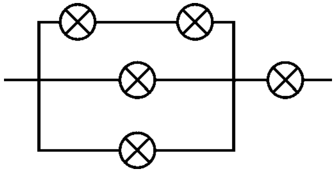


Рис. 4

3. При включении в сеть цепи (рис. 4) каждый элемент выходит из строя с вероятностью 0,8. Найти вероятность того, что в момент включения цепь не разомкнется.

Вариант 2.

1. Эксперимент состоит в бросании игральной кости. Пусть событие A — появление больше 4 очков, событие B — появление больше 3 и меньше 6 очков, событие C — появление больше 3 очков. Выразите событие C через события A и B. Постройте множество элементарных исходов и выявите состав подмножеств, соответствующих событиям:

а) $A \bigcup B$;

б) $A \bigcap \bar{B}$.

2. Два поэта-песенника предложили по одной песне исполнителю. Известно, что песни первого поэта эстрадный певец включает в свой репертуар с вероятностью 0,6, второго — с вероятностью 0,8. Какова вероятность того, что певец возьмет:

а) обе песни;

б) хотя бы одну;

в) только песню второго поэта?

3. Два гроссмейстера играют две партии в шахматы. Вероятность выигрыша в одной партии для первого шахматиста равна 0,2, для второго — 0,3; вероятность ничьей — 0,5. Какова вероятность того, что первый гроссмейстер выиграет матч?

Вариант 3.

1. Пусть A, B, C — случайные события, выраженные подмножествами одного и того же множества элементарных событий. В алгебре событий $\{A, B, C\}$ запишите следующее:

а) из данных событий произошло только A;

б) произошло хотя бы одно из данных событий;

в) произошло более одного из данных событий.

2. Два баскетболиста делают по одному броску мячом по корзине. Для первого спортсмена вероятность попадания равна $0{,}7$, для второго — $0{,}9$. Какова вероятность того, что в корзину попадут:

а) оба игрока;

б) хотя бы один из них;

в) попадет только первый спортсмен?

3. Экзаменационный билет по математике содержит три вопроса (по одному из трех разделов). Студент знает три из десяти вопросов первого раздела, девять из пятнадцати — второго и все двадцать вопросов третьего раздела. Преподаватель ставит положительную оценку при ответе хотя бы на два вопроса билета. Какова вероятность того, что студент не сдаст экзамен?

Вариант 4.

1. Эксперимент состоит в бросании кости. Пусть событие A — появление трех очков, B — появление нечетного числа очков, C — появление не более пяти очков. Постройте множество элементарных исходов и выявите состав подмножеств, соответствующих событиям:

а) $A \bigcup B$;

б) $A \bigcap (B \backslash C)$;

в) $A \bigcap \bar{B}$.

2. Автомеханик находит неисправность генератора автомобиля с вероятностью 0,8, карбюратора — 0,9. Какова вероятность того, что при очередной поломке автомобиля:

а) он обнаружит хотя бы одну из поломок;

б) не обнаружит неисправностей генератора и карбюратора;

в) обнаружит только поломку карбюратора?

3. Три снайпера делают по одному выстрелу по мишени. Известно, что из десяти выстрелов первый попадает шесть раз, второй — девять, третий — семь. Найти вероятность того, что цель будет поражена только одним из стрелков.

Вариант 5.

1. Эксперимент состоит в бросании игральной кости. Пусть событие A — появление нечетного числа очков, B —

непоявление 3 очков, C — непоявление 5 очков. Постройте множество элементарных исходов и выявите состав подмножеств, соответствующих событиям:

а) $A \cap B \cap C$;

б) $A \cup B$;

в) $\bar{A} \cap B$.

2. Вероятность опоздания режиссера на репетицию равна 0,1, ведущей актрисы театра — 0,5. Какова вероятность того, что в среду:

а) на репетицию опоздают и режиссер, и актриса;

б) опоздает только актриса;

в) никто не опоздает?

3. При включении в сеть цепи (рис. 5) каждый элемент выходит из строя с вероятностью 0,8. Найти вероятность того, что в момент включения цепь не разомкнется.

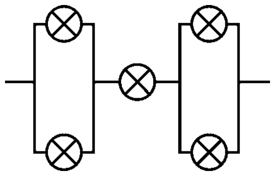


Рис. 5

Вариант 6.

1. Электронная схема содержит три транзистора, четыре конденсатора и пять резисторов. Событие T_k — выход из строя k-го транзистора ($k = 1, 2, 3$), событие C_i — выход из строя i-го конденсатора ($i = 1, 2, 3, 4$), R_j — выход из строя j-го резистора ($j = 1, 2, 3, 4, 5$). Электронная схема считается исправной, если одновременно исправны все транзисторы, не менее двух конденсаторов и хотя бы один резистор. Записать в алгебре событий событие A: схема исправна.

2. Два рыбака ловят рыбу на озере. Вероятность поймать на удочку карася для первого равна 0,7, для второго — 0,6. Какова вероятность того, что:

а) они поймают хотя бы одного карася;

б) вообще не поймают карасей;

в) поймает карася только первый рыбак?

3. Барон вызвал графа на дуэль. В пистолетах у дуэлянтов по два патрона. Вероятность попадания в своего противника для барона (он и начинает дуэль) равна 0,4, для графа — 0,5. Найти вероятность того, что барон останется невредимым, если дуэль продолжается либо до первого попадания в кого-либо из противников, либо до тех пор, пока не закончатся все патроны.

Вариант 7.

1. Эксперимент состоит в двух выстрелах по мишени. Пусть событие A — попадание в мишень первым выстрелом, событие B — попадание в мишень вторым выстрелом. Постройте множество элементарных исходов и выявите состав подмножеств, соответствующих событиям:

а) $A \cap B$;

б) $A \cup B$;

в) $(A \cap B) \cup \overline{B}$.

2. Вероятность того, что наугад выбранный компьютер не будет работать, равна 0,2. Оператор включил два компьютера. Какова вероятность того, что:

а) хотя бы один из них будет работать;

б) оба компьютера будут исправны;

в) работать будет только второй компьютер?

3. Для студента Петрова вероятность сдать на «отлично» экзамен по высшей математике равна 0,7, а по физике — 0,8. Для студента Васильева эти вероятности равны 0,6 и 0,7 соответственно. Какова вероятность, что после сдачи двух экзаменов количество отличных оценок у этих студентов будет одинаковым?

Вариант 8.

1. Два баскетболиста по очереди бросают мяч в корзину до первого попадания, но каждый делает не более трех бросков. Выигрывает тот, кто первым забрасывает мяч. Событие A_k — первый спортсмен попадает при своем k-ом броске, B_k — второй попадает при своем k-ом броске. A — выигрывает первый игрок, B — выигрывает второй. Первый баскетболист бросает первым. Определите состав множества элементарных исходов и запишите события A и B в алгебре событий $\{A_k, B_k \mid k = 1, 2, 3\}$.

2. Два скрипача участвуют в конкурсе им. Паганини. Вероятность стать лауреатом конкурса для первого музыканта равна 0,7, для второго — 0,6. Какова вероятность того, что:

а) хотя бы один из них станет лауреатом;

б) станет лауреатом только первый скрипач;

в) лауреатами станут оба скрипача?

3. При включении в сеть цепи (рис. 6) каждый элемент выходит из строя с вероятностью 0,8. Найти вероятность того, что в момент включения цепь не разомкнется.

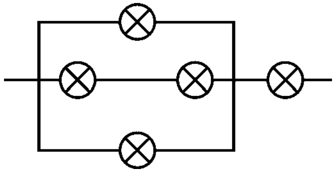


Рис. 6

Вариант 9.

1. В урне 2 черных, 3 красных и один белый шар. Пусть событие A_i — наудачу вынули i-й черный шар ($i = 1, 2$), B_i — наудачу вынули i-й красный шар ($i = 1, 2$), C — наудачу вынули белый шар. Из урны достали два шара. Выразить в алгебре событий следующие события:

E_1 — вынуты шары различных цветов;

E_2 — один шар белый, другой красный;

E_3 — оба шара черные.

2. Каждую субботу в переходе у железнодорожного вокзала играют безработные музыканты: первый — с вероятностью 0,7, второй с вероятностью — 0,4. Какова вероятность того, что в ближайшую субботу в переходе:

а) будут играть оба музыканта;

б) будет играть хотя бы один из них;

в) будет играть только первый музыкант?

3. Студент Сидоров решает задачу без ошибок с вероятностью 0,9, а Антонов — с вероятностью 0,6. На очередной контрольной работе было предложено три задачи. Какова вероятность, что Антонов решил без ошибок больше задач, чем Сидоров?

Вариант 10.

1. Пусть A, B, C — случайные события, выраженные подмножествами одного и того же множества элементарных событий. В алгебре событий $\{A, B, C\}$ запишите следующее:

а) произошло одно и только одно из данных событий;

б) наступило только событие C;

в) не произошло ни одного из данных событий.

2. Вероятность того, что будет продано изобретение мастера, равна 0,8, что изобретение его ученика — 0,6. Какова вероятность того, что к концу дня:

а) будет продано изобретение мастера;

б) будет продано хотя бы одно изобретение;

в) будут проданы оба изобретения?

3. При включении в сеть цепи (рис. 7) каждый элемент выходит из строя с вероятностью 0,8. Найти вероятность того, что в момент включения цепь не разомкнется.

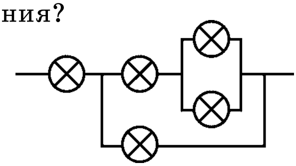


Рис. 7

Вариант 11.

1. Эксперимент состоит в бросании игральной кости. Пусть событие A — появление четырех очков, B — появление четного числа очков; C — непоявление пяти очков. Постройте множество элементарных исходов и выявите состав подмножеств, соответствующих событиям:

а) $A \bigcap B$;

б) $\bar{A} \bigcap B$.

2. Две фотомодели снимаются для журнала мод «Русская краса», первая — с вероятностью 0,9, вторая — с вероятностью 0,7. Какова вероятность того, что в январском номере журнала появятся снимки:

а) обеих девушек;

б) только первой;

в) хотя бы одной из них?

3. Садовод ранней весной высадил саженцы 3 яблонь и 3 груш. Вероятность, что приживется саженец груши, равна 0,5, яблони — 0,6. Какова вероятность, что груш и яблонь приживется поровну?

Вариант 12.

1. Эксперимент состоит в бросании игральной кости. Пусть событие A_1 — появление четного числа очков, A_2 — двух очков, A_3 — четырех очков, A_4 — шести очков. Докажите на вероятностном и на теоретико-множественном языке, что:

а) $A_2 \cdot A_3 = \varnothing$;

б) $A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_4 = A_3$;

в) $A_1 \cdot \bar{A}_4 = A_2 + A_3$.

2. Заболевшего студента с одинаковой вероятностью 0,6 могут навестить его друзья и заместитель декана. Какова вероятность того, что в тяжелые для студента дни:

а) его посетит только замдекана;

б) никто не посетит;

в) посетит хотя бы кто-нибудь?

3. Два стрелка делают по два выстрела в мишень. Вероятность попадания в десятку для первого спортсмена равна 0,8, для второго — 0,9. Какова вероятность, что у первого стрелка промахов меньше, чем у второго?

Вариант 13.

1. Ведется наблюдение за группой, состоящей из четырех однородных объектов. Каждый из них за время наблюдения может быть обнаружен или не обнаружен. Рассматриваются события: A — обнаружен ровно один из четырех объектов; B — обнаружен хотя бы один объект; C — обнаружено не менее двух объектов; D — обнаружены все четыре объекта. В чем состоят события: $A \cup B$; $B \cup C$? Совпадают ли события $B \cup D$ и C?

2. Вероятность правильно ответить на вопрос в телевизионной игре «Кто хочет стать миллионером?» для инженера равна 0,8, для экономиста — 0,7. Какова вероятность того, что на очередной вопрос ведущего:

а) оба игрока ответят правильно;

б) хотя бы один из них даст правильный ответ;

в) неправильно ответит только экономист?

3. При включении в сеть цепи (рис. 8) каждый элемент выходит из строя с вероятностью 0,8. Найти вероятность того, что в момент включения цепь не разомкнется.

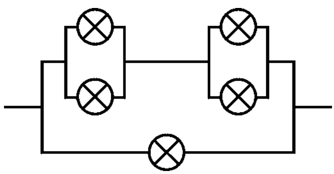


Рис. 8

Вариант 14.

1. По мишени производится три выстрела. Рассматриваются события: A_i — попадание при i-м выстреле ($i = 1, 2, 3$). В алгебре событий выразить следующие события: A — все три попадания; B — хотя бы один промах, C — не больше одного попадания, D — попадание в мишень не раньше, чем при третьем выстреле.

2. Контролер заметила, что вероятность встретить в трамвае мэра города равна 0,3, а местную знаменитость — фокусника — 0,1. Чему равна вероятность того, что завтра утром контролер проверит билет:

а) у мэра;

б) и у мэра, и у фокусника;

в) хотя бы у одного из них?

3. Знаменитая эстрадная певица с вероятностью 0,6 дает концерты у себя на родине, с вероятностью 0,3 — в Париже. Этой осенью она дала пять концертов. Какова вероятность того, что концертов в Париже было больше?

Вариант 15.

1. Эксперимент состоит в бросании игральной кости. Пусть событие A — появление четырех очков, B — появление четного числа очков. Постройте множество элементарных исходов и выявите состав подмножеств, соответствующих событиям:

а) $A \bigcup B$;

б) $\bar{A} \bigcup B$.

2. Вероятность сняться в рекламе университета путей сообщения для первокурсника равна 0,8, для пятикурсника — 0,5. Чему равна вероятность того, что во время очередной рекламной паузы университет будут прославлять:

а) оба студента;

б) только первокурсник;

в) кто-нибудь из них?

3. Два лаборанта делают измерения некоторой физической величины. Вероятность допустить ошибку при снятии показания для первого сотрудника равна 0,1, для второго — 0,2. Каждый лаборант сделал по два измерения. Какова вероятность, что ошибочных измерений у них поровну?

Вариант 16.

1. Пусть событие Γ_i — появление герба в i-ом бросании монеты, Р_j — появление решки в j-ом бросании монеты. Монету подбрасывают два раза. Постройте множество элементарных исходов и выявите состав подмножеств, соответствующих событиям:

A — выпало два герба;

B — выпали герб и решка;

C — в первом бросании выпал герб, во втором бросании герб не выпал;

D — ни разу не выпал герб.

2. Российская певица дает автограф с вероятностью 0,8, а польская — с вероятностью 0,5. Какова вероятность того, что завтра после концерта с участием обеих звезд:

а) вам удастся получить оба автографа;

б) удастся получить хотя бы один автограф;

в) не удастся получить автограф у польской певицы?

3. Две россиянки участвуют в международном конкурсе по мировой экономике. Успешно пройти тур первая девушка может с вероятностью 0,8, вторая — 0,6. Вчера прошел третий, последний тур соревнований. Какова вероятность того, что у второй участницы успешно пройденных туров больше, чем у первой?

Вариант 17.

1. Пусть X — число очков, выпавших на верхней грани игральной кости при однократном бросании. Рассмотрим следующие события: A — X кратно трем; B — X нечетно, C — X больше трех. Постройте множество элементарных исходов и выявите состав подмножеств, соответствующих событиям:

а) $\bar{C}$;

б) $A \bigcup B$;

в) $A \bigcap B$;

г) $A \setminus \bar{B}$.

2. В поликлинике работают два психолога. Первый правильно определяет профессиональные наклонности детей с вероятностью 0,7, второй — с вероятностью 0,9. Для большей надежности мама с ребенком посетила обоих психологов. Какова вероятность того, что:

а) профессиональные наклонности ребенка оба специалиста определят правильно;

б) хотя бы один из них ошибется;

в) ошибочные рекомендации даст второй психолог?

3. Инженер-электронщик и киноартист пытаются пополнить ряды космонавтов. С вероятностью 0,9 и 0,85 соответственно они успешно проходят тест по специальности, с вероятностью 0,8 и 0,7 — по физической подготовке. Какова вероятность того, что киноартист успешно пройдет тестов больше, чем инженер-электронщик?

Вариант 18.

1. Пусть X — число очков, выпавших на верхней грани игральной кости при однократном подбрасывании. События: A — X кратно трем; B — X нечетно; D — X кратно двум; E — X дробно; H — X больше шести. Постройте множество элементарных исходов и выявите состав подмножеств, соответствующих событиям:

а) B;

б) $E \bigcup D$;

в) $A \bigcap B$;

г) $E \bigcap H$.

2. Кошка Фуша выбирает из предложенных ей продуктов сметану с вероятностью 0,7, дыню — с вероятностью 0,95. Какова вероятность того, что сегодня:

а) кошка Фуша выберет только дыню;

б) не выберет ни дыню, ни сметану;

в) выберет либо дыню, либо сметану?

3. Иван Иванович покупает бутылку минеральной воды «Карачинская» с вероятностью 0,9, а «Омская-1» — с вероятностью 0,8. Сегодня он купил 3 бутылки минеральной воды. Какова вероятность, что «Омской-1» он купил больше, чем «Карачинской»?

Вариант 19.

1. Опыт состоит в бросании двух монет. Рассматриваются следующие события: A — появление герба на первой монете; C — появление герба на второй монете; B — появление хотя бы одного герба. Определить, каким событиям этого списка равносильны следующие события:

а) $A \bigcup C$;

б) $A \bigcap$ С.

2. Две студентки посещают концерты Омского камерного оркестра, первая — с вероятностью 0,6, вторая — с вероятностью 0,9. Какова вероятность того, что в очередной «музыкальный» четверг в университетский актовый зал придут на концерт:

а) обе студентки;

б) только одна из них;

в) хотя бы одна из них?

3. При включении в сеть цепи (рис. 9) каждый элемент выходит из строя с вероятностью 0,8. Найти вероятность того, что в момент включения цепь не разомкнется.

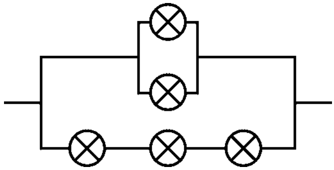


Рис. 9

Вариант 20.

1. Машинно-котельная установка состоит из двух котлов и одной машины. Рассмотрим события: A — исправна машина; B_k — исправен k-й котел ($k = 1, 2$); C — установка исправна. Установка считается исправной, если работает машина и хотя бы один котел. Выразить события C и $\bar{C}$ через A и B_k.

2. В университете ожидают иностранную делегацию, в которую входят два иллюзиониста. Первый из них дает интервью с вероятностью 0,8, второй — 0,6. Какова вероятность того, что корреспонденту газеты «Транспортник»:

а) дадут интервью оба иллюзиониста;

б) даст интервью хотя бы один из них;

в) даст интервью только первый иллюзионист?

3. Вероятность того, что в течение месяца на кафедру высшей математики по электронной почте придет контрольная работа студента-заочника из г. Бердяуш, равна 0,4, а из г. Топки — 0,6. В течение месяца были получены 4 контрольные работы. Какова вероятность, что работ из Бердяуша было больше, чем из Топков?

Вариант 21.

1. Опыт заключается в бросании двух монет. Рассматриваются следующие события: A — появление герба на первой монете; B — появление герба на второй монете; D — появление решки на второй монете. Составить множество элементарных исходов для данного опыта и определить состав подмножеств, соответствующих событиям:

а) $B \cup D$;

б) $A \cap B$.

2. Кандидат в депутаты во время выступления на публике с вероятностью 0,4 шутит и рассказывает анекдоты, с вероятностью 0,5 приводит примеры из собственной жизни. Какова вероятность того, что на очередной встрече с трудящимися:

а) он ни разу не пошутит;

б) воспользуется обоими приемами общения с публикой;

в) обойдется без личных примеров?

3. Известная в городе балерина любит играть в шашки с вахтером театра. Вероятность ее выигрыша в одной партии равна 0,4, вероятность ничьей — 0,3. Как-то зимним вечером они сыграли три партии. Какова вероятность того, что балерина выиграла партий больше, чем вахтер?

Вариант 22.

1. Пусть A, B, C — случайные события, выраженные подмножествами одного и того же множества элементарных событий. В алгебре событий запишите следующее: D — произошло два и только два из данных событий; E — произошли все три события; K — произошло не более двух из данных событий.

2. Студент выполняет самостоятельную работу по математике, состоящую из двух задач на разные темы. Задачу на тему «Классическая вероятность» он решает правильно с вероятностью 0,7, а на тему «Гипергеометрическое распределение» — с вероятностью 0,9. Какова вероятность того, что из двух задач:

а) он правильно решит обе;

б) правильно решит хотя бы одну;

в) не решит задачу на первую тему?

3. Детеныш хомячка в неволе погибает в течение первых двух недель жизни от генетических дефектов с вероятностью 0,3, а от инфекции — с вероятностью 0,8. За первые две недели погибли 3 детеныша. Какова вероятность, что большинство из них погибло от инфекции?

Вариант 23.

1. Эксперимент состоит в бросании игральной кости. Пусть событие A_1 — появление четного числа очков; A_2 — появление двух очков; A_3 — появление четырех очков; A_4 — появление шести очков. Докажите на вероятностном языке и на теоретико-множественном языке, что:

а) $A_1\overline{A}_4 = A_2 + A_3$;

б) $\overline{A}_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A}_3 \cdot A_4 = \varnothing$;

в) $A_1 \cdot A_2 = A_2$.

2. Два присяжных заседателя принимают правильное решение в судебных разбирательствах с вероятностью 0,8 и 0,95 соответственно. Какова вероятность того, что на ближайшем судебном заседании:

а) правильное решение примет только один заседатель;

б) правильное решение примет хотя бы один из заседателей;

в) оба примут неправильное решение?

3. Два известных экстрасенса воздействуют на подсознание людей с вероятностью 0,6 и 0,8 соответственно. В воскресном телесеансе каждый из экстрасенсов работал с тремя пациентами. Какова вероятность того, что число пациентов, на подсознание которых воздействовал первый экстрасенс, не меньше числа таких же пациентов второго?

Вариант 24.

1. Пусть A, B, C — три события, наблюдаемые в данном эксперименте. Выразите в алгебре событий $\{A, B, C\}$ следующее: E_1 — из трех событий произошло хотя бы одно; E_2 — из трех событий произошло ровно два; E_3 — из трех событий не произошло ни одного.

2. Студент ест на завтрак бананы с кефиром и яичницу с ветчиной с вероятностями 0,4 и 0,8 соответственно. Какова вероятность того, что субботним утром он предпочтет:

а) и то, и другое;

б) только бананы;

в) что-нибудь еще?

3. В конкурсе (из трех туров) на участие в полете на Луну участвуют российская женщина-космонавт и американский астронавт. Вероятности успешно пройти любой из туров конкурса для них равны 0,6 и 0,7 соответственно. Какова вероятность того, что американец на Луну не полетит (т. е. успешно пройденных туров у него окажется меньше)?

Вариант 25.

1. Ведется наблюдение за группой, состоящей из 4 однородных объектов. Каждый из них за время наблюдения может быть обнаружен или не обнаружен. Рассматриваются события: A — обнаружен ровно один из 4 объектов;

B — обнаружен хотя бы один объект; C — обнаружено не менее двух объектов; D — обнаружено ровно два объекта; H — обнаружены все четыре объекта. В чем состоят события:

а) $A \cap B$;

б) $D \cup H$;

в) $B \cap H$?

2. Двое безработных — экономист и инженер-механик — пытаются найти работу через бюро по трудоустройству. Вероятность того, что работу получит экономист, равна 0,8, для инженера такая вероятность равна 0,5. Какова вероятность того, что сегодня:

а) оба безработных получат работу;

б) работу получит только инженер;

в) кто-нибудь из них получит работу?

3. При включении в сеть цепи (рис. 10) каждый элемент выходит из строя с вероятностью 0,8. Найти вероятность того, что в момент включения цепь не разомкнется.

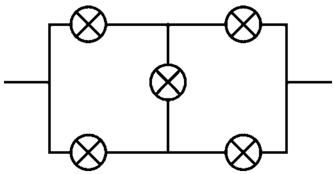


Рис. 10

Вариант 26.

1. В магазин входят четыре покупателя. Рассматриваются события: A_i — покупку сделал i-й покупатель ($i = 1, 2, 3, 4$). В алгебре событий $\{A_i\}$ выразить следующие события: A — все покупатели совершили покупки; B — хотя бы один из покупателей что-то купил; C — не больше одного покупателя сделали покупки; D — не меньше трех покупателей ушли без покупок.

2. Для студента второго курса вероятность решить правильно задачу № 1 из типового расчета равна 0,8, а задачу № 2 — 0,7. Какова вероятность, что:

а) студент правильно решит обе задачи;

б) решит неправильно хотя бы одну из задач;

в) решит верно только одну из задач?

3. Охотник может добыть куропатку с вероятностью 0,3, а утку — с вероятностью 0,5. После удачной охоты в ягдташе у охотника оказались 5 тушек птицы. Какова вероятность, что куропаток больше, чем уток?

Вариант 27.

1. По танку стреляют четыре орудия. Рассмотрим события: A_i — промахнулся расчет i-го орудия ($i = 1, 2, 3, 4$). В алгебре событий выразить: A — попали все четыре орудия; B — промахнулись, по крайней мере, три орудия; C — был хотя бы один промах.

2. Леночка вечером читает журнал «Бурда» с вероятностью 0,6, а журнал «Лиза» — с вероятностью 0,8. Какова вероятность, что сегодня вечером:

а) Леночка вообще не читала эти журналы;

б) читала, по крайней мере, один из них;

в) читала только журнал «Бурда»?

3. У бабы Глаши есть куры простых и редких пород. Вероятность снести яйцо для курицы простой породы равна 0,6, а редкой — 0,2. Сегодня утром баба Глаша вынесла из курятника 5 яиц. Какова вероятность, что большинство яиц снесены курами редких пород?

Вариант 28.

1. Опыт состоит в бросании двух монет. Рассматриваются следующие события: A — появление герба на первой монете; D — появление решки на второй монете; E — появление двух гербов. Определите, каким событиям данного списка равносильны следующие события:

а) $D \cap E$;

б) $A \cup E$.

2. Николай Петрович любит рыбачить на озере. Вероятность выловить в начале рыбалки карпа равна 0,4, а карася — 0,8. Какова вероятность, что в начале рыбалки:

а) Николай Петрович поймал только одну из этих рыб;

б) поймал только карася;

в) ничего не поймал.

3. Саша и Миша собирают вкладыши от жевательной резинки. Мама Саши покупает ему нужную жевательную резинку с вероятностью 0,5, а мама Миши — с вероятностью 0,6. Через некоторое время оказалось, что у ребят 4 новых вкладыша. Какова вероятность, что большинство из них Мишины?

Вариант 29.

1. Опыт заключается в бросании двух монет. Рассматриваются следующие события: E — появление хотя бы одного герба; B — появление хотя бы одной решки; D — появление одного герба и одной решки. Определить, каким событиям этого списка равносильны следующие события:

а) $E \bigcap B$;

б) $D \bigcup E$.

2. Вероятность того, что студент выполнит без ошибок лабораторную работу по физике, равна 0,7, а по химии — 0,8. Какова вероятность того, что он выполнит без ошибок:

а) обе лабораторные работы;

б) только одну из них;

в) хотя бы одну лабораторную работу?

3. Химчистка специализируется на чистке кожаных пальто и курток. В течение дня приносят кожаную куртку с вероятностью 0,6, а пальто — с вероятностью 0,4. За сегодняшний день в чистку поступило 5 вещей. Какова вероятность, что курток было больше, чем пальто?

Вариант 30.

1. Электронная схема включает три транзистора, четыре конденсатора и пять резисторов. Рассмотрим события: T_k — выход из строя k-го транзистора ($k = 1, 2, 3$), C_i — выход из строя i-го конденсатора ($i = 1, 2, 3, 4$), R_j — выход из строя j-го резистора ($j = 1, 2, 3, 4, 5$). Электронная схема считается исправной, если одновременно работают все транзисторы, не менее двух конденсаторов и хотя бы один резистор. Записать в алгебре событий событие A — система неисправна.

2. В выходные дни Дима любит слушать музыку. Классическую музыку он включает с вероятностью 0,4, современную — с вероятностью 0,7. Какова вероятность, что в эти выходные:

а) Дима не станет слушать музыку;

б) будет слушать только классическую музыку;

в) послушает и классическую, и современную музыку?

3. Заядлый рыбак может выудить окуня с вероятностью 0,5, а чебака — с вероятностью 0,7. Сегодняшний улов насчитывает 5 рыб. Какова вероятность, что большинство из них — окуни?

ГЛАВА 3

ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ И ФОРМУЛЫ БАЙЕСА

Рассмотренная выше классическая вероятность события является безусловной вероятностью, хотя она и рассматривается для некоторого комплекса условий. Условная же вероятность, кроме известного комплекса условий, определяется дополнительным условием (или условиями).

Понятия *условной вероятности* и *независимости* являются основным инструментом теории вероятностей. Предположение о независимости рассматриваемых событий, испытаний и случайных величин является обычной предпосылкой в огромном числе задач, которые рассматриваются в теории вероятностей со времени ее возникновения. Однако независимость — это просто математическая абстракция, удобное предположение (более или менее обоснованное), что зависимостью можно пренебречь. В реальных экспериментах, по сути, все явления зависимы — в той или иной степени и форме. Для изучения зависимых событий предназначен аппарат условных вероятностей.

Наиболее популярными формами применения условных вероятностей является формула полной вероятности и формулы Байеса. В частности, на формулах Байеса основаны многочисленные алгоритмы обработки информации (так называемые байесовские процедуры), используемые в случаях, когда некоторая система (аппарат) должна подстраиваться (изменять свои параметры) по мере поступления информации. Процедуры подстройки (пересчета параметров), как правило, являются некоторыми вариантами формул Байеса.

3.1. УСЛОВНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Формальное определение условной вероятности предварим поясняющим примером на основе классической схемы.

Пример 3.1. В компании было n девушек, из которых красивых k, замужних l, а красивых и замужних одновременно — r. Молодой человек с серьезными намерениями увидел красивую девушку и решил оценить возможность того, что она замужем. То есть какова вероятность того, что эта девушка замужем, если точно известно, что она красивая?

Обозначим через К и З случайные события, состоящие в том, что наугад выбранная девушка красивая и замужняя соответственно. Тогда по формуле для классической вероятности:

$$P(\text{К}) = \frac{k}{n};\quad P(\text{З}) = \frac{l}{n};\quad P(\text{КЗ}) = \frac{r}{n}.$$

Если точно известно, что девушка красивая, то число всех возможных исходов равно k (число красивых девушек), а если необходимо вычислить вероятность того, что она замужем, то число благоприятных исходов равно r (число замужних девушек среди красивых). Обозначим через $P(\text{З}\,|\,\text{К})$ вероятность того, что девушка замужняя, если известно, что она красивая. Тогда

$$P(\text{З}\,|\,\text{К}) = \frac{r}{k} = \frac{r/n}{k/n} = \frac{P(\text{КЗ})}{P(\text{К})}.$$

Определение 3.1. Пусть A и B случайные события и $P(B) > 0$. Условной вероятностью события A при условии, что B произошло (если известно, что B произошло), называется величина

$$P(A\,|\,B) = \frac{P(AB)}{P(B)}. \tag{4}$$

Замечание 3.1. Нетрудно проверить, что $P(A\,|\,B)$ при фиксированном B (как функция аргумента A) является вероятностью, т. е. для нее выполнены аксиомы вероятности (см. гл. 2, п. 2.2).

Основное применение условных вероятностей — вычисление вероятностей произведений зависимых событий.

Действительно, из определения условной вероятности следует, что

$$P(AB) = P(A)P(B|A). \quad (5)$$

Эту формулу можно обобщить на случай произведения n событий:

$$P(A_1A_2 \dots A_n) = \\ = P(A_1)P(A_2|A_1) \dots P(A_n|A_1A_2 \dots A_{n-1}). \quad (6)$$

Несмотря на громоздкий вид, эта формула вполне естественна: при вычислении вероятности каждого события учитывается его «предыстория», т. е. вычисляется произведение условных вероятностей, в условие которых ставятся события, чьи вероятности были вычислены раньше.

Пример 3.2. Вероятность угадать пять номеров в спортлото «5 из 36» можно легко вычислить комбинаторными методами (см. гл. 1 п. 1.2):

$$p_5 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{32 \cdot 33 \cdot 34 \cdot 35 \cdot 36}.$$

Подсчитаем эту вероятность с помощью формулы для вероятности произведения произвольных событий. Будем считать, что имеются пять «счастливых» клеток, и обозначим через A_i событие, состоящее в том, что i-я зачеркнутая клетка окажется «счастливой», $i = 1, \dots, 5$. Тогда $P(A_i) = 5/36$ (из 36 клеток пять «счастливых»). $P(A_2|A_1)$ — вероятность того, что вторая клетка «счастливая», если первая была тоже «счастливой». Из оставшихся незачеркнутых 35 клеток — четыре «счастливых», следовательно, $P(A_2|A_1) = 4/35$. Аналогично вычисляется вероятность того, что третья клетка «счастливая», если первые две такие же: $P(A_3|A_1A_2) = 3/34$ и т. д. Получаем

$$p_5 = P(A_1A_2 \dots A_5) = \\ = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)P(A_4|A_1A_2A_3)P(A_5|A_1A_2A_3A_4) = \\ = \frac{5}{36} \cdot \frac{4}{35} \cdot \frac{3}{34} \cdot \frac{2}{33} \cdot \frac{1}{32}.$$

Получилось то же, что и при подсчете комбинаторными методами.

3.2. НЕЗАВИСИМОСТЬ СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ

Интуитивное представление о независимости случайных событий A и B можно сформулировать следующим образом: информация о том, что B произошло, никак не влияет на вероятность события A. Другими словами, условная вероятность $P(A|B)$ не зависит от B и, следовательно, равна $P(A)$. Соотношение $P(A|B) = P(A)$ при $P(B) > 0$ равносильно равенству $P(AB) = P(A)P(B)$. Поэтому следующее определение вполне отвечает интуитивному понятию независимости.

Определение 3.2. Будем называть случайные события A и B независимыми (и обозначать этот факт $A\#B$), если

$$P(AB) = P(A)P(B). \tag{7}$$

Отметим, что введенное определение независимости даже несколько шире интуитивного представления: существуют, например, события, не зависящие сами от себя. Таковыми являются, в частности, достоверное событие Ω и невозможное событие $\varnothing$.

Нетрудно проверить, что если $A\#B$, то

$$A\#\bar{B},\ \bar{A}\#B,\ \bar{A}\#\bar{B}.$$

Если $A\#B$, $B\#C$ и $A\#C$ (т. е. события A, B и C попарно независимы), то естественно возникает вопрос: будут ли независимыми A и BC, A и $B\bigcup C$ и т. д.? Если, скажем, $A\#BC$, то должно выполняться равенство

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C). \tag{8}$$

Пример 3.3. На трех гранях правильного тетраэдра написаны буквы A, B и C соответственно, а на четвертой — все три эти буквы. Будем обозначать буквой A случайное событие, состоящее в том, что подброшенный тетраэдр упадет на пол гранью, содержащей букву A. Аналогично введем события B и C. Тогда

$$P(A) = P(B) = P(C) = 2/4 = 1/2;$$
$$P(AB) = P(BC) = P(AC) = 1/4, \text{ так что } A\#B,\ B\#C \text{ и } A\#C,$$

но

$$P(ABC) = 1/4 \neq 1/8 = P(A)P(B)P(C),$$

т. е. попарная независимость не влечет выполнения соотношения (8).

С другой стороны, из выполнения равенства (8) не следует независимость какой-либо пары событий. Возьмем, например, события A и B явно зависимыми (скажем, $A = B$), а $C = \varnothing$. Тогда равенство (8) выполнено, так как обе части в нем равны нулю, но, как было принято, A и B зависимы.

Из сказанного выше следует: для того чтобы дать разумное определение независимости трех событий A, B и C, необходимо потребовать и выполнения равенства (8), и попарной независимости событий. Для совокупности из n событий аналогичные рассуждения приводят к следующему определению.

Определение 3.3. События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются независимыми, если для любого набора натуральных чисел $1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_k \leq n$ выполняется равенство:

$$P(A_{j_1} A_{j_2} \ldots A_{j_k}) = P(A_{j_1})P(A_{j_2}) \ldots P(A_{j_k}). \quad (9)$$

Можно показать, что если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ независимы, $1 \leq k < n$, а события A и B получены из $A_1, A_2, \ldots, A_k$ и $A_{k+1}, A_{k+2}, \ldots, A_n$ соответственно с помощью любых теоретико-вероятностных операций, то $A \# B$.

3.3. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ

Пусть $A, H_1, H_2, \ldots, H_n$ — случайные события, $H_i \bigcap H_j = \varnothing$, $i \neq j$, $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} H_i$. Тогда

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A \mid H_i). \quad (10)$$

Эта формула называется *формулой полной вероятности*.

Замечание 3.2. Поясним смысл условий, которые накладываются на события, фигурирующие в формуле полной вероятности. Условие $H_i \bigcap H_j = \varnothing$, $i \neq j$, означает, что события H_i, $i = 1, 2, ..., n$, попарно несовместны, т. е. никакие два из них не могут происходить вместе. Условие $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} H_i$ означает, что если произошло событие A, то происходит одно из событий H_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Это условие выполняется автоматически, если $\bigcup_{i=1}^{n} H_i = \Omega$, т. е. если хотя бы одно из событий H_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, происходит обязательно (в этом случае говорят, что H_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ образуют *полную группу событий*).

Замечание 3.3. В вероятностных задачах едва ли не основную трудность представляет определение математической модели или техники, на которую рассчитана данная задача, т. е. прежде чем решать задачу, надо определить, что она «на схему Бернулли», или «на формулу полной вероятности», и т. д. В связи с этим опишем вид задач, в которых целесообразно применение формулы полной вероятности.

Предположим, что непосредственное вычисление вероятности события A затруднительно или вообще невозможно, но *вероятность A просто вычисляется при некоторых допущениях,* т. е. можно вычислить *условные* вероятности A при некоторых предположениях. Эти предположения (условия) обычно называют *гипотезами* и обозначают H_i. Если при этом они удовлетворяют условиям, описанным выше в замечании, и вычисляются вероятности событий H_i, то вероятность события A находится по формуле полной вероятности.

Пример 3.4. Студент Вася идет на экзамен, зная k билетов из n ($k \le n$). Когда ему лучше заходить, чтобы вероятность вытащить «счастливый» билет была максимальной?

1) Если студент идет первым, то ясно, что вероятность вытащить «счастливый» билет равна k/n.

2) Допустим, студент заходит вторым и не знает, какой билет взял первый экзаменующийся. В данной ситуации хорошо просматривается, что задача рассчитана на формулу полной вероятности: вероятность вытянуть «счастливый» билет легко вычисляется, если знать, какой билет взял вошедший первым.

Вводим следующие гипотезы:

H_1 — первый студент вытащил «счастливый» (для Васи) билет;

H_2 — первый студент вытащил «несчастливый» (для Васи) билет.

Через A обозначаем событие, вероятность которого необходимо найти:

A — Вася, войдя вторым, вытащил «счастливый» билет.

Легко видеть, что события H_1 и H_2 образуют полную группу несовместных событий, т. е. выполнены условия, накладываемые на события, входящие в формулу полной вероятности. Следовательно,

$$P(H_1)=\frac{k}{n};\ P(H_2)=\frac{n-k}{n}.$$

Далее $P(A|H_1)$ — вероятность того, что, зайдя вторым, Вася вытянет «счастливый» билет, если до него вытащили «счастливый» билет, а $P(A|H_2)$ — вероятность того же события, но при условии, что первый студент вытащил «несчастливый» билет. Тогда

$$P(A|H_1)=\frac{k-1}{n-1};\quad P(A|H_2)=\frac{k}{n-1},$$

так что по формуле полной вероятности

$$P(A)=\frac{k}{n}\cdot\frac{k-1}{n-1}+\frac{n-k}{n}\cdot\frac{k}{n-1}=\frac{k}{n}.$$

Авторы отдают себе отчет в том, что читателя может охватить глубокое разочарование: ведь будь найденная вероятность больше или меньше, чем вероятность вытащить «счастливый» билет, зайдя на экзамен первым, то эту информацию можно было бы использовать для выявления оптимального момента сдачи экзамена. Но безжалостная теория вероятностей утверждает, что вероятность вытащить «счастливый» билет одинакова и для вошедшего первым, и для вошедшего вторым, и для вошедшего третьим, и т. д. Даже если вы идете последним и перед вами лежит единственный билет, то вероятность того, что он «счастливый» — та же самая k/n (если, конечно, вы не знаете, что именно вытягивали другие). Между прочим, это вполне согласуется со здравым смыслом: данной вероятности «не от чего меняться»; она бы изменилась, если бы вы получили информацию о том, какие билеты взяли до вас. Как вероятность меняется в зависимости от поступившей информации, будет рассказано в следующем разделе.

3.4.
ФОРМУЛЫ БАЙЕСА

Пусть выполнены те же условия, что и в формуле полной вероятности: $A, H_1, H_2, \ldots, H_n$ — случайные события, $H_i \cap H_j = \varnothing,\ i \neq j,\ A \subset \bigcup_{i=1}^{n} H_i$. Тогда

$$P(H_j \mid A) = \frac{P(H_j)P(A \mid H_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A \mid H_i)}, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \qquad (11)$$

Эти формулы называются *формулами Байеса*.

З а м е ч а н и е 3.4. Опишем вид задач, рассчитанных на применение формул Байеса. Пусть выполнены условия применимости формулы полной вероятности, т. е. вероятность интересующего нас события A можно вычислить при некоторых предположениях (гипотезах) H_i, $i = 1$, 2, ..., n, и известны вероятности самих этих гипотез. Пусть стало известно, что *событие A произошло*. Очевидно, эта информация *изменяет вероятности гипотез H_i*. Формулы Байеса как раз дают возможность *пересчитывать вероятности гипотез* с учетом поступившей информации.

З а м е ч а н и е 3.5. Вероятности гипотез $P(H_i)$, $i = 1$, 2, ..., n, вычисленные без учета информации о результате случайного эксперимента (о событии A), называют *априорными* вероятностями гипотез (*лат.* a priori — «из предыдущего», на основании ранее известного), а условные вероятности $P(A \mid H_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ — *апостериорными* вероятностями гипотез (*лат.* a posteriori — «из последующего», исходя из опыта).

П р и м е р 3.5. В задаче о «счастливых» билетах (пример 3.4) априорные вероятности того, что зашедший первым вытащил Ваш «счастливый» или «несчастливый» билет, равны соответственно:

$$P(H_1)=\frac{k}{n};\quad P(H_2)=\frac{n-k}{n}.$$

Предположим теперь, что, зайдя вторым, Вы сдали экзамен. Информация об этом, естественно, должна увеличить «шансы» гипотезы H_2 (т. е. Вы стали «больше склоняться к мысли», что до Вас вытащили «несчастливый» билет) и уменьшить «шансы» гипотезы H_1. Действительно, по формулам Байеса апостериорные вероятности гипотез:

$$P(H_2\mid A)=\frac{P(H_2)P(A\mid H_2)}{P(A)}=\left\{\frac{n-k}{n}\cdot\frac{k}{n-1}\right\}:\frac{k}{n}=\frac{n-k}{n-1}>\frac{n-k}{n};$$

$$P(H_1\mid A)=\frac{P(H_1)P(A\mid H_1)}{P(A)}=\left\{\frac{k}{n}\cdot\frac{k-1}{n-1}\right\}:\frac{k}{n}=\frac{k-1}{n-1}<\frac{k}{n}.$$

3.5. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Что называется условной вероятностью?
2. Чему равна вероятность произведения зависимых событий?
3. Дайте определение независимости двух событий.
4. Дайте определение независимости n событий.
5. Дайте определение формулы полной вероятности.
6. Опишите вид задач, в которых целесообразно применение формулы полной вероятности.
7. Дайте определение формул Байеса.
8. Опишите вид задач, рассчитанных на применение формул Байеса.
9. Что называют априорными вероятностями?
10. Что называют апостериорными вероятностями?
11. Что называют байесовскими процедурами?

3.6. ВАРИАНТЫ ТИПОВОГО РАСЧЕТА

Вариант 1.

1. В мешке 4 красных и 7 зеленых шаров. Проводится испытание по последовательному извлечению двух шаров без возвращения. Найдите вероятность того, что второй шар будет зеленый, если известно, что первый шар был красный.

2. К кладу ведут три дороги. Вероятность погибнуть на первой дороге равна 0,4, на второй — 0,7, на третьей —

0,8. Найти вероятность того, что ковбой доберется до клада по одной из них при условии, что дорога выбирается им наудачу.

3. Перед математической олимпиадой особой популярностью пользовались книги Якова Исидоровича Перельмана: в библиотеке 16 раз заказывали его книгу «Живая математика», 12 раз — «Занимательные задачи», 8 раз — «Загадки и диковинки в мире чисел». Подбор задач для олимпиады таков, что вероятность решить задачу студенту, прочитавшему книгу «Живая математика», равна 0,5, «Занимательные задачи» — 0,3, «Загадки» — 0,4. Студент Филькин радостно сообщил, что решил задачу на олимпиаде. Какую книгу Перельмана вероятнее всего он прочитал?

Вариант 2.

1. В ящике 100 деталей, из которых 5 бракованных. Из него поочередно извлекается по одной детали (с возвратом и без возврата). Найти вероятность того, что во второй раз будет вынута стандартная деталь при условии, что в первый раз извлечена деталь:

а) стандартная;

б) бракованная.

2. В скачках участвуют три лошади. Первая лошадь выигрывает скачки с вероятностью 0,5, вторая — 0,2, третья — 0,4. Какова вероятность того, что лошадь, на которую поставил игрок, придет на скачках первой, если он выбирает ее наудачу?

3. Электростанция оборудована генератором электрического тока, приводимым во вращение дизельным двигателем. Состояние оборудования и воспламенительные свойства дизельного топлива (цетановое число) таковы, что при использовании в качестве топлива соляровых фракций прямой перегонки нефти генератор приходит в аварийное состояние с вероятностью 0,2, при использовании керосиновых фракций — с вероятностью 0,3, а при использовании газойлевых фракций — с вероятностью 0,25. 23 декабря 1998 года электростанция исправно давала ток. Какова вероятность того, что в этот день дизельный двигатель работал на солярке, если тот или иной вид топлива используется с равной вероятностью?

Вариант 3.

1. Работа некоторого устройства прекращается, если из строя выходит 1 из 6 элементов. Последовательная замена каждого элемента новым производится до тех пор, пока устройство не начнет работать. Какова вероятность того, что придется заменить 5 элементов?

2. В ночь перед экзаменом по математике студенту Дудкину с вероятностью 0,5 снится экзаменатор, с вероятностью 0,1 — тройной интеграл и с вероятностью 0,4 — то же, что и всегда. Если Дудкину снится преподаватель, то экзамен он сдает с вероятностью 0,3, если тройной интеграл, то успех на экзамене ожидает его с вероятностью 0,5. Если же Дудкину снится то же, что и всегда, то экзамен он точно «заваливает». Какова вероятность, что Дудкин сдаст математику в ближайшую сессию?

3. Три студента — Дима, Егор и Максим — на лабораторной работе по физике производят 25, 35 и 40% всех измерений, допуская ошибки с вероятностями 0,01, 0,03 и 0,02 соответственно. Преподаватель проверяет наугад выбранное измерение и объявляет его ошибочным. Кто из трех студентов вероятнее всего сделал это измерение?

Вариант 4.

1. В корзине 7 шаров, на каждом из которых написана одна из следующих букв: *а, в, е, л, р, ф, ь*. Найти вероятность того, что на вынутых по одному и расположенных друг за другом шариках можно будет прочесть слово «*февраль*».

2. Медвежонок Винни-Пух каждое утро ходит в гости к одному из своих друзей: поросенку Пятачку, ослику Иа или Кролику, которые угощают его медом с вероятностью 0,8, 0,6 и 0,4 соответственно. Какова вероятность того, что в ближайшую пятницу Винни-Пух попробует мед, если решение о том, к кому пойти в гости, медвежонок принимает случайным образом?

3. Для сигнализации об аварии на космическом корабле используются сигнализаторы двух типов: У и УУ, каждый из которых срабатывает с вероятностью 0,8 и 0,9 соответственно. Вероятность того, что корабль снабжен одним из таких сигнализаторов, соответственно равна 0,6 и

0,4. В центр управления полетами поступил сигнал об аварии. Каким сигнализатором вероятнее всего снабжен корабль?

Вариант 5.

1. Студент пришел на зачет по математике, зная 25 вопросов из 30. Если он не может ответить, ему предоставляется еще один шанс. Какова вероятность, что он сдаст зачет?

2. Три торговца сыром продают за день 40, 65 и 80% своей продукции, допуская при подсчете стоимости товара ошибку с вероятностью 0,3, 0,4 и 0,2 соответственно. Какова вероятность того, что покупатель сыра, выбравший продавца наугад, будет обманут?

3. В зоопарке живут три кенгуру, пять муравьедов и семь горилл. Условия содержания млекопитающих таковы, что вероятность заболеть у этих животных соответственно равна 0,7, 0,4 и 0,1. Животное, которое удалось поймать врачу, оказалось здоровым. Какова вероятность того, что врач осматривал муравьеда?

Вариант 6.

1. В корзине 25 шаров, среди которых 8 оранжевых. Из нее поочередно извлекаются три шара. Найти вероятность того, что все вынутые шары оранжевые.

2. В диагностическом центре прием больных ведут три невропатолога: Фридман, Гудман и Шеерман, которые ставят правильный диагноз с вероятностью 0,5, 0,7 и 0,6 соответственно. Какова вероятность того, что больному Сидорову будет поставлен неверный диагноз, если он выбирает врача случайным образом?

3. Учитель литературы предложил викторину по распознаванию портретов великих людей. Школьникам были показаны репродукции картин Ильи Репина: шесть портретов русских музыкантов (Глинки, Мусоргского, Бородина, Глазунова, Лядова, Римского-Корсакова), десять портретов русских писателей (Гоголя, Тургенева, Льва Толстого, Писемского, Гаршина, Фета, Стасова, Горького, Леонида Андреева, Короленко) и пять портретов русских ученых (Сеченова, Менделеева, Павлова, Тарханова, Бехтерева). Подготовка учеников такова, что портреты музыкантов они узнают с вероятностью 0,4, писателей — 0,8, ученых — 0,5. Школьница Даша правильно распознала портрет, выбранный наугад. Какова вероятность того, что ей попался портрет музыканта?

Вариант 7.

1. Среди 300 лотерейных билетов — 10 выигрышных. Найти вероятность того, что 4 наудачу выбранных билета окажутся выигрышными.

2. В лаборатории три подопытных кролика. Для искусственного стимулирования иммунитета первому ввели вакцину, второму — сыворотку, третьему — гамма-глобулин. После этого каждому кролику сделали инъекцию соответствующего болезнетворного вируса. Условия эксперимента таковы, что вакцина защищает от заболевания с вероятностью 0,6, сыворотка — 0,8 и гамма-глобулин — 0,7. Какова вероятность того, что наугад взятый из клетки кролик окажется здоровым?

3. Во дворе выгуливают двух чау-чау, трех мопсов, двух спаниелей и одного ньюфаундленда. Мопс облаивает проходящую мимо дворничиху с вероятностью 0,9, спаниель — 0,4, ньюфаундленд — 0,1, чау-чау вообще не любит лаять. Сегодня утром дворничиху облаяла собака. Какой породы вероятнее всего она была?

Вариант 8.

1. В группе 16з механического факультета учатся 9 юношей и 8 девушек. По списку в журнале наугад отобраны 4 студента. Найти вероятность того, что все из них юноши.

2. В конкурсе на замещение вакантной должности преподавателя математики в Университете путей сообщения приняли участие 10 выпускников омского, 30 — томского и 15 — московского университетов. Вероятность выиграть конкурс для них равна 0,8, 0,9 и 0,7 соответственно. Какова вероятность того, что претендент, случайно познакомившийся с вами, выиграет конкурс?

3. В группе пять студентов имеют певческий голос сопрано, семь — меццо-сопрано и три — контральто. Вероятность того, что певцы будут приглашены на гастроли во время экзаменационной сессии, равна 0,1, 0,2 и 0,4 соответственно. На экзамене по математике в этой группе преподавателю сообщили, что студент Басов уже неделю гастролирует на Мальте. Какова вероятность, что Басов поет меццо-сопрано?

Вариант 9.

1. В корзине 7 шаров с номерами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Наугад вынимают три шара без возвращения. Найти вероятность того, что:

а) последовательно появятся шары с номерами 2, 6, 7;

б) извлеченные шары будут иметь номера 2, 6, 7, независимо от того, в какой последовательности они появились.

2. Вероятность быть избранным в Простоквашинскую Думу у дяди Федора равна 0,5, у кота Матроскина — 0,8, у почтальона Печкина — 0,7. Пес Шарик неграмотный, поэтому он голосует наугад. Какова вероятность, что изберут того кандидата, за которого проголосует Шарик?

3. Имеется два одинаковых аквариума с рыбами: в первом — восемь морских чертей и две золотые рыбки, во втором — пять морских чертей и три золотые рыбки. Из наугад выбранного аквариума извлекли рыбку, которая оказалась золотой. Из какого аквариума вероятнее всего взята эта рыба?

Вариант 10.

1. В ящике 5 кубиков с одинаковыми номерами от 1 до 5. Наугад извлекаются 4 кубика. Найти вероятность того, что последовательно появятся кубики с номерами 1, 2, 3, 4, если кубики извлекаются:

а) без возвращения;

б) с возвращением.

2. В киоске продаются 15 газет «Комок», 10 — «Спид-инфо» и две «Вестник котлонадзора». Вероятность того, что данные периодические издания правильно отреагируют на главное событие, происходящее в Гондурасе, равна 0,8, 0,6 и 0,4 соответственно. Вы наугад покупаете газету. Какова вероятность того, что вы будете правильно проинформированы о гондурасском событии?

3. В мешке смешаны три вида пшеницы: 3 кг мягкой пшеницы, 2 кг озимой, 1 кг яровой. Условия хранения зерна таковы, что всхожестью обладают 70% семян мягкой, 80% — озимой и 90% — яровой пшеницы. Наугад взятое зерно проросло. Какова вероятность того, что это было семечко мягкой пшеницы?

Вариант 11.

1. В корзине 5 красных и 5 синих шаров. Из корзины дважды вынимают по одному шару, не кладя их обратно. Найти вероятность появления красного шара при втором испытании, если при первом был извлечен синий шар.

2. В эпоху мезолита (среднего каменного века) для того, чтобы убить зайца, было достаточно двух попаданий из лука, при одном попадании вероятность поражения зайца равнялась 0,6. Какова вероятность того, что два охотника не остались бы без рагу из зайца, если бы они стреляли по цели из луков одновременно с вероятностью попадания 0,8 и 0,5 соответственно?

3. Экзаменационные работы по математике с вероятностью 0,2, 0,3 и 0,5 попадают на проверку к одному из трех экзаменаторов, каждый из которых может пропустить (не заметить) ошибку абитуриента с вероятностью 0,01, 0,02 и 0,015 соответственно. Наугад выбранная работа (из числа проверенных) оказалась правильно аттестованной. Какова вероятность, что эту работу проверял третий преподаватель?

Вариант 12.

1. В супермаркете на полке лежат 10 плиток белого и 15 плиток темного шоколада. Покупатель взял, не глядя, сначала одну, затем вторую шоколадку. Найти вероятность того, что первая из взятых плиток белая, а вторая темная.

2. Иван Царевич подъехал к развилке дорог. На камне он прочитал: «Налево поехать — женатому быть с вероятностью 0,6, прямо — 0,4, направо — 0,2, а назад уже пути нет». Какова вероятность остаться Ивану Царевичу холостым, если дорогу на развилке он выбрал наудачу?

3. На вход радиолокационного устройства с вероятностью 0,8 поступает смесь полезного сигнала с помехой, а с вероятностью 0,2 — только помеха. Если поступает полезный сигнал с помехой, то устройство регистрирует наличие какого-то сигнала с вероятностью 0,7; если только помеха, — то с вероятностью 0,3. Известно, что устройство зарегистрировало наличие какого-то сигнала. Найти вероятность того, что в его составе есть полезный сигнал.

Вариант 13.

1. В урне 7 оранжевых, 5 фиолетовых и 3 зеленых шара. Из урны трижды вынимают по одному шару, не возвращая их. Найти вероятность того, что при первом испытании появится оранжевый шар, при втором — фиолетовый, при третьем — зеленый.

2. За нарушение правил игроками команды «Паровоз» в их ворота назначается одиннадцатиметровый удар. Лучшие футболисты команды «Тормоз» Иванов, Петров и Сидоров забивают пенальти с вероятностью 0,3, 0,2 и 0,4 соответственно. Найти вероятность того, что одиннадцатиметровый удар будет реализован, если пенальтиста выбирают по жребию.

3. На старой граммофонной пластинке записаны произведения польского композитора и пианиста Фредерика Шопена: концерт, соната, баллада и скерцо. Из-за частого прослушивания пластинки дорожки стерлись, и звук воспроизводится некачественно во время проигрывания концерта с вероятностью 0,4, сонаты — 0,3, баллады — 0,2, скерцо — 0,35. Звукосниматель наугад поставили на пластинку, музыка звучала чисто. Какова вероятность, что это была соната?

Вариант 14.

1. В коробке находится 3 розовых и 5 зеленых кубиков. Из коробки наугад достают два кубика. Найти вероятность того, что оба кубика зеленые (извлеченный первый кубик обратно не положили).

2. Для защиты от грабителей 20% квартир оборудованы пожарной сиреной, в 30% квартир в дверях заложены пиропатроны, а в остальных квартирах содержатся гремучие змеи. Пожарная сирена отпугивает грабителей с вероятностью 0,6, взрыв пиропатрона — с вероятностью 0,7, а ограбить квартиру с гремучими змеями удается лишь в одном случае из десяти. Найти вероятность того, что грабителям удастся сделать свое черное дело, если квартира выбирается наугад.

3. В студенческом оркестре три духовых инструмента (флейта, фагот и валторна), два ударных (барабан и ксилофон) и четыре струнных (скрипка, гитара, балалайка и клавесин). В комнате, где хранятся музыкальные инструменты, сыро, и вероятность того, что инструмент будет расстроен, для духовых инструментов равна 0,3, для ударных — 0,4, для струнных — 0,6. Перед концертом настройщик берет наугад инструмент, который оказывается в хорошем состоянии. Найти вероятность того, что это была балалайка.

Вариант 15.

1. В группе 14д механического факультета из 25 студентов 8 не подготовились к занятию по математике. Найти вероятность того, что 5 случайно выбранных студентов оказались подготовленными.

2. В ювелирной лавке 20% изделий украшены горным хрусталем (бесцветный кварц), 40% — аметистом (фиолетовый кварц), 40% — морионом (черный кварц). Производство ювелирных украшений таково, что вероятность попадания в кварц двойников, образующих зернистые кристаллы, для горного хрусталя равна 0,2, для аметиста — 0,3, для мориона — 0,5. Не искушенная в ювелирном искусстве юная барышня выбирает украшение случайным образом. Какова вероятность того, что оно не будет содержать примеси двойника?

3. В магазин поступили ботинки с трех обувных фабрик: 800 пар с фабрики «Большевик», 1000 пар с фабрики «Пионер» и 1200 с фабрики «Комсомолец». Вероятность для этих фабрик выпустить бракованную обувь равна 0,15, 0,08 и 0,1 соответственно. Беспечный покупатель купил ботинки наудачу. Через неделю у правого ботинка отвалилась подошва. На какой фабрике вероятнее всего были сделаны эти ботинки?

Вариант 16.

1. Из полного набора костей домино (28) наугад извлечена кость. Найти вероятность того, что вторую наугад взятую кость можно приставить к первой, если первая оказалась:

а) дублем;

б) не дублем.

2. Три брата посеяли пшеницу, однако «...в долгом времени аль вскоре приключилось с ними горе: кто-то в поле стал ходить да пшеницу шевелить. Наконец они смекнули, чтоб стоять на карауле, хлеб ночами поберечь, злого вора подстеречь». В их деревне всем известно, что старший брат засыпает в дозоре с вероятностью 0,8, средний — 0,4, а у младшего бессонница. Найти вероятность того, что в первую ночь удастся поймать вора, если очередность дежурства определяется жребием.

3. Зритель с вероятностью 0,3, 0,4 и 0,5 соответственно может обратиться за билетом в одну из трех театральных касс Большого театра: в помещении театра, на Тверской и на станции метро «Пушкинская». Вероятность того, что к моменту прихода зрителя в кассе все билеты будут проданы, соответственно равна 0,3, 0,6 и 0,7. Поклонник Большого театра купил билет в одной из этих трех касс. Какова вероятность того, что эта касса на Тверской?

Вариант 17.

1. В колоде 36 карт. Наугад извлекают 2 карты. Найти вероятность того, что вторым вынут туз, если первым тоже вынут туз.

2. В фотоателье работают три оператора, каждый из которых печатает соответственно 35, 40 и 25% всей продукции. Вероятность того, что фотография будет некачественной, для первого оператора равна 0,3, для второго — 0,4, для третьего — 0,2. Вы не знаете, к какому из операторов попала ваша фотопленка с портретом любимой бабушки. Какова вероятность того, что вы, получив снимок, узнаете на нем свою бабушку?

3. Студента Зевского на лекциях по математике посещают музы: Евтерпа (муза лирической поэзии) — с вероятностью 0,2; Эрато (муза любовной поэзии) — с вероятностью 0,5 и Каллиопа (муза эпической поэзии) — с вероятностью 0,3. Известно, что после посещения соответствующей музы Зевский лирические стихи сочиняет с вероятностью 0,4, любовные — с вероятностью 0,8 и эпические — с вероятностью 0,2. Какова вероятность того, что написанное Зевским на очередной лекции стихотворение было эпическим?

Вариант 18.

1. На семи карточках написаны буквы А, Л, Н, П, Т, Ю, Ь. Карточки тщательно перемешивают, затем берут по одной и кладут последовательно рядом. Какова вероятность того, что получится слово «ТЮЛЬПАН»?

2. В один из кризисных годов 40% выпускников одной из групп университета путей сообщения устроились работать по специальности, 10% не нашли работу и 50% занялись коммерцией. Вероятность того, что выпускник, работающий по специальности, ближайшее лето проведет на курорте Боровое, равна $0{,}7$, для неработающего выпускника эта вероятность составляет $0{,}5$, для коммерсанта — $0{,}4$. Первый позвонивший вам выпускник этой группы с горечью сообщил, что лето вынужден провести на Канарских островах. Какова вероятность, что он работает по специальности?

3. На лекции по математике студент Щукин с вероятностью $0{,}5$ садится рядом с Фурманом, с вероятностью $0{,}3$ — с Мокиным, с вероятностью $0{,}2$ — с Ситниковым. В первом случае вероятность того, что доцент Заблоцкая выгонит Щукина с лекции, равна $0{,}6$, во втором случае — $0{,}1$, в третьем — $0{,}2$. Сегодня студент Щукин дослушал лекцию до конца. С кем рядом вероятнее всего он сидел?

Вариант 19.

1. В коробке находятся 7 новых и 3 израсходованные батарейки для фотоаппарата. Какова вероятность того, что две вынутые наугад батарейки окажутся новыми?

2. На склад поступают диваны с трех мебельных фабрик. Первая и третья фабрики изготавливают одинаковое количество продукции, а вторая — вдвое больше. Вероятность для первой, второй и третьей фабрики сделать бракованный диван равна $0{,}8$, $0{,}6$ и $0{,}7$ соответственно. Какова вероятность того, что счастливый обладатель дивана, купленного наудачу, будет спать спокойно?

3. В трех (из десяти оставшихся) экзаменационных билетах по эстетике вопрос связан с поэзией Джорджа Ноэля Гордона Байрона, в пяти — со стихами русского поэта Константина Дмитриевича Бальмонта и в двух — с творчеством польского поэта Адама Мицкевича. Вероятность того, что экзаменатор попросит (в развитие темы билета) студента прочесть наизусть стихи Байрона, равна 0,7, стихи Бальмонта — 0,5, стихи Мицкевича — 0,4. Счастливый студент, сдавший экзамен, сообщил, что стихов на экзамене не читал. Какова вероятность того, что ему достался билет по творчеству Байрона?

Вариант 20.

1. В колоде 36 карт. Наугад вынимают 2 карты. Найти вероятность того, что вторым вынут короля, если первой появилась дама.

2. Половина выпускников лицея бизнеса и информационных технологий становятся абитуриентами Института менеджмента и экономики (ИМЭК), третья часть подает документы на факультеты Университета путей сообщения (ОмГУПС), остальные пытаются поступить в другие вузы России. Вероятность поступления для абитуриентов ИМЭК равна 0,9, для поступающих в ОмГУПС — 0,95, в другие вузы — 0,85. Какова вероятность того, что выпускник лицея Вася продолжит свое образование в высшем учебном заведении?

3. Сотрудник ГИБДД останавливает «Мерседес» с вероятностью 0,6, «Жигули» — 0,3 и «Таврию» — 0,2. Водителя «Мерседеса» удается оштрафовать с вероятностью 0,3, водителя «Жигулей» — 0,5, «Таврии» — 0,99. Счастливый водитель первой встретившейся вам машины сообщил, что ему удалось избежать штрафа. Водителем какой машины вероятнее всего он был?

Вариант 21.

1. На стеллаже в библиотеке стоят 100 книг по математике, 25 из которых новые (2009 года издания). Библиотекарь наугад взял три учебника. Найти вероятность того, что они окажутся новыми.

2. Студент Лямурский Петя любит дарить девушкам цветы: маргаритки он дарит с вероятностью 0,3, хризантемы — 0,2, герань, выращенную его бабушкой, — с вероятностью 0,5. Девушки, одаренные маргаритками, идут с Петей в палеонтологический музей с вероятностью 0,2, получившие хризантемы, — с вероятностью 0,3, герань — 0,7. Какова вероятность того, что наугад выбранная знакомая Пети провела с ним восхитительный вечер в палеонтологическом музее?

3. Контролер работает на трех автобусных маршрутах с конечной остановкой «Вокзал». Число пассажиров первого маршрута втрое превышает число пассажиров второго и в полтора раза — третьего. Процент «зайцев» на этих маршрутах составляет 2, 4 и 3 соответственно. Пассажир, случайно пойманный контролером на остановке «Вокзал», оказался пенсионером, имеющим право на бесплатный проезд. Каким маршрутом вероятнее всего он приехал?

Вариант 22.

1. В Омской области среднее число ясных дней в марте равно 10. Определить вероятность того, что первого и второго марта будет пасмурная погода.

2. Прибор, установленный на борту самолета, может работать в двух режимах: в условиях нормального крейсерского полета и в условиях перегрузки при взлете и посадке. Крейсерский режим осуществляется в 80% всего времени полета, режим перегрузки — в 20%. Вероятность выхода прибора из строя за время полета в нормальном режиме равна 0,1, в условиях перегрузки — 0,4. Вычислить вероятность отказа прибора за время полета.

3. Красная Шапочка, заблудившись в лесу, вышла на полянку, от которой в разные стороны ведут три дороги. Вероятность встретить Серого Волка на первой дороге равна 0,6, на второй — 0,3, на третьей — 0,2. Какова вероятность того, что Красная Шапочка пошла по второй дороге, если известно, что через час она уже была у бабушки?

Вариант 23.

1. В супермаркете в контейнере вперемешку лежат 20 шоколадных и 30 ванильных сырков. Покупатель взял, не глядя, 3 сырка. Найти вероятность того, что все взятые сырки — шоколадные.

2. Группе студентов университета для прохождения производственной практики выделено 30 мест: 15 — в Исилькуле, 8 — в Называевске, 7 — в Калачинске. Какова вероятность того, что студент и студентка, которые в скором времени собираются справить свадьбу, будут посланы для прохождения практики в один и тот же город, если декан ничего не знает об их «семейных» делах?

3. В одной из провинций Республики Мозамбик треть населения занимается сбором орехов кешью, пятая часть — животноводством (слаборазвитая отрасль из-за распространения мухи цеце), остальные выращивают сахарный тростник. Вероятность того, что семья, занятая в одной из вышеперечисленных отраслей, в состоянии обучать своего ребенка в колледже, равна 0,5, 0,7, 0,6 соответственно. Человек, встретившийся вам на берегу Лимпопо, радостно сообщил, что его дочь учится в Мапуту. В какой отрасли хозяйства вероятнее всего он работает?

Вариант 24.

1. На прилавке в магазине лежат 4 флеш-карты с объемом памяти 2GB и 5 флеш-карт с объемом памяти 4GB. Продавец наугад взял 2 флеш-карты. Найти вероятность того, что обе флеш-карты с объемом памяти 2GB.

2. Ученому для научной статьи необходимо сделать несколько фотографий. Оборудование позволяет делать фотосъемку неподвижных малых объектов с вероятностью брака 0,2, объектов в процессе исследования их под микроскопом — с вероятностью брака 0,3 и аэродинамических струйных полей — с вероятностью брака 0,8. Редактор статьи выбирает фотоснимок наугад. Какова вероятность того, что он будет качественным, если ученый сделал по три снимка каждого типа?

3. У стоматолога три вида пломбирующего материала: цемент (50 %), амальгама (30%) и пластмасса (20%). Условия лечения таковы, что вероятность выпадения пломбы, сделанной из цемента, в течение первого года после лечения равна 0,5, пломбы из амальгамы — 0,6, из пластмассы — 0,4. У пациента пломба выпала через неделю. Из какого материала вероятнее всего она была сделана, если врач взял тот пломбирующий материал, что оказался под рукой?

Вариант 25.

1. Из букв разрезной азбуки составлено слово «МАТЕМАТИКА». Буквы перемешивают. Какова вероятность того, что, выкладывая в ряд взятые наугад 4 буквы, получим слово «ТЕМА»?

2. В коробку, содержащую 3 одинаковые ручки, положили еще одну — с красным стержнем. Затем наугад вынули одну ручку. Найти вероятность того, что извлекли ручку с красным стержнем, если равновероятны все возможные предположения о числе ручек с красным стержнем, первоначально находящихся в коробке.

3. Для участия в математической олимпиаде среди студентов ОмГУПСа из группы 16д выбрано 4 человека, из группы 16ж — 6 и из группы 16з — 5. Вероятность того, что студент попадет в команду механического факультета, для этих групп равна 0,9, 0,8 и 0,5 соответственно. Наугад выбранный студент в итоге попал в команду. В какой из групп вероятнее всего он учился?

Вариант 26.

1. В корзине 20 яблок сорта «антоновка» и 5 — «грушовка». Из корзины наугад достают 3 яблока. Определить вероятность того, что все три яблока сорта «антоновка».

2. На столе стоят две вазы с конфетами. Вероятность того, что конфета из первой вазы — с вишневой начинкой, равна 0,8, а из второй — 0,9. Найти вероятность того, что наугад вынутая конфета (из наугад взятой вазы) — с вишневой начинкой.

3. Из 30 студентов, пришедших на экзамен по математике, 7 подготовились отлично, 10 — хорошо, 8 — удовлетворительно и 5 — плохо. Всего в экзаменационных билетах 100 вопросов, а в каждом билете по три вопроса. Отлично подготовленные студенты смогут ответить на все 100 вопросов, хорошо подготовленные — на 80, удовлетворительно — на 60 и не подготовившиеся — на 20 вопросов. Первый студент ответил на все три вопроса. Какова вероятность того, что он отличник?

Вариант 27.

1. На столе в вазе лежат 10 конфет «Белочка», 9 конфет «Маска», 8 конфет «Красная шапочка». Ребенок, не глядя, берет три конфеты. Найти вероятность того, что все взятые конфеты — «Белочка».

2. Для приема зачета преподаватель подготовил 50 задач: 20 — на тему «Случайные события» и 30 — на тему «Случайные величины». Для сдачи зачета студент должен решить первую случайным образом доставшуюся задачу. Какова вероятность для студента сдать зачет, если он знает, как решить 15 задач на первую тему и 19 задач — на вторую?

3. Мультинациональная компания планирует выпустить на рынок новый вид товара. Генеральный директор предполагает, что вероятность высокого спроса на этот товар составляет 0,6, вероятность низкого спроса — 0,4. Было проведено маркетинговое исследование, которое предсказало плохой сбыт. Однако известно, что подобные исследования дают правильный прогноз не всегда, а лишь в 82% случаев. Каким образом исследование повлияло на вероятности хорошего и плохого сбыта?

Вариант 28.

1. Прибор состоит из трех узлов, и если один из них выходит из строя, прибор прекращает работу. Последовательная замена каждого узла новым производится до тех пор, пока прибор не начнет работать. Какова вероятность того, что придется заменить 2 узла?

2. В трех одинаковых по виду ящиках сидят мыши. В первом — четыре белые и одна серая, во втором — три белые и две серые, в третьем — две белые и три серые. Какова вероятность того, что из наугад выбранного ящика будет извлечена белая мышь?

3. На экзамене студентам предлагается 30 билетов, 5 из которых легкие, а 25 — трудные. Два студента по очереди тянут билеты — сначала первый, затем второй. Второму повезло — достался легкий билет. Какова вероятность того, что и первый вытянул легкий билет?

Вариант 29.

1. Из 25 экзаменационных билетов студент выучил 23. Первым или вторым ему лучше зайти на экзамен?

2. Имеются три коробки с теннисными мячами. В первой коробке находятся 4 новых и 2 уже использованных мяча, во второй — 3 новых и 3 использованных, в третьей — 2 новых и 4 использованных. Какова вероятность того, что из наугад выбранной коробки будет извлечен новый мяч?

3. В двух связках галстуков содержатся: в одной — 3 синих и 7 темно-синих, в другой — 7 синих и 3 темно-синих галстука. Наугад выбирают связку и из нее наугад же берут галстук, который оказывается синим. Какова вероятность того, что была выбрана связка с бóльшим числом синих галстуков?

Вариант 30.

1. Из ящика, в котором 16 апельсинов и 17 грейпфрутов, наугад достают два фрукта. Определить вероятность того, что оба фрукта — апельсины.

2. В урну, содержащую три шара, кладут зеленый шар, после чего из нее наугад вынимают один шар. Найти вероятность того, что извлеченный шар окажется зеленым, если равновероятны все возможные предположения о первоначальном составе шаров (по цвету).

3. Страховая компания выделяет три группы риска: малый риск, средний и большой. Среди клиентов страховой компании 55% относятся к первой группе риска, 25% — ко второй и 20% — к третьей. Вероятность, что придется выплачивать страховое вознаграждение, для первой группы равна 0,02, второй — 0,025, третьей — 0,078. Какова вероятность того, что получивший денежное вознаграждение клиент относится к группе среднего риска?

ГЛАВА 4

СХЕМА БЕРНУЛЛИ

Схема повторных испытаний (Бернулли) является одной из главных схем теории вероятностей и имеет как прикладное, так и теоретическое значение. Свое название она получила по имени известного швейцарского ученого Якова Бернулли, жившего в конце XVII в.

Схема состоит в том, что рассматривается последовательность n взаимно независимых испытаний. В каждом из них может произойти некоторое событие A с одной и той же, не зависящей от номера испытания, вероятностью p или не произойти соответственно с вероятностью $q = 1 - p$.

Одной из наиболее важных задач в рамках схемы Бернулли является определение вероятности того, что в n независимых испытаниях событие A произойдет ровно k раз. Обозначим эту вероятность $P_n(k)$. Важно отметить, что не требуется, чтобы событие A произошло k раз в определенной последовательности.

Рассмотрим несколько примеров, связанных со схемой Бернулли.

Пример 4.1. Вероятность того, что расход воды на некотором предприятии окажется нормальным (не больше определенного числа литров в сутки) равна $3/4$. Найти вероятность того, что в ближайшие шесть дней расход воды будет нормальным в течение четырех дней.

Пример 4.2. Найти вероятность того, что при 1000 подбрасываниях монеты герб выпадет ровно 400 раз.

Пример 4.3. Телефонная станция обслуживает 1000 абонентов. В заданном интервале времени любой абонент независимо от остальных может сделать вызов с вероятностью 0,005. Требуется найти вероятность того, что в данном интервале было семь звонков.

Пример 4.4. В мартеновском цехе металлургического завода не каждая плавка отвечает требованиям, обусловленным в заказе. Поэтому, как правило, руководство цеха планирует заведомо большее количество плавок. Предположим, что по заказу надо осуществить 90 плавок, а запланировано 100. Какова вероятность того, что заказ будет полностью выполнен, если вероятность того, что плавка будет удовлетворять требованиям, обусловленным в заказе, равна 0,9?

Очевидно, что первые три примера описываются схемой Бернулли, где определяется вероятность $P_n(k)$. Анализ показывает, что в условиях данных примеров существенно изменяется значение n (от 4 до 1000) и величина $p(A)$ (от 0,75 до 0,005), что влечет за собой применение трех различных формул. Перейдем к их рассмотрению.

4.1. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ СХЕМЫ ПОВТОРНЫХ ИСПЫТАНИЙ

ФОРМУЛА БЕРНУЛЛИ

Это точная формула вида:

$$P_n\left(k\right)=C_n^k p^k q^{n-k},\quad k\le n,\quad q=1-p, \tag{12}$$

которая применяется, когда n невелико. Число C_n^k находится по формуле из теоремы 1.1 главы 1 п. 1.2. Применив формулу (12) для решения первой задачи (пример 4.1), получаем: вероятность того, что расход воды в ближайшие шесть дней будет нормальным в течение четырех дней, равна

$$P_6(4)=\frac{6!}{2!4!}\left(\frac{3}{4}\right)^4\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{5\cdot 6}{2}\cdot\frac{3^4}{4^6}=\frac{15\cdot 3^4}{4^6}\approx 0{,}3.$$

При больших n непосредственное применение формулы (12) не рекомендуется из-за громоздких вычислений, влекущих за собой большие погрешности.

ЛОКАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА МУАВРА–ЛАПЛАСА

Теорема 4.1. Пусть в схеме Бернулли $0 < p(A) < 1$, тогда $P_n(k)$ при $n \to \infty$ удовлетворяет соотношению:

$$\frac{\sqrt{npq}\cdot P_n(k)}{\varphi(x)} \to 1, \quad \text{где} \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Из теоремы следует, что при больших n

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot \varphi(x). \tag{13}$$

Формула (13) приближенная, и она тем точнее, чем больше n. Функция $\varphi(x)$ четная, $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x) = 0$, и уже при $x = 4$ $\varphi(x) < 0{,}0001$. Значения функции $\varphi(x)$ на $[0;\ 4]$ можно найти в приложении. Для примера 4.2 имеем: $n = 1000$, $k = 400$, $p = 0{,}5$, $q = 0{,}5$, тогда

$$x = \frac{400 - 1000\cdot 0{,}5}{\sqrt{1000\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5}} \approx -6{,}32;$$

$$P_{1000}(400) \approx \frac{1}{\sqrt{1000\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5}}\varphi(6{,}32) \approx 0.$$

ФОРМУЛА ПУАССОНА

Значительный класс практически важных задач предполагает использование схемы Бернулли при большом значении n и малой вероятности $p(A)$. В этом случае формула (13) дает приближение для $P_n(k)$ с большой погрешностью. При сделанных предположениях более точной для вычисления $P_n(k)$ является формула Пуассона:

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad \lambda = np. \tag{14}$$

Решение примера 4.3 по формуле (14) дает следующий результат:

$$P_{1000}(7) = \frac{5^7}{7!}e^{-5} \approx 0{,}104.$$

ИНТЕГРАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА МУАВРА–ЛАПЛАСА

Необходимо отметить, что если в рамках схемы Бернулли требуется определить вероятность появления события A не менее k_1 и не более k_2 раз (обозначим ее $P_n(k_1, k_2)$), то при больших n использование формул (12) и (13) не оправдано из-за накопления погрешности при вычислении:

$$P_n(k_1, k_2) = P_n(k_1) + P_n(k_1 + 1) + \ldots + P_n(k_2). \qquad (15)$$

В этой ситуации применяется следующая теорема.

Т е о р е м а 4.2. Пусть $0 < p(A) < 1$, тогда

$$P_n(k_1, k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \qquad (16)$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_1 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Функция $\Phi(x)$ является нечетной, т. е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. Таблица для значений функции на $[0; 5]$ приведена в Приложении. При $x > 5$ $\Phi(x) \approx 0{,}5$.

Запишем исходные данные примера 4.4: $p = 0{,}9$, $k_1 = 90$, $k_2 = 100$. Вычисляем

$$x_1 = \frac{90 - 100 \cdot 0{,}9}{\sqrt{100 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1}} = 0; \quad x_1 = \frac{100 - 100 \cdot 0{,}9}{\sqrt{100 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1}} = \frac{10}{3};$$

$$P_{100}(90; 100) \approx \Phi(3{,}3) - \Phi(0) \approx 0{,}5.$$

Как видно, даже при планировании десяти плавок сверх заказа вероятность того, что заказ будет выполнен полностью, составляет 0,5. Отсюда можно сделать практический вывод о том, что нецелесообразно увеличивать план, а следует стремиться к тому, чтобы каждая плавка отвечала требованиям заказа.

НАИВЕРОЯТНЕЙШЕЕ ЧИСЛО НАСТУПЛЕНИЙ СОБЫТИЯ

Для практики иногда требуется знать, какое число наступлений события A в схеме Бернулли при заданных p и n является наивероятнейшим, т. е. при каком значении числа k вероятность $P_n(k)$ наибольшая. Обозначим это число через k_0. Оно определяется из двойного неравенства:

$$np - q \le k_0 \le np + p, \text{ где } q = 1 - p,$$

причем

а) если np — целое, то $k_0 = np$;

б) если $np - q$ — целое, то существуют два значения $k_0 : k_0^{(1)} = np - q$ и $k_0 : k_0^{(2)} = np + p$, при этом

$$P_n(k_0^{(1)}) = P_n(k_0^{(2)});$$

в) если $np - q$ — дробное, то существует одно $k_0 \in [np - q, np + p]$, так как длина этого отрезка равна 1.

Пример 4.5. В результате многолетних наблюдений для некоторой местности было выяснено: вероятность того, что 1 июля выпадет дождь, равна 4/17. Найти наивероятнейшее число дождливых дней 1 июля в ближайшие 50 лет.

Решение. Для данного примера $n = 50$, $p = 4/17$. Тогда $np - q = 50 \cdot (4/17) - (1 - 4/17) = 11$. Следовательно,

$$k_0^{(1)} = 11,\ k_0^{(2)} = 50 \cdot \frac{4}{17} + \frac{4}{17} = \frac{204}{17} = 12,$$

значит, наивероятнейшим числом будут равновероятные числа 11 и 12.

4.2. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. В чем состоит схема Бернулли?
2. Что означает независимость испытаний в схеме Бернулли? Приведите пример независимых испытаний.
3. Почему для вычисления $P_n(k)$ используются три разные формулы? В каких случаях они применяются?
4. Какие из рассмотренных выше формул для определения $P_n(k)$ являются точными, а какие приближенными?
5. Когда применяется интегральная теорема Муавра–Лапласа?
6. Приведите примеры задач, которые описывались бы схемой Бернулли.
7. Какая из двух вероятностей больше: $P_n(k)$ или вероятность того, что событие A в серии из n независимых испытаний наступит хотя бы k раз? Почему?
8. Как вы понимаете фразу: «Событие A появится в большинстве из n независимых испытаний»?
9. Как найти наивероятнейшее число наступлений события A?

4.3. ВАРИАНТЫ ТИПОВОГО РАСЧЕТА

Вариант 1.

1. При передаче сообщения вероятность искажения одного знака равна 0,1. Какова вероятность того, что сообщение из пяти знаков содержит:

а) три неправильных знака;

б) не менее трех неправильных знаков?

2. Имеется 100 станков равной мощности, работающих независимо друг от друга в одинаковом режиме при включенном приводе в течение 0,8 всего рабочего времени. Какова вероятность того, что в произвольный момент окажутся включенными:

а) от 70 до 85 станков;

б) ровно 90 станков?

3. Аппаратура состоит из 1000 элементов, каждый из которых независимо от остальных выходит из строя за время T с вероятностью 0,0005. Найти вероятность того, что за время T откажет не более трех элементов.

Вариант 2.

1. В скольких партиях с равным по силе противником выигрыш более вероятен: в трех партиях из четырех или в пяти из восьми?

2. В каждом из 700 независимых испытаний событие A происходит с постоянной вероятностью 0,35. Найти вероятность того, что событие A происходит:

а) меньше чем 270 и больше чем 230 раз;

б) точно 250 раз.

3. Среднее число вызовов, поступающих на АТС в минуту, равно 120. Найти вероятность того, что за две секунды на АТС поступит менее двух вызовов.

Вариант 3.

1. Вероятность выхода из строя за время T одного (любого) элемента равна 0,2. Определить вероятность того, что за время T из шести элементов из строя выйдет:

а) половина;

б) меньше половины.

2. Вероятность выхода из строя за время T одного конденсатора равна 0,2. Определить вероятность того, что за время T из 100 конденсаторов, работающих независимо, выйдут из строя:

а) не менее 20 конденсаторов;

б) ровно половина.

3. На факультете обучается 500 студентов. Какова вероятность того, что 31 декабря является днем рождения одновременно трех студентов данного факультета?

Вариант 4.

1. Спортсмен выполняет семь бросков мячом по корзине. Вероятность попадания при каждом броске равна 0,6. Найти вероятность того, что спортсмен попадет мячом в корзину не менее шести раз.

2. В одном коробке 100 спичек. Вероятность того, что спичка не загорится, равна 0,117. Какова вероятность того, что наугад выбранный коробок содержит:

а) ровно 11 спичек, которые не загорятся;

б) не более 24 спичек, которые не загорятся?

3. Вероятность попадания в мишень 0,001. Какова вероятность того, что при 5000 выстрелах будет не менее двух попаданий?

Вариант 5.

1. Вероятность отказа локомотива на линии за время полного оборота составляет 0,01. Найти вероятность того, что в восьми поездах произойдет не более двух отказов локомотива на линии.

2. В каждом из 500 независимых испытаний событие A происходит с постоянной вероятностью 0,4. Найти вероятность того, что событие A наступит:

а) точно 220 раз;

б) менее чем 240 и более чем 180 раз.

3. Прядильщица обслуживает 800 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение часа равна 0,005. Какова вероятность того, что в течение часа нить оборвется на трех веретенах?

Вариант 6.

1. В поезде пять электрических лампочек. Каждая из них перегорает в течение года с вероятностью 0,02. Найти вероятность того, что в течение года перегорит не менее трех лампочек.

2. Вероятность рождения мальчика равна 0,515. Чему равна вероятность того, что среди 80 новорожденных:

а) мальчиков ровно половина;

б) не менее половины мальчиков?

3. Некачественные сверла составляют 2% всей продукции фабрики. Изготовленные сверла упаковываются в ящики по 100 штук. Какова вероятность того, что в ящике окажется не более трех некачественных сверл?

Вариант 7.

1. Вероятность забить пенальти для хорошо подготовленного футболиста равна 0,8. Какова вероятность того что из десяти пенальти он забьет не менее восьми?

2. Вероятность выхода из строя конденсатора за время T равна 0,2. Определить вероятность того, что за время T из 100 конденсаторов, работающих независимо, выйдут из строя:

а) от 14 до 26 конденсаторов;

б) ровно 30 конденсаторов.

3. По каналу связи передается 1000 знаков. Каждый знак может быть искажен независимо от остальных с вероятностью 0,005. Найти вероятность того, что будет искажено не более трех знаков.

Вариант 8.

1. В телевизионной студии пять камер. Для каждой камеры вероятность того, что она включена в данный момент, равна 0,6. Найти вероятность того, что в данный момент включено не менее четырех телевизионных камер.

2. По данным мастерской по ремонту компьютеров, в течение гарантийного срока выходит из строя в среднем 12% процессоров. Какова вероятность того, что из 46 наугад выбранных процессоров проработает гарантийный срок:

а) 36 процессоров;

б) не менее половины?

3. В таблице случайных чисел цифры сгруппированы по две. Найти вероятность того, что среди ста пар пара 09 встретится не менее двух раз.

Вариант 9.

1. Рабочий обслуживает четыре однотипных станка. Вероятность того, что в течение часа станок потребует регулировки, равна 1/3. Какова вероятность того, что в течение часа рабочему придется регулировать не более одного станка?

2. Вероятность попадания в мишень равна 0,3. Какова вероятность того, что при 40 выстрелах произойдет:

а) 25 попаданий;

б) не более половины попаданий?

3. Вероятность сбоя в работе телефонной станции при каждом вызове равна 0,004. Поступило 1000 вызовов. Определить вероятность семи сбоев.

Вариант 10.

1. Вероятность рождения мальчика 0,515. Найти вероятность того, что в семье из пяти детей не более двух мальчиков.

2. Вероятность выздоровления больного в результате применения нового способа лечения равна 0,75. В стационаре случайным образом выбрали 100 человек, подвергшихся новому лечению. Какова вероятность того, что среди них окажется:

а) ровно 70 выздоровевших;

б) от 95 до 100 выздоровевших?

3. Среди 1000 человек приблизительно восемь левшей. Какова вероятность того, что среди сотни выбранных наугад человек не окажется ни одного левши?

Вариант 11.

1. По данным ООО «Бытовые услуги», в течение гарантийного срока выходит из строя в среднем 7% холодильников. Какова вероятность того, что в партии из 100 холодильников не менее половины проработает гарантийный срок?

2. Найти вероятность того, что из 100 случайных прохожих:

а) 80 женщин;

б) от 25 до 70 — мужчины, если вероятность появления мужчины равна 0,4.

3. Завод отправил на базу 5000 доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути товар повредится, равна 0,0002. Найти вероятность того, что на базу поступят три негодных изделия.

Вариант 12.

1. Среди выпускаемых деталей бывает в среднем 4% брака. Какова вероятность того, что среди взятых на испытание пяти деталей будет 40% бракованных?

2. Вероятность отказа электроплиты после оговоренного числа лет работы составляет 0,2. Проведена проверка 100 электроплит. Найти вероятность того, что среди них неисправны:

а) 20 электроплит;

б) менее 20.

3. Вероятность для любого абонента позвонить на коммутатор в течение часа равна 0,01. Телефонная станция обслуживает 100 абонентов. Какова вероятность того, что в течение часа позвонят не более четырех абонентов?

Вариант 13.

1. Известно, что некая волейбольная команда с равной вероятностью выигрывает три партии из пяти и две из четырех. Найти вероятность выигрыша в одной партии.

2. Вероятность того, что деталь не пройдет проверку на качество, равна 0,2. Какова вероятность того, что из 400 случайно отобранных деталей окажутся бракованными:

а) 80 деталей;

б) от 30 до 80 деталей?

3. Вероятность сбоя в работе АТС при каждом вызове равна 0,00008. Определить вероятность того, что при поступлении 1500 вызовов произойдет 6 сбоев.

Вариант 14.

1. Вероятность успешного запуска управляемого снаряда равна 0,9. Найти вероятность того, что из десяти запусков будет, по меньшей мере, девять успешных.

2. Всхожесть семян составляет 80%. Найти вероятность того, что из 100 семян взойдет:

а) ровно 75;

б) не менее 75 и не более 90.

3. На прядильной фабрике работница обслуживает 750 веретен. При вращении веретена пряжа рвется в случайные моменты времени из-за неравномерности натяжения, неровности и других причин. Считая, что вероятность обрыва пряжи на каждом из веретен в течение времени T равна 0,008, найти вероятность того, что за это время произойдет десять обрывов.

Вариант 15.

1. Событие B произойдет в случае, если событие A наступит не менее четырех раз. Найти вероятность события B, если производится пять независимых испытаний, в каждом из которых вероятность совершения A равна 0,8.

2. Вероятность изготовления детали номинальных размеров равна 0,51. Найти вероятность того, что среди 100 деталей окажется:

а) половина деталей номинальных размеров;

б) не менее половины таких деталей.

3. Среди семян ржи 0,4% семян сорняков. Какова вероятность при случайном наборе 500 семян обнаружить пять семян сорняков?

Вариант 16.

1. В ящике имеется 5 синих и 50 красных шаров. Какова вероятность того, что при десяти независимых выборах с возвращением три раза будет выниматься синий шар?

2. Вероятность переключения передач на каждом километре трассы равна 0,25. Найти вероятность того, что на 243-километровом участке этой трассы переключение передач произойдет:

а) 70 раз;

б) не более 70 раз.

3. Вероятность выхода из строя во время испытания на надежность любого из однотипных приборов равна 0,001. Найти вероятность того, что в партии из 100 приборов во время испытания выйдут из строя не более двух приборов.

Вариант 17.

1. Для стрелка, выполняющего упражнение в тире, вероятность попасть в «яблочко» при одном выстреле не зависит от результатов предшествующих выстрелов и равна 0,25. Спортсмен сделал пять выстрелов. Найти вероятность не менее трех попаданий.

2. Фабрика выпускает в среднем 80% продукции первого сорта. Какова вероятность того, что в партии из 100 изделий окажется:

а) не менее 70 и не более 95 изделий первого сорта;

б) ровно половина таких изделий?

3. Известно, что в среднем 5% студентов носят очки. Какова вероятность того, что из 75 студентов, сидящих в аудитории, окажутся два пользующихся очками?

Вариант 18.

1. Пара одинаковых игральных костей бросается семь раз. Какова вероятность того, что сумма очков, выпавших на обеих костях, равная девяти, повторится дважды?

2. Имеется 100 станков, работающих независимо друг от друга. Каждый из них включен в течение 0,8 рабочего времени. Какова вероятность того, что в произвольный момент окажутся включенными:

а) 70 станков;

б) от 70 до 86 станков?

3. Радиоаппаратура состоит из 1000 электроэлементов. Вероятность отказа одного элемента в течение одного года работы равна 0,001 и не зависит от состояния других элементов. Какова вероятность отказа не менее двух электроэлементов за год?

Вариант 19.

1. В магазин вошло восемь покупателей. Найдите вероятность события, состоящего в том, что трое из них будут что-нибудь покупать. Вероятность того, что любой из вошедших в магазин не уйдет без покупки, равна 0,7.

2. Игральная кость бросается 12 000 раз. Какова вероятность того, что шестерка появится:

а) не менее 1900 и не более 2100 раз;

б) 6000 раз?

3. Завод отправил на базу 4000 лампочек. Вероятность повреждения лампочки при перевозке равна 0,00025. Найдите вероятность того, что поврежденными окажутся 40 лампочек.

Вариант 20.

1. Вероятность отказа каждого прибора при испытании не зависит от отказов остальных приборов и равна 0,2. Испытано девять приборов. Найти вероятность того, что четыре из них отказали.

2. Вероятность появления события в некотором опыте равна 0,6. Какова вероятность того, что это событие наступит:

а) в большинстве из 60 опытов;

б) в половине опытов из 60?

3. Найти вероятность того, что среди 200 изделий окажется более трех бракованных, если в среднем бракованные изделия составляют 1%.

Вариант 21.

1. В ячейку памяти записывается 8-разрядное двоичное число. Значения 0 и 1 в каждом разряде появляются с равной вероятностью. Найти вероятность того, что в записи двоичного числа содержится четыре единицы.

2. Вероятность покупки в лотерее проигрышного билета составляет 0,9. Какова вероятность того, что из 500 наугад приобретенных билетов будут без выигрыша:

а) не менее 48 и не более 55 билетов;

б) ровно половина?

3. Вероятность того, что изделие не выдержит испытание, равна 0,001. Найти вероятность того, что из 5000 изделий более чем одно не выдержит испытание.

Вариант 22.

1. Что вероятнее: выиграть в шахматы у равного по силе противника не менее трех партий из четырех или не менее пяти из восьми?

2. Монета подбрасывается 200 раз. Найти вероятность того, что герб появится:

а) не менее 95 и не более 105 раз;

б) ровно 50 раз.

3. Аппаратура содержит 2000 одинаково надежных элементов; вероятность отказа для каждого из них равна 0,0005. Какова вероятность отказа данной аппаратуры, если он наступает при отказе хотя бы одного элемента?

Вариант 23.

1. Испытание заключается в бросании трех игральных костей. Найти вероятность того, что в пяти независимых испытаниях ровно два раза выпадет по три единицы.

2. Испытанию подвергается партия, насчитывающая 100 транзисторов. Вероятность безотказной работы каждого из них равна 0,92. Определить вероятность того, что во время испытания откажет:

а) менее половины транзисторов;

б) ровно десять транзисторов.

3. Вероятность того, что хрустальная люстра разобьется при перевозке, равна 0,001. Найти вероятность того, что из 1000 хрустальных люстр разобьются 10.

Вариант 24.

1. В каждом из четырех ящиков по 5 белых и по 15 черных шаров. Из каждого ящика вынули по одному шару. Какова вероятность вынуть два белых и два черных шара?

2. Пара одинаковых игральных костей бросается 50 раз. Какова вероятность того, что сумма очков, равная девяти, выпадет:

а) ровно десять раз;

б) не менее десяти раз?

3. На телефонной станции неправильное соединение происходит с вероятностью 0,005. Найти вероятность того, что среди 200 соединений произойдет менее трех неправильных.

Вариант 25.

1. Вероятность успешно выполнить штрафной бросок мячом по корзине для спортсмена равна 0,7. Найти вероятность того, что во время игры из восьми выполненных им штрафных бросков больше половины окажутся успешными.

2. В урне 80 белых и 20 черных шаров. Какова вероятность того, что при 60 независимых выборах шара (с возвращением) будет вынуто:

а) половина шаров белого цвета;

б) не менее половины черных шаров?

3. Вероятность возникновения опасной для прибора перегрузки в каждом опыте равна 0,04. Во время перегрузки прибор отказывает с вероятностью 0,2. Найти вероятность отказа трех приборов в серии из 100 опытов.

Вариант 26.

1. Вероятность допустить ошибку при измерении некоторой физической величины равна 0,15. Какова вероятность ошибиться в 3 измерениях из 7?

2. Вероятность осложнений после заражения вирусом гриппа равна 0,02. Какова вероятность того, что из 750 заразившихся осложнения будут:

а) у 30%;

б) не более чем у 7, но не менее чем у 2 человек?

3. Воздушный шар при надувании лопается с вероятностью 0,008. Какова вероятность того, что из 120 шаров, купленных для украшения зала, будут испорчены только 6?

Вариант 27.

1. Мальчик учится забивать гвозди, при этом у него гнется 3 гвоздя из 10. Какова вероятность того, что из 6 гвоздей, которые ему необходимо забить в данный момент, 4 будут забиты правильно?

2. Вероятность того, что водитель автомобиля не пристегнут ремнем безопасности, составляет 0,4. Какова вероятность того, что из 75 водителей, остановленных автоинспектором, пристегнуты:

а) не менее 60;

б) 65 водителей?

3. Магазин получил партию из 1000 хрустальных графинов. Вероятность того, что при транспортировке графин разбивается, равна 0,003. Найдите вероятность того, что магазин получит хотя бы один разбитый графин.

Вариант 28.

1. Каждое второе поворотное реле для автомобиля при покупке его в автомагазине оказывается дефектным. Какова вероятность того, что при покупке 4 реле не менее половины из них качественные?

2. Известно, что только 6 из 10 младенцев вскармливаются грудным молоком. На участке педиатра Ивановой наблюдается 37 детей в возрасте до одного года. Какова вероятность того, что на ее участке:

а) 35 детей находятся на грудном вскармливании;

б) не более 5 малышей находятся на искусственном вскармливании?

3. Учебник издан тиражом 10 000 экземпляров. Вероятность того, что экземпляр учебника неправильно сброшюрован, равна 0,0001. Найдите вероятность того, что тираж содержит ровно 5 бракованных книг.

Вариант 29.

1. Вероятность того, что читатель вернет взятые в библиотеке книги без задержки, равна 0,8. Сегодня библиотекарь выдала книги 8 читателям. Найти вероятность того, что по крайней мере 6 из них вернут книги вовремя.

2. Вероятность того, что покупателю нужна обувь 42-го размера, равна 0,2. Найдите вероятность того, что из 100 покупателей потребуют обувь 42-го размера:

а) 25 человек;

б) не менее 35 человек.

3. По данным технического контроля 2% изготовленных станков нуждаются в дополнительной регулировке. Найдите вероятность того, что из 6000 изготовленных станков в дополнительной регулировке нуждаются 10.

Вариант 30.

1. При размножении комнатных фиалок лист присыпают землей и ждут появления корневой системы, которая развивается в 85% случаев. Какова вероятность того, что цветовод при попытке укоренить 9 листочков фиалки получит только 5 растений с развитой корневой системой?

2. Вероятность того, что денежный приемник автомата при опускании монеты сработает неправильно, равна 0,03. Какова вероятность того, что при опускании 150 монет автомат сработает неправильно:

а) в 90 случаях;

б) не более чем в 120 случаях?

3. В страховой компании застраховано 10 000 клиентов одного возраста и одной социальной группы. Вероятность наступления страхового случая в течение года составляет 0,006. Найдите вероятность того, что компания за год выплатит страховку 100 клиентам.

4.4. ЗАДАЧИ ПОВЫШЕННОЙ СЛОЖНОСТИ

1. Вероятность возникновения опасной для прибора перегрузки в каждом опыте равна 0,4. Определить вероятность отказа прибора в серии из трех независимых опытов, если вероятность отказа прибора при одной, двух и трех опасных перегрузках равна 0,2; 0,5; 0,8 соответственно.

2. Два мальчика играют в кости. Каждый бросает две кости. Петя выигрывает партию, если при 20 бросках два раза в сумме появляется 11 очков. Саша выиграет, если при десяти бросках два раза в сумме появляется девять очков. Чья удача более вероятна в партии?

3. Подводная лодка атакует крейсер, выпуская по нему одну за другой четыре торпеды. Вероятность попадания для каждой торпеды равна $3/4$. Любая из них с одинаковой вероятностью может пробить один из десяти отсеков крейсера, которые в результате попадания наполняются водой. При заполнении хотя бы двух отсеков крейсер тонет. Вычислить вероятность гибели крейсера.

4. Два баскетболиста делают по три броска мячом в корзину. Вероятность попадания мяча при каждом броске равна для первого спортсмена — 0,6, для второго — 0,7. Найти вероятность того, что:

а) у обоих будет равное количество попаданий;

б) у первого баскетболиста будет больше попаданий, чем у второго.

5. Во время каждого из опытов на один час в цепь включается батарея мощностью в 120 или 200 Вт. Вероятность благополучного исхода опыта равна 0,06 и 0,08 соответственно. Результат серии опытов считается достигнутым в случае хотя бы одного благоприятного исхода опыта с батареей в 200 Вт или хотя бы двух с батареей в 120 Вт. Суммарная энергия, затраченная на производство всех опытов, не может превышать 1200 Вт в час. Какие батареи выгоднее использовать?

6. Вероятность того, что событие A наступит один раз в двух независимых испытаниях, равна 0,32. Найти вероятность того, что в 100 независимых испытаниях событие A произойдет 25 раз.

7. Пусть вероятность попадания в десятку при одном выстреле равна 0,2. Определить наименьшее число независимых выстрелов, которые надо произвести, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,9, попасть в десятку хотя бы один раз.

8. Определить вероятность того, что номер первой встретившейся автомашины не содержит ровно двух пятерок, при условии, что все номера четырехзначные, не повторяющиеся, и возможен номер 0000.

9. Для данного баскетболиста вероятность забросить мяч в корзину при броске равна 0,4. Произведено десять бросков. Найти наивероятнейшее число попаданий и соответствующую вероятность.

10. Вероятность хотя бы одного промаха в серии из пяти независимых выстрелов равна 0,3. Какова вероятность промаха при трех выстрелах в серии из пяти выстрелов, если при каждом выстреле эта вероятность одинакова?

11. Два спортсмена выполняют по два выстрела в мишень. Вероятность попадания в десятку при каждом выстреле равна: для первого — 0,7 и для второго — 0,9. Какова вероятность того, что:

а) у обоих будет равное количество попаданий в десятку;

б) у второго будет больше попаданий в десятку, чем у первого?

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Величины могут быть детерминированными или случайными. В отличие от детерминированной величины, принимающей определенные заранее известные значения, случайной называется такая переменная величина, значения которой определить заранее можно только с некоторой степенью вероятности. Понятие случайной величины является одним из важнейших понятий теории вероятностей.

Случайные величины делятся на дискретные (прерывные) и непрерывные.

ГЛАВА 5

ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Случайная величина — понятие более высокого уровня, чем случайное событие. Зачастую бывает нелегко различить эти понятия.

Данная глава должна помочь студенту освоить понятия дискретной случайной величины, основных числовых характеристик дискретных случайных величин, а также овладеть основными законами распределения дискретных случайных величин. Варианты заданий для самостоятельной работы и задачи повышенной сложности дают возможность более глубоко осмыслить вышеперечисленные понятия и применить их в дальнейшем во многих теоретических и прикладных науках.

5.1. ЗАДАНИЕ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Дискретная случайная величина принимает значения, которые можно перечислить. Следовательно, множество значений дискретной случайной величины может быть конечным или счетным.

Пример 5.1. При бросании игральной кости могут появиться числа 1, 2, 3, 4, 5, 6. Наперед определить число выпавших очков невозможно, поскольку оно зависит от многих случайных причин, которые полностью учесть невозможно. В этом смысле число очков есть случайная величина, а числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 — ее возможные значения.

Пример 5.2. Количество опечаток в книге — случайная величина, которая принимает целые неотрицательные значения.

В примере 5.1 случайная величина x могла принять одно из следующих возможных значений: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Эти значения отделены друг от друга промежутками, в которых нет возможных значений x. Множество значений этой случайной величины является конечным. Таким образом, число выпавших очков является примером дискретной случайной величины.

Количество опечаток в книге, отказов машины или ее детали за определенный период T, расход запасных частей на ремонтном предприятии тоже являются примерами дискретных случайных величин.

Случайные величины обозначаются прописными буквами X, Y, Z, а их возможные значения — соответствующими строчными буквами x, y, z.

ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Закон распределения дискретной случайной величины X может быть задан в виде пар чисел (x_i, p_i), где x_1, x_2, ..., x_n, ... — все возможные значения случайной величины X; p_1, p_2, ..., p_n, ... — соответствующие им вероятности:

x_i	x_1	x_2	...	x_n	...
p_i	p_1	p_2	...	p_n	...

Для приведенных пар чисел должно обязательно выполняться условие нормирования:

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$$

Закон распределения можно задать графически (рис. 11).

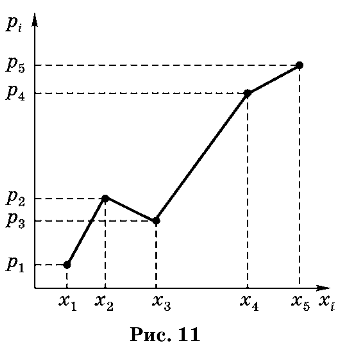


Рис. 11

На графике (рис. 11) x_1, ..., x_5 — возможные значения случайной величины; p_1, ..., p_5 —

соответствующие им вероятности. График называется многоугольником распределения.

Пример 5.3. В денежной лотерее выпущено 1000 билетов. Разыгрывается один выигрыш в 10 000 руб., четыре — по 5000 руб., пять — по 4000 руб. и десять выигрышей — по 1000 руб. Составить ряд распределения стоимости выигрыша для владельца одного лотерейного билета и построить многоугольник распределения.

Решение. Случайная величина X (стоимость возможного выигрыша) может принимать следующие значения: $x_1 = 10\,000$; $x_2 = 5000$; $x_3 = 4000$; $x_4 = 1000$; $x_5 = 0$. Вероятности этих возможных значений: $p_1 = 0{,}001$; $p_2 = 0{,}004$; $p_3 = 0{,}005$; $p_4 = 0{,}01$; $p_5 = 0{,}98$.

Искомый ряд распределения.

x_i	10 000	5000	4000	1000	0
p_i	0,001	0,004	0,005	0,01	0,98

Строим многоугольник распределения (рис. 12).

Рассмотренный способ задания имеет место только для дискретных случайных величин. Более общий способ задания случайных величин можно получить, введя понятие функции распределения.

Функцией распределения случайной величины X называется вероятность того, что случайная величина примет значение меньшее, чем заданное x:

$$F(x) = P(X < x),$$
$$-\infty < x < +\infty.$$

Геометрически функция распределения интерпретируется как вероятность того, что случайная точка X попала левее заданной точки x (соответствующая часть оси абсцисс заштрихована на рис. 13).

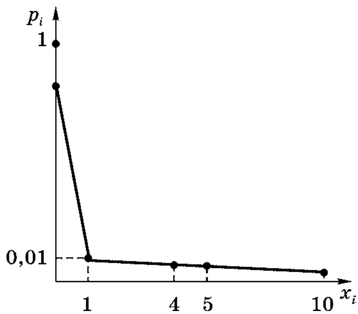


Рис. 12

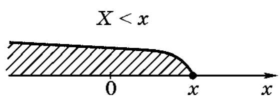


Рис. 13

Отметим следующие *свойства функции распределения*:

Свойство 1. $0 \le F(x) \le 1$.

Свойство 2.

$$F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0; \quad F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$

Свойство 3. $F(x)$ — неубывающая функция своего аргумента.

Свойство 4. $P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$, т. е. вероятность попадания случайной величины на промежуток $[a, b)$ равна приращению функции распределения на этом промежутке.

Пример 5.4. Дан ряд распределения случайной величины X:

x_i	0	1
p_i	0,7	0,3

Найти функцию распределения и построить ее график.

По определению функции распределения имеем: $F(x) = P(X < x)$. Найдем ее при различных значениях аргумента:

1) при $x \le 0$ $F(x) = P(X < x) = 0$, так как событие $\{X < x\}$ при $x \le 0$ невозможно;

2) при $0 < x \le 1$ $F(x) = P(X < x) = P(X = 0) = 0{,}7$;

3) при $x > 1$ $F(x) = P(X < x) = P[(X = 0) + (X = 1)] = P(X = 0) + P(X = 1) = 0{,}7 + 0{,}3 = 1$, так как событие $\{X < x\}$, если $x > 1$, равно сумме двух несовместных событий: $\{X = 0\}$ и $\{X = 1\}$, а вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей слагаемых событий. Отсюда следует, что функция распределения может быть задана формулой:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x \le 0; \\ 0{,}7, & 0 < x \le 1, \\ 1, & 1 < x < \infty. \end{cases}$$

Построим график функции распределения (рис. 14). Он имеет ступенчатый вид.

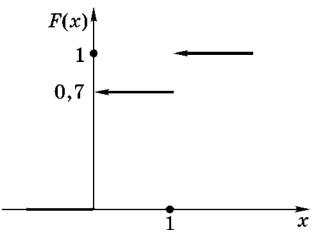


Рис. 14

БИНОМИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может появиться с вероятностью p и не появиться с вероятностью $q = 1 - p$.

Рассмотрим дискретную случайную величину X — число появлений события A в этих испытаниях. Найдем закон распределения случайной величины X.

Возможные значения случайной величины X: $x_0 = 0$; $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; ...; $x_n = n$. Вероятности этих возможных значений, очевидно, можно найти по формуле Бернулли (см. главу 4 п. 4.1 формула (12)).

Формула Бернулли является аналитическим выражением искомого закона распределения.

Биномиальным называют распределение вероятностей, определяемое формулой Бернулли. Закон называют биномиальным потому, что правую часть формулы можно рассматривать как общий член разложения бинома Ньютона:

$$(p+q)^n = C_n^n p^n + C_n^{n-1} p^{n-1} q + \ldots + C_n^k q^{n-k} + \ldots + C_n^0 q^n. \quad (17)$$

В правой части формулы (17) стоит сумма вероятностей всех возможных значений случайной величины X. Очевидно, что эта сумма равна единице, так как $(p + q)^n = 1^n = 1$. Напишем биномиальный закон в виде таблицы:

x_i	n	$n-1$	...	k	...	1	0
p_i	p^n	$np^{n-1}q$	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$	...	npq^{n-1}	q^n

Пример 5.5. Монета брошена два раза. Написать в виде таблицы закон распределения случайной величины X — числа выпадений «герба».

Решение. Вероятность появления герба в каждом бросании монеты $p = 1/2$, следовательно, вероятность непоявления герба $q = 1 - 1/2 = 1/2$.

При двух бросаниях монеты герб может появиться либо два раза, либо один раз, либо совсем не появиться. Таким образом, возможные значения X таковы: $x_1 = 2$; $x_2 = 1$; $x_3 = 0$. Найдем вероятность этих значений по формуле Бернулли (см. главу 4 п. 4.1 формула (12)):

$$P_2(2)=C_2^2p^2;\quad P_2(2)=\left(\frac{1}{2}\right)^2=0{,}25;$$

$$P_2(1)=C_2^1pq;\quad P_2(1)=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=0{,}5;$$

$$P_2(0)=C_2^0q^2;\quad P_2(0)=\left(\frac{1}{2}\right)^2=0{,}25.$$

Напишем искомый закон распределения:

x_i	2	1	0
p_i	0,25	0,5	0,25

Контроль: $0{,}25 + 0{,}5 + 0{,}25 = 1$.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПУАССОНА

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна p. Для определения числа появлений события A в этих испытаниях используют формулу Бернулли (см. гл. 4 п. 4.1. формула (12)). Если n велико, то пользуются локальной теоремой Муавра–Лапласа (см. главу 4 п. 4.1 формула (13)).

Однако она непригодна, если вероятность события мала ($p \le 0{,}1$). В этих случаях (n велико, p мало) прибегают к формуле Пуассона (см. гл. 4 п. 4.1 формула (14)).

Формула (14) является аналитическим выражением закона распределения, называемым распределением Пуассона.

Напишем распределение Пуассона:

x_i	0	1	2	...	k	...	n	...
p_i	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2}e^{-\lambda}$	...	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	...	$\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$	...

Контроль:

$$\sum_{k=0}^{\infty}P_k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda}e^{\lambda}=e^0=1,$$

так как

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=e^{\lambda}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots=e^x\right).$$

П р и м е р 5.6. Телефонная станция обслуживает 2000 абонентов. Вероятность того, что один из них позвонит на АТС, равна 0,0005. Найти закон распределения X — числа возможных абонентов, которые могут позвонить в течение часа.

Решение. $n = 2000$; $p = 0{,}0005$; $\lambda = np = 2000\cdot 0{,}0005 = 1$. Вероятность возможных значений случайной величины X будем искать по формуле Пуассона:

$$P_{2000}(k)=\frac{1^k}{k!}e^{-\lambda},\quad \text{где}\quad k=0,1,2,\ldots,2000;$$

$$P_{2000}(0)=\frac{1^0}{0!}e^{-1}=e^{-1}\approx 0{,}37;$$

$$P_{2000}(1)=\frac{1^0}{1!}e^{-1}=e^{-1}\approx 0{,}37;$$

$$P_{2000}(2)=\frac{1^2}{2!}e^{-1}=\frac{1}{2}e^{-1}\approx 0{,}185;$$

$$P_{2000}(3)=\frac{1^3}{3!}e^{-1}=\frac{1}{6}e^{-1}\approx 0{,}061.$$

Напишем распределение случайной величины X:

x_i	0	1	2	3	...
p_i	0,37	0,37	0,185	0,061	...

5.2. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Закон распределения полностью характеризует случайную величину. Однако часто закон распределения неизвестен, и приходится ограничиваться меньшими сведениями, а именно: пользоваться числами, которые описывают случайную величину суммарно. Такие числа называют числовыми характеристиками случайной величины. Числовые характеристики случайной величины — это параметры, выражающие существенные черты ее распределения. Они позволяют охарактеризовать случайную величину сжато и лаконично (хотя и неполно) не с помощью функциональных зависимостей, а с помощью небольшого набора чисел. Иногда даже выгоднее пользоваться такими ее характеристиками.

Одной из наиболее важных характеристик является точка, фиксирующая положение случайной величины X на числовой оси, вокруг которой группируются возможные значения X — *центр распределения*. Существует несколько числовых характеристик центра распределения, из которых наибольшее распространение получило *математическое ожидание* (теоретическое среднее), являющееся *средним взвешенным* значением случайной величины X.

Характеристики рассеивания (разброса) дают представление о том, как сильно могут отклоняться от своего центра группирования значения случайной величины. В случае применения центральных моментов измеряется отклонение от математического ожидания.

5.3. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятность.

Пусть случайная величина X может принимать значения $x_1, x_2, .., x_n$, вероятности которых соответственно равны $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Тогда математическое ожидание $M(X)$ случайной величины X определяется равенством:

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n. \qquad (18)$$

Если дискретная случайная величина X принимает счетное множество возможных значений, то

$$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i, \qquad (19)$$

причем математическое ожидание существует, если ряд в правой части равенства (19) сходится абсолютно. Кроме обозначения $M(X)$ применяются следующие: MX, m_x, m (в основном для сокращения записи).

П р и м е р 5.7. Найти математическое ожидание случайной величины X, зная закон ее распределения:

x_i	2	3	5
p_i	0,3	0,5	0,2

Решение. Искомое математическое ожидание равно сумме произведений всех возможных значений случайной величины на их вероятности:

$$M(X) = 2 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}5 + 5 \cdot 0{,}2 = 3{,}1.$$

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ СМЫСЛ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ

Пусть произведено n испытаний, в которых случайная величина X приняла m_1 раз значение x_1, m_2 раз — значение x_2, ..., m_k раз — значение x_k, причем $m_1 + m_2 + \ldots + m_к = n$. Тогда сумма всех значений, принятых X, равна $x_1m_1 + x_2m_2 + \ldots + x_km_k$. Найдем среднее арифметическое $\bar{X}$ всех значений, принятых случайной величиной, для чего разделим найденную сумму на общее число испытаний:

$$\bar{X} = \frac{x_1m_1 + x_2m_2 + \ldots + x_km_k}{n},$$

$$\text{или} \quad \bar{X} = x_1\frac{m_1}{n} + x_2\frac{m_2}{n} + \ldots + x_k\frac{m_k}{n}. \tag{20}$$

Отношение m_1/n — относительная частота w_1 значения x_1, m_2/n — относительная частота w_2 значения x_2 и т. д. Запишем равенство (20) так:

$$\bar{X} = x_1w_1 + x_2w_2 + \ldots + x_kw_k. \tag{21}$$

Допустим, что число испытаний достаточно велико. Тогда относительная частота приближенно равна вероятности появления события:

$$w_1 \approx p_1; \quad w_2 \approx p_2; \ \ldots; \quad w_k \approx p_k. \tag{22}$$

Заменив в равенстве (21) относительные частоты соответствующими вероятностями, получим

$$\bar{X} \approx x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_kp_k. \tag{23}$$

Правая часть приближенного равенства (23) есть $M(X)$. Итак, $\bar{X} \approx M(X)$.

Вероятностный смысл полученного результата таков: математическое ожидание приближенно равно (тем точнее, чем больше число испытаний) среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины.

НЕЗАВИСИМОСТЬ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

Определение 5.1. Две случайные величины X и Y называются независимыми, если закон распределения одной из них не зависит от того, какие возможные значения приняла другая величина. В противном случае случайные величины зависимы.

Определение 5.2. Несколько случайных величин называют взаимно независимыми, если законы распределения любого числа из них не зависят от того, какие возможные значения приняли остальные величины.

Определение 5.3. Суммой случайных величин X и Y называется случайная величина $X + Y$, возможные значения которой равны суммам каждого возможного значения X с каждым возможным значением Y. Вероятность возможных значений $X + Y$ для независимых величин X и Y — произведение вероятностей слагаемых, для зависимых величин — произведение вероятности одного слагаемого на условную вероятность второго.

Если среди возможных значений $X + Y$ окажутся равные между собой числа, то такое повторяющееся возможное значение (при написании закона распределения) следует записать только один раз, сложив соответствующие вероятности.

Определение 5.4. Произведением независимых случайных величин называется случайная величина XY, возможные значения которой равны произведениям каждого возможного значения X на каждое возможное значение Y. Вероятность возможных значений произведения равна произведению вероятностей возможных значений сомножителей.

Если среди возможных значений XY окажутся равные между собой числа, то такое повторяющееся возможное значение (при написании закона распределения) следует записать только один раз, сложив соответствующие вероятности.

СВОЙСТВА МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ

Свойство 1. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной: $M(C) = C$.

Свойство 2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания: $M(CX) = CM(X)$.

Свойство 3. Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых: $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$.

Свойство 4. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий: $M(XY) = M(X) \cdot M(Y)$.

Свойство 1 говорит о том, что математическое ожидание постоянной (неслучайной) величины равно самой постоянной. По свойству 2 постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания. Свойство 3 выражает математическое ожидание суммы случайных величин X и Y как сумму их математических ожиданий. По свойству 4 можно вычислять математическое ожидание произведения двух случайных величин X и Y, однако условие независимости сокращает область применения этого свойства.

П р и м е р 5.8. Независимые случайные величины X и Y заданы следующими законами распределения:

x_i	2	3	5
p_i	0,3	0,5	0,2

y_i	1	4
q_i	0,2	0,8

Найти законы распределения их суммы $Z = X + Y$ и произведения $U = X \cdot Y$. Проверить, что $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$; $M(XY) = M(X)M(Y)$.

Решение.

$x_i + y_i$	$x_1 + y_1$	$x_1 + y_2$	$x_2 + y_1$	$x_2 + y_2$	$x_3 + y_1$	$x_3 + y_2$
p_i	p_1q_1	p_1q_2	p_2q_1	p_2q_2	p_3q_1	p_3q_2

или

$x_i + y_i$	3	6	4	7	6	9
p_i	0,06	0,24	0,10	0,40	0,04	0,16

Таким образом, закон распределения суммы $Z = X + Y$ есть

z_i	3	4	6	7	9
p_i	0,06	0,10	0,28	0,40	0,16

Составим закон распределения произведения $U = X \cdot Y$:

x_iy_i	x_1y_1	x_1y_2	x_2y_1	x_2y_2	x_3y_1	x_3y_2
p_i	p_1q_1	p_1q_2	p_2q_1	p_2q_2	p_3q_1	p_3q_2

или

x_iy_i	2	8	3	12	5	20
p_i	0,06	0,24	0,10	0,40	0,04	0,16

Таким образом, закон распределения произведения $U = X \cdot Y$ есть

u_i	2	3	5	8	12	20
p_i	0,06	0,10	0,04	0,24	0,40	0,16

Произведем вычисления:

$$M(X + Y) = 3 \cdot 0{,}06 + 4 \cdot 0{,}10 + 6 \cdot 0{,}28 + 7 \cdot 0{,}40 + 9 \cdot 0{,}16 = 6{,}5;$$
$$M(X) = 2 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}5 + 5 \cdot 0{,}2 = 3{,}1;$$
$$M(Y) = 1 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}8 = 3{,}4;$$
$$M(X) + M(Y) = 3{,}1 + 3{,}4 = 6{,}5;$$
$$M(X + Y) = M(X) + M(Y);$$
$$M(XY) = 2 \cdot 0{,}06 + 3 \cdot 0{,}10 + 5 \cdot 0{,}04 + 8 \cdot 0{,}24 + 12 \cdot 0{,}40 + 20 \cdot 0{,}16 = 10{,}54;$$
$$M(X) \cdot M(Y) = 3{,}1 \cdot 3{,}4 = 10{,}54;$$
$$M(XY) = M(X) \cdot M(Y).$$

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ ЧИСЛА ПОЯВЛЕНИЙ СОБЫТИЯ В НЕЗАВИСИМЫХ ИСПЫТАНИЯХ

Пусть проводится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A постоянна и равна p. Чему равно среднее число появлений события A в этих испытаниях?

Можно доказать, что математическое ожидание $M(X)$ числа появлений события A в n независимых испытаниях равно произведению числа испытаний на вероятность появления события в каждом испытании: $M(X) = np$.

Пример 5.9. Найти математическое ожидание количества лотерейных билетов, на которые выпадет выигрыш, если приобретено 20 билетов, причем вероятность выигрыша по одному билету равна 0,3.

Решение. $M(X) = np = 20 \cdot 0{,}3 = 6$.

5.4. ДИСПЕРСИЯ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

ОТКЛОНЕНИЕ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ ОТ ЕЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ

Зная математическое ожидание случайной величины, еще нельзя судить о том, какие возможные значения она может принимать, как они рассеяны вокруг математического ожидания. Например:

x_i	–0,01	0,01
p_i	0,5	0,5

y_i	–100	100
p_i	0,5	0,5

$M(X) = 0$; $M(Y) = 0$, т. е. математическое ожидание не характеризует случайную величину полностью. Поэтому наряду с математическим ожиданием вводят другие числовые характеристики.

Часто требуется определить, каково отклонение случайной величины от ее среднего значения, т. е. каков разброс случайной величины вокруг ее математического ожидания.

Пусть X — случайная величина и $M(X)$ — ее математическое ожидание. В качестве новой случайной величины рассмотрим разность $X - M(X)$. Эту разность называют отклонением. Если известен закон распределения случайной величины X, то можно записать закон распределения отклонения:

x_i	x_1	x_2	...	x_n
p_i	p_1	p_2	...	p_n

Для того чтобы отклонение приняло значение $x_1 - M(X)$, достаточно, чтобы случайная величина X приняла значение x_1, вероятность этого события равна p_1. Вероятность того, что получим значение $x_1 - M(X)$, тоже равна p_1.

Таким образом, закон распределения случайной величины $X - M(X)$ можно записать следующим образом:

$x_i - M(X)$	$x_1 - M(X)$	$x_2 - M(X)$	...	$x_n - M(X)$
p_i	p_1	p_2	...	p_n

Чтобы определить разброс случайной величины $X - M(X)$ вокруг ее математического ожидания, нельзя воспользоваться средним значением отклонения.

Т е о р е м а 5.1. Математическое ожидание отклонения равно нулю.

Из теоремы видно, что с помощью отклонения не удается определить среднее отклонение возможных значений величины X от ее математического ожидания, т. е. степень рассеяния величины X. Это объясняется взаимным погашением положительных и отрицательных возможных значений отклонения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИСПЕРСИИ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Для оценки рассеяния можно заменить возможные отклонения их абсолютными значениями, но оперировать с абсолютными величинами затруднительно. Поэтому вычисляют среднее значение квадратов отклонений, которое называют дисперсией.

Дисперсией (*рассеянием*) дискретной случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания.

$$D_x = D(X) = M[X - M(X)]^2. \qquad (24)$$

Пример 5.10. Найти дисперсию случайной величины X, заданной следующим законом распределения:

x_i	1	2	5
p_i	0,3	0,5	0,2

Решение. Найдем математическое ожидание:

$$M(X) = 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}5 + 5 \cdot 0{,}2 = 2{,}3.$$

Определим все возможные значения квадрата отклонения:

$$[x_1 - M(X)]^2 = (1 - 2{,}3)^2 = 1{,}69;$$
$$[x_2 - M(X)]^2 = (2 - 2{,}3)^2 = 0{,}09;$$
$$[x_3 - M(X)]^2 = (5 - 2{,}3)^2 = 7{,}29.$$

Найдем закон распределения квадрата отклонения:

$[x_i - M(X)]^2$	1,69	0,09	7,29
p_i	0,3	0,5	0,2

По определению $D(X) = 1{,}69 \cdot 0{,}3 + 0{,}09 \cdot 0{,}5 + 7{,}29 \cdot 0{,}2 =$ $= 2{,}01$.

ФОРМУЛА ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ДИСПЕРСИИ

Для вычисления дисперсии часто бывает удобно пользоваться следующей формулой:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2. \qquad (25)$$

Таким образом, *дисперсия равна разности математического ожидания квадрата и квадрата математического ожидания*. Чем больше дисперсия, тем больше рассеивание возможных значений случайной величины X вокруг ее математического ожидания.

Пример 5.11. Найти дисперсию случайной величины X, которая задана следующим законом распределения:

x_i	2	3	5
p_i	0,1	0,6	0,3

Решение. Найдем математическое ожидание $M(X)$:

$$M(X) = 2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}6 + 5 \cdot 0{,}3 = 3{,}5.$$

Напишем закон распределения случайной величины X^2:

x_i^2	4	9	25
p_i	0,1	0,6	0,3

Найдем математическое ожидание $M(X^2)$:

$$M(X^2) = 4 \cdot 0{,}1 + 9 \cdot 0{,}6 + 25 \cdot 0{,}3 = 13{,}3.$$

Определим искомую дисперсию:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2;\ \ D(X) = 13{,}3 - (3{,}5)^2 = 1{,}05.$$

СВОЙСТВА ДИСПЕРСИИ

Свойство 1. Дисперсия постоянной величины C равна нулю: $D(C) = 0$.

Свойство 2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат: $D(CX) = C^2D(X)$.

Свойство 3. Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин: $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$.

Следствие 1. Дисперсия суммы нескольких взаимно независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин: $D(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + \ldots + D(X_n)$.

Следствие 2. Дисперсия суммы постоянной величины и случайной равна дисперсии случайной величины: $D(C + X) = D(X)$.

Свойство 4. Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий: $D(X - Y) = D(X) + D(Y)$.

Свойство 1 говорит о том, что дисперсия постоянной (неслучайной) величины равна нулю, так как разброс значений в этом случае отсутствует. По свойству 2 постоянная выносится за знак дисперсии во второй степени. Свойство 3 и свойство 4, справедливые лишь для независимых случайных величин X и Y, показывают, что в этом случае дисперсия суммы и дисперсия разности одинаковы и равны сумме дисперсий.

ДИСПЕРСИЯ ЧИСЛА ПОЯВЛЕНИЙ СОБЫТИЯ В НЕЗАВИСИМЫХ ИСПЫТАНИЯХ

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A постоянна. Чему равна дисперсия числа появления события в этих испытаниях? Можно доказать, что дисперсия числа появления события A в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность p появления события постоянна, равна произведению числа испытаний на вероятность появления и непоявления события в одном испытании:

$$D(X) = npq. \tag{26}$$

Пример 5.12. Стрелок производит три выстрела по мишени. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,4. Найти дисперсию числа попаданий.

Решение. По условию $n = 3$; $p = 0{,}4$. Очевидно, что вероятность непопадания в мишень $q = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$. Искомая дисперсия $D(X) = npq$; $D(X) = 3 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}72$.

5.5. СРЕДНЕЕ КВАДРАТИЧЕСКОЕ ОТКЛОНЕНИЕ

Дисперсия имеет размерность квадрата случайной величины X, что не всегда удобно. Поэтому обычно вводится еще одна характеристика рассеивания, имеющая размерность самой случайной величины.

Средним квадратическим отклонением случайной величины X называется квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma_x = \sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \tag{27}$$

Корень из дисперсии берется арифметическим, т. е. неотрицательным. Размерность $\sigma(X)$ совпадает с размерностью X (в этом практическое удобство использования данной характеристики). Например, если X выражается в линейных сантиметрах, то $\sigma(X)$ будет также выражаться в линейных сантиметрах, а $D(X)$ — в квадратных сантиметрах.

Пример 5.13. Случайная величина X задана законом распределения:

x_i	2	3	10
p_i	0,1	0,4	0,5

Найти среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

Решение. Найдем математическое ожидание X:

$$M(X) = 2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}4 + 10 \cdot 0{,}5 = 6{,}4.$$

Определим математическое ожидание X^2:

$$M(X^2) = 2^2 \cdot 0{,}1 + 3^2 \cdot 0{,}4 + 10^2 \cdot 0{,}5 = 54.$$

Найдем дисперсию:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2; \;\; D(X) = 54 - (6{,}4)^2 = 13{,}04.$$

Определим искомое среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{13{,}04} \approx 3{,}61.$$

СВОЙСТВА $\sigma(X)$

Свойство 1. $\sigma(C) = 0$, $C = \text{const}$.

Свойство 2. $\sigma(CX) = |C|\sigma(X)$.

Свойство 3. $\sigma(X + C) = \sigma(X)$.

Свойство 4.

$$\sigma(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = \sqrt{\sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2) + \ldots + \sigma^2(X_n)},$$

где $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — взаимно независимые случайные величины.

Свойство 1 говорит о том, что среднее квадратическое отклонение постоянной (неслучайной) величины равно нулю, так как разброс значений в этом случае отсутствует. По свойству 2 модуль постоянной выносится за знак среднего квадратического отклонения. Согласно свойству 3, среднее квадратическое отклонение суммы постоянной величины и случайной равно среднему квадратическому отклонению случайной величины. Свойство 4 говорит о том, что среднее квадратическое отклонение суммы конечного числа взаимно независимых случайных величин равно корню из суммы квадратов средних квадратических отклонений этих величин.

5.6. НАЧАЛЬНЫЕ И ЦЕНТРАЛЬНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ МОМЕНТЫ

Моменты распределения также относятся к числовым характеристикам случайной величины. Математическое ожидание и дисперсия являются частными случаями моментов.

Начальным моментом порядка k случайной величины X называется математическое ожидание величины X^k:

$$v_k = M(X^k). \tag{28}$$

В частности,

$$v_1 = M(X); \quad v_2 = M(X^2). \tag{29}$$

Пользуясь этими моментами, формулу для вычисления дисперсии (25) можно записать так:

$$D(X) = v_2 - v_1^2. \tag{30}$$

Кроме моментов случайной величины X, целесообразно рассматривать моменты отклонения $X - M(X)$.

Центральным моментом порядка k случайной величины X называется математическое ожидание величины $[X - M(X)]^k$:

$$\mu_k = M[(X - M(X))^k]. \tag{31}$$

В частности,

$$\mu_1 = M[X - M(X)] = 0,$$
$$\mu_2 = M[(X - M(X))^2] = D(X). \tag{32}$$

Можно вывести соотношения, связывающие начальные и центральные моменты. Например

$$\mu_2 = v_2 - v_1^2; \tag{33}$$

$$\mu_3 = v_3 - 3v_1v_2 + 2v_1^3; \tag{34}$$

$$\mu_4 = v_4 - 4v_1v_3 + 6v_1^2v_2 - 3v_1^4 \text{ и т. д.} \tag{35}$$

5.7. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Дать определение случайной величины, привести примеры. Какая случайная величина называется дискретной? Указать и охарактеризовать способы задания дискретной случайной величины.
2. Дать определение биномиального распределения, указать числовые характеристики случайной величины, распределенной по этому закону. Привести пример биномиального распределения.
3. Какое распределение называется пуассоновским? Чему равны числовые характеристики случайной величины, распределенной по этому закону? Привести пример пуассоновского распределения.
4. Что называется математическим ожиданием дискретной случайной величины? Указать свойства математического ожидания, проиллюстрировать их примерами.
5. Что называется дисперсией случайной величины? Указать свойства дисперсии, проиллюстрировать их примерами.
6. Дать определение среднего квадратического отклонения случайной величины, указать его свойства.
7. Дать определение начальных и центральных моментов случайных величин, указать формулы для их вычисления в случае дискретной случайной величины.

5.8. ВАРИАНТЫ ТИПОВОГО РАСЧЕТА

Задание 1.

1. В лотерее на 1000 билетов разыгрываются три вещи, стоимость которых 2100, 600, 300 руб. Составить ряд распределения суммы выигрыша для лица, имеющего один билет. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $F(X)$ суммы выигрыша. Построить график $F(X)$.

2. Вероятность поражения цели при одном выстреле равна 0,4. Составить ряд распределения числа выстрелов, производимых до первого поражения цели, если у стрелка четыре патрона. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $F(X)$ числа выстрелов до первого поражения цели. Построить график $F(X)$.

3. Вероятность изготовления нестандартной детали равна 0,15. Из партии контролер проверяет не более четырех деталей. Если деталь оказывается нестандартной, испытания прекращаются, а партия задерживается. Если деталь оказывается стандартной, контролер берет следующую и т. д. Составить ряд распределения числа проверенных деталей. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $F(X)$ этой случайной величины. Построить график $F(X)$.

4. Три студента повторно пишут контрольную работу. Вероятность того, что правильно перепишет работу первый студент, равна 0,9; второй — 0,8; третий — 0,75. Составить ряд распределения числа студентов, которые правильно перепишут контрольную работу. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $F(X)$ этой случайной величины. Построить график $F(X)$.

5. Производятся последовательные испытания надежности пяти приборов. Каждый следующий прибор испытывается только в том случае, если предыдущий оказался надежным. Составить ряд распределения числа испытаний приборов, если вероятность выдержать испытание для каждого прибора равна 0,9. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $F(X)$ этой случайной величины. Построить график $F(X)$.

6. Имеется пять ключей, из которых только один подходит к замку. Составить ряд распределения числа подбора ключа к замку, если не подошедший ключ в последующих опробованиях не участвует. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $F(X)$ этой случайной величины. Построить график $F(X)$.

7. Рабочий обслуживает три станка. Вероятность того, что в течение определенного промежутка времени откажет первый станок, равна 0,7; второй — 0,7; третий — 0,8. Составить ряд распределения числа станков, которые откажут в течение определенного промежутка времени. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $F(X)$ этой случайной величины. Построить график $F(X)$.

8. В денежной лотерее выпущено 1000 билетов. Разыгрывается один выигрыш в 1000 руб., четыре — по 500 руб., пять — по 400 руб. и десять выигрышей по 100 руб. Составить ряд распределения стоимости выигрыша для владельца одного лотерейного билета. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $F(X)$ этой случайной величины. Построить график $F(X)$.

9. На пути следования поезда установлены четыре светофора. Каждый из них с вероятностью 0,5 либо разрешает, либо запрещает поезду дальнейшее движение. Составить ряд распределения вероятностей числа светофоров, пройденных поездом до первой остановки. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $F(X)$ этой случайной величины. Построить график $F(X)$.

10. Два стрелка делают по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания в нее для первого стрелка равна 0,5, для второго — 0,4. Составить ряд распределения числа попаданий в мишень. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $F(X)$ этой случайной величины. Построить график $F(X)$.

11. Охотник, имеющий три патрона, стреляет по дичи до первого попадания или пока не израсходует все патроны. Составить ряд распределения числа выстрелов, производимых охотником, если вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,7. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $F(X)$ этой случайной величины. Построить график $F(X)$.

12. В лотерее на 2000 билетов разыгрываются четыре вещи, стоимость которых равна 2000, 1000, 500 и 250 руб. Составить ряд распределения суммы выигрыша для лица, имеющего один билет. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $F(X)$ этой случайной величины. Построить график $F(X)$.

13. Четыре студента повторно сдают экзамен. Вероятность того, что сдаст экзамен первый студент, равна 0,95, второй — 0,85, третий — 0,75, четвертый — 0,7. Составить ряд распределения числа студентов, которые сдадут экзамен. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $F(X)$ этой случайной величины. Построить график $F(X)$.

14. Вероятность того, что в библиотеке необходимая студенту книга свободна, равна 0,3. Составить ряд распределения числа библиотек, которые посетит студент, если в городе четыре библиотеки. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $F(X)$ этой случайной величины. Построить график $F(X)$.

15. Вероятность производства нестандартного изделия равна 0,1. Контролер проверяет не более пяти изделий из партии. Если изделие оказывается нестандартным, испытания прекращаются, а партия бракуется. Если изделие оказывается стандартным, контролер берет следующее и т. д. Составить ряд распределения числа проверенных изделий. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $F(X)$ этой случайной величины. Построить график $F(X)$.

16. Производится три независимых выстрела. Вероятность попадания при первом выстреле равна 0,4; при втором — 0,5; при третьем — 0,6. Составить ряд распределения числа попаданий. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $F(X)$ этой случайной величины. Построить график $F(X)$.

17. Дана система из четырех блоков (рис. 15).

В случае неисправности системы вероятность неисправности 1, 2, 3 и 4-го блоков равна 0,2; 0,4; 0,05 и 0,35

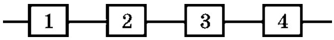


Рис. 15

соответственно, а время, необходимое для поиска неисправности в каждом блоке, — 5, 6, 10 и 9 мин. Одновременный выход из строя двух или более блоков считается невозможным. Составить ряд распределения для случайной величины T — времени, необходимого для поиска неисправностей в системе. Найти $M(T)$, $D(T)$, $\sigma(T)$, $F(T)$ этой случайной величины. Построить график $F(T)$.

18. Каждые сутки со станции отправляются по два скорых поезда. Вероятность своевременного прибытия их на конечный пункт составляет соответственно 0,98 и 0,95. Составить ряд распределения числа поездов, которые прибудут в пункт назначения без опоздания. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $F(X)$ этой случайной величины. Построить график $F(X)$.

19. Три стрелка делают по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания в нее для первого стрелка равна 0,6; для второго — 0,7; для третьего — 0,5. Составить ряд распределения числа попаданий в мишень. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $F(X)$ этой случайной величины. Построить график $F(X)$.

20. В денежной лотерее выпущено 3000 билетов. Разыгрывается один выигрыш в 2000 руб., два — по 1000 руб., пять — по 500 руб. и десять выигрышей — по 100 руб. Составить ряд распределения стоимости выигрыша для владельца одного лотерейного билета. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $F(X)$ этой случайной величины. Построить график $F(X)$.

21. Экзаменатор задает студенту дополнительные вопросы. Вероятность того, что студент ответит на любой заданный вопрос, равна 0,9. Преподаватель задает не более трех вопросов и прекращает экзамен, как только студент обнаруживает незнание ответа. Составить ряд распределения случайной величины X — числа дополнительных вопросов, которые задаст преподаватель. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $F(X)$ этой случайной величины. Построить график $F(X)$.

22. Вероятность того, что стрелок попадет в мишень при одном выстреле, равна 0,8. Стрелку последовательно выдаются патроны, пока он не промахнется. Составить ряд распределения дискретной случайной величины X — числа патронов, выданных стрелку. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $F(X)$ этой случайной величины. Построить график $F(X)$.

23. На ремонте в депо находятся два локомотива. Вероятность того, что своевременно будет отремонтирован один из них, равна 0,95; другой — 0,9. Составить ряд распределения числа локомотивов, которые будут отремонтированы своевременно. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $F(X)$ этой случайной величины. Построить график $F(X)$.

24. Из двух орудий поочередно ведется стрельба по цели до первого попадания одним из орудий. Вероятность попадания в цель для первого орудия равна 0,3, для второго — 0,7. Начинает стрельбу первое орудие. Составить ряд распределения дискретной случайной величины X — числа снарядов, израсходованных первым орудием. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $F(X)$ этой случайной величины. Построить график $F(X)$.

25. В лотерее на 100 билетов разыгрываются три вещи, стоимость которых 1500, 200 и 600 руб. Составить ряд распределения суммы выигрыша для лица, имеющего два билета. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $F(X)$ этой случайной величины. Построить график $F(X)$.

26. Игра состоит в набрасывании колец на колышек. Игрок получает 6 колец и бросает их до первого попадания или до полного израсходования колец. Вероятность попадания при каждом броске равна 0,1. Составьте ряд распределения случайной величины X — числа израсходованных при игре колец. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $F(X)$ этой случайной величины. Построить график $F(X)$.

27. Контрольное задание состоит из 5 вопросов. На каждый из них дается 4 варианта ответов, только один из которых правильный. Составьте ряд распределения числа правильных ответов для испытуемого, не знающего ответы (предполагается, что ответ выбирается наудачу). Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $F(X)$ этой случайной величины. Построить график $F(X)$.

28. Подсчитано, что треть женщин, посещающих продовольственный магазин, покупает обезжиренный йогурт. Составить ряд распределения числа женщин, купивших обезжиренный йогурт, если магазин посетили 8 женщин. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $F(X)$ этой случайной величины. Построить график $F(X)$.

29. Из колоды в 36 карт наугад вынимают 5. Составить ряд распределения числа тузов среди вынутых карт. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $F(X)$ этой случайной величины. Построить график $F(X)$.

30. На автобазе имеется 12 машин. Вероятность выхода на линию каждой из них равна 0,8. Составить ряд распределения числа автомашин, вышедших на линию. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $F(X)$ этой случайной величины. Построить график $F(X)$.

Задание 2.

1. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого из них в одном опыте равна 0,1. Составить ряд распределения числа отказавших элементов в одном опыте. Найти $M(X)$ и $D(X)$ этой случайной величины.

2. Игральная кость брошена три раза. Составить ряд распределения числа выпадений шестерки. Найти $M(X)$ и $D(X)$ этой случайной величины.

3. Предполагая одинаковой вероятность рождения мальчика и девочки, составить ряд распределения случайной величины X, которая выражает число мальчиков в семье, имеющей пять детей. Найти $M(X)$ и $D(X)$ этой случайной величины.

4. В студии находится три телевизионные камеры. Для каждой камеры вероятность того, что она включена в данный момент, равна 0,6. Составить ряд распределения числа камер, включенных в данный момент. Найти $M(X)$ и $D(X)$ этой случайной величины.

5. Составить ряд распределения числа попаданий в цель, если произведено пять выстрелов, а вероятность попадания при одном выстреле равна 0,3. Найти $M(X)$ и $D(X)$ этой случайной величины.

6. Вероятность приема сигнала равна 0,8. Сигнал передается пять раз. Составить ряд распределения числа передач, в которых сигнал будет принят. Найти $M(X)$ и $D(X)$ этой случайной величины.

7. Вероятность содержания никеля в каждой пробе руды равна 0,03. Исследованию подлежат пять проб. Составить ряд распределения числа проб с промышленным содержанием никеля. Найти $M(X)$ и $D(X)$ этой случайной величины.

8. В партии из шести деталей имеется четыре стандартных. Наугад отобраны три детали. Составить ряд распределения случайной величины X — числа стандартных деталей среди отобранных. Найти $M(X)$ и $D(X)$ этой случайной величины.

9. Вероятность опасной концентрации фенола в каждой пробе речной воды равна 0,03. Исследуется шесть проб. Составить ряд распределения числа проб с опасным содержанием фенола. Найти $M(X)$ и $D(X)$ этой случайной величины.

10. Монету бросают пять раз. Составить ряд распределения числа появления «герба». Найти $M(X)$ и $D(X)$ этой случайной величины.

11. В партии деталей 10% нестандартных. Наугад отобраны четыре детали. Составить ряд распределения случайной величины X — числа нестандартных деталей среди четырех отобранных. Найти $M(X)$ и $D(X)$ этой случайной величины.

12. Вероятность того, что вещь, взятая напрокат, будет возвращена исправной, равна 0,8. Было выдано 5 вещей. Составить ряд распределения числа вещей, которые будут возвращены исправными. Найти $M(X)$ и $D(X)$ этой случайной величины.

13. У сборщика десять деталей, среди которых шесть стандартных и четыре нестандартных. Он наугад берет три детали. Составить ряд распределения числа стандартных деталей среди трех отобранных. Найти $M(X)$ и $D(X)$ этой случайной величины.

14. Производится стрельба по цели. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,6. Составить ряд распределения случайной величины X — числа попаданий по цели при двух выстрелах. Найти $M(X)$ и $D(X)$ этой случайной величины.

15. Производится три независимых опыта, в каждом из которых событие появляется с вероятностью 0,2. Составить ряд распределения числа появлений события в трех опытах. Найти $M(X)$ и $D(X)$ этой случайной величины.

16. Радиосигнал передан четыре раза. Вероятность приема одного из них равна 0,9. Составить ряд распределения числа передач, в которых сигнал будет принят. Найти $M(X)$ и $D(X)$ этой случайной величины.

17. Партия, насчитывающая 100 швейных машин, содержит десять бракованных. Из всей партии с целью проверки качества случайным образом отбирается пять швейных машин. Составить ряд распределения числа бракованных машин среди отобранных. Найти $M(X)$ и $D(X)$ этой случайной величины.

18. Случайная величина X — число попаданий мячом в корзину при одном броске. Вероятность попадания равна 0,3. Составить ряд распределения случайной величины X. Найти $M(X)$ и $D(X)$.

19. Вероятность отказа локомотива на линии за время полного оборота составляет 0,01. На линии работает восемь локомотивов. Составить ряд распределения числа отказов. Найти $M(X)$ и $D(X)$ этой случайной величины.

20. Станок-автомат штампует детали. Вероятность того, что деталь окажется бракованной, равна 0,1. Составить ряд распределения числа бракованных деталей среди десяти изготовленных. Найти $M(X)$ и $D(X)$ этой случайной величины.

21. Отдел технического контроля проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие стандартно, равна 0,9. В партии пять изделий. Составить ряд распределения числа стандартных деталей в партии из пяти изделий. Найти $M(X)$ и $D(X)$ этой случайной величины.

22. Составить ряд распределения дискретной случайной величины X — числа отказов элемента некоторого устройства в десяти независимых опытах, если вероятность отказа элемента в каждом опыте равна 0,9. Найти $M(X)$ и $D(X)$.

23. Вероятность рождения мальчика равна 0,51. В семье четверо детей. Составить ряд распределения числа девочек в семье. Найти $M(X)$ и $D(X)$ этой случайной величины.

24. Составить ряд распределения числа выпадений пятерки, если игральная кость брошена четыре раза. Найти $M(X)$ и $D(X)$ этой случайной величины.

25. На ремонте в депо стоят три вагона. Вероятность того, что они будут отремонтированы своевременно, равна для каждого 0,9. Составить ряд распределения числа вагонов, которые будут отремонтированы своевременно. Найти $M(X)$ и $D(X)$ этой случайной величины.

26. Составить ряд распределения суммы числа очков, выпавших при подбрасывании двух игральных костей. Найти $M(X)$ и $D(X)$ этой случайной величины.

27. Из группы в 5 мужчин и 5 женщин случайным образом выбирают 4 человека. Составить ряд распределения числа мужчин среди выбранных людей. Найти $M(X)$ и $D(X)$ этой случайной величины.

28. Школьник решает 4 примера по математике. Вероятность сделать ошибку в вычислениях одного примера равна 0,2. Составить ряд распределения числа правильно решенных примеров. Найти $M(X)$ и $D(X)$ этой случайной величины.

29. Обычно цветок розы вянет в течение трех дней с вероятностью 0,6. Составить закон распределения числа цветков, которые завянут в течение трех дней, если букет насчитывает 7 роз. Найти $M(X)$ и $D(X)$ этой случайной величины.

30. Вероятность проехать 30 кругов в автогонке без замены комплекта шин равна 0,07. В заезде участвуют 15 машин. Составить ряд распределения числа машин, которым потребуется замена шин. Найти $M(X)$ и $D(X)$ этой случайной величины.

Задание 3.

1. Вероятность для любого абонента позвонить на коммутатор в течение одного часа равна 0,01. Телефонная станция обслуживает 300 абонентов. Составить ряд распределения числа абонентов, которые могут позвонить на коммутатор в течение одного часа. Найти $M(X)$ этой случайной величины.

2. Устройство содержит 2000 ламп. Вероятность выхода из строя одной лампы в течение одного часа работы устройства равна 0,001. Составить ряд распределения числа ламп, вышедших из строя в течение одного часа работы устройства. Найти $M(X)$ этой случайной величины.

3. Торговая база получила 1000 электрических лампочек. Вероятность повреждения электролампочки в пути равна 0,0001. Составить ряд распределения числа лампочек, поврежденных в пути. Найти $M(X)$ этой случайной величины.

4. Учебник издан тиражом 100 000 экземпляров. Вероятность того, что учебник сброшюрован неправильно, равна 0,0001. Составить ряд распределения числа учебников, сброшюрованных неправильно. Найти $M(X)$ этой случайной величины.

5. Станок-автомат штампует детали. Вероятность того, что деталь окажется бракованной, равна 0,01. Составить ряд распределения бракованных деталей из 200 изготовленных. Найти $M(X)$ этой случайной величины.

6. Прядильщица обслуживает 1000 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение одной минуты равна 0,03. Составить ряд распределения числа обрывов нити в течение одной минуты. Найти $M(X)$ этой случайной величины.

7. Среди семян ржи содержится 0,4% семян сорняков. Случайным образом взято 500 семян. Составить ряд распределения числа семян сорняков. Найти $M(X)$ этой случайной величины.

8. Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо друг от друга. Вероятность отказа любого элемента в течение времени T равна 0,002. Составить ряд распределения числа элементов, отказавших в течение времени T. Найти $M(X)$ этой случайной величины.

9. Телефонная станция обслуживает 100 абонентов. Вероятность для любого абонента позвонить на коммутатор в течение часа равна 0,01. Составить ряд распределения числа абонентов, которые могут позвонить на коммутатор в течение часа. Найти $M(X)$ этой случайной величины.

10. Вероятность отказа стиральной машины-автомата определенного типа после оговоренного срока работы равна 0,02. Проведена проверка 100 стиральных машин. Составить ряд распределения числа неисправных стиральных машин. Найти $M(X)$ этой случайной величины.

11. Вероятность выпуска сверла повышенной хрупкости (брак) равна 0,02. Сверла укладываются в коробки по 100 штук. Составить ряд распределения бракованных сверл в одной коробке. Найти $M(X)$ этой случайной величины.

12. Книга в 500 страниц содержит 500 опечаток. Составить ряд распределения числа опечаток на одной странице. Найти $M(X)$ этой случайной величины.

13. Вероятность появления события A в одном испытании равна 0,01. Составить ряд распределения числа появлений события A в 100 испытаниях. Найти $M(X)$ этой случайной величины.

14. Радиоаппаратура состоит из 1000 электроэлементов. Вероятность отказа одного элемента в течение года работы равна 0,001 и не зависит от состояния других элементов. Составить ряд распределения числа элементов, которые выйдут из строя в течение года работы радиоаппаратуры. Найти $M(X)$ этой случайной величины.

15. Устройство содержит 2000 одинаково надежных элементов, вероятность отказа каждого из них равна 0,0005. Составить ряд распределения числа отказавших элементов. Найти $M(X)$ этой случайной величины.

16. Вероятность выхода из строя электронной лампы, проработавшей t дней, равна 0,03. Аппаратура содержит 1000 ламп. Составить ряд распределения числа вышедших из строя ламп, проработавших t дней. Найти $M(X)$ этой случайной величины.

17. Книга содержит 400 страниц. Вероятность сделать опечатку на одной странице равна 0,0025. Составить ряд распределения числа опечаток на одной странице, если в книге их 400. Найти $M(X)$ числа опечаток на одной странице.

18. Вероятность выпуска бракованного изделия равна 0,01. Выпущено 200 изделий. Составить ряд распределения числа бракованных изделий. Найти $M(X)$ этой случайной величины.

19. Вероятность выхода из строя монитора компьютера после оговоренного срока работы равна 0,01. Проведены наблюдения за работой 200 мониторов. Составить ряд распределения числа мониторов, вышедших из строя после оговоренного срока работы. Найти $M(X)$ этой случайной величины.

20. Книга издана тиражом 40 000 экземпляров. Вероятность того, что книга сброшюрована неправильно, равна 0,0002. Составить ряд распределения числа книг, сброшюрованных неправильно. Найти $M(X)$ этой случайной величины.

21. Коммутатор учреждения обслуживает 100 абонентов. Вероятность того, что в течение одной минуты абонент позвонит на коммутатор, равна 0,02. Составить ряд распределения числа абонентов, которые могут позвонить на коммутатор в течение одной минуты. Найти $M(X)$ этой случайной величины.

22. Рукопись объемом в 1000 страниц машинописного текста содержит 1000 опечаток. Составить ряд распределения числа опечаток на одной странице. Найти $M(X)$ этой случайной величины.

23. Прядильщица обслуживает 800 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение одной минуты равна 0,004. Составить ряд распределения числа обрывов нити в течение одной минуты. Найти $M(X)$ этой случайной величины.

24. Завод отправил на базу 4000 доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится, равна 0,0002. Составить ряд распределения числа негодных изделий, прибывших на базу. Найти $M(X)$ этой случайной величины.

25. Вероятность появления события A в одном испытании равна 0,02. Составить ряд распределения числа появлений события A в 80 испытаниях. Найти $M(X)$ этой случайной величины.

26. Вероятность того, что водитель автомобиля не пристегнут ремнем безопасности, составляет 0,4. Составить ряд распределения числа водителей, не пристегнутых ремнем безопасности, среди 350 водителей. Найти $M(X)$ этой случайной величины.

27. Воздушный шар при надувании лопается с вероятностью 0,008. Составить ряд распределения числа лопнувших шаров при надувании 250 штук. Найти $M(X)$ этой случайной величины.

28. Вероятность того, что покупателю потребуется обувь 38-го размера, равна 0,3. Составить ряд распределения числа покупателей, которые потребуют обувь 38-го размера, среди 150 посетителей обувного магазина. Найти $M(X)$ этой случайной величины.

29. Вероятность того, что при транспортировке цыпленок погибнет, равна 0,15. Составить ряд распределения числа погибших при транспортировке цыплят в партии из 1000 штук. Найти $M(X)$ этой случайной величины.

30. Вероятность того, что клиент останется доволен сервисом отеля, равна 0,85. Составить ряд распределения числа довольных клиентов, если в этом сезоне отель посетили 1200 человек. Найти $M(X)$ этой случайной величины.

Задание 4.

Независимые случайные величины X и Y заданы таблицами распределений.

Найти:

1) $M(X)$, $M(Y)$, $D(X)$, $D(Y)$;

2) таблицы распределения случайных величин $Z_1 = 2X + Y$, $Z_2 = X \cdot Y$;

3) $M(Z_1)$, $M(Z_2)$, $D(Z_1)$, $D(Z_2)$ непосредственно по таблицам распределений и на основании свойств математического ожидания и дисперсии.

1.

x_i	–1	1	2
p_i	p	0,1	0,3

y_i	2	4
p_i	0,4	0,6

2.

x_i	–1	1	5
p_i	0,3	0,1	p

y_i	–1	2
p_i	0,9	0,1

3.

x_i	–1	3	5
p_i	0,2	0,5	p

y_i	–2	3
p_i	0,4	0,6

4.

x_i	2	3	4
p_i	p	0,2	0,3

y_i	1	2
p_i	0,6	0,4

5.

x_i	2	4	5
p_i	0,3	p	0,2

y_i	–1	1
p_i	0,4	0,6

6.

x_i	–4	1	2
p_i	p	0,6	0,3

y_i	–1	3
p_i	0,8	0,2

7.

x_i	–1	2	4
p_i	p	0,4	0,1

y_i	–1	3
p_i	0,3	0,7

8.

x_i	1	2	4
p_i	0,2	p	0,5

y_i	3	4
p_i	0,8	0,2

9.

x_i	–8	2	3
p_i	0,4	p	0,5

y_i	2	8
p_i	0,3	0,7

10.

x_i	–3	1	6
p_i	0,1	p	0,5

y_i	–2	1
p_i	0,7	0,3

11.

x_i	1	3	4
p_i	0,5	p	0,1

y_i	–1	3
p_i	0,1	0,9

12.

x_i	2	3	5
p_i	0,2	p	0,2

y_i	–1	1
p_i	0,3	0,7

13.

x_i	–2	–1	3
p_i	p	0,1	0,4

y_i	2	8
p_i	0,1	0,9

14.

x_i	–2	–1	3
p_i	0,5	0,1	p

y_i	2	7
p_i	0,8	0,2

15.

x_i	1	2	5
p_i	p	0,3	0,2

y_i	3	4
p_i	0,2	0,8

16.

x_i	–1	1	2
p_i	0,1	0,5	p

y_i	3	5
p_i	0,7	0,3

17.

x_i	1	2	3
p_i	p	0,3	0,2

y_i	–1	4
p_i	0,2	0,8

18.

x_i	–1	1	2
p_i	0,1	p	0,2

y_i	3	4
p_i	0,5	0,5

19.

x_i	–3	1	5
p_i	0,1	0,6	p

y_i	2	4
p_i	0,4	0,6

20.

x_i	–1	1	2
p_i	0,1	p	0,2

y_i	2	8
p_i	0,3	0,7

21.

x_i	–4	1	2
p_i	0,5	p	0,3

y_i	1	5
p_i	0,2	0,8

22.

x_i	–3	1	2
p_i	0,4	p	0,2

y_i	3	4
p_i	0,9	0,1

23.

x_i	–5	1	2
p_i	0,6	0,1	p

y_i	1	2
p_i	0,3	0,7

24.

x_i	–2	1	2
p_i	p	0,2	0,3

y_i	2	3
p_i	0,6	0,4

25.

x_i	–4	–1	2
p_i	p	0,2	0,4

y_i	1	3
p_i	0,3	0,7

26.

x_i	1	3	5
p_i	0,2	0,2	p

y_i	–3	2
p_i	0,4	0,6

27.

x_i	–2	–1	1
p_i	p	0,4	0,1

y_i	2	6
p_i	0,2	0,8

28.

x_i	1	4	6
p_i	0,1	0,3	p

y_i	1	4
p_i	0,5	0,5

29.

x_i	–2	2	5
p_i	0,2	p	0,5

y_i	–4	5
p_i	0,7	0,3

30.

x_i	3	4	5
p_i	0,3	0,4	p

y_i	–1	2
p_i	0,1	0,9

5.9. ЗАДАЧИ ПОВЫШЕННОЙ СЛОЖНОСТИ

1. Автоматическая линия при нормальной настройке выпускает бракованное изделие с вероятностью *p*. Переналадка линии производится после обнаружения первого бракованного изделия. Составить ряд распределения числа всех изделий, изготовленных между двумя переналадками. Найти среднее число этих изделий.

2. Цепь размыкается, если отказывает один из двух последовательно соединенных элементов (*A* и *B*). Вероятность того, что при включении откажет элемент *A*, равна 0,2; вероятность отказа для *B* составляет 0,3. Найти математическое ожидание числа включений до первого размыкания цепи.

3. Сколько изюмин должно содержать в среднем сдобное тесто, чтобы вероятность обнаружить хотя бы одну изюмину в булочке была не менее 0,99 (распределение вероятностей числа изюмин в булочке предполагается пуассоновским)?

4. Найти закон распределения дискретной случайной величины X, принимающей два возможных значения: x_1 и x_2, если $p_1 = 0{,}9$; $M(X) = 2{,}2$; $D(X) = 0{,}36$. Найти также функцию распределения и построить ее график.

5. Два депо производят ремонт вагонов. Производительность первого депо втрое больше производительности второго. Вероятность ремонта с отличной оценкой для первого равна 0,9, для второго — 0,7. В обоих депо отремонтировали по пять вагонов. Составить закон распределения числа вагонов, имеющих отличную оценку.

6. В результате испытаний двух измерительных приборов (A и B) установлены вероятности уровней помех, оцениваемых по четырехбалльной системе:

Уровень помех		**0**	**1**	**2**	**3**
Вероятность наблюдения помех	прибор A	0,7	0,20	0,06	0,04
	прибор B	0,8	0,06	0,04	0,10

По приведенным данным выбрать лучший прибор, если таковым является тот, который в среднем имеет меньший уровень помех.

7. В партии из десяти деталей имеется восемь стандартных. Наугад отобраны две детали. Составить закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных.

Г Л А В А 6

НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Наиболее важными для специалистов инженерного профиля являются непрерывные случайные величины. На языке непрерывных случайных величин описываются: точность обработки поверхностей деталей и точность (погрешность) измерительной аппаратуры; разнообразные электро- и радиосигналы, помехи, шумы; вибрации машин и механизмов; неровности рельсового пути и дорожного покрытия; неравнопрочность обшивки вагона и т. п. Именно базовые знания о непрерывных случайных величинах, их свойствах и характеристиках являются основой для изучения теории случайных процессов и математической статистики, столь необходимых в технических дисциплинах.

Данная глава призвана сообщить читателю первоначальные сведения о непрерывных случайных величинах и работе с ними, обучить решению простейших задач на определение числовых и графических характеристик этих величин, дать набор типовых заданий для организации самостоятельной работы студенческой группы.

6.1. ОПИСАНИЕ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Под *непрерывной случайной величиной* обычно понимается такая *случайная величина*, возможные значения которой непрерывно (сплошь) заполняют один или несколько интервалов числовой оси. В частности, областью возможных значений непрерывной случайной величины могут быть бесконечные промежутки типа $(-\infty, b]$; $[\alpha, +\infty)$ или вся числовая прямая.

Примерами непрерывных случайных величин могут служить: наибольший размер шероховатостей после обточки якоря электродвигателя; высота вертикальной неровности рельсового полотна бесстыковой плети; время безотказной службы оси вагона; отклонение напряжения в электрической цепи от номинала и т. д.

Полную информацию о случайной величине дает ее *закон распределения*, который может задаваться в разных формах. Универсальным способом задания закона распределения случайной величины (как непрерывной, так и дискретной) является функция распределения (гл. 5 п. 5.1). Для непрерывной случайной величины добавляется важное свойство $F(x)$, а именно — непрерывность и дифференцируемость:

Свойство 5. $F(x)$ непрерывна в любой точке x и дифференцируема всюду, кроме, возможно, отдельных точек, где она терпит излом (рис. 16).

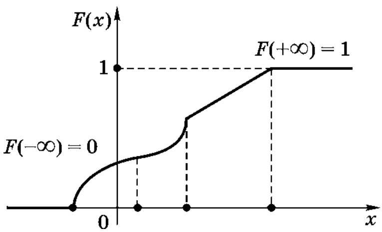


Рис. 16

Вероятность того или иного значения непрерывной случайной величины X вычисляется по свойству 4 (гл. 5 п. 5.1) с помощью предельного перехода (промежуток $[a, b)$ сжимается в точку), и в силу непрерывности $F(x)$ равна нулю:

$$P(X = a) = \lim_{b \to a}[F(b) - F(a)] = 0.$$

Таким образом, событие $\{X = a\}$ возможно, но его вероятность равна нулю. Поэтому при работе с непрерывной случайной величиной обычно оценивается вероятность попадания значения X в некоторую окрестность заданной точки a.

Плотностью вероятности (или *плотностью распределения*) непрерывной случайной величины X называется функция $f(x)$, которая является первой производной функции распределения $F(x)$:

$$f(x) = F'(x) = \frac{d}{dx}F(x).$$

Плотность вероятности $f(x)$, как и функция распределения $F(x)$, есть одна из форм закона распределения; в отличие от функции распределения, эта форма не универсальна: она существует только для непрерывных случайных величин.

График плотности вероятности $f(x)$ часто называют *кривой распределения* (рис. 17).

При этом вероятность события $\{a \le X \le b\}$ равна площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком плотности вероятности.

Среди *свойств плотности вероятности* отметим следующие:

Свойство 1. $f(x) \ge 0$.

Свойство 2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$

Свойство 3. $P(a \le X \le b) = \int\limits_a^b f(x)dx.$

Свойство 4. $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt.$

Свойство 1 следует из неубывания функции распределения ($F'(x) \ge 0$). Свойство 2 выражает вероятность достоверного события $\{-\infty < X < \infty\}$, равную единице. Свойство 3 задает вероятность попадания значения X на заданный отрезок $[a, b]$ через интеграл от плотности и, так как $P(X = b) = 0$, может быть переписано в виде

$$P(a \le X < b) = \int\limits_a^b f(x)dx,$$

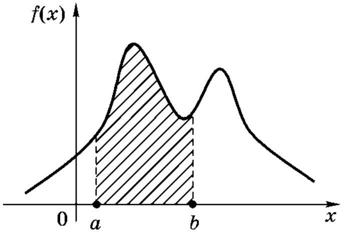


Рис. 17

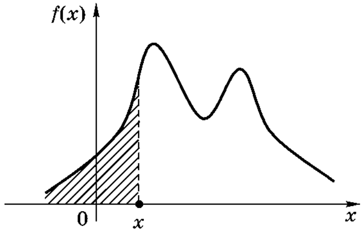


Рис. 18

аналогичном свойству для $F(x)$. Свойство 4 дает способ получения $F(x)$ по плотности вероятности $f(x)$. В геометрической интерпретации этого свойства $F(x)$ равна площади, ограниченной сверху кривой распределения и лежащей левее точки x (рис. 18).

Функция распределения $F(x)$, как вероятность, есть величина безразмерная. Плотность вероятности $f(x)$ имеет размерность, обратную размерности соответствующей случайной величины X.

Распространим определения числовых характеристик дискретных величин (гл. 5 пп. 5.3, 5.4, 5.5) на непрерывные.

6.2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ НЕПРЕРЫВНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Математическое ожидание непрерывной случайной величины X определяется следующим образом:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx,$$

где $f(x)$ — плотность вероятности для X, а несобственный интеграл абсолютно сходится. Если все возможные значения X распределены на конечном отрезке $[a, b]$, то формула для математического ожидания принимает вид

$$M(X) = \int_{a}^{b} x f(x) dx.$$

Свойства математического ожидания дискретных величин (гл. 5 п. 5.3) сохраняются и для непрерывных.

6.3. ДИСПЕРСИЯ НЕПРЕРЫВНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ. СРЕДНЕЕ КВАДРАТИЧЕСКОЕ ОТКЛОНЕНИЕ

По аналогии с центральным моментом k-го порядка дискретной случайной величины определяется и центральный момент порядка k непрерывной случайной величины.

Центральным моментом k-го порядка непрерывной случайной величины X называется величина

$$\mu_k = M([X - M(X)]^k) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^k f(x)dx,$$

где $M(X)$ — математическое ожидание; $f(x)$ — плотность вероятности, а интеграл абсолютно сходится.

Особое значение для практики имеет второй центральный момент μ_2, для которого вводится специальное обозначение.

Дисперсией непрерывной случайной величины X называется центральный момент второго порядка:

$$D(X) = \mu_2 = M([X - M(X)]^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 f(x)dx.$$

Если все возможные значения X распределены на конечном отрезке $[a, b]$, то формула дисперсии принимает вид

$$D(X) = \int_a^b (x - M(X))^2 f(x)dx.$$

Более краткие обозначения дисперсии: $D(X)$, D_x. Дисперсия $D(X) \geq 0$, как интеграл от неотрицательной функции. Свойства дисперсии дискретных случайных величин сохраняются и для непрерывных величин.

Легко получить для вычисления дисперсии более удобную формулу:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - [M(X)]^2.$$

Среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины определяется так же, как и для дискретной.

Средним квадратическим отклонением непрерывной случайной величины X называется величина

$$\sigma(X) = \sigma_x = \sqrt{D(X)} = \sqrt{D_x}.$$

6.4. АСИММЕТРИЯ И ЭКСЦЕСС

Важнейшими числовыми характеристиками непрерывной случайной величины являются асимметрия и эксцесс.

Асимметрией непрерывной случайной величины X называется центральный момент третьего порядка:

$$\mu_3 = M([X - M(X)]^3 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^3 f(x)dx.$$

Асимметрия характеризует степень несимметричности, «скошенности» графика $f(x)$ относительно среднего значения $M(X)$ и в случае симметричного распределения равна нулю.

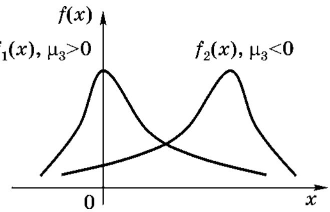


Рис. 19

Две асимметричные кривые распределения $f_1(x)$, $f_2(x)$ изображены на рис. 19.

График $f_1(x)$ имеет положительную асимметрию $\mu_3 > 0$ (образно говоря, «хвост справа»), а график $f_2(x)$ — отрицательную асимметрию $\mu_3 < 0$ («хвост слева»). Асимметрия μ_3 имеет размерность куба соответствующей случайной величине X, поэтому иногда вводится *коэффициент асимметрии:*

$$\alpha_3 = \mu_3/\sigma_x{}^3,$$

являющийся безразмерной характеристикой «скошенности» кривой распределения.

Эксцесс служит количественной характеристикой «крутости», т. е. островершинности или плосковершинности кривой распределения непрерывной случайной величины X, и определяется так:

$$\mu_4 = M([X - M(X)]^4) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^4 f(x)dx.$$

Вместо μ_4, имеющего размерность четвертой степени случайной величины X, часто применяется *нормированный коэффициент эксцесса*:

$$\alpha_4 = \mu_4 / \sigma_x^4 - 3.$$

Число 3 вычитается из безразмерного отношения μ_4 / σ_x^4 потому, что для наиболее важного на практике нормального распределения (гл. 7 п. 7.3) отношение $\mu_4 / \sigma_x^4 = 3$. Таким образом, для нормального распределения $\alpha_4 = 0$. Кривые, более островершинные, чем кривая нормального распределения, обладают положительным коэффициентом эксцесса: $\alpha_4 > 0$; более плосковершинные — отрицательным: $\alpha_4 < 0$ (рис. 20).

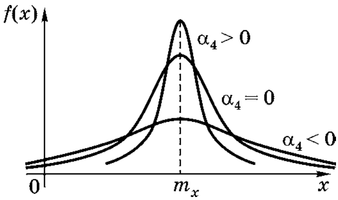


Рис. 20

6.5. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. В каком случае при вычислении $M(X)$, $D(X)$ несобственный интеграл превращается в собственный?
2. Что является универсальной формой закона распределения для случайных величин?
3. В каком случае совпадают медиана и математическое ожидание?
4. Как вычислить $P(a \le X < b)$ с помощью плотности вероятности и функции распределения?
5. Какие свойства $M(X)$ и $D(X)$ выполняются лишь для независимых непрерывных случайных величин?
6. Почему $F(x)$ является безразмерной величиной?
7. Какое свойство позволяет находить $F(x)$ по плотности вероятности $f(x)$?
8. Почему $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$?
9. Почему размерность плотности вероятности является обратной к размерности самой случайной величины?
10. Какие особенности формы графика $f(x)$ определяют асимметрию и эксцесс?

11. Зачем нужна дифференцируемость $F(x)$ для непрерывных случайных величин?
12. Зачем вводится величина σ_x, дублирующая дисперсию $D(X)$?
13. Проверьте с помощью свойств интеграла, что $\mu_1 = 0$ для любой непрерывной случайной величины.
14. Покажите, что $D(X) \geq 0$.

6.6. РАЗБОР ТИПОВЫХ ЗАДАЧ НА НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

ЗАДАЧА С ИЗВЕСТНОЙ ФУНКЦИЕЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

В задачах первого типа закон распределения непрерывной случайной величины X задается функцией распределения $F(x)$. Кроме того, даны числа α и β, определяющие интервал на числовой прямой.

Требуется:

1) найти плотность вероятности $f(x)$;

2) построить графики $F(x)$ и $f(x)$;

3) найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$;

4) найти $P(\alpha < x < \beta)$.

Разберем решение такой задачи.

Пример. Дано:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \dfrac{\pi}{2}; \\ \cos 3x, & \dfrac{\pi}{2} < x \leq \dfrac{2}{3}\pi; \\ 1, & x > \dfrac{2}{3}\pi; \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2}; \quad \beta = \pi.$$

Решение.

1. Так как $f(x) = F'(x)$, то, дифференцируя каждую из формул в задании $F(x)$, имеем

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \dfrac{\pi}{2}; \\ -3\sin 3x, & \dfrac{\pi}{2} < x \leq \dfrac{2}{3}\pi; \\ 0, & x > \dfrac{2}{3}\pi. \end{cases}$$

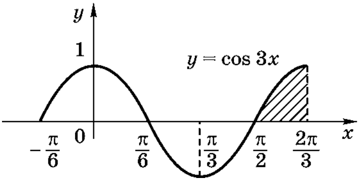


Рис. 21

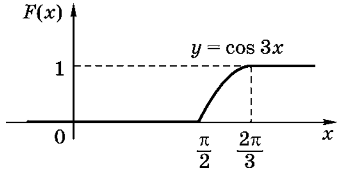


Рис. 22

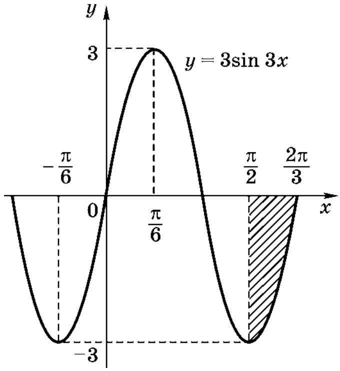


Рис. 23

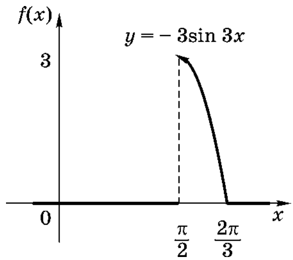


Рис. 24

2. При построении графиков $F(x)$ (рис. 22) и $f(x)$ (рис. 24) полезно предварительно построить графики их элементарных составляющих (рис. 21 и рис. 23 соответственно).

Учитываем, что $\cos 3x$, $\sin 3x$ соответствуют в три раза большей частоте, чем $\cos x$, $\sin x$. Умножение на 3 увеличивает амплитуду колебаний в три раза, а знак «минус» отражает график относительно оси абсцисс. Заметим также, что для большей наглядности масштабы по осям абсцисс и ординат можно брать разные.

Обратите внимание, что у непрерывной случайной величины X график $F(x)$ непрерывен, а для графика $f(x)$ это необязательно (рис. 24).

3. При нахождении числовых характеристик используем тот факт, что возможные значения X расположены на конечном отрезке $[a, b]=\left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$:

а) математическое ожидание

$$M(X)=\int_a^b xf(x)dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}}-3x\sin 3xdx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}}-x\sin 3xd(3x)=$$

$$=\left|\begin{array}{c}\text{интегрируем по частям}\\ \int udv=uv-\int vdu\end{array}\right|=\left|\begin{array}{c}u=x;\quad dv=-\sin 3xd(3x)\\ du=dx;\quad v=\cos 3x\end{array}\right|=$$

$$=\left(x\cos 3x-\int\cos 3xdx\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}}=\left(x\cos 3x-\frac{1}{3}\sin 3x\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}}=$$

$$=\left(\frac{2\pi}{3}\cos 2\pi-\frac{1}{3}\sin 2\pi\right)-\left(\frac{\pi}{2}\cos\frac{3\pi}{2}-\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi}{2}\right)=$$

$$=\left|\begin{array}{c}\cos 2\pi=1;\quad \sin 2\pi=0\\ \cos\frac{3\pi}{2}=0;\quad \sin\frac{3\pi}{2}=-1\end{array}\right|=\frac{2\pi}{3}-\frac{1}{3}=\frac{2\pi-1}{3}.$$

Грубый контроль показывает, что $\pi/2<(2\pi-1)/3<$ $<2\pi/3$, т. е. $M(X)$ попадает в интервал возможных значений X, что соответствует смыслу задачи;

б) дисперсия $D(X)=M(X^2)-(M(X))^2$. Математическое ожидание $M(X)$ уже найдено. Найдем $M(X^2)$, т. е. математическое ожидание квадрата случайной величины X:

$$M(X^2)=\int_a^b x^2f(x)dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}}-x^2\sin 3xd(3x).$$

Найдем отдельно неопределенный интеграл для $M(X)^2$:

$$\int -x^2\sin 3xd(3x)=\left|\begin{array}{c}u=x^2;\quad dv=-\sin 3xd(3x)\\ du=2xdx;\quad v=\cos 3x\end{array}\right|=$$

$$=x^2\cos 3x-2\int x\cos 3xdx=\left|\begin{array}{c}u=x;\quad dv=\cos 3xdx\\ du=dx;\quad v=\frac{1}{3}\sin 3x\end{array}\right|=$$

$$=x^2\cos 3x-2\left(\frac{x}{3}\sin 3x-\frac{1}{3}\int\sin 3xdx\right)=$$

$$=x^2\cos 3x-\frac{2x}{3}\sin 3x-\frac{2}{9}\cos 3x+C.$$

Подставим полученный результат в формулу $M(X)^2$:

$$M(X^2)=\left(x^2\cos 3x-\frac{2x}{3}\sin 3x-\frac{2}{9}\cos 3x\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}}=$$

$$=\left(\frac{4\pi^2}{9}\cos 2\pi-\frac{4\pi}{9}\sin 2\pi-\frac{2}{9}\cos 2\pi\right)-$$

$$-\left(\frac{\pi^2}{4}\cos\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\sin\frac{3\pi}{2}-\frac{2}{9}\cos\frac{3\pi}{2}\right)=\left|\begin{array}{c}\cos 2\pi=1;\quad \sin 2\pi=0\\ \cos\frac{3\pi}{2}=0;\quad \sin\frac{3\pi}{2}=-1\end{array}\right|=$$

$$=\frac{4\pi^2}{9}-\frac{2}{9}-\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi^2-3\pi-2}{9}.$$

Следовательно,

$$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2=\frac{4\pi^2-3\pi-2}{9}-\left(\frac{2\pi-1}{3}\right)^2=$$

$$=\frac{4\pi^2-3\pi-2}{9}-\frac{4\pi^2-4\pi+1}{9}=\frac{1}{9}(\pi-3).$$

Грубый контроль показывает, что $D(X) > 0$ и невелика, что соответствует смыслу задачи (случайная величина X распределена на очень узком интервале);

в) среднее квадратическое отклонение

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\frac{1}{3}\sqrt{\pi-3}.$$

4. Вероятность попадания случайной величины X в интервал (α, β) $P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$. Так как имеем дело с непрерывной случайной величиной X, то знак «$\leq$» в исходной теоретической формуле можно поменять на «$<$». Получаем

$$P\left(\frac{\pi}{2}<X<\pi\right)=F(\pi)-F\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-0=1.$$

ЗАДАЧА С ИЗВЕСТНОЙ ПЛОТНОСТЬЮ ВЕРОЯТНОСТИ

В задачах второго типа закон распределения X задается плотностью распределения $f(x)$, формула которой содержит неизвестный параметр a (он же — нормирующий коэффициент).

Требуется:

1) найти параметр a;

2) найти функцию распределения $F(x)$;

3) построить графики $f(x)$ и $F(x)$;

4) найти асимметрию и эксцесс X.

Решение таких задач рассмотрим на примере наиболее сложного случая, когда для работы с $f(x)$ приходится действительно использовать несобственные интегралы, а не заменять их собственными на отрезке, где $f(x) \neq 0$.

Пример. Дано:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ axe^{-x}, & x > 0. \end{cases}$$

Решение.

1. Найдем a. Известно, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$. Основная цепочка вычислений выглядит так:

$$1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)d\,x = a\int\limits_{0}^{\infty} xe^{-x}d\,x = \left| \begin{array}{c} \text{по определению} \\ \text{интеграла 1-го рода} \end{array} \right| =$$

$$= a \lim_{\beta \to +\infty} \int\limits_{0}^{\beta} xe^{-x}d\,x.$$

Найдем отдельно неопределенный интеграл и используем его в основной цепочке:

$$\int xe^{-x}d\,x = \left| \begin{array}{c} \text{интегрирование по частям} \\ \int udv = uv - \int vdu \end{array} \right| =$$

$$= \left| \begin{array}{c} u = x; \quad dv = e^{-x}d\,x \\ du = dx; \quad v = \int e^{-x}d\,x = -e^{-x} \end{array} \right| =$$

$$= -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + c.$$

Продолжая основную цепочку, имеем

$$1 = a \lim_{\beta \to +\infty} (-x\,e^{-x} - e^{-x}) \Big|_0^{\beta} = a \lim_{\beta \to +\infty} [-\beta e^{-\beta} - e^{-\beta} - (0 - 1)] =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \text{слагаемые с } e^{-\beta} \\ \text{стремятся к нулю} \end{array} \right| = a \cdot 1 = a.$$

Таким образом, $a = 1$ и $f(x)$ принимает вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ x\,e^{-x}, & x > 0. \end{cases}$$

2. Находим $F(x)$. По свойству 4 плотности вероятности

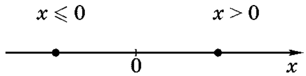


Рис. 25

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

Строим схему основных положений точки x (рис. 25), которая необходима ввиду изменения формулы $F(x)$, ее зависимости от положения точки x на оси абсцисс.

Случай $x \leq 0$. Интегрируем на промежутке, заштрихованном на рис. 26, имеем

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dx = 0.$$

Случай $x > 0$. Интегрируем на промежутке, заштрихованном на рис. 27.

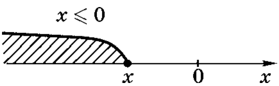


Рис. 26

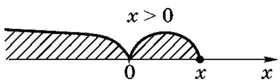


Рис. 27

Интеграл от плотности вероятности разбивается на сумму двух интегралов:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{x} xe^{-x}dx = 0 + (-x\,e^{-x} - e^{-x})\Big|_{0}^{x} =$$

$$= -xe^{-x} - e^{-x} - (0-1) = 1 - xe^{-x} - e^{-x}.$$

В итоге получаем

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ 1 - xe^{-x} - e^{-x}, & x > 0. \end{cases}$$

3. При построении графика $f(x)$ (в нашем случае) важно найти точку максимума и точку перегиба, так как поведение $f(x)$ на концах промежутка известно: $f(0) = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$ (горизонтальная асимптота $f = 0$ при $x \to +\infty$).

Вычислим первую и вторую производные функции $f(x)$:

$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1 - x);$$
$$f''(x) = -e^{-x} - (e^{-x} - xe^{-x}) = e^{-x}(x - 2).$$

Точка максимума определяется условием $f'(x) = e^{-x}(1 - x) = 0$ и, так как $e^{-x} \neq 0$, получаем

$$x = 1 \left(f(1) = \frac{1}{e} \approx 0{,}3678795 \right).$$

Точка перегиба определяется условием: $f''(x) = e^{-x}(x - 2) = 0$. Получаем

$$x = 2 \left(f(2) = \frac{2}{e^2} \approx 0{,}2706712 \right).$$

Итоговая кривая распределения изображена на рис. 28.

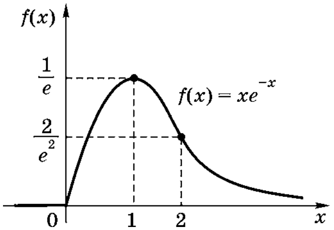


Рис. 28

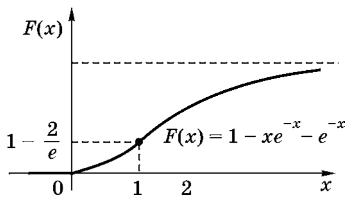


Рис. 29

При построении графика $F(x)$ (в нашем случае) важно найти точку перегиба, так как поведение $F(x)$ на концах промежутка известно: $F(0) = 0$;

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} (1 - xe^{-x} - e^{-x}) = 1$$

(горизонтальная асимптота $F = 1$ при $x \to +\infty$).

Перегиб исследуется с помощью второй производной, но $F''(x) = f'(x)$, так как $f(x) = F'(x)$ по определению. По графику $f(x)$ замечаем, что $f'(x) > 0$ при $0 < x < 1$ и $f'(x) < 0$ при $x > 1$. Поэтому $F(x)$ меняет выпуклость вниз на выпуклость вверх, имея перегиб при $x = 1$

$$\left(F(1) = 1 - \frac{2}{e} \approx 0{,}264241 \right).$$

График $F(x)$ приведен на рис. 29.

4. При вычислении асимметрии и эксцесса потребуется взять по частям несколько интегралов. Приведем эти результаты заранее:

$$\int x^2e^{-x}dx = -e^{-x}(x^2+2x+2)+c;$$
$$\int x^3e^{-x}dx = -e^{-x}(x^3+3x^2+6x+6)+c;$$
$$\int x^4e^{-x}dx = -e^{-x}(x^4+4x^3+12x^2+24x+24)+c;$$
$$\int x^5e^{-x}dx = -e^{-x}(x^5+5x^4+20x^3+60x^2+120x+120)+c.$$

Кроме того, придется вычислять несколько пределов вида

$$\lim_{\beta\to+\infty} e^{-\beta}\cdot Q(\beta),$$

где $Q(\beta)$ — многочлен. Все такие пределы равны нулю по правилу Лопиталя, поэтому значения несобственных интегралов оказываются равными свободным членам из формул соответствующих неопределенных интегралов, например:

$$\int_0^\infty x^2e^{-x}dx =$$
$$= \lim_{\beta\to+\infty}(-e^{-x}(x^2+2x+2))\Big|_0^\beta \lim_{\beta\to+\infty}[-e^{-\beta}(\beta^2+2\beta+2)+2] = 2.$$

В итоге получаем

$$\int_0^\infty x^2e^{-x}dx = 2;\quad \int_0^\infty x^3e^{-x}dx = 6;\quad \int_0^\infty x^4e^{-x}dx = 24;\quad \int_0^\infty x^5e^{-x}dx = 120.$$

Проведем предварительные вычисления.

Известно, что $\mu_3 = M[(X - M(X))^3]$; $\mu_4 = M[(X - M(X))^4]$, а нормированные коэффициенты

$$\alpha_3 = \mu_3/\sigma_x^3;\quad \alpha_4 = \mu_4/\sigma_x^4 - 3.$$

Поэтому сначала необходимо найти $M(X)$ и $\sigma(X)$:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^\infty x^2e^{-x}dx = 2;$$
$$M(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2f(x)dx = \int_0^\infty x^3e^{-x}dx = 6;$$
$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 6 - 4 = 2;\quad \sigma_x = \sqrt{D(X)} = \sqrt{2}.$$

Найдем асимметрию:

$$\mu_3 = \int\limits_{-\infty}^{\infty}(x - M(X))^3 f(x)dx = \int\limits_{0}^{\infty}(x-2)^3 xe^{-x}dx =$$

$$= \int\limits_{0}^{\infty}(x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 8x)e^{-x}dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} \text{линейность} \\ \text{интеграла} \end{matrix} \right| = \int\limits_{0}^{\infty}x^4e^{-x}dx - 6\int\limits_{0}^{\infty}x^3e^{-x}dx + 12\int\limits_{0}^{\infty}x^2e^{-x}dx -$$

$$-8\int\limits_{0}^{\infty}f(x)dx = 24 - 36 + 24 - 8 = 4.$$

Асимметрия $\mu_3 = 4$, а ее нормированный коэффициент $\alpha_3 = \mu_3 / \sigma_x^3 = \dfrac{4}{(\sqrt{2})^3} = \sqrt{2}$. Видим, что $\mu_3 > 0$, т. е. кривая распределения имеет «хвост» справа, что и подтверждается графиком плотности вероятности $f(x)$ (см. рис. 28).

Найдем эксцесс:

$$\mu_4 = \int\limits_{-\infty}^{\infty}(x - M(X))^4 f(x)dx = \int\limits_{0}^{\infty}(x-2)^4 xe^{-x}dx =$$

$$= \int\limits_{0}^{\infty}(x^5 - 8x^4 + 24x^3 - 32x^2 + 16x)e^{-x}dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} \text{аналогично} \\ \text{расчету } \mu_3 \end{matrix} \right| = 120 - 192 + 144 - 64 + 16 = 24.$$

Эксцесс $\mu_4 = 24$, а его нормированный коэффициент

$$\alpha_4 = \mu_4 / \sigma_x^4 - 3 = 24/4 - 3 = 3 > 0.$$

Значит, кривая плотности вероятности $f(x)$ в данном примере является более островершинной, чем кривая нормального распределения.

ЗАДАЧА С СОСТАВНОЙ ПЛОТНОСТЬЮ ВЕРОЯТНОСТИ

В задачах третьего типа $f(x)$ называется составной, так как на промежутке, где $f(x) \neq 0$, она задается двумя различными формулами. Кроме того, даны числа α и β, определяющие интервал на числовой прямой.

Требуется:

1) проверить свойство $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$;

2) построить график $f(x)$;

3) найти функцию распределения $F(x)$;

4) найти $P(\alpha \le X \le \beta)$;

5) найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Решим такую задачу.

П р и м е р. Дано:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ 4-(x-2)^2, & 0 < x \le 2; \\ (x-3)^2+3, & 2 < x \le 3; \\ 0, & x > 3. \end{cases}$$

$$\alpha = -3; \quad \beta = 1.$$

Решение.

1.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dx + \int\limits_{0}^{2} (-x^2+4x)dx +$$

$$+ \int\limits_{2}^{3} (x^2-6x+12)\ dx + \int\limits_{3}^{\infty} 0\ dx =$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2\right)\Bigg|_0^2 + \left(\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 12x\right)\Bigg|_2^3 = \frac{26}{3} \ne 1.$$

Таким образом, свойство 2 плотности вероятности для заданной $f(x)$ не выполняется, поэтому необходимо умножить $f(x)$ на нормирующий множитель $a = 3/26$:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \frac{3}{26}(-x^2+4x), & 0 < x \le 2; \\ \frac{3}{26}(x^2-6x+12), & 2 < x \le 3; \\ 0, & x > 3. \end{cases}$$

Новая $f(x)$ может считаться плотностью вероятности, ибо $f(x) \ge 0$, в чем убедимся при построении кривой распределения.

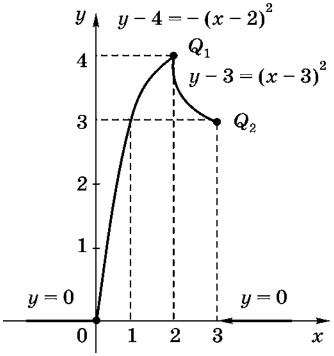


Рис. 30

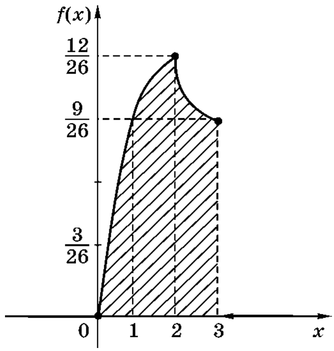


Рис. 31

2. Удобнее построить сначала более простой график исходной $f(x)$, а затем изменить масштаб по оси $y = f(x)$. График $f(x)$ (рис. 30) состоит из четырех участков, задаваемых разными уравнениями:

а) при $x \le 0$ $y = 0$, т. е. нулевая постоянная;

б) при $0 < x \le 2$ $y = 4 - (x-2)^2$ или $(y-4) = -(x-2)^2$ — парабола типа $y = -x^2$ с вершиной, смещенной в точку $Q_1(2, 4)$;

в) при $2 < x \le 3$ $y = (x-3)^2 + 3$ или $(y-3) = (x-3)^2$ — парабола типа $y = x^2$ с вершиной в точке $Q_2(3, 3)$;

г) при $x > 3$ $y = 0$, т. е. опять нулевая постоянная.

«Настоящая» плотность вероятности, с учетом масштабного множителя $a = 3/26$, изображена на рис. 31. По сути дела, изменена только шкала по оси ординат. Площадь под кривой равна единице.

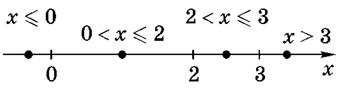


Рис. 32

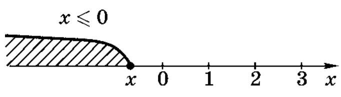


Рис. 33

3. Находим $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$. Строим схему основных положений точки x (рис. 32).

Четыре положения точки x, соответствующие разбиению оси абсцисс на интервалы, дадут четыре формулы:

а) случай $x \le 0$. Интегрируем на промежутке, заштрихованном на рис. 33, и имеем

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0 dx = 0;$$

б) случай $0 < x \le 2$. Получаем сумму двух интегралов (рис. 34):

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0 dx + \frac{3}{26}\int_{0}^{x}(-x^2 + 4x)dx = \frac{3}{26}\left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2\right)\Bigg|_0^x =$$

$$= \frac{1}{26}(-x^3 + 6x^2);$$

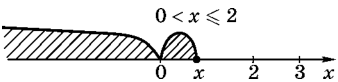


Рис. 34

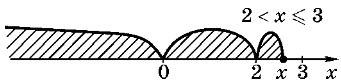


Рис. 35

в) случай $2 < x \le 3$. Имеем сумму трех интегралов (рис. 35):

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0 dx + \frac{3}{26}\int_{0}^{2}(-x^2 + 4x)\,dx + \frac{3}{26}\int_{2}^{x}(x^2 - 6x + 12)dx =$$

$$= \frac{3}{26}\left[\left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2\right)\Bigg|_0^2 + \left(\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 12x\right)\Bigg|_2^x\right] =$$

$$= \frac{1}{26}(x^3 - 9x^2 + 36x - 28);$$

г) случай $x > 3$ соответствует рис. 36, но $\int_{-\infty}^{x} f(x)dx,$ где $x > 3$, дает всю площадь под кривой распределения (см. рис. 31) и равен единице: $F(x) = 1$.

В итоге получаем функцию распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \frac{1}{26}(-x^3 + 6x^2), & 0 < x \le 2; \\ \frac{1}{26}(x^3 - 9x^2 + 36x - 28), & 2 < x \le 3; \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

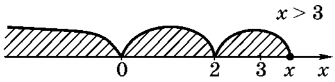


Рис. 36

4. Известно, что $P(\alpha \le X \le \beta) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$. Поэтому

$$P(-3 \le X \le 1) = \int\limits_{-3}^{1} f(x)dx = \int\limits_{-3}^{0} 0dx + \int\limits_{0}^{1} \frac{3}{26}(-x^2 + 4x)dx =$$

$$= 0 + \frac{3}{26}\left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2\right)\Bigg|_0^1 = \frac{3}{26} \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{26}.$$

5. Находим числовые характеристики случайной величины X:

а) $M(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$. Отбрасывая крайние интегралы разложения, равные нулю, получим

$$M(X) = \frac{3}{26}\left[\int\limits_0^2 x(-x^2 + 4x)dx + \int\limits_2^3 x(x^2 - 6x + 12)dx\right] =$$

$$= \frac{3}{26}\left[\left(-\frac{x^4}{4} + \frac{4}{3}x^3\right)\Bigg|_0^2 + \left(\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 6x^2\right)\Bigg|_2^3\right] =$$

$$= \frac{3}{26}\left[\left(-4 + \frac{32}{3}\right) + \left(\frac{81}{4} - 54 + 54\right) - (4 - 16 + 24)\right] =$$

$$= \frac{3}{26} \cdot \frac{179}{12} = \frac{179}{104} \approx 1{,}7211538;$$

б) аналогично, отбрасывая нулевые слагаемые, получаем

$$M(X^2) = \frac{3}{26}\left[\int\limits_0^2 x^2(-x^2 + 4x)dx + \int\limits_2^3 x^2(x^2 - 6x + 12)dx\right] =$$

$$= \frac{3}{26}\left[\left(-\frac{x^5}{5} + x^4\right)\Bigg|_0^2 + \left(\frac{x^5}{5} - \frac{3}{2}x^4 + 4x^3\right)\Bigg|_2^3\right] =$$

$$= \frac{3}{26} \cdot \frac{303}{10} = \frac{909}{260} \approx 3{,}496158.$$

Есть смысл перейти к приближенным вычислениям, ибо в случае громоздких дробей преимущество точного ответа исчезает:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 \approx$$
$$\approx 3,4961588 - 2,9623704 = 0,5337884;$$

в) $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} \approx 0,7306082.$

Если для соответствующих инженерных приложений непрерывной случайной величины X достаточна точность 10^{-4}, то ответы будут следующие:

$$M(X) \approx 1,7212;$$
$$D(X) \approx 0,5338; \ \sigma(X) \approx 0,7306.$$

6.7. ВАРИАНТЫ ТИПОВОГО РАСЧЕТА

ЗАДАНИЯ С ИЗВЕСТНОЙ ФУНКЦИЕЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Дана функция распределения $F(x)$ непрерывной случайной величины X.

Требуется:

1) найти плотность вероятности $f(x)$;
2) построить графики $F(x)$ и $f(x)$;
3) найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$;
4) найти $P(\alpha < X < \beta)$ для данных α, β.

Вариант 1.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ 3x^2 + 2x, & 0 < x \le \dfrac{1}{3}; \\ 1, & x > \dfrac{1}{3}; \end{cases}$$

$\alpha = 0,1; \ \ \beta = 0,5.$

Вариант 2.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \dfrac{1}{2}(1 - \cos x), & 0 < x \le \pi; \\ 1, & x > \pi; \end{cases}$$

$\alpha = 0; \ \ \beta = \dfrac{\pi}{2}.$

Вариант 3.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0;\\ \dfrac{x^2}{100}, & 0<x\le 10;\\ 1, & x>10; \end{cases}$$

$\alpha=2;\quad \beta=5.$

Вариант 4.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le -1;\\ \dfrac{3}{4}x+\dfrac{3}{4}, & -1<x\le \dfrac{1}{3};\\ 1, & x>\dfrac{1}{3}; \end{cases}$$

$\alpha=-0,5;\quad \beta=0.$

Вариант 5.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0;\\ x, & 0<x\le 1;\\ 1, & x>1; \end{cases}$$

$\alpha=0,3;\quad \beta=0,7.$

Вариант 6.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0;\\ \dfrac{x^2}{9}, & 0<x\le 3;\\ 1, & x>3; \end{cases}$$

$\alpha=1;\quad \beta=2.$

Вариант 7.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0;\\ \sin 3x, & 0<x\le \dfrac{\pi}{6};\\ 1, & x>\dfrac{\pi}{6}; \end{cases}$$

$\alpha=0;\quad \beta=\dfrac{\pi}{12}.$

Вариант 8.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le \dfrac{\pi}{2};\\ -2\cos x, & \dfrac{\pi}{2}<x\le \dfrac{2\pi}{3};\\ 1, & x>\dfrac{2\pi}{3}; \end{cases}$$

$\alpha=\dfrac{\pi}{2};\quad \beta=\dfrac{3\pi}{2}.$

Вариант 9.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0;\\ \sin 2x, & 0<x\le \dfrac{\pi}{4};\\ 1, & x>\dfrac{\pi}{4}; \end{cases}$$

$\alpha=-1;\quad \beta=\dfrac{\pi}{6}.$

Вариант 10.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0;\\ \dfrac{x^2}{16}, & 0<x\le 4;\\ 1, & x>4; \end{cases}$$

$\alpha=1;\quad \beta=3.$

Вариант 11.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 2; \\ \dfrac{x^2-4}{5}, & 2<x\le 3; \\ 1, & x>3; \end{cases}$$

$\alpha=2;\quad \beta=2{,}5.$

Вариант 12.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0; \\ \sin x, & 0<x\le \dfrac{\pi}{2}; \\ 1, & x>\dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$$

$\alpha=0;\quad \beta=\dfrac{\pi}{6}.$

Вариант 13.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0; \\ \dfrac{x^2}{25}, & 0<x\le 5; \\ 1, & x>5; \end{cases}$$

$\alpha=1;\quad \beta=3.$

Вариант 14.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le \dfrac{\pi}{6}; \\ -\cos 3x, & \dfrac{\pi}{6}<x\le \dfrac{\pi}{3}; \\ 1, & x>\dfrac{\pi}{3}; \end{cases}$$

$\alpha=\dfrac{\pi}{6};\quad \beta=\dfrac{\pi}{4}.$

Вариант 15.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1; \\ \dfrac{1}{2}(x^2-x), & 1<x\le 2; \\ 1, & x>2; \end{cases}$$

$\alpha=1{,}2;\quad \beta=1{,}5.$

Вариант 16.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le -2; \\ \dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{2}, & -2<x\le 2; \\ 1, & x>2; \end{cases}$$

$\alpha=-1;\quad \beta=1.$

Вариант 17.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0; \\ \dfrac{x^2+\ x}{2}, & 0<x\le 1; \\ 1, & x>1; \end{cases}$$

$\alpha=0{,}3;\quad \beta=0{,}6.$

Вариант 18.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le \dfrac{3\pi}{4}; \\ \cos 2x, & \dfrac{3\pi}{4}<x\le \pi; \\ 1, & x>\pi; \end{cases}$$

$\alpha=\dfrac{3\pi}{4};\quad \beta=\dfrac{3\pi}{2}.$

Вариант 19.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le -\dfrac{\pi}{2};\\ \cos x, & -\dfrac{\pi}{2}<x\le 0;\\ 1, & x>0; \end{cases}$$

$\alpha=-\dfrac{\pi}{2};\ \ \beta=-\dfrac{\pi}{6}.$

Вариант 20.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0;\\ 2\sin x, & 0<x\le \dfrac{\pi}{6};\\ 1, & x>\dfrac{\pi}{6}; \end{cases}$$

$\alpha=0;\ \ \beta=\dfrac{\pi}{4}.$

Вариант 21.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0;\\ \dfrac{x}{4}, & 0<x\le 4;\\ 1, & x>4; \end{cases}$$

$\alpha=-1;\ \ \beta=3.$

Вариант 22.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0;\\ \dfrac{x^2}{4}, & 0<x\le 2;\\ 1, & x>2; \end{cases}$$

$\alpha=1;\ \ \beta=1{,}5.$

Вариант 23.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0;\\ \dfrac{x^2}{2}\left(1-\dfrac{x^2}{8}\right), & 0<x\le 2;\\ 1, & x>2; \end{cases}$$

$\alpha=-\dfrac{1}{2};\ \ \beta=1.$

Вариант 24.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 2;\\ \dfrac{1}{2}x-1, & 2<x\le 4;\\ 1, & x>4; \end{cases}$$

$\alpha=-\dfrac{\pi}{2};\ \ \beta=-\dfrac{\pi}{6}.$

Вариант 25.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1;\\ \dfrac{x^2-1}{3}, & 1<x\le 2;\\ 1, & x>2; \end{cases}$$

$\alpha=1;\ \ \beta=1{,}5.$

Вариант 26.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le -2;\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\arcsin\dfrac{x}{2}, & -2<x\le 2;\\ 1, & x>2. \end{cases}$$

$\alpha=-1;\ \ \beta=2.$

Вариант 27.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{1}{2}\log_2(x+1), & 0<x\le 3;\\ 1, & x>3;\end{cases}$$

$\alpha=0;\quad \beta=1.$

Вариант 28.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 2^x-1, & 0<x\le 1;\\ 1, & x>1;\end{cases}$$

$\alpha=-\dfrac{2}{3};\quad \beta=\dfrac{2}{3}.$

Вариант 29.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{e^x-1}{e-1}, & 0<x\le 1;\\ 1, & x>1;\end{cases}$$

$\alpha=0;\quad \beta=\dfrac{1}{2}.$

Вариант 30.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1;\\ \dfrac{9-(4-x)^2}{9}, & 1<x\le 4;\\ 1, & x>4;\end{cases}$$

$\alpha=2;\quad \beta=3.$

ЗАДАНИЯ С ИЗВЕСТНОЙ ПЛОТНОСТЬЮ ВЕРОЯТНОСТИ

Дана плотность вероятности $f(x)$ непрерывной случайной величины X.

Требуется:

1) найти параметр a;
2) найти функцию распределения $F(x)$;
3) построить графики $f(x)$ и $F(x)$;
4) найти асимметрию и эксцесс X.

Вариант 1.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \dfrac{a}{3}\sin x, & 0\le x\le \dfrac{\pi}{3};\\ 0, & x>\dfrac{\pi}{3}.\end{cases}$$

Вариант 2.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<2;\\ a(x-2)(4-x), & 2\le x\le 4;\\ 0, & x>4.\end{cases}$$

Вариант 3.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ a(4x+3), & 0\le x\le 2; \\ 0, & x>2. \end{cases}$$

Вариант 4.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ a\cos 2x, & 0\le x\le \frac{\pi}{4}; \\ 0, & x>\frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Вариант 5.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<1; \\ ax, & 1\le x\le 2; \\ 0, & x>2. \end{cases}$$

Вариант 6.

$$f(x)=\frac{a}{1+x^2}, \quad x\in R.$$

Вариант 7.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<1; \\ a(2x-1), & 1\le x\le 2; \\ 0, & x>2. \end{cases}$$

Вариант 8.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ a(8x^2+4x), & 0\le x\le \frac{1}{3}; \\ 0, & x>\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Вариант 9.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<-2\sqrt{2}; \\ \dfrac{a}{\pi\sqrt{16-x^2}}, & -2\sqrt{2}\le x\le 2\sqrt{2}; \\ 0, & x>2\sqrt{2}. \end{cases}$$

Вариант 10.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ a\cdot\sin x, & 0\le x\le \frac{\pi}{2}; \\ 0, & x>\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Вариант 11.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<2; \\ a(x-2), & 2\le x\le 3; \\ 0, & x>3. \end{cases}$$

Вариант 12.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ a\cdot\sin 2x, & 0\le x\le \frac{\pi}{2}; \\ 0, & x>\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Вариант 13.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<1; \\ ax, & 1\le x\le 3; \\ 0, & x>3. \end{cases}$$

Вариант 14.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0; \\ axe^{-x^2}, & x>0. \end{cases}$$

Вариант 15.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ a(2x+1), & 0\le x\le 1; \\ 0, & x>1. \end{cases}$$

Вариант 16.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<-2; \\ \dfrac{a}{\sqrt{4-x^2}}, & -2\le x\le 2; \\ 0, & x>2. \end{cases}$$

Вариант 17.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ a(4x-x^3), & 0\le x\le 2; \\ 0, & x>2. \end{cases}$$

Вариант 18.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<-3; \\ \dfrac{a}{\sqrt{9-x^2}}, & -3\le x\le 3; \\ 0, & x>3. \end{cases}$$

Вариант 19.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ a(4x-1), & 0\le x\le 2; \\ 0, & x>2. \end{cases}$$

Вариант 20.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ ax, & 0\le x\le \dfrac{1}{3}; \\ 0, & x>\dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Вариант 21.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ a(1-x), & 0\le x\le 1; \\ 0, & x>1. \end{cases}$$

Вариант 22.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<2; \\ a(6x^2-x-3), & 2\le x\le 4; \\ 0, & x>4. \end{cases}$$

Вариант 23.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<-\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \\ \dfrac{1}{a\sqrt{1-x^2}}, & -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\le x\le \dfrac{\sqrt{2}}{2}; \\ 0, & x>\dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

Вариант 24.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1; \\ \dfrac{a}{x^4}, & x>1. \end{cases}$$

Вариант 25.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ a(x^2+2x), & 0\le x\le 1; \\ 0, & x>1. \end{cases}$$

Вариант 26.

$$f(x)=\frac{a}{1+4x^2}, \quad x\in R.$$

Вариант 27.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ a(4x-x^2), & 0\le x\le 2; \\ 0, & x>2. \end{cases}$$

Вариант 28.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le \frac{\pi}{2}; \\ a\cdot\cos^2 x, & -\frac{\pi}{2}<x\le\frac{\pi}{2}; \\ 0, & x>\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Вариант 29.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<3; \\ a(x-3)(7-x), & 3\le x\le 7; \\ 0, & x>7. \end{cases}$$

Вариант 30.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ a\left(1-\frac{x}{3}\right), & 0\le x\le 3; \\ 0, & x>3. \end{cases}$$

ЗАДАНИЯ С СОСТАВНОЙ ПЛОТНОСТЬЮ ВЕРОЯТНОСТИ

Дана плотность вероятности $f(x)$ непрерывной случайной величины X, имеющая две ненулевые составляющие формулы.

Требуется:

1) проверить свойство $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$;
2) построить график $f(x)$;
3) найти функцию распределения $F(x)$;
4) найти $P(\alpha\le X\le\beta)$ для данных α, β;
5) найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Вариант 1.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0; \\ \frac{x}{8}, & 0<x\le 2; \\ 1, & 2<x\le\frac{11}{4}; \\ 0, & x>\frac{11}{4}; \end{cases}$$

$\alpha=1;\quad \beta=2{,}5.$

Вариант 2.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0; \\ x, & 0<x\le 1; \\ -x+2, & 1<x\le 2; \\ 0, & x>2; \end{cases}$$

$\alpha=-1;\quad \beta=1{,}5.$

Вариант 3.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0;\\ \dfrac{2}{3}x, & 0<x\le 1;\\ \dfrac{3-x}{3}, & 1<x\le 3;\\ 0, & x>3; \end{cases}$$

$\alpha=\dfrac{2}{3}$; $\beta=2$.

Вариант 4.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0;\\ \dfrac{1}{3}(x-1), & 1<x\le 3;\\ -\dfrac{2}{3}x+\dfrac{8}{3}, & 3<x\le 4;\\ 0, & x>4; \end{cases}$$

$\alpha=0$; $\beta=2{,}5$.

Вариант 5.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -2;\\ \dfrac{x+2}{4}, & -2<x\le 0;\\ \dfrac{-x+2}{4}, & 0<x\le 2;\\ 0, & x>2; \end{cases}$$

$\alpha=-1$; $\beta=0{,}5$.

Вариант 6.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -1;\\ \dfrac{1}{2}, & -1<x\le 0;\\ \dfrac{1}{2}-\dfrac{x}{4}, & 0<x\le 2;\\ 0, & x>2; \end{cases}$$

$\alpha=-0{,}5$; $\beta=1$.

Вариант 7.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -2;\\ \dfrac{3}{16}(x+2)^2, & -2<x\le 0;\\ \dfrac{3}{16}(x-2)^2, & 0<x\le 2;\\ 0, & x>2; \end{cases}$$

$\alpha=-3$; $\beta=0$.

Вариант 8.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -2;\\ \dfrac{3}{2}(x+2)^2, & -2<x\le -1;\\ \dfrac{3}{2}x^2, & -1<x\le 0;\\ 0, & x>0; \end{cases}$$

$\alpha=-0{,}6$; $\beta=-0{,}4$.

Вариант 9.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -1;\\ \dfrac{3}{20}(x+1)^2, & -1<x\le 1;\\ \dfrac{3}{20}(6-2x), & 1<x\le 3;\\ 0, & x>3; \end{cases}$$

$\alpha=0$; $\beta=2$.

Вариант 10.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -2;\\ \dfrac{3x+6}{28}, & -2<x\le 2;\\ \dfrac{3}{7}(x-3)^2, & 2<x\le 3;\\ 0, & x>3; \end{cases}$$

$\alpha=0$; $\beta=3$.

Вариант 11.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 3;\\ \frac{1}{4}(x-3), & 3<x\le 5;\\ \frac{1}{2}, & 5<x\le 6;\\ 0, & x>6; \end{cases}$$

$\alpha=4;\ \ \beta=5{,}5.$

Вариант 12.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1;\\ \frac{2}{3}(x-1), & 1<x\le 2{,}5;\\ 6-2x, & 2{,}5<x\le 3;\\ 0, & x>3; \end{cases}$$

$\alpha=0;\ \ \beta=2{,}5.$

Вариант 13.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0;\\ \frac{2}{15}x, & 0<x\le 3;\\ -\frac{1}{5}x+1, & 3<x\le 5;\\ 0, & x>5; \end{cases}$$

$\alpha=1;\ \beta=4.$

Вариант 14.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -1;\\ \frac{1}{4}(x+1), & -1<x\le 1;\\ \frac{1}{4}(3-x), & 1<x\le 3;\\ 0, & x>3; \end{cases}$$

$\alpha=-1;\ \beta=2.$

Вариант 15.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -6;\\ \frac{1}{9}(x+6), & -6<x\le -3;\\ -\frac{x}{9}, & -3<x\le 0;\\ 0, & x>0; \end{cases}$$

$\alpha=-5;\ \ \beta=1.$

Вариант 16.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1;\\ \frac{2}{9}, & 1<x\le 4;\\ \frac{2}{27}(7-x), & 4<x\le 7;\\ 0, & x>7; \end{cases}$$

$\alpha=0;\ \ \beta=5.$

Вариант 17.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0;\\ \frac{3}{20}x^2, & 0<x\le 2;\\ \frac{3}{5}, & 2<x\le 3;\\ 0, & x>3; \end{cases}$$

$\alpha=1;\ \ \beta=2{,}5.$

Вариант 18.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 2;\\ \frac{3}{10}(x-2)^2, & 2<x\le 3;\\ \frac{3}{10}, & 3<x\le 6;\\ 0, & x>6; \end{cases}$$

$\alpha=0;\ \ \beta=4.$

Вариант 19.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -1; \\ \dfrac{1}{4}, & -1<x\le 2; \\ \dfrac{1}{36}(x-5)^2, & 2<x\le 5; \\ 0, & x>5; \end{cases}$$

$\alpha=1;\ \ \beta=3.$

Вариант 20.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -2; \\ \dfrac{3}{16}, & -2<x\le 3; \\ \dfrac{3}{16}(x-4)^2, & 3<x\le 4; \\ 0, & x>4; \end{cases}$$

$\alpha=-1;\ \ \beta=4.$

Вариант 21.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0; \\ \dfrac{2}{5}x, & 0<x\le 1; \\ \dfrac{2}{5}, & 1<x\le 3; \\ 0, & x>3; \end{cases}$$

$\alpha=0{,}5;\ \ \beta=1{,}5.$

Вариант 22.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -3; \\ \dfrac{1}{27}(x+3)^2, & -3<x\le 0; \\ \dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{12}x, & 0<x\le 4; \\ 0, & x>4; \end{cases}$$

$\alpha=-2;\ \ \beta=2.$

Вариант 23.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -2; \\ \dfrac{3}{32}(x+2), & -2<x\le 2; \\ \dfrac{3}{32}(x-4)^2, & 2<x\le 4; \\ 0, & x>4; \end{cases}$$

$\alpha=-3;\ \ \beta=3.$

Вариант 24.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0; \\ \dfrac{x^2}{12}, & 0<x\le 3; \\ \dfrac{3}{4}(x-4)^2, & 3<x\le 4; \\ 0, & x>4; \end{cases}$$

$\alpha=1;\ \ \beta=2.$

Вариант 25.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0; \\ \dfrac{1}{8}x^2, & 0<x\le 2; \\ \dfrac{1}{32}(x-6)^2, & 2<x\le 6; \\ 0, & x>6; \end{cases}$$

$\alpha=2;\ \beta=5.$

Вариант 26.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 3; \\ \dfrac{2}{3}, & 3<x\le 4; \\ \dfrac{10}{3}-\dfrac{2}{3}x, & 4<x\le 5; \\ 0, & x>5; \end{cases}$$

$\alpha=0;\ \ \beta=4{,}5.$

Вариант 27.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -2; \\ \frac{1}{27}(x+2), & -2<x\le 4; \\ \frac{2}{9}, & 4<x\le \frac{11}{2}; \\ 0, & x>3; \end{cases}$$

$\alpha=-1;\quad \beta=10.$

Вариант 28.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1; \\ \frac{3}{88}(x-1)^2, & 1<x\le 5; \\ \frac{3}{11}, & 5<x\le 6; \\ 0, & x>6; \end{cases}$$

$\alpha=0;\quad \beta=4.$

Вариант 29.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -1; \\ \frac{3}{8}, & -1<x\le 1; \\ \frac{3}{32}\,(x-3)^2, & 1<x\le 3; \\ 0, & x>3; \end{cases}$$

$\alpha=0{,}5;\quad \beta=3.$

Вариант 30.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -5; \\ -\frac{2}{11}x, & -5<x\le 0; \\ \frac{1}{33}x, & 0<x\le 4; \\ 0, & x>4; \end{cases}$$

$\alpha=-3;\quad \beta=3.$

ГЛАВА 7

ВАЖНЕЙШИЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН И ИХ СВОЙСТВА

Среди непрерывных случайных величин, свойства и характеристики которых рассмотрены в шестой главе, простейшими и в то же время наиболее важными являются величины, имеющие нормальное, экспоненциальное или равномерное распределение. Нормальный закон распределения описывает явления, широко распространенные в природе и технике и возникающие при наложении друг на друга многочисленных случайных воздействий, среди которых нет доминирующих по интенсивности. Экспоненциальный закон описывает время безотказной работы технических устройств и может быть применен при оценке их надежности. Равномерное распределение является базовым при генерации случайных величин на компьютере, так как стандартные датчики случайных чисел дают числа, равномерно распределенные на интервале (0; 1). Равномерно распределены также случайные ошибки измерения физических величин приборами, имеющими шкалы с делениями.

Рассмотрим подробнее применение случайных величин в технических специальностях. Будущим инженерам-электрикам (электромеханикам) полезно обратить внимание на следующие примеры.

1. Электрические нагрузки вводов 27,5 или 10,5 кВ тяговых подстанций никогда не бывают известны точно, а изменяются в широком диапазоне случайным образом. Это объективно обусловлено ходом технологического процесса (перевозкой грузов и пассажиров) и влиянием пи-

тающих энергосистем. Следствием этого является случайное изменение всех параметров режима тяговой подстанции, например напряжения, и загрузки ее силовых элементов (трансформаторов, преобразователей и др.).

2. Напряжение в контактной сети, присоединенной к тяговой подстанции, с учетом предыдущего примера имеет случайное отклонение от номинального значения, поэтому напряжение на пантографе электровоза — величина случайная.

3. Система тягового электроснабжения содержит большое количество элементов — линий электропередач, трансформаторов, преобразователей, реакторов, выключателей и т. д. В структуре системы электроснабжения они включены последовательно и(или) параллельно и имеют свои характеристики надежности, в частности, вероятности безотказной работы, поэтому надежность всей системы электроснабжения изменяется случайным образом.

Поскольку отмеченные выше случайные параметры используются в проектных расчетах и при эксплуатации, знание случайных величин и законов их распределения важно для инженеров-электриков.

Инженерам — специалистам по разработке и эксплуатации электрических машин — важно учесть многочисленные факторы, воздействующие на процесс коммутации. По физике воздействия на процесс коммутации эти факторы объединяют в группы, т. е. агрегируют в некоторые обобщенные параметры, допустимые границы изменения которых определяются как условиями коммутации, так и производственными допусками. В общем случае эти обобщенные параметры являются случайными величинами. Следовательно, процесс коммутации носит вероятностный характер и для его изучения требуется умение работать с такими числовыми характеристиками случайных величин, как математическое ожидание и дисперсия.

Для будущих инженеров, обслуживающих железнодорожный подвижной состав (электровозы, тепловозы, вагоны), важнейшей проблемой является проблема взаимодействия подвижного состава и пути. Неровности пути описываются как случайные процессы (т. е. случайные величины, изменяющиеся во времени). Например, при исследовании прохождения колебаний через систему подвески можно выделить три основных элемента: неровность (или входной сигнал), систему подвески (или преобразователь сигнала) и колебания, передаваемые на экипажную часть (или выходной сигнал). По двум из основных элементов инженер-механик определяет параметры третьего (неизвестного) элемента.

1. Если известны входной и выходной случайные процессы, то можно решить задачу о свойствах подвески, а значит, и о ее конструкции.

2. Если известны входной случайный процесс и свойства подвески, то можно предсказать колебания подвижного состава и, следовательно, решить задачу о режимах ведения поезда по данному участку пути.

3. На знании свойств подвески и выходного случайного процесса основано устройство измерителя неровностей пути (т. е. измерителя входного случайного процесса).

Все три перечисленные задачи решаются с помощью математического аппарата спектральных плотностей, предполагающего знание раздела «Случайные величины и случайные процессы».

В современных средствах передачи информации широко распространены цифровое кодирование и дискретная форма передачи информации. При этом информация защищена от использования несанкционированными получателями, но вовсе не обязательно защищена от помех, которые могут быть нормальными (инородными для сообщения шумами) или аномальными (вызванными аномальным состоянием среды и дифракцией исходного сообщения на несколько накладывающихся друг на друга частей или копий). Характер помех, как правило, случайный и описывается случайными величинами, поэтому их знание пригодится инженеру-связисту при исследовании помехозащищенности одно- и многоканальных систем передачи информации.

Подводя общие итоги, отметим, что, с одной стороны, большинство объектов железнодорожного транспорта выпускаются и эксплуатируются большими сериями, имея при этом определенный исходный разброс характеристик, разные условия эксплуатации и разный износ, поэтому при изучении этих объектов приходится иметь дело со статистическими распределениями, т. е. со случайными величинами. Измерение характеристик реальных объектов непременно связано с погрешностью измерений, увеличивающей случайность получаемых результатов, а эксплуатация сложных электрических систем всегда осложнена наличием в них посторонних шумов и помех, носящих чаще всего случайный характер. Надежность объектов железнодорожного транспорта, имеющих, как правило, сложную структуру из многочисленных взаимосвязанных элементов, описывается также на языке случайных величин.

С другой стороны, любое научное исследование технических систем направлено на их улучшение, на оптимизацию их характеристик, поэтому необходимо отметить, что в математических методах оптимизации важное место занимают случайные величины. Среди методов ненаправленного поиска (применяемых на начальной стадии оптимизации с целью сужения множества допустимых конструкций) получил известность метод случайного поиска. На последующих этапах оптимизации используются прямые методы направленного поиска (в них проверяется несколько направлений улучшения исходной конструкции и делается «шаг» в наилучшем направлении). При этом хорошие результаты дают стохастические методы прямого поиска, в которых применяется случайный способ выбора проверяемых направлений (например, равномерное распределение точек на многомерной сфере). Наконец, большинство инженерных задач оптимизации являются многокритериальными (т. е. требуется улучшить сразу несколько характеристик технической системы). При их решении получается так называемое множество Парето (довольно широкое множество конструкций, у которых улучшение одной из характеристик приводит к обязательному ухудшению другой). В качестве критерия выбора наилучшей технической системы из множества Парето в современной литературе предлагается критерий вероятности безотказной работы объекта, но использование этого критерия связано с учетом вероятностного характера параметров технической системы и с применением метода статистических испытаний Монте-Карло, т. е. приводит к работе со случайными величинами.

Таким образом, использование аппарата случайных величин буквально «пронизывает» современные прикладные инженерные исследования, и знание этого раздела высшей математики необходимо каждому инженеру.

7.1. РАВНОМЕРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Непрерывная случайная величина X имеет *равномерное распределение на отрезке* $[a, b]$, если ее плотность вероятности $f(x)$ на этом отрезке постоянна и имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{при} \quad x \in [a, b]; \\ 0 & \text{при} \quad x \notin [a, b]. \end{cases} \tag{36}$$

Площадь под кривой равномерного закона (рис. 37) имеет вид прямоугольника, опирающегося на отрезок $[a, b]$; в связи с этим равномерное распределение иногда называют *«прямоугольным»*.

Введем обозначение $I(a, b)$ для множества непрерывных случайных величин, равномерно распределенных на отрезке $[a, b]$. Тогда случайная величина X, равномерно распределенная на $[a, b]$, будет обозначаться как $X \in I(a, b)$. Таким образом, у равномерно распределенной случайной величины имеется *два параметра*, однозначно задающих ее закон распределения: a — *левая граница* и b — *правая граница* соответствующего отрезка.

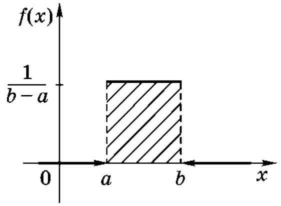


Рис. 37

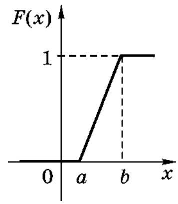


Рис. 38

Функция распределения для $X \in I(a, b)$ имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le a; \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{при} \quad a < x \le b; \\ 1 & \text{при} \quad x > b. \end{cases} \tag{37}$$

График функции $F(x)$ изображен на рис. 38. На отрезке распределения возможных значений случайной величины X этот график является наклонной прямой, задаваемой уравнением: $y = (x - a)/(b - a)$.

Числовые характеристики непрерывной случайной величины $X \in I(a, b)$ определяются по параметрам распределения по формулам:

$$M(X) = \frac{a+b}{2}; \tag{38}$$

$$D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}; \tag{39}$$

$$\sigma(X) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}, \tag{40}$$

что легко можно проверить, вычислив соответствующие интегралы (см. гл. 6 пп. 6.2, 6.3).

Примером физических условий, при которых возникает равномерное распределение, может служить процесс измерения некоторой физической величины U с помощью прибора с грубыми делениями. При этом приходится округлять значение U до целого деления, и возникает ошибка измерения. В качестве приближенного значения $\tilde{U}$ величины U можно брать:

1) $\tilde{U} = \{\text{ближайшее целое к } U\}$;

2) $\tilde{U} = \{\text{ближайшее целое, меньшее } U\} = [U]$;

3) $\tilde{U} = \{\text{ближайшее целое, большее } U\} = [U]$.

Пусть X — ошибка измерения: $X = U - \tilde{U}$. Тогда случайная величина X распределена по равномерному закону, причем в каждом варианте округления U получаются разные параметры распределения ошибки X:

1) $X \in I(-0{,}5;\ 0{,}5)$;
2) $X \in I(0;\ 1)$;
3) $X \in I(-1;\ 0)$.

При моделировании на компьютере различных случайных величин и случайных процессов исходными данными являются значения случайной величины $X \in I(0, 1)$. Такую величину называют «*случайным числом от 0 до 1*», а вырабатывается она специальными подпрограммами-генераторами, встроенными в прикладное программное обеспечение. Таким образом, равномерное распределение служит *основным, базовым* для построения всех других распределений.

7.2. ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Говорят, что непрерывная случайная величина X имеет *экспоненциальное* (*показательное*) распределение, если ее плотность вероятности $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \le 0. \end{cases} \quad (41)$$

График $f(x)$, или кривая экспоненциального распределения, изображен на рис. 39, причем величина $\lambda > 0$ и называется *параметром экспоненциального распределения*.

Введем обозначение $E(\lambda)$ для множества случайных величин, имеющих экспоненциальное распределение с параметром λ. Параметр λ имеет физический смысл *интенсивности* процессов, описываемых экспоненциальным законом распределения, а соответствующая случайная величина будет обозначаться как $X \in E(\lambda)$. Таким образом, простейший вариант показательного закона распределения однозначно задается *одним параметром* λ — *интенсивностью распределения*.

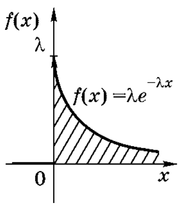


Рис. 39

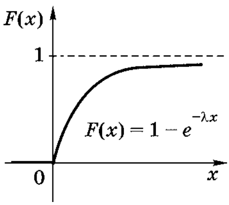


Рис. 40

Функция распределения для $X \in E(\lambda)$ имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{при} \quad x > 0; \\ 0 & \text{при} \quad x \le 0. \end{cases} \tag{42}$$

График $F(x)$ изображен на рис. 40, при $x > 0$ он напоминает перевернутый график плотности $f(x)$ и при $x \to +\infty$ выходит на асимптоту $y = 1$.

Числовые характеристики непрерывной случайной величины $X \in E(\lambda)$ определяются по параметру распределения λ по формулам:

$$M(X) = \frac{1}{\lambda}; \tag{43}$$

$$D(X) = \frac{1}{\lambda^2}; \tag{44}$$

$$\sigma(X) = \frac{1}{\lambda}. \tag{45}$$

Экспоненциальное распределение имеет четко выраженную асимметрию $\mu_3 > 0$ («хвост справа»), а коэффициент асимметрии для него $\alpha_3 = 2$.

Коэффициентом вариации неотрицательной случайной величины X называется величина $v_x = \sigma_x / m_x$, т. е. отношение среднего квадратического отклонения (σ_x) к математическому ожиданию (m_x). Коэффициент вариации показывает, какую долю математического ожидания составляет σ_x, и служит *характеристикой «степени случайности» неотрицательной случайной величины X*.

Случайные величины с $v_x < 1$ «менее случайны», чем случайные величины с $v_x > 1$. Экспоненциальное распределение в этом смысле является *эталонным*, так как для него

$$v_x = \frac{\sigma_x}{m_x} = \frac{1/\lambda}{1/\lambda} = 1. \tag{46}$$

Экспоненциальное распределение используется в *теории массового обслуживания* (временной интервал между двумя заявками имеет распределение типа $E(\lambda)$). Правда, поток заявок должен при этом быть простейшим (стационарным пуассоновским). Применимо экспоненциальное распределение и в *теории надежности* (время работы изделия до выхода из строя во многих случаях имеет распределение типа $E(\lambda)$). При этом интенсивность отказов λ должна быть постоянной.

При решении задач в данной главе будет использоваться только простейший случай экспоненциального распределения $X \in E(\lambda)$, описанный выше. Существует, однако, и более общий случай экспоненциального закона, описываемый двумя параметрами: *интенсивностью* λ и *сдвигом* θ: $X \in E(\lambda, \theta)$. Отличие от простейшего варианта состоит в сдвиге графиков $f(x)$ и $F(x)$ из точки $x = 0$ в точку $x = \theta$ с сохранением их формы (рис. 41 и 42).

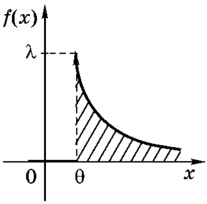


Рис. 41

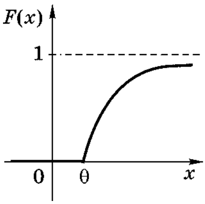


Рис. 42

Если непрерывная случайная величина X принадлежит множеству $E(\lambda, \theta)$ экспоненциально распределенных случайных величин, описываемых двумя параметрами, то для нее плотность вероятности и функция распределения имеют вид

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(x-\theta)} & \text{при} \quad x > \theta; \\ 0 & \text{при} \quad x \le \theta; \end{cases} \tag{47}$$

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda\,(x-\theta)} & \text{при} \quad x > \theta; \\ 0 & \text{при} \quad x \le \theta, \end{cases} \tag{48}$$

а числовые характеристики принимают значения:

$$M(X) = \frac{1}{\lambda} + \theta; \quad D(X) = \frac{1}{\lambda^2}; \quad \sigma(X) = \frac{1}{\lambda}; \tag{49}$$

$$\alpha_3 = 2; \quad \alpha_4 = 6. \tag{50}$$

7.3. НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Нормальный закон распределения (иногда называемый *законом Гаусса*) исключительно важен и занимает особое место в теории вероятностей. Очень многие случайные величины на практике распределены нормально.

Говорят, что непрерывная случайная величина X имеет *нормальное* (*гауссовское*) распределение, если ее плотность вероятности $f(x)$ имеет вид

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}. \tag{51}$$

График $f(x)$, или кривая нормального распределения, имеет симметричный «холмообразный» вид (рис. 43).

Точка максимума графика имеет координаты

$$\left(m;\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right),$$

а точки перегиба, расположенные симметрично слева и справа от точки максимума, имеют координаты

$$\left(m\pm\sigma;\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right).$$

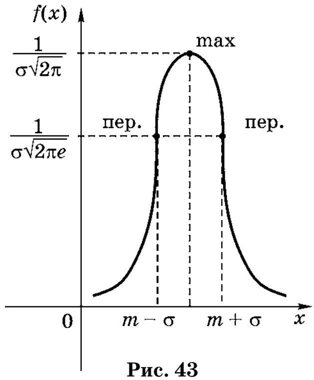


Рис. 43

При $x\to\pm\infty$ график выходит на горизонтальную асимптоту $y=0$.

Введем обозначение $N(m, \sigma)$ для множества непрерывных случайных величин, имеющих нормальный закон распределения с параметрами m и σ. Таким образом, случайная величина $X\in N(m, \sigma)$ однозначно определяется двумя параметрами: m — *математическим ожиданием* и σ — *средним квадратическим отклонением*.

Важным частным случаем нормального распределения является случайная величина $X\in N(0, 1)$, т. е. когда $m=0$, $\sigma=1$. В этом случае плотность вероятности принимает вид

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}=\varphi(x). \tag{52}$$

Для функции $\varphi(x)$ составлены таблицы ее значений. Она используется, например, в *локальной теореме Муавра–Лапласа*, относящейся к *схеме Бернулли*.

Изменение параметров m и σ приводит к изменению графика $f(x)$. При изменении m происходит сдвиг «холма»

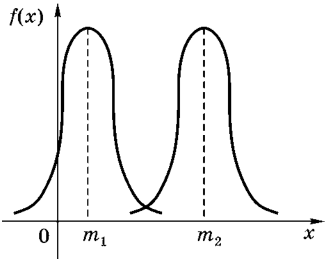


Рис. 44

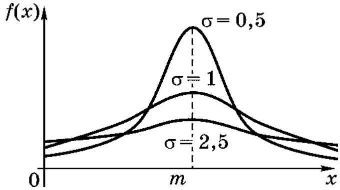


Рис. 45

по оси абсцисс без деформации (рис. 44), а при изменении σ — деформация «холма» без сдвига (рис. 45), причем с увеличением параметра σ «холм» становится все более плоским.

Функцией распределения для нормального закона является функция вида:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx, \tag{53}$$

а в частном случае для $X \in N(0, 1)$ функцией распределения является *функция Лапласа*:

$$F(x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \tag{54}$$

значения которой сведены в таблицу. При решении задач будет использоваться таблица значений функции $\Phi(x)$ (см. Приложение).

График функции Лапласа $\Phi(x)$ приведен на рис. 46, а общий случай функции распределения $F(x)$ для $X \in N(m, \sigma)$ —

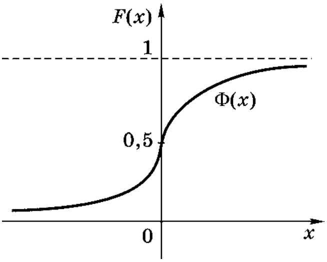


Рис. 46

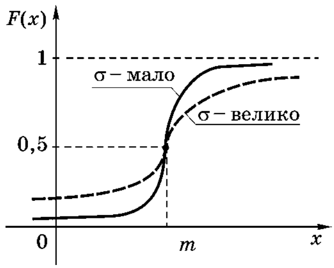


Рис. 47

на рис. 47. При этом точка перегиба графика $F(x)$ всегда имеет координаты $(m; 0{,}5)$; при малых значениях параметра σ график «крутой», при больших σ — «пологий».

Иногда в учебниках и задачниках используются таблицы функции

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \tag{55}$$

которая и называется *функцией Лапласа*. Преимущество использования функции $\Phi_0(x)$ состоит в ее нечетности (чем можно пользоваться), а недостаток — в том, что она не является функцией распределения. Функции $\Phi_0(x)$ и $\Phi(x)$ связаны формулой:

$$\Phi_0(x) = \Phi(x) - 1/2. \tag{56}$$

Таким образом, график $\Phi_0(x)$ представляет собой график $\Phi(x)$, «сдвинутый вниз» на $1/2$ (рис. 48).

Обычно для нормальных случайных величин рассчитываются вероятности событий, состоящих в попадании значений случайной величины в некоторый интервал. Вероятность попадания случайной величины $X \in N(m, \sigma)$ в интервал (a, b) находится по формуле:

$$P(a < X < b) = \Phi_0\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{a-m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right). \tag{57}$$

В данном случае формула (57) не зависит от вида используемой функции Лапласа.

Пусть $\Delta > 0$ — заданное число. Оценим для $X \in N(m, \sigma)$ вероятность события $\{|X - m| < \Delta\}$, т. е. вероятность того,

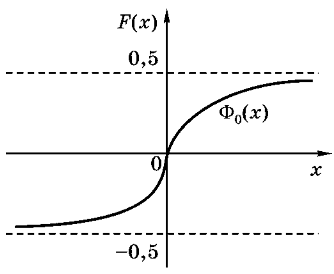


Рис. 48

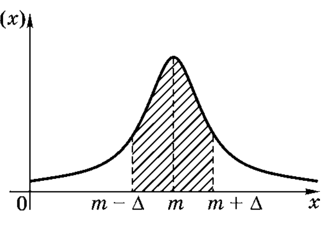


Рис. 49

что отклонение X от математического ожидания будет меньше Δ (на рис. 49 соответствующая площадь под кривой распределения заштрихована).

Имеем

$$P(|X-m|)<\Delta = P(m-\Delta < X < m+\Delta) =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{по формуле попадания} \\ \text{в интервал } (a, b), \\ \text{где } a = m-\Delta; \quad b = m+\Delta \end{array} \right| =$$

$$= \Phi_0\left(\frac{(m+\Delta)-m}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{(m-\Delta)-m}{\sigma}\right) = \Phi_0\left(\frac{\Delta}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(-\frac{\Delta}{\sigma}\right) =$$

$$= |\,\Phi_0(x) - \text{нечетна}\,| = 2\Phi_0\left(\frac{\Delta}{\sigma}\right).$$

Таким образом,

$$P(|X-m|<\Delta) = 2\Phi_0\left(\frac{\Delta}{\sigma}\right). \tag{58}$$

Использовав соотношение между $\Phi(x)$ и $\Phi_0(x)$, получим выражение требуемой вероятности и через функцию $\Phi(x)$:

$$P(|X-m|<\Delta) = 2\Phi\left(\frac{\Delta}{\sigma}\right) - 1. \tag{59}$$

7.4. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Почему равномерное распределение в технической литературе называется «прямоугольным»?
2. Какая случайная величина обычно вырабатывается компьютерными генераторами случайных чисел?
3. Как называются параметры λ и θ экспоненциального закона $E(\lambda, \theta)$?
4. Почему коэффициент вариации v_x не определен для случайной величины X, имеющей $M(X) = -1$?
5. Чему равны коэффициент асимметрии α_3 и нормированный коэффициент эксцесса α_4 для экспоненциального распределения?
6. Подумайте, каков будет коэффициент асимметрии для $X \in I(a, b)$ и для $X \in N(m, \sigma)$?
7. При каких значениях m и σ функция распределения $F(x)$ случайной величины $X \in N(m, \sigma)$ превращается в функцию Лапласа $\Phi(x)$?

8. Почему гауссовское распределение занимает особое место в теории вероятностей?
9. В чем состоят преимущество и недостаток функции $\Phi_0(x)$ по сравнению с функцией $\Phi(x)$? Где это преимущество использовано в тексте?
10. Как экспоненциальное распределение используется в теории надежности?
11. Укажите моды следующих случайных величин: $X \in N(m, \sigma)$, $X \in E(\lambda)$, $X \in N(0, 1)$, $X \in I(a, b)$, $X \in E(\lambda, \theta)$.
12. Чему равны дисперсии случайных величин: $X \in N(m, \sigma)$, $X \in E(\lambda, \theta)$, $X \in I(a, b)$?
13. В каких пределах находятся коэффициенты вариации v_x различных неотрицательных случайных величин?

7.5. РАЗБОР ТИПОВЫХ ЗАДАЧ НА ВАЖНЕЙШИЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

ЗАДАЧА НА РАВНОМЕРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Задача 7.1. Цена деления шкалы измерительного прибора равна 0,2. Показания округляются до ближайшего деления. Найти вероятность того, что при измерении будет сделана ошибка ε, большая 0,03.

Решение. В задании неявно подразумевается, что ошибка измерения может быть как в бо́льшую, так и в меньшую сторону, поэтому на самом деле требуется определить вероятность события $\{|\varepsilon| > 0{,}03\}$, где $\varepsilon = U - \tilde{U}$ — разность истинного U и приближенного $\tilde{U}$ значений измеряемой величины.

В п. 7.1 разобран пример для случая, когда цена деления шкалы измерительного прибора равна 1. В этом случае ошибка $X \in I(-1/2, 1/2)$. В рассматриваемом примере для нахождения случайной величины ε следует параметры «единичного» варианта распределения умножить на цену деления прибора.

В результате $\varepsilon \in I(-0{,}1; 0{,}1)$, т. е. имеет равномерное распределение на отрезке $[-0{,}1; 0{,}1]$. Тот же результат можно получить, исходя из рис. 50: истинное значение U с равной вероятностью может оказаться в любой части промежутка между двумя соседними делениями шкалы

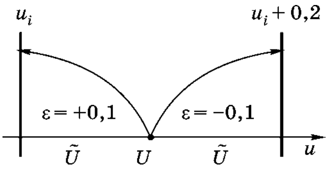


Рис. 50

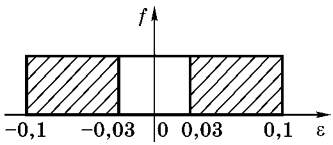


Рис. 51

u_i и $u_i + 0,2$, но не может отклониться от ближайшего деления более чем на 0,1.

Зная распределение случайной величины ε, можно определить вероятность события $\{-0,03 \le \varepsilon \le 0,03\}$ с помощью функции распределения $F_\varepsilon(x) = (x - a)/(b - a) = (x + 0,1)/0,2$:

$$P(-0,03 \le \varepsilon \le 0,03) = F_\varepsilon(0,03) - F_\varepsilon(-0,03) = \frac{0,13}{0,2} - \frac{0,07}{0,2} = 0,3.$$

Событие $\{|\varepsilon| > 0,03\}$ является противоположным событию $\{-0,03 \le \varepsilon \le 0,03\}$, поэтому $P(|\varepsilon| > 0,03) = 1 - P(-0,03 \le \le \varepsilon \le 0,03) = 1 - 0,3 = 0,7$.

Проще, однако, решать задачу на равномерное распределение, изображая «прямоугольник» плотности вероятности и определяя соотношение площадей. Событию $\{|\varepsilon| > 0,03\}$ на рис. 51 соответствует заштрихованная часть площади, которая равна 0,7 от общей площади «прямоугольника». Масштаб по оси ординат при этом не важен.

Ответ. Вероятность ошибки измерения ε, большей 0,03, равна 0,7 для данного измерительного прибора и данного способа округления.

ЗАДАЧА НА ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Задача 7.2. Срок службы прибора T (в годах) — случайная величина, распределенная по экспоненциальному закону с параметром $\lambda = 0,4$. Указать плотность вероятности $f(t)$ и функцию распределения $F(t)$ и построить их графики. Какова вероятность того, что срок службы прибора будет более трех лет?

Решение. Случайная величина $T \in E(\lambda)$, поэтому

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t > 0;$$
$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t > 0.$$

Подставляя известное значение параметра λ, получаем

$$f(t) = 0{,}4e^{-0{,}4t}, \quad t > 0;$$
$$F(t) = 1 - e^{-0{,}4t}, \quad t > 0.$$

Для построения графиков $f(t)$ и $F(t)$ полезно предварительно найти математическое ожидание $m = MT$, так как наиболее характерные части графиков плотности вероятности и функции распределения экспоненциальной случайной величины расположены в диапазоне $[0; 3m]$. В рассматриваемом случае $MT = 1/\lambda = 1/0{,}4 = 2{,}5$ (года), поэтому основные части графиков $f(t)$ и $F(t)$, изображенные на рис. 52 и 53, будут расположены в диапазоне $[0; 7{,}5]$. Достаточным является изображение графиков по четырем точкам ($t = 0$; $t = m$; $t = 2m$; $t = 3m$), однако приведем более точное построение по шести целочисленным точкам.

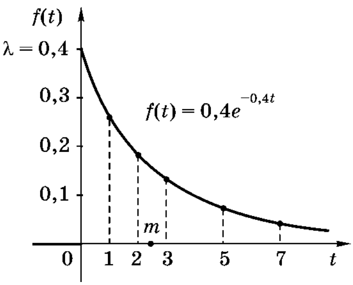


Рис. 52

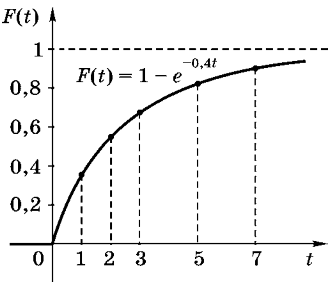


Рис. 53

Данные для построения функций $f(t)$ и $F(t)$:

t	$f(t) = 0{,}4e^{-0{,}4t}$	$F(t) = 1 - e^{-0{,}4t}$
0	0,4	0
1	0,268	0,33
2	0,18	0,55
3	0,12	0,7
5	0,054	0,86
7	0,024	0,94
$+\infty$	0	1

Введем случайное событие $A = \{$срок службы прибора превысит три года$\}$. Вероятность этого события вычисляется с помощью функции распределения:

$$P(A) = P(T > 3) = P(3 < T < +\infty) =$$
$$= F(+\infty) - F(3) = 1 - (1 - e^{-1,2}) = e^{-1,2} \approx 0,3012.$$

Ответы. $f(t) = 0,4e^{-0,4t}, \quad t > 0; \quad F(t) = 1 - e^{-0,4t}, \quad t > 0.$ Графики $f(t)$ и $F(t)$ приведены на рис. 52 и 53 соответственно. Вероятность того, что срок службы прибора окажется более трех лет, $P(T > 3) = 0,3012$.

ЗАДАЧИ НА НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

З а д а ч а о н а х о ж д е н и и в е р о я т н о с т и п о и н т е р в а л у. Время формирования поездов подчиняется нормальному закону распределения с параметрами $m = 120$ мин; $\sigma = 10$ мин. Что вероятнее: время формирования поезда от 80 до 100 или от 120 до 150 мин? Решить аналитически и графически.

Решение. Введем случайную величину $X = \{$время формирования поезда$\}$. Эта величина распределена по нормальному закону, точнее, $X \in N(120, 10)$.

Аналитическое решение задачи состоит в применении таблиц функции Лапласа $\Phi(x)$:

$$P_1 = P(80 < X < 100) = \left| \begin{array}{l} \Phi\left(\dfrac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\dfrac{a-m}{\sigma}\right), \\ \text{где} \quad m = 120, \quad \sigma = 10, \quad a = 80, \quad b = 100 \end{array} \right| =$$

$$= \Phi\left(\frac{100-120}{10}\right) - \Phi\left(\frac{80-120}{10}\right) = \Phi(-2) - \Phi(-4) =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{по таблице} \\ \Phi(x),\ x \le 0 \end{array} \right| = 0,0228 - 0 = 0,0228;$$

$$P_2 = P(120 < X < 150) = \Phi\left(\frac{150-120}{10}\right) - \Phi\left(\frac{120-120}{10}\right) =$$

$$= \Phi(3) - \Phi(0) = \left| \begin{array}{l} \text{для } x > 0 \text{ воспользуемся соотношением:} \\ \Phi(x) = 1 - \Phi(-x) \end{array} \right| =$$

$$= 1 - \Phi(-3) - \Phi(0) = 1 - 0,0013 - 0,5 = 0,4987.$$

Аналитический расчет показывает, что второе событие $\{120 < X < 150\}$ многократно вероятнее первого. Подтвердим результаты расчета графическим построением.

Графическое решение задачи состоит в построении кривой нормального распределения (графика плотности вероятности $f(x)$) и сравнении площадей, расположенных под кривой $y = f(x)$ на заданных интервалах.

Для $X \in N(120, 10)$

$$f(x) = \frac{1}{10\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-120)^2}{200}}.$$

При построении графика $f(x)$ наиболее характерными точками являются точка максимума и точки перегиба, координаты которых найдем по стандартным формулам:

$$x_{\text{max}} = m = 120;$$

$$y_{\text{max}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{10\sqrt{2\pi}} \approx \frac{1}{25} = 0{,}04;$$

$$x_{\text{пер}} = m \pm \sigma = 120 \pm 10;$$

$$y_{\text{пер}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}} = \frac{1}{10\sqrt{2\pi e}} \approx 0{,}024.$$

График плотности вероятности случайной величины X приведен на рис. 54.

Так как $MX = 120$ удалено от нуля, то на оси абсцисс выполнен разрыв.

Вероятности P_1 и P_2 представлены на рис. 54 заштрихованными площадями, причем графическое изображение полностью подтверждает то, что $P_2 >> P_1$.

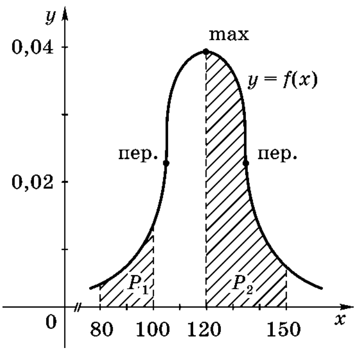


Рис. 54

Ответ. Если X — время формирования поезда, то $P(80 < X < 100) = 0{,}0228$, а $P(120 < X < 150) = 0{,}4987$.

Таким образом, многократно вероятнее, что время формирования поезда будет в интервале от 120 до 150 мин.

З а д а ч а о н а х о ж д е н и и и н т е р в а л а п о в е р о я т н о с т и. Длина изготавливаемой автоматом детали — нормальная случайная величина X ($m = 15$ см, $\sigma = 0{,}2$ см). Найти вероятность брака, если допускаемые размеры детали должны быть $(15 \pm 0{,}4)$ см. Какой диапазон длины деталей можно гарантировать с вероятностью 0,8?

Решение.

1) Найдем сначала вероятность того, что деталь не является бракованной, т. е. вероятность события $\{|X - 15| \le 0{,}4\}$.

Имеем

$$P(|X-15|\le 0{,}4) = \left|\begin{array}{c}\text{вероятность попадания в точку}\\ \text{равна нулю}\end{array}\right| =$$

$$= P(|X-15|< 0{,}4) = \left| 2\Phi\left(\frac{\Delta}{\sigma}\right)-1, \quad \text{причем} \quad \Delta = 0{,}4;\ \sigma = 0{,}2 \right| =$$

$$= 2\Phi(2)-1 = \left|\begin{array}{c}\text{переходим к отрицательному аргументу}\\ \text{по формуле} \quad \Phi(x)+\Phi(-x)=1\end{array}\right| =$$

$$= 2-2\Phi(-2)-1 = 1-2\Phi(-2) = \left|\begin{array}{c}\text{по таблице}\\ \Phi(x),\ x\le 0\end{array}\right| \approx$$

$$\approx 1-0{,}0456 = 0{,}9544.$$

Тогда вероятность брака, как вероятность противоположного события, равна 0,0456.

2) Многие диапазоны длины деталей имеют вероятность, равную 0,8, но при задании такого вопроса обычно подразумевается, что нужно найти интервал, симметричный относительно математического ожидания m, т. е. интервал вида $(m - \Delta;\ m + \Delta)$. Такой интервал, имеющий вероятность 0,8, единственный, а задача состоит в отыскании отклонения Δ.

Дано: $P(m - \Delta < X < m + \Delta) = 0{,}8$. По формуле вероятности отклонения $X \in N(m, \sigma)$ от математического ожидания m получаем

$$2\Phi\left(\frac{\Delta}{\sigma}\right)-1 = 0{,}8;$$

$$\Phi\left(\frac{\Delta}{\sigma}\right) = 0{,}9.$$

Тогда $\Phi(-\Delta/\sigma) = 0{,}1$, причем $-\Delta/\sigma < 0$. По таблице значений функции Лапласа $\Phi(x)$ находим аргумент x, для которого $\Phi(x) = 0{,}1$. Имеем $x = -\Delta/\sigma = -1{,}28$, причем $\sigma = 0{,}2$, поэтому $\Delta = 1{,}28 \cdot 0{,}2 = 0{,}256$ (см).

Ответы. Вероятность получения бракованной (слишком длинной или слишком короткой) детали равна 0,0456.

С вероятностью 0,8 можно гарантировать диапазон длины деталей $(15 \pm 0{,}256)$ см. Это означает, что 20% деталей будут иметь отклонение от стандартной длины (15 см), большее 0,256 см.

Задача о браковке подшипников. Браковка шариков для подшипников происходит так: если шарик не проходит через отверстие диаметром d_1, но проходит через отверстие диаметром $d_2 > d_1$, то шарик считается годным. Иначе он бракуется. Пусть диаметр шарика $D \in N(m, \sigma)$, где $m = (d_1 + d_2)/2$; $\sigma = (d_2 - d_1)/5$. Какова вероятность того, что шарик будет забракован?

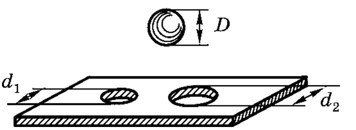


Рис. 55

Решение. Введем события: $A = \{$шарик бракуется$\}$, $\bar{A} = \{$шарик не бракуется$\}$. По условию шарик не бракуется, если $d_1 < D < d_2$ (рис. 55).

Для вероятности того, что шарик не бракуется, имеем

$$P(\bar{A}) = P(d_1 < D < d_2) =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{по формуле вероятности попадания} \\ D \in N(m, \sigma) \text{ в интервал } (d_1, d_2) \end{array} \right| =$$

$$= \Phi\left(\frac{d_2 - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{d_1 - m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{d_2 - \frac{d_1 + d_2}{2}}{\frac{d_2 - d_1}{5}}\right) - \Phi\left(\frac{d_1 - \frac{d_1 + d_2}{2}}{\frac{d_2 - d_1}{5}}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{\frac{d_2 - d_1}{2}}{\frac{d_2 - d_1}{5}}\right) - \Phi\left(\frac{\frac{d_1 - d_2}{2}}{\frac{d_2 - d_1}{5}}\right) = \Phi(2{,}5) - \Phi(-2{,}5) = \left| \begin{array}{l} \text{по свойству} \\ \Phi(x) \end{array} \right| =$$

$$= 1 - 2\Phi(-2{,}5) = \left| \begin{array}{l} \text{по свойству} \\ \Phi(x), \quad x \le 0 \end{array} \right| = 1 - 2 \cdot 0{,}0062 = 0{,}9876.$$

Таким образом, вероятность того, что шарик не бракуется, равна 0,9876. Тогда вероятность того, что шарик бракуется, равна 0,0124.

Ответ. Вероятность того, что шарик будет забракован, равна 0,0124, т. е. бракуется чуть более 1% изготовленных шариков для подшипников.

7.6.
ВАРИАНТЫ ТИПОВОГО РАСЧЕТА

ЗАДАНИЯ НА РАЗНЫЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ (ПЕРВАЯ ЗАДАЧА)

1. Дистанция X между двумя соседними самолетами в строю имеет показательное распределение с $MX = 100$ м. Опасность столкновения самолетов возникает при уменьшении дистанции до 20 м. Найти вероятность возникновения этой опасности.

2. Срок службы прибора — случайная величина X, распределенная по экспоненциальному закону с параметром $\lambda = 3$. Указать плотность вероятности $f(x)$ и числовые характеристики этой случайной величины, построить кривую распределения.

3. Интервал движения теплоходов «Москва» на реке Иртыш составляет 3 ч. Дачники подходят к пристани в некоторый момент, не зная расписания. Какова вероятность того, что они опоздали на очередной теплоход не более чем на 15 мин?

4. Автомат штампует детали. Стандартная длина детали равна 50 см. Фактически длина детали X имеет нормальное распределение ($m = 50$ см). При контроле работы автомата оказалось, что длины изготовленных деталей $32 \le X \le 68$ см. Какова вероятность того, что длина очередной детали будет меньше 45 см?

5. Станок-автомат изготавливает валики, контролируя их диаметр X. Считая, что X распределено нормально ($m = 10$ мм, $\sigma = 0,1$ мм), найти интервал, в котором с вероятностью 0,9973 будут заключены диаметры изготавливаемых валиков.

6. Отклонение длины L изготавливаемых деталей от стандарта есть случайная величина, распределенная по нормальному закону ($m = 0$, $\sigma = 0{,}4$ см). Если стандартная длина детали равна 40 см, то в каком диапазоне окажутся длины деталей с вероятностью 0,8?

7. Исследуется район массовой гибели судов в войне 1939–1945 гг. Вероятность обнаружения затонувшего судна за время поиска t задается формулой: $P(t) = 1 - e^{-0{,}04t}$. Пусть случайная величина T — время, необходимое для обнаружения очередного судна (в часах). Найти среднее значение T.

8. Вероятность выхода из строя трансформатора за время эксплуатации t задается формулой: $P(t) = 1 - e^{-0{,}002t}$. Случайная величина T — время безотказной работы трансформатора. Найти математическое ожидание и дисперсию T, если величина T измеряется в часах.

9. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону с плотностью вероятности

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0; \\ 4e^{-4x} & \text{при} \quad x \geq 0. \end{cases}$$

Найти вероятность события $\{X \in (0{,}2;\ 0{,}5)\}$.

10. Для какого значения k функция

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0; \\ \dfrac{1}{2k}e^{-kx} & \text{при} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

является:

а) плотностью вероятности;

б) плотностью вероятности экспоненциального закона?

11. Вероятность выхода из строя гидромуфты валопровода тепловоза за время эксплуатации t задается формулой: $P(t) = 1 - e^{-0{,}05t}$. Случайная величина T — время работы гидромуфты до выхода из строя (в месяцах). Найти среднее время безотказной работы гидромуфты.

12. Диаметр D детали, изготавливаемой на станке, есть случайная величина, распределенная по нормальному закону ($m = 25$ см, $\sigma = 0{,}4$ см). Найти интервал, в котором с вероятностью 0,996 будут заключены диаметры деталей.

13. Автомат вытачивает стальные оси. Стандартная длина оси 1500 мм. Фактически же длина оси X является нормальной случайной величиной ($m = 1500$ мм). При проверке большой партии изготовленных осей выяснилось, что $1482 \le X \le 1518$ (мм). Какова вероятность того, что длина наугад взятой оси меньше 1495 мм?

14. Интервал движения дизель-поездов через станцию Новая Ляля на Урале составляет 6 ч. Туристы подходят к вокзалу в некоторый момент времени. Какова вероятность того, что поезд ушел ровно 20 мин назад? Какова вероятность того, что до отхода следующего дизеля осталось не менее трех с половиной часов?

15. Интервал движения трамвая равен 5 мин. Пассажир подходит к остановке в некоторый момент времени. Какова вероятность того, что он подошел не ранее чем через минуту после ухода предыдущего трамвая, но не позднее, чем за две минуты до отхода следующего?

16. Случайная величина X имеет нормальный закон распределения ($MX = 50$; $DX = 250$). Найти вероятность события $\{X \in (10, 60)\}$.

17. Время T безотказной работы телевизора распределено по показательному закону с плотностью

$$f(t) = 0{,}002e^{-0{,}002t}\ (t > 0).$$

Найти вероятность того, что телевизор проработает без отказа не менее 1000 ч.

18. Динамическая нагрузка X на автосцепку вагона распределена по нормальному закону ($m = 7$ т; $\sigma = 1$ т). Какова вероятность того, что нагрузка не превысит 10 т? Какова вероятность нагрузок не более 7 т?

19. Автомат штампует детали. Проектная длина детали равна 150 мм. Фактическая длина детали X распределена нормально ($m = 150$ мм). При контроле работы автомата выяснилось, что длина изготовленных деталей $138 \le X \le 162$ (мм). Какова вероятность того, что длина наугад взятой детали более 160 мм?

20. Производится взвешивание некоторого вещества без систематических ошибок. Случайные ошибки взвешивания подчинены нормальному закону с $\sigma = 20$ г. Найти вероятность того, что очередное взвешивание будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 5 г.

21. Диаметр детали — случайная величина X с нормальным законом распределения ($m = 5$ см; $\sigma = 0{,}09$ см). В каком интервале должны находиться диаметры деталей, чтобы вероятность невыхода за границы интервала была равна 0,95?

22. Динамическая нагрузка X на соединительную раму тележек восьмиосного вагона имеет нормальное распределение ($m = 80$ т; $\sigma = 5$ т). Какова вероятность диапазона нагрузок от 50 до 100 т?

23. Время T безотказной работы дисплея распределено по экспоненциальному закону с математическим ожиданием 5000 ч. Какова вероятность того, что конкретный дисплей проработает без отказа от 7000 до 10 000 ч?

24. Срок службы T (в часах) микросхемы — случайная величина, распределенная экспоненциально ($\lambda = 0{,}001$). Указать плотность вероятности и функцию распределения T, построить их графики, найти средний срок службы микросхемы. Какова вероятность того, что она прослужит более 50 ч?

25. Цена деления шкалы измерительного прибора равна 0,1. Показания округляются до ближайшего деления. Найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка ε, меньшая 0,01.

26. При измерении расстояния оптическим дальномером имеют место систематическая ошибка, равная 100 м в сторону преувеличения дальности, и случайные ошибки, имеющие нормальное распределение с $\sigma = 50$ м. Найти вероятность измерения расстояния с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 120 м.

27. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины, имеющей плотность распределения $f(x) = 2e^{-2x}$ $(x \geq 0)$.

28. Происходит взвешивание некоторого вещества. Систематические ошибки взвешивания отсутствуют, а случайные подчинены нормальному закону с $\sigma = 15$ г. С какой вероятностью ошибка очередного взвешивания не превзойдет по абсолютной величине 12 г?

29. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону с плотностью вероятности

$f(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ 6e^{-6x}, & x\geq 0\end{cases}$. Найти вероятности событий $\{X\geq 0{,}3\}$; $\{-1\leq X\leq 1\}$.

30. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, имеющей плотность распределения $f(x)=5e^{-5x}$ $(x\geq 0)$.

ЗАДАНИЯ НА РАЗНЫЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ (ВТОРАЯ ЗАДАЧА)

1. Диаметр детали, вытачиваемой на станке, есть нормальная случайная величина ($m = 25$ см; $\sigma = 0{,}4$ см). С какой вероятностью отклонение диаметра детали от среднего значения не превосходит по абсолютной величине $0{,}16$ см?

2. Производится взвешивание стандартных узлов. Систематические ошибки взвешивания отсутствуют, а случайные — подчинены нормальному закону с $\sigma = 1{,}5$ кг. С какой вероятностью ошибка очередного взвешивания не превысит по абсолютной величине 1 кг?

3. Время T безотказной работы тягового электродвигателя распределено по экспоненциальному закону с математическим ожиданием 18 месяцев. Какова вероятность того, что данный двигатель откажет:

а) менее чем через месяц после ремонта;

б) не менее чем через год после ремонта?

4. Цена деления шкалы вольтметра равна $0{,}5$ В. Показания округляются до ближайшего деления. Найти вероятность того, что при измерении будет сделана ошибка ε, не превышающая $0{,}025$ В.

5. Время T работы лазерного принтера до выхода из строя имеет экспоненциальное распределение с плотностью

$$f(t)=0{,}00042e^{-0{,}00042t}\ (t>0).$$

Найти вероятность того, что принтер проработает до выхода из строя не менее:

а) 2500 ч;

б) 5000 ч;

в) 10 000 ч.

6. Для какого значения A функция

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x<0; \\ \dfrac{1}{A}e^{-3Ax} & \text{при} \quad x\geq 0 \end{cases}$$

является:

а) плотностью вероятности;

б) плотностью вероятности экспоненциального закона?

7. Для измерения расстояния до объекта используется оптический дальномер. Измерения сопровождаются систематическими и случайными ошибками. Систематическая ошибка равна 50 м в сторону преуменьшения расстояния. Случайные ошибки подчинены нормальному закону с $\sigma = 100$ м. Найти вероятность измерения расстояния с ошибкой, не превышающей по абсолютной величине 150 м.

8. Случайная величина X распределена по нормальному закону ($MX = 40$; $DX = 200$). Какова вероятность события $\{X \in (30; 80)\}$?

9. Длина L рельсовой плети есть случайная величина, распределенная по нормальному закону ($m = 300$ м; $\sigma = 0{,}5$ м). Найти интервал, в котором с вероятностью 0,9 будут заключены значения длины рельсовых плетей.

10. Диаметр втулок, изготавливаемых цехом, — нормальная случайная величина с математическим ожиданием $m = 2{,}5$ см и дисперсией $\sigma^2 = 0{,}0001$ см^2. Какой диапазон диаметров втулок можно гарантировать с вероятностью 0,99?

11. Нагрузка G на стержень подчиняется нормальному закону распределения с параметрами $m = 250$ кг; $\sigma = 50$ кг. Какова вероятность того, что нагрузка не превысит 380 кг? Какова вероятность нагрузок от 100 до 200 кг?

12. Время T безотказной работы измерительного комплекса имеет экспоненциальное распределение с математическим ожиданием 1,5 тыс. ч. Какова вероятность того, что комплекс выйдет из строя:

а) менее чем за 100 ч работы;

б) не менее чем после 500 ч работы?

13. Время T (в часах) безотказной работы элемента распределено по экспоненциальному закону с параметром $\lambda = 0{,}01$. Указать плотность вероятности $f(t)$ случайной величины T, построить кривую распределения и найти среднее время безотказной работы элемента. С какой вероятностью элемент проработает безотказно не менее 200 ч?

14. Масса полувагона с углем подчиняется нормальному закону распределения ($m = 60$ т; $\sigma = 500$ кг). Какова вероятность того, что масса наугад выбранного в составе полувагона находится в диапазоне (60 ± 1) т?

15. Все значения равномерно распределенной случайной величины X лежат на отрезке $[2; 8]$. Какова вероятность события $\{X \in [3; 5]\}$?

16. Цена деления шкалы амперметра равна 0,1 А. Показания определяют с точностью до ближайшего деления. Найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка ε, превышающая 0,02 А.

17. Станок-автомат изготавливает ролики, контролируя их диаметр D. Считая, что величина D распределена нормально ($m = 5$ см; $\sigma = 2$ мм), найти интервал, в который с вероятностью 0,9973 попадут диаметры роликов.

18. Минутная стрелка электрических часов на вокзале перемещается скачкообразно в конце каждой минуты. Найти вероятность того, что в данное мгновение часы показывают время, которое отличается от истинного более чем на 20 с.

19. Время T работы рессорного подвешивания до выхода из строя имеет экспоненциальное распределение с математическим ожиданием 1250 ч. Какова вероятность того, что данный комплект рессор проработает до выхода из строя:

а) не менее 1250 ч;

б) от 1250 до 2500 ч;

в) менее 500 ч?

20. Число отказавших за время T элементов аппаратуры — случайная величина X, распределенная экспоненциально ($\lambda = 0{,}2$). Указать плотность и функцию распределения, построить их графики, найти среднее число элементов, которые могут выйти из строя за время T. Какова вероятность того, что число отказавших элементов заключено между 3 и 10?

21. Случайная величина T имеет плотность вероятности $f(t) = 0,\ 037e^{-0,037t}(t \geq 0)$. Найти ее числовые характеристики: MT, DT, $\sigma(T)$.

22. Цена деления шкалы амперметра равна 0,5 А. Показания округляются до ближайшего деления. Найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка ε не более 0,1 А.

23. Нагрузка на стержень подчиняется нормальному закону распределения ($m = 5$ Н; $\sigma = 0{,}05$ Н). Усилие, разрушающее стержень, составляет 5,08 Н. Найти вероятность разрушения стержня.

24. Автомат отливает чугунные болванки. Стандартная масса отливки равна 100 кг. Фактически масса отливки X имеет нормальное распределение ($m = 100$ кг). При контроле работы автомата обнаружено, что масса изготовленных отливок находится в диапазоне от 94 до 106 кг. Какова вероятность того, что масса очередной отливки будет больше 104 кг?

25. Время T безотказной работы установки рентгенконтроля аккумуляторных батарей имеет показательное распределение с математическим ожиданием 1300 ч. Какова вероятность того, что данная установка проработает до выхода из строя:

а) менее 240 ч;

б) от 240 до 480 ч;

в) более 1000 ч?

26. Вероятность выхода из строя дисковода компьютера за время работы t задается формулой:

$$P(t) = 1 - e^{-0,000625t}.$$

Случайная величина T — время работы дисковода до выхода из строя (в часах). Найти среднее время безотказной работы дисковода. Выписать формулу плотности вероятности для T.

27. Отклонение веса железобетонных изделий от стандарта есть нормальная случайная величина ($m = 0$, $\sigma = 15$ кг). В каком диапазоне окажутся с вероятностью 0,97 веса изделий при их массовом изготовлении, если стандартный вес изделия равен 4,5 т?

28. Вероятность выхода из строя опорного подшипника за время эксплуатации t задается формулой: $P(t) = 1 - e^{-0{,}01t}$. Случайная величина T — время безотказной эксплуатации подшипника (в часах). Найти числовые характеристики случайной величины: MT, DT, σ.

29. Диаметр вала — случайная величина X с нормальным законом распределения ($m = 4$ см, $\sigma = 0{,}07$ см). В каких границах следует ожидать диаметры валов при их массовой закупке, чтобы вероятность нахождения их в этих границах была равна 0,98?

30. Производится взвешивание некоторых изделий. Систематические ошибки взвешивания отсутствуют, а случайные подчинены нормальному закону с $\sigma = 10$ г. Найти вероятность того, что взвешивание будет произведено с ошибкой, не превышающей по абсолютной величине 5 г.

ЗАДАНИЯ НА НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

1. Колебание прибытия вагонов на промышленную станцию имеет нормальное распределение со средним квадратическим отклонением $\sigma = 6$ и средним значением, равным 40 вагонам в сутки. Определить вероятность того, что за сутки на станцию прибыло от 37 до 43 вагонов.

2. Время формирования поездов подчиняется нормальному закону распределения со средним квадратическим отклонением 5 мин и средним значением 40 мин. Определить вероятность того, что время формирования поезда примет значение в интервале от 35 до 45 мин.

3. Случайные ошибки измерения подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением 20 мм и математическим ожиданием, равным нулю. Найти вероятность того, что измерение будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 10 мм.

4. Случайная величина X распределена по нормальному закону с математическим ожиданием $m = 10$. Вероятность попадания X в интервал (10; 20) равна 0,3. Чему равна вероятность попадания X в интервал (0; 10)? Ответ обосновать изображением графика плотности вероятности $f(x)$.

5. Случайная величина — период накопления состава на сортировочном пути — распределена по нормальному закону с параметрами $m = 6$ ч и $\sigma = 1$ ч. Какова вероятность того, что случайная величина будет заключена между четырьмя и семью часами?

6. Число вагонов в прибывающем на расформирование составе является случайной величиной, распределенной по нормальному закону с параметрами $\sigma = 10$, $m = 100$. Определить вероятность того, что в составе будет не более 90 вагонов.

7. Случайная величина X подчинена нормальному закону распределения:

$$f(x) = \frac{0{,}1}{\sqrt{\pi}} e^{-0{,}01(x-2)^2}.$$

Определить вероятность того, что X примет значение от 0 до 12, построить график плотности вероятности, указать интервал наиболее вероятных значений $[m - 3\sigma;\ m + 3\sigma]$.

8. Диаметр деталей, выпускаемых цехом, распределен по нормальному закону с параметрами: математическое ожидание — 5 см, дисперсия — 0,81 см^2. Записать формулу плотности вероятности для диаметра деталей. Какова вероятность того, что диаметр наугад взятой детали находится в интервале 4–7 см?

9. Браковка шариков для подшипников производится следующим образом: если шарик не проходит через отверстие диаметром d_1, но проходит через отверстие диаметром $d_2 > d_1$, то шарик считается приемлемым. Если какое-нибудь из этих условий не выполняется, то шарик бракуется. Известно, что диаметр шарика D есть нормально распределенная случайная величина с характеристиками:

$$m = \frac{d_1 + d_2}{2}; \quad \sigma = \frac{d_2 - d_1}{4}.$$

Определить вероятность того, что шарик будет забракован.

10. Колебание времени движения поезда по перегону подчиняется нормальному закону со средним значением $m = 16$ мин и средним квадратическим отклонением

$\sigma = 2$ мин. Определить вероятность времени хода поезда более 19 мин.

11. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием, равным 3. Вероятность попадания X в интервал $(-12; 18)$ равна 0,9973. Чему равна вероятность попадания X в интервал $(30; 35)$? Записать для случайной величины X формулу плотности вероятности $f(x)$.

12. Число вагонов, прибывающих в течение суток на грузовой пункт станции, является случайной величиной, распределенной по нормальному закону с параметрами: $m = 30$, $\sigma = 10$. Определить вероятность прибытия на грузовой пункт от 25 до 35 вагонов в сутки.

13. Время формирования грузового поезда есть нормальная случайная величина с параметрами: $m = 90$ мин; $\sigma = 20$ мин. Какова вероятность того, что на формирование очередного поезда потребуется более двух часов?

14. Случайная ошибка измерения имеет нормальное распределение с параметрами: $\sigma = 5$ мм и $m = 0$. Найти вероятность того, что измерение будет произведено с ошибкой, превышающей по абсолютной величине 12 мм.

15. Случайная величина X имеет нормальное распределение с математическим ожиданием $m = 35$ и $\sigma = 5$. Построить график плотности вероятности $f(x)$ и сравнить вероятности попадания X в интервалы $(0; 23)$ и $(40; 55)$.

16. Период накопления состава на сортировочной станции имеет нормальное распределение с параметрами: $m = 10$ ч и $\sigma = 1{,}5$ ч. С какой вероятностью период накопления очередного состава окажется более 12 ч?

17. Число вагонов в прибывающем на расформирование составе — нормальная случайная величина с математическим ожиданием $m = 80$ и $\sigma = 6$. Какова вероятность того, что в очередном составе будет не менее 95 вагонов?

18. Случайная величина X имеет нормальное распределение с плотностью:

$$f(x) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{16}(x-10)^2}.$$

Определить вероятность события $\{X > 13\}$, построить кривую распределения и указать интервал наиболее вероятных значений $[m - 3\sigma; m + 3\sigma]$.

19. Длина изделий, выпускаемых цехом, имеет нормальное распределение с параметрами: математическое ожидание $m = 50$ см, дисперсия $D = 2$ см^2. Записать формулу $f(x)$ для длины изделий. Какова вероятность того, что длина наугад взятого изделия находится в интервале от 48 до 52 см?

20. Браковка шариков для подшипников происходит так: если шарик не проходит через отверстие диаметром d_1, но проходит через отверстие диаметром $d_2 > d_1$, то размер шарика считается приемлемым. Иначе шарик бракуется. Пусть диаметр шарика $D \in N(m, \sigma)$, где $m = (d_1 + d_2)/2$; $\sigma = (d_2 - d_1)/3$. Какова вероятность того, что он будет забракован?

21. Время движения поезда по перегону Густафьево—Сыропятское имеет нормальное распределение с параметрами: $m = 10$ мин; $\sigma = 2$ мин. С какой вероятностью время хода очередного поезда по перегону окажется в пределах от 5 до 15 мин?

22. Случайная величина X имеет нормальное распределение, причем $m = 9$. Вероятность попадания X в интервал (0; 18) равна 0,9973. Чему равна вероятность попадания X в интервал (5; 15)? Записать формулу плотности вероятности $f(x)$.

23. Число полувагонов, прибывающих под погрузку угля в течение суток, есть нормальная случайная величина с параметрами: $m = 200$; $\sigma = 30$. Определить вероятность того, что на следующий день под погрузку прибудет менее 180 полувагонов.

24. Время формирования поезда на станции Узловая подчинено нормальному закону с математическим ожиданием 100 мин и средним квадратическим отклонением 15 мин. Насколько вероятно, что очередной поезд будет сформирован менее чем за 75 мин?

25. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием $m = 25$. Вероятность попадания X в интервал (10; 15) равна 0,1. Чему равна вероятность попадания X в интервал (35; 40)? Ответ обосновать изображением графика плотности вероятности $f(x)$.

26. Время накопления состава на станции Входная является нормальной случайной величиной с математическим ожиданием $m = 5$ ч и $\sigma = 0{,}5$ ч. Какова вероятность того, что это время будет составлять от четырех до девяти часов?

27. Число вагонов в составе, прибывающем на расформирование, является гауссовской случайной величиной с параметрами: $m = 90$, $\sigma = 20$. Какова вероятность того, что в составе окажется менее 50 вагонов?

28. Случайная величина X имеет распределение Гаусса с плотностью вероятности:

$$f(x) = \frac{1}{6\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{36}(x-25)^2}.$$

Определить вероятность попадания значения X в интервал (20; 30), построить график $f(x)$, указать интервал $[m - 3\sigma; m + 3\sigma]$.

29. Время движения поезда по перегону Алонский–Мариановка есть случайная величина, распределенная по нормальному закону, где $\sigma = 1$ мин, $m = 12$ мин. Какова вероятность, что время хода поезда по перегону окажется меньше 9 мин?

30. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием $m = 100$. Вероятность попадания ее в промежуток (25; 175) равна 0,9973. Чему равна вероятность попадания X в промежуток (25; 75)? Записать формулу плотности вероятности $f(x)$.

В заключение отметим, что равномерное, экспоненциальное и нормальное распределения представляют собой лишь малую часть практически полезных непрерывных случайных величин. В качестве примеров других важных распределений следует отметить *распределение Стьюдента*, используемое в теории измерений при оценке погрешностей физических экспериментов; *распределение «хи-квадрат»*, применяемое в математической статистике (например, при проверке гипотез по критерию Пирсона); *гамма-распределение* и *бета-распределение*. Если экспоненциальное распределение описывает долговечность изделия, работающего в нормальном режиме эксплуатации, то для описания долговечности изделия, эксплуатируемого в режиме износа и старения, применяется *логарифмически нормальное распределение*. *Распределение Вейбулла–Гнеденко* является обобщением экспоненциального распределения и при различных значениях параметров используется в теории надежности при исследовании долговечности изделия, работающего как в режиме «приработки», так и в режиме нормальной эксплуатации или в режиме износа и старения.

Более того, если в классическом курсе высшей математики изучаются, как правило, лишь действительные случайные величины, то при построении математических моделей на практике применяются более сложные объекты: комплексные случайные величины, случайные векторы, случайные матрицы, графы со случайным расположением и случайными весами дуг, случайные геометрические фигуры, случайные функционалы и т. д. Разумеется, построение и использование этих сложных объектов (как, впрочем, и действительных случайных величин) производятся с помощью компьютера.

В начале главы уже отмечалось, что базовым при генерации случайных величин на компьютере является равномерное распределение на интервале (0; 1). Из трех способов получения случайных чисел — хранения в памяти компьютера готовых таблиц таких чисел, использования физических датчиков случайных чисел и применения специального программного обеспечения, строящего псевдослучайные числа с помощью математических преобразований — преобладает последний способ. Программы, получающие значения случайной величины с распределением $I(0, 1)$, называют *генераторами случайных чисел* (в некоторых языках программирования генераторы порождают распределение $I(-1, 1)$ или $I(a, b)$). Построение хороших генераторов случайных чисел — это целая наука. Известны разные алгоритмы генерации случайных чисел, среди которых отметим *метод Неймана*, *метод Ковэю*, *квадратичный конгруэнтный метод* и наиболее широко распространенный *линейный конгруэнтный метод*. Качество последовательностей чисел, порождаемых генераторами, проверяется с помощью разнообразных статистических тестов, и, если оно недостаточно хорошее, то его можно улучшить, комбинируя в одной программе несколько алгоритмов генерации или несколько копий одного и того же алгоритма (например, по *методу Макларена–Марсальи*).

В качестве приложения приведем простейшие алгоритмы генерации важнейших распределений: $I(a, b)$; $E(\lambda, \theta)$; $N(m, \sigma)$ на основе стандартного генератора случайных чисел. Пусть $U \in I(0, 1)$ — случайное число, выдаваемое стандартным генератором и равномерно распределенное на интервале $(0, 1)$. Тогда случайная величина $X \in I(a, b)$ определяется по формуле:

$$X = a + (b - a)U, \tag{60}$$

а случайная величина $Y \in E(\lambda, \theta)$ — по формуле:

$$Y = \theta - \ln(U)/\lambda. \tag{61}$$

Заметим, что в формуле (61) $\ln(U) \le 0$, поэтому значения случайной величины Y оказываются больше θ, как это и требуется для экспоненциального закона. При генерации нормальных случайных величин сначала получают двенадцать значений случайной величины $U \in I(0, 1)$, а затем случайные величины $X \in N(0, 1)$ и $Y \in N(m, \sigma)$ определяются по формулам:

$$X = \sum_{i=1}^{12} u_i - 6; \tag{62}$$

$$Y = m + \sigma X. \tag{63}$$

Следует отметить, что в развитых средах программирования могут существовать стандартные процедуры генерации всех основных распределений непрерывных случайных величин, что делает излишним пользовательское программирование по формулам (60)–(63). Кроме приведенных выше простейших алгоритмов генерации важнейших распределений существуют более качественные (и, соответственно, более сложные) алгоритмы их получения, которые можно найти в специальной литературе по компьютерному моделированию или программированию.

ГЛАВА 8

ВАЖНЕЙШИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ ТЕОРИИ НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

В шестой и седьмой главах данного пособия рассмотрены свойства и характеристики непрерывных случайных величин, а также важнейшие законы их распределения. В то же время для изучаемых в теории вероятностей случайных величин справедливы общие закономерности типа центральной предельной теоремы или закона больших чисел. Предельные теоремы и закон больших чисел — основные результаты в теории вероятностей, которые в наиболее общей и действенной формулировке принадлежат отечественным ученым П. Л. Чебышеву, А. А. Маркову, А. М. Ляпунову, А. Я. Хинчину, А. Н. Колмогорову, Б. В. Гнеденко.

Одним из основных следствий неравенства Чебышева (см. далее) является так называемое правило трех сигма, справедливое (с разной, но всегда высокой вероятностью) для любых случайных величин. Это правило позволяет ограничиться в прикладных задачах рассмотрением диапазона наиболее вероятных значений случайной величины вместо всей области ее возможных значений.

Важные технические приложения имеет и центральная предельная теорема, которую можно применить к задачам о времени безотказной работы технических устройств с кратным дублированием и о суммарных запасах топлива и энергии, а также к задачам тяговых расчетов и прогнозирования финансовых ресурсов, учитывающим случайный характер поступлений.

Например, к экономическим задачам, использующим центральную предельную теорему, относятся задачи о раз-мере фондов материального потребления при условии случайного расходования средств и о накоплении денежных сумм для реализации экономических проектов в условиях случайного поступления средств от кредиторов.

К задачам тяговых расчетов относятся задачи о необходимости введения кратной локомотивной тяги с учетом случайности загрузки отдельных вагонов при стандартной структуре поезда, об обеспечении поезда тормозными средствами с учетом случайности тормозных усилий в колодках вагонов, о режимах функционирования железнодорожных паромных переправ с учетом случайности загрузки вагонов в составе.

Примером задачи компьютерного моделирования, использующей центральную предельную теорему, является задача о построении генератора нормального распределения с заданными параметрами.

Цель главы — познакомить студентов с правилом трех сигма и простейшей формой центральной предельной теоремы, помочь им освоить способы решения задач о суммах случайных величин, имеющих ярко выраженную практическую направленность.

8.1. ПРАВИЛО ТРЕХ СИГМА

Правило трех сигма широко используется в инженерной практике для приближенного представления диапазона возможных значений случайной величины. Чтобы примерно представить диапазон практически возможных значений случайной величины, можно отложить от математического ожидания в обе стороны по 3σ, где $\sigma = \sigma_x$ — среднее квадратическое отклонение случайной величины X. Правило трех сигма является следствием неравенства Чебышева, формулируемого в виде леммы.

Лемма 8.1. *Неравенство Чебышева*

Для любой случайной величины X, имеющей математическое ожидание m_x и дисперсию D_x, справедливо неравенство:

$$P(|X - m_x| \geq \alpha) \leq \frac{D_x}{\alpha^2}, \tag{64}$$

где $|X - m_x|$ — отклонение случайной величины от математического ожидания; α — любое положительное число.

Возьмем в неравенстве Чебышева $\alpha = 3\sigma_x$, где $\sigma_x = \sqrt{D_x}$. Тогда

$$P(|X - m_x| \geq 3\sigma_x) \leq \frac{\sigma_x^2}{9\sigma_x^2} = \frac{1}{9}.$$

Назовем *правилом трех сигма* утверждение о том, что отклонение случайной величины X от математического ожидания меньше $3\sigma_x$:

$$|X - m_x| < 3\sigma_x. \qquad (65)$$

Тогда для любой случайной величины X вероятность невыполнения правила трех сигма не превышает $1/9$. На самом деле для конкретных законов распределения эта вероятность гораздо меньше. Оценим вероятность выполнения правила трех сигма для важнейших законов распределения непрерывных случайных величин.

РАВНОМЕРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Пусть случайная величина $X \in I(a, b)$. Покажем, что в этом случае вероятность $P(m - 3\sigma < X < m + 3\sigma) = 1$, т. е. правило трех сигма никогда не нарушается. Известно, что для равномерного закона

$$m = \frac{a+b}{2}; \ \sigma = \frac{b-a}{\sqrt{12}}.$$

Воспользуемся этими формулами для оценки величин $m - 3\sigma$, $m + 3\sigma$.

Имеем

$$m - 3\sigma = \frac{a+b}{2} - 3\cdot\frac{b-a}{\sqrt{12}} = \frac{a+b}{2} - \frac{(b-a)\sqrt{3}}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}(a + b - b\sqrt{3} + a\sqrt{3}) = \frac{1}{2}(b(1-\sqrt{3}) + a(1+\sqrt{3})) <$$

$$< \left| \begin{array}{l} \text{здесь коэффициент } (1-\sqrt{3}) < 0; b > a, \\ \text{поэтому, заменяя } b \text{ на } a\text{, увеличиваем сумму} \end{array} \right| <$$

$$< \frac{1}{2}(a(1-\sqrt{3}) + a(1+\sqrt{3})) = a.$$

Получили $m - 3\sigma < a$.

Аналогично

$$m+3\sigma=\frac{a+b}{2}+3\cdot\frac{b-a}{\sqrt{12}}=\frac{a+b}{2}+\frac{(b-a)\sqrt{3}}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}(a+b+b\sqrt{3}-a\sqrt{3})=\frac{1}{2}(b(1+\sqrt{3})+a(1-\sqrt{3}))>$$

$$>\left|\begin{array}{l}\text{коэффициент } (1-\sqrt{3})<0;\quad b>a,\\ \text{поэтому, заменяя } a \text{ на } b\text{, уменьшаем сумму}\end{array}\right|>$$

$$>\frac{1}{2}(b(1+\sqrt{3})+b(1-\sqrt{3}))=b.$$

Получили $m + 3\sigma > b$.

Так как все возможные значения случайной величины X находятся на отрезке $[a, b]$, а промежуток $(m - 3\sigma, m + 3\sigma)$ охватывает отрезок $[a, b]$ и шире его, то $P(m - 3\sigma < X < m + 3\sigma) = 1$ и для равномерного распределения правило трех сигма выполняется всегда.

НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Пусть случайная величина $X \in N(m, \sigma)$. Известно, что для нормального закона распределения справедлива формула:

$$P(|X-m|<\Delta)=2\Phi\left(\frac{\Delta}{\sigma}\right)-1,$$

где $\Delta > 0$ — заданное отклонение, а

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

— функция Лапласа.

Возьмем $\Delta = 3\sigma$. Тогда

$$P(|X-m|<3\sigma)=2\Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right)-1=2\Phi(3)-1=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\text{по свойствам}\\ \text{функции Лапласа}\end{array}\right|=2(1-\Phi(-3))-1=1-2\Phi(-3)=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\text{по таблицам}\\ \text{функции Лапласа}\end{array}\right|=0{,}9973\approx 1.$$

Таким образом, для нормального закона правило трех сигма почти наверняка выполняется. Первоначально это правило возникло именно для случая нормального распределения, где оно выполняется с большой точностью, но при более умеренных требованиях к точности его можно применять и к другим случайным величинам. Полезно выписать для $X \in N(m, \sigma)$ несколько соотношений, аналогичных правилу трех сигма, чтобы при необходимости варьировать точность оценки разброса случайной величины X:

$$P(m - 2\sigma < X < m + 2\sigma) \approx 0{,}95; \tag{66}$$

$$P(m - 3\sigma < X < m + 3\sigma) \approx 0{,}9973; \tag{67}$$

$$P(m - 4\sigma < X < m + 4\sigma) \approx 0{,}999936. \tag{68}$$

Соотношение (66) можно использовать для грубой оценки диапазона возможных значений нормальной случайной величины X.

Соотношение (67) применяется в большинстве инженерных (технических) приложений и соответствует правилу трех сигма.

Соотношение (68) рекомендуется для точных физических исследований.

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Пусть случайная величина $X \in E(\lambda)$, т. е. распределена по экспоненциальному закону с нулевым сдвигом $\theta = 0$. В этом случае отклонение случайной величины X от m_x, превышающее $3\sigma_x$, возможно только в бо́льшую сторону, так как величина $m_x - 3\sigma_x$ отрицательна, а отрицательных возможных значений у X нет.

Отрицательность величины $m_x - 3\sigma_x$ следует из свойств экспоненциального закона:

$$m_x - 3\sigma_x = \left| m = \frac{1}{\lambda}, \sigma = \frac{1}{\lambda} \right| = \frac{1}{\lambda} - \frac{3}{\lambda} = -\frac{2}{\lambda} < 0,$$

так как $\lambda > 0$ — интенсивность экспоненциального распределения.

Имеем

$$P(|X-m_x|\geq 3\sigma_x)=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\text{вероятность попадания}\\ \text{в точку равна нулю}\end{array}\right| P(|X-m_x|>3\sigma_x)=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\text{исходя из предварительных}\\ \text{рассуждений}\end{array}\right| = P(X>m_x+3\sigma_x)=$$

$$=P\left(X>\frac{1}{\lambda}+\frac{3}{\lambda}\right)=P\left(X>\frac{4}{\lambda}\right)=P\left(\frac{4}{\lambda}<X<+\infty\right)=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\text{по свойствам функции}\\ \text{распределения } F(x)\end{array}\right| = F(+\infty)-F\left(\frac{4}{\lambda}\right)=$$

$$=1-F\left(\frac{4}{\lambda}\right)=\left|\begin{array}{l}\text{для } X\in E(\lambda)\\ F(x)=1-e^{-\lambda x}\end{array}\right| =1-(1-e^{-4\lambda/\lambda})=e^{-4}\approx 0{,}0183.$$

Данными расчетами оценена вероятность невыполнения правила трех сигма для экспоненциального закона. Значит, вероятность выполнения правила трех сигма для случайной величины $X \in E(\lambda)$ составляет:

$$P(m-3\sigma<X<m+3\sigma)\approx 0{,}9817.$$

Подведем общие итоги. Для этого выпишем вероятности нарушения правила трех сигма для некоторых случайных величин (табл. 2).

Таким образом, из важнейших распределений хуже всего подчиняется правилу трех сигма экспоненциальное распределение: вероятность невыполнения правила равна приблизительно 2%. Тем не менее, эта вероятность значительно меньше общетеоретической оценки $(1/9\approx 0{,}1111)$.

Таблица 2

Вероятности нарушения правила трех сигма

Случайная величина	Вероятность невыполнения правила трех сигма
X — любая	$P(\lvert X-m_x\rvert\geq 3\sigma_x)\leq 1/9$
$X\in I(a, b)$	$P(\lvert X-m_x\rvert\geq 3\sigma_x)=0$
$X\in N(m, \sigma)$	$P(\lvert X-m_x\rvert\geq 3\sigma_x)\approx 0{,}0027$
$X\in E(\lambda)$	$P(\lvert X-m_x\rvert\geq 3\sigma_x)\approx 0{,}0183$

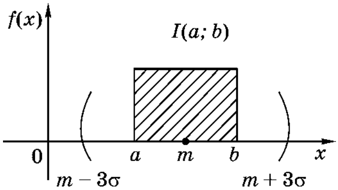


Рис. 56

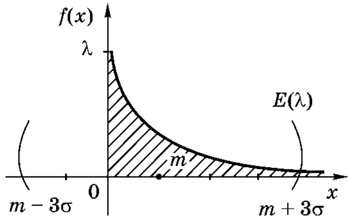


Рис. 57

Геометрические иллюстрации выполнения правила трех сигма для важнейших законов распределения приведены на рис. 56–58, причем на каждом из рисунков область под графиком плотности вероятности заштрихована в целях наглядного изображения вероятностной меры.

Для равномерно распределенной случайной величины X возможные значения не выходят за пределы промежутка $(m - 3\sigma, m + 3\sigma)$ (рис. 56). Случайная величина X, распределенная по экспоненциальному закону, может принимать значения, бо́льшие $m + 3\sigma$ (на рис. 57 это «хвост», уходящий вправо на $+\infty$).

Вероятность попадания случайной величины X в этот «хвост» равна приблизительно 0,0183. Значения случайной величины, меньшие нуля, на рис. 57 отсутствуют, и фактически левой границей приближенного диапазона возможных значений случайной величины X является нуль.

Случайная величина X, распределенная нормально, может принимать как значения, бо́льшие $m + 3\sigma$, так и значения, меньшие $m - 3\sigma$ (на рис. 58, слева и справа, имеется два симметричных «хвоста», выходящих за пределы промежутка $(m - 3\sigma, m + 3\sigma)$). Тем не менее вероятность попадания X в эти «хвосты» очень мала ($\approx 0,0027$).

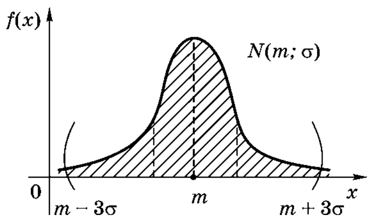


Рис. 58

Значениями X, уходящими влево и вправо на бесконечность, на практике обычно пренебрегают.

8.2. ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА

Центральная предельная теорема (ЦПТ) отвечает на следующие вопросы.

1. Когда и почему возникает в природе нормальное распределение?

2. Почему оно широко распространено в случайных явлениях природы?

ЦПТ является довольно сложным математическим результатом, но основное ее содержание может быть сформулировано достаточно просто. Нормальное распределение возникает в тех случаях, когда *суммируется много независимых* (или слабо зависимых) случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$:

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i, \tag{69}$$

причем эти величины имеют конечные математические ожидания и конечные, сравнимые между собой дисперсии.

Тогда, *каковы бы ни были законы распределения отдельных величин* X_i, закон распределения их суммы X будет близок к нормальному (причем тем ближе, чем больше число слагаемых n). При достаточно больших n можно считать, что $X \in N(m, \sigma)$.

Становится ясно, почему нормальный закон широко распространен в технических системах: в большинстве случаев погрешности измерения параметров, отклонения вводимых управляющих воздействий и отклонения условий эксплуатации распределены по нормальному закону, так как могут быть представлены в виде суммы «элементарных отклонений», вызванных различными, практически независимыми друг от друга причинами.

Рассмотрим простейшую форму ЦПТ.

Теорема 8.1. *Центральная предельная теорема для одинаково распределенных слагаемых.*

Если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины, имеющие одно и то же распределение ($M(X_i) = m_0$; $D(X_i) = \sigma_0^2$ для всех i), то при увеличении n закон распределения суммы

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

неограниченно приближается к нормальному закону распределения.

Сформулированная теорема используется в двух основных случаях: для суммы независимых случайных величин и для их среднего арифметического.

Случай 1. Сумма независимых случайных величин.

Имеем $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Найдем параметры распределения случайной величины $X \in N(m, \sigma)$:

$$m = M(X) = M\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \left| \begin{array}{l} \text{по свойствам} \\ \text{мат. ожидания} \end{array} \right| = \sum_{i=1}^{n} M(X_i) = n \cdot m_0;$$

$$D(X) = D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \left| \begin{array}{l} \text{по свойству дисперсии для} \\ \text{независимых с. в. } X_i \end{array} \right| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} D(X_i) = n \cdot \sigma_0^2; \quad \sigma = \sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{n} \cdot \sigma_0.$$

Таким образом, для случайной величины X — суммы случайных величин X_i — параметры нормального закона следующие:

$$\begin{cases} m = n \cdot m_0; \\ \sigma = \sqrt{n} \cdot \sigma_0. \end{cases} \tag{70}$$

Случай 2. Среднее арифметическое независимых случайных величин.

Имеем $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Здесь $\bar{X} = \frac{1}{n} X$, где случайная величина X распределена нормально, и ее параметры найдены. В этом случае

$$M(\bar{X}) = M\left(\frac{1}{n} X\right) = \left| \begin{array}{l} \text{по свойствам} \\ \text{мат. ожидания} \end{array} \right| = \frac{1}{n} M(X) = \frac{1}{n} \cdot m = m_0;$$

$$D(\bar{X}) = D\left(\frac{1}{n} X\right) = \left| \begin{array}{l} \text{по свойствам} \\ \text{дисперсии} \end{array} \right| = \frac{1}{n^2} D(X) = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \sigma_0^2 = \frac{\sigma_0^2}{n};$$

$$\sigma(\bar{X}) = \sqrt{D(\bar{X})} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sigma_0.$$

Таким образом, для случайной величины $\bar{X}$ — среднего арифметического случайных величин X — получаем:

$$\begin{cases} M(\bar{X}) = m_0; \\ \sigma(\bar{X}) = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\sigma_0, \end{cases} \tag{71}$$

т. е. математическое ожидание то же, что и у отдельных слагаемых X_i, а среднее квадратическое отклонение — в $\sqrt{n}$ раз меньше. На этом свойстве основана обработка результатов физических измерений, когда усредняются результаты n независимых экспериментов: с ростом числа измерений величина $\bar{X}$ становится все менее случайной, так как $\sigma(\bar{X}) \to 0$ при $n \to \infty$.

Рассмотрим важные замечания к ЦПТ.

Замечание 8.1. На самом деле строго математически сходимость к нормальному закону доказывается не для суммы $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, а для нормированной суммы

$$\tilde{X} = \frac{X - M(X)}{\sqrt{D(X)}}.$$

Если $F_n(x)$ — функция распределения случайной величины $\tilde{X}$, то при $n \to \infty$ $F_n(x) \to \Phi(x)$, являющейся функцией распределения для нормального закона типа $N(0, 1)$.

Замечание 8.2. Величина $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ достаточно близка к $N(m, \sigma)$ лишь при большом числе слагаемых n. Если рассматривать отклонение функции распределения $F_n(x)$ от функции распределения нормального закона $\Phi(x)$, то для симметричных распределений это отклонение имеет порядок $\bar{O}\left(\frac{1}{n}\right)$, а для несимметричных — порядок $\bar{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, где n — число слагаемых.

Сформулированные замечания используются на практике для оценки применимости ЦПТ к конкретным задачам о суммах случайных величин. Из второго замечания следует, что для достижения практически допустимой погрешности (отклонения), равной 0,02, для симметричных распределений (например, равномерного, нормального) требуется иметь $n \approx 50$ слагаемых, а для несимметричных распределений (например, экспоненциального) требуется иметь $n \approx 2500$ слагаемых. В практических задачах редко встречается число слагаемых порядка двух-трех тысяч, поэтому в инженерных приложениях для суммы величин $X_i \in E(\lambda)$ результаты ЦПТ в лучшем случае имеют характер грубой оценки, а в худшем — неприменимы вовсе.

8.3. ЗАДАЧИ НА ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЫ

ЗАДАЧА О ВРЕМЕНИ БЕЗОТКАЗНОЙ РАБОТЫ УСТРОЙСТВА С КРАТНЫМ ДУБЛИРОВАНИЕМ

Задача 8.1. Имеется 300 одинаковых микросхем, включенных параллельно в состав каскада аппаратуры. Время безотказной работы i-й микросхемы T_i имеет показательное распределение, одинаковое для всех микросхем ($\lambda = 0{,}04$), и измеряется в часах. При отказе i-й микросхемы каскад автоматически переключается на $(i + 1)$-ю микросхему. Если отказали все микросхемы, то каскад выходит из строя. Выполнить грубую оценку вероятности того, что каскад проработает менее 6500 ч. Каково среднее время работы отдельной микросхемы?

Решение.

1) Речь в задаче идет о грубой оценке вероятности, так как показательное (оно же — экспоненциальное) распределение не является симметричным, и поэтому даже суммирование трехсот слагаемых не гарантирует нормальности их суммы. Введем тем не менее случайную величину

$$T = \sum_{i=1}^{300} T_i,$$

где T — время работы каскада до выхода из строя. Предположим независимость случайных величин T_i, ибо это следует из смысла задачи о дублировании микросхем. Тогда по ЦПТ для одинаково распределенных и независимых случайных величин T_i делаем вывод о достаточной близости распределения их суммы T к нормальному, т. е., грубо говоря, $T \in N(m, \sigma)$.

2) Проще всего найти среднее время работы отдельной микросхемы каскада. Это время есть величина $M(T_i)$, а так как $T_i \in E(\lambda)$ при $\lambda = 0{,}04$, то $M(T_i) = 1/\lambda = 1/0{,}04 = 25$ (ч). Дисперсия $D(T_i) = 1/\lambda^2 = 625$ (ч^2). Таким образом, найдены величины из условия ЦПТ:

$$m_0 = M(T_i) = 25;\ \sigma_0^2 = D(T_i) = 625.$$

3) Параметры m и σ для случайной величины T находим в соответствии со случаем 1, пользуясь свойствами математического ожидания и дисперсии (п. 8.2). Получаем

$$m = M(T) = M\left(\sum_{i=1}^{300} T_i\right) = n \cdot m_0 = 300 \cdot 25 = 7500\ (\text{ч});$$

$$D(T) = D\left(\sum_{i=1}^{300} T_i\right) = n \cdot \sigma_0^2 = 300 \cdot 625 = 187500\ (\text{ч}^2);$$

$$\sigma = \sqrt{D(T)} \approx 433{,}01\ (\text{ч}).$$

4) В задаче требуется оценить вероятность события $\{T < 6500 \text{ ч}\}$. Для нормального закона распределения эта вероятность рассчитывается с помощью функции Лапласа $\Phi(x)$:

$$P(a < T < b) = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right), \tag{72}$$

поэтому строим следующую цепочку вычислений:

$$P(T < 6500) = P(0 < T < 6500) = \left| \begin{array}{c} a = 0; b = 6500; \\ m = 7500; \sigma \approx 433{,}01 \end{array} \right| \approx$$

$$\approx \Phi\left(\frac{6500 - 7500}{433{,}01}\right) - \Phi\left(\frac{0 - 7500}{433{,}01}\right) \approx$$

$$\approx \Phi(-2{,}309) - \Phi(-17{,}321) \approx 0{,}0105 - 0 = 0{,}0105.$$

Значения функции $\Phi(x)$ выбираются из таблицы (см. Приложение). В этой таблице при $x \le -3{,}9$ $\Phi(x) = 0$, поэтому $\Phi(-17{,}321) = 0$. Значение $\Phi(-2{,}309)$ в таблице отсутствует, а имеются только близкие к требуемому значения:

$$\Phi(-2{,}30) = 0{,}0107;$$
$$\Phi(-2{,}32) = 0{,}0102,$$

поэтому рассчитываем $\Phi(-2{,}309)$ с помощью линейной интерполяции, фактически сводящейся к рассмотрению пропорции приращений аргумента и функции. Приращению аргумента $\Delta x = (-2{,}30) - (-2{,}32) = 0{,}02$ соответствует приращение функции $\Delta\Phi = 0{,}0107 - 0{,}0102 = 0{,}0005$. Таким образом, для $\Delta x = 0{,}001$ $\Delta\Phi = 0{,}000025$. В нашем случае $\Delta x = -0{,}009$, поэтому $\Delta\Phi = -9 \cdot 0{,}000025 = -0{,}000225$, а с точностью до четырех знаков — $\Delta\Phi \approx -0{,}0002$. В результате имеем

$$\Phi(-2{,}309) \approx \Phi(-2{,}30) + \Delta\Phi \approx 0{,}0107 - 0{,}0002 = 0{,}0105,$$

что и использовано при вычислении требуемой вероятности.

Ответы.

Вероятность того, что каскад проработает менее 6500 ч, $P(T < 6500) = 0{,}0105$ (грубая оценка). Таким образом, скорее всего, каскад проработает дольше. Среднее время работы отдельной микросхемы каскада составляет 25 ч.

ЗАДАЧА О КРАТНОЙ ЛОКОМОТИВНОЙ ТЯГЕ

Задача 8.2. Состав содержит 25 вагонов, 30 платформ и 40 цистерн. Массы вагонов имеют распределение в диапазоне (40 ± 9) т, массы платформ — в диапазоне (30 ± 15) т, массы цистерн — в диапазоне (60 ± 3) т. Электровоз способен везти состав массой не более 4250 т, иначе прицепляют второй. Какова вероятность того, что одного электровоза не хватит для перевозки состава?

Решение.

1) Состав неоднороден: он состоит из вагонов трех типов, но для каждого типа вагонов правдоподобно предположение о нормальности распределения масс в рамках известного из практики диапазона. В итоге масса состава является суммой нормально распределенных случайных

величин и общего числа слагаемых достаточно для нормальности суммы.

Предположим, что массы вагонов X_i, массы платформ Y_i и массы цистерн Z_i распределены нормально (по трем разным законам), т. е.

$$X_i \in N(m_1, \sigma_1), \quad i = 1, \ldots, 25;$$
$$Y_i \in N(m_2, \sigma_2), \quad i = 1, \ldots, 30;$$
$$Z_i \in N(m_3, \sigma_3), \quad i = 1, \ldots, 40.$$

Тогда по правилу трех сигма для каждого из трех распределений принимаем практически известный диапазон за диапазон $(m - 3\sigma, m + 3\sigma)$. Имеем

$$m_1 \pm 3\sigma_1 \approx 40 \pm 9;$$
$$m_2 \pm 3\sigma_2 \approx 30 \pm 15;$$
$$m_3 \pm 3\sigma_3 \approx 60 \pm 3,$$

откуда $m_1 = 40$ т; $\sigma_1 = 3$ т; $m_2 = 30$ т; $\sigma_2 = 5$ т; $m_3 = 60$ т; $\sigma_3 = 1$ т.

2) Введем случайную величину $X = \{$масса состава$\}$, где

$$X = \sum_{i=1}^{25} X_i + \sum_{i=1}^{30} Y_i + \sum_{i=1}^{40} Z_i.$$

Предположим независимость масс отдельных вагонов, платформ и цистерн (это очень правдоподобно и обычно соответствует действительности). Так как распределения отдельных слагаемых близки друг к другу и симметричны, то по ЦПТ $X \in N(m, \sigma)$. Найдем параметры m и σ:

$$m = M(X) = \left| \begin{array}{l} \text{по линейности} \\ \text{мат. ожидания} \end{array} \right| = \sum_{j=1}^{3} n_j m_j;$$

$$\sigma^2 = D(X) = \left| \begin{array}{l} \text{так как слагаемые} \\ \text{независимы} \end{array} \right| = \sum_{j=1}^{3} n_j D_j,$$

где n_j — число вагонов j-го типа; m_j — математическое ожидание массы вагона j-го типа; D_j — дисперсия массы вагона j-го типа, вычисляемая по формуле $D_j = (\sigma_j)^2$.

Сведем информацию о трех типах вагонов в таблицу для лучшей наглядности:

Параметры	Тип вагона в составе		
	вагон	платформа	цистерна
Количество	$n_1 = 25$	$n_2 = 30$	$n_3 = 40$
Математическое ожидание массы, т	$m_1 = 40$	$m_2 = 30$	$m_3 = 60$
Дисперсия массы, т^2	$D_1 = 9$	$D_2 = 25$	$D_3 = 1$

В результате имеем

$$M(X) = 25 \cdot 40 + 30 \cdot 30 + 40 \cdot 60 =$$

$$= 1000 + 900 + 2400 = 4300\,(\text{т});$$

$$D(X) = 25 \cdot 9 + 30 \cdot 25 + 40 \cdot 1 = 225 + 750 + 40 = 1015\,(\text{т}^2);$$

$$\sigma = \sqrt{D(X)} \approx 31{,}86\,(\text{т}).$$

Таким образом, $m = 4300$; $\sigma \approx 31{,}86$.

3) Вероятность того, что одного электровоза не хватит для перевозки состава, вычисляется как вероятность события $\{X > 4250\ \text{т}\}$:

$$P(X > 4250) = P(4250 < X < \infty) = \left| \begin{array}{l} \Phi\left(\dfrac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\dfrac{a-m}{\sigma}\right), \\ \text{где} \quad b = +\infty; \quad a = 4250; \\ m = 4300; \quad \sigma \approx 31{,}86 \end{array} \right| =$$

$$= \Phi(+\infty) - \Phi\left(\frac{4250-4300}{31{,}86}\right) \approx 1 - \Phi(-1{,}57) \approx$$

$$\approx \left| \begin{array}{c} \text{по табл. } \Phi(-1{,}56) = 0{,}0594 \\ \Phi(-1{,}58) = 0{,}0571 \end{array} \right| \approx$$

$$\approx 1 - \frac{0{,}0594 + 0{,}0571}{2} = 1 - 0{,}05825 = 0{,}94175 \approx 0{,}94.$$

Ответы.

Вероятность того, что масса состава превысит 4250 т, т. е. $P(X > 4250) \approx 0{,}94$. Таким образом, при перевозке составов подобной структуры прицеплять второй электровоз потребуется с вероятностью 0,94. Значит, требуется обязательное введение кратной тяги (вероятностью 0,06 того, что состав «посилен» одному электровозу, на практике придется пренебречь).

ЗАДАЧА АППРОКСИМАЦИИ НОРМАЛЬНОГО ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НА КОМПЬЮТЕРЕ

Задача 8.3. Аппроксимацию нормальной случайной величины X на компьютере производят следующим образом: берут n независимых случайных величин $X_1, \ldots, X_n$, имеющих равномерное распределение на отрезке [0, 1]; строят величину $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$; линейным преобразованием получают $X = k_0 Y + k_1$.

Пусть $n = 48$. Найти коэффициенты k_0 и k_1, если $M(X) = 150$; $D(X) = 25$. Выписать итоговую формулу аппроксимации для X.

Решение.

1) Величины X_i имеют равномерное распределение на отрезке [0, 1], поэтому $M(X_i) = (a + b)/2 = (0 + 1)/2 = 1/2$; $D(X_i) = (b - a)^2/12 = (1 - 0)^2/12 = 1/12$ (найдены величины m_0, σ_0^2 из ЦПТ).

2) Величина $Y = \sum_{i=1}^{48} X_i$, причем X_i — независимы, а их распределение — симметричное. Тогда по ЦПТ $Y \in N(m_y, \sigma_y)$. Параметры распределения m_y, ${\sigma_y}^2 = D(Y)$ находятся в соответствии со случаем 1 (п. 8.2):

$$m_y = M(Y) = M\left(\sum_{i=1}^{48} X_i\right) = n \cdot m_0 = 48 \cdot \frac{1}{2} = 24;$$

$$D(Y) = D\left(\sum_{i=1}^{48} X_i\right) = n \cdot \sigma_0^2 = 48 \cdot \frac{1}{12} = 4.$$

3) Величина X, имеющая нормальное распределение с заданными математическим ожиданием и дисперсией, находится по формуле:

$$X = k_0 Y + k_1.$$

Тогда

$$M(X) = M(k_0 Y + k_1) = \left| \begin{array}{l} \text{по свойствам} \\ \text{мат. ожидания} \end{array} \right| = k_0 M(Y) + k_1;$$

$$D(X) = D(k_0 Y + k_1) = \left| \begin{array}{l} \text{по свойствам} \\ \text{дисперсии} \end{array} \right| = k_0^2 D(Y).$$

Приравнивая полученные формулы к известным значениям ($M(X) = 150$; $D(X) = 25$), получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} k_0 M(Y) + k_1 = 150; \\ k_0^2 D(Y) = 25. \end{cases}$$

Коэффициенты $M(Y)$ и $D(Y)$ при неизвестных k_0, k_1 уже найдены выше. Подставим их в систему:

$$\begin{cases} 24k_0 + k_1 = 150; \\ 4k_0^2 = 25. \end{cases}$$

Решив систему двух уравнений с двумя неизвестными (система нелинейная!), получаем $k_0 = 5/2$; $k_1 = 90$. Альтернативный вариант: $k_0 = -5/2$; $k_1 = 210$.

Ответы.

Неизвестные коэффициенты аппроксимации для случая $n = 48$ и заданных $M(X)$ и $D(X)$: $k_0 = 5/2$; $k_1 = 90$. Итоговая формула аппроксимации для $X \in N(150, 5)$ имеет вид

$$X = \frac{5}{2}\sum_{i=1}^{48} X_i + 90, \quad \text{где} \quad X_i \in I(0,1).$$

8.4. ВАРИАНТЫ ТИПОВОГО РАСЧЕТА

ТИПОВЫЕ ЗАДАНИЯ НА ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЫ

1. Имеется 500 идентичных технических устройств (ТУ), время безотказной работы T_i каждого из которых имеет экспоненциальное распределение ($\lambda = 0{,}2$), одинаковое для всех ТУ, и измеряется в часах. ТУ включены параллельно в состав блока и работают независимо. В случае отказа i-го ТУ происходит мгновенное и безотказное переключение на $(i + 1)$-е ТУ. Если отказали все ТУ, то блок выходит из строя. Выполнить грубую оценку вероятности того, что блок проработает до выхода из строя не менее 2400 ч. Каково среднее время работы отдельного ТУ?

2. Блок питания состоит из 40 элементов, заряд Q_i каждого из них имеет равномерное распределение от 0 до

10 А · ч (ампер-час) и не зависит от заряда других элементов. Какова вероятность того, что блок питания способен обеспечить ток 3 А в течение 70 ч? (Ввести случайную величину Q — суммарный заряд блока питания.)

3. Имеется 35 идентичных технических устройств (ТУ), время безотказной работы T_i каждого из них имеет нормальное распределение ($m = 100$ ч; $\sigma = 10$ ч), одинаковое для всех ТУ. ТУ включены параллельно в состав блока и работают независимо. В случае отказа i-го ТУ блок автоматически переключается на $(i + 1)$-е ТУ. Если отказали все ТУ, то блок выходит из строя. Какова вероятность того, что блок проработает до выхода из строя не менее 3200 ч?

4. Блок питания состоит из 64 элементов, заряд Q_i каждого из них, измеряемый в ампер-часах (А · ч), имеет «треугольное» распределение с плотностью вероятности

$$f(q) = \frac{q}{128} \quad \text{при} \quad 0 \le q \le 16$$

и не зависит от других элементов. Выполнить грубую оценку вероятности того, что блок питания способен обеспечить ток 13 А в течение 50 ч. Каков средний заряд отдельного элемента?

5. Железнодорожный состав включает 55 товарных вагонов. Масса каждого вагона в тоннах — случайная величина X_i с одним и тем же нормальным законом распределения, причем $m = 50$ т; $\sigma = 15$ т. Один локомотив может везти состав массой не более 2800 т, иначе необходимо прицеплять второй. Найти вероятность того, что одного локомотива не хватит для перевозки состава.

6. Состав содержит 25 вагонов, 20 платформ и 30 цистерн. Массы вагонов имеют распределение в диапазоне (45 ± 15) т, массы платформ — распределение в диапазоне (40 ± 18) т, массы цистерн — в диапазоне (60 ± 12) т. Локомотив способен везти состав массой не более 3700 т, иначе необходимо прицеплять второй. Какова вероятность того, что одного локомотива не хватит для перевозки состава?

7. В составе 90 вагонов, причем тормозное усилие в колодках каждого вагона A_i имеет нормальное распределение ($m = 28$ т; $\sigma = 2$ т). Для достаточной обеспеченности поезда тормозными средствами должно выполняться неравенство: $A \geq 2600$ т, где A — суммарное тормозное усилие во всех колодках. С какой вероятностью поезд достаточно обеспечен тормозными средствами?

8. Состав включает 70 полувагонов с углем. Масса каждого полувагона в тоннах — случайная величина X_i, имеющая нормальное распределение с параметрами: $m = 60$ т; $\sigma = 6$ т. Один электровоз может везти состав массой не более 4300 т, иначе необходимо прицеплять второй. Какова вероятность того, что второй электровоз не потребуется?

9. В кассе учреждения имеется 35 000 руб. В очереди стоят 20 человек ($n = 20$). Сумма X_i, которую надо выплатить отдельному человеку, — нормальная случайная величина с параметрами: $m = 1500$ руб., $\sigma = 400$ руб. Найти вероятность того, что имеющихся денег не хватит для выплаты всем стоящим в очереди.

10. Аппроксимацию нормальной случайной величины X на компьютере производят следующим образом: берут n независимых случайных величин $X_1, \ldots, X_n$, имеющих равномерное распределение в интервале (0, 1); строят величину

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i;$$

линейным преобразованием получают $X = aY + b$. Пусть $n = 12$. Найти коэффициенты a и b, если $MX = 5$; $DX = 81$. Выписать итоговую формулу аппроксимации для X.

11. В кассе института имеется 230 000 руб. В очереди стоят 30 старост групп ($n = 30$). Сумма X_i, которую надо выдать очередному старосте, — нормальная случайная величина с математическим ожиданием $m = 7500$ руб. и $\sigma = 800$ руб. Найти вероятность того, что имеющихся денег не хватит для расчета со всеми старостами.

12. В кассе университета имеется 110 000 руб. В очереди стоят сто сотрудников ($n = 100$). Сумма X_i, которая выплачивается одному сотруднику, — нормальная случайная величина с параметрами: $m = 1000$ руб., $\sigma = 200$ руб. Какова вероятность того, что все сотрудники получат причитающиеся им деньги?

13. Измерительная система состоит из 750 идентичных датчиков. Время безотказной работы i-го датчика T_i распределено экспоненциально (параметр $\lambda = 0{,}1$ одинаков для всех датчиков) и измеряется в часах. В случае отказа i-го датчика происходит мгновенное и безотказное переключение на следующий. Если отказали все датчики, то измерительная система выходит из строя. Выполнить грубую оценку вероятности того, что измерительная система проработает до выхода из строя от 7000 до 8000 ч. Каково среднее время работы отдельного датчика?

14. Батарея состоит из 100 аккумуляторов, заряд Q_i каждого из них имеет равномерное распределение от 50 до 200 А $\cdot$ ч и не зависит от заряда других аккумуляторов. Какова вероятность того, что батарея способна обеспечить ток 12 А в течение 1000 ч?

15. Измерительная система состоит из 40 одинаковых датчиков. Время безотказной работы i-го датчика T_i имеет нормальное распределение ($m = 50$ ч; $\sigma = 12$ ч), одинаковое для всех датчиков. В случае отказа i-го датчика происходит мгновенное и безотказное переключение на следующий. Если отказали все датчики, то измерительная система выходит из строя. С какой вероятностью измерительная система проработает до выхода из строя от 1500 до 2000 ч?

16. Батарея состоит из 70 аккумуляторов, заряд Q_i каждого из них, измеряемый в ампер-часах, имеет «треугольное» распределение с плотностью вероятности

$$f(q) = -\frac{q}{1250} + \frac{2}{25} \quad \text{при} \quad 50 \le q \le 100$$

и не зависит от других аккумуляторов. Выполнить грубую оценку вероятности того, что батарея способна обеспечить ток 24 А в течение 200 ч. Каков средний заряд отдельного аккумулятора?

17. Состав содержит 30 полувагонов, 22 вагона и 28 хоппер-дозаторов. Массы полувагонов распределены в диапазоне (60 ± 6) т, массы вагонов — в диапазоне (48 ± 12) т, а массы хоппер-дозаторов имеют распределение в диапазоне (56 ± 9) т. Один локомотив способен везти состав массой не более 4500 т, иначе необходим второй. Какова вероятность того, что второй локомотив не потребуется?

18. Состав содержит 80 вагонов, причем тормозное усилие в колодках каждого вагона A_i — случайная величина, имеющая равномерное распределение от 20 до 35 т. Для достаточной обеспеченности поезда тормозными средствами должно выполняться неравенство: $A \geq 25n - 50$, где A — суммарное тормозное усилие в колодках; n — число вагонов в поезде. С какой вероятностью поезд достаточно обеспечен тормозными средствами?

19. В составе имеется 64 цистерны с нефтью, причем масса каждой цистерны X_i имеет одно и то же нормальное распределение ($m = 65$ т; $\sigma = 1$ т). Один тепловоз может везти состав массой не более 4200 т, иначе необходимо прицеплять второй. Какова вероятность того, что потребуется кратная тяга?

20. Состав содержит 25 думпкаров, 40 цистерн и 30 полувагонов. Массы думпкаров распределены в диапазоне (58 ± 9) т, массы цистерн — в диапазоне (60 ± 6) т, массы полувагонов — в диапазоне (60 ± 9) т. Один локомотив может везти состав массой не более 5500 т, иначе прицепляется второй. Найти вероятность того, что кратная тяга не потребуется.

21. МЧС имеет в своем распоряжении 250 млн руб. для ликвидации последствий наводнения. Необходимо восстановить 37 объектов ($n = 37$). На каждый объект требуется затратить X_i средств ($MX_i = 7$ млн руб.; $\sigma_i = 2$ млн руб.). Предполагается нормальный закон распределения величин X_i. Какова вероятность того, что денег окажется достаточно для ликвидации последствий наводнения?

22. Студенческий профком имеет в своем распоряжении 70 000 руб. В течение года запланировано 25 мероприятий ($n = 25$), на каждое из них требуется затратить X_i средств ($MX_i = 3000$ руб.; $\sigma_i = 800$ руб.). Предполагается нормальный закон распределения величин X_i. Какова вероятность того, что денег хватит на все мероприятия?

23. Аппроксимацию величины X, имеющей нормальный закон распределения, производят так: берут n независимых случайных величин $X_1, \ldots, X_n$, распределенных равномерно на отрезке $[0, 1]$; строят величину

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i;$$

линейным преобразованием получают $X = a_0 Y + a_1$. Пусть $n = 18$. Найти коэффициенты a_0 и a_1, если $MX = -10$; $DX = 49$. Выписать итоговую формулу аппроксимации для X.

24. В кассе предприятия 262 000 руб. В очереди стоят 50 работников ($n = 50$). Сумма X_i, которую необходимо выплатить i-му работнику, — нормальная случайная величина с параметрами: $m = 5000$ руб., $\sigma = 700$ руб. Какова вероятность того, что имеющейся суммы не хватит для выплаты денег всем стоящим в очереди?

25. МПС для закупки систем оптико-волоконной связи требуется 630 млн руб. В то же время МПС обслуживает 125 крупных организаций ($n = 125$) и от каждой из них планирует получить X_i средств (X_i — случайная величина, имеющая равномерное распределение от 3 до 10 млн руб.). Какова вероятность того, что заработанных денег будет достаточно для закупки систем оптико-волоконной связи?

26. Нефтехранилище имеет 60 резервуаров, в каждом из которых количество нефти H_i имеет равномерное распределение от 30 до 230 т и не зависит от других резервуаров. Какова вероятность того, что общее количество нефти в хранилище — от 7500 до 8000 т?

27. Поезд содержит 100 вагонов. Масса X_i каждого вагона — случайная величина с нормальным законом распределения (математическое ожидание $m = MX_i = 65$ т; среднее квадратическое отклонение $\sigma = 0{,}9$ т). Локомотив может везти состав массой не более 6 600 т, иначе необходимо прицеплять второй локомотив. Найти вероятность того, что второй локомотив не потребуется.

28. Поезд содержит 100 товарных вагонов. Массы вагонов — независимые случайные величины с одинаковым нормальным законом распределения, причем $m = 40$ т, $\sigma = 10$ т. Электровоз может везти состав массой не более 4 200 т. Найти вероятность того, что потребуется прицеплять второй электровоз, т. е. использовать кратную тягу.

29. Аппроксимацию нормальной случайной величины X на компьютере производят так: берут n независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$, имеющих равномерное распределение на отрезке [0; 1]; строят величину

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i;$$

линейным преобразованием получают $X = k_0 Y + k_1$. Пусть $n = 60$. Найти коэффициенты k_0 и k_1, если $MX = 0$, $DX = 36$. Выписать итоговую формулу аппроксимации для X.

30. Имеется 200 одинаковых микросхем, включенных параллельно в состав каскада аппаратуры. Время безотказной работы i-й микросхемы имеет показательное распределение, одинаковое для всех микросхем ($\lambda = 0{,}08$), и измеряется в часах. При отказе i-й микросхемы каскад автоматически переключается на $(i + 1)$-ю микросхему. Если отказали все микросхемы, то каскад выходит из строя. Выполнить грубую оценку вероятности того, что каскад проработает более 2 300 ч. Каково среднее время работы отдельной микросхемы?

8.5. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ С УКАЗАНИЯМИ И ОТВЕТАМИ

1. Состав включает 80 цистерн. Масса X_i каждой цистерны имеет нормальное распределение с математическим ожиданием $m = MX_i = 70$ т и средним квадратическим отклонением $\sigma = 2$ т. Тепловоз может везти состав массой не более 5000 т. Найти вероятность того, что потребуется прицеплять второй тепловоз.

Указания. Следует ввести случайную величину $X = \{\text{масса состава}\}$; $X = \sum_{i=1}^{80} X_i$. Так как нормальные распределения симметричны, то суммирования 80 одинаково распределенных случайных величин X_i достаточно для получения закона, близкого к нормальному. При этом $MX = 5600$ т; $\sigma_x = 2\sqrt{80} \approx 17{,}89$ т.

Ответ. $P(\{X > 5000\}) = 1{,}0$, т. е. кратная тяга для составов, подобных описанному в условии задачи, обязательна.

2. В составе 80 полувагонов с лесом, причем масса каждого полувагона X_i имеет одно и то же нормальное распределение ($m = 44$ т; $\sigma = 5$ т). Один локомотив способен везти состав массой не более 3600 т, иначе необходимо прицеплять второй. Найти вероятность того, что одного локомотива хватит для перевозки.

Указания. Пусть случайная величина $X = \sum_{i=1}^{80} X_i$ — масса состава. Симметричность распределений X_i позволяет считать число полувагонов $n = 80$ достаточным для близости распределения X к нормальному. Полагаем, что

$$X \in N(m, \sigma),$$
$$\text{где } m = MX = 3520 \text{ т}; \;\; \sigma = \sigma(X) \approx 44{,}72.$$

Ответ. $P(\{X \le 3600\}) = 0{,}9632$. Таким образом, необходимость кратной тяги при перевозке составов с лесом маловероятна ($\approx 0{,}04$).

3. Состав содержит 45 бункерных полувагонов и 50 платформ. Массы полувагонов распределены в диапазоне (50 ± 12) т, а массы платформ — в диапазоне (40 ± 18) т. Один электровоз может везти состав массой не более 4300 т. Найти вероятность того, что потребуется кратная тяга.

Указания. Состав неоднороден: он состоит из вагонов двух типов. Предположим, что массы полувагонов X_i и массы платформ Y_j распределены нормально (но, конечно, по двум разным законам). Известно, что диапазон наиболее вероятных значений для $X \in N(m, \sigma)$ имеет вид $(m - 3\sigma, m + 3\sigma)$. Отсюда $m_x = 50$ т, $\sigma_x = 4$ т; $m_y = 40$ т, $\sigma_y = 6$ т. Масса состава

$$Z = \sum_{i=1}^{45} X_i + \sum_{j=1}^{50} Y_j$$

по ЦПТ распределена нормально, причем, считая массы отдельных вагонов независимыми, получаем

$$MZ = 4250 \text{ т}; \;\; DZ = 2520 \text{ т}^2; \;\; \sigma(Z) = 50,2 \text{ т}.$$

Ответ. $P(\{Z > 4300\}) = 0{,}1597$. Отсюда следует, что кратная тяга при описанных перевозках вполне возможна, ее вероятность равна приблизительно 0,16.

4. Имеется 50 одинаковых микросхем, включенных параллельно в состав блока. Время безотказной работы i-й микросхемы T_i имеет нормальное распределение, одинаковое для всех микросхем ($m = 200$ ч; $\sigma = 50$ ч). При отказе i-й микросхемы блок автоматически переключается на $(i + 1)$-ю микросхему. Если отказали все микросхемы, то блок выходит из строя. Какова вероятность того, что блок проработает менее 9700 ч?

Указания. Пусть T = {время безотказной работы блока}, тогда $T = \sum_{i=1}^{50} T_i$ и по ЦПТ распределено нормально с параметрами: $m = MT = 10\,000$ ч; $\sigma = \sigma(T) \approx 353{,}55$ ч. При вычислении DT предполагалась независимость работы микросхем.

Ответ. $P(\{T < 9700\}) = 0{,}198$. Приближенно можно считать, что блок проработает менее 9700 ч с вероятностью 0,2.

5. Корабль имеет 30 топливных цистерн. Количество мазута W_i в каждой из них имеет «треугольное» распределение с плотностью вероятности $f(w) = 0{,}005w$ при $0 \le w \le 20$, измеряется в тоннах и не зависит от загрузки остальных цистерн. Выполнить грубую оценку вероятности того, что запас мазута на корабле — от 380 до 450 т. Каково среднее количество мазута в одной цистерне?

Указания. Речь идет о грубой оценке, так как «треугольное» распределение не является симметричным, а число суммируемых случайных величин W_i $n = 30$ недостаточно велико. Поэтому предположение, что случайная величина $W = \sum_{i=1}^{30} W_i$ = {запас мазута на корабле} распределена нормально, является очень сомнительным. Тем не менее делаем именно такое предположение: $W \in N(m, \sigma)$.

Предварительно рассчитываются параметры:

$$MW_i = \int_0^{20} w f(w)dw \quad \text{и} \quad DW_i = \int_0^{20} w^2 f(w)dw - (MW_i)^2.$$

В итоге получаем $MW_i = 40/3 \approx 13{,}33$ т; $DW_i \approx 22{,}22$ т^2. Тогда $m = MW = 400$ т; $\sigma = \sqrt{DW} \approx 25{,}819$ т.

Ответы. $P(\{380 \le W \le 450\}) = 0{,}7544$ (грубая оценка). Среднее количество мазута в одной цистерне — величина $MW_i \approx 13{,}33$т.

6. В составе 120 вагонов, причем тормозное усилие в колодках каждого вагона A_i имеет нормальное распределение с параметрами: $m = 27$ т; $\sigma = 3$ т. Для достаточной обеспеченности поезда тормозными средствами должно выполняться неравенство: $A \ge 3200$ т, где A — суммарное тормозное усилие во всех колодках. Найти вероятность того, что поезд недостаточно обеспечен тормозными средствами.

Указания. $A = \sum_{i=1}^{120} A_i$ — суммарное тормозное усилие, которое по ЦПТ имеет нормальное распределение. Считая тормозные усилия отдельных вагонов независимыми, получаем

$$m = MA = 3240 \text{ т}; \quad \sigma = \sigma(A) = 3\sqrt{120} \approx 32{,}863 \text{ т}.$$

Ответ. $P(\{A < 3200\}) = 0{,}1118$. Расчеты показывают, что примерно в одиннадцати случаях из ста поезд недостаточно обеспечен тормозными средствами.

7. В составе 100 вагонов, причем тормозное усилие в колодках каждого вагона A_i — случайная величина, имеющая равномерное распределение от 22 до 38 т. Для достаточной обеспеченности поезда тормозными средствами должно выполняться неравенство: $A \ge 30n - 100$, где A — суммарное тормозное усилие в колодках; n — число вагонов в поезде. С какой вероятностью поезд достаточно обеспечен тормозными средствами?

Указания. Случайная величина $A = \sum_{i=1}^{100} A_i$ — суммарное тормозное усилие, причем величины $A_i \in I(22, 38)$, а симметричность равномерных распределений позволяет считать число вагонов $n = 100$ достаточным, чтобы $A \in N(m, \sigma)$. Предварительно вычисляются: $MA_i = 30$ т; $\sigma(A_i) = \sqrt{DA_i} \approx 4{,}619$ т. Предполагая независимость тормозных усилий A_i в колодках различных вагонов, получаем $m = MA = 3000$ т; $\sigma(A) \approx 46{,}19$ т.

Ответ. $P(\{A \ge 2900\}) = 0{,}9848$. Таким образом, с вероятностью $P \approx 0{,}985$ тормозных средств у поезда достаточно.

8. В кассе взаимопомощи имеется 17 000 руб. В сентябре в нее планируют обратиться за ссудой 25 человек. Пусть X_i — количество денег, требующееся i-му просителю, причем X_i имеет равномерное распределение от 300 до 600 руб. Какова вероятность того, что денег в кассе не хватит на всех обратившихся?

Указания. Параметры равномерного закона для случайной величины X_i, а именно: $MX_i = 450$ руб.; $DX_i = 7500$ руб.^{2}; $\sigma(X_i) \approx 86{,}603$ руб. — вычисляются в первую очередь. Вводится случайная величина $X = \sum_{i=1}^{25} X_i = \{$требуемая для выдачи из кассы сумма$\}$. Ввиду симметричности распределений случайных величин $X_i \in I(300, 600)$, а также предполагаемой независимости X_i можно считать, что величина $X \in N(m, \sigma)$. Однако погрешность вычислений может превысить допустимый уровень, так как $1/n = 1/25 = 0{,}04 > 0{,}02$. Далее определяются: $m = MX = 11\,250$ руб.; $\sigma = \sigma(X) \approx 433{,}02$ руб.

Ответ. $P(\{X > 17\,000\}) = 0$, т. е. денег наверняка хватит.

9. Пассажирский поезд состоит из 25 вагонов. Время досмотра каждого вагона на таможне T_i имеет нормальное распределение ($m = 10$ мин, $\sigma = 2$ мин). При проверке таможенники последовательно переходят от вагона к вагону. Какова вероятность того, что время стоянки поезда на границе окажется от четырех до пяти часов?

Указания. Пусть случайная величина $T = \sum_{i=1}^{25} T_i$ — суммарное время досмотра (или время стоянки поезда на границе). По ЦПТ время T распределено нормально. Параметры $m = MT = 250$ мин и $\sigma = \sigma(T) = 2\sqrt{25} = 10$ мин вычисляются исходя из предположения независимости величин T_i. В этой задаче, как и в предыдущей, возникают некоторые сомнения по поводу погрешности применения ЦПТ (число слагаемых $n = 25$ маловато для нормальности суммы).

Ответ. $P(\{240 \le T \le 300\}) = 0{,}8413$. Весьма вероятно, что бедным пассажирам придется ждать отправления поезда именно от четырех до пяти часов. Однако ждать больше пяти часов им наверняка не придется! Почему — проверьте самостоятельно.

10. Железнодорожный паром способен перевозить 100 грузовых вагонов, однако если их суммарная масса превышает 6600 т, то в балластные цистерны корабля по инструкции положено закачать забортную воду для сохранения остойчивости. Пусть масса X_i каждого вагона — случайная величина с нормальным законом распределения ($m = MX_i = 65$ т; $\sigma = \sigma(X_i) = 0{,}9$ т). Найти вероятность того, что балластные цистерны заполнять не потребуется.

Указания. Введем случайную величину $X = \sum_{i=1}^{100} X_i$ — суммарную массу перевозимых вагонов. Считая массы X_i независимыми и применяя ЦПТ, получаем $MX = 6500$ т; $\sigma(X) = 9$ т, причем X распределена нормально.

Ответ. $P(\{X \le 6600\}) = 1{,}0$, т. е. при таких перевозках закачивать водяной балласт парому наверняка не придется.

11. Железнодорожный паром способен перевозить 100 товарных вагонов, однако если их суммарная масса превосходит 4200 т, то скорость движения судна ограничивается двенадцатью узлами в целях безопасности судовождения. Массы вагонов — независимые случайные величины с одинаковым нормальным законом распределения, причем $m = 40$ т; $\sigma = 10$ т. Какова вероятность того, что скорость парома действительно придется ограничить?

Указания. Массы вагонов обозначим Y_j, $j = 1, \ldots, 100$. Введем случайную величину $Y = \sum_{j=1}^{100} Y_j$ (суммарная масса перевозимых вагонов). Условия ЦПТ выполнены, поэтому получаем $Y \in N(m, \sigma)$, где $m = MY = 4000$ т; $\sigma = \sigma(Y) =$ $= 100$ т.

Ответ. $P(\{Y > 4200\}) = 0{,}0228$. Таким образом, лишь примерно в двух случаях из ста скорость парома по инструкции потребуется ограничить.

12. Пассажирский поезд состоит из 25 вагонов. Время T_i обработки каждого вагона бригадой уборщиков имеет нормальное распределение ($m = 20$ мин; $\sigma = 5$ мин). При обработке состава уборщики последовательно переходят от вагона к вагону, делая перерыв после двух часов работы. Какова вероятность того, что всего у бригады будет четыре перерыва?

Указания. Придется предположить, что уборку выполняют педанты, прекращающие работу ровно через два часа и делающие перерыв, даже если осталось обработать одно последнее купе. В таких условиях наличие четырех перерывов соответствует объему работы, на который требуется более восьми, но менее десяти часов.

Введем случайную величину $T = \sum_{i=1}^{25} T_i$ — суммарное время на уборку состава в минутах. Считая величины T_i независимыми и применяя ЦПТ, получаем $MT = 500$ мин; $\sigma(T) = 25$ мин, причем T имеет нормальное распределение.

Ответ. $P(\{480 < T < 600\}) = 0{,}7881$. С вероятностью примерно 0,79 у бригады действительно будет четыре перерыва в работе. Кстати, с вероятностью примерно 0,21 перерывов будет три, а пять перерывов — практически невозможное событие (убедитесь сами!).

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

Вариант 1.

1. Используя операции дополнения, сложения и умножения над событиями A_k = {k-й элемент проводит ток}, записать событие B = {Схема проводит ток} и противоположное ему событие (рис. 59).

2. Число в клетке (рис. 60) указывает на количество способов, которыми ее можно пройти.

а) Сколькими способами можно пройти из A в B, если $x = 3$; $x = 4$?

б) Из A в B можно пройти 23 800 способами; найти число x.

3. Полная колода карт (52 листа) делится случайным образом на две равные пачки. Найти вероятность того, что в каждой из пачек окажется по два короля.

4. В первом ящике 3 стандартных и 1 нестандартная деталь, во втором — 1 стандартная и 3 нестандартных детали, в третьем — только 3 нестандартные. Из наугад выбранного ящика взята одна деталь, которая оказалась нестандартной. Из какого ящика вероятнее всего она извлечена?

5. Имеются 100 станков равной мощности, работающих независимо друг от друга в одинаковом режиме в те-

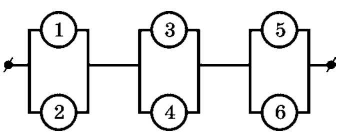


Рис. 59

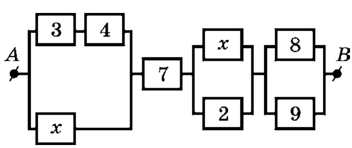


Рис. 60

чение 4/5 рабочей смены. Какова вероятность того, что в произвольный момент времени окажутся включенными:

а) ровно 90 станков;

б) от 70 до 86 станков?

6. Вероятность того, что проба руды содержит необходимое количество железа, равна 0,085. Исследованию подвергают 4 пробы руды. Найти закон распределения числа проб с необходимым содержанием железа, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ и $F(x)$, начальные и центральные моменты до четвертого порядка включительно.

7. Дана функция распределения $F(x)$ случайной величины X. Найти $f(x)$, построить графики $f(x)$ и $F(x)$, вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(\alpha < X < \beta)$, начальные и центральные моменты до четвертого порядка включительно.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ \sin x, & 0<x\le\pi/2, \\ 1, & x>\pi/2; \end{cases} \qquad \alpha=1;\ \ \beta=1{,}5.$$

Вариант 2.

1. Используя операции дополнения, сложения и умножения над событиями $A_k = \{k\text{-й элемент проводит ток}\}$, записать событие $B = \{\text{Схема проводит ток}\}$ и противоположное ему событие (рис. 61).

2. Число в клетке (рис. 62) указывает на количество способов, которыми ее можно пройти.

а) Сколькими способами можно пройти из A в B, если $x = 3$; $x = 4$?

б) Из A в B можно пройти 7360 способами; найти число x.

3. В розыгрыше первенства по волейболу участвуют 20 команд, из которых случайным образом формируются две группы по 10 команд. Среди участников соревнований имеются шесть команд экстра-класса. Найти

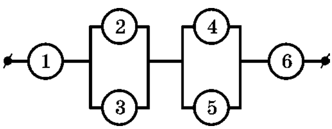


Рис. 61

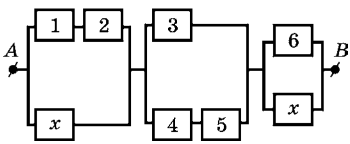


Рис. 62

вероятность того, что в одну группу попадут все команды экстра-класса.

4. Три оператора ЭВМ производят соответственно 25%, 35% и 40% всей работы, допуская при этом погрешности с вероятностями $0{,}01\%$, $0{,}03\%$; $0{,}02\%$ соответственно. Одна из программ содержит погрешность. Какой оператор вероятнее всего ее допустил?

5. Вероятность попадания в мишень равна $3/10$. Какова вероятность того, что при 30 выстрелах произойдет:

а) ровно 8 попаданий;

б) не более половины попаданий?

6. Игральная кость брошена 4 раза. Найти закон распределения числа появления одного очка, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ и $F(x)$, начальные и центральные моменты до четвертого порядка включительно.

7. Дана функция распределения $F(x)$ случайной величины X. Найти $f(x)$, построить графики $f(x)$ и $F(x)$, вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(\alpha < X < \beta)$, начальные и центральные моменты до четвертого порядка включительно.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \sin(x/2), & 0 < x \le \pi, \\ 1, & x > \pi; \qquad \alpha = 0{,}1; \quad \beta = 0{,}45. \end{cases}$$

Вариант 3.

1. Используя операции дополнения, сложения и умножения над событиями $A_k = \{k$-й элемент проводит ток$\}$, записать событие $B = \{$Схема проводит ток$\}$ и противоположное ему событие (рис. 63).

2. Число в клетке (рис. 64) указывает на количество способов, которыми ее можно пройти.

а) Сколькими способами можно пройти из A в B, если $x = 3$; $x = 4$?

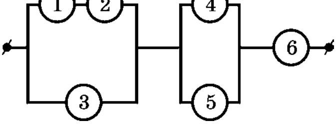


Рис. 63

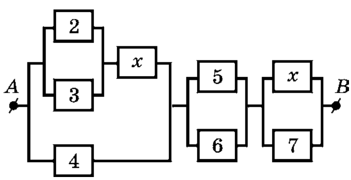


Рис. 64

б) Из A в B можно пройти 10 098 способами; найти число x.

3. Из одиннадцати билетов выигрышными являются три. Найти вероятность того, что среди пяти приобретенных билетов окажется один выигрышный.

4. На склад поступают изделия, изготовленные тремя заводами. Первый и второй производят одинаковое количество продукции, а третий — вдвое больше первого. Вероятность того, что изделие стандартное, для первого, второго и третьего заводов равна 4/5, 3/5 и 7/10 соответственно. Наугад взятое со склада изделие оказалось стандартным. Какова вероятность того, что оно изготовлено на первом заводе?

5. Найти вероятность того, что из 100 случайных прохожих:

а) 70 женщин;

б) от 25 до 60 мужчин, если вероятность встретить мужчину равна 2/5?

6. Производятся 4 выстрела, вероятность попадания в цель при каждом из которых равна 0,3. Найти закон распределения для числа попаданий, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ и $F(x)$, начальные и центральные моменты до четвертого порядка включительно.

7. Дана функция распределения $F(x)$ случайной величины X. Найти $f(x)$, построить графики $f(x)$ и $F(x)$, вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(\alpha < X < \beta)$, начальные и центральные моменты до четвертого порядка включительно.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0,\\ \sin(2x), & 0<x\le \pi/4,\\ 1, & x>\pi/4; \end{cases} \qquad \alpha=0{,}2;\ \ \beta=0{,}6.$$

Вариант 4.

1. Используя операции дополнения, сложения и умножения над событиями A_k = {k-й элемент проводит ток}, записать событие B = {Схема проводит ток} и противоположное ему событие (см. рис. 65).

2. Число в клетке (см. рис. 66) указывает на количество способов, которыми ее можно пройти.

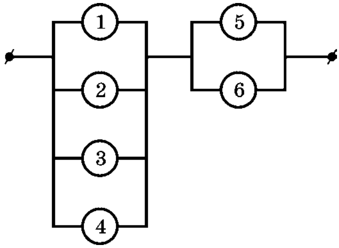


Рис. 65

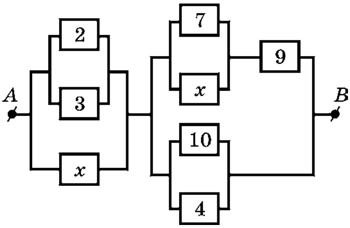


Рис. 66

а) Сколькими способами можно пройти из A в B, если $x = 3$; $x = 4$?

б) Из A в B можно пройти 4240 способами; найти число x.

3. Для уменьшения общего количества игр 32 команды разбиваются случайным образом на две равные группы. Найти вероятность того, что три наиболее сильные команды попадут в одну группу.

4. Для аварийной сигнализации используются три типа сигнализаторов, которые срабатывают с вероятностями, равными 4/5, 9/10 и 3/8 для каждого типа. Вероятность того, что устройство снабжено сигнализатором, равна 3/7, 2/7, 2/7 соответственно. Получен сигнал об аварии. Сигнализатором какого типа, вероятнее всего, было снабжено устройство?

5. В каждом из 700 независимых испытаний событие A происходит с вероятностью 7/20. Найти вероятность того, что событие A произойдет:

а) ровно 270 раз;

б) от 230 до 270 раз.

6. Сигнал передается 4 раза, вероятность его приема при каждой попытке равна 0,8. Найти закон распределения числа приемов сигнала, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ и $F(x)$, начальные и центральные моменты до четвертого порядка включительно.

7. Дана функция распределения $F(x)$ случайной величины X. Найти $f(x)$, построить графики $f(x)$ и $F(x)$, вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(\alpha < X < \beta)$, начальные и центральные моменты до четвертого порядка включительно.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0,\\ 2\sin x, & 0<x\le \pi/6,\\ 1, & x>\pi/6; \end{cases} \qquad \alpha=0{,}2;\ \beta=0{,}4.$$

Вариант 5.

1. Используя операции дополнения, сложения и умножения над событиями $A_k = \{k$-й элемент проводит ток$\}$, записать событие $B = \{$Схема проводит ток$\}$ и противоположное ему событие (рис. 67).

2. Число в клетке (рис. 68) указывает на количество способов, которыми ее можно пройти.

а) Сколькими способами можно пройти из A в B, если $x = 3$; $x = 4$?

б) Из A в B можно пройти 6417 способами; найти число x.

3. В зале, насчитывающем 50 мест, случайным образом занимают места 25 человек. Найти вероятность того, что занятыми окажутся определенные 15 мест.

4. В некотором городе распространяются три вида лотерейных билетов: желтые, красные и зеленые. Желтые билеты купили 25% жителей, красные — 40%, зеленые — остальные. Первые выигрывают с вероятностью 0,002, вторые — 0,0015, третьи — 0,0025. Один из жителей города выиграл. Какого вида билет вероятнее всего он купил?

5. В урне 80 белых и 20 черных шаров. Какова вероятность того, что при 60 независимых извлечениях одного шара (с возвращением) появятся:

а) 30 шаров белого цвета;

б) не более 30 шаров черного цвета?

6. Вероятность содержания опасной концентрации нитратов в каждой партии овощей равна 0,35. Исследуются

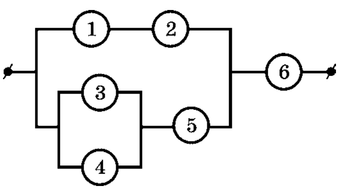


Рис. 67

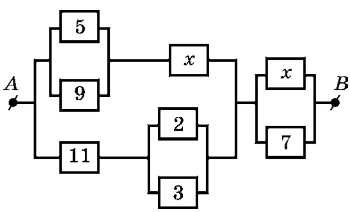


Рис. 68

4 партии. Найти закон распределения числа партий с опасным содержанием нитратов, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ и $F(x)$, начальные и центральные моменты до четвертого порядка включительно.

7. Дана функция распределения $F(x)$ случайной величины X. Найти $f(x)$, построить графики $f(x)$ и $F(x)$, вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(\alpha < X < \beta)$, начальные и центральные моменты до четвертого порядка включительно.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0,\\ 2\sin(x/2), & 0<x\le \pi/3,\\ 1, & x>\pi/3; \end{cases} \qquad \alpha=0{,}3;\ \beta=0{,}95.$$

Вариант 6.

1. Используя операции дополнения, сложения и умножения над событиями A_k = {k-й элемент проводит ток}, записать событие B = {Схема проводит ток} и противоположное ему событие (рис. 69).

2. Число в клетке (рис. 70) указывает на количество способов, которыми ее можно пройти.

а) Сколькими способами можно пройти из A в B, если $x = 3$; $x = 4$?

б) Из A в B можно пройти 8284 способами; найти число x.

3. Из урны, содержащей 12 белых шаров, 5 черных и 7 красных, случайным образом без возвращения извлекаются три шара. Найти вероятность того, что среди них окажутся два одинаковых шара.

4. Рабочий обслуживает три станка, обрабатывающих однотипные детали. Производительность первого станка в три раза выше производительности второго и в полтора

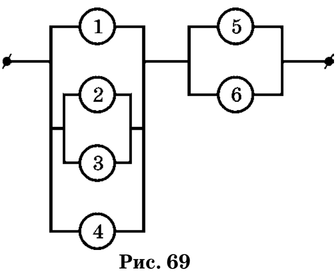


Рис. 69

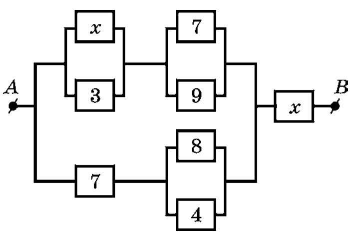


Рис. 70

раза выше производительности третьего. Эти станки производят 2%, 4% и 1% брака соответственно. Наугад выбранная деталь оказалась бракованной. На каком станке вероятнее всего она изготовлена?

5. Пара одинаковых игральных костей бросается 50 раз. Какова вероятность того, что сумма очков, равная 9, появится:

а) ровно 10 раз;

б) не более 10 раз?

6. Из четырех ключей только один подходит к замку. Найти закон распределения числа попыток открыть замок (каждый ключ используется только раз), $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ и $F(x)$, начальные и центральные моменты до четвертого порядка включительно.

7. Дана функция распределения $F(x)$ случайной величины X. Найти $f(x)$, построить графики $f(x)$ и $F(x)$, вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(\alpha < X < \beta)$, начальные и центральные моменты до четвертого порядка включительно.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0,\\ 2\sin(2x), & 0<x\le \pi/12,\\ 1, & x>\pi/12; \end{cases} \qquad \alpha=0{,}1;\ \beta=0{,}2.$$

Вариант 7.

1. Используя операции дополнения, сложения и умножения над событиями $A_k = \{k\text{-й элемент проводит ток}\}$, записать событие $B = \{\text{Схема проводит ток}\}$ и противоположное ему событие (рис. 71).

2. Число в клетке (рис. 72) указывает на количество способов, которыми ее можно пройти.

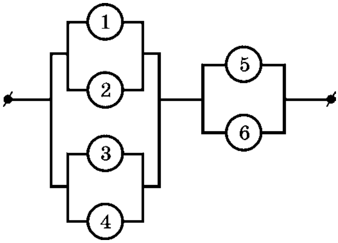


Рис. 71

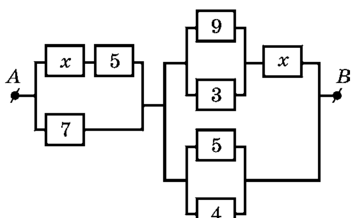


Рис. 72

а) Сколькими способами можно пройти из A в B, если $x = 3$; $x = 4$?

б) Из A в B можно пройти 6084 способами; найти число x.

3. Имеются 5 билетов стоимостью по 100 руб., 3 билета по 300 руб. и 2 билета по 500 руб. Случайным образом приобретаются три билета. Найти вероятность того, что все они стоят 700 руб.

4. В партии приемников имеются: 5 — первого класса, 7 — второго класса и 3 — третьего класса. Вероятность проработать определенное число часов для этих приемников равна соответственно 2/5, 1/5, 1/10. Наудачу выбранный приемник проработал заданное число часов. Какова вероятность того, что это был приемник первого класса?

5. Вероятность выхода из строя конденсатора за гарантийный срок службы равна 1/5. Какова вероятность того, что за гарантийный срок из 100 независимо работающих конденсаторов из строя выйдут:

а) ровно 30 штук;

б) от 14 до 26 штук?

6. Вероятность опасной концентрации угарного газа в погребе равна 0,05. Проверке подвергаются 4 погреба. Найти закон распределения числа погребов с опасным содержанием угарного газа, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ и $F(x)$, начальные и центральные моменты до четвертого порядка включительно.

7. Дана функция распределения $F(x)$ случайной величины X. Найти $f(x)$, построить графики $f(x)$ и $F(x)$, вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(\alpha < X < \beta)$, начальные и центральные моменты до четвертого порядка включительно.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \sqrt{2}\sin x, & 0 < x \le \pi/4, \\ 1, & x > \pi/4; \end{cases} \qquad \alpha = 0{,}25; \quad \beta = 0{,}63.$$

Вариант 8.

1. Используя операции дополнения, сложения и умножения над событиями $A_k = \{k$-й элемент проводит ток$\}$, записать событие $B = \{$Схема проводит ток$\}$ и противоположное ему событие (рис. 73).

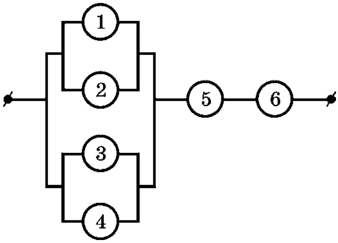


Рис. 73

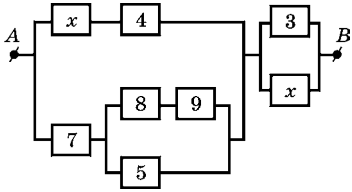


Рис. 74

2. Число в клетке (рис. 74) указывает на количество способов, которыми ее можно пройти.

а) Сколькими способами можно пройти из A в B, если $x = 3$; $x = 4$?

б) Из A в B можно пройти 8162 способами; найти число x.

3. Неполная колода карт (36 листов) случайным образом делится на две равные пачки. Найти вероятность того, что четыре определенные карты попадут в одну пачку.

4. Имеются три одинаковых ящика с деталями. В первом — 8 стандартных и 2 нестандартных детали, во втором — 5 стандартных и 3 нестандартных, в третьем — 7 стандартных и 3 нестандартных. Из каждого ящика наугад достают по одной детали и из этих трех случайным образом выбирают одну. Деталь оказалась стандартной. Из какого ящика вероятнее всего она была извлечена?

5. Вероятность получения выигрышного лотерейного билета составляет $1/10$. Какова вероятность того, что из 500 билетов:

а) 100 выигрышных;

б) от 48 до 55 выигрышных?

6. Производится 4 выстрела, вероятность попадания в цель при каждом из которых равна 0,59. Найти закон распределения числа попаданий, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ и $F(x)$, начальные и центральные моменты до четвертого порядка включительно.

7. Дана функция распределения $F(x)$ случайной величины X. Найти $f(x)$, построить графики $f(x)$ и $F(x)$, вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(\alpha < X < \beta)$, начальные и центральные моменты до четвертого порядка включительно.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \sqrt{2}\sin(2x), & 0 < x \le \pi/8, \\ 1, & x > \pi/8; \end{cases} \qquad \alpha = 0{,}2; \ \ \beta = 0{,}3.$$

Вариант 9.

1. Используя операции дополнения, сложения и умножения над событиями $A_k = \{k$-й элемент проводит ток$\}$, записать событие $B = \{$Схема проводит ток$\}$ и противоположное ему событие (рис. 75).

2. Число в клетке (рис. 76) указывает на количество способов, которыми ее можно пройти.

а) Сколькими способами можно пройти из A в B, если $x = 3$; $x = 4$?

б) Из A в B можно пройти 9738 способами; найти число x.

3. В зале, насчитывающем 20 мест, случайным образом занимают места 10 человек. Найти вероятность того, что будут заняты определенные 7 мест.

4. Имеются три сорта пшеницы: 3 кг первого сорта, 2 — второго и 1 — третьего. Всхожими являются 70% зерна первого сорта, 80% — второго и 90% — третьего. Все зерно было ссыпано в один мешок. Наудачу взятое зернышко проросло. Какова вероятность того, что оно первого сорта?

5. Испытанию подвергается партия однотипных радиодеталей в количестве 100 штук, для каждой из них веро-

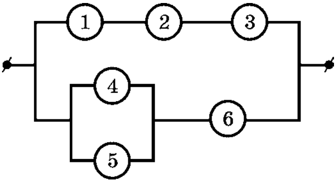


Рис. 75

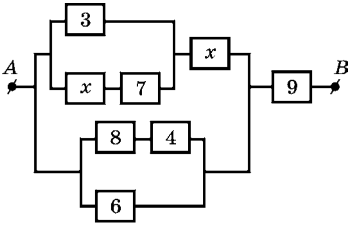


Рис. 76

ятность выхода из строя равна 2/25. Какова вероятность того, что во время испытания выйдут из строя:

а) ровно 10 деталей;

б) от 5 до 50 деталей?

6. Четыре студента сдают экзамен. Вероятность успеха для каждого из них равна соответственно 0,95; 0,6; 0,75; 0,5. Найти закон распределения числа студентов, успешно сдавших экзамен, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ и $F(x)$, начальные и центральные моменты до четвертого порядка включительно.

7. Дана функция распределения $F(x)$ случайной величины X. Найти $f(x)$, построить графики $f(x)$ и $F(x)$, вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(\alpha < X < \beta)$, начальные и центральные моменты до четвертого порядка включительно.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0,\\ \sqrt{2}\sin(x/2), & 0<x\le\pi/2,\\ 1, & x>\pi/2; \end{cases} \qquad \alpha=0{,}45;\ \beta=1{,}1.$$

Вариант 10.

1. Используя операции дополнения, сложения и умножения над событиями A_k = {k-й элемент проводит ток}, записать событие B = {Схема проводит ток} и противоположное ему событие (рис. 77).

2. Число в клетке (рис. 78) указывает на количество способов, которыми ее можно пройти.

а) Сколькими способами можно пройти из A в B, если $x = 3$; $x = 4$?

б) Из A в B можно пройти 4200 способами; найти число x.

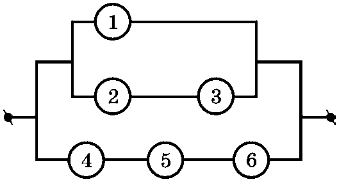


Рис. 77

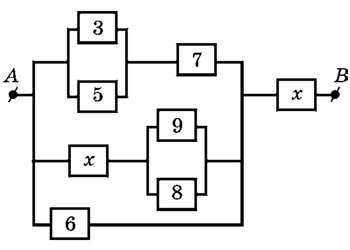


Рис. 78

3. Из 19 билетов выигрышными являются 2. Найти вероятность того, что среди случайным образом выбранных 8 билетов 2 выигрышных.

4. Детали, выпускаемые мастерской, с вероятностями 1/5, 3/10 и 1/2 поступают первому, второму и третьему контролеру соответственно. Вероятности обнаружить брак для каждого из них равны 7/10, 3/10 и 1/2 соответственно. При проверке был обнаружен брак. Какой из контролеров вероятнее всего его обнаружил?

5. Монета подбрасывается 200 раз. Какова вероятность того, что герб появится:

а) ровно 50 раз;

б) от 35 до 105 раз?

6. В лотерее на 100 билетов разыгрываются две вещи, стоимость которых 500 и 1000 руб. Найти закон распределения суммы выигрыша для лица, имеющего два билета, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ и $F(x)$, начальные и центральные моменты до четвертого порядка включительно.

7. Дана функция распределения $F(x)$ случайной величины X. Найти $f(x)$, построить графики $f(x)$ и $F(x)$, вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(\alpha < X < \beta)$, начальные и центральные моменты до четвертого порядка включительно.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 2/\sqrt{3} \cdot \sin x, & 0 < x \le \pi/3, \\ 1, & x > \pi/3; \end{cases} \qquad \alpha = 0{,}3; \;\; \beta = 0{,}7.$$

Вариант 11.

1. Используя операции дополнения, сложения и умножения над событиями $A_k = \{k\text{-й элемент проводит ток}\}$, записать событие $B = \{\text{Схема проводит ток}\}$ и противоположное ему событие (рис. 79).

2. Число в клетке (рис. 80) указывает на количество способов, которыми ее можно пройти.

а) Сколькими способами можно пройти из A в B, если $x = 3$; $x = 4$?

б) Из A в B можно пройти 10 080 способами; найти число x.

3. В розыгрыше первенства по хоккею участвуют 14 команд, из которых случайным образом формируются две

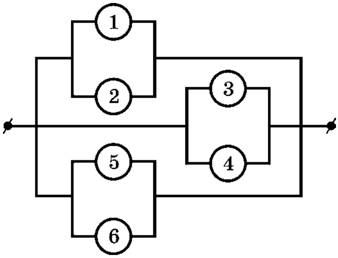


Рис. 79

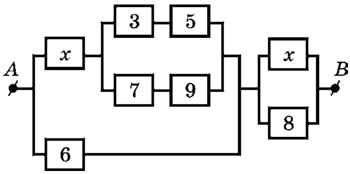


Рис. 80

равные группы. Среди участников соревнований имеются 5 команд экстра-класса. Найти вероятность того, что все команды экстра-класса не попадут в одну группу.

4. Студент может заболеть гриппом в результате переохлаждения с вероятностью 2/5, после контакта с больным — с вероятностью 7/10, после прививки — с вероятностью 1/20. Известно, что вероятность переохлаждения, контакта с больным, получения прививки равна соответственно 2/5, 9/20 и 3/20. Студент заболел гриппом. Какова наиболее вероятная причина?

5. Вероятность наступления события в некотором эксперименте равна 3/5. Какова вероятность того, что в 60 экспериментах это событие произойдет:

а) в половине случаев;

б) от 30 до 55 раз?

6. Производится четыре броска мяча в корзину, вероятность попадания при каждом из них равна 0,67. Найти закон распределения числа промахов, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ и $F(x)$, начальные и центральные моменты до четвертого порядка включительно.

7. Дана функция распределения $F(x)$ случайной величины X. Найти $f(x)$, построить графики $f(x)$ и $F(x)$, вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(\alpha < X < \beta)$, начальные и центральные моменты до четвертого порядка включительно.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 2/\sqrt{3} \cdot \sin(2x), & 0 < x \le \pi/6, \\ 1, & x > \pi/6; \end{cases} \qquad \alpha = 0{,}1; \quad \beta = 0{,}43.$$

Вариант 12.

1. Используя операции дополнения, сложения и умножения над событиями $A_k = \{k\text{-й элемент проводит ток}\}$, записать событие $B = \{\text{Схема проводит ток}\}$ и противоположное ему событие (рис. 81).

2. Число в клетке (рис. 82) указывает на количество способов, которыми ее можно пройти.

а) Сколькими способами можно пройти из A в B, если $x = 3$; $x = 4$?

б) Из A в B можно пройти 12 144 способами; найти число x.

3. Имеются 5 билетов стоимостью по 100 руб., 3 билета по 300 руб. и 2 билета по 500 руб. Случайным образом выбираются три билета. Найти вероятность того, что хотя бы два билета имеют одинаковую стоимость.

4. Прибор может находиться только в трех состояниях: нормальном, форсированном и аварийном. Нормальное состояние наблюдается в 85% случаев, форсированное — в 12%. Вероятность разрушения прибора при нормальном состоянии равна $0{,}07$, при форсированном — $0{,}3$ и при аварийном — $0{,}8$. Прибор был разрушен. В каком состоянии, вероятнее всего, это случилось?

5. В каждом из 500 независимых испытаний событие A происходит с вероятностью $2/5$. Какова вероятность того, что событие A произойдет:

а) ровно 220 раз;

б) от 180 до 240 раз?

6. Производится не более 6 выстрелов до первого попадания в цель. Вероятность промаха при каждом выстреле равна 0,39. Найти закон распределения числа потраченных патронов, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ и $F(x)$, начальные и центральные моменты до четвертого порядка включительно.

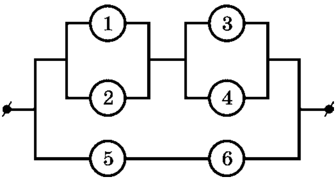


Рис. 81

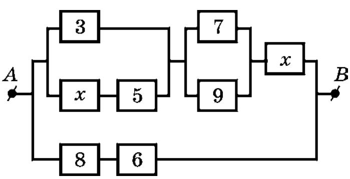


Рис. 82

7. Дана функция распределения $F(x)$ случайной величины X. Найти $f(x)$, построить графики $f(x)$ и $F(x)$, вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(\alpha < X < \beta)$, начальные и центральные моменты до четвертого порядка включительно.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0,\\ 2/\sqrt{3}\cdot\sin(x/2), & 0<x\le 2\pi/3,\\ 1, & x>2\pi/3; \end{cases} \qquad \alpha=0{,}4;\ \beta=1{,}2.$$

Вариант 13.

1. Используя операции дополнения, сложения и умножения над событиями $A_k = \{k$-й элемент проводит ток$\}$, записать событие $B = \{$Схема проводит ток$\}$ и противоположное ему событие (рис. 83).

2. Число в клетке (рис. 84) указывает на количество способов, которыми ее можно пройти.

а) Сколькими способами можно пройти из A в B, если $x = 3$; $x = 4$?

б) Из A в B можно пройти 8844 способами; найти число x.

3. Из урны, содержащей 3 белых, 2 черных и 5 красных шаров, случайным образом без возвращения извлекаются три шара. Найти вероятность того, что среди них окажутся хотя бы два одинаковых.

4. Пассажир может обратиться за билетом в одну из трех касс автовокзала. Вероятность обращения в каждую из касс зависит от ее расположения и составляет соответственно 1/2, 3/10 и 1/5. Вероятность того, что к моменту прихода пассажира в первой, второй и третьей кассах закончатся билеты, равна 2/5, 1/5 и 1/10 соответственно.

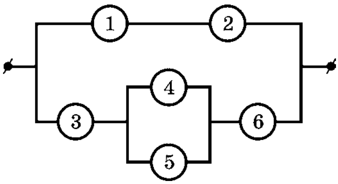


Рис. 83

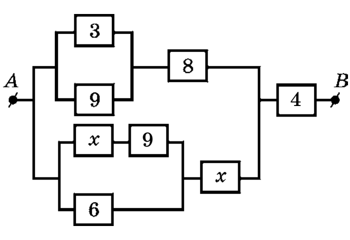


Рис. 84

Пассажир уехал вовремя. Какова вероятность того, что билет был куплен в первой кассе?

5. Имеются 110 станков, работающих независимо друг от друга, причем каждый из них оказывается включенным с вероятностью 4/5. Какова вероятность того, что в произвольный момент времени окажутся включенными:

а) ровно 70 станков;

б) от 75 до 88 станков?

6. В лотерее на 100 билетов разыгрываются четыре вещи, стоимости которых 100, 250, 300, 750 рублей. Найти закон распределения суммы выигрыша для лица, имеющего один билет, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ и $F(x)$, начальные и центральные моменты до четвертого порядка включительно.

7. Дана функция распределения $F(x)$ случайной величины X. Найти $f(x)$, построить графики $f(x)$ и $F(x)$, вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(\alpha < X < \beta)$, начальные и центральные моменты до четвертого порядка включительно.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<\pi/2, \\ -\cos x, & \pi/2 \le x \le \pi, \\ 1, & x>\pi; \quad \alpha=1{,}7; \quad \beta=3{,}05. \end{cases}$$

Вариант 14.

1. Используя операции дополнения, сложения и умножения над событиями $A_k = \{k$-й элемент проводит ток$\}$, записать событие $B = \{$Схема проводит ток$\}$ и противоположное ему событие (рис. 85).

2. Число в клетке (рис. 86) указывает на количество способов, которыми ее можно пройти.

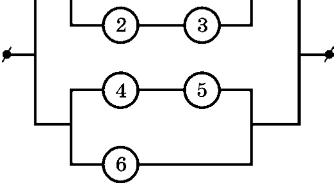


Рис. 85

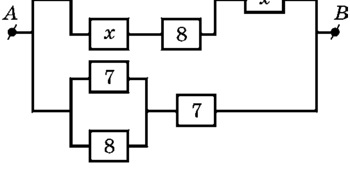


Рис. 86

а) Сколькими способами можно пройти из A в B, если $x = 3$; $x = 4$?

б) Из A в B можно пройти 1808 способами; найти число x.

3. В группе из 25 студентов есть 3 человека, которые занимаются боксом, 10 человек — футболом, 5 человек — спортивной гимнастикой, остальные посещают только занятия физкультурой. Найти вероятность того, что среди трех случайным образом выбранных студентов есть хотя бы два, занимающихся одним видом спорта.

4. В скачках участвуют три лошади. Первая приходит первой с вероятностью 3/5, вторая — с вероятностью 2/5 и третья — с вероятностью 1/2. На первую лошадь ставят 30% зрителей, на вторую — 18% , на третью — остальные. Зритель, сидящий перед вами, выиграл. На какую лошадь вероятнее всего он делал ставку?

5. Вероятность переключения передач на каждом километре 243-километровой трассы равна 1/4. Какова вероятность того, что передача будет переключена:

а) ровно 70 раз;

б) от 5 до 65 раз?

6. Монета бросается 4 раза. Найти закон распределения числа выпавших гербов, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ и $F(x)$, начальные и центральные моменты до четвертого порядка включительно.

7. Дана функция распределения $F(x)$ случайной величины X. Найти $f(x)$, построить графики $f(x)$ и $F(x)$, вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(\alpha < X < \beta)$, начальные и центральные моменты до четвертого порядка включительно.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \geq \pi/4, \\ -\cos(2x), & \pi/4 < x \leq \pi/2, \\ 1, & x > \pi/2; \end{cases} \qquad \alpha = 0{,}9; \quad \beta = 1{,}4.$$

Вариант 15.

1. Используя операции дополнения, сложения и умножения над событиями $A_k = \{k$-й элемент проводит ток$\}$, записать событие $B = \{$Схема проводит ток$\}$ и противоположное ему событие (см. рис. 87).

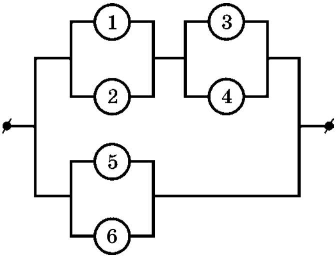


Рис. 87

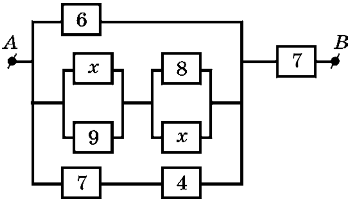


Рис. 88

2. Число в клетке (рис. 88) указывает на количество способов, которыми ее можно пройти.

а) Сколькими способами можно пройти из A в B, если $x = 3$; $x = 4$?

б) Из A в B можно пройти 4788 способами; найти число x.

3. В шахматном турнире участвуют 12 гроссмейстеров, 8 мастеров международного класса и 4 экс-чемпиона турнира. Соперники для каждой пары участников определяются путем жеребьевки. Найти вероятность того, что в первой паре встретятся шахматисты одной категории.

4. Патроны снабжены капсюлями трех типов: 50% патронов имеют капсюли первого типа, 40% — второго и 10% — третьего типа. Капсюли первого типа дают осечку с вероятностью 1/10, второго — с вероятностью 3/20, третьего — с вероятностью 1/5. Заряженное ружье дало осечку. Какова вероятность того, что патрон имел капсюль первого типа?

5. Вероятность того, что деталь не прошла проверку качества, равна 1/5. Какова вероятность того, что из 400 случайно отобранных деталей окажутся:

а) ровно 80 не прошедших проверку;

б) от 30 до 50 не прошедших проверку?

6. При штамповке деталей получается в среднем 94% стандартных. Случайным образом отбираются четыре детали. Найти закон распределения числа стандартных деталей, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ и $F(x)$, начальные и центральные моменты до четвертого порядка включительно.

7. Дана функция распределения $F(x)$ случайной величины X. Найти $f(x)$, построить графики $f(x)$ и $F(x)$, вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(\alpha < X < \beta)$, начальные и центральные моменты до четвертого порядка включительно.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le\pi, \\ -\cos(x/2), & \pi<x\le 2\pi, \\ 1, & x>2\pi; \end{cases} \qquad \alpha=1{,}8;\ \beta=3.$$

Вариант 16.

1. Используя операции дополнения, сложения и умножения над событиями $A_k = \{k$-й элемент проводит ток$\}$, записать событие $B = \{$Схема проводит ток$\}$ и противоположное ему событие (рис. 89).

2. Число в клетке (рис. 90) указывает на количество способов, которыми ее можно пройти.

а) Сколькими способами можно пройти из A в B, если $x = 3$; $x = 4$?

б) Из A в B можно пройти 9700 способами; найти число x.

3. Из неполной колоды извлекаются три карты. Найти вероятность того, что все карты разных мастей.

4. Среди участников студенческой олимпиады 7 студентов с I курса, 5 — со II курса и 8 — с III курса. Вероятность того, что студент I курса попадет в число призеров, равна 1/10, II курса — 3/10, III курса — 1/5. Наугад выбранный студент вошел в число призеров. С какого курса он вероятнее всего?

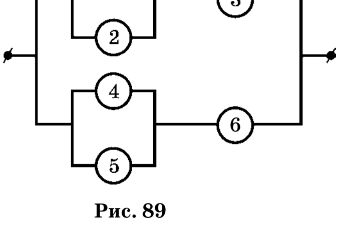


Рис. 89

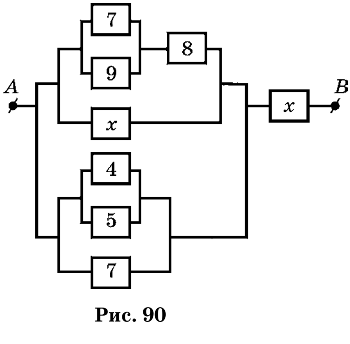


Рис. 90

5. Всхожесть семян составляет 80%. Найти вероятность того, что из 100 семян взойдут:

а) ровно 75;

б) от 75 до 90 семян.

6. В студии четыре камеры, для каждой из которых вероятность быть включенной в данный момент равна 0,58. Найти закон распределения числа камер, включенных в данный момент, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ и $F(x)$, начальные и центральные моменты до четвертого порядка включительно.

7. Дана функция распределения $F(x)$ случайной величины X. Найти $f(x)$, построить графики $f(x)$ и $F(x)$, вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(\alpha < X < \beta)$, начальные и центральные моменты до четвертого порядка включительно.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \sqrt{3}/3 \cdot \operatorname{tg}(x/2), & 0 < x \le 2\pi/3, \\ 1, & x > 2\pi/3; \end{cases} \qquad \alpha = 0{,}2; \beta = 1{,}1.$$

Вариант 17.

1. Используя операции дополнения, сложения и умножения над событиями $A_k = \{k$-й элемент проводит ток$\}$, записать событие $B = \{$Схема проводит ток$\}$ и противоположное ему событие (рис. 91).

2. Число в клетке (рис. 92) указывает на количество способов, которыми ее можно пройти.

а) Сколькими способами можно пройти из A в B, если $x = 3$; $x = 4$?

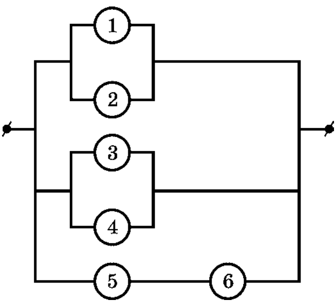


Рис. 91

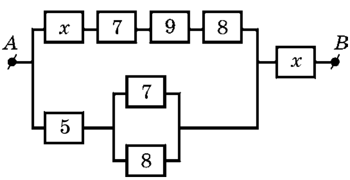


Рис. 92

б) Из A в B можно пройти 73 476 способами; найти число x.

3. Из 14 билетов выигрышными являются три. Найти вероятность того, что среди 5 случайным образом выбранных билетов будет не более двух выигрышных.

4. Имеется возможность вложить деньги в акции одного из трех предприятий. Вероятность того, что акции первого предприятия в течение месяца упадут в цене, равна 1/2 , второго — 3/10, третьего — 7/10. Известно, что купленные акции подешевели. Какова вероятность, что эти акции выпущены первым предприятием, если вопрос «Акции какого предприятия покупать?» решался наудачу?

5. Вероятность рождения мальчика равна 0,517. Какова вероятность того, что среди 80 новорожденных:

а) 40 мальчиков;

б) не менее половины мальчиков?

6. Вероятность успешно перейти дорогу в неположенном месте равна 0,03. Пешеход делает 4 попытки перейти дорогу. Найти закон распределения числа успешных попыток, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ и $F(x)$, начальные и центральные моменты до четвертого порядка включительно.

7. Дана функция распределения $F(x)$ случайной величины X. Найти $f(x)$, построить графики $f(x)$ и $F(x)$, вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(\alpha < X < \beta)$, начальные и центральные моменты до четвертого порядка включительно.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le \pi/2, \\ -2\cos x, & \pi/2<x\le 2\pi/3, \\ 1, & x>2\pi/3; \end{cases} \qquad \alpha=1{,}8;\ \ \beta=2.$$

Вариант 18.

1. Используя операции дополнения, сложения и умножения над событиями $A_k = \{k\text{-й элемент проводит ток}\}$, записать событие $B = \{\text{Схема проводит ток}\}$ и противоположное ему событие (см. рис. 93).

2. Число в клетке (см. рис. 94) указывает на количество способов, которыми ее можно пройти.

а) Сколькими способами можно пройти из A в B, если $x = 3$; $x = 4$?

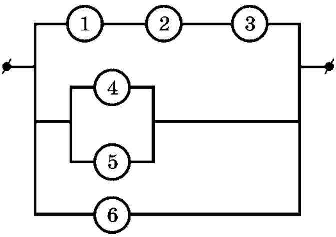


Рис. 93

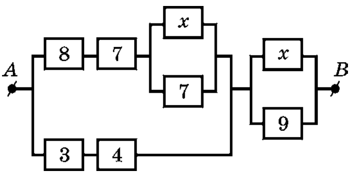


Рис. 94

б) Из A в B можно пройти 32 500 способами; найти число x.

3. В розыгрыше первенства по теннису участвуют 10 команд, из которых случайным образом формируются две равные группы. Среди участников имеются 4 команды экстра-класса. Найти вероятность того, что все команды экстра-класса не попадут ни в одну группу.

4. В трех группах студентов была проведена контрольная работа по высшей математике. В первой группе 28 человек, во второй — 24, в третьей — 22. Оценку «отлично» в первой группе получили 50%, во второй — 75%, в третьей — 85% студентов. Вася Иванов получил «отлично». В какой группе он вероятнее всего учится?

5. Вероятность изготовления стандартной детали равна 1/2. Какова вероятность того, что среди 120 деталей окажутся:

а) 60 стандартных деталей;

б) не менее 60 стандартных деталей?

6. По мишени производится не более 4 выстрелов до первого попадания. Вероятность попадания при первом выстреле равна 0,75 и убывает на 0,11 с каждым выстрелом. Найти закон распределения числа израсходованных патронов, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ и $F(x)$, начальные и центральные моменты до четвертого порядка включительно.

7. Дана функция распределения $F(x)$ случайной величины X. Найти $f(x)$, построить графики $f(x)$ и $F(x)$, вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(\alpha < X < \beta)$, начальные и центральные моменты до четвертого порядка включительно.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le \pi/4, \\ -2\cos(2x), & \pi/4<x\le \pi/3, \\ 1, & x>\pi/3; \quad \alpha=0{,}8; \quad \beta=1. \end{cases}$$

Вариант 19.

1. Используя операции дополнения, сложения и умножения над событиями $A_k = \{k\text{-й элемент проводит ток}\}$, записать событие $B = \{\text{Схема проводит ток}\}$ и противоположное ему событие (рис. 95).

2. Число в клетке (рис. 96) указывает на количество способов, которыми ее можно пройти.

а) Сколькими способами можно пройти из A в B, если $x = 3$; $x = 4$?

б) Из A в B можно пройти 16 044 способами; найти число x.

3. Из полной колоды (52 листа) извлекают случайным образом 5 карт. Найти вероятность того, что среди них окажется хотя бы три карты одного достоинства.

4. Три стрелка делают один залп по мишени. Вероятность попадания для первого стрелка равна 1/5, для второго — 2/5, для третьего — 3/5. Для поражения цели достаточно трех попаданий. При двух попаданиях цель поражается с вероятностью 1/2, при одном — с вероятностью 2/5. Мишень была поражена. Сколько попаданий вероятнее всего было произведено?

5. Вероятность изготовления стандартной детали равна 9/10. Сколько деталей нужно изготовить, чтобы с вероятностью 0,98 можно было ожидать, что не менее 150 из них окажутся стандартными?

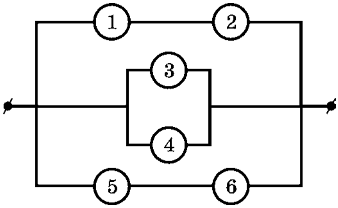


Рис. 95

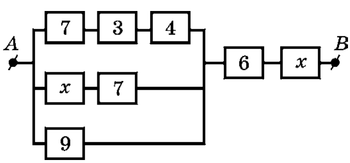


Рис. 96

6. Вероятность рождения мальчика равна 0,517. Исследуются семьи с четырьмя детьми. Найти закон распределения числа мальчиков в семье, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ и $F(x)$, начальные и центральные моменты до четвертого порядка включительно.

7. Дана функция распределения $F(x)$ случайной величины X. Найти $f(x)$, построить графики $f(x)$ и $F(x)$, вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(\alpha < X < \beta)$, начальные и центральные моменты до четвертого порядка включительно.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le\pi,\\ -2\cos(x/2), & \pi<x\le 4\pi/3,\\ 1, & x>4\pi/3; \end{cases}\qquad \alpha=1{,}8;\ \ \beta=3.$$

Вариант 20.

1. Используя операции дополнения, сложения и умножения над событиями $A_k = \{k\text{-й элемент проводит ток}\}$, записать событие $B = \{\text{Схема проводит ток}\}$ и противоположное ему событие (рис. 97).

2. Число в клетке (рис. 98) указывает на количество способов, которыми ее можно пройти.

а) Сколькими способами можно пройти из A в B, если $x = 3$; $x = 4$?

б) Из A в B можно пройти 28 080 способами; найти число x.

3. Среди 10 подарков к празднику три подарка включают ананасы, пять — шоколад, два — мармелад. Найти вероятность того, что в трех случайным образом выбранных подарках будут хотя бы два, содержащих один и тот же набор лакомств.

4. В саду растут три яблони. С первой яблони собрали 60% всего урожая, со второй — 30%, с третьей — 10%.

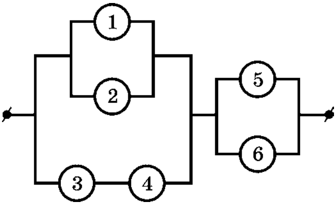


Рис. 97

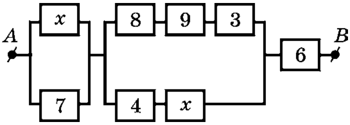


Рис. 98

Известно, что для яблока с первой яблони вероятность быть червивым равна $1/20$, для яблока со второй — $9/100$, с третьей — $1/5$. Весь урожай был уложен в один контейнер. Наугад взятое яблоко оказалось червивым. С какой яблони оно вероятнее всего снято?

5. Игральную кость бросают 12 000 раз. Какова вероятность того, что шесть очков появится:

а) ровно 2000 раз;

б) от 1900 до 2100 раз?

6. Четыре элемента электрической цепи соединены последовательно, один из них вышел из строя. Для устранения неисправности производится последовательная замена элементов, после каждой замены работа цепи проверяется. Найти закон распределения числа замен, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ и $F(x)$, начальные и центральные моменты до четвертого порядка включительно.

7. Дана функция распределения $F(x)$ случайной величины X. Найти $f(x)$, построить графики $f(x)$ и $F(x)$, вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(\alpha < X < \beta)$, начальные и центральные моменты до четвертого порядка включительно.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le \pi/2, \\ -\sqrt{2}\cos x, & \pi/2 < x \le 3\pi/4, \\ 1, & x > 3\pi/4; \end{cases} \qquad \alpha = 1{,}8; \quad \beta = 2{,}1.$$

Вариант 21.

1. Используя операции дополнения, сложения и умножения над событиями $A_k = \{k\text{-й элемент проводит ток}\}$, записать событие $B = \{\text{Схема проводит ток}\}$ и противоположное ему событие (рис. 99).

2. Число в клетке (рис. 100) указывает на количество способов, которыми ее можно пройти.

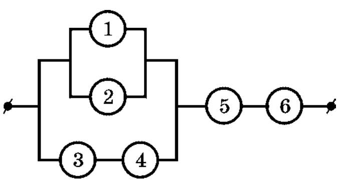


Рис. 99

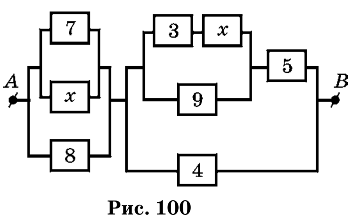


Рис. 100

а) Сколькими способами можно пройти из A в B, если $x = 3$; $x = 4$?

б) Из A в B можно пройти 10 527 способами; найти число x.

3. Неполная колода карт делится случайным образом на две равные пачки по 18 карт. Найти вероятность того, что в одной из пачек будет один король, одна дама и два туза.

4. В новом доме 30% квартир оборудованы сигнализацией I типа, 50% — II типа и остальные — III типа. Сигнализация I типа дает сбой с вероятностью 3/10, второго — 3/20, третьего — 1/100. При попытке взлома одной из квартир сработала сигнализация. Какова вероятность того, что квартира оборудована сигнализацией II типа?

5. Вероятность выздоровления больного в результате применения нового способа лечения равна 0,75. В стационаре случайным образом выбрали 100 человек, подвергшихся новому лечению. Какова вероятность того, что среди них окажется:

а) ровно 70 выздоровевших;

б) от 90 до 100 выздоровевших?

6. В партии из 15 деталей имеются 5 нестандартных. Случайным образом выбираются 4 детали. Найти закон распределения числа стандартных деталей среди извлеченных, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ и $F(x)$, начальные и центральные моменты до четвертого порядка включительно.

7. Дана функция распределения $F(x)$ случайной величины X. Найти $f(x)$, построить графики $f(x)$ и $F(x)$, вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(\alpha < X < \beta)$, начальные и центральные моменты до четвертого порядка включительно.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le \pi/4, \\ -\sqrt{2}\cos(2x), & \pi/4 < x \le 3\pi/8, \\ 1, & x > 3\pi/8; \end{cases} \qquad \alpha = 0{,}9; \quad \beta = 1{,}1.$$

Вариант 22.

1. Используя операции дополнения, сложения и умножения над событиями $A_k = \{k\text{-й элемент проводит ток}\}$, записать событие $B = \{\text{Схема проводит ток}\}$ и противоположное ему событие (рис. 101).

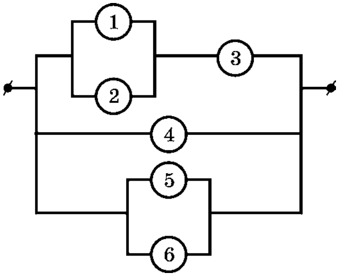


Рис. 101

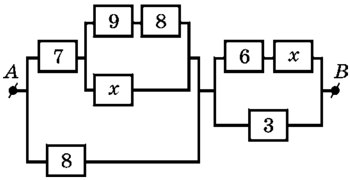


Рис. 102

2. Число в клетке (рис. 102) указывает на количество способов, которыми ее можно пройти.

а) Сколькими способами можно пройти из A в B, если $x = 3$; $x = 4$?

б) Из A в B можно пройти 53 070 способами; найти число x.

3. Из урны, содержащей 15 белых, 4 черных и 6 красных шаров, наугад без возвращения извлекаются 4 шара. Найти вероятность того, что среди них окажутся хотя бы два одного цвета.

4. Три самолета бомбят цель. Первый самолет сбрасывает шесть бомб, второй — четыре, третий — три. Вероятность попадания для бомбы первого самолета равна $2/5$, второго — $3/10$, третьего — $1/5$. В цель попала одна бомба. Какова вероятность того, что она сброшена с первого самолета?

5. Вероятность порчи продукта после истечения срока годности равна 0,7. Проведена проверка 100 продуктов. Какова вероятность того, что испортились:

а) ровно 20 продуктов;

б) не более 30 продуктов?

6. Вероятность промаха при одном выстреле равна $1/\pi$. Производится не более четырех выстрелов. Найти закон распределения числа израсходованных патронов, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ и $F(x)$, начальные и центральные моменты до четвертого порядка включительно.

7. Дана функция распределения $F(x)$ случайной величины X. Найти $f(x)$, построить графики $f(x)$ и $F(x)$, вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(\alpha < X < \beta)$, начальные и центральные моменты до четвертого порядка включительно.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le \pi, \\ -\sqrt{2}\cos(x/2), & \pi < x \le 3\pi/2, \\ 1, & x > 3\pi/2; \end{cases} \qquad \alpha = 3{,}5; \quad \beta = 4{,}2.$$

Вариант 23.

1. Используя операции дополнения, сложения и умножения над событиями $A_k = \{k\text{-й элемент проводит ток}\}$, записать событие $B = \{\text{Схема проводит ток}\}$ и противоположное ему событие (рис. 103).

2. Число в клетке (рис. 104) указывает на количество способов, которыми ее можно пройти.

а) Сколькими способами можно пройти из A в B, если $x = 3$; $x = 4$?

б) Из A в B можно пройти 16 060 способами; найти число x.

3. В группе из 30 студентов пятеро собирают марки, 12 человек — открытки, 7 — монеты. Найти вероятность того, что среди трех случайным образом выбранных студентов окажутся хотя бы двое, коллекционирующих одно и то же.

4. В тире имеются три ружья, вероятности попадания из них в цель равны 7/10, 4/5 и 9/10. Стрелок наугад взял одно из них и при одном выстреле из двух поразил мишень. Какова вероятность того, что он стрелял из первого ружья?

5. Завод выпускает в среднем 70% продукции второго сорта. Какова вероятность того, что в партии из 100 изделий окажется:

а) 75 изделий второго сорта;

б) от 60 до 80 изделий второго сорта?

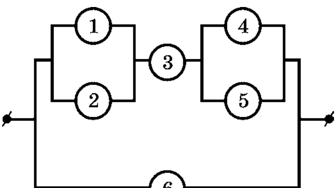


Рис. 103

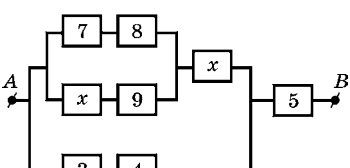


Рис. 104

6. Монету бросают не более 4 раз до первого появления герба. Найти закон распределения числа попыток до успеха, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ и $F(x)$, начальные и центральные моменты до четвертого порядка включительно.

7. Дана функция распределения $F(x)$ случайной величины X. Найти $f(x)$, построить графики $f(x)$ и $F(x)$, вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(\alpha < X < \beta)$, начальные и центральные моменты до четвертого порядка включительно.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le \pi/2, \\ -2/\sqrt{3}\cos x, & \pi/2 < x \le 5\pi/6, \\ 1, & x > 5\pi/6; \end{cases} \qquad \alpha = 1{,}8; \quad \beta = 2{,}3.$$

Вариант 24.

1. Используя операции дополнения, сложения и умножения над событиями $A_k = \{k$-й элемент проводит ток$\}$, записать событие $B = \{$Схема проводит ток$\}$ и противоположное ему событие (рис. 105).

2. Число в клетке (рис. 106) указывает на количество способов, которыми ее можно пройти.

а) Сколькими способами можно пройти из A в B, если $x = 3$; $x = 4$?

б) Из A в B можно пройти 17 577 способами; найти число x.

3. Среди 12 подарков в одинаковых упаковках имеются 5 пакетов с шампанским, 4 — с шоколадным ассорти, 3 — с кетовой икрой. Найти вероятность того, что среди трех случайным образом выбранных подарков есть хотя бы два пакета с одним и тем же продуктом.

4. С помощью трех эхолотов составляется карта глубин залива. Первый, второй и третий эхолоты проводят

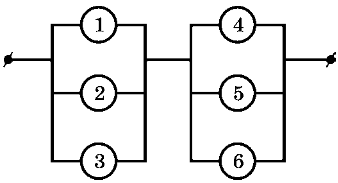


Рис. 105

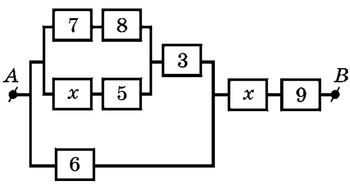


Рис. 106

30%, 20% и 50% общего количества измерений соответственно. Вероятность того, что первый эхолот допустит ошибку, превышающую 10 метров, равна 3/100, для второго — 9/100, для третьего — 1/100. Случайно выбранное измерение оказалось ошибочным, что показала повторная проверка. Какова вероятность того, что измерение проводилось вторым эхолотом?

5. Вероятность поражения цели при одном выстреле из арбалета равна 15/19. Какова вероятность, что при 123 попытках цель окажется пораженной:

а) ровно 90 раз;

б) от 25 до 100 раз?

6. Два кубика бросают не более четырех раз до появления 8 очков в сумме. Найти закон распределения числа попыток до успеха, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ и $F(x)$, начальные и центральные моменты до четвертого порядка включительно.

7. Дана функция распределения $F(x)$ случайной величины X. Найти $f(x)$, построить графики $f(x)$ и $F(x)$, вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(\alpha < X < \beta)$, начальные и центральные моменты до четвертого порядка включительно.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le \pi/4, \\ -2/\sqrt{3}\cos(2x), & \pi/4 < x \le 5\pi/12, \\ 1, & x > 5\pi/12; \end{cases} \qquad \alpha = 0{,}9;\ \ \beta = 1{,}1.$$

Вариант 25.

1. Используя операции дополнения, сложения и умножения над событиями $A_k = \{k\text{-й элемент проводит ток}\}$, записать событие $B = \{\text{Схема проводит ток}\}$ и противоположное ему событие (рис. 107).

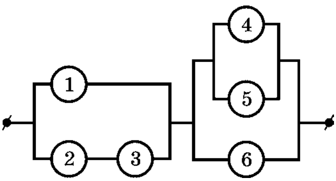


Рис. 107

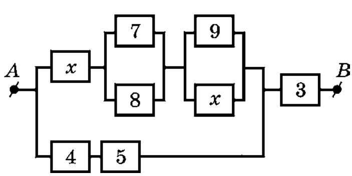


Рис. 108

2. Число в клетке (рис. 108) указывает на количество способов, которыми ее можно пройти.

а) Сколькими способами можно пройти из A в B, если $x = 3$; $x = 4$?

б) Из A в B можно пройти 12 930 способами; найти число x.

3. В зале, насчитывающем 80 мест, случайным образом занимают места 65 человек. Определить вероятность того, что будут заняты определенные 10 мест.

4. К кладу ведут три дороги. Вероятность погибнуть на первой дороге равна 1/5, на второй — 3/10, на третьей — 2/5. Для выбора дороги кладоискатель бросает два кубика. Если выпало от 2 до 4 очков в сумме, то выбирается первая дорога; от 5 до 8 — вторая; от 9 до 12 — третья. Клад был найден. Какова вероятность того, что кладоискатель выбрал вторую дорогу?

5. Вероятность рождения мальчика равна 0,517. Какова вероятность того, что из 1000 новорожденных:

а) 500 мальчиков;

б) от 250 до 450 мальчиков?

6. Из неполной колоды (36 листов) не более четырех раз извлекается карта без возвращения до появления туза. Найти закон распределения числа попыток до успеха, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ и $F(x)$, начальные и центральные моменты до четвертого порядка включительно.

7. Дана функция распределения $F(x)$ случайной величины X. Найти $f(x)$, построить графики $f(x)$ и $F(x)$, вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(\alpha < X < \beta)$, начальные и центральные моменты до четвертого порядка включительно.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le \pi, \\ -2/\sqrt{3}\cos(x/2), & \pi < x \le 5\pi/3, \\ 1, & x > 5\pi/3; \end{cases} \qquad \alpha = 3{,}5; \quad \beta = 4{,}2.$$

Вариант 26.

1. Используя операции дополнения, сложения и умножения над событиями $A_k = \{k$-й элемент проводит ток$\}$, записать событие $B = \{$Схема проводит ток$\}$ и противоположное ему событие (см. рис. 109).

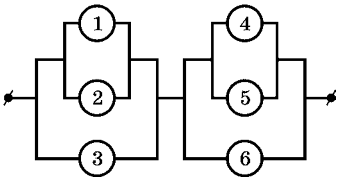


Рис. 109

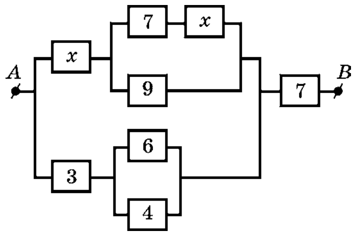


Рис. 110

2. Число в клетке (рис. 110) указывает на количество способов, которыми ее можно пройти.

а) Сколькими способами можно пройти из A в B, если $x = 3$; $x = 4$?

б) Из A в B можно пройти 19 096 способами; найти число x.

3. Из урны, содержащей 10 белых, 5 черных и 5 красных шаров, случайным образом без возвращения извлекаются три шара. Найти вероятность того, что все они окажутся разными.

4. В торговую сеть с завода синтетических моющих средств поступил стиральный порошок: 2000 пачек порошка среднего качества, 3500 пачек — хорошего и 2800 пачек — отличного. Порошок среднего качества отстирывает большинство загрязнений с вероятностью 11/20, хороший — с вероятностью 79/100, отличный — с вероятностью 24/25. Случайно выбранный порошок справился с загрязнением. Какова вероятность того, что был выбран порошок среднего качества?

5. Две игральные кости бросаются 3600 раз. Какова вероятность того, что шесть очков в сумме появятся:

а) 500 раз;

б) от 450 до 550 раз?

6. Студент Иванов пытается вспомнить фигуру, которую можно сложить из бумаги по правилам оригами. У него есть не более четырех попыток. Вероятность вспомнить фигуру с первой попытки равна 0,75 и с каждой попыткой уменьшается на 0,07. Найти закон распределения числа попыток до успеха, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ и $F(x)$, начальные и центральные моменты до четвертого порядка включительно.

7. Дана функция распределения $F(x)$ случайной величины X. Найти $f(x)$, построить графики $f(x)$ и $F(x)$, вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(\alpha < X < \beta)$, начальные и центральные моменты до четвертого порядка включительно.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ \operatorname{tg}x, & 0<x\le \pi/4, \\ 1, & x>\pi/4; \end{cases} \qquad \alpha=0{,}1;\ \ \beta=0{,}5.$$

Вариант 27.

1. Используя операции дополнения, сложения и умножения над событиями $A_k = \{k$-й элемент проводит ток$\}$, записать событие $B = \{$Схема проводит ток$\}$ и противоположное ему событие (рис. 111).

2. Число в клетке (рис. 112) указывает на количество способов, которыми ее можно пройти.

а) Сколькими способами можно пройти из A в B, если $x = 3$; $x = 4$?

б) Из A в B можно пройти 11 704 способами; найти число x.

3. В группе из 28 студентов имеются 10 отличников и 14 хорошистов. Какова вероятность того, что среди четырех случайным образом выбранных студентов окажутся один хорошист и два отличника?

4. Информационная база данных контролируется тремя программами, которые обнаруживают несанкционированный доступ с вероятностью 43/50, 49/100 и 93/100. Первая программа активируется с 09:15 до 13:45, вторая — с 13:46 до 17:55, третья — в остальное время суток. Несанкционированный доступ был обнаружен. Какова

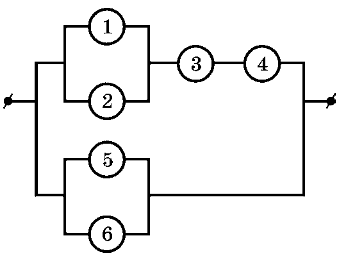


Рис. 111

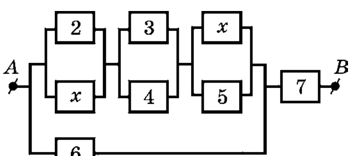


Рис. 112

вероятность того, что нарушение зафиксировала вторая программа?

5. Лимонная косточка прорастает с вероятностью 0,19. Какова вероятность того, что из ста косточек прорастут:

а) ровно 20;

б) не более трети?

6. В рации садятся батарейки, их заряда хватит не более чем на 4 попытки установить связь. Найти закон распределения числа попыток до успеха, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ и $F(x)$, начальные и центральные моменты до четвертого порядка включительно, если вероятность успеха при каждой попытке равна 1/4.

7. Дана функция распределения $F(x)$ случайной величины X. Найти $f(x)$, построить графики $f(x)$ и $F(x)$, вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(\alpha < X < \beta)$, начальные и центральные моменты до четвертого порядка включительно.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0,\\ \operatorname{tg}(2x), & 0<x\le \pi/8,\\ 1, & x>\pi/8; \end{cases} \qquad \alpha=0{,}1;\ \ \beta=0{,}25.$$

Вариант 28.

1. Используя операции дополнения, сложения и умножения над событиями $A_k = \{k\text{-й элемент проводит ток}\}$, записать событие $B = \{\text{Схема проводит ток}\}$ и противоположное ему событие (рис. 113).

2. Число в клетке (рис. 114) указывает на количество способов, которыми ее можно пройти.

а) Сколькими способами можно пройти из A в B, если $x = 3$; $x = 4$?

б) Из A в B можно пройти 6500 способами; найти число x.

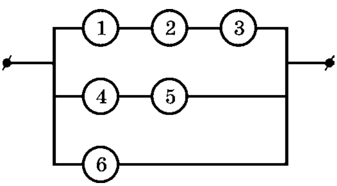


Рис. 113

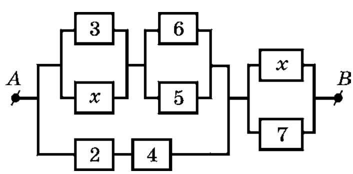


Рис. 114

3. Десять женщин встают в очередь. Найти вероятность того, что две определенные женщины окажутся рядом. Найти эту же вероятность при условии, что к десятке «добавили» четырех мужчин.

4. Студент Козлов плохо подготовился к экзамену, но ожидает получить подсказки от своих друзей Иванова, Петрова и Сидорова. Иванов подсказывает верный ответ с вероятностью 3/10, Петров — с вероятностью 2/5, Сидоров — с вероятностью 1/2. Если Козлов получит три подсказки, то он сдаст экзамен наверняка; две подсказки — с вероятностью 3/5; одну подсказку — с вероятностью 1/4; ни одной — с вероятностью 1/10. Козлов сдал экзамен. Какова вероятность того, что он получил одну подсказку?

5. Три монеты подбрасывают 333 раза. Какова вероятность того, что событие A = {Выпало два герба} появится:

а) ровно 133 раза;

б) от 133 до 166 раз?

6. В мешке 25 шаров: 4 красных, 6 синих, 7 зеленых и 8 желтых. Четыре шара извлекаются с возвращением не более четырех раз до появления разных шаров. Найти закон распределения числа попыток до успеха, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ и $F(x)$, начальные и центральные моменты до четвертого порядка включительно.

7. Дана функция распределения $F(x)$ случайной величины X. Найти $f(x)$ построить графики $f(x)$ и $F(x)$ вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(\alpha < X < \beta)$, начальные и центральные моменты до четвертого порядка включительно.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \sqrt{3}\operatorname{tg}x, & 0 < x \le \pi/6, \\ 1, & x > \pi/6; \end{cases} \qquad \alpha = 0{,}1; \quad \beta = 0{,}35.$$

Вариант 29.

1. Используя операции дополнения, сложения и умножения над событиями A_k = {k-й элемент проводит ток}, записать событие B = {Схема проводит ток} и противоположное ему событие (см. рис. 115).

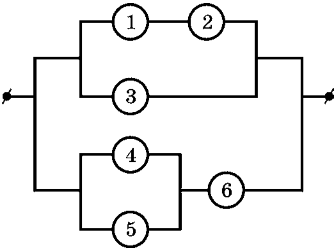


Рис. 115

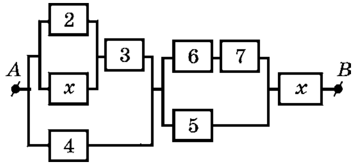


Рис. 116

2. Число в клетке (рис. 116) указывает на количество способов, которыми ее можно пройти.

а) Сколькими способами можно пройти из A в B, если $x = 3$; $x = 4$?

б) Из A в B можно пройти 22 231 способами; найти число x.

3. Среди 15 призов участникам студенческого конкурса имеются пять подарков с органайзерами, восемь — с кожаными папками и два — с энциклопедиями. Найти вероятность того, что в трех случайных образом выбранных подарках окажется одно и то же.

4. Богатырь сражается со Змеем Горынычем. Вероятность отрубить первую, вторую и третью голову равна 3/10, 7/20, 13/25 соответственно. Если богатырь отрубит Горынычу три головы, то он победит его наверняка, две головы — с вероятностью 16/20, одну голову — с вероятностью 9/20, ни одной — сам погибнет. Богатырь одержал победу. Сколько голов вероятнее всего было срублено?

5. В коробке 25 шаров: 4 красных, 6 синих, 7 зеленых и 8 желтых. Извлечение двух шаров с возвращением проводится 999 раз. Какова вероятность того, что шары одного цвета появятся:

а) ровно 222 раза;

б) от 180 до 280 раз?

6. Студент Козлов перед экзаменом в поисках конспектов лекций обзванивает друзей. Первый дает конспект с вероятностью 0,2; второй — с вероятностью 0,7; третий — с вероятностью 0,35; четвертый — с вероятностью 0,59. Найти закон распределения числа звонков до успеха, $M(X)$,

$D(X)$, $\sigma(X)$ и $F(x)$, начальные и центральные моменты до четвертого порядка включительно.

7. Дана функция распределения $F(x)$ случайной величины X. Найти $f(x)$, построить графики $f(x)$ и $F(x)$, вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(\alpha < X < \beta)$, начальные и центральные моменты до четвертого порядка включительно.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0,\\ \sqrt{3}\operatorname{tg}(x/2), & 0<x\le\pi/3,\\ 1, & x>\pi/3; \end{cases} \qquad \alpha=0{,}1;\ \beta=0{,}75.$$

Вариант 30.

1. Используя операции дополнения, сложения и умножения над событиями $A_k = \{k$-й элемент проводит ток$\}$, записать событие $B = \{$Схема проводит ток$\}$ и противоположное ему событие (рис. 117).

2. Число в клетке (рис. 118) указывает на количество способов, которыми ее можно пройти.

а) Сколькими способами можно пройти из A в B, если $x = 3$; $x = 4$?

б) Из A в B можно пройти 1613 способами; найти число x.

3. Из урны, в которой 12 красных, 14 белых и 4 зеленых шаров, случайным образом без возвращения извлекают три шара. Найти вероятность того, что среди них окажутся хотя бы два одинакового цвета.

4. Агенты Малдер и Скалли обнаружат «зеленых человечков»: наверняка, если получат три сообщения; с вероятностью 79/100, если получат два сообщения; с вероятностью

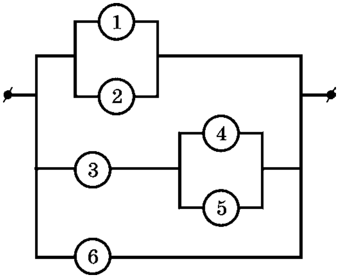


Рис. 117

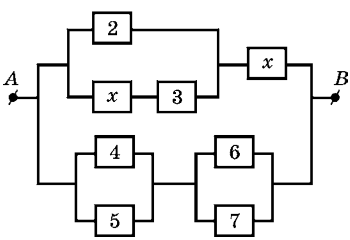


Рис. 118

11/20, если одно, и с вероятностью 2/5, если ни одного. Сообщение может поступить от Скиннера с вероятностью 7/20, от Курильщика с вероятностью 3/10; от информатора Малдера с вероятностью 2/5. Агенты не обнаружили «зеленых человечков». Какова вероятность того, что они получили одно сообщение?

5. В одной упаковке 450 спичек. Вероятность того, что спичка не загорится, равна 0,117. Какова вероятность того, что наугад выбранная упаковка содержит:

а) ровно 54 спички, которые не загорятся;

б) не более 100 спичек, которые не загорятся?

6. Старик забрасывает в море невод не более четырех раз. Вероятность того, что после одной попытки невод будет пуст, равна 0,84. Найти закон распределения числа попыток до успеха, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ и $F(x)$, начальные и центральные моменты до четвертого порядка включительно.

7. Дана функция распределения $F(x)$ случайной величины X. Найти $f(x)$, построить графики $f(x)$ и $F(x)$, вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(\alpha < X < \beta)$, начальные и центральные моменты до четвертого порядка включительно.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \sqrt{3}/3 \cdot \operatorname{tg} x, & 0 < x \le \pi/3, \\ 1, & x > \pi/3; \end{cases} \qquad \alpha = 0{,}15; \quad \beta = 0{,}7.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица значений функции Лапласа $\Phi(x)$.

Функция $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$ **причем** $\Phi(-x) + \Phi(x) = 1$

x	0	2	4	6	8
–0,0	0,5000	0,4920	0,4840	0,4761	0,4681
–0,1	0,4602	0,4522	0,4443	0,4364	0,4286
–0,2	0,4207	0,4129	0,4052	0,3974	0,3897
–0,3	0,3821	0,3745	0,3669	0,3594	0,3520
–0,4	0,3446	0,3372	0,3300	0,3228	0,3156
–0,5	0,3085	0,3015	0,2946	0,2877	0,2810
–0,6	0,2743	0,2676	0,2611	0,2546	0,2483
–0,7	0,2420	0,2358	0,2297	0,2236	0,2177
–0,8	0,2119	0,2061	0,2005	0,1949	0,1894
–0,9	0,1841	0,1788	0,1736	0,1685	0,1635
–1,0	0,1587	0,1539	0,1492	0,1446	0,1401
–1,1	0,1357	0,1314	0,1271	0,1230	0,1190
–1,2	0,1151	0,1112	0,1075	0,1038	0,1003
–1,3	0,0968	0,0934	0,0901	0,0869	0,0838
–1,4	0,0808	0,0778	0,0749	0,0721	0,0694
–1,5	0,0668	0,0643	0,0618	0,0594	0,0571
–1,6	0,0548	0,0526	0,0505	0,0485	0,0465
–1,7	0,0446	0,0427	0,0409	0,0392	0,0375
–1,8	0,0359	0,0344	0,0329	0,0314	0,0301
–1,9	0,0288	0,0274	0,0262	0,0250	0,0239
–2,0	0,0228	0,0217	0,0207	0,0197	0,0188
–2,1	0,0179	0,0170	0,0162	0,0154	0,0146
–2,2	0,0139	0,0132	0,0125	0,0119	0,0113
–2,3	0,0107	0,0102	0,0096	0,0091	0,0087
–2,4	0,0082	0,0078	0,0073	0,0069	0,0066
–2,5	0,0062	0,0059	0,0055	0,0052	0,0049
–2,6	0,0047	0,0044	0,0041	0,0039	0,0037

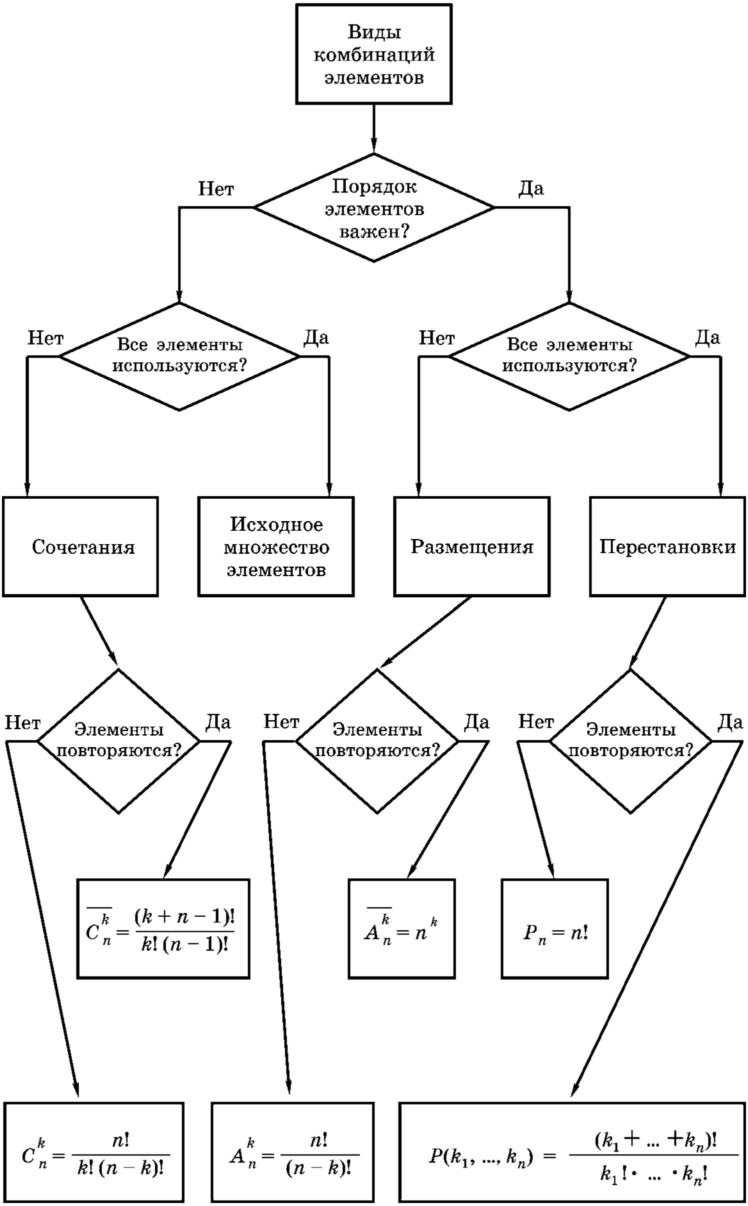
Продолжение табл.

x	0	2	4	6	8
–2,7	0,0035	0,0033	0,0031	0,0029	0,0027
–2,8	0,0026	0,0024	0,0023	0,0021	0,0020
–2,9	0,0019	0,0018	0,0016	0,0015	0,0014
–3,0	0,0013	0,0013	0,0012	0,0011	0,0010
–3,1	0,0010	0,0009	0,0008	0,0008	0,0007
–3,2	0,0007	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005
–3,3	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0004
–3,4	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
–3,5	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
–3,6	0,0002	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
–3,7	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
–3,8	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
–3,9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Таблица значений функции $\varphi(x)$ (производная функции $\Phi(x)$)

x	0	5	x	0	5
0,0	0,3989	0,3984	**2,0**	0,0540	0,0488
0,1	0,3970	0,3945	**2,1**	0,0440	0,0396
0,2	0,3910	0,3867	**2,2**	0,0355	0,0317
0,3	0,3814	0,3752	**2,3**	0,0283	0,0252
0,4	0,3683	0,3605	**2,4**	0,0224	0,0198
0,5	0,3521	0,3429	**2,5**	0,0175	0,0154
0,6	0,3332	0,3230	**2,6**	0,0136	0,0119
0,7	0,3123	0,3011	**2,7**	0,0104	0,0091
0,8	0,2897	0,2780	**2,8**	0,0079	0,0069
0,9	0,2661	0,2541	**2,9**	0,0060	0,0051
1,0	0,2420	0,2299	**3,0**	0,0044	0,0038
1,1	0,2179	0,2059	**3,1**	0,0033	0,0028
1,2	0,1942	0,1826	**3,2**	0,0024	0,0020
1,3	0,1714	0,1604	**3,3**	0,0017	0,0015
1,4	0,1497	0,1394	**3,4**	0,0012	0,0010
1,5	0,1295	0,1200	**3,5**	0,0009	0,0007
1,6	0,1109	0,1023	**3,6**	0,0006	0,0005
1,7	0,0940	0,0863	**3,7**	0,0004	0,0004
1,8	0,0790	0,0721	**3,8**	0,0003	0,0002
1,9	0,0656	0,0596	**3,9**	0,0002	0,0002

Блок-схема «Комбинаторика»



ЛИТЕРАТУРА

1. *Вентцель, Е. С.* Теория вероятностей и ее инженерные приложения / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. М. : Высшая школа, 2007.
2. *Вентцель, Е. С.* Задачи и упражнения по теории вероятностей : учеб. пособие для втузов / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. М. : Академия, 2003.
3. *Вентцель, Е. С.* Прикладные задачи теории вероятностей / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. М. : Радио и связь, 1983.
4. *Вентцель, Е. С.* Теория вероятностей / Е. С. Вентцель. М. : Академия, 2005.
5. *Виленкин, Н. Я.* Комбинаторика / Н. Я. Виленкин, А. Н. Виленкин, П. А. Виленкин, М. : ФИМА, 2007.
6. *Гмурман, В. Е.* Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для вузов / В. Е. Гмурман. М. : Высшая школа, 2003.
7. *Гмурман, В. Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике : учеб. пособие для студентов вузов / В. Е. Гмурман. М. : Высшая школа, 2003.
8. *Гнеденко, Б. В.* Курс теории вероятностей / Б. В. Гнеденко. М. : Эдиториал УРСС, 2007.
9. *Данко, П. Е.* Высшая математика в упражнениях и задачах : в 2 ч. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. М. : «Мир и образование», 2003.
10. *Кремер, Н. Ш.* Теория вероятностей и математическая статистика / Н. Ш. Кремер. М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2004.
11. *Лютикас, В. С.* Школьнику о теории вероятностей / В. С. Лютикас. М. : Просвещение, 1983.
12. *Письменный, Д. Т.* Конспект лекций по теории вероятностей и математической статистике / Д. Т. Письменный. М. : Айрис-пресс, 2004.
13. *Чистяков, В. П.* Курс теории вероятностей / В. П. Чистяков. М. : Агар, 2000.
14. *Ширяев, А. Н.* Вероятность-1 / А. Н. Ширяев. М. : МЦНМО, 2004.
15. *Ширяев, А. Н.* Вероятность-2 / А. Н. Ширяев. М. : МЦНМО, 2004.

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

Вариант 1.

1. $B = (A_1 \bigcup A_2) \bigcap (A_3 \bigcup A_4) \bigcap (A_5 \bigcup A_6)$;
$\overline{B} = (\overline{A}_1 \bigcap \overline{A}_2) \bigcup (\overline{A}_3 \bigcap \overline{A}_4) \bigcup (\overline{A}_5 \bigcap \overline{A}_6)$.
2. $N(3) = 8925$; $N(4) = 11424$; $x = 8$.
3. $P(A) = 0{,}3902$. **4.** $P(H_3/A) = 0{,}5$.
5. а) 0,0044; б) 0,927.
6. $M(X) = 0{,}34$; $D(X) = 0{,}3111$; $\sigma(X) = 0{,}558$; $\nu_1 = 0{,}34$; $\nu_2 = 0{,}4267$; $\nu_3 = 0{,}6148$; $\nu_4 = 1{,}0366$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 0{,}3111$; $\mu_3 = 0{,}2582$; $\mu_4 = 0{,}4563$.
7. $\nu_1 = 0{,}5707$; $\nu_2 = 0{,}4674$; $\nu_3 = 0{,}451$; $\nu_4 = 0{,}4792$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 0{,}1415$; $\mu_3 = 0{,}0225$; $\mu_4 = 0{,}0447$; $P = 0{,}156$.

Вариант 2.

1. $B = (A_1 \bigcap (A_2 \bigcup A_3) \bigcap (A_4 \bigcup A_5) \bigcap A_6)$;
$\overline{B} = \overline{A}_1 \bigcup (\overline{A}_2 \bigcap \overline{A}_3) \bigcup (\overline{A}_4 \bigcap \overline{A}_5) \bigcup \overline{A}_6$.
2. $N(3) = 1035$; $N(4) = 1380$; $x = 14$.
3. $P(A) = 0{,}011$.
4. $P(H_2/A) = 0{,}5$.
5. а) 0,1468; б) 0,9914.
6. $M(X) = \dfrac{2}{3}$; $D(X) = \dfrac{5}{9}$; $\sigma(X) = 0{,}7454$; $\nu_1 = \dfrac{2}{3}$; $\nu_2 = 1$; $\nu_3 = 1{,}(7)$; $\nu_4 = 3{,}6852$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = \dfrac{5}{9}$; $\mu_3 = 0{,}37$; $\mu_4 = 1{,}019$.
7. $\nu_1 = 1{,}1415$; $\nu_2 = 1{,}8696$; $\nu_3 = 3{,}608$; $\nu_4 = 7{,}668$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 0{,}5663$; $\mu_3 = 0{,}1805$; $\mu_4 = 0{,}7163$; $P = 0{,}173$.

Вариант 3.

1. $B = ((A_1 \bigcap A_2) \bigcup A_3\ ) \bigcap (A_4 \bigcup A_5) \bigcap A_6$;
$\overline{B} = ((\overline{A}_1 \bigcup \overline{A}_2) \bigcap \overline{A}_3) \bigcup (\overline{A}_4 \bigcap \overline{A}_5) \bigcup \overline{A}_6$.
2. $N(3) = 2090$; $N(4) = 2904$; $x = 10$.
3. $P(A) = 0{,}455$.

4. $P(H_1/A) = 0{,}286$.
5. а) 0,0101; б) 0,9989.
6. $M(X) = 1{,}2$; $D(X) = 0{,}84$; $\sigma(X) = 0{,}9165$; $\nu_1 = 1{,}2$;
$\nu_2 = 2{,}28$; $\nu_3 = 5{,}088$; $\nu_4 = 12{,}8424$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 0{,}84$;
$\mu_3 = 0{,}336$; $\mu_4 = 1{,}898$.
7. $\nu_1 = 0{,}2853$; $\nu_2 = 0{,}1168$; $\nu_3 = 0{,}0563$; $\nu_4 = 0{,}0299$; $\mu_1 = 0$;
$\mu_2 = 0{,}0353$; $\mu_3 = 0{,}0028$; $\mu_4 = 0{,}0028$; $P = 0{,}543$.

Вариант 4.

1. $B = (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) \cap (A_5 \cup A_6)$;
$\bar{B} = (\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4) \cup (\bar{A}_5 \cap \bar{A}_6)$.
2. $N(3) = 832$; $N(4) = 1017$; $x = 15$.
3. $P(A) = 0{,}226$.
4. $P(H_1/A) = 0{,}485$.
5. а) 0,00444; б) 0,859.
6. $M(X) = 3{,}2$; $D(X) = 0{,}64$; $\sigma(X) = 0{,}8$; $\nu_1 = 3{,}2$; $\nu_2 = 10{,}88$;
$\nu_3 = 38{,}528$; $\nu_4 = 140{,}5184$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 0{,}64$; $\mu_3 = -0{,}384$;
$\mu_4 = 1{,}254$.
7. $\nu_1 = 0{,}2556$; $\nu_2 = 0{,}0879$; $\nu_3 = 0{,}0342$; $\nu_4 = 0{,}0142$; $\mu_1 = 0$;
$\mu_2 = 0{,}0225$; $\mu_3 = 0{,}0002$; $\mu_4 = 0{,}0009$; $P = 0{,}381$.

Вариант 5.

1. $B = ((A_1 \cap A_2) \cup ((A_3 \cup A_4) \cap A_5)) \cap A_6$;
$\bar{B} = ((\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2) \cap ((\bar{A}_3 \cap \bar{A}_4) \cup \bar{A}_5)) \cup \bar{A}_6$.
2. $N(3) = 970$; $N(4) = 1221$; $x = 16$.
3. $P(A) = 0{,}00000145$.
4. $P(H_3/A) = 0{,}443$.
5. а) $6 \cdot 10^{-9}$; б) 0,99995.
6. $M(X) = 1{,}4$; $D(X) = 0{,}91$; $\sigma(X) = 0{,}9539$; $\nu_1 = 1{,}4$;
$\nu_2 = 2{,}87$; $\nu_3 = 6{,}839$; $\nu_4 = 18{,}2242$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 0{,}91$;
$\mu_3 = 0{,}273$; $\mu_4 = 2{,}1522$.
7. $\nu_1 = 0{,}5112$; $\nu_2 = 0{,}3518$; $\nu_3 = 0{,}2736$; $\nu_4 = 0{,}2276$; $\mu_1 = 0$;
$\mu_2 = 0{,}0903$; $\mu_3 = 0{,}0013$; $\mu_4 = 0{,}0148$; $P = 0{,}616$.

Вариант 6.

1. $B = (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) \cap (A_5 \cup A_6)$;
$\bar{B} = (\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4) \cup (\bar{A}_5 \cap \bar{A}_6)$.
2. $N(3) = 540$; $N(4) = 784$; $x = 19$.
3. $P(A) = 0{,}662$.
4. $P(H_1/A) = 0{,}5$.
5. а) 0,0243; б) 0,971.
6. $M(X) = 2{,}5$; $D(X) = 1{,}25$; $\sigma(X) = 1{,}118$; $\nu_1 = 2{,}5$; $\nu_2 = 7{,}5$;
$\nu_3 = 25$; $\nu_4 = 88{,}5$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 1{,}25$; $\mu_3 = 0$; $\mu_4 = 2{,}56$.
7. $\nu_1 = 0{,}1278$; $\nu_2 = 0{,}0219$; $\nu_3 = 0{,}0043$; $\nu_4 = 0{,}0009$; $\mu_1 = 0$;
$\mu_2 = 0{,}0056$; $\mu_3 = 0{,}00002$; $\mu_4 = 0{,}0001$; $P = 0{,}262$.

Вариант 7.

1. $B = (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) \cap (A_5 \cup A_6)$;
$\bar{B} = (\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4) \cup (\bar{A}_5 \cap \bar{A}_6)$.
2. $N(3) = 990$; $N(4) = 1539$; $x = 9$.
3. $P(A) = 0{,}292$.
4. $P(H_1/A) = 0{,}541$.
5. а) 0,0044; б) 0,8664.
6. $M(X) = 0{,}2$; $D(X) = 0{,}19$; $\sigma(X) = 0{,}4359$; $\nu_1 = 0{,}2$; $\nu_2 = 0{,}23$; $\nu_3 = 0{,}293$; $\nu_4 = 0{,}4282$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 0{,}19$; $\mu_3 = 0{,}171$; $\mu_4 = 0{,}2442$.
7. $\nu_1 = 0{,}3711$; $\nu_2 = 0{,}1876$; $\nu_3 = 0{,}1079$; $\nu_4 = 0{,}0666$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 0{,}0498$; $\mu_3 = 0{,}0012$; $\mu_4 = 0{,}0046$; $P = 0{,}483$.

Вариант 8.

1. $B = (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) \cap (A_5 \cap A_6)$;
$\bar{B} = (\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4) \cup (\bar{A}_5 \cup \bar{A}_6)$.
2. $N(3) = 3306$; $N(4) = 3885$; $x = 11$.
3. $P(A) = 0{,}104$.
4. $P(H_1/A) = 0{,}104$.
5. а) $5{,}14 \cdot 10^{-14}$; б) 0,389.
6. $M(X) = 2{,}36$; $D(X) = 0{,}9676$; $\sigma(X) = 0{,}9837$; $\nu_1 = 2{,}36$; $\nu_2 = 6{,}5372$; $\nu_3 = 19{,}8207$; $\nu_4 = 64{,}0831$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 0{,}9676$; $\mu_3 = -0{,}1742$; $\mu_4 = 2{,}372$.
7. $\nu_1 = 0{,}1855$; $\nu_2 = 0{,}0469$; $\nu_3 = 0{,}0134$; $\nu_4 = 0{,}0042$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 0{,}0125$; $\mu_3 = 0{,}0002$; $\mu_4 = 0{,}0003$; $P = 0{,}248$.

Вариант 9.

1. $B = (A_1 \cap A_2 \cap A_3) \cup ((A_4 \cup A_5) \cap A_6)$;
$\bar{B} = (\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \bar{A}_3) \cap ((\bar{A}_4 \cap \bar{A}_5) \cup \bar{A}_6)$.
2. $N(3) = 990$; $N(4) = 1458$; $x = 12$.
3. $P(A) = 0{,}0015$.
4. $P(H_1/A) = 0{,}457$.
5. а) 0,1121; б) 0,8656.
6. $M(X) = 2{,}8$; $D(X) = 0{,}725$; $\sigma(X) = 0{,}8515$; $\nu_1 = 2{,}8$; $\nu_2 = 8{,}565$; $\nu_3 = 27{,}8575$; $\nu_4 = 94{,}86$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 0{,}725$; $\mu_3 = -0{,}1845$; $\mu_4 = 1{,}3568$.
7. $\nu_1 = 0{,}7423$; $\nu_2 = 0{,}7505$; $\nu_3 = 0{,}8633$; $\nu_4 = 1{,}0662$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 0{,}1994$; $\mu_3 = 0{,}01$; $\mu_4 = 0{,}0733$; $P = 0{,}424$.

Вариант 10.

1. $B = (A_1 \cup (A_2 \cap A_3)) \cup (A_4 \cap A_5 \cap A_6)$;
$\bar{B} = (\bar{A}_1 \cap (\bar{A}_2 \cup \bar{A}_3)) \cap (\bar{A}_4 \cup \bar{A}_5 \cup \bar{A}_6)$.
2. $N(3) = 339$; $N(4) = 520$; $x = 14$.
3. $P(A) = 0{,}164$.
4. $P(H_3/A) = 0{,}521$.
5. а) $7{,}84 \cdot 10^{-13}$; б) 0,7603.

6. $M(X) = 30$; $D(X) = 24302{,}02$; $\sigma(X) = 155{,}89$; $\nu_1 = 30$; $\nu_2 = 25202{,}02$; $\nu_3 = 22954545{,}45$; $\nu_4 = 2{,}21 \cdot 10^{10}$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 24302{,}02$; $\mu_3 = 20740363{,}64$; $\mu_4 = 1{,}94 \cdot 10^{10}$.

7. $\nu_1 = 0{,}4698$; $\nu_2 = 0{,}3058$; $\nu_3 = 0{,}2287$; $\nu_4 = 0{,}1847$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 0{,}085$; $\mu_3 = 0{,}0051$; $\mu_4 = 0{,}0138$; $P = 0{,}403$.

Вариант 11.

1. $B = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6$;
$\bar{B} = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4 \cap \bar{A}_5 \cap \bar{A}_6$.

2. $N(3) = 2640$; $N(4) = 3816$; $x = 8$.

3. $P(A) = 0{,}979$.

4. $P(H_2/A) = 0{,}653$.

5. а) 0,0301; б) 0,943.

6. $M(X) = 1{,}32$; $D(X) = 0{,}8844$; $\sigma(X) = 0{,}94$; $\nu_1 = 1{,}32$; $\nu_2 = 2{,}6268$; $\nu_3 = 6{,}1028$; $\nu_4 = 15{,}927$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 0{,}8844$; $\mu_3 = 0{,}3006$; $\mu_4 = 2{,}0576$.

7. $\nu_1 = 0{,}2349$; $\nu_2 = 0{,}0764$; $\nu_3 = 0{,}0286$; $\nu_4 = 0{,}0115$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 0{,}0212$; $\mu_3 = 0{,}0006$; $\mu_4 = 0{,}0009$; $P = 0{,}646$.

Вариант 12.

1. $B = ((A_1 \cup A_2) \cap (A_3 \cup A_4)) \cup (A_5 \cap A_6)$;
$\bar{B} = ((\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) \cup (\bar{A}_3 \cap \bar{A}_4)) \cap (\bar{A}_5 \cup \bar{A}_6)$.

2. $N(3) = 912$; $N(4) = 1520$; $x = 12$.

3. $P(A) = 0{,}75$.

4. $P(H_1/A) = 0{,}498$.

5. а) 0,0069; б) 0,966.

6. $M(X) = 1{,}6336$; $D(X) = 0{,}985$; $\sigma(X) = 0{,}9923$; $\nu_1 = 1{,}6336$; $\nu_2 = 3{,}6531$; $\nu_3 = 11{,}046$; $\nu_4 = 41{,}707$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 0{,}985$; $\mu_3 = 1{,}8622$; $\mu_4 = 6{,}6528$.

7. $\nu_1 = 0{,}9396$; $\nu_2 = 1{,}2232$; $\nu_3 = 1{,}8296$; $\nu_4 = 2{,}9565$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 0{,}3402$; $\mu_3 = 0{,}0406$; $\mu_4 = 0{,}2213$; $P = 0{,}423$.

Вариант 13.

1. $B = (A_1 \cap A_2) \cup (A_3 \cap (A_4 \cup A_5) \cap A_6)$;
$\bar{B} = (\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2) \cap (\bar{A}_3 \cup (\bar{A}_4 \cap \bar{A}_5) \cup \bar{A}_6)$.

2. $N(3) = 780$; $N(4) = 1056$; $x = 15$.

3. $P(A) = 0{,}75$.

4. $P(H_1/A) = 0{,}417$.

5. а) 0,00001; б) 0,499.

6. $M(X) = 14$; $D(X) = 7054$;
$\sigma(X) = 83{,}988$; $\nu_1 = 14$; $\nu_2 = 7250$; $\nu_3 = 4\,655\,000$; $\nu_4 = 3\,285\,125\,000$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 7054$; $\mu_3 = 4\,355\,988$; $\mu_4 = 3\,032\,855\,752$.

7. $\nu_1 = 2{,}1415$; $\nu_2 = 4{,}728$; $\nu_3 = 10{,}754$; $\nu_4 = 25{,}169$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 0{,}1415$; $\mu_3 = 0{,}0225$; $\mu_4 = 0{,}0447$; $P = 0{,}867$.

Вариант 14.

1. $B = A_1 \cup (A_2 \cap A_3) \cup (A_4 \cap A_5) \cup A_6$;
$\bar{B} = \bar{A}_1 \cap (\bar{A}_2 \cup \bar{A}_3) \cap (\bar{A}_4 \cup \bar{A}_5) \cap \bar{A}_6$.
2. $N(3) = 258$; $N(4) = 341$; $x = 13$.
3. $P(A) = 0{,}466$.
4. $P(H_3/A) = 0{,}508$.
5. а) 0,0231; б) 0,736.
6. $M(X) = 2$; $D(X) = 1$; $\sigma(X) = 1$; $\nu_1 = 2$; $\nu_2 = 5$; $\nu_3 = 14$;
$\nu_4 = 42{,}5$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 1$; $\mu_3 = 0$; $\mu_4 = 2{,}5$.
7. $\nu_1 = 1{,}0707$; $\nu_2 = 1{,}182$; $\nu_3 = 1{,}3443$; $\nu_4 = 1{,}5731$; $\mu_1 = 0$;
$\mu_2 = 0{,}0353$; $\mu_3 = 0{,}0028$; $\mu_4 = 0{,}0028$; $P = 0{,}715$.

Вариант 15.

1. $B = ((A_1 \cup A_2) \cap (A_3 \cup A_4)) \cup (A_5 \cup A_6)$;
$\bar{B} = ((\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) \cup (\bar{A}_3 \cap \bar{A}_4)) \cap (\bar{A}_5 \cap \bar{A}_6)$.
2. $N(3) = 1162$; $N(4) = 1330$; $x = 17$.
3. $P(A) = 0{,}362$.
4. $P(H_1/A) = 0{,}385$.
5. а) 0,0499; б) 0,0001.
6. $M(X) = 3{,}76$; $D(X) = 0{,}2256$; $\sigma(X) = 0{,}475$; $\nu_1 = 3{,}76$;
$\nu_2 = 14{,}363$; $\nu_3 = 55{,}503$; $\nu_4 = 216{,}32$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 0{,}2256$;
$\mu_3 = -0{,}198$; $\mu_4 = 0{,}3019$.
7. $\nu_1 = 4{,}2831$; $\nu_2 = 18{,}912$; $\nu_3 = 86{,}036$; $\nu_4 = 402{,}71$; $\mu_1 = 0$;
$\mu_2 = 0{,}5663$; $\mu_3 = 0{,}1805$; $\mu_4 = 0{,}7163$; $P = 0$.

Вариант 16.

1. $B = ((A_1 \cup A_2) \cap A_3) \cup ((A_4 \cup A_5) \cap A_6)$;
$\bar{B} = ((\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) \cup \bar{A}_3) \cap ((\bar{A}_4 \cap \bar{A}_5) \cup \bar{A}_6)$.
2. $N(3) = 441$; $N(4) = 592$; $x = 50$.
3. $P(A) = 0{,}408$.
4. $P(H_3/A) = 0{,}421$.
5. а) 0,046; б) 0,888.
6. $M(X) = 2{,}32$; $D(X) = 0{,}9744$; $\sigma(X) = 0{,}987$; $\nu_1 = 2{,}32$;
$\nu_2 = 6{,}3568$; $\nu_3 = 19{,}113$; $\nu_4 = 61{,}389$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 0{,}9744$;
$\mu_3 = -0{,}156$; $\mu_4 = 2{,}3986$.
7. $\nu_1 = 1{,}294$; $\nu_2 = 2{,}0425$; $\nu_3 = 3{,}4819$; $\nu_4 = 6{,}1892$; $\mu_1 = 0$;
$\mu_2 = 0{,}3681$; $\mu_3 = -0{,}113$; $\mu_4 = 0{,}2764$; $P = 0{,}296$.

Вариант 17.

1. $B = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup (A_5 \cap A_6)$;
$\bar{B} = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4 \cap (\bar{A}_5 \cup \bar{A}_6)$.
2. $N(3) = 4761$; $N(4) = 8364$; $x = 12$.
3. $P(A) = 0{,}973$.
4. $P(H_1/A) = 0{,}333$.
5. а) 0,0852; б) 0,6195.

6. $M(X) = 0{,}12$; $D(X) = 0{,}1164$; $\sigma(X) = 0{,}3412$; $\nu_1 = 0{,}12$; $\nu_2 = 0{,}1308$; $\nu_3 = 0{,}15305$; $\nu_4 = 0{,}19951$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 0{,}1164$; $\mu_3 = 0{,}1094$; $\mu_4 = 0{,}1367$.

7. $\nu_1 = 1{,}8264$; $\nu_2 = 3{,}3585$; $\nu_3 = 6{,}2168$; $\nu_4 = 11{,}582$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 0{,}0225$; $\mu_3 = 0{,}0002$; $\mu_4 = 0{,}0009$; $P = 0{,}378$.

Вариант 18.

1. $B = (A_1 \cap A_2 \cap A_3) \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6$;
$\bar{B} = (\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \bar{A}_3) \cap \bar{A}_4 \cap \bar{A}_5 \cap \bar{A}_6$.

2. $N(3) = 6864$; $N(4) = 8164$; $x = 16$.

3. $P(A) = 0{,}952$.

4. $P(H_3/A) = 0{,}369$.

5. а) 0,0728; б) 0,5.

6. $M(X) = 1{,}3823$; $D(X) = 0{,}5853$; $\sigma(X) = 0{,}7651$; $\nu_1 = 1{,}3823$; $\nu_2 = 2{,}4961$; $\nu_3 = 6{,}0251$; $\nu_4 = 18{,}003$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 0{,}5853$; $\mu_3 = 0{,}9564$; $\mu_4 = 2{,}3521$.

7. $\nu_1 = 0{,}9132$; $\nu_2 = 0{,}8396$; $\nu_3 = 0{,}7771$; $\nu_4 = 0{,}7239$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 0{,}0056$; $\mu_3 = 0{,}00002$; $\mu_4 = 0{,}0001$; $P = 0{,}774$.

Вариант 19.

1. $B = (A_1 \cap A_2) \cup A_3 \cup A_4 \cup (A_5 \cap A_6)$;
$\bar{B} = (\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2) \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4 \cap (\bar{A}_5 \cup \bar{A}_6)$.

2. $N(3) = 2052$; $N(4) = 2904$; $x = 14$.

3. $P(A) = 0{,}023$.

4. $P(H_1/A) = 0{,}486$.

5. 176.

6. $M(X) = 2{,}068$; $D(X) = 0{,}9988$; $\sigma(X) = 0{,}9994$; $\nu_1 = 2{,}068$; $\nu_2 = 5{,}2754$; $\nu_3 = 15{,}006$; $\nu_4 = 46{,}134$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 0{,}9988$; $\mu_3 = -0{,}033$; $\mu_4 = 2{,}4953$.

7. $\nu_1 = 3{,}6529$; $\nu_2 = 13{,}434$; $\nu_3 = 49{,}7347$; $\nu_4 = 185{,}3233$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 0{,}0304$; $\mu_3 = 0{,}0013$; $\mu_4 = 0{,}0148$; $P = 0$.

Вариант 20.

1. $B = (A_1 \cup A_2 \cup (A_3 \cap A_4)) \cap (A_5 \cup A_6)$;
$\bar{B} = (\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap (\bar{A}_3 \cup \bar{A}_4)) \cup (\bar{A}_5 \cap \bar{A}_6)$.

2. $N(3) = 13\,680$; $N(4) = 15\,312$; $x = 11$.

3. $P(A) = 0{,}75$.

4. $P(H_1/A) = 0{,}39$.

5. а) 0,0098; б) 0,9857.

6. $M(X) = 2{,}5$; $D(X) = 1{,}25$; $\sigma(X) = 1{,}118$; $\nu_1 = 2{,}5$; $\nu_2 = 7{,}5$; $\nu_3 = 25$; $\nu_4 = 88{,}5$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 1{,}25$; $\mu_3 = 0$; $\mu_4 = 2{,}5625$.

7. $\nu_1 = 1{,}9419$; $\nu_2 = 3{,}8211$; $\nu_3 = 7{,}6155$; $\nu_4 = 15{,}365$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 0{,}0498$; $\mu_3 = 0{,}0012$; $\mu_4 = 0{,}0046$; $P = 0{,}393$.

Вариант 21.

1. $B = ((A_1 \cup A_2) \cup (A_3 \cap A_4)) \cap A_5 \cap A_6$;
$\bar{B} = ((\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) \cap (\bar{A}_3 \cup \bar{A}_4)) \cup \bar{A}_5 \cup \bar{A}_6$.
2. $N(3) = 1692$; $N(4) = 2071$; $x = 18$.
3. $P(A) = 0{,}041$.
4. $P(H_2/A) = 0{,}51$.
5. а) 0,047; б) 0,00027.
6. $M(X) = 2{,}(6)$; $D(X) = \frac{8}{9}$; $\sigma(X) = 0{,}943$; $\nu_1 = 2\frac{2}{3}$; $\nu_2 = 8$;
$\nu_3 = 25\frac{7}{9}$; $\nu_4 = 87{,}(407)$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = \frac{8}{9}$; $\mu_3 = -0{,}(296)$;
$\mu_4 = 2{,}(074)$.
7. $\nu_1 = 0{,}9709$; $\nu_2 = 0{,}9552$; $\nu_3 = 0{,}9519$; $\nu_4 = 0{,}9603$; $\mu_1 = 0$;
$\mu_2 = 0{,}0124$; $\mu_3 = 0{,}0002$; $\mu_4 = 0{,}0003$; $P = 0{,}511$.

Вариант 22.

1. $B = ((A_1 \cup A_2) \cap A_3) \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6$;
$\bar{B} = ((\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) \cup \bar{A}_3) \cap \bar{A}_4 \cap \bar{A}_5 \cap \bar{A}_6$.
2. $N(3) = 11193$; $N(4) = 14\,580$; $x = 14$.
3. $P(A) = 1$.
4. $P(H_1/A) = 0{,}286$.
5. а) 0; б) 0.
6. $M(X) = 1{,}4519$; $D(X) = 0{,}57933$; $\sigma(X) = 0{,}7611$;
$\nu_1 = 1{,}4519$; $\nu_2 = 2{,}6872$; $\nu_3 = 6{,}3465$; $\nu_4 = 18{,}004$; $\mu_1 = 0$;
$\mu_2 = 0{,}5793$; $\mu_3 = 0{,}7626$; $\mu_4 = 1{,}8043$.
7. $\nu_1 = 3{,}8839$; $\nu_2 = 15{,}284$; $\nu_3 = 60{,}924$; $\nu_4 = 245{,}84$; $\mu_1 = 0$;
$\mu_2 = 0{,}1994$; $\mu_3 = 0{,}01$; $\mu_4 = 0{,}0733$; $P = 0{,}462$.

Вариант 23.

1. $B = ((A_1 \cup A_2) \cap A_3 \cap (A_4 \cup A_5)) \cup A_6$;
$\bar{B} = ((\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) \cup \overline{A_3} \cup (\overline{A_4} \cap \overline{A_5})) \cap \overline{A_6}$.
2. $N(3) = 1305$; $N(4) = 1900$; $x = 16$.
3. $P(A) = 0{,}538$.
4. $P(H_1/A) = 0{,}457$.
5. а) 0,048; б) 0,971.
6. $M(X) = 1{,}875$; $D(X) = 1{,}1094$; $\sigma(X) = 1{,}0533$; $\nu_1 = 1{,}875$;
$\nu_2 = 4{,}625$; $\nu_3 = 13{,}875$; $\nu_4 = 46{,}625$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 1{,}1094$;
$\mu_3 = 1{,}0429$; $\mu_4 = 3{,}0422$.
7. $\nu_1 = 2{,}0406$; $\nu_2 = 4{,}2492$; $\nu_3 = 9{,}0235$; $\nu_4 = 19{,}521$; $\mu_1 = 0$;
$\mu_2 = 0{,}085$; $\mu_3 = 0{,}0051$; $\mu_4 = 0{,}0138$; $P = 0{,}507$.

Вариант 24.

1. $B = (A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cap (A_4 \cup A_5 \cup A_6)$;
$\bar{B} = (\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) \cup (\bar{A}_4 \cap \bar{A}_5 \cap \bar{A}_6)$.
2. $N(3) = 5913$; $N(4) = 8424$; $x = 7$.
3. $P(A) = 0{,}727$.

4. $P(H_2/A) = 0{,}563$.
5. а) 0,0257; б) 0,739.
6. $M(X) = 3{,}241$; $D(X) = 1{,}256$; $\sigma(X) = 1{,}121$; $\nu_1 = 3{,}2411$; $\nu_2 = 11{,}76$; $\nu_3 = 44{,}741$; $\nu_4 = 173{,}85$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 1{,}256$; $\mu_3 = -1{,}514$; $\mu_4 = 3{,}9997$.
7. $\nu_1 = 1{,}0203$; $\nu_2 = 1{,}0623$; $\nu_3 = 1{,}1279$; $\nu_4 = 1{,}22$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 0{,}0212$; $\mu_3 = 0{,}0006$; $\mu_4 = 0{,}0009$; $P = 0{,}417$.

Вариант 25.
1. $B = ((A_1 \cup (A_2 \cap A_3)) \cap (A_4 \cup A_5 \cup A_6))$;
$\overline{B} = (\overline{A}_1 \cap (\overline{A}_2 \cup \overline{A}_3)) \cup (\overline{A}_4 \cap \overline{A}_5 \cap \overline{A}_6)$.
2. $N(3) = 1680$; $N(4) = 2400$; $x = 13$.
3. $P(A) = 0{,}109$.
4. $P(H_2/A) = 0{,}565$.
5. а) 0,0142; б) 0,00001.
6. $M(X) = 3{,}3333$; $D(X) = 1{,}1111$; $\sigma(X) = 1{,}0541$; $\nu_1 = 3{,}3333$; $\nu_2 = 12{,}2222$; $\nu_3 = 46{,}6667$; $\nu_4 = 181{,}5556$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 1{,}1111$; $\mu_3 = -1{,}4815$; $\mu_4 = 3{,}7778$.
7. $\nu_1 = 4{,}0812$; $\nu_2 = 16{,}997$; $\nu_3 = 72{,}188$; $\nu_4 = 312{,}34$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 0{,}3402$; $\mu_3 = 0{,}0406$; $\mu_4 = 0{,}2213$; $P = 0{,}377$.

Вариант 26.
1. $B = (A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cap (A_4 \cup A_5 \cup A_6)$;
$\overline{B} = (\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3) \cup (\overline{A}_4 \cap \overline{A}_5 \cap \overline{A}_6)$.
2. $N(3) = 840$; $N(4) = 1246$; $x = 19$.
3. $P(A) = 0{,}219$.
4. $P(H_1/A) = 0{,}168$.
5. а) 0,0192; б) 0,984.
6. $M(X) = 1{,}3612$; $D(X) = 0{,}5155$; $\sigma(X) = 0{,}718$; $\nu_1 = 1{,}3612$; $\nu_2 = 2{,}3684$; $\nu_3 = 5{,}4244$; $\nu_4 = 15{,}41$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 0{,}5155$; $\mu_3 = 0{,}797$; $\mu_4 = 1{,}9058$.
7. $\nu_1 = 0{,}4388$; $\nu_2 = 0{,}2452$; $\nu_3 = 0{,}1509$; $\nu_4 = 0{,}0978$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 0{,}0527$; $\mu_3 = -0{,}003$; $\mu_4 = 0{,}0051$; $P = 0{,}446$.

Вариант 27.
1. $B = ((A_1 \cup A_2) \cap A_3 \cap A_4) \cup A_5 \cup A_6$;
$\overline{B} = ((\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) \cup \overline{A_3} \cup \overline{A_4}) \cap \overline{A_5} \cap \overline{A_6}$.
2. $N(3) = 2002$; $N(4) = 2688$; $x = 12$.
3. $P(A) = 0{,}123$.
4. $P(H_2/A) = 0{,}101$.
5. а) 0,0984; б) 0,99982.
6. $M(X) = 2{,}7344$; $D(X) = 1{,}5388$; $\sigma(X) = 1{,}2405$; $\nu_1 = 2{,}7344$; $\nu_2 = 9{,}0156$; $\nu_3 = 32{,}546$; $\nu_4 = 122{,}64$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 1{,}5388$; $\mu_3 = -0{,}52$; $\mu_4 = 3{,}3997$.
7. $\nu_1 = 0{,}2194$; $\nu_2 = 0{,}0613$; $\nu_3 = 0{,}0188$; $\nu_4 = 0{,}0061$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 0{,}0131$; $\mu_3 = -0{,}0004$; $\mu_4 = 0{,}0003$; $P = 0{,}344$.

Вариант 28.

1. $B = (A_1 \cap A_2 \cap A_3) \cup (A_4 \cap A_5) \cup A_6$;
$\bar{B} = (\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \bar{A}_3) \cap (\bar{A}_4 \cup \bar{A}_5) \cap \bar{A}_6$.
2. $N(3) = 740$; $N(4) = 935$; $x = 19$.
3. $P(A) = 0{,}2$; $P(B) = 0{,}143$.
4. $P(H_1/A) = 0{,}301$.
5. а) 0,0296; б) 0,1788.
6. $M(X) = 3{,}4065$; $D(X) = 1{,}0686$; $\sigma(X) = 1{,}0337$; $\nu_1 = 3{,}4065$; $\nu_2 = 12{,}672$; $\nu_3 = 48{,}848$; $\nu_4 = 191{,}26$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 1{,}0686$; $\mu_3 = -1{,}601$; $\mu_4 = 4{,}0256$.
7. $\nu_1 = 0{,}\,2744$; $\nu_2 = 0{,}0985$; $\nu_3 = 0{,}0394$; $\nu_4 = 0{,}0167$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 0{,}0232$; $\mu_3 = -0{,}0004$; $\mu_4 = 0{,}00097$; $P = 0{,}458$.

Вариант 29.

1. $B = ((A_1 \cap A_2) \cup A_3) \cup ((A_4 \cup A_5) \cap A_6)$;
$\bar{B} = ((\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2) \cap \bar{A}_3) \cap ((\bar{A}_4 \cap \bar{A}_5) \cup \bar{A}_6)$.
2. $N(3) = 2679$; $N(4) = 4136$; $x = 11$.
3. $P(A) = 0{,}824$.
4. $P(H_2/A) = 0{,}466$.
5. а) 0,0211; б) 0,99973.
6. $M(X) = 2{,}196$; $D(X) = 0{,}8696$; $\sigma(X) = 0{,}933$; $\nu_1 = 2{,}196$; $\nu_2 = 5{,}692$; $\nu_3 = 16{,}932$; $\nu_4 = 55{,}9$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 0{,}8695$; $\mu_3 = 0{,}6131$; $\mu_4 = 2{,}0973$.
7. $\nu_1 = 0{,}5489$; $\nu_2 = 0{,}3941$; $\nu_3 = 0{,}3153$; $\nu_4 = 0{,}2677$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 0{,}0928$; $\mu_3 = -0{,}0029$; $\mu_4 = 0{,}0154$; $P = 0{,}595$.

Вариант 30.

1. $B = (A_1 \cup A_2 \cup (A_3 \cap (A_4 \cup A_5)) \cup A_6)$;
$\bar{B} = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap (\bar{A}_3 \cup (\bar{A}_4 \cap \bar{A}_5)) \cap \bar{A}_6$.
2. $N(3) = 150$; $N(4) = 173$; $x = 22$.
3. $P(A) = 0{,}834$.
4. $P(H_1/A) = 0{,}419$.
5. а) 0,0574; б) 1.
6. $M(X) = 3{,}1383$; $D(X) = 1{,}348$; $\sigma(X) = 1{,}161$; $\nu_1 = 3{,}1383$; $\nu_2 = 11{,}1969$; $\nu_3 = 42{,}2164$; $\nu_4 = 163{,}1872$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 1{,}348$; $\mu_3 = -1{,}3836$; $\mu_4 = 3{,}8975$.
7. $\nu_1 = 0{,}647$; $\nu_2 = 0{,}5106$; $\nu_3 = 0{,}4352$; $\nu_4 = 0{,}3868$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 0{,}092$; $\mu_3 = -0{,}014$; $\mu_4 = 0{,}0172$.

ПРАКТИКУМ И ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО КУРСУ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ (ТИПОВЫЕ РАСЧЕТЫ)

Учебное пособие

Художественный редактор *С. Ю. Малахов*
Редактор *В. Г. Даниленко*
Технический редактор *Е. С. Жукович*
Корректоры *В. В. Вересиянова, А. М. Плетнева*
Подготовка иллюстраций *Е. М. Николаева*
Выпускающие *Е. А. Антипова, О. В. Шилкова*

ЛР № 065466 от 21.10.97
Гигиенический сертификат 78.01.07.953.П.004173.04.07
от 26.04.2007 г., выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»
lan@lpbl.spb.ru; www.lanbook.com
192029, Санкт-Петербург, Общественный пер., 5.

Тел./факс: (812) 412-29-35, 412-05-97, 412-92-72.
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

Подписано в печать 25.03.10.
Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Формат 84×108 $^1/_{32}$.
Печать офсетная. Усл. п. л. 15,12. Тираж 3000 экз.

Заказ № .

Отпечатано в полном соответствии
с качеством предоставленных диапозитивов
в ОАО «Издательско-полиграфическое предприятие «Правда Севера».
163002, г. Архангельск, пр. Новгородский, д. 32.
Тел./факс (8182) 64-14-54; www.ippps.ru