НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В. В. Комиссаров
Н. В. Комиссарова

ЛЕКЦИИ

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА
КОМБИНАТОРИКА

Новосибирск 2014

Содержание

Элементы комбинаторики

1 Соединения без повторений

Понятие о комбинаторной задаче. Комбинаторика (или теория соединений) — это раздел математики, в котором изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, удовлетворяющих тем или иным условиям, можно составить из имеющихся объектов [2–4, 6–8, 10–12]. Представителям самых различных профессий приходится решать задачи, связанные с рассмотрением тех или иных комбинаций из элементов конечных множеств: диспетчеру надо составлять расписание, водителю — выбирать кратчайший путь, агроному — распределять посевы и так далее.

Обычно комбинаторные задачи связаны с операциями над конечными множествами. Рассмотрим некоторые из этих операций и задач.

1. Упорядочение конечного множества. Эта операция приводит к понятию *перестановки* из n элементов и к задаче определения числа всех возможных перестановок из n элементов.
2. Выбор подмножеств некоторого конечного множества. Приводит к понятию *сочетания* и к задаче определения числа всех возможных сочетаний из n элементов по k элементов.
3. Выбор упорядоченных подмножеств некоторого конечного множества. Приводит к понятию *размещения* и к задаче определения числа всех возможных размещений из n элементов по k элементов.

Как раздел математики комбинаторика возникла в XVI веке. Одним из первых решением комбинаторных задач занялся итальянский математик Н. Тарталья (1500 – 1557). Дальнейшее развитие комбинаторики связано с трудами Б. Паскаля (1623 – 1662) и П. Ферма (1601 – 1665) по теории азартных игр. Позднее крупный вклад в развитие комбинаторных методов внесли

Г. Лейбниц (1646 – 1716), Я. Бернулли (1654 – 1705) и Л. Эйлер (1707 – 1783). Возрождение интереса к комбинаторике относится к 50-м годам XX века. Это связано с развитием кибернетики и дискретной математики. Возможность использовать ЭВМ активизировала интерес к классическим комбинаторным задачам.

Правила суммы и произведения. Решение большинства задач в комбинаторике основано на применении двух основных правил — правила суммы и правила произведения.

Рассмотрим следующие задачи.

Задача 1. В отделе «Игрушки» имеются 4 вида кукол и 3 вида посудных наборов. Сколькими способами можно выбрать одну игрушку для девочки?

Задача 2. В вазе для фруктов лежат 8 слив и 6 абрикосов. Сколькими способами можно выбрать один плод?

Эти задачи можно перевести на язык теории множеств и сформулировать в общем виде: даны два конечных множества $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ и $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$, не имеющих общих элементов. Сколькими способами можно выбрать один объект, принадлежащий либо A, либо B? Так как $A \bigcap B = \varnothing$, то $\{x | x \in A \bigvee x \in B\} = A \bigcup B$, а тогда $mes(A \bigcup B) = $ $= mes(A) + mes(B) = n + m$. Это утверждение в комбинаторике называют правилом суммы.

Правило суммы. Если элемент a можно выбрать n способами, а элемент b — m способами, причем ни один из способов выбора элемента a не совпадает со способом выбора элемента b, то выбор «либо a , либо b» (»или a , или b») можно осуществить $n+m$ способами. Правило суммы легко распространяется на тот случай, когда число попарно непересекающихся множеств более двух. Используя правило суммы, легко решить рассмотренные выше задачи.

1. Поскольку имеется 4 вида кукол, то существует 4 способа выбрать одну из них. Аналогично, существует 3 способа вы-

брать один посудный набор. По правилу суммы выбрать «либо куклу, либо набор посуды» можно 7 способами ($4+3=7$).

2. По правилу суммы существует $8+6=14$ способов выбрать один плод ($4+3=7$).

Далее остановимся на следующих задачах.

Задача 3. В меню столовой имеются 4 вида первых блюд и 6 видов вторых. Сколькими способами можно выбрать обед, состоящий из двух блюд: одного первого и одного второго?

Задача 4. Сколькими способами можно составить команду из двух человек — одного юноши и одной девушки — для участия в соревнованиях по шахматам, если в группе 5 шахматистов и 3 шахматистки?

Решение этих задач сводится к подсчету числа упорядоченных пар, которыми можно выбрать первую и вторую компоненту.

Пусть имеем множества $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ и $B=\{b_1,b_2,\ldots,b_m\}$. Множество всех упорядоченных пар, составленных из элементов A и B, образует декартово произведение этих множеств. Известно, что $mes(A\times B)=mes(A)\cdot mes(B)=n\cdot m$. В комбинаторике это утверждение называют правилом произведения.

Правило произведения. Если элемент $a\in A$ можно выбрать n способами и если после каждого такого выбора элемент $b\in B$ можно выбрать m способами, то выбор упорядоченной пары (a,b) , то есть выбор «и a , и b» можно осуществить $n\cdot m$ способами. Привило произведения легко распространяется на случай выбора кортежа любой конечной длины. Используя правило произведения, решим задачи 3 и 4.

3. Поскольку существует 4 способа выбрать первое блюдо и 6 способов выбрать второе блюдо, то по правилу произведения выбор «первого и второго» блюд можно осуществить 24 способами ($4\cdot 6=24$).

4. Аналогично, существует 15 способов составить команду для участия в соревнованиях по шахматам.

Рассмотренные комбинаторные правила сложения и умножения в дальнейшем часто будем использовать при решении задач и выводе специальных формул.

1.1 Перестановки без повторений

Пусть имеем множество M, состоящее из n различных элементов любой природы. Упорядочим это множество, пронумеровав некоторым образом его элементы. Получим кортеж длины n с попарно различными элементами, который называют перестановкой из n элементов.

Определение 1. *Всякое упорядоченное n-элементное множество называется перестановкой из n элементов.*

Одно и то же множество можно упорядочить различными способами. Например, множество студентов группы упорядочить по возрасту, росту, алфавиту, успеваемости и так далее. Возникает вопрос: сколькими способами можно упорядочить множество M, содержащее n элементов? Ответ сводится к решению комбинаторной задачи: определить число всех возможных перестановок из n элементов. Обозначают число всех перестановок из n элементов специальным символом P_n. Если множество $\{a, b\}$ состоит из двух элементов, то очевидно, что упорядочить его можно двумя способами: $\{a, b\}$ и $\{b, a\}$, то есть $P_2 = 2$. Если же множество $\{a, b, c\}$ состоит из трех элементов, то упорядочить его можно шестью способами. Действительно, существует 3 способа выбрать элемент на первое место, после этого выбора существует 2 способа выбрать элемент на второе место и один способ — на третье место. Всего по правилу произведения существует $3 \cdot 2 \cdot 1$ способов упорядочить множество $\{a, b, c\}$, то есть $P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Выписывая всевозможные перестановки из элементов этого множества, легко убедиться в справедливости проведенных рассуждений.

В общем случае справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Число различных перестановок из n элементов равно произведению последовательных натуральных чисел от 1 до n включительно, т. е.*

$$P_n = n! \tag{1}$$

Замечание. $n!$ — n-факториал — функция неотрицательного целого аргумета: $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$, $0! = 1$.

Задача 5. Сколько различных пятизначных чисел можно записать с помощью цифр 0, 1, 2, 3, 4, если ни одна цифра в записи числа не повторяется дважды?

Решение. Цифру, стоящую в старшем разряде, можно выбрать 4 способами, после того как выбор сделан, оставшиеся 4 цифры по формуле (1) можно упорядочить $P_4 = 4!$ способами. В результате по правилу произведения имеем: $4 \cdot P_4 = 4 \cdot 4! = 4 \cdot 24 = 96$.

1.2 Размещения без повторений

Рассмотрим комбинаторную задачу, связанную с выбором упорядоченных подмножеств некоторого конечного множества. Итак, имеется множество, состоящее из n различных элементов. Сколько можно составить упорядоченных подмножеств, содержащих k его элементов?

Определение 2. *Всякое упорядоченное k-элементное подмножество n-элементного множества $(k \leq n)$ называется размещением из n элементов по k.*

Как следует из определения, два размещения считаются различными, если они отличаются друг от друга хотя бы одним элементом или состоят из одних и тех же элементов, но расположенных в разном порядке. Число различных размещений из

n элементов по k элементов обозначают символом A_n^k. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Число различных размещений из n элементов по k равно произведению k последовательных натуральных чисел, наибольшим из которых является n, то есть*

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} \qquad (2)$$

При доказательстве теоремы используется правило произведения.

Задача 6. Сколькими способами можно распределить 5 путевок в различные дома отдыха, если отдохнуть желают 12 человек?

Решение. Поскольку из 12 человек нужно выбрать 5, а затем распределить между ними различные путевки, здесь важен порядок. В результате имеем размещение из 12 по 5, искомое число способов определяется по формуле (2):

$$A_{12}^5 = \frac{12!}{(12-5)!} = \frac{12!}{7!} = 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 = 95040.$$

1.3 Сочетания без повторений

При составлении k-элементных подмножеств n-элементного множества нас не всегда интересует порядок, в котором располагаются элементы. Например, если имеется 10 сортов ткани и нужно выбрать 4 сорта, то порядок, в котором следует выбирать сорта, значения не имеет. В таких задачах речь идет о подмножествах, не являющихся упорядоченными.

Определение 3. *Всякое k-элементное подмножество n-элементного множества ($k \leq n$) называется сочетанием из n элементов по k.*

Как следует из определения, два сочетания считаются различными, если они отличаются друг от друга хотя бы одним элементом. Порядок элементов в сочетании значения не имеет. Число различных сочетаний из n элементов по k обозначается символом C_n^k.

Теорема 3. *Число сочетаний из n элементов по k элементов определяется по формуле*

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \tag{3}$$

Доказательство. Формула для числа сочетаний легко выводится из формул для числа размещений и числа перестановок. Действительно, составив сначала все сочетания из n элементов по k, а затем переставив входящие в каждое сочетание элементы всеми возможными способами, получим все размещения из n элементов по k элементов. Но из каждого такого сочетания можно составить $k!$ перестановок, а число этих сочетаний равно C_n^k . Таким образом, по правилу произведения, справедлива следующая формула: $k! \cdot C_n^k = A_n^k$. Из этой формулы следует справедливость (3). Тем самым теорема доказана.

Задача 7. Из группы студентов, насчитывающей 25 человек, надо составить команду из 4 человек для участия в забеге на 1000 м. Сколькими способами это можно сделать? Сколькими способами можно составить команду из 4 человек для участия в эстафете $100 + 200 + 300 + 400$?

Решение. Выбор участников бега на 1000 м можно осуществить $C_{25}^4 = \dfrac{25!}{4! \cdot (25-4)!} = 12650$ способами, так как порядок участников в этом случае не имеет значения. Выбор участников эстафеты можно осуществить $A_{25}^4 = \dfrac{25!}{(25-4)!} = 303600$ способами, так как в этом случае участников команды расставляют в определенном порядке.

Простейшие свойства числа сочетаний

1. $C_n^k = C_n^{n-k}$.
2. $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_n^k$.
3. $C_n^0 = C_n^n = 1$.
4. $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

Свойства 2, 3 позволяют вычислять значения C_n^k, зная C_{n-1}^k и C_{n-1}^{k-1}. Пользуясь этим свойством, можно последовательно вычислить C_n^k сначала при $n = 0$, затем при $n = 1$, при $n = 2$ и так далее. Вычисления удобно располагать в виде следующей треугольной таблицы (арифметический треугольник, или треугольник Паскаля):

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & C_0^0 & & & & & \\
 & & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & & \\
 & & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & & \\
 & & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & & \\
 & C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4 & \\
C_5^0 & & C_5^1 & & C_5^2 & & C_5^3 & & C_5^4 & & C_5^5 \\
 & & & & & \ldots & & & & &
\end{array}
$$

или

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \ldots & & & & &
\end{array}
$$

N-я строка треугольника Паскаля — коэффициенты бинома Ньютона:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^n b^n.$$

2 Соединения с повторениями

2.1 Перестановки с повторениями

Выше мы рассмотрели перестановки, размещения и сочетания, составленные из попарно различных элементов. В практике решения задач часто встречаются перестановки, размещения и сочетания, в которых элементы повторяются. Если среди переставляемых элементов есть одинаковые, то перестановок получается меньше, так как некоторые совпадают друг с другом. Например, переставляя буквы в слове ОНА, мы получим 6 различных перестановок: $\left|\begin{array}{c|c|c} \text{ОНА} & \text{НОА} & \text{ОАН} \\ \text{АНО} & \text{НАО} & \text{АОН} \end{array}\right|$. Если вместо слова ОНА взять слово ОНО и во всех выписанных перестановках заменить букву А буквой О, то некоторые перестановки окажутся одинаковыми. Так, из двух слов 1-го столбца получим одно слово ОНО, из двух слов 2-го столбца — НОО, а из двух слов 3-го столбца — ООН. Итак, число различных перестановок из букв слова ОНО равно 3 $(6 : 2 = 3)$ В общем виде задача формулируется так. Имеются элементы k различных типов: $a, b, \ldots, l$. Определить число всех возможных перестановок из этих элементов, если элемент a повторяется n_1 раз, элемент b — n_2 раз (и так далее), элемент l — n_k раз.

Определение 4. *Перестановкой с повторениями из элементов $a, b, \ldots, l$, в которой эти элементы повторяются соответственно $n_1, n_2, \ldots, n_k$ раз, называется кортеж длины $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$, среди компонент которого элемент a встречается n_1 раз, элемент b — n_2 раз(и так далее), элемент l — n_k раз.*

Обозначачим $P(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ число перестановок с повторениями.

Теорема 4. *Число различных перестановок с повторениями из элементов $a, b, \ldots, l$, в которой эти элементы повторяются* *соответственно* $n_1, n_2, \ldots, n_k$ *раз, определяется по формуле*

$$P(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{(n_1 + n_2 + \ldots + n_k)!}{n_1!n_2!\ldots n_k!} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!} \qquad (4)$$

Доказательство. Если пронумеровать все элементы a: $a_1, a_2, \ldots, a_{n_1}$; все элементы b: $b_1, b_2, \ldots, b_{n_2}$ (и так далее); все элементы l: $l_1, l_2, \ldots, l_{n_k}$, и считать элементы с разными номерами различными, то число всех перестановок равно $(n_1 + n_2 + \ldots + n_k)! = n!$. Если снять номера, то среди $n!$ перестановок будут одинаковые. Перестановки, отличающиеся расположением элементов a, совпадут, таких перестановок будет $P_{n_1} = n_1!$. Перестановки, отличающиеся расположением элементов b, тоже совпадут, их будет $P_{n_2} = n_2!$. И так далее. Наконец, перестановки, отличающиеся расположением элементов l, также будут совпадать. Число их равно $P_{n_k} = n_k!$. Поскольку перестановки указанных типов можно делать независимо друг от друга, то по правилу произведения число их будет $n_1!n_2!\ldots n_k!$

Таким образом, в числе $n!$ каждая перестановка с повторениями встречается $n_1!n_2!\ldots n_k!$ раз. Поэтому число различных перестановок с повторениями равно

$$P(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}.$$

Теорема доказана.

Задача 8. Сколько восьмизначных чисел можно записать с помощью цифр 1, 3, 5 при условии, что цифра 1 повторяется в каждом числе четыре раза, цифры 3 и 5 — по 2 раза?

Решение. Искомое число очевидно является числом различных перестановок с повторениями из цифр 1, 3, 5, в которых цифра 1 повторяется четыре раза, а цифры 3 и 5 — по два раза. Поэтому по формуле (4) имеем:

$$P(4, 2, 2) = \frac{8!}{4!2!2!} = 420.$$

2.2 Размещения с повторениями

Пусть имеем множество M, состоящее из n элементов любой природы. Кортеж длины k, составленный из элементов этого множества, называется размещением с повторениями. Здесь необязательно $k < n$.

Определение 5. *Кортеж длины k, составленный из элементов n-элементного множества, называется размещением с повторениями из n элементов по k.*

Число всевозможных размещений с повторениями из n элементов по k будем обозначать $\overline{A}_n^k$.

Теорема 5. *Число различных размещений с повторениями из n элементов по k определяется по формуле*

$$\overline{A}_n^k = n^k. \tag{5}$$

Доказательство. Первый элемент кортежа длины k можно определить n способами, второй элемент — n способами (и так далее), k-й элемент также n способами. В результате по правилу произведения имеем

$$n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^k = \overline{A}_n^k.$$

Задача 9. На диск секретного замка сейфа нанесены 10 цифр, шифр состоит из 4 цифр. Сколько неудачных попыток открвть сейф может сделать человек, не знающий шифра?

Решение. По формуле (5) общее число комбинаций равно $10^4 = 10\,000$. Значит, наибольшее число неудачных попыток равно 9999.

2.3 Число подмножеств конечного множества

Пусть M — конечное множество. Множество M имеет подмножества. В некоторых случаях приходится говорить не об отдельных подмножествах множества M , а о множестве всех его подмножеств. Множество всех подмножеств множества M называется множеством-степенью множества M и обозначается $P(M)$.

Например,
если $M = \varnothing$, то $P(M) = \{\varnothing\}$;
если $M = \{a\}$, то $P(M) = \{\varnothing, \{a\}\}$;
если $M = \{a, b\}$, то $P(M) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$;
если $M = \{a, b, c\}$, то
$P(M) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.

Для приведенных случаев очевидно: если n — численность множества M, то численность множества $P(M)$ равна 2^n.

Теорема 6. *Если множество M содержит n элементов, то число всех подмножеств этого множества равно 2^n.*

Доказательство. Пусть множество $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Число всех подмножеств конечного множества M, состоящего из n элементов, можно определить, используя правило суммы:

$$C_n = C_n^0 + C_b^1 + \ldots + C_n^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i.$$

Используя формулу бинома Ньютона

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^n b^n$$

и положив $a = 1$, $b = 1$, получим: $(1 + 1)^n = 2^n = C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n$, которое выражает еще одно свойство числа сочетаний. Итак, число всех подмножеств конечного множества M, состоящего из n элементов, равно 2^n. Теорема доказана.

2.4 Сочетания с повторениями

Рассмотрим следующую комбинаторную задачу.

Задача 10. В почтовом отделении продаются открытки 4-х видов. Сколькими способами можно купить здесь 9 открыток?

Эта задача не является задачей на размещения с повторениями, так как порядок, в котором выбираются открытки, не является существенным. Она ближе к задачам на сочетания, но в сочетаниях элементы могут повторяться (например, можно купить все 9 открыток одинакового вида). Такие задачи называют задачами на сочетания с повторениями. Общая формулировка этих задач такова. Имеются элементы n различных типов. Сколько совокупностей, содержащих по k элементов каждая, можно составить из них, если не принимать во внимание порядок элементов в совокупности с учётом, что элементы могут быть одинаковыми?

Определение 6. *Сочетанием с повторениями из данных n различных типов элементов по k элементов называется всякая совокупность, содержащая k элементов, каждый из которых является одним из элементов указанных типов.*

Различные сочетания с повторениями из данных n элементов по k элементов, как и сочетания без повторений, отличаются друг от друга составом элементов, входящих в них. Число различных сочетаний с повторениями из n элементов по k элементов будем обозначать $\overline{C}_n^k$.

Теорема 7. *Число различных сочетаний с повторениями из n типов элементов по k элементов определяется по формуле*

$$\overline{C}_n^k = \frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-1)!}. \tag{6}$$

Доказательство. Можно показать, что число различных сочетаний с повторениями из n элементов по k элементов равно числу различных перестановок с повторениями из элементов 0 и 1, в каждой из которых 0 повторяется $(n-1)$ раз, а 1 повторяется k раз, то есть (см. (4)).

$$\overline{C}_n^k = P(n-1, k) = \frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-1)!} = C_{n+k-1}^k.$$

Применим формулу (6) для решения задачи 10. Очевидно, что число способов купить открытки равно числу различных сочетаний с повторениями из 4 элементов по 9, то есть равно 220:

$$\overline{C}_4^9 = P(4-1, 9) = \frac{(4+9-1)!}{9! \cdot (4-1)!} = \frac{12!}{9!3!} = 220.$$

3 Вопросы и упражнения

Вопросы

1. Понятие о комбинаторной задаче.
2. Правила суммы и произведения.
3. Перестановки без повторений.
4. Размещения без повторений.
5. Сочетания без повторений.
6. Простейшие свойства числа сочетаний.
7. Треугольник Паскаля, бином Ньютона.
8. Перестановки с повторениями.
9. Размещения с повторениями.
10. Число подмножеств конечного множества.
11. Сочетания с повторениями.

Упражнения

1. Предположим, что имеются 3 железные дороги, идущие от Б до Н, и 4 — от Н до Т. Сколькими способами можно выбрать дорогу от Б до Т через Н?
2. Сколькими способами можно рассадить 12 гостей за одним столом?
3. В конкурсе красоты участвуют 8 девушек. Сколькими способами могут распределиться между ними места, если каждое место может быть занято только одной участницей?

4. Сколькими способами могут быть присуждены первая и вторая премии двум лицам из группы претендентов в 9 человек?
5. Сколькими способами могут быть присуждены первая, вторая и третья премии трем лицам из 10 соревнующихся?
6. Сколько трехзначных чисел можно образовать из цифр 1, 2, 3 и 5, если каждую из этих цифр можно использовать только один раз?
7. Сколько трехзначных чисел можно образовать из цифр 1, 2, 3 и 5, если каждую из этих цифр можно использовать более одного раза?
8. Сколько шестизначных чисел, не кратных 5, можно образовать из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 при условии, что каждая цифра может быть включена в число только один раз?
9. Сколько четных пятизначных чисел можно образовать из цифр 1, 2, 3, 4, 5 при условии, что каждая цифра может быть включена в число только один раз?
10. На собрании должны выступить 5 человек: А, Б, В, Г, и Д. Сколькими способами можно расположить их в списке ораторов при условии, что А должен выступать непосредственно перед Б?
11. Сколькими способами можно поставить на полку четырехтомник Пушкина, двухтомник Ахматовой и трехтомник Лермонтова так, чтобы книги каждого автора стояли рядом?
12. Сколько существует способов поставить на книжную полку в беспорядке книги из 7-томного собрания сочинений?
13. Сколькими способами можно присудить первую, вторую и третью премии трем лицам, если число соревнующихся равно 12? (Каждая премия присуждается только одному лицу).

14. Из 15 красных и 7 белых тюльпанов формируют букеты. Сколькими способами можно составить букеты из 4 красных и 3 белых тюльпанов?

15. Из 6 претендентов нужно выбрать двоих — одного посыльного и одного конторщика. Сколькими способами можно это сделать?

16. Из 35 учащихся нужно выбрать актив класса, состоящий из старосты, культорга и редактора стенгазеты. Сколькими способами это можно сделать?

17. Восемь юношей и четыре девушки участвуют в КВН. Сколькими способами они могут разбиться на две команды по шесть человек в каждой, если в команде должно быть хотя бы по одной девушке?

18. Студенту необходимо сдать 4 экзамена за 12 дней. Сколькими способами это можно сделать, если известно, что последний экзамен он сдает в 12-й день?

19. Решите уравнение $C_n^{n-2} = 21$ $(n \in N)$.

20. Решите уравнение $C_{n+1}^{n-1} = 28$ $(n \in N)$.

21. Найдите натуральное n, удовлетворяющее условию $A_n^2 = 12$.

22. Рота состоит из 4 офицеров, 8 сержантов и 80 рядовых. Сколькими способами можно сформировать из них отряд, состоящий из одного офицера, трех сержантов и пятнадцати рядовых?

23. В купе железнодорожного вагона имеется два противоположных пятиместных дивана. Из 10 пассажиров четверо желают сидеть лицом к локомотиву, а трое — спиной, остальным трем безразлично, как сидеть. Сколькими способами могут разместиться пассажиры?

24. На вечеринке присутствуют 12 девушек и 15 юношей. Сколькими способами можно выбрать из них 4 пары для танца?

25. Хор состоит из 20 певцов. Сколькими способами можно в течение трех дней выбирать по 15 певцов так, чтобы каждый день были разные составы хора?

26. В меню столовой имеются 3 вида первых блюд и 5 видов вторых. Сколькими способами можно выбрать обед, состоящий из одного первого, одного второго и одного третьего блюда, если на третье предлагали только кофе или чай? Сколькими способами можно выбрать обед, состоящий из одного третьего и двух вторых неповторяющихся блюд?

27. На стене расположено 5 тумблеров. Каждый может быть либо включен, либо выключен. Сколько существует положений тумблеров?

28. Если подбросить одновременно четыре монеты разного достоинства, то сколько различных комбинаций их падения возможно?

29. Сколько разных комбинаций ответов можно дать на n разных вопросов, допускающих только ответы «да» и «нет»:
а) если каждый вопрос должен получить ответ;
б) если не обязательно отвечать на каждый вопрос?

30. Сколькими способами можно рассадить 7 человек за круглым столом? Рассматривается только относительное расположение сидящих друг относительно друга.

31. Сколькими способами можно расположить 7 шайб различного диаметра на кольце для ключей?

32. Алхимик использует 7 ингредиентов для приготовления эликсира жизни. Сколько существует различных порядков вливания их в сосуд?

33. Сколькими способами можно рассадить 3 человек за круглым столом?

34. Сколькими способами можно расположить три ключа на кольце для ключей?

35. Найдите число различных перестановок букв в слове «веер».

36. Найдите число различных перестановок букв в слове «Mississippi».

37. Имеется 5 мест на флагштоке и 5 флагов, из которых 2 красных и 3 белых. Сколько можно изобразить различных сигналов, если использовать все флаги одновременно?

38. Сколькими способами можно рассадить вокруг круглого стола 5 мальчиков и 5 девочек, если каждый мальчик должен сидеть между двумя девочками?

39. Сколько результатов может встретиться при бросании трех игральных костей?

40. Сколькими способами можно рассадить 10 человек вокруг круглого стола, если два определенных лица должны сидеть друг против друга?

41. Сколько чисел больше 100 можно записать с помощью цифр 0, 2, 4, 6 и 8 так, чтобы ни в одном числе ни одна цифра не повторялась и ни одно число не начиналось с 0?

42. Сколько четных чисел меньше 500 можно записать с помощью цифр 2, 3, 4, 5 и 6 так, чтобы ни одна цифра не повторялась ни в одном числе?

43. Если в классе имеется 10 мест, то сколькими способами можно разместить на них трех учеников?

44. Сколько различных вариантов можно получить, переставляя буквы в словах: а) «математика», б) «кукуруза», в) «молоко»?

45. Сколько существует треугольников, длины сторон которых принимают одно из значений 4, 5, 6, 7?

46. Сколько нечетных четырехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если каждую цифру использовать несколько раз?

47. Двое ребят собрали 10 подберезовиков, 16 подосиновиков и 15 маслят. Сколькими способами они могут разделить между собой эти грибы?

48. Четверо студентов сдают экзамен. Сколькими способами им могут быть выставлены оценки, если известно, что ни один из них не получит «неудовлетворительно»?

49. Сколько чисел меньших, чем миллион, можно записать с помощью цифр 9, 8, 7?

50. На товарном складе имеется обивочная ткань шести сортов. Сколькими способами можно обить ею 36 стульев для общежития?

51. Сколько различных четырехзначных чисел можно записать с помощью цифр 0, 1, 2?

52. Трое юношей и четыре девушки выбирают вуз для поступления. В городе есть два военных училища (туда принимают только юношей), университет и две академии. Сколькими способами могут распределиться выпускники между вузами города?

53. Автомобильные номера состоят из трех букв и трех цифр. Сколько можно составить номеров, если использовать 28 букв русского алфавита?

54. В почтовом отделении имеется четыре вида конвертов без марок и пять видов марок нужного достоинства. Сколькими способами можно выбрать три конверта с маркой для отправки писем?

55. Из 10 юношей и 15 девушек необходимо набрать группу в количестве 6 человек так, чтобы в ней было не менее 2 юношей. Сколькими способами это можно сделать?

56. Сколькими способами можно переставлять буквы в слове «молоко» так, чтобы три буквы 'о' не стояли рядом?

57. В меню столовой 4 первых, 6 вторых и 5 третьих блюд. Сколькими способами можно выбрать 2 обеда из трех блюд?

58. Сколько миноров порядка $s = 3$ можно выбрать из матрицы размером $m \times n = 8 \times 6$?

59. Когда Гулливер попал в Лилипутию, он обнаружил, что там все вещи ровно в 12 раз короче, чем на родине. Сколько лилипутских спичечных коробков поместится в спичечном коробке Гулливера?

Список литературы

1. *Москинова, Г. И.* Дискретная математика. Математика для менеджера в примерах и упражнениях : учеб. пособие / Г. И. Москинова. — М. : Логос, 2003. — 240 с.: ил.

2. *Судоплатов, С. В.* Элементы дискретной математики : учебник / С. В. Судоплатов, Е. В. Овчинников. — М. : ИНФРА-М: Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2002. — 280 с.

3. *Яблонский, С. В.* Введение в дискретную математику : учеб. пособие для вузов/под ред. В. А. Садовничего. — М. : Высш. шк., 2001. — 384 с.

4. *Аматова, Г. М.* Математика / Г. М. Аматова, М. А. Аматов. — М. : Московский психолого-социальный институт, 1999. — 488 с.

5. *Андреева, Е. В.* Математические основы информатики : учеб. пособие / Е. В. Андреева, Л. Л. Босова, И. Н. Фалина. — М. : БИНОМ: Лаборатория знаний, 2005. — 328 с.

6. *Асеев, Г. Г.* Дискретная математика : учеб. пособие / Г. Г. Асеев, О. М. Абрамов, Д. Э. Ситников. — Ростов н/Д : Феникс, Харьков : Торсинг, 2003. — 144 с.

7. *Галушкина, Ю. И.* Конспект лекций по дискретной математике : учеб. издание / Ю. И. Галушкина, А. Н. Марьямов. — М. : Айрис-пресс, 2007. — 176 с.

8. *Иванов, Б. Н.* Дискретная математика. Алгоритмы и программы : учеб. пособие. — М. : Лаборатория базовых знаний, 2001. — 288 с.

9. *Непейвода, Н. Н.* Прикладная логика : учеб. пособие. — Новосибирск : Изд-во Новосиб. ун-та, 2000. — 521 с.

10. *Новиков, Ф. А.* Дискретная математика для программиста. — СПб : Питер, 2001. — 304 с.

11. *Плотников, А. Д.* Дискретная математика : учеб. издание / А. Д. Плотников. — М. : Новое знание, 2006. — 304 с.

12. *Романовский, И. В.* Дискретный анализ : учеб. пособие. — СПб. : Невский диалект, 2000. — 240 с.

13. *Рояк, М. Э.* Основы дискретной математики : учеб. пособие / М. Э. Рояк, С. Х. Рояк. — Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2003. — 127 с.

14. *Спирина, М. С.* Дискретная математика / М. С. Спирина, П. А. Спирин. — М. : Академия, 2007. — 368 с.

15. *Комиссаров, В. В.* Математика. Дискретная математика: учеб. пособие / В. В. Комиссаров. — НОУ ВПО Центросоюза РФ СибУПК — Новосибирск. 2011. — 100 с.