

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В. В. Комиссаров
Н. В. Комиссарова

ЛЕКЦИИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Новосибирск 2016



Содержание

1	Интегральное исчисление функции одной переменной	5
1.1	Неопределённый интеграл	5
1.2	Свойства неопределённого интеграла	6
1.3	Таблица основных неопределённых интегралов . .	7
1.4	Основные методы интегрирования	8
1.4.1	Метод непосредственного интегрирования .	8
1.4.2	Метод интегрирования подстановкой	9
1.4.3	Метод интегрирования по частям	9
1.4.4	Интегрирование дробно-рациональных функций	10
1.4.5	Интегрирование тригонометрических функций	14
1.4.6	Интегрирование иррациональных функций	16
1.4.7	Интегралы от дифференциальных биномов	17
1.5	Определённый интеграл	19
1.5.1	Формула Ньютона–Лейбница	20
1.6	Основные свойства определённого интеграла . . .	21
1.7	Вычисление определённого интеграла	22
1.8	Применение определённого интеграла к вычислениям различных величин	23
1.8.1	Площадь плоской фигуры в декартовой системе координат	25
1.8.2	Площадь плоской фигуры в полярной системе координат	26
1.8.3	Площадь плоской фигуры, заданной параметрически	26
1.8.4	Длина дуги плоской кривой в декартовой системе координат	27
1.8.5	Длина дуги плоской кривой, заданной параметрически	29

1.8.6	Длина дуги плоской кривой в полярных координатах	29
1.8.7	Дифференциал дуги	30
1.8.8	Вычисление объёма тела по известным площадям поперечных сечений	31
1.8.9	Объёма тела вращения	32
1.8.10	Площадь боковой поверхности тела вращения	33
1.8.11	Работа переменной силы	35
1.9	Несобственные интегралы	36
1.9.1	Несобственные интегралы 1-го рода	36
1.9.2	Несобственные интегралы 2-го рода	40
1.10	Приближённое вычисление интегралов	42

1 Интегральное исчисление функции одной переменной

Дифференциальное исчисление: по заданной функции $y = f(x)$ найти её производную $f'(x)$ (или дифференциал).

Интегральное исчисление: найти функцию $F(x)$, зная её производную $F'(x) = f(x)$ (или дифференциал $dF(x) = f(x)dx$).

1.1 Неопределённый интеграл

Определение 1. Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$, если для $\forall x \in (a; b)$ выполнено $F'(x) = f(x)$ (или $dF(x) = f(x)dx$).

Теорема 1. Если функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на $(a; b)$, то множество всех первообразных для $f(x)$ задаётся формулой $F(x) + C$, где C — константа.

Определение 2. Множество всех первообразных функций $F(x) + C$ для $f(x)$ называется неопределённым интегралом от функции $f(x)$, и обозначается символом $\int f(x)dx$, т. е.

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Операция нахождения $F(x)$ — интегрирование.

Теорема 2. Всякая непрерывная на $(a; b)$ функция имеет на этом промежутке первообразную, а следовательно и неопределённый интеграл.

Замечание. Не всякая первообразная выражается с помощью элементарных функций.

График первообразной — интегральная кривая. Множество первообразных — семейство интегральных кривых.

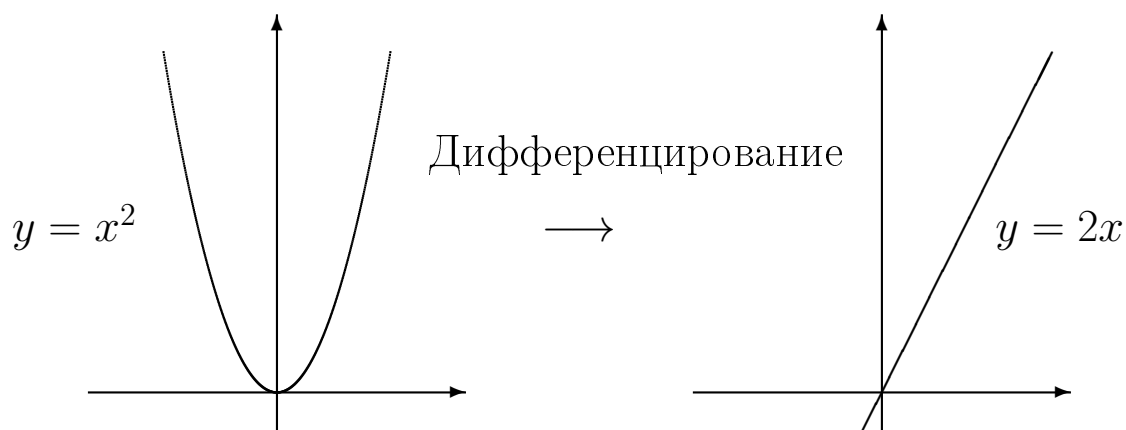


Рис. 1. Функция и её производная

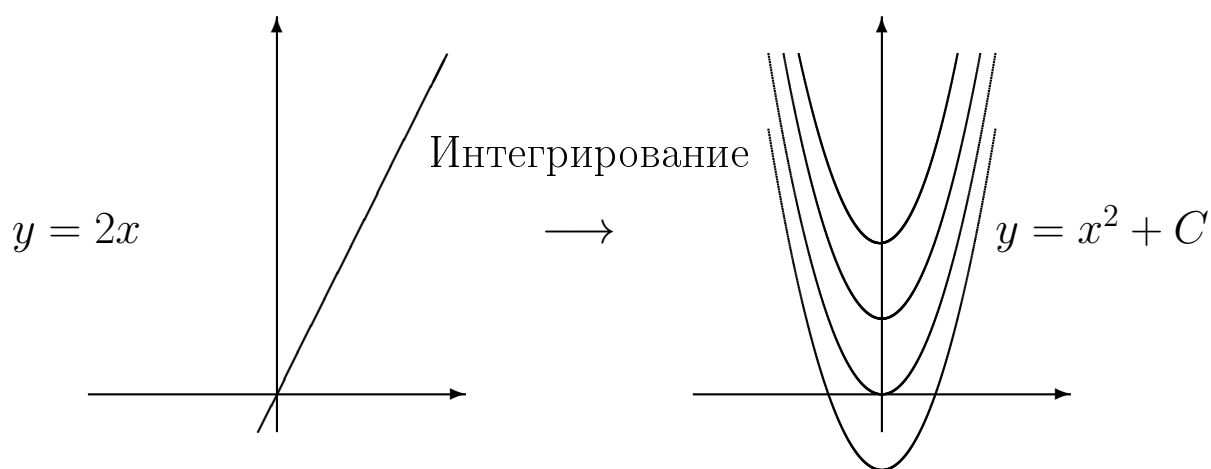


Рис. 2. Функция и семейство интегральных кривых

1.2 Свойства неопределённого интеграла

1. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx, \left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$

Правильность интегрирования проверяется дифференцированием.

2. $\int dF(x) = F(x) + C.$

3. $\int af(x)dx = a \int f(x)dx.$

4. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$

5. Инвариантность формулы интегрирования.

Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то и $\int f(u)du = F(u) + C$, где $u = \varphi(x)$.

1.3 Таблица основных неопределённых интегралов

$$1) \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1 \left(\int dx = x + C \right);$$

$$2) \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C;$$

$$3) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$$

$$4) \int e^x dx = e^x + C;$$

$$5) \int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$6) \int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$7) \int \operatorname{tg} x dx = -\ln |\cos x| + C;$$

$$8) \int \operatorname{ctg} x dx = \ln |\sin x| + C;$$

$$9) \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$$

$$10) \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$$

$$11) \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C;$$

$$12) \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C;$$

$$13) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C;$$

$$14) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C;$$

$$15) \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C;$$

$$16) \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C;$$

$$17) \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C;$$

$$18) \int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C.$$

1.4 Основные методы интегрирования

1.4.1 Метод непосредственного интегрирования

Основан на тождественных преобразованиях подынтегральной функции — сведение к табличным интегралам.

Используются следующие преобразования дифференциала:

$$du = d(u + a), \quad du = \frac{1}{a} d(au), \quad a — \text{константа}, \quad a \neq 0.$$

Примеры

$$1) \int (2x^4 + x\sqrt{x} + x + 5) dx;$$

$$2) \int \frac{x+1}{x} dx;$$

$$3) \int \frac{x^2}{x^2+1} dx;$$

$$4) \int \frac{dx}{x+3};$$

$$5) \int \operatorname{ctg}^2 x dx.$$

1.4.2 Метод интегрирования подстановкой

Общих методов подбора подстановок не существует.

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d\varphi(x) = \int f(t)dt.$$

Примеры

1) $\int e^{\frac{x}{4}}dx;$

2) $\int \cos(3x + 5)dx;$

3) $\int x\sqrt{x-3}dx;$

4) $\int \frac{dx}{e^x + 1}dx;$

5) $\int \operatorname{tg} x dx.$

1.4.3 Метод интегрирования по частям

Метод интегрирования по частям позволяет свести исходный неопределенный интеграл к более простому виду либо к табличному интегралу. Этот метод наиболее часто применяется, если подынтегральная функция содержит многочлен n -ой степени и логарифмические, показательные, обратные тригонометрические, тригонометрические функции, а также их комбинации.

Воспользуемся равенствами

$$d(uv) = u dv + v du,$$

$$\int d(uv) = \int u dv + \int v du,$$

$$uv = \int u dv + \int v du,$$

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Последнее соотношение называется *формулой интегрирования по частям*.

Типы интегралов для которых применима формула интегрирования по частям.

- 1) $\int P(x)e^{kx}dx$, $\int P(x)\sin kx dx$, $\int P(x)\cos kx dx$,
 $P(x)$ — многочлен, $P(x) = u$, остальная часть подынтегральной функции — dv ;
- 2) $\int P(x)\ln x dx$, $\int P(x)\arcsin x dx$, $\int P(x)\arccos x dx$,
 $\int P(x)\operatorname{arctg} x dx$, $\int P(x)\operatorname{arcctg} x dx$, тогда $P(x)dx = dv$;
- 3) $\int e^{ax}\sin bxdx$, $\int e^{ax}\cos bxdx$, $u = e^{ax}$.

Примеры

- 1) $\int (2x + 1)e^{3x} dx$;
- 2) $\int \ln x dx$;
- 3) $\int x^2 e^x dx$;
- 4) $\int \operatorname{arctg} x dx$;
- 5) $\int e^x \sin x dx$.

1.4.4 Интегрирование дробно-рациональных функций

$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ — многочлен n -ой степени (целая рациональная функция).

x_0 — корень многочлена, если $P_n(x_0) = 0$. В общем случае $x \in \mathbb{C}$.

Если x_0 — корень многочлена, то $P_n(x)$ делится без остатка на $x - x_0$, т. е.

$$P_n(x) = (x - x_0)P_{n-1}(x).$$

$$P_n(x) = a_n(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n).$$

Дробно-рациональная функция $f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$.

Дробно-рациональная функция $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ называется правильной, если степень многочлена, стоящего в числителе, ниже степени многочлена в знаменателе ($m < n$), и неправильной в противном случае ($m \geq n$).

Например, дробно-рациональные функции $\frac{x^2+4x+5}{2x^3+3x^2-7x-8}$, $\frac{1}{x^2+3x-4}$ — правильные, а $\frac{x^4-8x^3+x^2+4x-3}{x^3+7x^2-5}$, $\frac{x^2+4x-5}{x^2+x-7}$, — неправильные.

В случае, если $m \geq n$, $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = L(x) + \frac{R(x)}{Q_n(x)}$, где $L(x)$ — целая рациональная функция, а $\frac{R(x)}{Q_n(x)}$ — правильная дробь.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^4 - 5x + 9}{x - 2} = x^3 + 2x^2 + 4x + 3 + \frac{15}{x - 2}.$$

Теорема 3. Всякую правильную рациональную дробь $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, знаменатель которой разложен на множители

$$Q_n(x) = (x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \dots (x^2 + p_1x + q_1)^{s_1} \dots (x^2 + p_mx + q_m)^{s_m}$$

можно представить, и притом единственным образом, в виде суммы простых дробей:

$$\begin{aligned} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = & \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2} + \dots + \frac{A_{k_1}}{(x - x_1)^{k_1}} + \\ & + \frac{B_1}{x - x_2} + \frac{B_2}{(x - x_2)^2} + \dots + \frac{B_{k_2}}{(x - x_2)^{k_2}} + \dots \\ & + \frac{C_1x + D_1}{x^2 + p_1x + q_1} + \frac{C_2x + D_2}{(x^2 + p_1x + q_1)^2} + \dots + \frac{C_{s_1}x + D_{s_1}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{s_1}} + \dots \end{aligned}$$

$$+ \frac{M_1x + N_1}{x^2 + p_mx + q_m} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + p_mx + q_m)^2} + \dots + \frac{M_{s_m}x + N_{s_m}}{(x^2 + p_mx + q_m)^{s_m}}.$$

Примеры

Разложить на элементарные дроби.

$$1) \frac{25x^2 + 37x - 8}{-x^4 + x^3 + 12x^2 + 4x - 16};$$

$$2) \frac{5x^2 - 10x + 27}{x^3 - 2x^2 + 7x + 10};$$

$$3) \frac{2x^4 - 7x^3 - 4x^2 + 22x - 5}{x^2 - 5x + 6}.$$

При интегрировании неправильной дроби следует предварительно перейти к правильной дроби путем выделения целой части.

Алгоритм:

1. Если дробь неправильная — выделить целую часть. Получим интеграл от целой части (интегрируется непосредственно) и интеграл от правильной дроби.
2. Если числитель равен дифференциалу знаменателя (или отличается от него постоянным множителем), то использовать замену переменной $z = \text{знаменатель}$.
3. Если числитель равен дифференциалу некоего многочлена (или отличается от него постоянным множителем), а знаменатель равен степени того же многочлена, то использовать замену переменной $z = \text{знаменатель}$.
4. В остальных случаях нужно разложить дробь на сумму простейших.

Интегрирование простейших рациональных дробей

$$1) \int \frac{A}{x - a} dx = A \int \frac{d(x - a)}{x - a} = A \ln |x - a| + C;$$

$$2) \int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A \int \frac{d(x-a)}{(x-a)^k} = A \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C;$$

$$3) \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx \text{ — выделить в знаменателе полный квадрат}$$

и сделать замену: $x^2+px+q = x^2+2\frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q =$
 $(x+\frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4} = \left| x+\frac{p}{2} = t, \quad q - \frac{p^2}{4} = a^2 \right|;$

$$4) \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^n} \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

Введем обозначение $I_k = \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^k}$.

Интегрируем по частям:

Положим $u = \frac{1}{(a^2+x^2)^n}, \quad dv = dx$.

Тогда $du = -n(a^2+x^2)^{-n-1} \cdot 2x dx = -\frac{2nx dx}{(a^2+x^2)^{n+1}}, \quad v = x$.

Имеем:

$$I_n = \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^n} = \frac{x}{(a^2+x^2)^n} + 2n \int \frac{x^2 dx}{(a^2+x^2)^{n+1}}.$$

Преобразуем интеграл, содержащийся в правой части последнего равенства, следующим образом:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 dx}{(a^2+x^2)^{n+1}} &= \int \frac{(a^2+x^2) - a^2}{(a^2+x^2)^{n+1}} dx = \\ &= \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^n} - a^2 \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{n+1}} = I_n - a^2 I_{n+1}. \end{aligned}$$

Подставим полученное выражение в формулу для I_n :

$$I_n = \frac{x}{(a^2+x^2)^n} + 2n(I_n - a^2 I_{n+1}).$$

Из этого равенства находим:

$$I_{n+1} = \frac{2n-1}{2na^2} I_n + \frac{1}{2na^2} \cdot \frac{x}{(a^2+x^2)^n}.$$

Полученная рекуррентная формула позволяет свести вычисление интеграла с индексом $n + 1$ к вычислению интеграла с меньшим индексом n .

Пусть, например, нужно вычислить интеграл $\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^2}$. Воспользуемся рекуррентной формулой. В данном случае $n + 1 = 2$, следовательно, $n = 1$. Имеем:

$$I_2 = \frac{1}{2a^2} I_1 + \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{x}{a^2 + x^2},$$

то есть

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^2} = \frac{1}{2a^2} \int \frac{dx}{a^2 + x^2} + \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{x}{a^2 + x^2} = \\ &= \frac{1}{2a^2} \left(\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{x}{a^2 + x^2} \right) + C. \end{aligned}$$

Примеры

$$1) \int \frac{3x + 1}{x^2 + 2x + 10} dx = \frac{3}{2} \ln((x + 1)^2 + 9) - \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{x + 1}{3} + C;$$

$$2) \int \frac{x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 6x - 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} dx;$$

$$3) \int \frac{x^3 + x^2}{x^2 - 6x + 5} dx;$$

$$4) \int \frac{x^2}{(x - 1)^5} dx, \text{ |замена } x - 1 = t|.$$

1.4.5 Интегрирование тригонометрических функций

$$\text{I. } \int R(\sin x; \cos x) dx$$

1) Универсальная подстановка: $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$,

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2},$$

$$x = 2 \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2}{1 + t^2} dt;$$

- 2) $R(-\sin x; \cos x)dx = -R(\sin x; \cos x)dx,$
 $\cos x = t, \sin x = \sqrt{1-t^2}, dx = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}};$
- 3) $R(\sin x; -\cos x)dx = -R(\sin x; \cos x)dx,$
 $\sin x = t, \cos x = \sqrt{1-t^2}, dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}};$
- 4) $R(-\sin x; -\cos x)dx = R(\sin x; \cos x)dx,$
 $\operatorname{tg} x = t, \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, dx = \frac{dt}{1+t^2}.$

Примеры

- 1) $\int \frac{dx}{3 + \sin x + \cos x}, \text{ |замена } \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t|;$
- 2) $\int \frac{dx}{\sin x}, \text{ |замена } \cos x = t|;$
- 3) $\int \frac{dx}{\cos x}, \text{ |замена } \sin x = t|;$
- 4) $\int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}, \text{ |замена } \operatorname{tg} x = t|.$

$$\text{II. } \int \sin^m x \cos^n x dx$$

- 1) $m = 2k + 1$ (или $n = 2k + 1$)

$$\begin{aligned} \int \sin^{2k+1} x \cos^n x dx &= \int \sin^{2k} x \cos^n x \sin x dx = \\ &= - \int \sin^{2k} x \cos^n x d \cos x \text{ |замена } \cos x = t|; \end{aligned}$$

- 2) m, n — чётные положительные.

Понижение степени

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}.$$

Примеры

$$1) \int \sin^{10} x \cos^3 x dx;$$

$$2) \int \sin^2 x \cos^2 x dx.$$

$$\text{III. } \int \sin mx \cos nx dx, \int \sin mx \sin nx dx, \int \cos mx \cos nx dx$$

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x);$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x);$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}(\cos(m-n)x + \cos(m+n)x).$$

$$\text{IV. } \int \operatorname{tg}^m x dx, \int \operatorname{ctg}^m x dx$$

$$\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1, \operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x - 1.$$

1.4.6 Интегрирование иррациональных функций

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}, \int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx, \int \frac{mx + n}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$$

Выделение полного квадрата сводит к табличным интегралам:

$$13) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C;$$

$$14) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C;$$

$$17) \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C;$$

$$18) \int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C.$$

Тригонометрические подстановки

$$1) \int R(x, \sqrt{m^2 - x^2}) dx,$$

замена: $x = m \sin t$ или $x = m \cos t$, или $x = m \operatorname{tg} t$;

$$2) \int R(x, \sqrt{m^2 + x^2}) dx,$$

замена: $x = m \operatorname{tg} t$ или $x = m \operatorname{sh} t$;

$$3) \int R(x, \sqrt{x^2 - m^2}) dx,$$

замена: $x = m \sec t$ или $x = m \operatorname{ch} t$.

Примеры

$$1) \int \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x^2} dx, \text{ замена: } x = 2 \sin t;$$

$$2) \int \frac{dx}{x \sqrt{a^2 + x^2}}, \text{ замена: } x = a \operatorname{tg} t;$$

$$3) \int \frac{\sqrt{x^2 - 1} dx}{x}, \text{ замена: } x = \operatorname{ch} t.$$

1.4.7 Интегралы от дифференциальных биномов

В математическом анализе *дифференциальным биномом* или *биномиальным дифференциалом* называется дифференциал вида

$$I = x^m (a + bx^n)^p dx,$$

где a, b — действительные числа, а m, n, p — рациональные числа.

Дифференциальный бином выражается в элементарных функциях только в трёх случаях:

- p — целое число. Используется подстановка $x = t^s$, s — общий знаменатель дробей m и n ;
- $\frac{m+1}{n}$ — целое число. Используется подстановка $a + bx^n = t^s$, s — знаменатель дроби p ;
- $p + \frac{m+1}{n}$ — целое число. Используется подстановка $ax^{-n} + b = t^s$, s — знаменатель дроби p .

Случаи выразимости дифференциального бинома в элементарных функциях были известны ещё Л. Эйлеру. Однако, невыразимость дифференциального бинома в элементарных функциях во всех остальных случаях была доказана П. Л. Чебышевым в 1853 году.

Примеры

$$1) \int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[4]{x} + 1)^{10}} dx,$$

$$p = -10, p \in Z, m = -\frac{1}{2}, n = \frac{1}{4} \text{ (1-й случай), замена: } x = t^4;$$

$$2) \int \frac{x^3 dx}{(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}}, p = -\frac{3}{2}, m = 3, n = 2,$$

$$\frac{m+1}{n} = \frac{3+1}{2} = 2 \in Z \text{ (2-й случай), замена: } a^2 - x^2 = t^2;$$

$$3) \int \frac{dx}{x^4 \sqrt{1+x^2}}, p = -\frac{1}{2}, m = -4, n = 2,$$

$$\frac{m+1}{n} + p = \frac{-4+1}{2} - \frac{1}{2} = -2 \in Z \text{ (3-й случай), замена: } x^{-2} + 1 = t^2.$$

1.5 Определённый интеграл

Пусть $y = f(x)$ определена на $[a; b]$. Разобьём отрезок $[a; b]$ точками x_i , $i = \overline{0, n}$ на n частей

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

$$c_i \in [x_i; x_{i+1}], \quad f(c_i), \quad x_{i+1} - x_i = \Delta x_i, \quad \lambda = \max_i \Delta x_i.$$

$$S_n = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \dots + f(c_n)\Delta x_n.$$

S_n — интегральная сумма.

Определение 3. Если интегральная сумма S_n имеет предел

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \lambda \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i = I,$$

который не зависит от способа разбиения отрезка $[a; b]$ на частичные отрезки, ни от выбора точек c_i в них, то число I называется определённым интегралом (по Риману) от функции

$y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ и обозначается $\int_a^b f(x)dx$, т. е.

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \lambda \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx.$$

Функция $y = f(x)$ для которой на отрезке $[a; b]$ $\exists$ определённый интеграл $\int_a^b f(x)dx$ называется интегрируемой на этом отрезке.

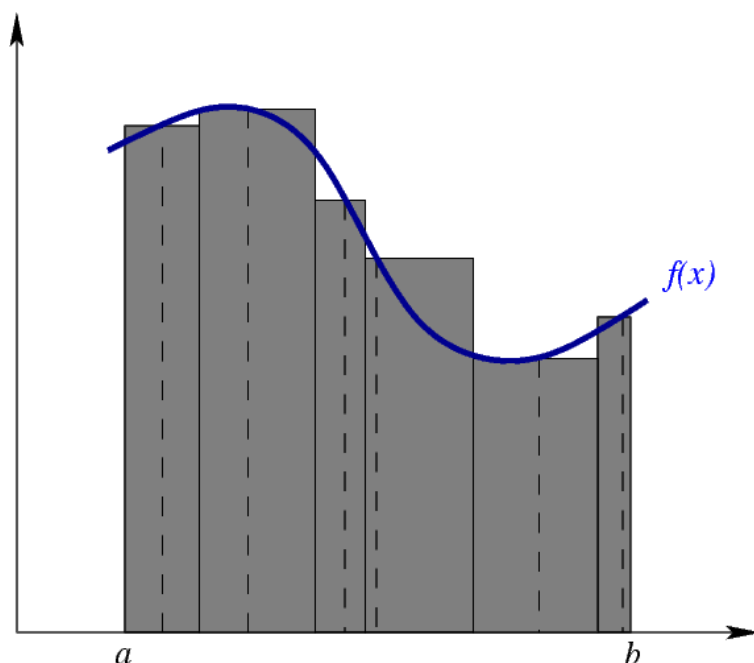


Рис. 3. Геометрический смысл определённого интеграла — площадь криволинейной трапеции

1.5.1 Формула Ньютона–Лейбница

Теорема 4 (Ньютона–Лейбница). Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и $F(x)$ — какая-либо её первообразная на $[a; b]$ ($F'(x) = f(x)$), то имеет место:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a).$$

Доказательство

Рассмотрим тождество

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= F(x_n) - F(x_0) = \\ &= (F(x_n) - F(x_{n-1}) + (F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) + \dots \\ &\quad + (F(x_2) - F(x_1) + (F(x_1) - F(x_0)). \end{aligned}$$

Воспользуемся теоремой Лагранжа:

$F(x_{i+1}) - F(x_i) = F'(c_i)(x_{i+1} - x_i)$, тогда

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n F'(c_i)(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i.$$

Получилась интегральная сумма. Перейдём к пределу $n \rightarrow \infty$, $\lambda \rightarrow 0$. В результате:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \text{ ч. т. д..}$$

1.6 Основные свойства определённого интеграла

$$1) \int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx;$$

$$2) \int_a^b (f_1(x) + f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx;$$

$$3) \int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx;$$

4) *аддитивность* определённого интеграла

$$\text{для } \forall c \in [a; b] \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx;$$

5) *теорема о среднем*, следует из теорем Ньютона–Лейбница и Лагранжа:

$$\exists c \in [a; b] \int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a);$$

6) если $f(x) \geq 0$ при $x \in [a; b]$, то $\int_a^b f(x)dx \geq 0$;

7) если $f_1(x) \leq f_2(x)$ при $x \in [a; b]$, то $\int_a^b f_1(x)dx \leq \int_a^b f_2(x)dx$;

8) если m и M — наименьшее и наибольшее значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$, то $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$;

$$9) \left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx;$$

$$10) \left(\int_a^x f(t)dt \right)'_x = f(x),$$

следовательно, $\int_a^x f(t)dt$ — одна из первообразных.

1.7 Вычисление определённого интеграла

Теорема 5.

- 1) Если $x = \varphi(t)$ и её производная $x' = \varphi'(t)$ непрерывны на $[\alpha; \beta]$;
- 2) множеством значений функции $x = \varphi(t)$ при $t \in [\alpha; \beta]$ является отрезок $[a; b]$;
- 3) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$,

$$\text{то } \int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Замечание. При вычислении определённого интеграла возвращаться к старой переменной не требуется.

Пример.

$$\int_0^2 x^2 \sqrt{4-x^2} dx, \text{ замена: } x = 2 \sin t, \quad x = 0, \quad t = 0, \quad x = 2, \quad t = \pi/2.$$

Интегрирование по частям

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Интегрирование чётных и нечётных функций в симметричных пределах

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \begin{cases} 2 \int_0^a f(x) dx, & f(x) — \text{чётная}, \\ 0, & f(x) — \text{нечётная}. \end{cases}$$

1.8 Применение определённого интеграла к вычислениям различных величин

Общая схема вычисления величины u

1. Разбить u на большое число n малых слагаемых: элементов Δu_i

$$u = \Delta u_1 + \Delta u_2 + \dots + \Delta u_n = \sum_{i=1}^n \Delta u_i.$$

2. Найти приближённое значение элемента Δu_i в виде произведения $\Delta u_i = f(x_i) \Delta x_i$ и затем найти приближённое значение в виде интегральной суммы:

$$u \approx \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i,$$

x — параметр величины u , $a \leq x \leq b$; $f(x)$ — заданная или определяемая из условия задачи функция.

Используются упрощения:

- а) малые криволинейные отрезки заменить стягивающими хордами;
- б) переменную силу (или скорость) на малом участке пути можно заменить постоянной;
- в) переменную температуру в течение малого промежутка времени — постоянной;
- г) ...

3. Если из условия задачи следует, что при $n \rightarrow +\infty$ погрешность вычисления величины u с помощью формулы: $u \approx \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x_i \rightarrow 0$, то величина u равна определённому интегралу

$$u = \int_a^b f(x)dx.$$

1.8.1 Площадь плоской фигуры в декартовой системе координат

Площадь плоской фигуры, отнесённой к прямоугольной системе координат, может быть составлена из площадей криволинейных трапеций, примыкающих к оси OX или оси OY .

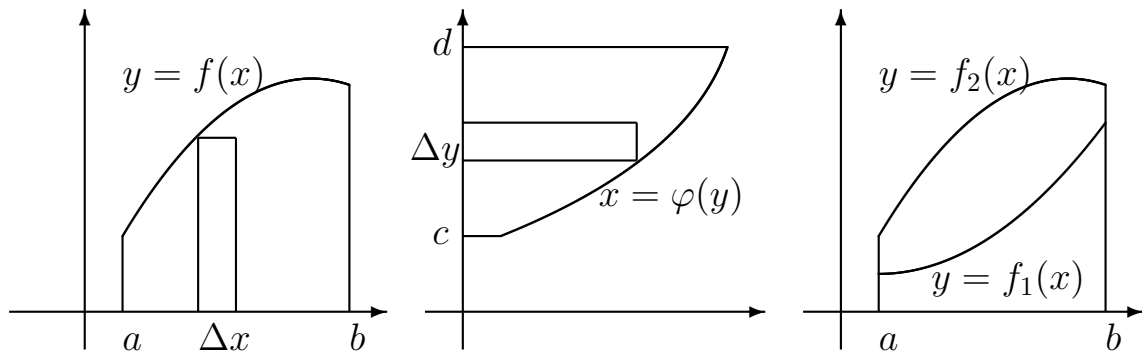


Рис. 4. Площадь плоской фигуры

$$S = \int_a^b f(x)dx, \quad S = \int_c^d \varphi(y)dy, \quad S = \int_a^b f_2(x) - f_1(x)dx.$$

Замечание. Формула $S = \int_a^b f_2(x) - f_1(x)dx$ применима для вычисления площадей фигур правильных в направлении оси OX или оси OY . Если фигура не является правильной в направлении одной из осей, то её всегда можно разбить на конечное число фигур правильных в направлении оси OX или оси OY .

Замечание. Если графики функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ пересекаются на отрезке $[a; b]$ конечное число раз, то площадь, заключённая между ними:

$$S = \int_a^b |f_2(x) - f_1(x)|dx.$$

1.8.2 Площадь плоской фигуры в полярной системе координат

Площадь всякой плоской фигуры, отнесённой к полярной системе координат, может быть составлена из площадей круговых секторов.

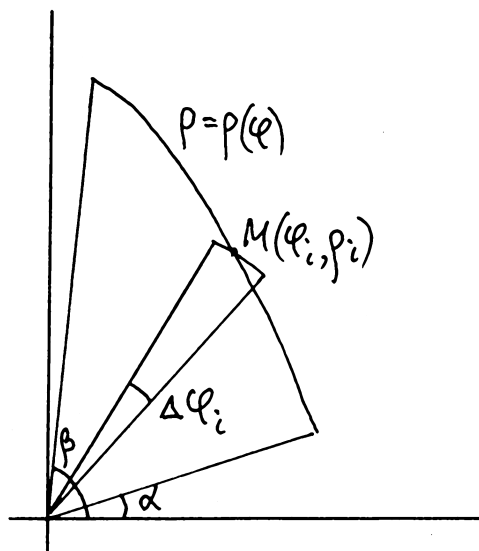


Рис. 5. Площадь плоской фигуры в полярной системе координат

$$S_{\text{сектор}} = \frac{\rho^2}{2} \Delta\varphi.$$

Интегральная сумма

$$S_n = \sum_{i=1}^n \frac{\rho^2(\varphi_i)}{2} \Delta\varphi_i.$$

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi.$$

1.8.3 Площадь плоской фигуры, заданной параметрически

$$\begin{cases} x = \varphi(t), & \varphi(t_1) \leq \varphi(t) \leq \varphi(t_2), \\ y = \psi(t). \end{cases}$$

$$A(\varphi(t_1); \psi(t_1)), B(\varphi(t_2); \psi(t_2)).$$

$$x = \varphi(t) \Rightarrow dx = \varphi'(t)dt.$$

$$S = \int_a^b f(x)dx = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t)\varphi'(t)dt.$$

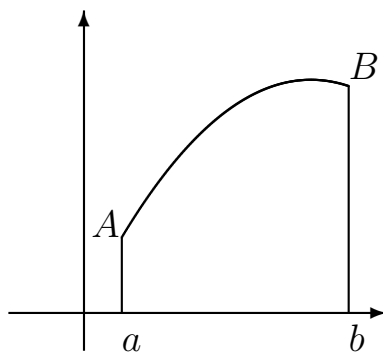


Рис. 6. Площадь плоской фигуры, заданной параметрически

Примеры

1. Найти площадь, заключённую между линиями: $y = 4 - x^2$, $y = x^2 - 2x$.
2. Найти площадь, заключённую между линиями: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{4}$.
3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кардиоидой: $\rho(\varphi) = a(1 + \cos \varphi)$.
4. Найти площадь эллипса:

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t. \end{cases}$$

1.8.4 Длина дуги плоской кривой в декартовой системе координат

ΔL_i — длина i -го звена ломаной.

$$L_n = \Delta L_1 + \Delta L_2 + \dots + \Delta L_n = \sum_{i=1}^n \Delta L_i.$$

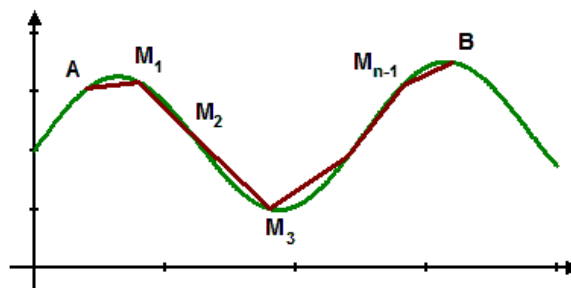


Рис. 7. Длина дуги плоской кривой

Определение 4. *Длина дуги AB — предел, к которому стремится периметр вписанной в эту дугу ломанной, при неограниченном увеличении числа её звеньев и стремлении к нулю наибольшей из длин звеньев ($\lambda = \max_i \Delta L_i$)*

$$l = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \lambda \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \Delta L_i$$

Предполагается, что предел существует и не зависит от выбора точек M_k .

Кривые, для которых предел существует, называются *спрямляемые*.

Теорема 6. *Если функция $y = f(x)$ непрерывна вместе со своими производными $f'(x)$ на отрезке $[a; b]$, то кривая AB спрямляема и длина её выражается формулой:*

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Доказательство

$$\Delta L_k = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2} =$$

$$\begin{aligned}
&= |\text{из теоремы Лагранжа: } f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(c_k)(x_k - x_{k-1})| = \\
&= \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f'(c_k)(x_k - x_{k-1}))^2} = \sqrt{1 + (f'(c_k))^2} \Delta x_k.
\end{aligned}$$

$$\lambda = \max_i \Delta L_i, \quad L_n = \sum_{k=1}^n \Delta L_k.$$

$$\begin{aligned}
l = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \lambda \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + (f'(c_k))^2} \Delta x_k &= \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.
\end{aligned}$$

1.8.5 Длина дуги плоской кривой, заданной параметрически

Кривая AB :

$$\begin{cases} x = \varphi(t), & t_1 \leq t \leq t_2, \\ y = \psi(t). \end{cases}$$

$$a = \varphi(t_1), \quad b = \varphi(t_2), \quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

$$\begin{aligned}
l &= \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \right)^2} \varphi'(t) dt = \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt
\end{aligned}$$

1.8.6 Длина дуги плоской кривой в полярных координатах

$$\rho = f(\varphi), \quad \alpha \leq \varphi \leq \beta.$$

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\varphi) = f(\varphi) \cos(\varphi), \\ y = \rho \sin(\varphi) = f(\varphi) \sin(\varphi). \end{cases}$$

Это уравнение можно рассматривать как параметрическое задание кривой AB с параметром φ .

$$\begin{aligned} l &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2} dt = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(f' \cos \varphi - f \sin \varphi)^2 + (f' \sin \varphi + f \cos \varphi)^2} d\varphi = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(f'(\varphi))^2 + (f(\varphi))^2} d\varphi \end{aligned}$$

Примеры

1. Найти длину дуги: $y = \sqrt{1-x^2} + \arccos x$, $0 \leq x \leq 8/9$.

2. Найти длину дуги одной арки циклоиды:

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$$

3. Вычислить длину кардиоиды: $\rho = a(1 + \cos \varphi)$.

1.8.7 Дифференциал дуги

M — произвольная точка на дуге AB . Длина дуги AM

$$l(x) = \int_a^x \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt = F(x) - F(a).$$

$$\frac{dl}{dx} = \left(\int_a^x \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt \right)' = F'(x) = \sqrt{1 + (f'(x))^2}.$$

Выражение для дифференциала дуги:

$$dl = \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \text{ или } dl = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

$$dl = \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt,$$

$$dl = \sqrt{(f'(\varphi))^2 + (f(\varphi))^2} d\varphi.$$

1.8.8 Вычисление объёма тела по известным площадям поперечных сечений

Пусть задана площадь поперечного сечения тела плоскостями перпендикулярными оси OX , как функция переменной x : $S(x)$.

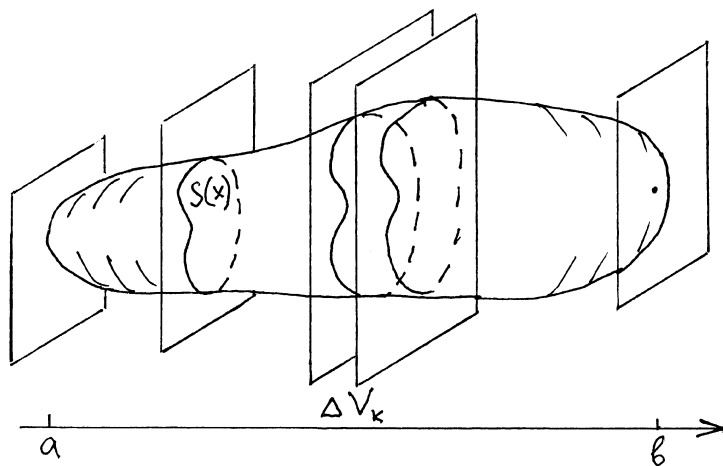


Рис. 8. Вычисление объёма тела по известным площадям поперечных сечений

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k < \dots < x_n = b.$$

$$V_n = \sum_{k=1}^n S(c_k) \Delta x_k.$$

$$V = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \lambda \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n S(c_k) \Delta x_k = \int_a^b S(x) dx.$$

1.8.9 Объёма тела вращения

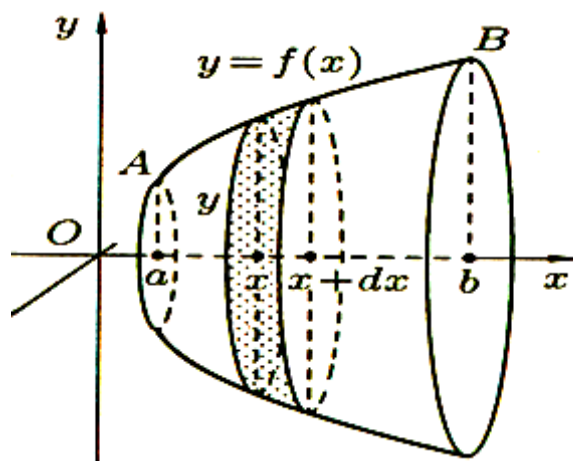


Рис. 9. Вычисление объёма тела вращения

$$y = f(x), \quad a \leq x \leq b.$$

Любое сечение тела плоскостью перпендикулярной оси OX :
 $S(x) = \pi f^2(x)$.

$$V_{ox} = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

$$x = \varphi(y), \quad c \leq y \leq d.$$

Любое сечение тела плоскостью перпендикулярной оси OY :
 $S(y) = \pi \varphi^2(y)$.

$$V_{oy} = \pi \int_c^d \varphi^2(y) dy.$$

Примеры

1. Найти объём трёхосного эллипсоида: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.
2. Вычислить объём тела, полученного в результате вращения линий $y = x$ и $y = x^2$ а) вокруг оси OX ; б) вокруг оси OY .

1.8.10 Площадь боковой поверхности тела вращения

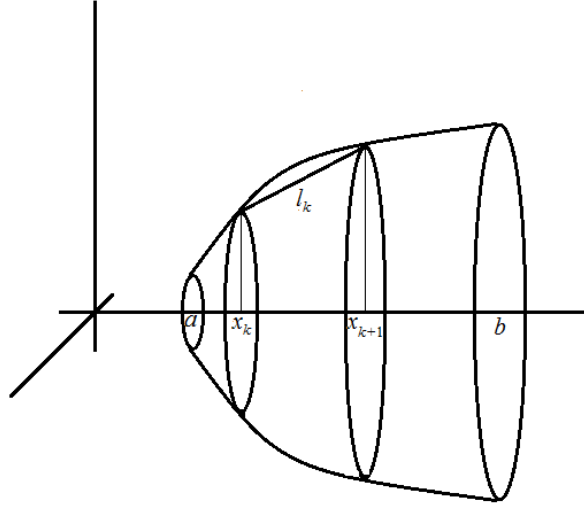


Рис. 10. Площадь боковой поверхности тела вращения

Боковая поверхность усечённого конуса $S_{\text{бок}} = \pi(R + r)l$.

$$l_k = \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2} = \Delta x_k \sqrt{1 + (f'(x))^2}.$$

$$\Delta S_k = \pi(y_{k+1} + y_k) \sqrt{1 + (f'(x))^2} \Delta x_k.$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \pi(y_{k+1} + y_k) \sqrt{1 + (f'(x))^2} \Delta x_k.$$

$$S = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \lambda \rightarrow 0}} S_n = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Для кривой, заданной параметрически. Кривая AB :

$$\begin{cases} x = \varphi(t), & t_1 \leq t \leq t_2, \\ y = \psi(t). \end{cases}$$

$$S = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} \psi(t) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt.$$

Площадь боковой поверхности тела вращения кривой в полярных координатах.

$$\rho = f(\varphi), \quad \alpha \leq \varphi \leq \beta.$$

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\varphi) = f(\varphi) \cos(\varphi), \\ y = \rho \sin(\varphi) = f(\varphi) \sin(\varphi). \end{cases}$$

Это уравнение можно рассматривать как параметрическое задание кривой AB с параметром φ .

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi) \sin(\varphi) \sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2} d\varphi = \\ &= 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi) \sin(\varphi) \sqrt{(f' \cos \varphi - f \sin \varphi)^2 + (f' \sin \varphi + f \cos \varphi)^2} d\varphi = \\ &= 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi) \sin(\varphi) \sqrt{(f'(\varphi))^2 + (f(\varphi))^2} d\varphi \end{aligned}$$

Примеры

1. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси OX части кривой $y = \sqrt{2x}$, $0 \leq x \leq 3/2$.
2. Найти площадь поверхности, образованной вращением астроида $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ вокруг оси абсцисс.
3. Найти площадь поверхности, образованной вращением кардиоиды $\rho = a(1 + \cos \varphi)$ вокруг полярной оси.

1.8.11 Работа переменной силы

$$F = F(x), \quad x \in [a; b]. \quad A = F \cdot S.$$

$$\Delta A = F(c_k) \Delta x_k, \quad A_n = \sum_{k=1}^n F(c_k) \Delta x_k.$$

$$A = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \lambda \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n F(c_k) \Delta x_k = \int_a^b F(x) dx.$$

Пример. Найти величину давления жидкости на иллюминатор подводной лодки. Центр иллюминатора находится на глубине h от поверхности, иллюминатор имеет форму эллипса с полуосьми a и b , $h > b$.

Решение

Пусть ось Ox направлена вдоль поверхности воды, ось Oy — вниз. Величина давления жидкости P на горизонтальную площадку зависит от глубины её погружения y , т. е. от расстояния площадки до поверхности жидкости: $P = \rho sy$, ρ — удельный вес жидкости, s — площадь.

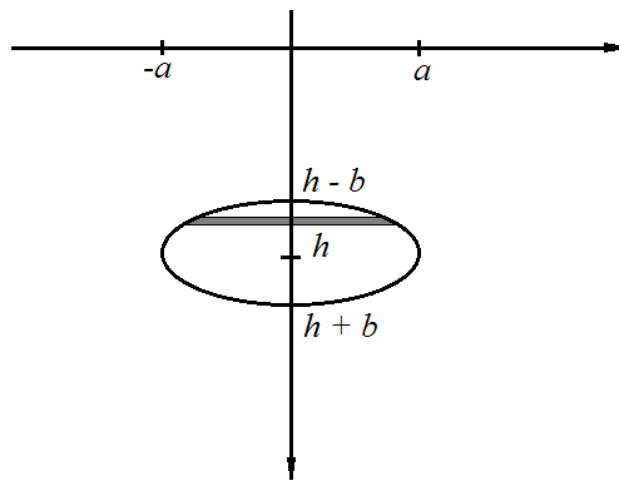


Рис. 11.

Выделим на глубине y горизонтальную полосу (рис. 11). Давление — функция переменной y : $P = P(y)$. Найдём дифференциал этой функции dP при изменении глубины на dy .

Допустим, учитывая малость dy , что все точки полосы находятся на глубине y , т. е. что она расположена на глубине y в горизонтальной плоскости. Тогда приближённая величина давления воды на эту полосу будет равна весу столба воды, имеющего основанием эту полосу и высотой глубину y .

Уравнение эллипса с полуосями a и b и с центром в точке $(0, h)$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y - h)^2}{b^2} = 1,$$

$$x = \pm a \sqrt{1 - \frac{(y - h)^2}{b^2}}.$$

Длина полосы: $2a \sqrt{1 - \frac{(y - h)^2}{b^2}}$.

$$dP = 2a \sqrt{1 - \frac{(y - h)^2}{b^2}} \rho y dy.$$

По условию глубина y изменяется на отрезке $[h - b; h + b]$. В результате давление на иллюминатор:

$$P = \int_{h-b}^{h+b} 2a \sqrt{1 - \frac{(y - h)^2}{b^2}} \rho y dy = \pi a b h \rho.$$

1.9 Несобственные интегралы

1.9.1 Несобственные интегралы 1-го рода

Определённый интеграл с бесконечным промежутком интегрирования — *несобственный интеграл 1-го рода*.

Пусть $y = f(x)$ непрерывна на $[a; \infty)$. Рассмотрим:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Если существует конечный предел, то $\int_a^{\infty} f(x)dx$ — *сходится*.

Если предел не существует или бесконечный, то $\int_a^{\infty} f(x)dx$ — *расходится*.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \int_{\alpha}^c f(x)dx + \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_c^{\beta} f(x)dx.$$

Для сходимости этого несобственного интеграла должны существовать оба предела.

Примеры

1. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}.$

2. $\int_0^{\infty} e^{-ax} dx, \quad a > 0.$

3. $\int_{-\infty}^0 \cos x dx.$

4. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}.$

$$5. \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

$$6. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}.$$

Теорема 7 (Признак сравнения). Если на промежутке $[a; \infty)$ непрерывные функции удовлетворяют условию $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$, то из сходимости интеграла $\int_a^{\infty} \varphi(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int_a^{\infty} f(x)dx$, а из расходимости интеграла $\int_a^{\infty} f(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int_a^{\infty} \varphi(x)dx$.

Теорема 8 (Предельный признак сравнения). Если существует предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = k$, $0 < |k| < \infty$, то интегралы $\int_a^{\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{\infty} \varphi(x)dx$ одновременно или оба сходятся, или оба расходятся.

Теорема 9. Если интеграл $\int_a^{\infty} |f(x)|dx$ сходятся, то интеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$ называется **абсолютно** сходящимся.

Исследование с помощью признака сравнения

Если $f(x) \geq 0$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)x^m) = A < \infty$, $A \neq 0$, т. е. $f(x) \sim \frac{A}{x^m}$ при $x \rightarrow \infty$, то

1) при $m > 1$ интеграл $\int_a^\infty f(x)dx$ сходится;

2) при $m \leq 1$ — расходится.

Примеры

$$1. \int_1^\infty \frac{dx}{x^2(1+3^x)} \quad \left(\frac{1}{x^2(1+3^x)} < \frac{1}{x^2} \right).$$

$$2. \int_1^\infty \ln \frac{x^2+2}{x^2+1} dx$$

$$\left(f(x) = \ln \frac{x^2+2}{x^2+1} = \ln \left(1 + \frac{1}{x^2+1} \right), \varphi(x) = \frac{1}{x^2}, \ln \frac{x^2+2}{x^2+1} < \frac{1}{x^2} \right).$$

$$3. \int_1^\infty \frac{dx}{1+x^3}.$$

$$4. \int_1^\infty \frac{x+2}{x\sqrt{x}} dx.$$

$$5. \int_1^\infty \frac{x \operatorname{arctg} x}{3x^3+1} dx.$$

$$6. \int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2} dx \text{ (абсолютно сходящийся интеграл).}$$

1.9.2 Несобственные интегралы 2-го рода

Интеграл от неограниченной функции — *несобственные интеграл 2-го рода*.

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a; b)$ и имеет бесконечный разрыв (разрыв 2-го рода) при $x = b$.

$\int_a^b f(x)dx$ — несобственный интеграл 2-го рода.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Если предел в правой части существует и конечный, то несобственный интеграл *сходится*.

Если предел не существует или бесконечный, то $\int_a^b f(x)dx$ — *расходится*.

Если $y = f(x)$ терпит бесконечный разрыв во внутренней точке $c \in [a; b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Примеры

1. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$ — расходится.

2. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ — сходится.

Признак сравнения

$$f(x) \geq 0, \lim_{x \rightarrow c} (f(x)|c - x|^m) = A, \quad A \neq 0, \quad A < \infty,$$

$$\text{т. е. } f(x) \sim \frac{A}{|c - x|^m}, \text{ при } x \rightarrow c, \text{ то}$$

1) $m < 1$, интеграл

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx \right) \text{ — сходится;}$$

2) $m \geq 1$ — расходится.

Примеры

$$1. \int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}}.$$

$$2. \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(1-x)^5}}.$$

Рассмотрим пример:

$$\int_0^2 \frac{x^3 dx}{\sqrt{4-x^2}} = |\text{несобственный интеграл 2-го рода}| =$$

замена: $x = 2 \sin t$, $dx = 2 \cos t dt$, $x = 0$, $t = 0$, $x = 2$, $t = \pi/2$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin^3 t dt = \frac{16}{3}.$$

В результате замены переменных несобственный интеграл преобразовался в собственный. Возможно обратное.

1.10 Приближённое вычисление интегралов

$$1. \int_a^b f(x)dx \approx h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) - \text{формула левых прямоугольников,}$$

$$h = \frac{b-a}{n}, x_i = a + hi, |R| \leq \frac{(b-a)h}{2} M_1.$$

$$2. \int_a^b f(x)dx \approx h \sum_{i=1}^n f(x_i) - \text{формула правых прямоугольни-}$$

$$\text{КОВ, } h = \frac{b-a}{n}, x_i = a + hi, |R| \leq \frac{(b-a)h}{2} M_1.$$

$$3. \int_a^b f(x)dx \approx h \sum_{i=1}^n f((x_{i-1} + x_i)/2) - \text{формула средних пря-}$$

$$\text{МОУГОЛЬНИКОВ, } h = \frac{b-a}{n}, x_i = a + hi, |R| \leq \frac{(b-a)h^2}{24} M_2.$$

$$4. \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_i) + f(x_{i+1})) - \text{формула трапеций,}$$

$$h = \frac{b-a}{n}, x_i = a + hi, |R| \leq \frac{(b-a)h^2}{12} M_2.$$

$$5. \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} \sum_{k=0,2}^{2n-2} (f(x_k) + 4f(x_{k+1}) + f(x_{k+2})) =$$

$$= \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}) -$$

$$\text{формула Симпсона, } h = \frac{b-a}{2n}, x_i = a + hi, |R| \leq \frac{(b-a)h^4}{180} M_4.$$

Здесь R — погрешность вычисления интеграла, $M_k = \max_{x \in [a;b]} |f^{(k)}(x)|$.

Список литературы

1. *Беклемишев, Д. В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры : учебник для вузов / Д. В. Беклемишев. — М.: Физматлит, 2008. — 307 с.
2. *Фихтенгольц, Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т 1. / Г. М. Фихтенгольц. — М.: Физматлит, 2001. — 680 с.
3. *Фихтенгольц, Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т 2. / Г. М. Фихтенгольц. — М.: Физматлит, 2006. — 864 с.
4. *Фихтенгольц, Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т 3. / Г. М. Фихтенгольц. — М.: Физматлит, 2005. — 728 с.
5. *Письменный, Д. Т.* Конспект лекций по высшей математике. / Д. Т. Письменный. — М.: Айрис-пресс, 2006.
6. *Пискунов, Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисления: учеб. пособие для ВТУЗов. Т 1, 2. / Н. С. Пискунов. — М.: Наука, 1968.
7. *Лунгу, К. Н.* Высшая математика. Руководство к решению задач: учеб. пособие. Ч. 1. / К. Н. Лунгу, Е. В. Макаров. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 216 с.
8. *Запорожец, Г. И.* Руководство к решению задач по математическому анализу: учеб. пособие / Г. И. Запорожец. — М.: Книга по Требованию, 2012. — 456 с.
9. *Ефимов, А. В.* Сборник задач по математике для втузов. В 4-х частях. Ч. 1. Линейная алгебра и основы математического анализа: учеб. пособие для втузов / В. А. Болгов, Б. П. Демидович, А. В. Ефимов и др. — М.: Наука, 1993. — 480 с.
10. *Бермант, А. Ф.* Краткий курс математического анализа : учебник для вузов. / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович. — СПб.: «Лань», 2005. — 736 с.

11. *Берман, Г. Н.* Сборник задач по курсу математического анализа: учеб. пособие / Г. Н. Берман. — СПб., Профессия, 2005. — 432 с.
12. *Высшая математика: учеб. пособие* / В. М. Бородихин, М. Ю. Васильчик, Н. В. Вахрушев, В. А. Селезнёв, В. В. Хаблов. — Новосибирск.: Изд-во НГТУ, 2004. — Т1 — 216 с.