НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В. В. Комиссаров

ЛЕКЦИИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Новосибирск 2014

Содержание

1 Двойные и тройные интегралы

1.1 Основные понятия и определения для R^2

Определение 1. *Под δ-окрестностью точки M_0 будем понимать множество всех точек M, не совпадающих с M_0, расстояние до которых от точки M_0 меньше δ ($\delta > 0$), т. е. $0 < |MM_0| < \delta$.*

Таким образом в R^2 δ-окрестность — круг радиуса δ без границы и с выколотым центром M_0, в R^3 δ-окрестность — шар радиуса δ без границы и с выколотым центром M_0.

Определение 2. *Точку будем называть **внутренней точкой области**, если она принадлежит этой области, вместе со всеми точками какой-либо своей окрестности.*

Определение 3. ***Граничная точка** — любая её δ-окрестность содержит как внутренние точки, так и точки не принадлежащие области. Граница области:* Γ.

Определение 4. *Множество S **открытое**, если оно не содержит граничных точек.*

Определение 5. *Множество S **связано**, если $\forall$ две точки из S можно соединить кривой принадлежащей S.*

Определение 6. *Множество **замкнуто**: $\overline{S}$, если оно содержит все свои граничные точки: $\overline{S} = S \cup \Gamma$.*

Связанное открытое множество — *область*.

Замыкание связанного множества: $\overline{S}$ — *замкнутая область*.

Определение 7. *Множество точек называется **ограниченным**, если существует шар (круг) конечного радиуса с центром в любой точке множества, который полностью содержит данное множество; в противном случае множество называется **неограниченным**.*

Определение 8. *Совокупность подмножеств*

$$\{S_k\} = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$$

из области S называется ***разбиением*** *области S, если:*

$$\bigcup_{i=1}^{n} S_i = S \text{ и } S_i \cap S_j = \varnothing,\ i \neq j.$$

Если обозначить ΔS_i — площадь i-го подмножества из разбиения и ΔS — площадь множества, то

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \ldots + \Delta S_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i.$$

Определение 9. ***Диаметром*** *d области S называется верхняя грань расстояний $\rho(M, M') = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$ между точками $M(x,y)$ и $M'(x',y')$, принадлежащих S, т. е.*

$$d = \sup \rho(M, M') \text{ при } M(x,y) \in S,\ M'(x',y') \in S.$$

Определение 10. ***Диаметром разбиения*** *$\overline{d}$ — величина равная $\max\limits_k d_k = \overline{d}$, где d_k — диаметр области S_k.*

Определение 11. *Область S —* ***правильная в направлении оси*** *Oy (Ox), если любой вертикальный (горизонтальный) отрезок, оканчивающийся в S, целиком лежит в S.*

Область S будет правильная в направлении оси Oy $\Leftrightarrow$, если $\exists$ функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, заданные на некотором отрезке $[a, b]$, такие, что координаты точек, принадлежащих S удовлетворяют неравенствам:

$$a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$$

или

$$S = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}.$$

Правило для области правильной в направлении Oy. Для $\forall$ $c \in [a, b]$ проводим прямую $x = c$ (направленный отрезок прямой) и смотрим от какой функции и до какой эта прямая идёт.

Аналогично. Область S будет правильная в направлении оси Ox:

$$S = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d,\ \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}.$$

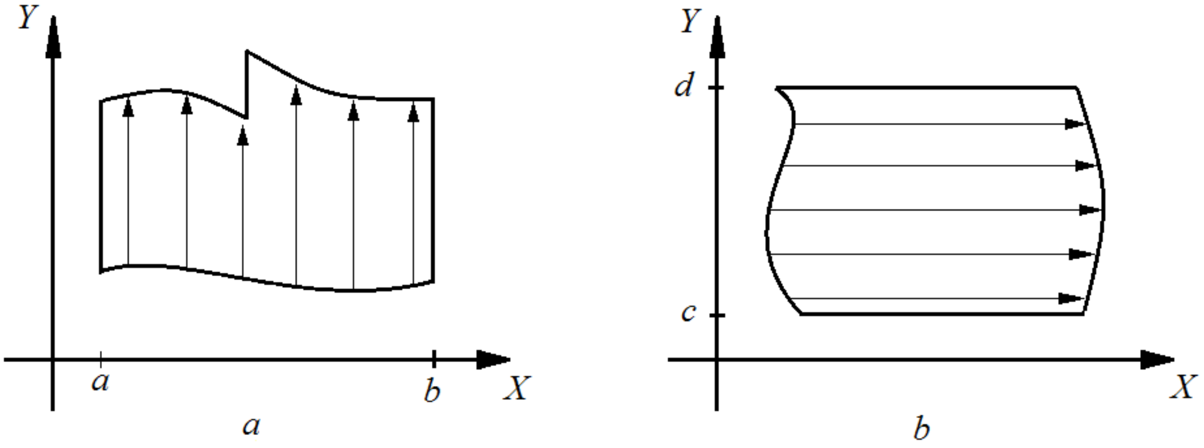


Рис. 1. Область правильная в направлении Oy — a, и область правильная в направлении Ox — b

Замечание. Область S правильная в направлении оси Oy ещё относят к типу I или называют *элементарной* относительно оси Oy, соответственно область S правильная в направлении оси Ox — тип II или *элементарная* относительно оси Ox.

Произвольную область S можно подходящим образом разбить на неимеющие общих внутренних точек области S_1, S_2, ... S_n каждая из которых правильная хотя бы в одном их направлений Ox или Oy.

Примеры

1) Записать область, ограниченную линиями, как область правильную в направлении Oy и Ox:
   $S : x = 2,\ x = 4,\ y = 1,\ y = 5;$

2) записать область, заданную неравенством, как область правильную в направлении Oy и Ox:
$S: \ \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4x\}$;

3) записать область, заданную системой неравенств, как область правильную в направлении Oy и Ox:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 9, \\ y \geq 0, \\ x + y \geq 0. \end{cases}$$

1.2 Интегральные суммы. Двойной интеграл

Рассмотрим область S в R^2, $z = f(x, y)$ — ограниченная функция, заданная в S. $\{S_k\} = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ — разбиение области S. $\overline{d} = \max\limits_k d_k$, где d_k — диаметр области S_k. Точка $M_k(\xi_k, \eta_k) \in S_k$. ΔS_k — площадь S_k.

Запишем интегральную сумму:

$$I_n = \sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta S_k = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta S_k.$$

Определение 12. *Конечный предел I интегральной суммы I_n при $\overline{d} \to 0$ $n \to \infty$ называется **двойным интегралом** от функции $f(x, y)$ по области S и обозначается:*

$$I = \iint\limits_S f(x, y)\Delta S \text{ или } \iint\limits_S f(x, y)dxdy.$$

Функция $f(x, y)$ называется в этом случае *интегрируемой в смысле Римана* (по Риману) в области S, т. е.

$$I = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \overline{d} \to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta S_k = \iint\limits_S f(x, y)\Delta S$$

для $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta(\varepsilon) > 0$, что $|I_n - I| < \varepsilon$ или

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta S_k - \iint\limits_S f(x,y)\Delta S\right| < \varepsilon$$

будет выполняться при любом разбиении $\{S_k\}$ и любом выборе точек $M_k \in S_k$, если только $d_k \leq \overline{d} < \delta(\varepsilon)$.

Если $z = f(x,y) \geq 0$, то численно двойной интеграл будет равен объему тела, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x,y)$, снизу — плоскостью $z = 0$ и с боков цилиндрической поверхностью с у которой направляющей является граница области S: ∂S, а образующие параллельны оси Oz.

1.2.1 Критерий Коши интегрируемости функции. Классы интегрируемых функций

Теорема 1 (Критерий Коши). *Для того, чтобы ограниченная в области S функция $f(x,y)$ была интегриуема в смысле Римана в области S, необходимо и достаточно, чтобы для произвольного $\varepsilon > 0$ нашлось разбиение $\{S_k\}$ области S такое, что*

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k \Delta S_k < \varepsilon,$$

где $\omega_k = \sup\limits_{S_k} f(x,y) - \inf\limits_{S_k} f(x,y)$ — колебание функции в области S_k; ΔS_k — площадь S_k; $\sup\limits_{S_k} f(x,y)$ и $\inf\limits_{S_k} f(x,y)$ — точные верхняя и нижняя грани значений функции $f(x,y)$ в S_k.

Критерию интегрируемости удовлетворяют следующие классы функций:

a) непрерывные в области S;

b) кусочно-непрерывные в области S;

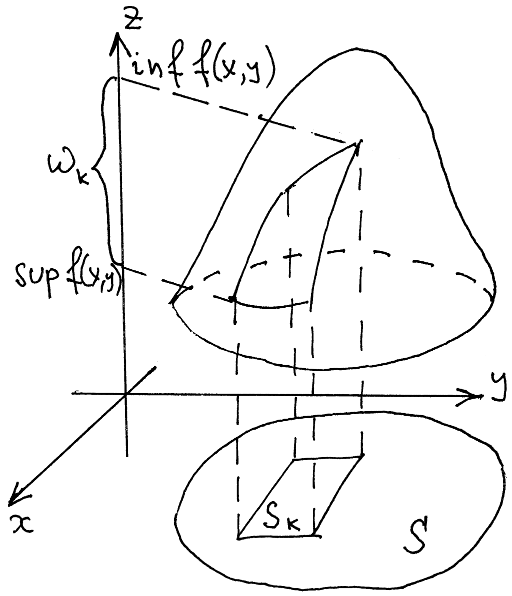


Рис. 2. Критерий Коши интегрируемости функции

Определение 13. *Если ограниченная функция $f(x, y)$ имеет разрывы лишь на конечном числе кривых, принадлежащих области S, то эта функция кусочно-непрерывная.*

1.2.2 Свойства двойного интеграла

1. Линейность. Если $f(x, y)$ и $g(x, y)$ интегрируемы в области S, то для $\forall\ \alpha, \beta\ \in R$ функция $\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)$ также интегрируема в области S, причём:
$$\iint\limits_S (\alpha f(x, y) + \beta g(x, y))dS = \iint\limits_S \alpha f(x, y)dS + \iint\limits_S \beta g(x, y)dS.$$
2. Если $h(x, y)$ интегрируема в области S и всюду в области S $h(x, y) \geq 0$, то
$$\iint\limits_S h(x, y)dS \geq 0.$$
Замечание. Свойство обобщается для алгебраической суммы любого конечного числа слагаемых:
$$\alpha_1 f(x, y)_1 + \alpha_2 f(x, y)_2 + \ldots + \alpha_k f(x, y)_k,$$

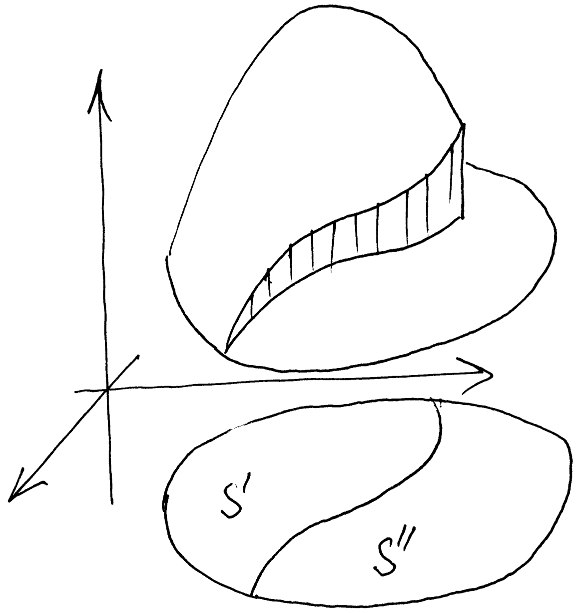


Рис. 3. Кусочно-непрерывная функция

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — постоянные.

3. Если функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ интегрируемы в области S и всюду в области S $f(x, y) \leq g(x, y)$, то:

$$\iint\limits_S f(x, y)dS \leq \iint\limits_S g(x, y)dS.$$

4. Аддитивность. Если область S, в которой задана функция $f(x, y)$, кривой γ разбивается на две области S' и S'', то из интегрируемости функции во всей области S следует интегрируемость в областях S' и S'' и обратно — из интегрируемости функции в областях S' и S'' вытекает интегрируемость в S, при этом:

$$\iint\limits_S f(x, y)dS = \iint\limits_{S'} f(x, y)dS + \iint\limits_{S''} f(x, y)dS.$$

5. $\iint\limits_S 1 \cdot dS = \Delta S$, где ΔS — площадь области S.

6. Теорема о среднем значении. Если интегрируемая в области S функция $f(x, y)$ удовлетворяет неравенству:

$$m \leq f(x, y) \leq M,$$

где M и m — точные верхняя и нижняя грани $f(x, y)$ в S, то

(a) $m \cdot \Delta S \leq \iint\limits_S f(x, y) dS \leq M \cdot \Delta S$;

(b) найдётся число μ, удовлетворяющее условиям $m \leq \mu \leq M$ и такое, что справедлива формула *среднего значения*:

$$\iint\limits_S f(x, y) dS = \mu \cdot \Delta S.$$

В частности, если $f(x, y)$ непрерывна в односвязанной области S, то найдётся такая точка (x', y'), что последняя формула примет вид:

$$\iint\limits_S f(x, y) dS = f(x', y') \cdot \Delta S.$$

7. Если функция $f(x, y)$ интегрируема в области S, то $|f(x, y)|$ также интегрируема в области S, причём:

$$\left| \iint\limits_S f(x, y) dS \right| \leq \iint\limits_S |f(x, y)| \, dS.$$

8. Если $f(x, y) = 0$ в любой точке области S, то:

$$\iint\limits_S f(x, y) dS = \iint\limits_S 0 dS = 0.$$

1.3 Вычисление двойного интеграла

Определение 14. ***Повторный интеграл***

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$

будем понимать как определённый интеграл (Римана) по переменному y для функции $f(x,y)$, проинтегрированный по переменному x, или как приращение первообразной $F(x,y)$ (по переменному y) для функции $f(x,y)$, проинтегрированному по переменному x, т. е.

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \right) dx =$$

$$= \int\limits_a^b F(x,y)\Bigg|_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} dx = \int\limits_a^b (F(x,y_2(x)) - F(x,y_1(x)))dx.$$

Интеграл по y — внутренний, по x — внешний.

Определение 15. *Повторный интеграл*

$$\int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$$

будем понимать как определённый интеграл по переменному x для функции $f(x,y)$, проинтегрированный по переменному y, или как приращение первообразной $\Phi(x,y)$ (по переменному x)

для функции $f(x,y)$, проинтегрированному по переменному y, т. е.

$$\int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx = \int_c^d \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx \right) dy =$$

$$= \int_c^d \Phi(x,y)\Bigg|_{x=x_1(y)}^{x=x_2(y)} dy = \int_c^d (\Phi(x_2(y),y) - \Phi(x_1(y),y))dy.$$

Интеграл по x — внутренний, по y — внешний.

Пример

$$\int_1^2 dx \int_x^{x^2} (x-2y)dy = -\frac{49}{20}\,.$$

1.3.1 Приведение двойного интеграла к повторному

Прямоугольная область: $\Pi: \ \{a \le x \le b;\, c \le y \le d\}$.

Теорема 2. *Пусть в области $\Pi: \ \{a \le x \le b;\, c \le y \le d\}$ задана интегрируемая функция $f(x,y)$, т. е. существует двойной интеграл $\iint\limits_S f(x,y)dS$. Пусть, кроме того, существует повторный интеграл $\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy$. Тогда этот повторный интеграл равен двойному, т. е. имеет место равенство:*

$$\iint\limits_S f(x,y)dS = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy.$$

Доказательство

Разобьём область горизонтальными и вертикальными линиями на прямоугольники, $\Delta S_k = \Delta x_k \Delta y_k$. Интегральная сумма:

$$S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i \Delta y_j.$$

Переходя к пределу и группируя слагаемые доказываем теорему.

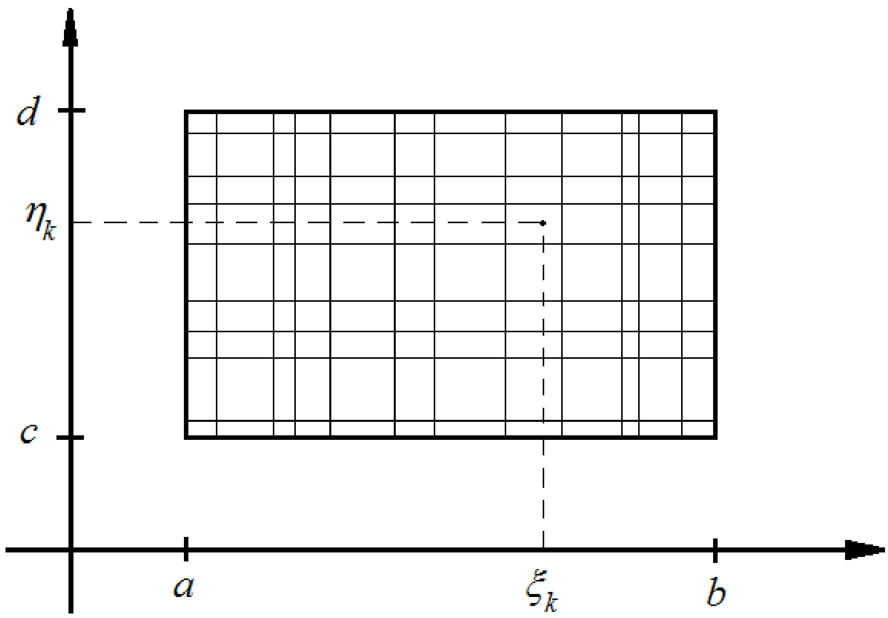


Рис. 4. Прямоугольная область: $\Pi: \ \{a \le x \le b; \, c \le y \le d\}$

Аналогично получим:

$$\iint\limits_S f(x,y) dS = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y) dx.$$

Правые части отличаются только порядком интегрирования.

Пусть S — область правильная в направлении оси Oy.

$$S = \{(x,y) \mid a \le x \le b, \ y_1(x) \le y \le y_2(x)\}.$$

Теорема 3. *Пусть в области в правильной в направлении оси Oy задана интегриуемая функция $f(x,y)$, т. е. существует* *двойной интеграл* $\iint\limits_S f(x,y)dS$. *Пусть, кроме того, существует повторный интеграл* $\int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$. *Тогда:*

$$\iint\limits_S f(x,y)dS = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy.$$

Доказательство

Для доказательства рассмотрим в прямоугольной области $\Pi:\ \{a \leq x \leq b;\ c \leq y \leq d\}$ вспомогательную функцию:

$$g(x,y) = \begin{cases} f(x,y),\ x \in S, \\ 0,\ x \in \Pi \setminus S. \end{cases}$$

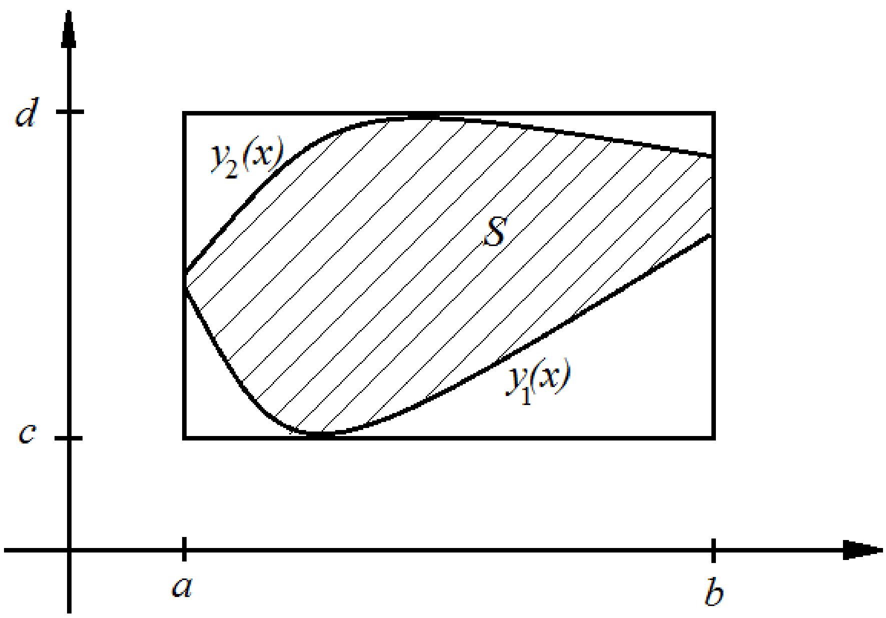


Рис. 5. Область праильная в направлении Oy: $a \leq x \leq b,\ y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$

Доказываемое утверждение следует из предыдущей теоремы и свойств двойного интеграла 4 и 8.

Аналогичное равенство имеем для области правильной в направлении оси Ox: $S = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d,\ x_1(y) \leq x \leq x_2(y)\}$.

$$\iint\limits_S f(x,y)dS = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx.$$

Примеры

1. Вычислить двойной интеграл от функции $f(x, y) = x - 2y$ по области, ограниченной линиями: $y = x$, $y = x^2$, $x = 2$.
2. Вычислить двойной интеграл от функции $f(x, y) = xy$ по области, ограниченной линиями: $y = x$, $y = (x - 2)^2$, $x = 3$.

1.4 Замена переменных в двойном интеграле

Для вычисления двойного интеграла иногда удобнее перейти в другую систему координат. Это может быть обусловлено формой области интегрирования или сложностью подынтегральной функции. В новой системе координат вычисление двойного интеграла значительно упрощается.

Между областями S и P установлено взаимно-однозначное соответствие:

$$x = x(u, v),\ y = y(u, v) \text{ — прямое},$$

$$u = u(x, y),\ v = v(x, y) \text{ — обратное}.$$

Определение 16. *Преобразование* $x = x(u, v),\ y = y(u, v)$ *области* P *на область* S *называется непрерывным, если функции* $x = x(u, v),\ y = y(u, v)$ *непрерывны в* P.

Если преобразование непрерывно, то обратное преобразование тоже непрерывно.

Свойства взаимно-однозначных преобразований:

1) непрерывная линия, принадлежащая области P, переходит в непрерывную линию в S;

2) замкнутая область переходит в замкнутую.

Определение 17. *Преобразование — **дифференцируемое** или **гладкое**, если функции $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ имеют непрерывные частные производные: x'_u, x'_v, y'_u, y'_v.*

Обратное преобразование дифференцируемо, если дифференцируемо прямое преобразование и если не обращается в нуль определитель:

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}.$$

$J(u, v)$ — определитель Якоби (якобиан).

1.4.1 Связь между дифференциалами $dS = dxdy$ и $dP = dudv$

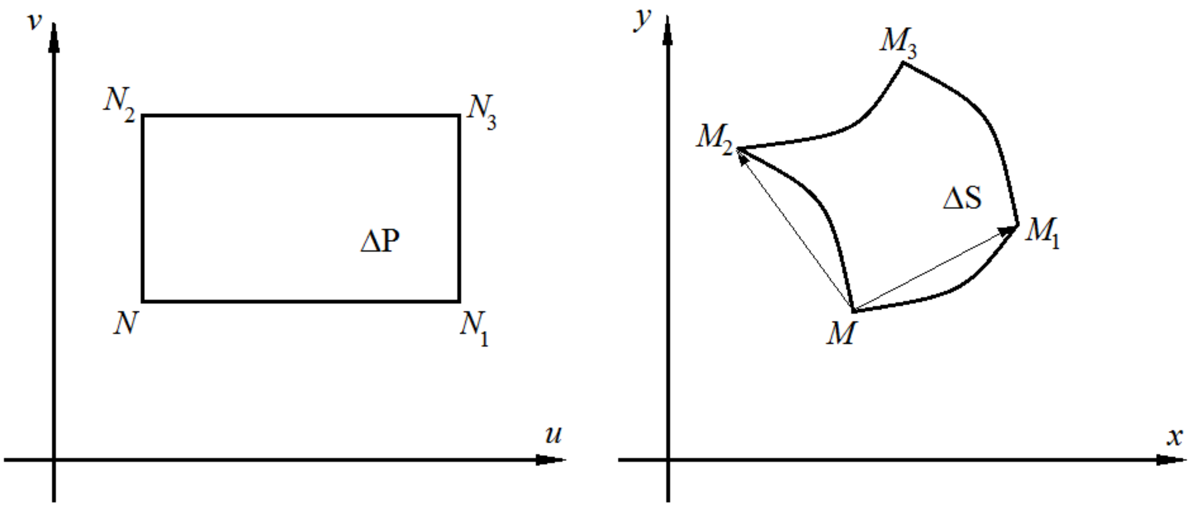


Рис. 6. Связь между дифференциалами $dS = dxdy$ и $dP = dudv$

$$N(u, v),\ N_1(u + \Delta u, v),\ N_2(u, v + \Delta v),\ N_3(u + \Delta u, v + \Delta v).$$

$$x = x(u, v),\ y = y(u, v).$$

$$M(x, y),\ M_1(x_1, y_1),\ M_2(x_2, y_2),\ M_3(x_3, y_3).$$

$$x_1 = x + \Delta_u x,\ y_1 = y + \Delta_u y,\ x_2 = x + \Delta_v x,\ y_2 = y + \Delta_v y.$$

$MM_1M_2M_3$ — близка к параллелограмму $\Rightarrow$

$$\Delta S \approx \left|\overrightarrow{MM_1} \times \overrightarrow{MM_2}\right| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 - x & y_1 - y & 0 \\ x_2 - x & y_2 - y & 0 \end{vmatrix}$$

$$x_1 - x = \Delta_u x \approx x'_u du,\ x_2 - x = \Delta_v x \approx x'_v dv,$$

$$y_1 - y = \Delta_u y \approx y'_u du,\ y_2 - y = \Delta_v y \approx y'_v dv.$$

$$\Delta S \approx \begin{vmatrix} x'_u du & y'_u du \\ x'_v dv & y'_v dv \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} \cdot |dudv| = |J(u, v)| \cdot |dudv|.$$

Главная часть площади ΔS равна абсолютной величине дифференциала dS:

$$dS = |J(u, v)| \cdot dP = |J(u, v)| \cdot dudv.$$

Теорема 4. *Пусть $x = x(u, v),\ y = y(u, v)$ дифференцируемые преобразования из P плоскости Ouv на S плоскости Oxy. Тогда:*

$$\iint\limits_S f(x, y)dS = \iint\limits_S f(x(u, v), y(u, v))|J(u, v)|dudv.$$

Якобиан служит коэффициентом растяжения (сжатия) площади области при замене переменных.

1.4.2 Криволинейные координаты

Двойной интеграл в полярной системе координат:

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,$$

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2},\ \mathrm{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$

$$J(\rho,\varphi) = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\varphi \\ y'_\rho & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho\cos^2\varphi + \rho\sin^2\varphi = \rho.$$

Тогда $\displaystyle\iint\limits_S f(x,y)dxdy = \iint\limits_S f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi.$

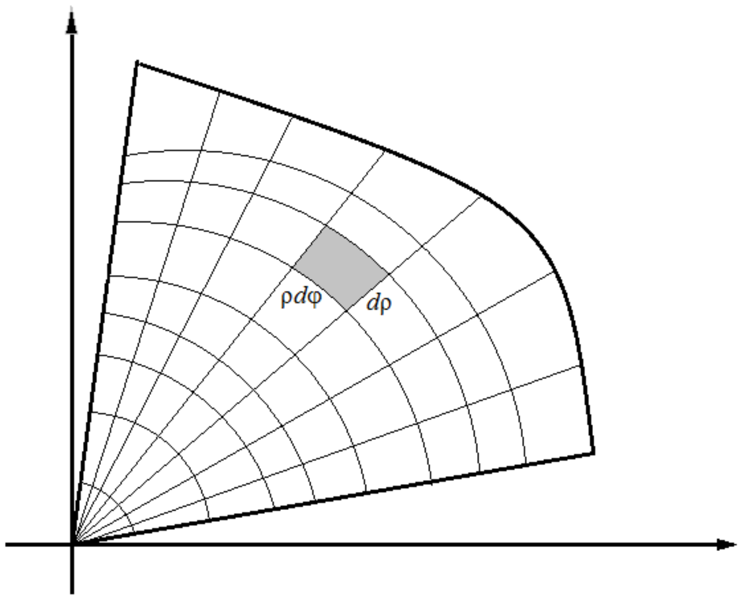


Рис. 7. $dxdy = \rho d\rho d\varphi$

Примеры

1. Вычислить двойной интеграл $\displaystyle\iint\limits_S (4-y)dxdy$ по области, заданной неравенством: $x^2+y^2 \le 4x$.

2. Вычислить двойной интеграл $\displaystyle\iint\limits_D (x-y)dxdy$ по области, за-

данной системой неравенств:

$$D: \begin{cases} 2x \le x^2 + y^2 \le 4x, \\ x \ge 0, \ y \ge 0. \end{cases}$$

Двойной интеграл в обобщённой полярной системе координат:

$$x = a\rho\cos\varphi, \ y = b\rho\sin\varphi,$$

$$J(\rho, \varphi) = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & -a\rho\sin\varphi \\ b\sin\varphi & b\rho\cos\varphi \end{vmatrix} = ab\rho.$$

Пример

Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_S x^2 dxdy$ по области, ограниченной линией: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

1.5 Приложения двойного интеграла

1.5.1 Масса пластинки

$\mu(x, y)$ — поверхностная плотность.

$$\Delta m_k = \mu(\xi_k, \eta_k)\Delta S_k,$$

$$m_n = \sum_k \Delta m_k = \sum_{k=1}^{n} \mu(\xi_k, \eta_k)\Delta S_k,$$

$$\overline{d} \to 0, \ n \to \infty,$$

$$m = \iint\limits_S \mu(x, y)dxdy.$$

Пример

Вычислить массу пластины, ограниченной линиями: $x = 0$, $y = 0$, $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ и поверхностной плотностью $\mu(x, y) = x^2 + y^2$.

1.5.2 Площадь плоской фигуры

$$\Delta S = \iint\limits_S 1 \cdot dS = \iint\limits_S dxdy, \text{ где } \Delta S \text{ — площадь области } S.$$

Примеры

1. С помощью двойного интеграла вычислить площадь круга радиуса R.
2. С помощью двойного интеграла вычислить площадь эллипса: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

1.5.3 Вычисление объёмов тела

Если $z = f(x, y) \geq 0$, то численно двойной интеграл будет равен объему тела, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y)$, снизу — плоскостью $z = 0$ и с боков цилиндрической поверхностью с у которой направляющей является граница области S: ∂S, а образующие параллельны оси Oz.

$$V = \iint\limits_S f(x, y)dxdy.$$

Пример

Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями: $z = x^2 + y^2$ и $z = 1$.

$$V = V_2 - V_1,\ V_2 = \pi R^2 h = \pi,\ V_1 = \iint\limits_S (x^2 + y^2)dxdy.$$

1.5.4 Площадь поверхности

Задана поверхность σ: $z = z(x, y)$.

Векторное уравнение поверхности: $\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z(x, y) \cdot \vec{k}$.

Пример. Векторное уравнение параболоида $z = x^2 + y^2$: $\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + (x^2 + y^2) \cdot \vec{k}$.

Определение 18. *Поверхность σ, заданная в векторном виде $\vec{r} = \vec{r}(x, y)$, называется гладкой, если вектор-функция $\vec{r} = \vec{r}(x, y)$ непрерывно дифференцируема в S_{xy} и для каждой точки поверхности векторное произведение векторов $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial y}$ отлично от нуля:* $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial y} \neq 0$

Положим $y = y_0$, тогда имеем векторное уравнение линии:

$$\gamma_1: \ \vec{r}_1(x) = x \cdot \vec{i} + y_0 \cdot \vec{j} + z(x, y_0) \cdot \vec{k}.$$

Аналогично, при $x = x_0$:

$$\gamma_2: \ \vec{r}_2(y) = x_0 \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z(x_0, y) \cdot \vec{k}.$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{r}_x = \dfrac{\partial \vec{r}_1}{\partial x} = (1, 0, z'_x), \\ \vec{r}_y = \dfrac{\partial \vec{r}_2}{\partial y} = (0, 1, z'_y), \end{array}\right\} \text{касательные векторы к } \gamma_1 \text{ и } \gamma_2$$

$$\vec{n} = \vec{r}_x \times \vec{r}_y = (-z'_x, -z'_y, 1) \text{ — нормаль.}$$

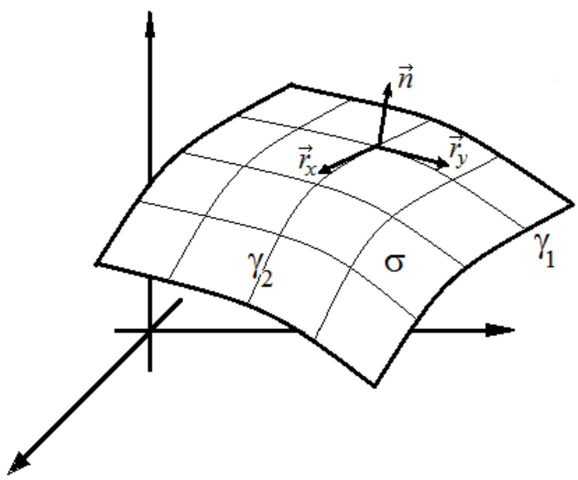


Рис. 8. Нормаль к поверхности σ и касательные векторы

$\vec{n}^0 = \dfrac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k}$ — единичный вектор нормали.

$$\cos\alpha = -\frac{z'_x}{|\vec{n}|},\ \cos\beta = -\frac{z'_y}{|\vec{n}|},\ \cos\gamma = \frac{1}{|\vec{n}|}.$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}.$$

Найдём площадь незамкнутой гладкой поверхности σ: $z = z(x, y)$, ограниченной контуром l. Пусть S_{xy} — проекция σ на Oxy.

Разобьём σ на части линиями $y = y_m$, $x = x_l$.

$$\vec{r}_x(x_l, y_m)\Delta x_l,\ \vec{r}_y(x_l, y_m)\Delta y_m \text{ — касательные векторы.}$$

$$\Delta x_l = x_{l+1} - x_l,\ \Delta y_m = y_{m+1} - y_m.$$

Интегральная сумма:

$$\Delta\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \Delta\sigma_k = \sum_l \sum_m |\vec{r}_x \Delta x_l \times \vec{r}_y \Delta y_m| =$$

$$= \sum_l \sum_m |\vec{n}(x_l, y_m)| \cdot |\Delta x_l \Delta y_m| =$$

$$= \sum_l \sum_m \sqrt{1 + z'^2_x(x_l, y_m) + z'^2_y(x_l, y_m)} \cdot |\Delta x_l \Delta y_m|.$$

В результате, переходя к пределу $\overline{d} \to 0,\ n \to \infty$, получим:

$$\Delta\sigma = \iint\limits_{S_{xy}} \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}\,dxdy = \iint\limits_{S_{xy}} \frac{dxdy}{|\cos\gamma|}.$$

Аналогично получим формулы:

а) если σ: $y = y(x, z)$, то

$$\Delta\sigma = \iint\limits_{S_{xz}} \sqrt{1 + y'^2_x + y'^2_z}\,dxdz;$$

b) если σ: $x = x(y, z)$, то

$$\Delta\sigma = \iint\limits_{S_{yz}} \sqrt{1 + x_y'^2 + x_z'^2} dydz;$$

c) если σ: $F(x, y, z) = 0$, то учитывая, $z_x' = \dfrac{F_x'}{F_z'}$, $z_y' = \dfrac{F_y'}{F_z'}$:

$$\Delta\sigma = \iint\limits_{S_{xy}} \frac{\sqrt{F_x'^2 + F_y'^2 + F_z'^2}}{|F_z'|} dxdy.$$

Пример.

Найти площадь поверхности части параболоида $z = x^2 + y^2$ при $z \leq 1$.

1.5.5 Статические моменты и координаты центра тяжести

Статические моменты плоской фигуры D относительно осей Ox и Oy ($S = md$):

$$S_x = \iint\limits_D y\mu(x, y)dxdy, \; S_y = \iint\limits_D x\mu(x, y)dxdy.$$

Координаты центра масс:

$$x_c = \frac{S_y}{m}, \; y_c = \frac{S_x}{m}.$$

1.5.6 Момент инерции плоской фигуры

Момент инерции $M = md^2$.

$$M_x = \iint\limits_D y^2\mu(x, y)dxdy, \; M_y = \iint\limits_D x^2\mu(x, y)dxdy.$$

Момент инерции относительно начала координат: $M_0 = M_x + M_y$.

1.6 Тройные интегралы

Область V — правильная в направлении оси Oz, если любой отрезок, параллельный оси Oz и оканчивающийся в V, целиком принадлежит области V.

Область V будет правильной в направлении оси $Oz \Leftrightarrow \exists$ функции $z = z_1(x, y)$ и $z = z_2(x, y)$, заданные в S (проекция на Oxy), что

$$V: \{(x, y) \in S,\ z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\}$$

При пересечении правильной в направлении Oz области V плоскостями параллельными оси Oz, в сечении получается правильная в направлении Oz плоскость (w).

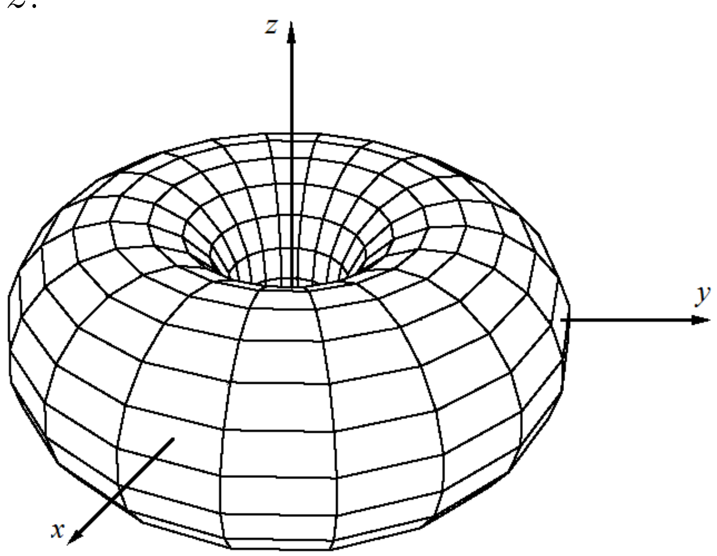
Если, в свою очередь, область S правильная в направлении Oy, то правильную в направлении Oz область V можно задать следующим образом:

$$V: \{a \leq x \leq b;\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x);\ z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\}$$

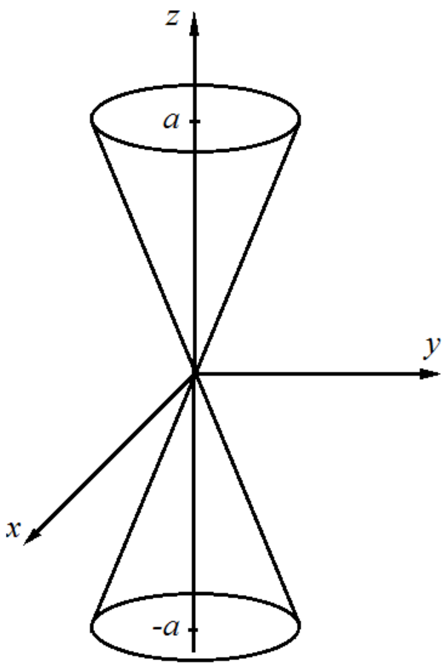
Аналогично задаются области правильные в направлении Ox и Oy.

Примеры

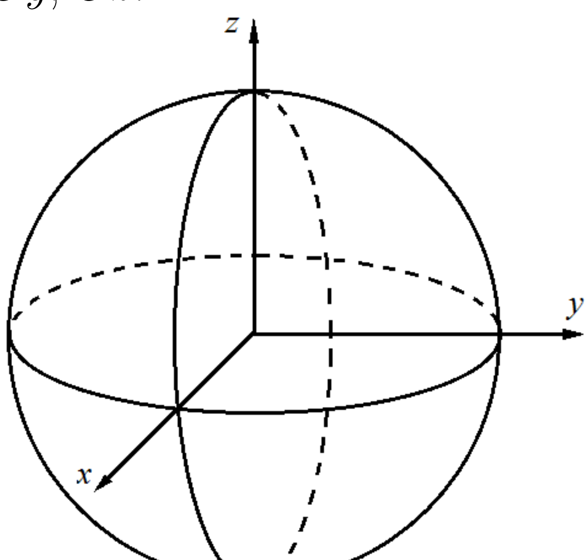
1. Тор («бублик») — область правильная только в направлении Oz.



2. $z^2 = b(x^2 + y^2)$, $z = a$, $z = -a$ — область правильная в направлении Ox, Oy.



3. $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ — область правильная в направлении Ox, Oy, Oz.



Рассмотрим в R^3 область V.

$$\{V_k\} = \{V_1, V_2, \dots, V_n\} \text{ — разбиение области.}$$

d_k — диаметр k-ой области, $M(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ — произвольная точка в k-ой области.

Запишем интегральную сумму:

$$I_n = \sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta V_k = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta V_k.$$

Если существует конечный предел

$$I = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \overline{d}\to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta V_k = \iiint\limits_V f(x,y,z)\Delta V,$$

то функция $f(x,y,z)$ называется в этом случае *интегрируемой в смысле Римана* (по Риману) в области V, т. е. для $\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, \delta(\varepsilon) > 0$, что $|I_n - I| < \varepsilon$ или

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta V_k - \iiint\limits_V f(x,y,z)\Delta V \right| < \varepsilon$$

будет выполняться при любом разбиении $\{V_k\}$ и любом выборе точек $M_k \in V_k$, если только $d_k \le \overline{d} < \delta(\varepsilon)$.

Определение 19. *Конечный предел I интегральной суммы I_n при $\overline{d} \to 0$ $n \to \infty$ называется* ***тройным интегралом*** *от функции $f(x,y,z)$ по области V и обозначается:*

$$I = \iiint\limits_V f(x,y,z)\Delta V \;\textit{или}\; \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz.$$

Теорема 5 (Критерий Коши интегрируемости функции) *Для того, чтобы ограниченная в области V функция $f(x,y,z)$ была интегриуема в смысле Римана в области V, необходимо и достаточно, чтобы для произвольного $\varepsilon > 0$ нашлось разбиение $\{V_k\}$ области V такое, что*

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k \Delta V_k < \varepsilon,$$

где $\omega_k = \sup\limits_{V_k} f(x,y,z) - \inf\limits_{V_k} f(x,y,z)$ *— колебание функции в области* V_k*;* ΔV_k *— объём* V_k*;* $\sup\limits_{V_k} f(x,y,z)$ *и* $\inf\limits_{V_k} f(x,y,z)$ *— точные верхняя и нижняя грани значений функции* $f(x,y,z)$ *в* V_k*.*

Критерию интегрируемости удовлетворяют следующие классы функций:

a) непрерывные в области V;

b) ограниченные функции f, имеющие разрывы лишь на конечном числе поверхностей и линий, принадлежащих области V (кусочно-непрерывные в области V);

Свойства тройного интеграла аналогичны свойствам двойного интеграла.

1.7 Вычисление тройного интеграла

Определение 20. ***Повторный интеграл***

$$\iint\limits_{S_{xy}} dS \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

будем понимать как определённый интеграл (Римана) по переменному z *для функции* $f(x,y,z)$*, проинтегрированный по области* S_{xy}*, принадлежащей плоскости* Oxy*, или как приращение первообразной* $\Phi(x,y,z)$ *(по переменному* z*) для функции* $f(x,y,z)$*, проинтегрированному по* S_{xy}*, т. е.*

$$\iint\limits_{S_{xy}} dS \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz = \iint\limits_{S_{xy}} \left(\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x)} f(x,y,z)dz \right) dx =$$

$$= \iint\limits_{S_{xy}} (\Phi(x,y,z_2(x,y)) - \Phi(x,y,z_1(x,y)))dz.$$

Аналогично определяются:

$$\iint\limits_{S_{yz}} dS \int\limits_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x,y,z)dx \text{ и } \iint\limits_{S_{xz}} dS \int\limits_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)} f(x,y,z)dy.$$

Рассмотрим область V правильную в направлении Oz. Пусть она ограничена непересекающимися поверхностями $z = z_1(x, y)$, $z = z_2(x, y)$ $(x, y) \in S_{xy}$ и цилиндрической поверхностью: $F(x, y) = 0$.

$$V: \ \{(x,y) \in S_{xy}; z_1(x,y) \leq z \leq z_2(x,y)\}$$

S_{xy} — проекция V на Oxy.

Теорема 6. *Пусть в области*

$$V: \ \{(x,y) \in S_{xy}; z_1(x,y) \leq z \leq z_2(x,y)\}$$

задана интегриуемая функция $f(x, y, z)$, т. е. существует тройной интеграл $\iiint\limits_V f(x,y,z)dV$. Пусть, кроме того, существует повторный интеграл $\iint\limits_{S_{xy}} dS \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$. Тогда справедлива формула:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV = \iint\limits_{S_{xy}} dS \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

Пример

Вычислить тройной интеграл: $\iiint\limits_V xdxdydz$ по области V, ограниченной поверхностями:

$$x = 2, \ y = 0, \ y = x/2, \ z = 0, \ z = x^2 + y^2 + 1.$$

1.8 Замена переменных в тройном интеграле

Имеем в пространстве R^3:

1) $V: \ Oxyz$ и $\Omega: \ Ouvw$ — замкнутые области;

2) имеется взаимно-однозначное соответствие между областями;

3) $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$;

4) преобразование непрерывное и якобиан преобразования $J(u, v, w)$ не обращается в нуль ни в одной точке области Ω.

$$J(u, v, w) = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \\ x'_w & y'_w & z'_w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix}$$

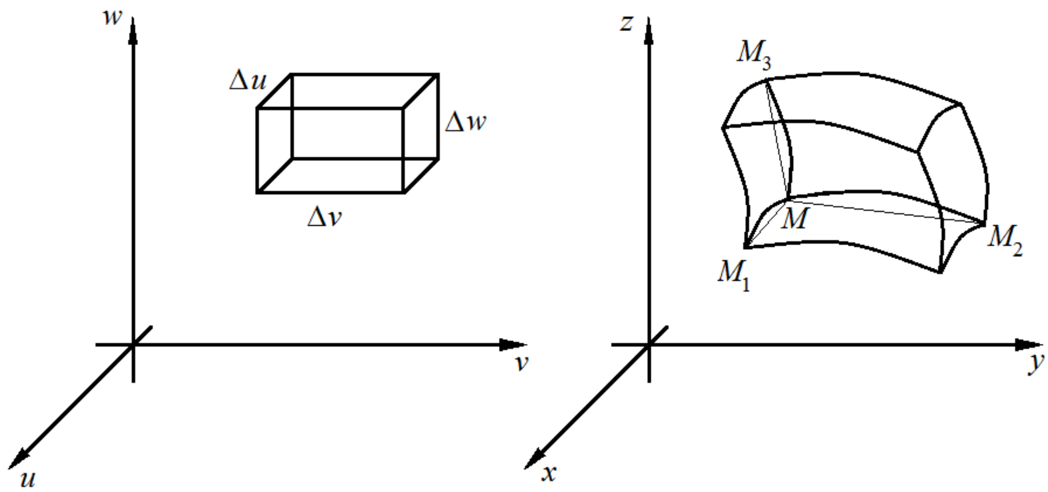


Рис. 9. Замена переменных в тройном интеграле: области V и Ω

$$x_1 = x + \Delta_u x, \ \ y_1 = y + \Delta_u y, \ \ z_1 = z + \Delta_u z,$$

$$x_2 = x + \Delta_v x, \ \ y_2 = y + \Delta_v y, \ \ z_2 = z + \Delta_v z,$$

$$x_3 = x + \Delta_w x, \ \ y_3 = y + \Delta_w y, \ \ z_3 = z + \Delta_w z.$$

$$\Delta V \approx |(\overrightarrow{MM}_1, \overrightarrow{MM}_2, \overrightarrow{MM}_3)| = \begin{vmatrix} x_1 - x & y_1 - y & z_1 - z \\ x_2 - x & y_2 - y & z_2 - z \\ x_3 - x & y_3 - y & z_3 - z \end{vmatrix}$$

Учитывая $x_1 - x = \Delta_u x \approx x'_u du, \ldots$ имеем:

$$\Delta V = |J(u, v, w)| \cdot |dudvdw|,$$

$$dxdydz = |J(u, v, w)| \cdot dudvdw.$$

(u, v, w) — **криволинейные координаты**

1. Цилиндрические координаты

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \operatorname{arcctg}\dfrac{x}{y} + \pi\delta(y) \\ z = z \end{cases} \delta(y) = \begin{cases} 1, \ y > 0 \\ 0, \ y < 0 \end{cases}$$

$$J(u, v, w) = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\varphi & x'_z \\ y'_\rho & y'_\varphi & y'_z \\ z'_\rho & z'_\varphi & z'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho,$$

$$dxdydz = \rho d\rho d\varphi dz.$$

2. Сферические координаты

$$x = \rho\cos\varphi\sin\psi, \ y = \rho\sin\varphi\sin\psi, \ z = \rho\cos\psi,$$

$$\Omega: \ \{0 \le \rho < \infty; \ 0 \le \varphi \le 2\pi; \ 0 \le \psi \le \pi\}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \ \varphi = \operatorname{arcctg}\frac{x}{y} + \pi\delta(y);$$

$$\psi = \arccos\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$J(u, v, w) = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\varphi & x'_\psi \\ y'_\rho & y'_\varphi & y'_\psi \\ z'_\rho & z'_\varphi & z'_\psi \end{vmatrix} = -\rho^2\sin\psi,$$

$$\Delta V = dxdydz = \rho^2\sin\psi d\rho d\varphi d\psi.$$

Пример

Вычислить в цилиндрических и сферических координатах интеграл: $\iiint\limits_V dxdydz$, где $V : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$.

1.9 Приложения тройного интеграла

1.9.1 Масса тела

$\mu(x, y, z)$ — плотность тела.

$$\Delta m_k = \mu(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta V_k,$$

$$m_n = \sum_k \Delta m_k = \sum_{k=1}^{n} \mu(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta V_k,$$

$$\overline{d} \to 0,\ n \to \infty,$$

$$m = \iiint\limits_V \mu(x, y, z)dxdydz.$$

1.9.2 Вычисление объёма тела

$$\Delta V = \iiint\limits_V dxdydz.$$

1.9.3 Статические моменты и координаты центра тяжести

Статические моменты S_{xy}, S_{xz}, S_{yz} относительно координатных плоскостей Oxy и Oxz Oyz $(S = md)$:

$$S_{xy} = \iiint\limits_V z \cdot \mu(x, y, z)dxdydz,\ S_{xz} = \iiint\limits_V y \cdot \mu(x, y, z)dxdydz,$$

$$S_{yz} = \iiint\limits_V x \cdot \mu(x, y, z)dxdydz.$$

Координаты центра тяжести:

$$x_c = \frac{S_{yz}}{m},\ y_c = \frac{S_{xz}}{m},\ z_c = \frac{S_{xy}}{m}.$$

1.9.4 Момент инерции тела

Моменты инерции тела относительно координатных плоскостей ($I = md^2$):

$$I_{xy} = \iiint\limits_V z^2 \cdot \mu(x,y,z)dxdydz,\ I_{yz} = \iiint\limits_V x^2 \cdot \mu(x,y,z)dxdydz,$$

$$I_{xz} = \iiint\limits_V y^2 \cdot \mu(x,y,z)dxdydz.$$

Моменты инерции относительно координатных осей:

$$I_x = \iiint\limits_V (y^2+z^2) \cdot \mu(x,y,z)dxdydz,$$

$$I_y = \iiint\limits_V (x^2+z^2) \cdot \mu(x,y,z)dxdydz,$$

$$I_z = \iiint\limits_V (x^2+y^2) \cdot \mu(x,y,z)dxdydz.$$

$$I_x = I_{xy} + I_{xz},\ I_y = I_{yx} + I_{yz},\ I_z = I_{xz} + I_{yz}.$$

Момент инерции относительно начала координат:

$$I_0 = I_{xy} + I_{yz} + I_{xz} = \iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2) \cdot \mu(x,y,z)dxdydz.$$

2 Криволинейные и поверхностные интегралы

Обобщение определённого интеграла на случай, когда область интегрирования есть некоторая кривая.

2.1 Криволинейный интеграл 1 рода

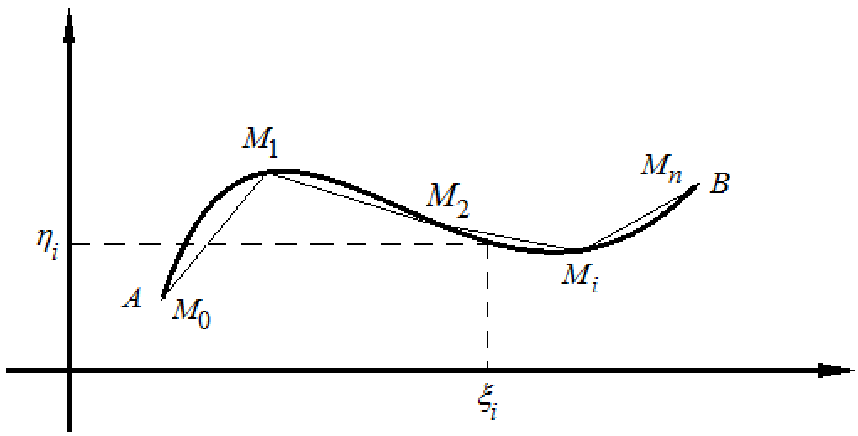


Рис. 10. Криволинейный интеграл 1-го рода

Составим интегральную сумму:

$$I_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta l_k,$$

$$\lambda = \max_k \Delta l_k,\ n \to \infty,\ \lambda \to 0.$$

$$I = \int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_{L} f(x,y)dl$$

криволинейный интеграл 1 рода от функции $f(x,y)$ по кривой L.

Теорема 7. *Если функция $f(x,y)$ непрерывна в каждой точке гладкой кривой (в каждой точке $(x;y) \in L$ существует касательная к данной кривой и положение её непрерывно меняется при перемещении точки по кривой), то криволинейный интеграл 1 рода существует и его величина не зависит ни от способа разбиения кривой на части, ни от выбора точек в них.*

Аналогичным образом вводится понятие криволинейного интеграла 1 рода от $f(x, y, z)$ по пространственной кривой.

2.1.1 Свойства криволинейного интеграла 1 рода

1) $\displaystyle\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_{BA} f(x,y)dl;$

2) $\displaystyle\int\limits_{AB} cf(x,y)dl = c\int\limits_{AB} f(x,y)dl,\ c = const;$

3) $\displaystyle\int\limits_{AB} (f_1(x,y) \pm f_2(x,y))dl = \int\limits_{AB} f_1(x,y)dl \pm \int\limits_{AB} f_2(x,y)dl;$

4) $\displaystyle\int\limits_{L} f(x,y)dl = \int\limits_{L_1} f(x,y)dl + \int\limits_{L_2} f(x,y)dl,$
$L_1 \cup L_2 = L,\ L_1 \cap L_2 = \{(x_0; y_0)\};$

5) $\displaystyle f_1(x,y) \le f_2(x,y),\ \int\limits_{L} f_1(x,y)dl \le \int\limits_{L} f_2(x,y)dl;$

6) $\displaystyle\int\limits_{AB} dl = \Delta l$, Δl — длина кривой AB;

7) $f(x,y)$ — непрерывна на L, то $\exists\ (x_c; y_c) \in L$, что
$\displaystyle\int\limits_{L} f(x,y)dl = f(x_c, y_c)\Delta l$ — теорема о среднем.

Замечание. Если предположить, что $f(x,y)$ — линейная плотность, то криволинейный интеграл 1 рода — масса кривой.

2.1.2 Вычисление криволинейного интеграла 1 рода

Сводится к вычислению определённого интеграла.

1. Явное задание кривой в декартовой системе координат.

$$AB:\ y = \varphi(x).$$

$$\Delta l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \approx \sqrt{(\Delta x)^2 + (y'\Delta x)^2} =$$
$$= \sqrt{(dx)^2 + (y'dx)^2} = \sqrt{1 + (y')^2}dx = d\,l.$$

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_a^b f(x,\varphi(x))\sqrt{1+(y')^2}dx.$$

2. Параметрическое задание кривой.

Кривая AB в R^2: $\begin{cases} x = x(t),\ t_1 \le t \le t_2, \\ y = y(t). \end{cases}$

$$dl = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}.$$

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(x(t),y(t))\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}dt.$$

Кривая AB, заданная в R^3: $\begin{cases} x = x(t),\ t_1 \le t \le t_2, \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases}$

$$dl = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2}.$$

$$\int\limits_{AB} f(x,y,z)dl = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2}dt.$$

3. Задание кривой в полярной системе координат.

$$\rho = \rho(\varphi),\ \alpha \le \varphi \le \beta,\ x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi.$$

$$dl = \sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2}.$$

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\rho(\varphi)\cos(\varphi), \rho(\varphi)\sin(\varphi))\sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2}d\varphi.$$

Примеры

1. Вычислить криволинейный интеграл 1 рода $\int\limits_L xy^2dl$, где L — отрезок прямой между точками $O(0;0)$ и $A(4;3)$.
2. Вычислить криволинейный интеграл 1 рода $\int\limits_L (x+y)dl$, $L:\ \rho = \sqrt{\sin(2\varphi)},\ 0 \le \varphi \le \pi/2$.
3. Найти массу M дуги кривой $\begin{cases} x = t \\ y = t^2/2 \\ z = t^3/3 \end{cases}$, $0 \le t \le 1$, линейная плотность меняется по закону $\gamma = \sqrt{2y}$.

2.2 Криволинейный интеграл по координатам (2 рода)

Пусть $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны в точках дуги AB кривой K, имеющей уравнение $y = \varphi(x)$ $(a \le x \le b)$.

Определение 21. *Интегральной суммой для функций $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ по координатам называется сумма вида*

$$\sum_{k=1}^{n}(P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k),$$

где Δx_k и Δy_k — проекции элементарной дуги на оси Ox и Oy.

Определение 22. *Криволинейным интегралом по координатам или криволинейным интегралом 2-го рода от выражения $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ по направленной дуге AB называется предел интегральной суммы при условии, что $n \to \infty$, $\max\limits_k \Delta x_k \to 0$ и $\max\limits_k \Delta y_k \to 0$.*

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \lim_{\substack{\max\limits_k \Delta x_k \to 0 \\ \max\limits_k \Delta y_k \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{k=1}^{n} (P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k).$$

Замечание. Криволинейный интеграл 2-го рода есть работа, совершаемая переменной силой $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ на криволинейном пути AB. Функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ — проекции вектора $\vec{F}$ на оси Ox, Oy (рис. 11).

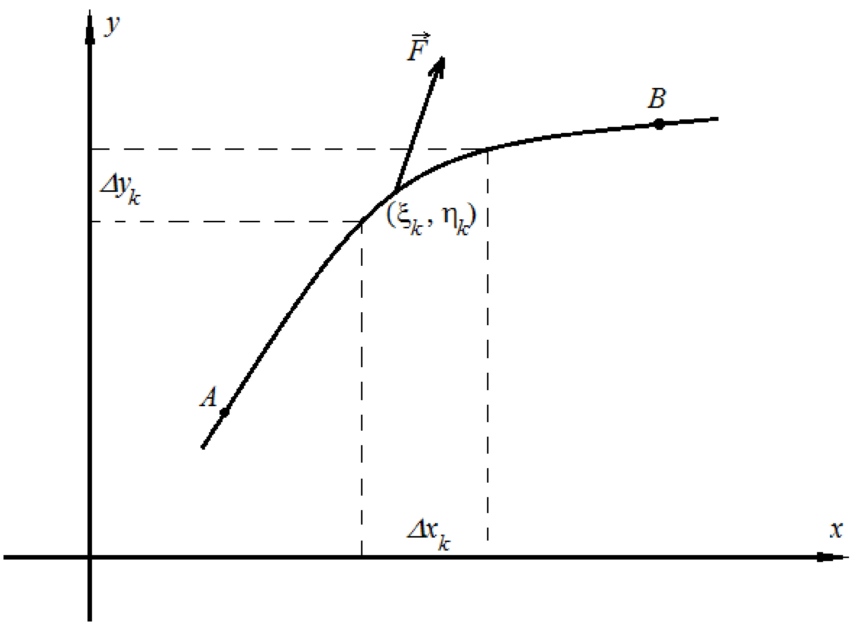


Рис. 11. Криволинейный интеграл 2-го рода

2.2.1 Свойства криволинейного интеграла 2 рода

1. Криволинейного интеграла 2-го рода меняет свой знак на обратный при изменении направления пути интегрирования.

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int\limits_{BA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

2. $\displaystyle\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{AB} P(x,y)dx + \int\limits_{AB} Q(x,y)dy.$

Остальные свойства аналогичны свойствам криволинейного интеграла 1-го рода.

2.2.2 Вычисление криволинейного интеграла 2 рода

1. В случае, если дуга AB кривой K, имеет уравнение $y = \varphi(x)$ $(a \leq x \leq b)$, криволинейный интеграл 2-го рода вычисляется по формуле:

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_a^b (P(x,\varphi(x)) + Q(x,\varphi(x))\varphi'(x))dx.$$

2. Параметрическое задание кривой: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t_1 \leq t \leq t_2$,

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \int\limits_{t_1}^{t_2} (P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t))dt.$$

Замечания.

1. Обыкновенный (определенный) интеграл является частным случаем криволинейного интеграла.

2. Вычисление криволинейного интеграла — это вычисление обыкновенного интеграла, подынтегральное выражение преобразуется к одной переменной. Значения этой переменной вначале и в конце дуги AB будут пределами интегрирования.

3. Криволинейный интеграл зависит от линии интегрирования. Взятый вдоль разных линий, соединяющих точки A и B будет иметь различные значения.

4. Линия интегрирования может быть замкнутой. Тогда используемые обозначения:

   - $\oint\limits_{+C}$ — положительное направление обхода контура (против часовой стрелки);
   - $\oint\limits_{-C}$ — отрицательное направление обхода контура.

Примеры

1. Вычислить $\int\limits_K x^2ydy - y^2xdx$, если $\begin{cases} x = \sqrt{\cos t} \\ y = \sqrt{\sin t} \end{cases}$, $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$.

2. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L (xy-1)dx + x^2ydy$ от $A(1,0)$ до $B(0,2)$:

   1) по прямой $2x + y = 2$;
   2) по дуге параболы $4x + y^2 = 4$.

3. Вычислить криволинейный интеграл $\oint\limits_{-C} 2xdx - (x+y)dy$ вдоль периметра треугольника с вершинами $A(-1,0)$, $B(0,2)$, $C(2,0)$.

2.2.3 Формула Грина

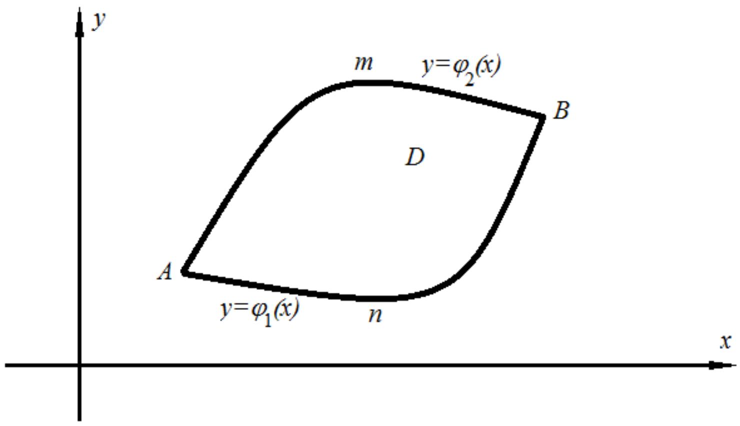
Связь между двойным интегралом по области D и криволинейным по границе C.

Теорема 8. *Если C — граница области D и функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ — непрерывны в замкнутой области D (включая границу), то справедлива формула Грина (Остроградского[1]–Грина[2])*

$$\oint\limits_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy,$$

где обход контура C выбирается так, чтобы область D оставалась слева.

Доказательство



$$\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int\limits_a^b P(x,y)\Bigg|_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dx =$$

[1]Михаил Васильевич Остроградский (12 сентября [24 сентября] 1801 — 20 декабря 1861 [1 января 1862]) — российский математик и механик украинского происхождения, признанный лидер математиков Российской империи середины XIX века.

[2]Джордж Грин (англ. George Green; 14 июля 1793 — 31 мая 1841) — английский математик, внёсший значительный вклад во многие разделы математической физики.

$$= \int\limits_a^b (P(x,\varphi_2(x)) - P(x,\varphi_1(x)))dx = \int\limits_{AmB} P(x,y)dx - \int\limits_{AnB} P(x,y)dx.$$

В результате:

$$\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int\limits_{AmB} P(x,y)dx - \int\limits_{AnB} P(x,y)dx =$$

$$= -\int\limits_{BmA} P(x,y)dx - \int\limits_{AnB} P(x,y)dx = -\oint\limits_C P(x,y)dx.$$

Аналогично доказывается:

$$\iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \oint\limits_C Q(x,y)dy.$$

ч. т. д.

Пример. Вычислить криволинейный интеграл

$$\oint\limits_C 2(x^2 + y^2)dx + (x + y)^2 dy$$

применяя формулу Грина, если C — контур треугольника с вершинами в точках $L(1,1)$, $M(2,2)$, $N(1,3)$, пробегаемый против хода часовой стрелки. Проверить результат непосредственным интегрированием.

2.2.4 Независимость криволинейного интеграла 2 рода от контура интегрирования

Теорема 9 (необходимость и достаточность). *Пусть* $P(x,y)$ *и* $Q(x,y)$ *непрерывны вместе со своими частными производными 1-го порядка в односвязной области* D *и контур* C *целиком находится в этой области. Тогда* $\int\limits_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ —

криволинейный интеграл 2 рода не зависит от пути интегрирования $\Leftrightarrow$ в области D выполняется тождество:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Доказательство

Необходимость. Пусть криволинейный интеграл 2 рода не зависит от пути интегрирования, тогда:

$$\int\limits_{AmB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_{AnB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy \;\Rightarrow$$

$$\int\limits_{AmB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy-\int\limits_{AnB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0,$$

$$\int\limits_{AmB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy+\int\limits_{BnA} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=$$

$$=\oint\limits_{C} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint\limits_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=0.$$

Предположим далее, что условие $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ не выполняется, т. е. $\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\neq 0$ хотя бы в одной точке. Пусть, например, в некоторой точке $M(x_0,y_0)$ имеет место неравенство:

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}>0.$$

В левой части этого неравенства стоит непрерывная функция, следовательно она положительна и больше некоторого числа $\delta>0$ во всех точках некоторой достаточно малой области D', содержащей точку $M(x_0,y_0)$. Вычислим двойной интеграл по этой области от разности $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} > 0$. Он будет иметь положительное значение:

$$\iint\limits_{D'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy > \iint\limits_{D'} \delta dxdy = \delta \iint\limits_{D'} dxdy = \delta \Delta D' > 0.$$

По формуле Грина левая часть последнего равенства равна криволинейному интегралу по границе C' области D', содержащей точку $M(x_0, y_0)$, который по условию равен нулю. Следовательно, пришли к противоречию, и предположение $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} \neq 0$ хотя бы в одной точке, неверно. Отсюда вытекает, что $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0$.

Достаточность. Пусть выполнено

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Рассмотрим произвольный замкнутый контур C в области D. По формуле Грина имеем:

$$\oint\limits_{C} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = 0.$$

$$\int\limits_{AnBmA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \int\limits_{AnB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + \int\limits_{BmA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \int\limits_{AnB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy - \int\limits_{AmB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \ \Rightarrow$$

$$\int\limits_{AnB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{AmB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \ \Rightarrow$$

интеграл не зависит от пути интегрирования.

Замечание. При условии $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ криволинейный интеграл по замкнутому контуру равен нулю т.е.

$$\oint\limits_{C} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0.$$

Пример. Вычислить криволинейный интеграл

$$\oint\limits_{+C} y\cos x dx + \sin x dy.$$

Замечание. Если функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ — непрерывны в области D, то выражение $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ будет полным дифференциалом функции $u(x,y)$ в области D. Т.е. $du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$. Т.е. если подынтегральное выражение является полным дифференциалом, то криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования.

Для вычисления интеграла, независящего от контура интегрирования

$$\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \ \left(\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$$

следует выбрать в качестве наивыгоднейшего пути интегрирования ломаную, соединяющую точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1) звенья которой параллельны осям Ox и Oy (рис. 12).

Пример. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{(1,1)}^{(2,3)} (x+3y)dx + (3x+y)dy.$$

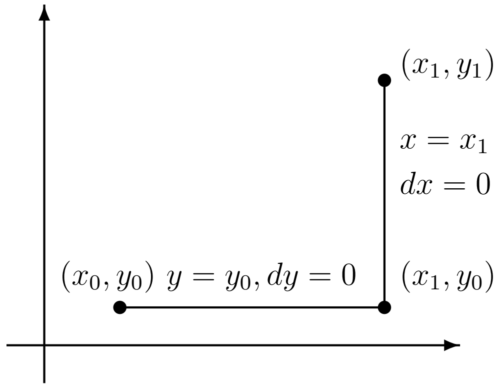


Рис. 12. Путь интегрирования при вычислении интеграла, независящего от контура интегрирования

2.2.5 Нахождение функции по её полному дифференциалу

Если $du(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$, где $P'_y = Q'_x$, du — полный дифференциал. Можно найти функцию $u(x, y)$ по её полному дифференциалу.

1. По определению полный дифференциал равен сумме частных дифференциалов $du = d_x u + d_y u$, $d_x u = P(x, y)dx$, $d_y u = Q(x, y)dy$. Интегрируя каждый из них отдельно найдем два выражения для функции u:

   1) $u(x, y) = \displaystyle\int P(x, y)dx + \varphi(y)$, считая y — постоянной;

   2) $u(x, y) = \displaystyle\int Q(x, y)dy + \psi(x)$, считая x — постоянной,

   где $\varphi(y)$ и $\psi(x)$ — неизвестные функции. Беря все известные члены из первого выражения и, дописав к ним недостающие члены, зависящие только от y, из 2-го выражения, получим функцию $u(x, y)$.

2. Функцию $u = u(x, y)$, удовлетворяющую условию $P'_y = Q'_x$,

можно найти, используя формулу

$$u(x, y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(\xi, y_0)d\xi + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x, \eta)d\eta + C.$$

В качестве начальной точки (x_0, y_0) можно выбрать точку $(0, 0)$ — начало координат.

Пример. Проверить, что выражение

$$(2x - 3y^2 + 1)dx + (2 - 6xy)dy$$

является полным дифференциалом функции $u(x, y)$ и найти u.

Замечание. Если подынтегральное выражение — полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$, то

$$\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} du(x, y) = u(x_1, y_1) - u(x_0, y_0).$$

Замечание. Аналогичные результаты справедливы для криволинейного интеграла

$$\int\limits_{C} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

по пространственной кривой.

Условие независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования в этом случае имеет вид:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \ \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \ \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Формула нахождения функции $u(x, y, z)$ по ее полному дифференциалу

$$u(x, y, z) = \int\limits_{x_0}^{x} P(\xi, y_0, z_0)d\xi + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x, \eta, z_0)d\eta + \int\limits_{z_0}^{z} R(x, y, \zeta)d\zeta + C.$$

2.2.6 Вычисление величин посредством криволинейного интеграла 2 рода

1. Площадь фигуры, расположенной в плоскости Oxy и ограниченной замкнутой линией C.
   Воспользуемся формулой Грина
   $$\oint\limits_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$
   Положим $P(x,y) = 0$, $Q(x,y) = x$, тогда $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 1$. Получим
   $$S = \oint\limits_C xdy = \iint\limits_D dxdy.$$
   Аналогично, полагая $P(x,y) = -y$, $Q(x,y) = 0$, имеем $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 1$, в результате:
   $$S = \iint\limits_D dxdy = -\oint\limits_C ydx.$$
   Сложив почленно эти равенства, получим:
   $$S = \frac{1}{2}\oint\limits_C xdy - ydx.$$

2. Работа, совершаемая силой
   $$\vec{F} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k},$$
   действующей на точку при перемещении её по дуге AB
   $$A = \int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz.$$

2.3 Поверхностный интеграл 1 рода

Пусть в точках M некоторой гладкой поверхности σ, ограниченной кусочно-гладким контуром L определена скалярная функция $f = f(M)$.

Разобьём поверхность σ на n частей σ_i, $i = \overline{1, n}$ ($\Delta\sigma_i$ — площадь каждой части). Интегральная сумма:

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta\sigma_i$$

Обозначим $\lambda = \max\limits_i d_i$, где d_i — диаметр области σ_i

Определение 23. *Конечный предел* I

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ \lambda\to 0}} I_n = \iint\limits_{\sigma} f(x, y, z)d\sigma$$

при $n \to \infty$ *и* $\lambda \to 0$ *называется* ***поверхностный интеграл*** 1 ***рода***.

Для существования поверхностного интеграла 1 рода *необходимо* ограниченность функции в точках σ: $|f(x, y, z)| \le M$.

2.3.1 Вычисление поверхностного интеграла 1 рода

Поверхность σ: $z = z(x, y)$, S_{xy} — проекция σ на Oxy, $M(x, y) \in S_{xy}$. На поверхности задана некоторая ограниченная функция $f(x, y, z)$.

Теорема 10.

$$\iint\limits_{\sigma} f(x, y, z)d\sigma = \iint\limits_{S_{xy}} f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}dxdy =$$

$$= \iint\limits_{S_{xy}} \frac{f(x, y, z(x, y))dxdy}{|\cos\gamma|}.$$

Доказательство, аналогично тому как это сделано в разделе 1.5.4.

Пример. Вычислить поверхностный интеграл 1 рода $\iint\limits_{\sigma}(x+y+z+1)d\sigma$, σ: часть плоскости $x+y+z=2$, вырезанная цилиндром $x^2+y^2=1$.

2.4 Поверхностный интеграл 2 рода

Определение 24. *Гладкая поверхность σ называется двусторонней поверхностью, если при обходе $\forall$ замкнутого контура, лежащего на поверхности σ и не имеющих общих точек с её границей, направление нормали к поверхности не меняется.*

Если же после обхода контура нормаль в исходной точке будет иметь противоположное направление, то такая поверхность — *односторонняя.*

Пример односторонней поверхности — лист Мёбиуса[3] (рис. 13).

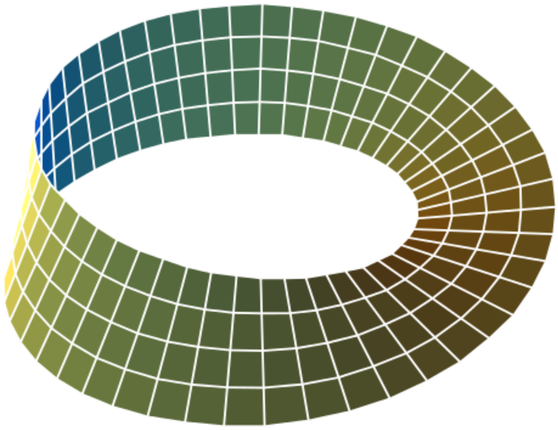


Рис. 13. Лист Мёбиуса

Определение 25. *Совокупность всех точек поверхности с приписанием в них по указанному правилу нормалей, называется определённой стороной поверхности.*

Двусторонние поверхности — ориентированные. Выбор стороны — ориентация поверхности. Выбранная сторона — положительная. Для замкнутой поверхности положительной считается внешняя сторона.

[3]Август Фердинанд Мёбиус (нем. August Ferdinand Mobius, 17 ноября 1790, Шульпфорте, ныне Саксония–Анхальт — 26 сентября 1868, Лейпциг) — немецкий математик, механик и астроном-теоретик.

Рассмотрим σ — двусторонюю гладкую поверхность и выберем на ней положительную сторону; σ_i — разбиение; $M(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ — точки поверхности. Положительной выберем ту сторону поверхности, где нормаль к ней образует с осью Oz острый угол, т. е. $\cos\gamma_i > 0$.

Составим интегральную сумму:

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta S_i)_{Oxy},$$

здесь $(\Delta S_i)_{Oxy}$ — проекция элементарной площадки σ_i на плоскость Oxy, содержит знак $+$ или $-$ в зависимости от выбора стороны.

Определение 26. *Предел интегральной суммы при $\lambda = \max\limits_i d_i \to 0$, $n \to \infty$, если он существует и не зависит от способа разбиения поверхности σ на части σ_i и от выбора точек $M(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \sigma_i$, называется* ***поверхностным интегралом 2 рода*** *(по координатам) от функции $f(x, y, z)$ по переменным x и y по выбранной стороне поверхности и обозначается*

$$\iint\limits_{\sigma} f(x, y, z)dxdy.$$

или

$$\iint\limits_{\sigma} f(x, y, z)dxdy = \lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta S_i)_{Oxy}.$$

Аналогично определяются поверхностные интегралы 2 рода по координатам x, z и y, z:

$$Oxz: \iint\limits_{\sigma} f(x, y, z)dxdz = \lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta S_i)_{Oxz},$$

$$Oyz: \iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)dydz = \lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta S_i)_{Oyz}.$$

Поверхностный интеграл 2 рода общего вида:

$$I = \iint\limits_{\sigma} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy.$$

2.4.1 Свойства поверхностного интеграла 2 рода

1. Поверхностный интеграл 2 рода меняет знак при перемене стороны поверхности.
2. Постоянный множитель выносится за знак интеграла.
3. Поверхностный интеграл 2 рода от суммы равен сумме поверхностных интегралов.
4. Поверхностный интеграл 2 рода по поверхности $S = S_1 + S_2$ равен сумме интегралов по её частям S_1 и S_2.
5. S_1, S_2 и S_3 — цилиндрические поверхности с образующими паралельными осям Oz, Ox и Oy, то

$$\iint\limits_{S_1} R(x,y,z)dxdy = \iint\limits_{S_2} P(x,y,z)dydz = \iint\limits_{S_3} Q(x,y,z)dxdz = 0.$$

2.4.2 Вычисление поверхностного интеграла 2 рода

Поверхность σ: $z = z(x,y)$, S_{xy} — проекция σ на Oxy, тогда:

$$\iint\limits_{\sigma} R(x,y,z)dxdy = \pm \iint\limits_{S_{xy}} R(x,y,z(x,y))dxdy,$$

здесь знак $\pm$ зависит от выбора стороны: $\cos\gamma d\sigma = \pm dxdy$, $\cos\gamma$ — направляющий косинус нормали к поверхности σ.

Для поверхностного интеграла 2 рода общего вида имеем:

$$I = \iint\limits_{\sigma} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy =$$

$$= \pm \iint\limits_{S_{yz}} P(x(y,z),y,z)dydz \pm \iint\limits_{S_{xz}} Q(x,y(x,z),z)dxdz \pm$$

$$\pm \iint\limits_{S_{xy}} R(x,y,z(x,y))dxdy =$$

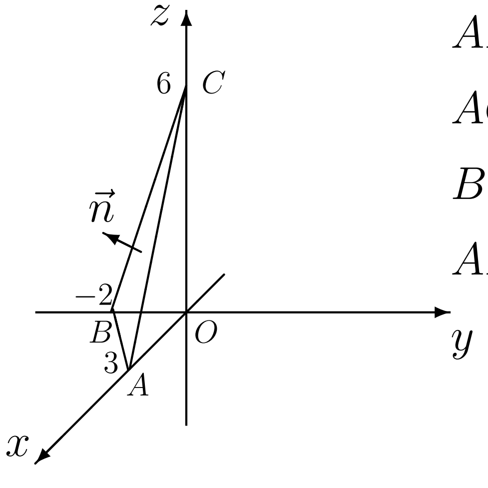
$$= \iint\limits_{\sigma} (P(x(y,z),y,z)\cos\alpha + Q(x,y(x,z),z)\cos\beta +$$

$$+R(x,y,z(x,y))\cos\gamma)d\sigma.$$

Пример. Вычислить:

$$I = \iint\limits_{S} -xdydz + zdxdz + 5dxdy$$

по верхней стороне части плоскости $2x - 3y + z = 6$, лежащей в IV октанте $(x \geq 0,\ z \geq 0,\ y \leq 0)$.



$ABO:\ S_{xy}$

$ACO:\ S_{xz}$

$BCO:\ S_{yz}$

$ABC:\ S$

Направляющие косинусы:

$$F(x,y,z)=0:\ 2x-3y+z-6=0,\ \frac{\partial F}{\partial x}=2,\ \frac{\partial F}{\partial y}=-3,\ \frac{\partial F}{\partial z}=1.$$

$$\vec{n}=(2;-3;1),\ |\vec{n}|=\sqrt{14},$$

$$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{14}}>0,\ \cos\beta=\frac{-3}{\sqrt{14}}<0,\ \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{14}}>0.$$

$$S_{yz}:\ P(x(y,z),y,z)=-3-\frac{3y}{2}+\frac{z}{2},\ \{-2\le y\le 0; 0\le z\le 6+3y\},$$

$$S_{xz}:\ Q(x,y(x,z),z)=z,\ \{0\le x\le 3; 0\le z\le 6-2x\},$$

$$S_{xy}:\ R(x,y,z(x,y))=5,\ \{-2\le y\le 0; 0\le x\le 3+\frac{3}{2}y\}.$$

$$I=-\int\limits_{-2}^{0}dy\int\limits_{0}^{6+3y}(3+\frac{3y}{2}-\frac{z}{2})dz-\int\limits_{0}^{3}dx\int\limits_{0}^{6-2x}zdz+5\int\limits_{-2}^{0}dy\int\limits_{0}^{3+\frac{3}{2}y}dx=-9.$$

2.4.3 Формула Остроградского–Гаусса

Формула Остроградского–Гаусса[4] даёт связь между поверхностным интегралом 2 рода по замкнутой поверхности и тройным интегралом.

Теорема 11 (Остроградского–Гаусса). *Если функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка в пространственной области V, то имеет место формула:*

$$\iiint\limits_{V}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz=\mathop{\iint\!\!\!\!\!\!\!\!\;\bigcirc}\limits_{\sigma}Pdydz+Qdxdz+Rdxdy,$$

где σ — граница области V и интегрирование по σ производится по её внешней стороне.

[4]Иоганн Карл Фридрих Гаусс (нем. Johann Carl Friedrich Gauss; 30 апреля 1777, Брауншвейг — 23 февраля 1855, Гёттинген) — немецкий математик, механик, физик, астроном и геодезист.

Метод доказательства аналогичный тому, какой использовался при выводе формулы Грина, раздел 2.2.3.

Пример. Используя формулу Остроградского–Гаусса вычислить:

$$I=\iint\limits_{S} -xdydz+zdxdz+5dxdy$$

по верхней стороне части плоскости $2x-3y+z=6$, лежащей в IV октанте $(x\geq 0,\ z\geq 0,\ y\leq 0)$.

$$I=\iint\limits_{S} -xdydz+zdxdz+5dxdy=\iint\limits_{ABC} -xdydz+zdxdz+5dxdy=$$

$$=\oiint\limits_{OABC}-\iint\limits_{ABO}-\iint\limits_{ACO}-\iint\limits_{BCO}$$

$$OABC:\quad \frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=-1+0+0=-1.$$

$$\oiint\limits_{OABC} -xdydz+zdxdz+5dxdy=$$

$$=\iiint\limits_{V}(-1)dxdydz=(-1)\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot(2\cdot 3)\cdot 6=-6.$$

$$ABO:\quad z=0,\ dz=0,\ \cos\alpha=0,\ \cos\beta=0,\ \cos\gamma=-1.$$

$$S_{xy}:\ R(x,y,z(x,y))=5,\ \{-2\leq y\leq 0; 0\leq x\leq 3+\frac{3}{2}y\}.$$

$$\iint\limits_{ABO} -xdydz+zdxdz+5dxdy=-5\int\limits_{-2}^{0}dy\int\limits_{0}^{3+\frac{3}{2}y}dx=-15.$$

$$ACO:\quad y=0,\ dy=0,\ \cos\alpha=0,\ \cos\beta=1,\ \cos\gamma=0.$$

$$S_{xz}:\ Q(x,y(x,z),z)=z,\ \{0\leq x\leq 3; 0\leq z\leq 6-2x\}.$$

$$\iint\limits_{ACO} -xdydz + zdxdz + 5dxdy = \int\limits_0^3 dy \int\limits_0^{6-2x} zdz = 18.$$

$$BCO: \quad x = 0,\ dx = 0,\ \cos\alpha = -1,\ \cos\beta = 0,\ \cos\gamma = 0.$$

$$S_{yz}: \ P(x(y,z), y, z) = 0,\ \{-2 \le y \le 0; 0 \le z \le 6 + 3y\}.$$

$$\iint\limits_{BCO} -xdydz + zdxdz + 5dxdy = 0.$$

В результате:

$$I = -6 - (-15) - 18 - 0 = -9.$$

2.4.4 Формула Стокса

Обобщением формулы Остроградского–Грина является формула Стокса[5], она даёт связь между поверхностными и криволинейными интегралами 2 рода.

Теорема 12 (Стокса) *Если функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка в точках ориентированной поверхности σ, то имеет место формула*

$$\iint\limits_{\sigma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dxdz =$$

$$= \oint\limits_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz,$$

где L — граница поверхности σ и интегрирование вдоль кривой L производится в положительном направлении (т. е. при обходе границы L поверхность σ должна оставаться всё время слева).

[5]Сэр Джордж Габриель Стокс (англ. Sir George Gabriel Stokes; 13 августа 1819–1 февраля 1903) — английский математик, механик и физик-теоретик ирландского происхождения. Работал в Кембриджском университете, внёс значительный вклад в гидро- и газодинамику (см. Уравнения Навье–Стокса), оптику и математическую физику. Член Лондонского королевского общества (1851), его секретарь в 1854–1885 гг. и президент в 1885–1890 гг.

Доказательство следует из формулы Грина (раздел 2.2.3).

Замечание. Из формулы Стокса следует, если

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y},\ \frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z},\ \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x},$$

то

$$\oint\limits_L P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=0.$$

Следовательно в данном случае криволинейный интеграл 2 рода не зависит от пути интегрирования.

Пример. Вычислить $\oint\limits_L x^2y^3dx+dy+zdz$, где L — контур окружности $\begin{cases} x^2+y^2=R^2 \\ z=0 \end{cases}$; S — полусфера $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ a) — непосредственно и b) используя формулу Стокса.

$a)\ L:\ x=R\cos t,\ y=R\sin t,\ t\in[0,2\pi].$

$$\oint\limits_L x^2y^3dx+dy+zdz=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}R^2\cos^2 tR^3\sin^3 t(-R\sin t)dt+\int\limits_0^{2\pi}R\cos tdt+\int\limits_0^{2\pi}0dt=-\frac{\pi R^6}{8};$$

$b)\ P(x,y,z)=x^2y^3,\ Q(x,y,z)=1,\ R(x,y,z)=z$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=0,\ \frac{\partial P}{\partial y}=3x^2y^2,\ \frac{\partial R}{\partial y}=0,\ \frac{\partial Q}{\partial z}=0,\ \frac{\partial P}{\partial z}=0,\ \frac{\partial R}{\partial x}=0.$$

$$\oint\limits_L x^2y^3dx+dy+zdz=$$

$$=\iint\limits_S(-x^2y^3)dxdy=-3\int\limits_0^{2\pi}\cos^2\varphi\sin^2\varphi d\varphi\int\limits_0^R r^5dr=-\frac{\pi R^6}{8}.$$

3 Элементы теории векторного поля

Определение 27. *Векторным полем называется часть (или всё пространство) в каждой точке которого определён вектор, характеризующий физическое явление в этой части пространства.*

Пример. Поле скоростей частиц некоторого движущегося тела (жидкости); поле электрической (магнитной) напряжённости; поле силы тяжести…

$$\vec{a} = \vec{a}(M) = a_x(x, y, z)\vec{i} + a_y(x, y, z)\vec{j} + a_z(x, y, z)\vec{k} =$$
$$= P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}.$$

Определение 28. *Векторными линиями поля вектора* $\vec{a} = \vec{a}(M)$ *называются линии, в каждой точке которых вектор поля* $\vec{a}$ *направлен по касательной к этой линии.*

Векторные линии задают направление векторного поля, а их совокупность даёт наглядное представление о величие вектора поля в данной точке.

Графическое изображение: через площадку $\Delta\sigma$ перпендикулярно вектору $\vec{a}$ в данной точке проводят векторные линии в количестве N, пропорциональном $|\vec{a}|$ и $\Delta\sigma$: $N = k|\vec{a}|\Delta\sigma$, k — коэффициент пропорциональности (масштаб).

3.1 Поток, дивергенция векторного поля

Пусть σ — гладкая или кусочно-гладкая двустороняя поверхность, у которой выбрана определённая сторона (ориентированная поверхность).

Определение 29. *Потоком* Π *векторного поля* $\vec{a}(M)$ *через ориентированную поверхность* σ *называется поверхностный интеграл* 1 *рода по поверхности* σ *от проекции вектора* $\vec{a}(M)$ *на* *нормаль $\vec{n}(M)$ к этой поверхности*

$$\Pi = \iint\limits_{\sigma} \textit{Пр}_{\vec{n}}\vec{a}d\sigma = \iint\limits_{\sigma} (\vec{a}, \vec{n}^0)d\sigma =$$

$$= \iint\limits_{\sigma} (P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma)d\sigma =$$

$$= \iint\limits_{\sigma} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy.$$

Физический смысл: количество жидкости, протекающего в единицу времени с отрицательной стороны σ на её положительную сторону.

Дивергенция — количественная характеристика поля в каждой её точке.

Определение 30. *Дивергенция векторного поля*

$$\vec{a} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$$

в точке M называется предел отношения потока Π вектора $\vec{a}$ через поверхность, окружающую точку M к объёму V, ограниченную этой поверхностью, при условии, что объём стягивается в точку

$$\operatorname{div}\vec{a}(M) = \lim_{V\to 0}\frac{\Pi}{V} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{a}.$$

Дивергенция поля в точке M — есть объёмная плотность потока вектора $\vec{a}$ в этой точке.

$$\operatorname{div}\vec{a} > 0 \;\Rightarrow\; \text{в точке } M \text{ источники.}$$

$$\operatorname{div}\vec{a} < 0 \;\Rightarrow\; \text{в точке } M \text{ сток.}$$

Формула Остроградского–Гаусса в векторной форме:

$$\Pi = \iint\limits_{\sigma} (\vec{a}, \vec{n}^0)d\sigma = \iiint\limits_{V} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dV = \iiint\limits_{V} \operatorname{div}\vec{a}dV.$$

Свойства дивергенции

1) $\operatorname{div}\vec{c} = 0$ ($\vec{c} = \mathrm{const}$);

2) $\operatorname{div}\vec{r} = 3$ ($\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$);

3) $\operatorname{div}(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) = \operatorname{div}\vec{a}_1 + \operatorname{div}\vec{a}_2$;

4) $\operatorname{div}(\varphi(M)\cdot\vec{a}(M)) = \varphi(M)\operatorname{div}\vec{a} + (\vec{a}(M), \operatorname{grad}\varphi(M))$,

$$\operatorname{div}(\varphi\cdot\vec{a}) = \frac{\partial}{\partial x}(\varphi\cdot P) + \frac{\partial}{\partial y}(\varphi\cdot Q) + \frac{\partial}{\partial z}(\varphi\cdot R) =$$
$$= P\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \varphi\frac{\partial P}{\partial x} + Q\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \varphi\frac{\partial Q}{\partial y} + R\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \varphi\frac{\partial R}{\partial z} =$$
$$= \varphi\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) + P\frac{\partial\varphi}{\partial x} + Q\frac{\partial\varphi}{\partial y} + R\frac{\partial\varphi}{\partial z} =$$
$$= \varphi\cdot\operatorname{div}\vec{a} + (\vec{a}, \operatorname{grad}\varphi);$$

5) $\operatorname{div}k\vec{a} = k\cdot\operatorname{div}\vec{a}$;

6) $\operatorname{div}(\varphi\cdot\vec{c}) = (\vec{c}, \operatorname{grad}\varphi)$.

Пример. Вычислить поток вектора $\vec{a} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ через замкнутую поверхность σ: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z = 0$, $z > 0$.

Воспользуемся формулой Остроградского–Гаусса:

$$\Pi = \iiint (2x + 2y + 2z)dV,$$

сферические координаты:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$$dV = r^2\sin\theta dr d\varphi d\theta, \{0 \le r \le R;\ 0 \le \varphi \le 2\pi;\ 0 \le \theta \le \pi/2.\}$$

$$\Pi = 2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta(\sin\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi + \cos\theta)d\theta \int\limits_0^R r^3 dr = \frac{\pi R^4}{4}.$$

3.2 Циркуляция, вихрь (ротор) векторного поля

Линейный интеграл от вектора $\vec{a}$ по линии L

$$\int\limits_L \vec{a} d\vec{r} = \int\limits_L P dx + Q dy + R dz.$$

Линейный интеграл выражает работу векторного поля вдоль линии L.

Определение 31. *Линейный интеграл по замкнутому контуру C:*

$$\text{Ц} = \oint\limits_C \vec{a} d\vec{r} = \oint\limits_C P dx + Q dy + R dz$$

называется ***циркуляцией*** *векторного поля $\vec{a}(M)$ вдоль контура C.*

Циркуляция — работа силового поля на замкнутом контуре.

Если $\vec{a}$ — есть сила, отнесённая к единице длины — циркуляция поля по данному контуру характеризует вращательную способность векторного поля $\vec{a}$ на данном контуре. Циркуляция зависит не только от контура, но и от его ориентации в силовом поле.

Ротор $\operatorname{rot}\vec{a}$ векторного поля $\vec{a}$ — есть вектор, проекция которого $\operatorname{rot}_n \vec{a}$ на каждое направление $\vec{n}$ есть предел отношения циркуляции векторного поля по контуру L, являющемуся краем плоской площадки S, перпендикулярной этому направлению, к величине этой площадки, когда размеры площадки стремятся к нулю, а сама площадка стягивается в точку:

$$\operatorname{rot}_n \vec{a} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint\limits_L \vec{a} \cdot dr}{\Delta S},$$

эта величина характеризует интенсивность вращательного движения жидкости в точке M в данной плоскости.

Физическая интерпретация. Например, если в качестве векторного поля взять поле скоростей ветра на Земле, то для антициклона, вращающегося по часовой стрелке (в северном полушарии), ротор будет направлен вниз, а для циклона, вращающегося против часовой стрелки — вверх. В тех местах, где ветры дуют равномерно и прямолинейно, ротор будет равен нулю.

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k} =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \nabla \times \vec{a}.$$

Свойства ротора

1. $\operatorname{rot}\ \vec{c} = 0\ (\vec{c} = const)$.
2. $\operatorname{rot}(c \cdot \vec{a}) = c \cdot \operatorname{rot}\ \vec{a}$.
3. $\operatorname{rot}(\vec{a} + \vec{b}) = \operatorname{rot}\ \vec{a} + \operatorname{rot}\ \vec{b}$.
4. $\operatorname{rot}(\varphi \cdot \vec{a}) = \varphi \cdot \operatorname{rot}\ \vec{a} + \operatorname{grad}\varphi \times \vec{a}$.

Формула Стокса в векторной форме:

$$\oint\limits_C (\vec{a}, d\vec{r}) = \iint\limits_S (\operatorname{rot}\vec{a}, \vec{n})dS =$$

$$= \iint\limits_S (\operatorname{rot}\vec{a})_x dydz + (\operatorname{rot}\vec{a})_y dxdz + (\operatorname{rot}\vec{a})_z dxdy.$$

Пример. Определить ротор векторного поля

$$\vec{a} = (x+z)\vec{i} + (y+z)\vec{j} + (x^2+z)\vec{k}$$

в точке $M(1;2;3)$.

3.3 Дифференциальные операторы

3.3.1 Оператор Гамильтона — «набла»

Оператор *набла* (*оператор Гамильтона*) — векторный дифференциальный оператор, компоненты которого являются частными производными по координатам. Обозначается символом ∇ (набла[6]).

Для трёхмерного евклидова пространства в прямоугольной декартовой системе координат оператор набла определяется следующим образом:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k},$$

где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — единичные векторы по осям x, y, z соответственно.

Также используется следующая запись оператора набла через компоненты:

$$\nabla = \left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right\}.$$

Через оператор набла естественным способом выражаются основные операции векторного анализа: grad (градиент), div (дивергенция), rot (ротор), а также оператор Лапласа (см. ниже). Широко употребляется в описанном смысле в физике и математике (хотя иногда графический символ ∇ используется также для обозначения некоторых других, хотя в некотором отношении не совсем далеких от рассмотренного, математических объектов, например, ковариантной производной).

Свойства оператора набла

Этот оператор приобретает смысл в сочетании со скалярной или векторной функцией, к которой он применяется.

Если умножить вектор ∇ на скаляр φ, то получится вектор

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k} = \mathrm{grad}\ \varphi,$$

[6] Название заимствовано из др.-греч. — род арфы с треугольным остовом. Такое название предложил в шутку Робертсон Смит, друг Максвелла, в личной переписке, и оно постепенно стало привычным. Первое печатное появление термина отмечено в 1890 году.

который представляет собой градиент функции φ.

Если вектор ∇ скалярно умножить на вектор $\vec{a}$, получится скаляр

$$\nabla \cdot \vec{a} = \nabla_x a_x + \nabla_y a_y + \nabla_z a_z = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \operatorname{div} \vec{a},$$

то есть дивергенция вектора $\vec{a}$.

Если ∇ умножить на $\vec{a}$ векторно, то получится ротор вектора $\vec{a}$:

$$\nabla \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k} = \operatorname{rot} \vec{a}.$$

3.3.2 Дифференциальные операторы 2 рода

Так как существуют различные способы перемножения векторов и скаляров, с помощью оператора набла можно записать различные виды дифференцирования. Комбинирование скалярных и векторных произведений даёт 7 различных вариантов производных второго порядка:

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} \varphi) = \nabla \cdot (\nabla\varphi)$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} \varphi) = \nabla \times (\nabla\varphi)$$

$$\Delta\varphi = \nabla^2\varphi$$

$$\operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{v}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{v})$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{v}) = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{v})$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{v}) = \nabla \times (\nabla \times \vec{v})$$

$$\Delta\vec{v} = \nabla^2\vec{v}$$

Для достаточно гладких полей (дважды непрерывно дифференцируемых) эти операторы не независимы. Два из них всегда равны нулю:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\varphi) = \nabla \times (\nabla\varphi) = (\nabla \times \nabla)\varphi = 0;$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{v}) = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}) = (\nabla \times \nabla) \cdot \vec{v} = 0.$$

Два всегда совпадают:

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi) = \nabla \cdot (\nabla\varphi) = (\nabla \cdot \nabla)\varphi = \nabla^2\varphi = \Delta\varphi,$$

$\Delta\varphi$ — опрератор Лапласа, скалярная характеристика поля.

Три оставшихся связаны соотношением:

$$(\nabla \times (\nabla \times \vec{v})) = \nabla(\nabla \cdot \vec{v}) - \nabla^2\vec{v}$$

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{v}) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{v} = \nabla\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial z}\right)\vec{j} +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2}\right)\vec{k}.$$

$$\Delta\vec{v} = \nabla^2\vec{v} = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\vec{i} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}\vec{j} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2}\vec{k}.$$

Хотя большинство свойств оператора набла следуют из алгебраических свойств операторов и чисел и становятся вполне очевидными, если рассматривать его как вектор, нужно соблюдать осторожность. Оператор набла не принадлежит тому же пространству, что и обычные векторы, а говоря точнее, скалярное и векторное произведение для него определено с некоторыми отличиями (в основном сводящимися к тому, что — как это обычно подразумевается — оператор действует на те поля, что стоят от него справа, и не действует на стоящие от него слева, из-за чего скалярное и векторное произведение с участием ∇ не коммутативны и не антикоммутативны, как это свойственно для таких произведений обычных векторов), таким образом, оператор набла не обладает некоторыми свойствами обычных векторов, и следовательно не во всём может вести себя в соответствии с геометрическими свойствами обычного вектора. В частности, он не коммутирует с векторами:

$$\nabla \cdot \vec{v} \neq \vec{v} \cdot \nabla.$$

Если бы набла был вектором, то смешанное произведение $(\vec{v},\ \nabla,\ \vec{v}) \equiv \vec{v} \cdot (\nabla \times \vec{v})$ было бы всегда равно нулю, однако несложно убедиться, что это неверно.

3.4 Простейшие векторные поля

Определение 32. *Векторное поле $\vec{a}(M)$, заданное в пространственной области Ω, называется потенциальным, если оно является полем градиента некоторой скалярной функции*

$$\vec{a}(M) = \operatorname{grad} F(M),$$

$F(M) = F(x, y, z)$ *— потенциал векторного поля.*

Теорема 13. *Для того чтобы векторное поле $\vec{a}(M)$, заданное в односвязной области Ω, было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы во всех точках этой области выполнялось соотношение:*

$$\operatorname{rot} \vec{a} = 0.$$

Для потенциального поля линейный интеграл:

$$\int\limits_{AB} \vec{a} d\vec{S} = \int\limits_{AB} \operatorname{grad} F d\vec{S} = F(B) - F(A).$$

$$\oint\limits_{C} \vec{a} d\vec{S} = 0.$$

Определение 33. *Векторное поле $\vec{a}(M)$, заданное в пространственной области Ω, называется соленоидальным или трубчатым, если во всех точках этой области выполняется условие*

$$\operatorname{div}\vec{a}(M) = 0.$$

(Поле без источников, зарядов, стоков...)

Теорема 14. *Для того чтобы векторное поле $\vec{a}(M)$, заданное в односвязной области $\Omega \in R^3$, было соленоидальным, необходимо и достаточно, чтобы во всех точках этой области существовала $\vec{b}(M)$:*

$$\vec{a}(M) = \operatorname{rot}\vec{b}(M).$$

$\vec{b}(M)$ — векторный потенциал поля $\vec{a}(M)$.

Определение 34. *Векторное поле $\vec{a}(M)$, заданное в области $\Omega \in R^3$, называется гармоническим, если во всех точках этой области выполняется*

$$\operatorname{rot}\vec{a}(M) = 0,\ \operatorname{div}\vec{a}(M) = 0.$$

Из условия $\operatorname{rot}\vec{a}(M) = 0 \Rightarrow \vec{a} = \operatorname{grad} F$, тогда из второго условия, следует: $\operatorname{div}(\operatorname{grad} F) = \Delta F = 0$.

$$\Delta F = 0 \text{ — уравнение Лапласа.}$$

Векторное поле может быть представлено в виде:

$$\vec{a}(M) = \vec{a}_1(M) + \vec{a}_2(M),$$

где $\vec{a}_1(M)$ — потенциальная составляющая;
$\vec{a}_2(M)$ — соленоидальная составляющая;
$\vec{a}(M) \to 0$ на бесконечности.

Список литературы

1. *Беклемишев, Д. В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры : учебник для вузов / Д. В. Беклемишев. — М.: Физматлит, 2008. — 307 с.

2. *Фихтенгольц, Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т 1. / Г. М. Фихтенгольц. — М.: Физматлит, 2001. — 680 с.

3. *Фихтенгольц, Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т 2. / Г. М. Фихтенгольц. — М.: Физматлит, 2006. — 864 с.

4. *Фихтенгольц, Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т 3. / Г. М. Фихтенгольц. — М.: Физматлит, 2005. —728 с.

5. *Письменный, Д. Т.* Конспект лекций по высшей математике. / Д. Т. Письменный. — М.: Айрис-пресс, 2006.

6. *Пискунов, Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисления: учеб. пособие для ВТУЗов. Т 1, 2. / Н. С. Пискунов. — М.: Наука, 1968.

7. *Лунгу, К. Н.* Высшая математика. Руководство к решению задач: учеб. пособие. Ч. 1. / К. Н. Лунгу, Е. В. Макаров. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 216 с.

8. *Запорожец, Г. И.* Руководство к решению задач по математическому анализу: учеб. пособие / Г. И. Запорожец. — М.: Книга по Требованию, 2012. — 456 с.

9. *Ефимов, А. В.* Сборник задач по математике для втузов. В 4-х частях. Ч. 1. Линейная алгебра и основы математического анализа: учеб. пособие для втузов / В. А. Болгов, Б. П. Демидович, А. В. Ефимов и др. — М.: Наука, 1993. — 480 с.

10. *Бермант, А. Ф.* Краткий курс математического анализа : учебник для вузов. / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович. — СПб.: «Лань», 2005. — 736 с.

11. *Берман, Г. Н.* Сборник задач по курсу математического анализа: учеб. пособие / Г. Н. Берман. — СПб., Профессия, 2005. — 432 с.

12. Высшая математика: учеб. пособие / В. М. Бородихин, М. Ю. Васильчик, Н. В. Вахрушев, В. А. Селезнёв, В. В. Хаблов. — Новосибирск.: Изд-во НГТУ, 2004. — Т.2 — 216 с.

13. Высшая математика: учеб. пособие / В. М. Бородихин, М. Ю. Васильчик, Н. В. Вахрушев, В. А. Селезнёв, В. В. Хаблов. — Новосибирск.: Изд-во НГТУ, 2004. — Т.3 — 248 с.

14. http://ru.wikipedia.org/wiki/