

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В. В. Комиссаров
Н. В. Комиссарова

ЛЕКЦИИ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ
ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ

Новосибирск 2016



Содержание

1	Понятие функции	4
1.1	Основные характеристики функции	4
1.2	Обратная функция	6
1.3	Некоторые функции не являющиеся элементарными	7
2	Теория пределов	11
2.1	Предел последовательности	11
2.1.1	Бесконечно малые последовательности . . .	12
2.1.2	Бесконечно большие последовательности . .	12
2.2	Свойства последовательностей	13
3	Предел функции	17
3.1	Бесконечно большая функция	18
3.2	Бесконечно малая функция	18
3.3	Свойства пределов функции	19
3.4	Вычисление пределов функции	22
3.5	Сравнение бесконечно малых функций	26
4	Непрерывность функций. Точки разрыва	29
4.1	Основные теоремы о непрерывных функциях . . .	30

1 Понятие функции

Пусть даны два непустых множества X и Y .

Определение 1. Соответствие f , которое каждому элементу $x \in X$ сопоставляет один и только один элемент $y \in Y$ называется функцией и записывается $y = f(x)$, $x \in X : X \rightarrow Y$.

f отображает множество X на множество Y .

X — область определения функции $f: D(f)$.

Y — множество значений функции $f: E(f)$.

Если X и Y — числовые множества, то f — числовая функция.

В этом случае x — аргумент или независимая переменная, а y — функция или зависимая переменная.

График функции $y = f(x)$ — множество всех точек плоскости Oxy , для каждой из которых x является значением аргумента, а y — соответствующим значением функции.

Чтобы задать функцию $y = f(x)$, необходимо задать (указать) правило.

Способы задания функции:

- 1) аналитический;
- 2) графический;
- 3) табличный;
- 4) алгоритмический.

1.1 Основные характеристики функции

Элементарные функции — функции, которые можно получить с помощью конечного числа арифметических действий и *композиций* из следующих основных элементарных функций:

- алгебраические:

- степенная;
- рациональная.
- трансцендентные:
 - показательная и логарифмическая;
 - тригонометрические и обратные тригонометрические.

Каждую элементарную функцию можно задать формулой, то есть набором конечного числа символов, соответствующих используемым операциям. Все элементарные функции непрерывны на своей области определения.

1. Чётность, нечётность.

$y = f(x)$ — чётная функция,

если $\forall x \in D(f) \Rightarrow -x \in D(f)$ и $f(-x) = f(x)$

$y = f(x)$ — нечётная функция,

если $\forall x \in D(f) \Rightarrow -x \in D(f)$ и $f(-x) = -f(x)$.

2. Монотонность.

Пусть $y = f(x)$ определена на множестве D , $D_1 \subset D$,

$x_1, x_2 \in D_1$; если $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, то функция *возрастающая* на D_1 ;

$x_1, x_2 \in D_1$; если $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$, то функция *неубывающая* на D_1 ;

$x_1, x_2 \in D_1$; если $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, то функция *убывающая* на D_1 ;

$x_1, x_2 \in D_1$; если $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$, то функция *невозрастающая* на D_1 .

(Функции монотонные на множестве, строго монотонные функции, интервалы монотонности)

3. Ограниченность.

$y = f(x)$ — *ограниченная* на множестве, если $\exists M > 0$:

$\forall x \in D \Rightarrow |f(x)| \leq M$.

$(f(x) \leq M, f(x) \geq m$ — ограниченная сверху, ограниченная снизу)

4. Периодичность.

$y = f(x)$ — *периодическая* на $D(f)$, если $\exists T > 0, \forall x \in D(f)$ и $(x + T) \in D(f) \Rightarrow f(x + T) = f(x)$.

Минимальное значение среди всех возможных $T > 0$ — период.

1.2 Обратная функция

Дана $y = f(x)$: D — область определения, E — множество значений.

Если каждому значению $y \in E$ соответствует единственное значение $x \in D$, то определена функция $x = \varphi(y)$ с областью определения E и множеством значений D .

$\varphi(y)$ — *обратная функция* к $f(x)$: $x = \varphi(y) = f^{-1}(y)$.

Функция $\varphi : Y \rightarrow X$ является обратной к функции $f : X \rightarrow Y$, если выполнены следующие тождества:

- $f(\varphi(y)) = y$ для всех $y \in Y$;
- $\varphi(f(x)) = x$ для всех $x \in X$.

Чтобы найти функцию $x = \varphi(y)$ обратную к функции $y = f(x)$, достаточно решить уравнение $f(x) = y$ относительно x , если это возможно.

Функция $y = f(x)$ имеет обратную $\Leftrightarrow$ функция задаёт взаимно-однозначное соответствие между множествами D и $E \Rightarrow \forall$ строго монотонная функция имеет обратную.

Функции $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ изображаются одной и той же кривой. Если же записать функцию в виде $y = \varphi(x) = f^{-1}(x)$, то это означает, что точка $M_1(x_0; y_0)$ кривой $y = f(x)$ становится точкой $M_2(y_0; x_0)$ кривой $y = \varphi(x)$, т. е. кривые $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ симметричны относительно прямой $y = x$.

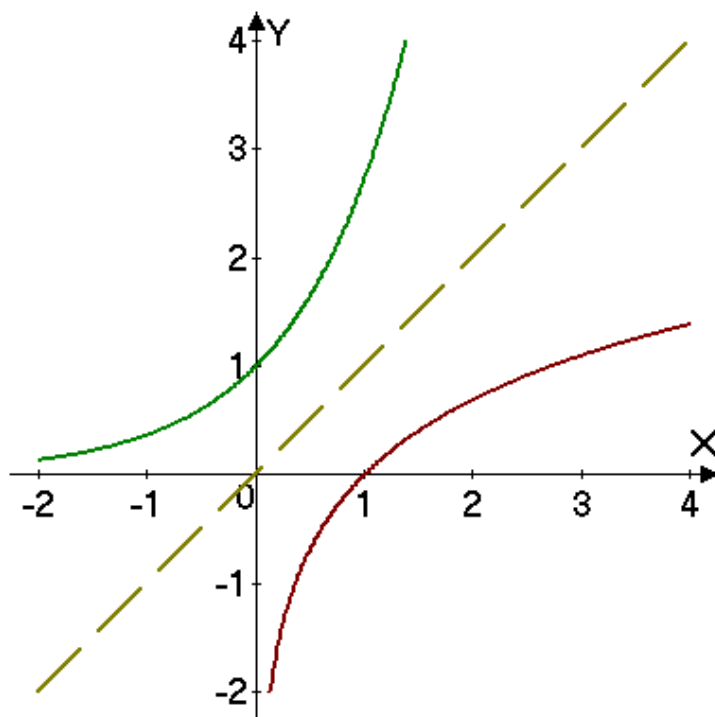


Рис. 1. Графики функций $y = f(x)$ и $y = f^{-1}(x)$

Алгоритм построения обратной функции $y = f^{-1}(x)$

1. Решить уравнение $f(x) = y$ относительно x , если это возможно: $x = \varphi(y)$.
2. Записать функцию в виде $y = \varphi(x) = f^{-1}(x)$.

Примеры

1. Построить функцию обратную к $y = 2x + 1$.
2. Построить функцию обратную к $y = e^x$.
3. Построить функцию обратную к $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$.

1.3 Некоторые функции не являющиеся элементарными

1. Знак числа.

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

2. Целая часть числа: $[x] = \text{entier } x = \lfloor x \rfloor$.

$[x]$ — запись, предложенная Гауссом; $\lfloor x \rfloor$ — Кеннет Айверсон (Канада).

$\lceil x \rceil$ — пол;

$\lceil x \rceil$ — потолок;

$\lfloor 2, 7 \rfloor = \lfloor 2, 7 \rfloor = 2$;

$\lceil 2, 7 \rceil = 3$;

$\lfloor -2, 7 \rfloor = \lfloor -2, 7 \rfloor = -3$;

$\lceil -2, 7 \rceil = -2$.

Количество цифр в записи числа n в позиционной системе счисления с основанием b : $\lfloor \log_b n \rfloor + 1$

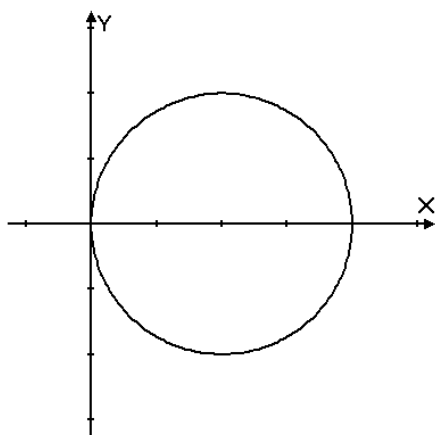
3. Дробная часть числа: $\{x\} = x - [x] = x \bmod 1$.

Пример. $\{1, 3\} = 0, 3$, $\{-1, 3\} = 0, 7$.

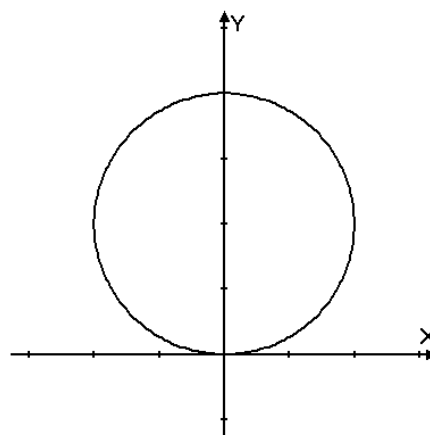
4. Остаток от деления: $x \bmod y = x - y \lfloor x/y \rfloor$.

Полярная система координат

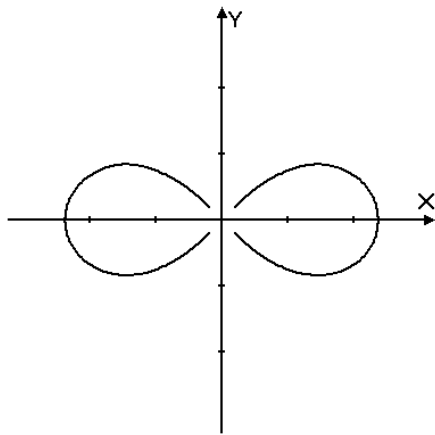
$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}. \end{cases}$$



Окружность
 $\rho = 2R \cos \varphi$

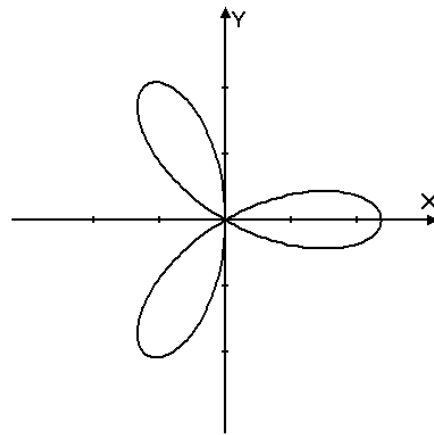


Окружность
 $\rho = 2R \sin \varphi$



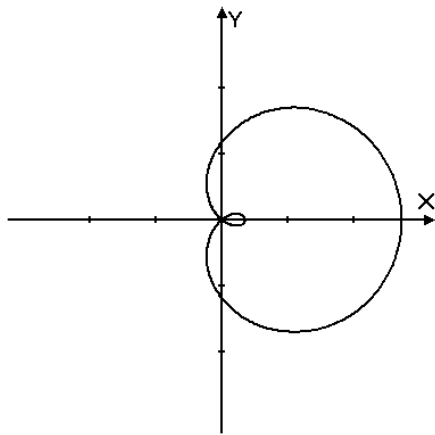
Лемниската Бернулли

$$\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$$



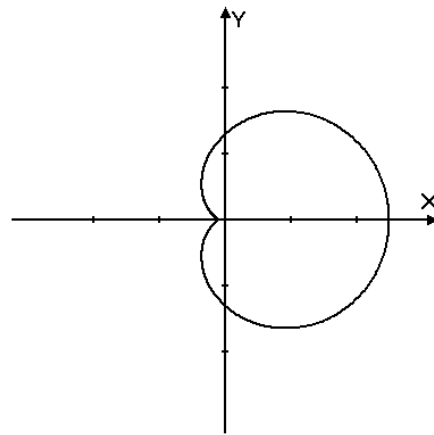
Трёхлепестковая роза

$$\rho = a \cos 3\varphi$$



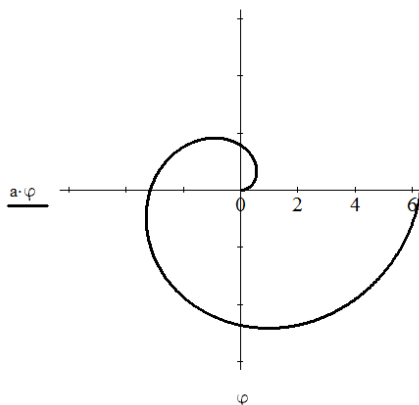
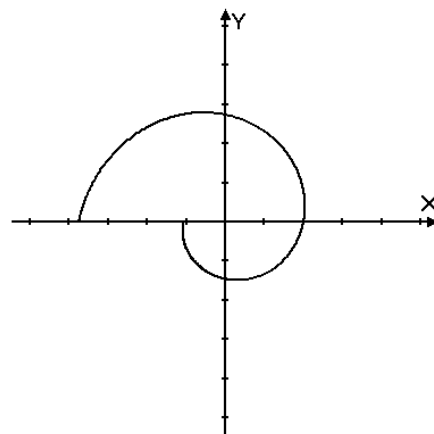
Улитка Паскаля

$$\rho = b + a \cos \varphi, \quad a > b$$



Кардиоида

$$\rho = b + a \cos \varphi, \quad a < b$$

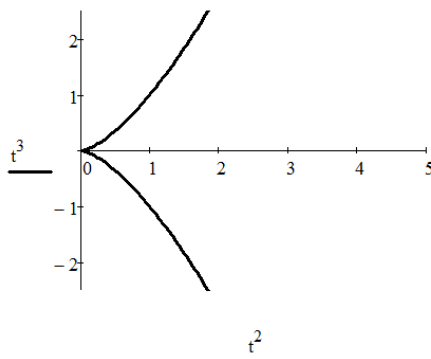
Спираль Архимеда $\rho = a\varphi$ 

Логарифмическая спираль

$$\rho = ae^{b\varphi}$$

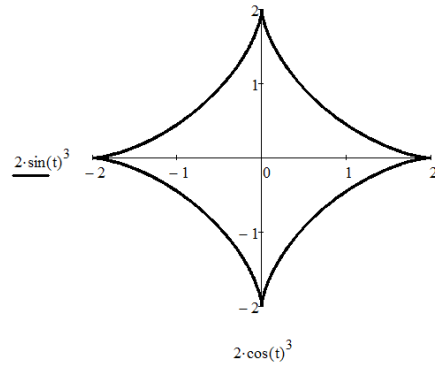
Параметрическое задание линии

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$



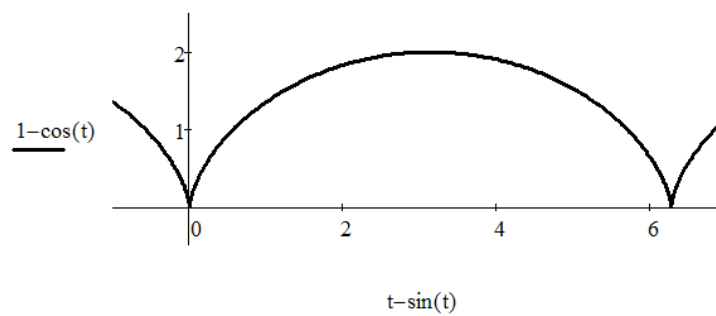
Полукубическая парабола

$$\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3, \end{cases}$$



Астроида

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t, \end{cases}$$



Циклоида

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$$

2 Теория пределов

2.1 Предел последовательности

Определение 2. *Под числовой последовательностью*

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

понимается функция $x_n = f(n)$, $n \in N$. x_n — общий член последовательности.

Т. е., чтобы задать последовательность, необходимо задать функцию натурального аргумента.

Примеры

$$v_n = n^2 + 1, \quad z_n = (-1)^n \cdot n, \quad y_n = \frac{1}{n}, \quad u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad w_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Определение 3. *Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной, если $\exists M > 0 \forall n \in N |x_n| < M$. В противном случае — последовательность не ограниченная.*

Т. к. последовательность — это функция натурального аргумента, то она, как и любая функция, может быть: возрастающая, неубывающая, убывающая, невозрастающая, монотонная.

Рекуррентный способ задания последовательности: $x_n = f(x_{n-1})$. Например последовательности чисел Фибоначчи: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ..., $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$.

Определение 4. *Число A называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε найдётся такое натуральное число $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что при всех $n > n_0$ выполняется неравенство: $|x_n - A| < \varepsilon$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$.*
 $(A : \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in N : \forall n > n_0 \Rightarrow |x_n - A| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A.)$

Говорят: последовательность x_n *сходится* к A .

Сходящиеся последовательности имеют только один предел. Последовательности не имеющие предела — *расходящиеся*.

Постоянная последовательность $x_n = c$, $n \in N$ имеет предел, равный c , т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} c = c$.

2.1.1 Бесконечно малые последовательности

Определение 5. Последовательность a_n называется бесконечно малой, если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

($\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in N : \forall n > n_0 \Rightarrow |a_n| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.)

Примеры

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad b_n = \frac{n+1}{n^2}, \quad c_n = \sin \frac{1}{n}.$$

Свойства бесконечно малых последовательностей

1) Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = 0$.

Сумма двух бесконечно малых последовательностей, а значит и сумма конечного числа бесконечно малых последовательностей, есть бесконечно малая последовательность.

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ и $|y_n| < M$ для $n \in N$, тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n y_n = 0$.

Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную, есть бесконечно малая последовательность.

Следствие: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = 0$.

Пример

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right) = 0.$$

2.1.2 Бесконечно большие последовательности

Определение 6. Последовательность x_n называется бесконечно большой, если для любого сколь угодно большого числа $M > 0$ существует номер N_M , такой что начиная с этого номера, т. е. для всех членов последовательности с номерами больше N_M , выполняется неравенство: $|x_n| > M$ при $n > N_M$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty.$$

$$(\forall M > 0 \exists N_M : \forall n > N_M \Rightarrow |x_n| > M \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty)$$

Бесконечно большая последовательность становится и остаётся по абсолютной величине больше любого наперёд заданного числа.

Примеры

$$x_n = n, \quad y_n = n^2, \quad z_n = \ln n, \quad u_n = \frac{n^2 + 1}{n}.$$

2.2 Свойства последовательностей

1. Если $\{a_n\}$ — бесконечно малая последовательность и $a_n \neq 0$, то последовательность $x_n = \frac{1}{a_n}$ — бесконечно большая.
2. Если $\{x_n\}$ — бесконечно большая последовательность, то последовательность $a_n = \frac{1}{x_n}$ — бесконечно малая.

Арифметические свойства пределов

Пусть даны последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, тогда:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (cx_n) = c \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = ca$;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a + b$;
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a \cdot b$;
- 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n} = \frac{a}{b}, \quad y_n \neq 0, \quad b \neq 0.$

Теорема 1 (Вейерштрасса). *Всякая монотонная ограниченная последовательность имеет предел.*

В качестве примера рассмотрим последовательность:

$$\{x_n\} = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}, n \in N.$$

Воспользуемся формулой бинома Ньютона:

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k = \\ &= a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + b^n = \\ &= a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b^1 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^2 + \dots + b^n. \end{aligned}$$

Положим $a = 1$, $b = \frac{1}{n}$.

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \frac{n}{1} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{n^3} + \\ &\quad + \frac{n(n-1) \dots (n-(n-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} \cdot \frac{1}{n^n} = \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \\ &\quad + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \quad (1) \end{aligned}$$

С увеличением n число положительных слагаемых увеличивается и $\frac{1}{n}$ — убывает, а $\left(1 - \frac{1}{n}\right), \left(1 - \frac{2}{n}\right), \dots, \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$ — возрастает $\Rightarrow$ последовательность $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}$ — возрастающая, при этом $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 2$.

Покажем ограниченность этой последовательности. Заменим

в выражении (1) каждую скобку на 1.

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &< 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} < \\ &< 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) = \end{aligned}$$

выражение в скобках — сумма геометрической прогрессии

$$= 1 + \frac{1 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \Rightarrow$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + 2 = 3.$$

В результате $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ — ограниченная.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2,718281828459045 \dots$$

Неопределённости

$$\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} \quad \left\{\frac{0}{0}\right\} \quad \{0 \cdot \infty\} \quad \{\infty - \infty\} \quad \{1^\infty\}$$

Примеры

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + n - 3}{2n^2 + 7n + 5};$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^3 + 3n^2 - 5n}{n + 1};$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n + 7}{2n^2 - 3n + 1};$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - 1}\right);$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+2)! - (n+1)!};$$

$$6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + 4 + 6 + \dots + 2n}{1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)};$$

$$7) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} \right);$$

$$8) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n+1} \right)^n.$$

3 Предел функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 , за исключением, быть может самой этой точки.

Определение 7 (Коши). Число A называется пределом функции $y = f(x)$ в точке x_0 (или при $x \rightarrow x_0$), если для любого положительного числа ε найдётся такое положительное $\delta = \delta(\varepsilon)$, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство: $|f(x) - A| < \varepsilon$. Записывается: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

$$A : \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \forall x : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

Односторонние пределы

Предел функции $y = f(x)$ при стремлении x к x_0 слева:

$$A_1 : \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in (x_0 - \delta; x_0) \Rightarrow |f(x) - A_1| < \varepsilon \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A_1$$

Предел функции $y = f(x)$ при стремлении x к x_0 справа:

$$A_2 : \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in (x_0; x_0 + \delta) \Rightarrow |f(x) - A_2| < \varepsilon \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A_2$$

Если существует $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, то существуют оба односторонних предела.

Примеры

$$1) \lim_{x \rightarrow 1-0} 2^{1/(x-1)} = 0;$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1+0} 2^{1/(x-1)} = \infty.$$

Предел функции при $x \rightarrow \infty$

$$A : \forall \varepsilon > 0 \exists M > 0 \forall |x| > M \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$$

3.1 Бесконечно большая функция

Функция $y = f(x)$ называется бесконечно большой при $x \rightarrow x_0$, если

$$\forall M > 0 \exists \delta > 0 \forall x : |x - x_0| < \delta, x \neq x_0 \Rightarrow |f(x)| > M.$$

Функция $y = f(x)$ называется бесконечно большой при $x \rightarrow \infty$, если

$$\forall M > 0 \exists N > 0 \forall x : |x| > N \Rightarrow |f(x)| > M.$$

Примеры

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x - 2} = \infty;$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x = \infty.$$

3.2 Бесконечно малая функция

Функция $y = f(x)$ называется бесконечно малой при $x \rightarrow x_0$, если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0.$$

Примеры

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0;$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{-x} = 0.$$

3.3 Свойства пределов функции

1. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых функций — есть функция бесконечно малая.
2. Произведение ограниченной функции на бесконечно малую функцию — есть бесконечно малая функция.
3. Частное от деления бесконечно малой функции на функцию, имеющую отличный от нуля предел — есть бесконечно малая функция.
4. Если функция $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция ($\alpha(x) \neq 0$), то функция $\frac{1}{\alpha(x)}$ — есть бесконечно большая функция, и наоборот, если функция $f(x)$ — бесконечно большая функция, то функция $\frac{1}{f(x)}$ — есть бесконечно малая функция.
5. $\lim_{x \rightarrow x_0} (cf(x)) = c \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = ca$;
6. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm \varphi(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = a \pm b$;
7. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot \varphi(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = a \cdot b$;
8. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)} = \frac{a}{b}, \varphi(x) \neq 0, b \neq 0$.

«Принцип двух конвоиров»

Теорема 2 (О промежуточной функции). Если функция $y = f(x)$ заключена между двумя функциями $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, стремящихся к одному и тому же пределу при стремлении x к x_0 , то она также стремится к этому пределу, т. е. если

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) = A;$$

$$2) \varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x).$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$$

Доказательство

Из первого условия $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$, δ -окрестности точки x_0 в одной из которых выполнено: $|\varphi(x) - A| < \varepsilon$ или $-\varepsilon < \varphi(x) - A < \varepsilon$, а в другой: $|\psi(x) - A| < \varepsilon$ или $-\varepsilon < \psi(x) - A < \varepsilon$. Пусть δ — меньшее из чисел δ_1, δ_2 . Тогда в этой δ -окрестности выполнены оба неравенства.

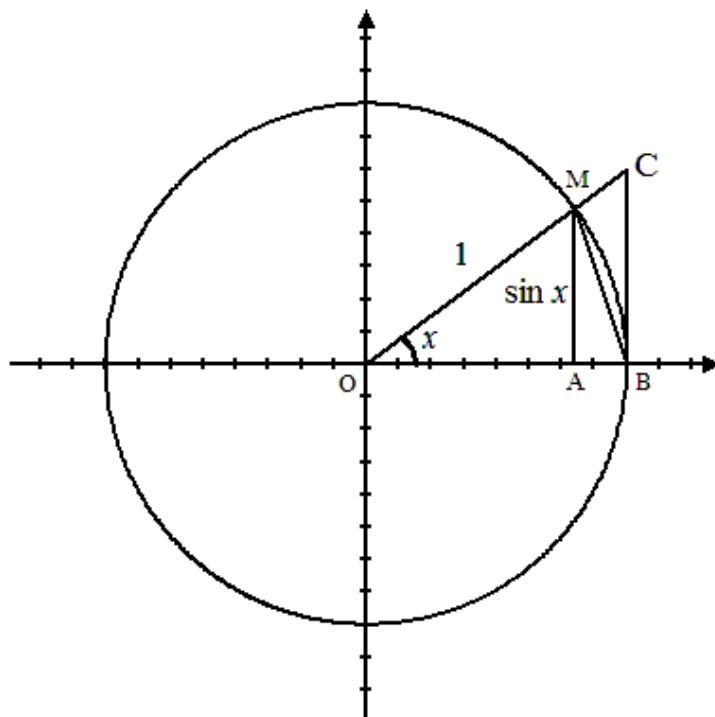
Из второго условия имеем: $\varphi(x) - A \leq f(x) - A \leq \psi(x) - A$. В результате имеем: $-\varepsilon \leq f(x) - A \leq \varepsilon$ или $|f(x) - A| \leq \varepsilon$.

Т. е. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \forall x : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$
 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ч. т. д.

Теорема 3 (Первый замечательный предел).

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Доказательство



$$0 < x < \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} S_{\triangle OMB} &< S_{\text{сек}} < S_{\triangle OCB} \\ S_{\triangle OMB} &= \frac{\sin x}{2}, \quad S_{\text{сек}} = \frac{x}{2}, \quad S_{\triangle OCB} = \frac{\operatorname{tg} x}{2} \\ \frac{\sin x}{2} &< \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2} \\ \sin x &< x < \operatorname{tg} x \end{aligned}$$

Разделим левую и правую части неравенств на $\sin x$ ($\sin x \neq 0$).

$$\begin{aligned} 1 &< \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \quad \text{или} \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1. \\ \lim_{x \rightarrow 0} \cos x &= 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1 \Rightarrow \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ по теореме о промежуточной функции $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Теорема 4 (Второй замечательный предел).

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{1/\alpha} = e, \quad x \in R.$$

Доказательство

Предел числовой последовательности:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2,718281828459045 \dots, \quad n \in N.$$

При $x \rightarrow \infty$ значение x заключено между двумя положительными целыми числами: $n \leq x < n+1 \Rightarrow$

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n} \Rightarrow 1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{x} \leq 1 + \frac{1}{n}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = e, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e,$$

$$\Rightarrow \text{по теореме о промежуточной функции } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

3.4 Вычисление пределов функции

Предел функции не зависит от того, определена она в предельной точке или нет.

Если функция является элементарной, и если предельное значение аргумента принадлежит области её определения, вычисление предела функции сводится к простой подстановке предельного значения аргумента, т. е. предел элементарной функции $y = f(x)$ при x , стремящемся к значению x_0 , которое входит в область её определения, равен значению функции при $x = x_0$, т. е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Если аргумент стремится к ∞ или к числу, которое не принадлежит области определения функции, то требуется дополнительное исследование.

Из свойств элементарных функций ($a > 0$)

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} ax = \infty;$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{a} = \infty;$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{a}{x} = -\infty;$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{a}{x} = +\infty;$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a}{x} = \infty;$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a}{x} = 0;$$

$$7) \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \begin{cases} 0, & 0 < a < 1, \\ +\infty, & a > 1; \end{cases}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \begin{cases} 0, & a > 1, \\ +\infty, & 0 < a < 1; \end{cases}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty, & a > 1, \\ -\infty, & 0 < a < 1; \end{cases}$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 0+0} \log_a x = \begin{cases} -\infty, & a > 1, \\ +\infty, & 0 < a < 1; \end{cases}$$

$$11) \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2};$$

$$12) \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2};$$

$$13) \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arcctg} x = 0;$$

$$14) \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arcctg} x = \pi.$$

Более сложные случаи нахождения предела функции

Неопределённости

$$\left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} \quad \left\{ \frac{0}{0} \right\} \quad \{0 \cdot \infty\} \quad \{\infty - \infty\} \quad \{1^\infty\}$$

I. $x \rightarrow x_0$ или $x \rightarrow \infty$ неопределённость $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$

Замечание. При $x \rightarrow x_0$, то $x - x_0 \neq 0$, т. е. x не принимает значение x_0 , следовательно дробь можно сократить на $x - x_0$.

Примеры

1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x^3 - 8};$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{x + 1}}{x};$

3) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos^3 x};$

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x};$

5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 5x};$

6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{x};$

7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2};$

8) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}{x^3 - 2x^2 + 4x - 8}.$

II. $x \rightarrow x_0$ или $x \rightarrow \infty$ неопределённость $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$

Замечание. Предельный переход $x \rightarrow \infty$ может быть заменён предельным переходом $\alpha \rightarrow 0$, $\alpha = \frac{1}{x}$.

Примеры

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5x - 2}{5x^2 - x + 8};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 7^{x+2}}{3 - 7^x}.$$

III. $x \rightarrow x_0$ или $x \rightarrow \infty$ неопределённость $\{0 \cdot \infty\}$

Приводится к неопределённости $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ или $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$.

IV. $x \rightarrow x_0$ или $x \rightarrow \infty$ неопределённость $\{\infty - \infty\}$

Приводится к неопределённости $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ или $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$.

Примеры

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x - 2} - \frac{4}{x^2 - 4} \right).$$

V. $x \rightarrow x_0$ или $x \rightarrow \infty$ неопределённость $\{1^\infty\}$

Примеры

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2x + 5}{x^2 + 2x - 1} \right)^{x^2};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x - 3}{x + 2} \right)^{2x+1}.$$

3.5 Сравнение бесконечно малых функций

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые функции, т. е.
 $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) = 0$.

1. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A, A \neq 0, A \in R$,
то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — называются бесконечно малыми функциями *одного порядка малости*.
2. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$,
то $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция *высшего порядка малости* относительно $\beta(x)$.
3. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$,
то $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция *более низкого порядка малости* относительно $\beta(x)$.
4. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta^n(x)} = A, A \neq 0, A \in R$,
то $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция *порядка n* относительно $\beta(x)$.
5. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$,
то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — *эквивалентные* бесконечно малые функции.

Теорема 5. *Предел отношения двух бесконечно малых функций не изменится, если каждую или одну из них заменить эквивалентной ей бесконечно малой функцией.*

Таблица эквивалентных бесконечно малых функций

Пусть $\alpha(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow x_0$.

- 1) $\sin \alpha(x) \sim \alpha(x)$;
- 2) $\operatorname{tg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$;
- 3) $\arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x)$;
- 4) $\operatorname{arctg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$;
- 5) $1 - \cos \alpha(x) \sim \frac{\alpha^2(x)}{2}$;
- 6) $e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$;
- 7) $b^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \ln b$;
- 8) $\ln(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x)$;
- 9) $\log_a(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x) \log_a e = \frac{\alpha(x)}{\ln a}$;
- 10) $(1 + \alpha(x))^k - 1 \sim k \cdot \alpha(x), k > 0$;
- 11) $\sqrt{1 + \alpha(x)} - 1 \sim \frac{\alpha(x)}{2}$.

Примеры

Вычислить пределы, используя эквивалентности

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x^2}{3x^2}$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{tg}(\pi - x)}{\pi^3 - x^3}$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{\operatorname{arctg} 3x}$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{e^{x^2} - 1}$;

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 5x)}{\sqrt{1 + 4x} - 1}.$$

Определить порядок малости функции y относительно x при $x \rightarrow 0$

$$1) y = \sqrt{a + x^3} - \sqrt{a};$$

$$2) y = x^3 + 1000 \cdot x^2;$$

$$3) y = \frac{5x^8}{x^3 + 1}.$$

Замечание. Для бесконечно больших функций имеют место аналогичные правила сравнения.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно большие функции, т. е.
 $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = \infty$ и $\lim_{x \rightarrow x_\infty} \beta(x) = \infty$.

1. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A, A \neq 0, A \in R$,
 то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — называются бесконечно большими функциями *одного порядка роста*.

2. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$,
 то $\alpha(x)$ — бесконечно большая функция *более низкого порядка роста* относительно $\beta(x)$.

3. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$,
 то $\alpha(x)$ — бесконечно большая функция *более высокого порядка роста* относительно $\beta(x)$.

4. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta^n(x)} = A, A \neq 0, A \in R$,
 то $\alpha(x)$ — бесконечно большая функция *порядка n* относительно $\beta(x)$.

5. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$,
то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — эквивалентные бесконечно большие функции.

4 Непрерывность функций. Точки разрыва

Приращение аргумента: $\Delta x = x - x_0$.

Приращение функции: $\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)$.

Определение 8 Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 , если в этой точке бесконечно малому приращению аргумента Δx соответствует бесконечно малое приращение функции Δy :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)) = 0.$$

$$(\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) \forall x : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

Замечание. В отличие от предела функции окрестность в этом случае не является выколотой.

Из определения следует, что функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 , если при $x \rightarrow x_0$ предел функции существует и равен её частному значению в этой точке, т. е. если:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Для непрерывности функции $y = f(x)$ в точке x_0 необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

- 1) функция должна быть определена в некотором интервале, содержащем точку x_0 (т. е. в самой этой точке x_0 и вблизи этой точки);
- 2) функция должна иметь одинаковые односторонние пределы:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x);$$

3) эти односторонние пределы должны быть равны $f(x_0)$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$$

Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в интервале $(a; b)$ если она непрерывна в каждой точке интервала.

Функция $y = f(x)$ называется разрывной в точке x_0 , если она определена в сколь угодно близких точках, но в самой точке x_0 не удовлетворяет хотя бы одному из условий непрерывности.

Разрыв функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется *конечным* или *1-го рода*, если существуют конечные односторонние пределы:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A_1, \quad \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A_2, \quad A_1 \neq A_2.$$

Скачок функции: $A_2 - A_1$.

Если $A_1 = A_2$ — устранимый разрыв.

Все другие случаи — *разрыв 2-го рода*.

4.1 Основные теоремы о непрерывных функциях

Теорема 6. Все элементарные функции непрерывны во всей области своего определения, т. е. область непрерывности полностью совпадает с её областью определения.

Теорема 7. Сумма, произведение и частное двух непрерывных функций — есть функция непрерывная, для частного за исключением тех значений аргумента, в которых знаменатель равен нулю.

Теорема 8. Пусть функция $u = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0 , а функция $y = f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = \varphi(x_0)$. Тогда сложная функция $f(\varphi(x))$, состоящая из непрерывных функций, непрерывна в точке x_0 .

Теорема 9. Если функция $y = f(x)$ непрерывна и строго монотонна на $[a; b]$, то обратная функция $y = \varphi(x)$ так же непрерывна и монотонна на соответствующем отрезке $[c; d]$.

Теорема 10 (Вейерштрасса). Если функция непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значений.

Теорема 11. Если функция непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она ограничена на этом отрезке.

Теорема 12 (Больцано-Коши). Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и принимает на его концах неравные значения $f(a) = A$ и $f(b) = B$, то на этом отрезке она принимает все промежуточные значения между A и B .

Примеры

Исследовать функции на непрерывность.

$$1) f(x) = \frac{1}{x^2 - 4};$$

$$2) f(x) = \frac{3x - 5}{x^2 + 2x + 10};$$

$$3) f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x};$$

$$4) f(x) = \frac{|x - 3|}{x - 3};$$

$$5) f(x) = \lg(x^2 + 3x);$$

$$6) f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0 \leq x \leq 1, \\ 4 - 2x, & 1 < x < 2,5, \\ 2x - 7, & 2,5 \leq x < \infty; \end{cases}$$

$$7) f(x) = \frac{1}{2x - 1}.$$

Список литературы

1. *Беклемишев, Д. В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры : учебник для вузов / Д. В. Беклемишев. — М.: Физматлит, 2008. — 307 с.
2. *Фихтенгольц, Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т 1. / Г. М. Фихтенгольц. — М.: Физматлит, 2001. — 680 с.
3. *Письменный, Д. Т.* Конспект лекций по высшей математике. / Д. Т. Письменный. — М.: Айрис-пресс, 2006.
4. *Пискунов, Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисления: учеб. пособие для ВТУЗов. Т 1, 2. / Н. С. Пискунов. — М.: Наука, 1968.
5. *Лунгу, К. Н.* Высшая математика. Руководство к решению задач: учеб. пособие. Ч. 1. / К. Н. Лунгу, Е. В. Макаров. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 216 с.
6. *Запорожец, Г. И.* Руководство к решению задач по математическому анализу: учеб. пособие / Г. И. Запорожец. — М.: Книга по Требованию, 2012. — 456 с.
7. *Ефимов, А. В.* Сборник задач по математике для втузов. В 4-х частях. Ч. 1. Линейная алгебра и основы математического анализа: учеб. пособие для втузов / В. А. Болгов, Б. П. Демидович, А. В. Ефимов и др. — М.: Наука, 1993. — 480 с.
8. *Бермант, А. Ф.* Краткий курс математического анализа : учебник для вузов. / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович. — СПб.: «Лань», 2005. — 736 с.
9. *Берман, Г. Н.* Сборник задач по курсу математического анализа: учеб. пособие / Г. Н. Берман. — СПб., Профессия, 2005. — 432 с.
10. Высшая математика: учеб. пособие / В. М. Бородихин, М. Ю. Васильчик, Н. В. Вахрушев, В. А. Селезнёв, В. В. Хаблов. — Новосибирск.: Изд-во НГТУ, 2006. — Т1 — 280 с.