Министерство образования и науки Российской Федерации

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В. В. КОМИССАРОВ
Н. В. КОМИССАРОВА

МАТЕМАТИКА

СБОРНИК ЗАДАЧ

Утверждено
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

Новосибирск
2019

УДК 51(075.3)
М 34

Рецензенты:
канд. физ.-мат. наук, доцент СибУПК, *О. В. Брюханов*
канд. физ.-мат. наук, доцент НГТУ *Е. В. Казанцева*

Комиссаров В. В.
М 34 Математика. Сборник задач : учебное пособие / В. В. Комиссаров, Н. В. Комиссарова. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2019. – 88 с.

ISBN 978-5-7782-2978-5

Работа выполнена на кафедре высшей математики для студентов первого курса, обучающихся по специальностям: *Регионоведение* (41.03.01), *Менеджмент* (38.03.02), *Психология* (37.03.01), *Социология* (39.03.01), *Конфликтология* (37.03.02), *Социальная работа* (39.03.02)

УДК 51(075.3)

ISBN 978-5-7782-2978-5

ОГЛАВЛЕНИЕ

Общие положения 5
1. Элементы теории множеств. Способы задания множеств. Операции над множествами, свойства операций 5
Основные определения и формулы 5
Задачи 8
2. Элементы математической логики. Высказывания и логические операции. Формулы алгебры логики. Равносильность формул, логические законы. Предикаты. Кванторы 11
Основные определения и формулы 11
Задачи 14
3. Линейная алгебра. Матрицы, определители, системы линейных уравнний 18
Основные определения и формулы 18
Задачи 19
4. Векторная алгебра 26
Основные определения и формулы 26
Задачи 30
5. Аналитическая геометрия 34
Определения и основные формулы аналитической геометрии на плоскости 34
Задачи 35
Определения и основные формулы аналитической геометрии в пространстве 37
Задачи 38
Линии второго порядка 42
Задачи 42

6. Введение в анализ 44
Функции и их графики 44
Последовательности. Предел последовательности. Предел функции 45
Задачи 46
Непрерывность функции 49
Производная и её применение 50
Задачи 51
7. Интегральное исчисление 56
Основные формулы и свойства 56
Задачи 59
8. Функции нескольких переменных 64
Основные формулы 64
Задачи 66
9. Дифференциальные уравнения 71
Основные определения и методы решения 71
Задачи 74
10. Ряды 76
Краткие сведения из теории 76
Задачи 81
11. Комплексные числа 84
Основные определения 84
Задачи 86
Литература 87

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Настоящий сборник задач предназначен для аудиторных и самостоятельных занятий по математике. Каждый новый раздел предваряется краткими теоретическими сведениями и необходимыми по теме формулами. Более подробно с теоретическим материалом можно ознакомиться в рекомендованной литературе. Затем идет блок задач для аудиторных и самостоятельных занятий. Часть задач можно использовать для проведения контрольных работ.

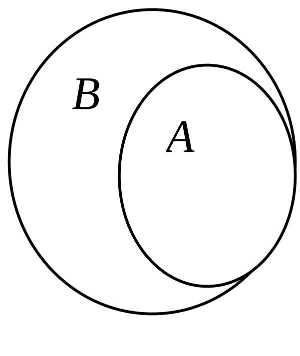
1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ МНОЖЕСТВ. ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ, СВОЙСТВА ОПЕРАЦИЙ

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ФОРМУЛЫ

Множество – совокупность вполне различимых объектов одной природы, называемых **элементами множества.**

Элемент a принадлежит множеству A ($a \in A$). Элемент a не принадлежит множеству A ($a \notin A$).

Множество A называется **подмножеством** множества B ($A \subseteq B$), если всякий элемент из множества A является элементом B.



Если $A \subseteq B$ и $A \neq B$, то A называется **строгим подмножеством** B ($A \subset B$).

Множества A и B **равны**, если их элементы совпадают (или $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$).

Множества бывают **конечными** (состоящими из конечного числа элементов) и **бесконечными**.

Число элементов в конечном множестве A называется его **мощностью**.

Множество мощности 0, т. е. не содержащее элементов, называется **пустым** ($\varnothing$).

Конечные множества с равным количеством элементов называются **равномощными**.

Совокупность допустимых объектов множества называют **основным** (**универсальным**) множеством U.

Обозначения наиболее часто используемых **числовых множеств**:

N – множество натуральных чисел;

N_0 – множество целых неотрицательных чисел (или Z_+);

Z – множество целых чисел;

Q – множество рациональных чисел;

I – множество иррациональных чисел;

R – множество действительных чисел;

R_+ – множество неотрицательных действительных чисел;

R_- – множество неположительных действительных чисел.

Способы задания множеств:

1) **перечислением** (списком) своих элементов в произвольном порядке. Списком можно задавать лишь конечные множества. Например, $A = \{a, b, c, d\}$;

2) **порождающей процедурой**, которая описывает способ получения элементов либо других объектов. Например, множество C заданно двумя правилами: 1) $c_1 \in C$; 2) если $c_m \in C$, то $c_{m+1} = P(c_m) \in C$;

3) **описанием характеристических свойств**, которыми должны обладать его элементы: $B = \{x \,/\; K(x)\}$ - запись читается так: B есть множество всех x, обладающих свойством K.

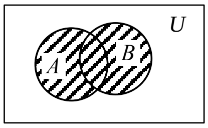
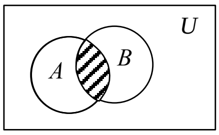
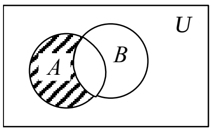
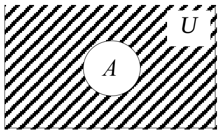
Характеристическим свойством, определяющим множество, называется такое свойство, которым обладает каждый элемент, принадлежащий данному множеству, и не обладает ни один элемент, ему не принадлежащий.

Множество считается заданным, если о любом объекте можно сказать, принадлежит он этому множеству или не принадлежит.

Диаграммы Эйлера–Венна – геометрическое представление множеств.

Построение диаграммы заключается в изображении прямоугольника, представляющего универсальное множество *U*, а внутри него – кругов (или каких-либо других замкнутых фигур), представляющих множества.

Алгебраические операции над множествами

№ п/п	Название	Обозначение	Определение	Диаграммы Эйлера–Венна*
1	**Объединение** (сумма)	$A \cup B$	$\{x \mid x \in A \vee B\}$	
2	**Пересечение** (произведение)	$A \cap B$	$\{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$	
3	**Разность**	$A \setminus B$	$\{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$	
4	**Дополнение**	$\bar{A} = U \setminus A$	$\{x \mid x \notin A\}$	

Объединением множеств *A* и *B* называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат множеству *A* или множеству *B*, или обоим множествам одновременно.

Пересечением множеств *A* и *B* называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат множеству *A* и множеству *B* одновременно.

Разностью множеств *A* и *B* называется множество, состоящее из тех и только тех элементов множества *A*, которые не принадлежат множеству *B*.

Дополнением множества *A* называется множество, состоящее из элементов универсального множества *U*, которые не принадлежат множеству *A*.

Свойства операций над множествами

1. Коммутативность

$$A \cup B = B \cup A \qquad (A \cup A = A)$$
$$A \cap B = B \cap A \qquad (A \cap A = A)$$

2. Ассоциативность

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

3. Дистрибутивность

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

4. Законы нуля и единицы

$$A \cup \varnothing = A \qquad A \cap \varnothing = \varnothing$$
$$A \cup \bar{A} = U \qquad A \cap \bar{A} = \varnothing$$

5. Законы де Моргана

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Алгебраическая операция над множествами U – декартово произведение.

Декартовым произведением множеств X и Y ($X \times Y$) называется множество упорядоченных пар $X \times Y = \left\{ (x, y) \mid x \in X, y \in Y \right\}$.

Декартовым произведением множеств X, Y и Z называется множество $X \times (Y \times Z) = (X \times Y) \times Z = \left\{ (x, y, z) \mid x \in X, y \in Y, z \in Z \right\}$.

Известными примерами прямых произведений являются:

$R^2 = R^1 \times R^1$ – плоскость;

$R^3 = R^1 \times R^1 \times R^1$ – трехмерное пространство.

Задачи

1. Записать множества, перечислив их элементы:

1) множество всех положительных простых чисел, меньших 40.

2) множество всех целых положительных степеней числа 3, меньших 50;

3) множество всех целых положительных чисел, кратных 5, которые меньше 47.

2. Записать множества, используя разные формы их задания:

1) целые числа, большие –3 и меньшие 5;

2) натуральные числа, меньшие 7;

3) натуральные делители числа 180;

4) корни уравнения $3x^2 + x - 4 = 0$.

3. Перечислить элементы заданных множеств:

1) $M = \{x \mid x \in R,\ x^3 + 5x^2 + 6x = 0\}$;

2) $M = \{x \mid x \in R,\ x^2 - 5|x| + 6 = 0\}$;

3) $M = \{x \mid x \in N,\ 0 \le x^2 \le 16\}$;

4. Изобразить на координатной прямой множества:

1) $A = \{x \mid x \in R,\ -3 < x \le 8\}$;

2) $B = \{x \mid x \in R,\ x^2 - 4x - 21 = 0\}$;

3) $C = \{x \mid x \in R,\ 4x^2 - 12x + 9 = 0\}$;

4) $D = \{x \mid x \in R,\ \dfrac{x+3}{x-2} > 0\}$;

5) $E = \{x \mid x \in R,\ |2x - 6| \le 5\}$.

5. Принадлежат ли числа 2/5; 17/20; –1/7; 5/6 множеству

$$A = \left\{ x \mid x \in Q,\ x = \frac{n^2+1}{n^2+4}, n \in N \right\}?$$

6. Написать 5 чисел, принадлежащих множеству

$$A = \left\{ x \mid x \in Q,\ x = \frac{n^3+7}{n^3+15}, n \in N \right\}.$$

7. Определить отношения между множествами и изобразить их на диаграммах Эйлера-Венна:

1) прямоугольных треугольников и равнобедренных треугольников;

2) ромбов и квадратов;

3) прямоугольников и четырехугольников с равными диагоналями;

4) натуральных делителей чисел 42 и 36;

8. Найти и изобразить на числовой прямой множества: $A \cup B$; $A \cap B$; $A \setminus B$; $B \setminus A$:

1) $A = [-1;\, 0)$, $B = [0;\, 1]$;

2) $A = [-2;\, -1]$, $B = [0;\, 3]$;

3) $A = \{1;\, 2;\, 7;\, 12\}$, $B = \{2;\, 4;\, 12\}$;

4) $A = \{2;\, 8;\, 9;\, 13\}$, $B = \{1;\, 3;\, 5\}$;

5) $A = [0;\, 1]$, $B = \{0;\, 0{,}5;\, 5;\, 7{,}5\}$.

9. Найти и изобразить на числовой прямой множества: $A \cup B$; $A \cap B$; $A \setminus B$; $A \cup \overline{B}$:

1) $A = \{x \mid x \in R,\, x^2 - 10x + 21 \le 0\}$, $B = \{x \mid x \in R, 4 - 5x \ge 2x - 31\}$;

2) $A = \{x \mid x \in R,\, 2x(x+4) \le 3(x+4)\}$, $B = \{x \mid x \in R, 2x - 4 \le 11x + 5\}$;

3) $A = \{x \mid x \in R,\, |x - 3| \le 6\}$, $B = \{x \mid x \in R, |x| \ge 2\}$.

10. С помощью диаграмм Эйлера-Венна проверить, верны ли следующие равенства:

1) $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$;

2) $\overline{(A \cap B \cap C)} = (A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C)$;

3) $(A \setminus B) \cup (B \setminus C) = (A \setminus C) \cup (C \setminus B)$;

4) $(A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) = A \cup (B \cup C)$.

11. Изобразить на координатной плоскости следующие множества:

1) $A = \{(x, y) \in R^2 \mid y \le x^2 + 1\}$;

2) $B = \{(x, y) \in R^2 \mid (x-1)^2 + y^2 \ge 1\}$;

3) $C = \{(x, y) \in R^2 \mid y \ge x,\, x \ge 0,\, y \le 1\}$.

12. Изобразить на координатной плоскости элементы декартова произведения $A \times B$:

1) $A = \{x \mid x \in N, 1 \le x < 4\}$, $B = \{y \mid y \in R, 3 \le y \le 6\}$;

2) $A = \{x \mid x \in R, -2 \le x \le 3\}$, $B = \{y \mid y \in R,\, y \ge -4\}$;

3) $A = \{x \mid x \in R,\, x < 5\}$, $B = \{y \mid y \in Z, -2 \le y \le 3\}$;

4) $A = \{x \mid x \in N,\, x < 7\}$, $B = \{y \mid y \in Z, -3 \le y \le 5\}$.

2. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ. ВЫСКАЗЫВАНИЯ И ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ. ФОРМУЛЫ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ. РАВНОСИЛЬНОСТЬ ФОРМУЛ, ЛОГИЧЕСКИЕ ЗАКОНЫ. ПРЕДИКАТЫ. КВАНТОРЫ

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ФОРМУЛЫ

В математической логике изучают способы (методы) установления истинности или ложности высказываний. Основными объектами логики являются высказывания.

Высказывание – повествовательное предложение (утверждение об объектах), имеющее однозначный, точно определенный смысл, о котором можно говорить: истинно оно или ложно в данных условиях места и времени.

Квазивысказывание – предложение, которое принципиально не может иметь четкой и однозначной интерпретации – истина это или ложь.

Высказывание, представляющее собой одно утверждение (никакая его часть не является высказыванием), принято называть **простым** (**элементарным**).

Сложным (составным) называется высказывание составленное из простых с помощью **логических связок** (опрераций): **НЕ** (отрицание), **И** (конъюнкция), **ИЛИ** (дизъюнкция), **СЛЕДУЕТ** (импликация), **ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА, КОГДА** (эквивалентность).

Модальности применяются к высказываниям и изменяют наше отношение к ним: «по сведениям …», «как сказала …» и др.

Элементарные высказывания будем обозначать буквами латинского алфавита (прописные или строчные): $A, B, c, \ldots, X, y, z, \ldots$; их логические значения – **истина** и **ложь** обозначаются буквами **И** и **Л** или цифрами **1** и **0** (**ИСТИНА** и **ЛОЖЬ**, **TRUE** и **FALSE**, **ДА** и **НЕТ**).

Логические операции над высказываниями

1. **ОТРИЦАНИЕ (НЕ**) (инверсия).

Отрицание истинно, если высказывание ложно, и наоборот. Обозначатся $\overline{A}$ или $\neg A$, читается «не *А*».

2. **КОНЪЮНКЦИЯ (И)** (логическое произведение).

Конъюнкция истинна тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания.

Обозначатся А $\wedge$ В, читается «*А* и *В*».

3. **ДИЗЪЮНКЦИЯ (ИЛИ)** (логическая сумма).

Дизъюнкция истинна тогда и только тогда, когда истинно хотя бы одно высказывание.

Обозначатся А $\vee$ В, читается «*А* или *В*».

4. **ИМПЛИКАЦИЯ** (логическое следование).

Импликация ложна тогда и только тогда, когда условие истинно, а заключение ложно. Обозначатся $A \to B$ или $A \Rightarrow B$, читается «если *А*, то *В*», «из *А* следует *В*».

5. **ЭКВИВАЛЕНЦИЯ** (логическое равенство).

Эквиваленция истинна, тогда и только тогда, когда оба высказывания принимают одинаковые значения. Обозначатся $A \leftrightarrow B$ или $A \Leftrightarrow B$, или $A \equiv B$, читается «*А* тогда и только тогда, когда *В*».

Буквы, обозначающие высказывания, логические связки и скобки составляют **алфавит** языков логики высказываний.

Логическая формула – это выражение, составленное из обозначений высказываний, связок и скобок, удовлетворяющее условиям:

- любая переменная, обозначающая высказывание – формула;
- если *A, B* – формулы, то $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \to B)$, $\overline{A}$, $(A \leftrightarrow B)$ – формулы;
- других формул нет.

С помощью логических операций над высказываниями из заданной совокупности высказываний можно строить различные сложные высказывания. Порядок выполнения операций указывается **скобками**.

Скобки можно опускать, придерживаясь следующего **порядка действий**: отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация и эквивалентность.

Логическое значение формулы алгебры логики полностью определяется логическими значениями входящих в неё элементарных высказываний.

Все возможные логические значения формулы, в зависимости от значений входящих в неё элементарных высказываний, могут быть описаны полностью с помощью таблиц истинности.

Операции над высказываниями удобно представлять с помощью **таблиц истинности:**

A	$\overline{A}$
1	0
0	1

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \to B$	$A \leftrightarrow B$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

Две формулы называются **равносильными**, если они принимают одинаковые логические значения на любом наборе входящих в формулы элементарных высказываний. Обозначатся $A \equiv B$.

Формула A называется **тождественно истинной** (или **тавтологией**), если она принимает значение 1 при всех значениях входящих в неё переменных.

Формула называется **тождественно ложной** (или **противоречием**), если она принимает значение 0 при всех значениях входящих в неё переменных.

Кванторные конструкции

1. ДЛЯ ВСЕХ

Утверждение «для всех x верно $A(x)$» символически записывается $\forall x A(x)$. Символ $\forall$ называется **квантором всеобщности**.

Эта же связка используется при переводе утверждений: «каково бы ни было x, справедливо $A(x)$», «для произвольного x имеет место $A(x)$», «A верно при любом значении x» и т.п.

2. СУЩЕСТВУЕТ

Утверждение «существует такое x, что $A(x)$» записывается как $\exists x A(x)$. Знак $\exists$ называется **квантором существования**. Эта же связка применяется при переводе утверждений: «есть такое x, при котором $A(x)$», «можно найти такое x, при котором $A(x)$», «$A(x)$ иногда верно», «$A(x)$ верно при некоторых x» и т. п.

Задачи

1. Выделить высказывания и квазивысказывания:

1) у меня одна рука;

2) у меня расстройство желудка;

3) у меня болит спина;

4) у меня нет денег;

5) программа написана плохо;

6) программа написана неправильно.

2. В предложениях выделите логические связки, модальности и кванторы:

1) каждая программа содержит ошибку;

2) если программа не содержит ошибок, то неверен применённый алгоритм;

3) если программа на самом деле полностью и абсолютно правильна, она никому не нужна;

4) по словам преподавателя у студента Петрова в каждой программе не менее десяти ошибок;

5) завтра взойдёт Солнце, если не будет светопреставления;

6) как мне сообщила Маша, наш преподаватель собирается завалить на экзамене не менее половины группы;

7) мне кажется, что Иванов думает, что я намерен подложить ему свинью;

8) мне передали, что Иванов думает, что я намерен подложить ему свинью.

3. Перевести на формальный язык, используя $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\forall$,$\exists$:

1) ни одному лысому не нужна расчёска;

2) все мои тётки не справедливы;

3) не все двоечники ленивы;

4) каждый кто упорно работает, добивается успеха;

5) ни один бездельник не станет знаменитостью;

6) некоторые художники не бездельники;

7) некоторые бездельники не художники;

8) пауки ткут паутину;

9) не все углы, синус которых больше 1/2 больше $\pi/2$;

10) квадратные корни из некоторых рациональных чисел иррациональны;

11) число делится на 25 в том и только в том случае, когда оно делится на 50 либо даёт при делении на 50 остаток 25;

12) одно из чисел A, B равно 0.

4. Представьте логической формулой:

1) не ел – не мог, поел – без ног;

2) если он автор этого слуха, то он глуп или беспринципен. Но он не глуп и не лишен принципов, значит, не он автор этого слуха;

3) картину написал Репин или Серов, или не Шишкин;

4) подозреваемого можно выбрать из группы присутствующих, если совпадает или голос, или группа крови, или рост;

5) если завтра не будет дождя и будет тепло, то можно идти купаться;

6) можно установить, что человек вырос в данной местности, если его диалект и привычки такие же, что и у местных жителей;

7) если произведение трех чисел равно нулю, то одно из этих чисел равно нулю.

5. Составить таблицы истинности:

1) $(p \vee q) \wedge (p \vee \bar{q}) \leftrightarrow p \wedge q$;

2) $p \to \bar{q} \vee p$;

3) $p \to q \leftrightarrow \bar{p} \vee \bar{q}$;

4) $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \vee r \to p)$;

5) $p \wedge q \leftrightarrow \bar{q} \vee r$;

6) $(p \to q \vee r) \wedge (p \wedge q) \leftrightarrow \overline{p \wedge r} \to p$.

6. Проверить на таблицах истинности тавтологии ли следующие формулы:

1) $(A \to B) \vee (A \to C) \leftrightarrow (A \to B \vee C)$;

2) $\overline{A \vee B} \leftrightarrow \bar{A} \wedge \bar{B}$;

3) $((A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C) \leftrightarrow (A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C))$;

4) $\overline{A \wedge B} \leftrightarrow \bar{A} \vee \bar{B}$;

5) $(A \leftrightarrow B) \to (A \wedge C \leftrightarrow B \wedge C)$;

6) $(A \leftrightarrow B) \to (A \vee C \leftrightarrow B \vee C)$;

7) $((A \leftrightarrow B) \wedge (C \leftrightarrow D)) \leftrightarrow ((A \leftrightarrow C) \wedge (B \leftrightarrow D))$.

7. Записать высказывания, воспользовавшись кванторами:

1) всякое число равно самому себе;

2) каково бы ни было число y, квадрат его не отрицателен;

3) всякое число либо положительно, либо отрицательно, либо рано нулю;

4) существует x такое, что $x-2=5$;

5) по крайней мере одно число x является корнем уравнения $ax^2+bx+c=0$;

6) множество $X \subset R$ ограничено;

7) число есть наименьший элемент множества X;

8) между любыми двумя различными действительными числами найдётся действительное число;

9) функция *f(x)* ограничена снизу на множестве X, если найдётся такое число M, что значения функции во всех точках множества X превосходят это число.

8. Установить, истинны или ложны высказывания $(a,b,c,x,y,z \in R)$:

1) $\forall x \exists y\ (x+y=3)$;

2) $\exists y \forall x\ (x+y=3)$;

3) $\exists x,y\ (x+y=3)$;

4) $\forall x,y\ (x+y=3)$;

5) $\exists x,y\ (x>y>0 \wedge x+y=0)$;

6) $\forall x,y\ (x<y) \leftrightarrow \exists z(x<z<y)$;

7) $\forall x,y\ (x^2 \neq y^2)$;

8) $\forall x\ (x^2>x \leftrightarrow x>1 \vee x<0)$;

9) $\forall x\ (x>2 \wedge \overline{x>3} \leftrightarrow 2<x \le 3)$;

10) $\exists x\ (\sqrt{x^2}<x)$;

11) $\forall a,\ b,\ c(\exists x\ (ax^2+bx+c=0) \Leftrightarrow b^2-4ac \ge 0)$;

12) $\forall a,\ b,\ c(\forall x\ (ax^2+bx+c>0) \Leftrightarrow b^2-4ac<0 \vee a>0)$;

13) $\forall b \exists a \forall x\ (x^2+bx+c>0)$;

14) $\exists b \forall a \exists x\ (x^2+bx+c=0)$;

15) $\exists a \forall b \exists x\ (x^2+bx+c=0)$.

9. Записать естественным математическим языком:

1) $\forall x \in N \rightarrow x \in Q$;

2) $\forall a > b \exists k \in R : (a > b \rightarrow a + k > b + k)$;

3) $\forall x \in [4,6] \exists a \in [4,6] : |x - a| < 2$;

4) $\forall x \in X \;\; f(x) \uparrow \leftrightarrow (\forall x_1 \in X,\ x_2 \in X : x_1 < x_2) \rightarrow (f(x_1) < f(x_2))$;

5) $f(x)$ – чётная функция $\leftrightarrow (\forall x \in X, -x \in X) \rightarrow (f(x) = f(-x))$.

3. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА. МАТРИЦЫ, ОПРЕДЕЛИТЕЛИ, СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВННИЙ

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ФОРМУЛЫ

Матрицей A размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица из m строк и n столбцов, состоящая из чисел или иных математических выражений a_{ij} (называемых элементами матрицы), $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Суммой матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одинакового размера называется матрица $C = (c_{ij})$ того же размера, причем $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $\forall\ i, j$.

Произведение матрицы $A = (a_{ij})$ **на число** λ называется матрица $B = (b_{ij})$ того же размера, причем $b_{ij} = \lambda a_{ij}$, $\forall\ i, j$.

Танспонированной к матрице $A = (a_{ij})$ называется матрица $A^T = (a^T{}_{ij})$, такая что $a^T{}_{ij} = a_{ji}$, $\forall\ i, j$.

Произведение матриц определяется следующим образом. Пусть заданы две матрицы A и B, причем число столбцов первой из них равно числу строк второй (A размера $m \times n$, B размера $n \times k$). Если $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, то произведением матриц A и B, называется матрица C элементы которой вычисляются по формуле $c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{in} b_{nj}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, k$ $\left(c_{ij} = \sum\limits_{l=1}^{n} a_{il} b_{lj} \right)$.

Произведение матриц A и B обозначается $A \cdot B$, т.е. $C = A \cdot B$.

Произведение матриц определено только для матриц в которых число столбцов первой из них совпадает с числом строк второй. В общем случае произведение матриц не коммутативно, т. е. $A \cdot B \neq B \cdot A$, причем если произведение $A \cdot B$ определено, то произведение $B \cdot A$ может не существовать.

Определителем или **детерминантом** порядка n называется число $detA = |A|$, которое ставится в соответствие каждой квадратной матрице $A = (a_{ij})$ порядка n по следующим формулам:

при $n = 1$ $detA = a_{11}$;

при $n = 2$ $detA = a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12}$;

при $n > 2$ $\det A = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{1i}A_{1i} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i1}A_{i1} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ki}A_{ki} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ik}A_{ik}$,

где $A_{ij} = (-1)^{i\,+\,j}M_{ij}$, – алгебраическое дополнение элемента a_{ij}, M_{ij} – дополнительный минор элемента a_{ij}, определитель порядка $(n-1)$, получаемый из $|A|$ вычеркиванием его i-ой строки и j-ого столбца.

Пусть A – квадратная матрица порядка n. Матрица A^{-1} называется **обратной** для A, если $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, где E единичная матрица порядка n. Если $detA \neq 0$, то обратная матрица A^{-1} существует и может быть вычислена по формуле: $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\left(\tilde{A}\right)^{T}$, где $\tilde{A} = (A_{ij})$ – матрица, составленная из алгебраических дополнений.

Задачи

1. Найти $(-4)\cdot C$, если $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$;

2. Найти $A+B$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$;

3. Найти $3A + 4B - 2C$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -5 & 6 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & 2 \\ 8 & 6 & 7 \end{pmatrix}$;

4. Найти $2A-5B+3C$, если $A=\begin{pmatrix}1&3&2\\2&0&4\\1&2&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2&4\\-2&3&2\\-1&4&1\end{pmatrix}$,

$C=\begin{pmatrix}3&8&1\\4&-1&2\\3&-2&5\end{pmatrix}$;

5. Найти произведение матриц AB и BA:

1) $A=\begin{pmatrix}3&-2&5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5\\2\\-3\end{pmatrix}$;

2) $A=\begin{pmatrix}3&-5\\1&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&-3\\11&7\end{pmatrix}$;

3) $A=\begin{pmatrix}1&-2&3\\4&0&2\\3&-1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$;

4) $A=\begin{pmatrix}2&-1&3&4&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3\\2\\1\\-2\\2\end{pmatrix}$;5)

$A=\begin{pmatrix}1&-2&3&0\\2&1&-1&5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&-1\\1&2\\5&-1\\3&0\end{pmatrix}$;

6) $A=\begin{pmatrix}5&7&12\\6&3&-2\\3&3&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

6. Для матриц:

$$B=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}, F=\begin{pmatrix}-1&1&2\\2&1&-2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\3&4&-2\\3&-2&4\end{pmatrix}, G=\begin{pmatrix}1&2\\3&-2\\0&1\end{pmatrix}:$$

а) найти матрицы BF, CG, проверить равенства $(BF)^T = F^T B^T$, $(CG)^T = G^T C^T$;

б) найти матрицы FCG, GBF, проверить равенства $F(CG) = (FC)G$, $G(BF) = (GB)F$.

7. Среди матриц A, B, C, D перечислить пары (с учетом порядка сомножителей), для которых определено произведение. Указать при этом размерность матрицы произведения:

$$A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\0&1&-4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-2&3\\1&0\\2&1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2&1&1\\-1&3&2\\1&2&1\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix};$$

8. Заданы матрицы

$$A=\begin{pmatrix}2&-1\\3&-2\\5&-3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\\0&-1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}0&-1\\2&1\\3&1\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

$$E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad F=\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&2&1&3\\0&0&4&-1\\0&0&0&5\end{pmatrix}, G=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\\1&1\end{pmatrix}, H=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix},$$

$$K=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&3&0\\2&-4&9\end{pmatrix}$$

1) определить размерности всех матриц;

2) выписать элементы матриц A и F: a_{12}, a_{32}, f_{33}, f_{34};

3) указать квадратные, диагональные, единичные, треугольные матрицы;

4) вычислить матрицы: $A + B$, $A - B + C$, $A + B + C + G$, $D + E$, $K + D - H$;
5) проверить равенства $A + B = B + A$, $D + (E + H) = (D + E) + H$;
6) доказать, что для любых $\alpha, \beta \in R$: $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$, $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$, $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$;
7) вычислить: $2D - 3D$, $2H + 3D - 5E$, $4B + 2C$.

9. Вычислить определители 2-го порядка:

1) $\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$, 2) $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -3 & -9 \end{vmatrix}$, 3) $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$, 4) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$.

10. Используя правило Саррюса («правило треугольника») найти определители 3-го порядка:

1) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$, 2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$, 3) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, 4) $\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ -1 & a & 1 \\ a & -1 & a \end{vmatrix}$,

5) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, 6) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 5 & -2 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix}$, 7) $\begin{vmatrix} -1 & -3 & -3 \\ 2 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix}$, 8) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$,

9) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

11. Решить уравнения и неравенства:

1) $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix} = 0$, 2) $\begin{vmatrix} 3 & x & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, 3) $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0$,

4) $\left| \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix} - x \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 0$.

12. Пользуясь свойствами определителей, доказать справедливость равенств:

$$1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 17 \\ 2 & 2 & 15 \\ 3 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 0, \qquad 2)\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & \cos 2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & \cos 2\beta \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & \cos 2\gamma \end{vmatrix} = 0,$$

$$3)\begin{vmatrix} \alpha b_1 + \beta c_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha b_2 + \beta c_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha b_3 + \beta c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0, \ 4)\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ -2 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 11 \end{vmatrix}.$$

13. Вычислить определители:

$$1)\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \ 2)\begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}, \ 3)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \ 4)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

14. Для заданных матриц найти обратные и сделать проверку:

$$1)\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}, \ 2)\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}, \ 3)\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \ 4)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$5)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

15. Решить системы уравнений с помощью обратной матрицы и (или) формул Крамера:

$$1)\begin{cases} 2x - 4y + 3z = 1 \\ x - 2y + 4z = 3 \\ 3x - y + 5z = 2 \end{cases}, \ 2)\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ 3x + 2y + 2z = -2 \\ x - 2y + z = 1 \end{cases}, \ 3)\begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ 2x - y - z = 1 \\ x + 3y + 4z = 6 \end{cases},$$

4) $\begin{cases} x-y+z=a \\ x+y-z=b \\ -x+y+z=c \end{cases}$, 5) $\begin{cases} x+2y-z=0 \\ 2x-3y+2z=0 \\ 3x+y+z=0 \end{cases}$.

16. Найти ранг матрицы:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, 2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 3) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 4) $\begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$,

5) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$, 6) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, 7) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 5 & -4 & -4 \\ 1 & 8 & 7 & -7 & 6 \end{pmatrix}$.

17. Найти общее решение однородной системы линейных уравнений:

1) $\begin{cases} x+2y+z=0 \\ 3x-5y+3z=0 \\ 2x+7y-z=0 \end{cases}$, 2) $\begin{cases} 2x+y-4z=0 \\ 3x+5y-7z=0 \\ 4x-5y-6z=0 \end{cases}$,

3) $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+x_4=0 \\ 2x_1+5x_2+x_3+5x_4=0 \\ 3x_1+8x_2+x_3+9x_4=0 \end{cases}$, 4) $\begin{cases} 9x_1+21x_2-15x_3+5x_4=0 \\ 12x_1+28x_2-20x_3+7x_4=0 \end{cases}$,

5) $\begin{cases} x_1+x_3+x_5=0 \\ x_2-x_4+x_6=0 \\ x_1-x_2+x_5-x_6=0 \\ x_2+x_3+x_6=0 \\ -x_4+x_5=0 \end{cases}$.

18. Исследовать совместность системы уравнений, в случае совместности найти её общее решение:

1) $\begin{cases} 2x-y+z=-2 \\ x+2y+3z=-1 \\ x-3y-2z=3 \end{cases}$, 2) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=2 \\ x_1-x_2+x_3=0 \\ x_1+3x_2-x_3=-2 \\ 3x_1+4x_2+3x_3=0 \end{cases}$,

3) $\begin{cases} 9x_1-3x_2+5x_3+6x_4=4 \\ 6x_1-2x_2+3x_3+4x_4=5 \\ 3x_1-x_2+3x_3+14x_4=-8 \end{cases}$, 4) $\begin{cases} 9x_1+21x_2-15x_3+5x_4=-1 \\ 12x_1+28x_2-20x_3+7x_4=-2 \end{cases}$,

5) $\begin{cases} x_1+x_3+x_5=-2 \\ x_2-x_4+x_6=-2 \\ x_1-x_2+x_5-x_6=3 \\ x_2+x_3+x_6=-5 \\ -x_4+x_5=0 \end{cases}$.

19. Найти собственные числа и собственные векторы матрицы:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, 2) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, 3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, 4) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$.

4. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ФОРМУЛЫ

Вектор – направленный отрезок (или упорядоченная пара точек). Обозначение вектора латинскими буквами, например, a ($\vec{a}$), или AB ($\overrightarrow{AB}$), где A – начало вектора B – его конец.

Расстояние между началом и концом вектора называется его длиной (а также модулем и абсолютной величиной). Длина вектора обозначается $|\vec{a}|$ или $|\overrightarrow{AB}|$.

Векторы называются **коллинеарными**, если они расположены на одной прямой или на параллельных прямых. Векторы называются **компланарными**, если, существует плоскость, которой они параллельны.

Нулевой вектор – вектор, у которого начало и конец совпадают. Он коллинеарен любому вектору. Длина его равна нулю.

Два перпендикулярных вектора называются **ортогональными** ($\vec{a} \perp \vec{b}$).

Два вектора называются **равными** ($\vec{a} = \vec{b}$), если они коллинеарны ($\vec{a} \parallel \vec{b}$), одинаково направлены ($\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$) и равны по длине $\left(|\vec{a}| = |\vec{b}|\right)$.

Произведением вектора $\vec{a}$ **на вещественное число** α называется вектор $\vec{b} = \alpha\vec{a}$, определяемый следующими условиями:

1) $|\vec{b}| = |\alpha||\vec{a}|$;

2) вектор $\vec{b}$ коллинеарен вектору $\vec{a}$ ($\vec{a} \parallel \vec{b}$),

3) векторы $\vec{b}$ и $\vec{a}$ направлены одинаково ($\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$), если $\alpha > 0$, и противоположно ($\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$), если $\alpha < 0$. (Если же $\alpha = 0$, то из условия 1) следует, что $\vec{b} = 0$.

Пусть даны векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$. Построим точку E так, что $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CD}$. Тогда вектор $\overrightarrow{AE}$ называется суммой векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ и обозначается $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AE}$ (рис. 1).

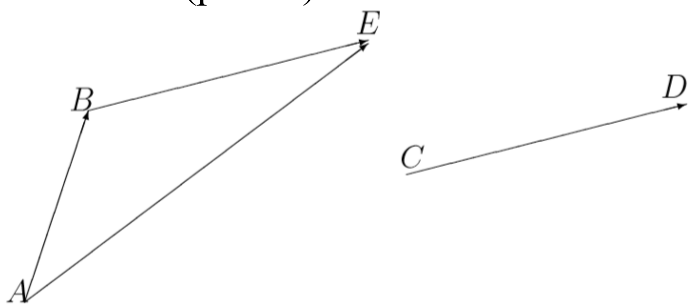


Рис. 1. Сумма векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$

Легко видеть, что прибавление нулевого вектора к некоторому вектору $\vec{a}$ не меняет последнего.

Приведенное определение сложения называют **правилом параллелограмма (правило треугольника)**, так как если $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ не коллинеарны, то их сумма представляет собой диагональ параллелограмма, построенного на равных им векторах.

Вектор, коллинеарный данному вектору $\vec{a}$, равный ему по длине и противоположно направленный (иными словами, вектор $(-1)\ \vec{a}$), называется **противоположным** вектором для вектора $\vec{a}$ и обозначается $-\vec{a}$.

Разностью $\vec{b} - \vec{a}$ векторов $\vec{b}$ и $\vec{a}$ называется сумма векторов $\vec{b}$ и $-\vec{a}$.

Назовем **базисом в пространстве** три некомпланарных вектора, взятых в определенном порядке.

Базис позволяет однозначно поставить в соответствие каждому вектору упорядоченную тройку чисел – коэффициенты разложения этого вектора по векторам базиса. Наоборот, каждой упорядоченной тройке чисел α_1, α_2, α_3 при помощи базиса мы поставим в соответствие вектор, если составим линейную комбинацию $\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \alpha_3\vec{e}_3$, где $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ – векторы базиса.

Базисом на плоскости назовем два неколлинеарных вектора на этой плоскости, взятых в определенном порядке.

Если на плоскости выбран базис, то тем самым каждому вектору однозначно поставлена в соответствие упорядоченная пара чисел и, наоборот, каждой упорядоченной паре чисел однозначно поставлен в соответствие вектор.

Если $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ – базис и $\vec{a} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \alpha_3\vec{e}_3$, то числа α_1, α_2, α_3 называются **компонентами** (или **координатами**) вектора $\vec{a}$ в данном базисе. Аналогично определяются компоненты вектора на плоскости.

Компоненты вектора пишут в скобках после буквенного обозначения вектора. Например, $\vec{a} = (1, 0, 1)$ означает, что компоненты вектора $\vec{a}$ в определенном ранее выбранном базисе равны 1, 0 и 1.

При умножении вектора на число все его компоненты умножаются на это число, $\alpha\cdot\vec{a} = (\alpha\cdot x, \alpha\cdot y, \alpha\cdot z)$.

При сложении векторов складываются их соответствующие компоненты, $\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$. Чтобы найти компоненты вектора, нужно из координат его конца вычесть координаты его начала.

Базис называется **ортонормированным**, если его векторы попарно ортогональны и по длине равны единице.

Скалярное произведение ставит в соответствие паре векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ число $(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{b} = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\varphi_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}$.

Свойства скалярного произведения:

1) коммутативность: $(\vec{a},\vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$;

2) $(\vec{a},\vec{a}) = \left|\vec{a}\right|^2$;

3) $(\vec{a},\vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$;

4) дистрибутивность: $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2, \vec{b}) = (\vec{a}_1, \vec{b}) + (\vec{a}_2, \vec{b})$,

5) $(\vec{a}, \lambda\vec{b}) = \lambda\cdot(\vec{a}, \vec{b})\ \forall\ \lambda \in \mathbf{R}$.

В ортонормированном базисе если $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то $(\vec{a}, \vec{b}) = x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2 + z_1\cdot z_2$.

Данное утверждение позволяет найти выражение длины вектора через его компоненты в ортонормированном базисе

$|\vec{a}|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$, также выражение угла между векторами через их компоненты в ортонормированном базисе

$$\cos\varphi=\frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3}{\sqrt{\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)\cdot\left(y_1^2+y_2^2+y_3^2\right)}},$$

$\Pi p_{\vec{b}}\vec{a}$ – проекции вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$:

$$\Pi p_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{b}|}=\frac{x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3}{\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}}.$$

Векторным произведением упорядоченной пары векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $[\vec{a},\vec{b}]$ или $\vec{a}\times\vec{b}$, такой что:

1) $\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|=S_{a,b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi$, где $S_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}$ – площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}\parallel\vec{b}$, то $S_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}=0$;
2) $\vec{a}\perp\left[\vec{a},\vec{b}\right]\perp\vec{b}$.
3) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ – правая тройка.

Свойства векторного произведения:

1) $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=-\left[\vec{b},\vec{a}\right]$;
2) $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=0\Leftrightarrow\vec{a}\parallel\vec{b}$;
3) $\left[\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{b}\right]=\left[\vec{a}_1,\vec{b}\right]+\left[\vec{a}_2,\vec{b}\right]$;
4) $\lambda\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left[\lambda\vec{a},\vec{b}\right]=\left[\vec{a},\lambda\vec{b}\right],\forall\lambda\in R$.

В декартовой системе координат (базис $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$), $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\vec{b} = (x_2, y_2, z_2) \Rightarrow [\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{k} =$$

$$= \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}; - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right)$$

Смешанным произведением упорядоченной тройки векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число $\left\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \right\rangle$, или $\left(\vec{a} \times \vec{b} \right) \cdot \vec{c}$, т. е. $\left\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \right\rangle = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = (\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}])$.

$\left\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \right\rangle = V_{a,b,c}$, если $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – правая тройка, или $\left\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \right\rangle = -V_{a,b,c}$, если $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – левая тройка. Здесь $V_{a,b,c}$ – объём параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$. (Если $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны, то $V_{a,b,c} = 0$.)

В декартовой системе координат, если $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\vec{b} = (x_2, y_2, z_2),\ \vec{c} = (x_3, y_3, z_3) \Rightarrow \left\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \right\rangle = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Задачи

1. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны $\left|\vec{a}\right| = 5$, $\left|\vec{b}\right| = 12$. Определить $\left|\vec{a} + \vec{b}\right|$, $\left|\vec{a} - \vec{b}\right|$, орты $\vec{a}^0, \vec{b}^0$.

2. Вычислить модуль вектора $\vec{a} = (6; 3; -2)$.

3. Даны точки $A(3; -1; 2)$ и $B(-1; 2; 1)$. Найти координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$.

4. Определить точку N, с которой совпадает конец вектора $\vec{a} = (3; -1; 4)$, если его начало совпадает с точкой $M(1; 2; -3)$.

5. Дан модуль вектора $|\vec{a}| = 4$ и углы $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$, $\gamma = 120°$. Вычислить проекции вектора на координатные оси.

6. Может ли вектор составлять с координатными осями следующие углы:

1) α = 120°, β = 45°, γ = 60°;
2) α = 135°, β = 45°, γ = 60°;
3) α = 90°, β = 150°, γ = 60°?

7. Найти координаты вектора $\vec{a}$, если $|\vec{a}|=3$ и углы между вектором и координатными осями равны: α = β = γ.

8. Даны векторы $\vec{a}=(2;\,3), \vec{b}=(1;-3), \vec{c}=(-1;3)$. При каком значении коэффициента α векторы $\vec{p}=\vec{a}+\alpha\vec{b}$ и $\vec{q}=\vec{a}+2\vec{c}$ коллинеарны?

9. Исследовать на коллинеарность систему векторов $\{\vec{a},\ \vec{b}\}$, где $\vec{a}$ = (2, -1, 3), $\vec{b}$ = (-6, 3, -9). Установить, какой из них длиннее другого и во сколько раз, как они направлены – в одну или противоположные стороны.

10. Даны точки $A(-1;\,5;\,-10)$, $B(5;\,-7;\,8)$, $C(2;\,2;\,-7)$, $D(5;\,-4;\,2)$. Проверить, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ коллинеарны; установить, какой из них длиннее и во сколько раз; направлены они в одну сторону или разные?

11. Найти значения α и β, при которых векторы $\vec{a}=-2\vec{i}+3\vec{j}+\beta\vec{k}$ и $\vec{b}=\alpha\vec{i}-6\vec{j}+2\vec{k}$ будут коллинеарны. Будут ли они сонаправлены?

12. Два вектора $\vec{a}=(2;-3;6)$ и $\vec{b}=(-1;2;-2)$ приложены к одной точке. Определить координаты вектора $\vec{c}$, направленного по биссектрисе угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, при условии, что $\left|\vec{c}\right|=3\sqrt{42}$.

13. Даны вершины треугольника $A(3;\,-1;\,5)$, $B(4;\,2;\,-5)$, $C(-4;\,0;\,3)$. Найти длину медианы, проведенной из вершины A.

14. Дано разложение вектора $\vec{c}$ по базису $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$: $\vec{c}=16\vec{i}-15\vec{j}+12\vec{k}$. Найти разложение по этому же базису вектора $\vec{d}$, параллельного вектору $\vec{c}$ и противоположного с ним направления, при условии, что $|\vec{d}|=75$.

15. Заданы векторы $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j},\ \vec{b}=-3\vec{j}-2\vec{k},\ \vec{c}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$. Найти:

1) координаты орта $\vec{a}^{\,0}$; 2) координаты вектора $\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$;

3) разложение вектора $\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}$ по базису $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$;

4) $np_{\vec{j}}(\vec{a}-\vec{b})$.

16. Даны векторы $\vec{a}=(10;3;1)$, $\vec{b}=(1;4;2)$, $\vec{c}=(3;9;2)$, $\vec{d}=(19;30;7)$. Найти разложение вектора $\vec{d}$ по базису $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

17. Даны векторы $\vec{a}=(8;2;3)$, $\vec{b}=(4;6;10)$, $\vec{c}=(3;-2;1)$, $\vec{d}=(7;4;11)$. Найти разложение вектора $\vec{d}$ по базису $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

18. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi=\frac{2}{3}\pi$. Зная, что $|\vec{a}|=10$ и $|\vec{b}|=2$, вычислить $(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(3\vec{a}-\vec{b})$.

19. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi=\frac{2}{3}\pi$. Зная, что $|\vec{a}|=3$ и $|\vec{b}|=4$, вычислить: 1) $\vec{a}\vec{b}$; 2) $\vec{a}^2$; 3) $\vec{b}^2$; 4) $(\vec{a}+\vec{b})^2$; 5) $(3\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})$; 6) $(\vec{a}-\vec{b})$; 7) $(3\vec{a}+2\vec{b})^2$.

20. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi=\frac{\pi}{6}$. Зная, что $|\vec{a}|=\sqrt{3}$ и $|\vec{b}|=1$, вычислить угол α между векторами $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{q}=\vec{a}-\vec{b}$.

21. Определить при каком значении α векторы $\vec{a}=\alpha\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-\alpha\vec{k}$ взаимно перпендикулярны.

22. Даны точки $A(-1;3;-7)$, $B(2;-1;5)$, $C(0;1;-5)$. Вычислить: $(2\overline{AB}-\overline{CB})\cdot(2\overline{BC}+\overline{BA})$.

23. Даны векторы $\vec{a}=(3;-6;-1), \vec{b}=(1;4;-5), \vec{c}=(3;-4;12)$. Найти $np_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b})$.

24. Найти проекцию вектора $\vec{S}=(4;-3;2)$ на ось, составляющую с координатными осями равные острые углы.

25. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi=\frac{\pi}{6}$. Зная, что $|\vec{a}|=6$ и $|\vec{b}|=5$, вычислить $|\vec{a}\times\vec{b}|$.

26. Найти площадь треугольника с вершинами $A(1;-2;3)$, $B(0;-1;2)$, $C(3;4;5)$.

27. Даны векторы $\vec{a}=(3;-1;-2)$ и $\vec{b}=(1;2;-1)$. Найти координаты векторов: 1) $\vec{a}\times\vec{b}$; 2) $(2\vec{a}+\vec{b})\times\vec{b}$; 3) $(2\vec{a}-\vec{b})\times(2\vec{a}+\vec{b})$.

28. Вычислить всевозможные векторные произведения векторов декартова базиса: $\vec{i}\times\vec{i}$, $\vec{i}\times\vec{j}$, $\vec{j}\times\vec{i}$, $\vec{j}\times\vec{j}$, $\vec{j}\times\vec{k}$, $\vec{k}\times\vec{j}$, $\vec{k}\times\vec{k}$, $\vec{k}\times\vec{i}$, $\vec{i}\times\vec{k}$.

29. Даны точки $A(2; -1; 2)$, $B(1; 2; -1)$, $C(3; 2; 1)$. Найти координаты векторных произведений: 1) $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}$; 2) $(\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{CA})\times\overrightarrow{CB}$

30. Упростить выражения:

1) $2\vec{i}(\vec{j}\times\vec{k})+3\vec{j}(\vec{i}\times\vec{k})+4\vec{k}(\vec{i}\times\vec{j})$;

2) $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\times\vec{c}+(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\times\vec{b}+(\vec{b}-\vec{c})\times\vec{a}$;

3) $(3\vec{i}-4\vec{j}-5\vec{k})\times(2\vec{i}+6\vec{j}-\vec{k})$.

31. Найти единичный вектор $\vec{c}$, перпендикулярный каждому из векторов $\vec{a}=(3;5;-2)$ и $\vec{b}=(2;-2;4)$.

32. Заданы векторы $\vec{a}=(1;-1;3)$, $\vec{b}=(-2;2;1)$, $\vec{c}=(3;-2;5)$. Вычислить смешанное произведение $\langle\vec{a},\vec{b},\vec{c}\rangle$ и определить ориентацию троек: $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$, $(\vec{b},\vec{a},\vec{c})$, $(\vec{a},\vec{c},\vec{b})$.

33. Определить, лежат ли точки *A, B, C, D* в одной плоскости:

1) $A(2; -1; 1)$, $B(5; 5; 4)$, $C(3; 2; -1)$, $D(4; 1; 3)$;

2) $A(1; 2; -1)$, $B(0; 1; 5)$, $C(-1; 2; 1)$, $D(2; 1; 3)$.

34. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}=(1;-2;1)$, $\vec{b}=(3;2;1)$, $\vec{c}=(1;0;-1)$.

35. Найти высоту параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}=(2;1;3)$, $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{c}=(1;-3;1)$, опущенную на грань, построенную на векторах $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

36. Найти объем треугольной призмы, построенной на векторах $\vec{a}=(1;2;3)$, $\vec{b}=(2;4;1)$, $\vec{c}=(2;-1;0)$.

37. Вычислить синус угла образованного векторами $\vec{a}=(2;-2;1)$ и $\vec{b}=(2;3;6)$.

5. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ НА ПЛОСКОСТИ

Деление отрезка в данном отношении

Если точка $M(x;\ y)$ лежит на прямой, проходящей через точки $M_1(x_1;\ y_1)$, $M_2(x_2;\ y_2)$, и дано отношение $\lambda = M_1M\ /\ MM_2$, в котором точка M делит отрезок M_1M_2, то координаты точки M определяются по формулам $x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$.

Если точка M является серединой отрезка M_1M_2, то координаты точки M определяются по формулам $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}, y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$.

Прямая на плоскости

Общее уравнение прямой: $Ax + By + C = 0$.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом: $y = kx + b$.

Уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1;\ y_1)$, $M_2(x_2;\ y_2)$: $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$.

Уравнение прямой, проходящей через точку $M(x_0;\ y_0)$ с заданным угловым коэффициентом k: $y - y_0 = k(x - x_0)$.

Уравнение прямой, проходящей через точку $M(x_0;\ y_0)$ в направлении вектора $\vec{L} = (a, b)$: $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b}$

Уравнение прямой, проходящей через точку $M(x_0;\ y_0)$ в направлении перпендикулярном вектору $\vec{N} = (A, B)$: $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$.

Если известны угловые коэффициенты k_1 и k_2 двух прямых, то один из углов φ между этими прямыми определяется по формуле: $tg\,\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$.

Признаком параллельности двух прямых является равенство угловых коэффициентов: $k_1 = k_2$.

Признаком перпендикулярности двух прямых является соотношение: $k_1 k_2 = -1$ или $k_2 = -\dfrac{1}{k_1}$.

Задачи

1. Дана точка $A(3;\ –2)$. Найти координаты точек симметричных точке A относительно оси Ox, оси Oy, начала координат.

2. Доказать, что треугольник с вершинами $A(–2;\ –1)$, $B(6;\ 1)$, $C(3;\ 4)$ – прямоугольный.

3. Точки $A(2;\ 4)$, $B(–3;\ 7)$ и $C(–6;\ 6)$ – три вершины параллелограмма, причем A и C – противоположные вершины. Найти координаты четвертой вершины.

4. На оси ординат найти точку, отстоящую от точки $A(3;\ –8)$ на расстоянии 5 единиц.

5. Определить, какие из точек $M_1(3;\ 1)$, $M_2(2;\ 3)$, $M_3(6;\ 3)$, $M_4(–3;\ –3)$, $M_5(3;\ –1)$, $M_6(–2;\ 1)$ лежат на прямой $2x – 3y – 3 = 0$ и какие не лежат на ней.

6. Определить точки пересечения прямой $2x – 3y – 12 = 0$ с координатными осями и построить эту прямую на чертеже.

7. Найти точку пересечения двух прямых $3x – 4y – 29 = 0$, $2x + 5y + 19 = 0$.

8. Составить уравнение прямой и построить прямую на чертеже, зная её угловой коэффициент k и отрезок b, отсекаемый ею на оси Oy:

1) $k = 2/3$, $b = 3$; 2) $k = 3$, $b = 0$; 3) $k = 0$, $b = -2$;

4) $k = -3/4$, $b = 3$; 5) $k = -2$, $b = -5$; 6) $k = -1/3$, $b = 2/3$.

9. Определить угловой коэффициент k и отрезок b, отсекаемый на оси Oy, для каждой из прямых:

1) $5x - y + 3 = 0$; 2) $2x + 3y - 6 = 0$; 3) $5x + 3y + 2 = 0$;

4) $3x + 2y = 0$; 5) $y - 3 = 0$.

10. Дана прямая $2x + 3y + 4 = 0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2; 1)$: 1) параллельно данной прямой; 2) перпендикулярно данной прямой.

11. Найти точку Q, симметричную точке $P(-5; 13)$ относительно прямой $2x - 3y - 3 = 0$.

12. Вычислить угловой коэффициент k прямой, проходящей через две данные точки: *а)* $M_1(2; -5)$, $M_2(3; 2)$; *б)* $P(-3; 1)$, $Q(7; 8)$; *в)* $A(3; -1)$, $B(-2;1)$.

13. Даны вершины треугольника $M_1(2; 1)$, $M_2(-1; -1)$, $M_3(3; 2)$. Составить уравнения его высот.

14. Даны вершины треугольника $A(1; -2)$, $B(5; 4)$ и $C(-2; 0)$. Составить уравнения биссектрис его внутреннего и внешнего углов при вершине A.

15. Определить угол φ между двумя прямыми:

1) $5x - y + 7 = 0$, $3x + 2y = 0$;

2) $y = 3/2x + 7/2$, $y = -2/3x + 1$;

3) $(x - 2)/3 = (y + 3)/5$, $(x+1)/2 = (y + 1)/5$.

16. Вычислить величину отклонения от точки до прямой:

1) $A(2; -1)$, $4x + 3y + 10 = 0$;

2) $B(0; -3)$, $5x - 12y - 23 = 0$;

3) $P(-2; 3)$, $3x - 4y - 2 = 0$; 4) $Q(1; -2)$, $x - 2y - 5 = 0$.

17. Вычислить угловой коэффициент k прямой, проходящей через две данные точки $A(2; -5)$, $B(3; 2)$.

18. Через две точки $B(-1; 2)$ и $C(2; 3)$ проведена прямая. Определить точки пересечения этой прямой с осями координат.

19. Даны вершины треугольника $A(2; -2)$, $B(3; -5)$ и $C(5; 7)$. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины A.

20. Даны вершины треугольника $A(1; -1)$, $B(-2; 1)$ и $C(3; 5)$. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины A.

21. Даны вершины треугольника $A(-10; -13)$, $B(-2; 3)$ и $C(2; 1)$. Вычислить длину перпендикуляра, опущенного из вершины B на медиану, проведенную из вершины C.

22. Даны вершины треугольника A, B, C. Сделать чертеж и найти: 1) длину стороны AB; 2) внутренний угол A; 3) уравнение высоты, проведенной через вершину C; 4) уравнение медианы, проведенной через вершину B; 5) точку пересечения медианы BE и высоты CD; 6) длину высоты, проведенной через вершину C.

1) $A(-2; 2)$, $B(1; 8)$, $C(8; 0)$;

2) $A(2; 2)$, $B(10; 8)$, $C(12; 1)$;

3) $A(-2; 4)$, $B(6; 5)$, $C(4; -2)$;

4) $A(-2; -4)$, $B(3; 3)$, $C(7; -1)$;

5) $A(1; 7)$, $B(4; 13)$, $C(11; 5)$.

23. Установить, какие из следующих пар уравнений определяют параллельные прямые:

1) $x - 3y - 7 = 0$, $2x - 6y + 8 = 0$;

2) $4x - 2y + 5 = 0$, $2x + y - 1 = 0$.

24. Установить, какие из следующих пар уравнений определяют перпендикулярные прямые:

1) $3x - y - 5 = 0$, $x + 9y + 2 = 0$;

2) $2x + 3y - 3 = 0$, $3x - 2y + 5 = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ В ПРОСТРАНСТВЕ

Общее уравнение плоскости: $Ax + By + Cz + D = 0$.

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{N} = (A, B, C)$: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

Общее уравнение прямой в трехмерном пространстве:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}.$$

Каноническое уравнение прямой в трехмерном пространстве:

$$\frac{x - x_0}{n} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{p}.$$

Параметрическое уравнение прямой в трехмерном пространстве:

$$\begin{cases} x = nt + x_0 \\ y = mt + y_0 \\ z = pt + z_0 \end{cases}.$$

Задачи

25. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_1(2; 1; -1)$ и имеет нормальный вектор $\vec{n} = (1; -2; 3)$.

26. Точка $P(2; -1; -1)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость. Составить уравнение этой плоскости.

27. Даны точки $M_1(3; -1; 2)$ и $M_2(4; -2; -1)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$.

28. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(3; 5; -5)$ параллельно векторам $\overrightarrow{a_1} = (3; 1; -1)$ и $\overrightarrow{a_2} = (1; -2; 1)$.

29. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(3; -1; 2)$, $M_2(4; -1; -1)$ и $M_3(2; 0; 2)$.

30. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_1(3; -2; -7)$, параллельно плоскости $2x - 3z + 5 = 0$.

31. Составить уравнение плоскости проходящей через точку $M_1(2; -1; 1)$ перпендикулярно двум плоскостям $2x - z + 1 = 0$; $y = 0$.

32. Составить уравнение плоскости проходящей через точки $M_1(1; -1; -2)$ и $M_2(3; 1; 1)$ перпендикулярно плоскости $x - 2y + 3z - 5 = 0$.

33. Определить координаты какого-нибудь нормального вектора каждой из следующих плоскостей.

1) $2x - y - 2z + 5 = 0$;

2) $x + 5y - z = 0$;

3) $3x - 2y - 7 = 0$;

4) $5y - 3z = 0$; 5) $x + 2 = 0$; 6) $y - 3 = 0$.

34. Установить, какие из следующих пар уравнений определяют параллельные плоскости:

1) $2x - 3y + 5z - 7 = 0$, $2x - 3y + 5z = 0$;

2) $4x + 2y - 4z + 5 = 0$, $2x + y + 2z - 1 = 0$;

3) $x - 3z + 2 = 0$, $2x - 6z - 7 = 0$.

35. Установить, какие из следующих пар уравнений определяют перпендикулярные плоскости:

1) $3x - y - 2z - 5 = 0$, $x + 9y - 3z + 2 = 0$;

2) $2x + 3y - z - 3 = 0$, $x - y - z + 5 = 0$;

3) $2x - 5y + z = 0$, $x + 2z - 3 = 0$.

36. Определить двугранные углы, образованные пересечением следующих пар плоскостей:

1) $x - y\sqrt{2} + z - 1 = 0$, $x + y\sqrt{2} - z + 3 = 0$;

2) $3y - z = 0$, $2y + z = 0$;

3) $6x + 3y - 2z = 0$, $x + 2y + 6z - 12 = 0$;

4) $x + 2y + 2z - 3 = 0$, $16x + 12y - 15z - 1 = 0$.

37. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(2; -1; 1)$ перпендикулярно к двум плоскостям $2x - z + 1 = 0$, $y = 0$.

38. Общее уравнение прямой преобразовать к каноническому виду:

1) $\begin{cases} 2x - y + 3z + 1 = 0 \\ 3x + y - z - 2 = 0 \end{cases}$, 2) $\begin{cases} x + 2y - 3z + 2 = 0 \\ 2x - 2y + z - 5 = 0 \end{cases}$.

39. Составить параметрические уравнения следующих прямых:

1) $\begin{cases} 2x + 3y - z - 4 = 0 \\ 3x - 5y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x + 2y - z - 6 = 0 \\ 2x - y + z + 1 = 0 \end{cases}$.

40. Найти направляющий вектор прямой $\begin{cases} x = 2, \\ z = 4. \end{cases}$

41. Найти параметрические уравнения прямой:

1) проходящей через точку $M_0(7; 3; –4)$ и параллельной вектору $\vec{a} = (3; 3; 0)$;

2) проходящей через точки (2; 2; 2) и (6; 2; 1).

42. Составить каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(4; 3; -2)$ параллельно

1) вектору $\vec{a} = (3; –6; 5)$;

2) прямой $\begin{cases} x + 3y + z - 6 = 0, \\ 2x - y - 4z + 1 = 0. \end{cases}$

43. Найти координаты точки пересечения прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-2}{1}$ с плоскостью $3x – y + 2z + 5 = 0$, угол между прямой и плоскостью.

44. Вычислить расстояние от точки до плоскости:

1) $M(–2; –4; 3)$, $2x – y + 2z + 3 = 0$;

2) $P(2; –1; –1)$, $16x – 12y + 15z – 4 = 0$;

3) $Q(1; 2; –3)$, $5x – 3y + z + 4 = 0$;

4) $A(3; –6; 7)$, $4x – 3z – 1 = 0$;

5) $B(9; 2; –2)$, $12y – 5z + 5 = 0$.

45. Вычислить расстояние d от точки $P(–1; 1; –2)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(1; –1; 1)$, $M_2(–2; 1; 3)$, $M_3(4; –5; -2)$.

46. Составить уравнение плоскости проходящей через точки $M_1(3; -1; 2)$ и $M_2(3; 1; 2)$ параллельно прямой $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+2}{4}$.

47. Найти координаты проекции точки $M(2; 2; –2)$ на плоскость $3x – y + z – 13 = 0$.

48. Найти координаты проекции точки $M(–3; 0; 2)$ на прямую $\begin{cases} x = 5 - t, \\ y = 2t, \\ z = 3t. \end{cases}$

49. Доказать параллельность прямых:

1) $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{1}$ и $\begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y-5z-8=0 \end{cases}$;

2) $\begin{cases} x=2t+5 \\ y=-t+2 \\ z=t-7 \end{cases}$ и $\begin{cases} x+3y+z+2=0 \\ x-y-3z-2=0 \end{cases}$.

50. Доказать перпендикулярность прямых:

1) $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{3}$ и $\begin{cases} 3x+y-5z+1=0 \\ 2x+3y-8z+3=0 \end{cases}$;

2) $\begin{cases} x=2t+1 \\ y=3t-2 \\ z=-6t+17 \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x+y+2z+5=0 \\ 2x-2y-z+2=0 \end{cases}$.

51. Даны вершины пирамиды *A*, *B*, *C*, *D*. Найти:

1) длины рёбер *AB*, *AC*, *AD*, *BC*;
2) уравнения прямых *AB*, *AC*, *AD*, *BC*;
3) угол между рёбрами *AB*, *AC*;
4) угол между ребром *AD* и плоскостью *ABC*;
5) уравнение плоскости *ABC*;
6) площадь грани *ABC*;
7) уравнение высоты, опущенной из вершины *D*;
8) расстояние от вершины *D* до плоскости *ABC*;
9) расстояние от вершины *D* до ребра *AC*;
10) расстояние между рёбрами *AD* и *BC*;
11) объём пирамиды *ABCD*.

Вариант	*A*	*B*	*C*	*D*
1	(–3, 4, –7)	(1, 5, –10)	(–5, 2, 0)	(–12, 7, –1)
2	(–1, 2, –3)	(4, –1, 0)	(2, 1, –2)	(4, –2, –4)
3	(–3, –1, 1)	(–12, 2,–2)	(3, –5, 4)	(10, –6, –2)
4	(7, 2, 4)	(7, –1, –2)	(3, 3, 7)	(–5, 4, 2)
5	(2, 1, 4)	(–1, 5, –2)	(–7, –3, 2)	(6, –3, –4)

ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Уравнение окружности радиуса R с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Каноническое уравнение эллипса: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

Каноническое уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ или $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1.$

Каноническое уравнение параболы: $y^2 = 2px$ или $y^2 = -2px$, или $x^2 = 2py$, или $x^2 = -2py$.

Задачи

52. Установить какую линию второго порядка определяет уравнение. Найти все ее характерные величины (центр, вершины, полуоси, параметр, эксцентриситет, фокусы и т.д.). Изобразить эту линию на чертеже;

1) $9x^2 + 4y^2 + 36x - 24y + 36 = 0$;

2) $16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y - 284 = 0$;

3) $4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0$;

4) $16x^2 - 160x + 292 + 9y^2 + 36y = 0$;

5) $9x^2 - 25y^2 + 36x - 150y - 414 = 0$;

6) $9x^2 - 16y^2 - 18x - 64y - 199 = 0$;

7) $4y^2 - 8y - 9 - x^2 - 6x = 0$;

8) $y^2 - x^2 + 4y + 8x - 16 = 0$;

9) $y^2 + 8y + 20 - 4x = 0$;

10) $x^2 - 6x + 2y + 11 = 0$;

11) $x^2 + 6x + 6y + 3 = 0$;

12) $y = -\frac{1}{6}x^2 + 2x - 7$;

13) $y = -5 + \sqrt{-3x - 21}$;

14) $y = 2 - \frac{3}{4}\sqrt{x^2 - 4x + 20}$;

15) $x = -2\sqrt{-5 - 6y - y^2}$;

16) $x = 2 - \sqrt{6 - 2y}$.

53. Составить уравнение геометрического места точек, отношение расстояний которых до точки $F(x; y)$ и до прямой $x = x_0$ равно d:

1) $F(3/2; 0)$, $x_0 = 6$, $d = 1/2$;

2) $F(7; 0)$, $x_0 = 1.4$, $d = \sqrt{5}$;

3) $F(-2; 0)$, $x_0 = -10$, $d = \sqrt{5}/5$;

4) $F(4.5; 0)$, $x_0 = 0.5$, $d = 3$;

5) $F(1; 0)$, $x_0 = 6$, $d = \sqrt{6}/6$;

6) $F(6; 0)$, $x_0 = 1$, $d = \sqrt{6}$.

Построить эту линию.

54. Составить уравнение геометрического места точек, равноотстоящих от точки $F(x; y)$ и от прямой $y = y_0$:

1) $F(-2; 0)$, $y_0 = 2$;

2) $F(2; 4)$, $y_0 = 3$.

Построить эту линию.

55. Составить уравнение геометрического места точек, равноотстоящих от точки $F(x; y)$ и от прямой $x = x_0$:

1) $F(-3; -1)$, $x_0 = -1$;

2) $F(4; 1)$, $x_0 = 0$.

Построить эту линию.

6. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

ФУНКЦИИ И ИХ ГРАФИКИ

1. Найти области определения функций:

1) $f(x) = \operatorname{ctg} x$; 2) $f(x) = \arccos 3x$;

3) $f(x) = \dfrac{x+2}{(x+3)(x-5)}$; 4) $f(x) = \dfrac{1}{\lg x}$;

5) $f(x) = \dfrac{x^2+4}{x^3+1}$; 6) $f(x) = \sin\dfrac{1}{|x|-2}$;

7) $f(x) = \log_3(-x)$; 8) $f(x) = \sqrt[4]{x^2-7x+10}$;

9) $f(x) = x^2 + tg\, x$; 10) $f(x) = \sqrt{x-7} + \sqrt{10-x}$;

11) $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{|x^2-2|}}$; 12) $f(x) = \sqrt[4]{x+2} + \dfrac{1}{\sqrt[6]{1-x}}$;

13) $f(x) = e^{\sqrt{x}}\log_2(2-3x)$; 14) $f(x) = \dfrac{\log_7 x}{\sqrt[7]{x-3}}$;

15) $f(x) = \arcsin(\log_3 x)$.

2. Найти множество значений функций:

1) $f(x) = x^2 - 8x + 20$; 2) $f(x) = e^{-x^2}$; 3) $f(x) = 2\sin x - 7$;

4) $f(x) = \dfrac{2}{x} + 4$; 5) $f(x) = \dfrac{1}{\pi} arctg\, x$; 6) $f(x) = \sqrt{5-x} + 2$;

7) $f(x) = \sin x \cdot \cos x$; 8) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.

3. Какие из следующих функций четные, какие нечетные, а какие – общего вида:

1) $f(x) = x^5 + 3x^3 - x$; 2) $f(x) = x^4 - 5|x|$;

3) $f(x) = e^x - 2e^{-x}$; 4) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$;

5) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^3+1}$; 6) $f(x) = \ln\dfrac{1-x}{1+x}$;

7) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$; 8) $f(x) = \sqrt{x}$;

9) $f(x) = \arcsin x$; 10) $f(x) = \sin x + \cos x$;

11) $f(x) = xe^x$.

4. Определить, является ли данная функция периодической, и найти её наименьший положительный период, если он существует:

1) $f(x) = \sin 4x$; 2) $f(x) = \cos^2 5x$;

3) $f(x) = tg\,(x/3)$; 4) $f(x) = \sin 2x + \cos 3x$; 5) $f(x) = x^2$.

5. Построить графики функций:

1) $y = |x-3|$; 2) $y = x^2 - 6x + 11$; 3) $y = 3\cos(2x+2)$;

4) $y = -2/x + 1$; 5) $y = 2^{x-1} + 3$; 6) $y = \log_3(-x)$;

7) $y = tg\,|x|$; 8) $y = |tg\,x|$; 9) $y = (x+4)/(x+2)$.

6. Найти обратную функцию для данной:

1) $y = x - 1$; 2) $y = 2/(x + 3)$; 3) $y = \sqrt{x}$.

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

Первый замечательный предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Второй замечательный предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$ или $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha} = e$, $e = 2{,}71828\ldots \approx 2{,}7$.

Эквивалентные бесконечно малые при $\alpha(x) \to 0$:

1. $\sin(\alpha(x)) \sim \alpha(x)$;
2. $\operatorname{tg}(\alpha(x)) \sim \alpha(x)$;
3. $\arcsin(\alpha(x)) \sim \alpha(x)$;
4. $\operatorname{arctg}(\alpha(x)) \sim \alpha(x)$;
5. $1 - \cos(\alpha(x)) \sim \alpha(x)^2/2$;
6. $e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$;
7. $a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \cdot \ln a$;
8. $\ln(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x)$;
9. $\log_a(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x) \log_a e$;
10. $(1 + \alpha(x))^k - 1 \sim k\alpha(x)$, $k > 0$;

в частности $\sqrt{1+\alpha(x)}-1 \sim \dfrac{\alpha(x)}{2}$.

Задачи

1. Написать первые четыре члена последовательности $\{x_n\}$, если:

1) $x_n = 2^{n+1}$; 2) $x_n = (-1)^n + 1$; 3) $x_n = \sin(\pi n/2)$;
4) $x_n = n^2 + 2n + 3$; 5) $x_n = (n + 1)/n^2$; 6) $x_n = 5^n/n^2$;
7) $x_n = n!$.

2. Зная несколько первых членов последовательности $\{x_n\}$, написать формулу её общего члена:

1) 1, 1/3, 1/5, 1/7, …; 2) 1, 1/4, 1/9, 1/16, 1/25, …;
3) –1, 2, –3, 4, –5, …; 4) 2, 5, 10, 17, 26, …;
5) 1, 1/2, 1/6, 1/24, 1/120, ….

3. Какие из следующих последовательностей ограничены сверху? Ограничены снизу? Ограничены?

1) 2, 4, 6, 8, …; 2) –1, –4, –9, –16, …;
3) $1/3$, $1/3^2$; $1/3^3$, … ; 4) –2, 4, –8, 16, ….

4. Используя определения предела, доказать, что:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n+2}{n+1} = 3$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+1}{n^2} = 2$.

5. Найти пределы последовательностей:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+5}{n}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4-n^2}{3-n^2}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^4+5n^2-1}{100n^3-3n+2}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n^2-1}{5n^3+4n^2-2n+1}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3-(n-1)^3}{n^2+1}$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+3n}}{n+2}$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n-1}{\sqrt[3]{n^2+n+4}}$; 8) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$;

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{9n^2+2n}}{\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt[3]{8n^3+2}}$; 10) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2}{n+2}-\dfrac{5n^2}{2n+1}\right)$;

11) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n-1}{3^n+1}$.

6. Найти пределы последовательностей:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{(n+1)!-n!}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+1/2+1/4+\ldots+1/2^n}{1+1/5+1/25+\ldots+1/5^n}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}(1+2+3+\ldots+n)$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n+2}-\dfrac{n}{2}$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{(n-1)\cdot n}\right)$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{5n+11}+\dfrac{\cos n}{10n}\right)$; 8) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}\right)$.

7. Найти пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to -1}(4x+3)$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-4x+8)$;

3) $\lim\limits_{x\to 1/2}\sqrt{1-x^2}$; 4) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^2+5}{x^2-1}$.

8. Найти пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x+1}{3x^2+x+4}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-2x+1}{2x^2+x-3}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-2x-x^2}{x^2+4x+1}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x+4}{x^3-x+1}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x-4}{3+x-4x^2}$;

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-7x+1}{3x^2+x+3}$;

7) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-5x-2}{2x^2-x-6}$;

8) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{2x^2+15x+25}{5-4x-x^2}$;

9) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x^2+7x+3}{2x^2+x-1}$;

10) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-9x+9}{x^2-5x+6}$;

11) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{5x-x^2-4}{x^2-2x-8}$;

12) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-2x-8}{2x^2+5x+2}$;

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}$;

14) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{2+x}-3}{x-7}$;

15) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt{x}}{x^2-x}$;

16) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$;

17) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$;

18) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}$;

19) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$;

20) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$;

21) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)}{x}$;

22) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg(2x)}{\sin(5x)}$;

23) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$;

24) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg(2x)}{4x}$;

25) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^2(x)}{\sin(2x)}$;

26) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg(x)-\sin(x)}{x^3}$;

27) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+5}\right)^{x-1}$;

28) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-4}\right)^{2-x}$;

29) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+3}{4x-1}\right)^{2x-3}$;

30) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x-1}\right)^{3-x}$;

31) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-1}{5x+4}\right)^{2x+1}$;

32) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x}}$;

33) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x)}{5x^2}$;

34) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos(2x)}}{|x|}$;

35) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{arctg(x)}$;

36) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(x)-\cos^3(x)}{x^2}$;

37) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{e^{5x}-1}$;

38) $\lim\limits_{x\to\infty} x\ln\left(\dfrac{3x-1}{3x-6}\right)$;

39) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)$;

40) $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$;

41) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\sin(1/x)}{x}\right)$;

42) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(4x)}{2\arcsin^2(2x)}$;

43) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin(2x)}{4x}$;

44) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)}{tg(5x)}$.

9. Найти односторонние пределы функции $f(x)$ в точке x_0:

1) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}, x_0=0$;

2) $f(x)=2^{\frac{1}{x-2}}, x_0=2$;

3) $f(x)=9^{\frac{1}{x-2}}, x_0=5$;

4) $f(x)=9^{\frac{1}{x-2}}, x_0=2$.

НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

1. Исследовать на непрерывность и построить графики функций:

1) $f(x)=\begin{cases} x, x\le 1, \\ 2, x>1; \end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases} -x-3, x<-2, \\ x^2-4, x\ge -2; \end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases} x, \ x\le -\pi, \\ \sin x, \ -\pi < x < \dfrac{\pi}{2}, \\ 1, \ x \ge \dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$ 4) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x+2}, & x<-1, \\ x^2+2, & -1\le x<1, \\ 2x+1, & x\ge 1; \end{cases}$

5) $f(x)=\begin{cases} 1-x, & x\le 0, \\ (x-1)^2, & 0<x<2, \\ x-3, & x\ge 2. \end{cases}$

2. Исследовать на непрерывность функции в точке x_0:

1) $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x+4}, x_0=-4;$ 2) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}, \ x_0=0;$

3) $f(x)=arctg\,\dfrac{2}{x-1}, x_0=1;$ 4) $f(x)=\dfrac{1}{2^{x-3}-1}, x_0=3.$

ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЕ

Производная $y'=\dfrac{dy}{dx}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}.$

Правила дифференцирования:

1) $(u\pm v)'=u'\pm v';$

2) $(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$, в частности $(c\cdot u)'=c\cdot u';$

3) $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$, в частности $\left(\dfrac{c}{v}\right)'=-\dfrac{cv'}{v^2};$

4) $y'_x=y'_u\cdot u'_x$, если $y=f(x)$, $u=\varphi(x)$;

5) $y'_x=\dfrac{1}{x'_y}$, если $y=f(x)$, $x=\varphi(y)$.

Формулы дифференцирования

1) $(c)'=0$;

2) $(u^{\alpha})'=\alpha\cdot u^{\alpha-1}\cdot u'$, в частности $\left(\sqrt{u}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{u}}u'$;

3) $(\alpha^{u})'=\alpha^{u}\cdot\ln\alpha\cdot u'$, в частности $(e^{u})'=e^{u}\cdot u'$

4) $\left(\log_a u\right)'=\dfrac{1}{u\cdot\ln a}u'$, *в частности* $\left(\ln u\right)'=\dfrac{1}{u}u'$;

5) $(\sin u)'=\cos u\cdot u'$;

6) $(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$;

7) $\left(tg\,u\right)'=\dfrac{1}{\cos^2 u}u'$;

8) $\left(ctg\,u\right)'=-\dfrac{1}{\sin^2 u}u'$;

9) $\left(\arcsin u\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$;

10) $\left(\arccos u\right)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$;

11) $\left(arctg\,u\right)'=\dfrac{1}{1+u^2}u'$;

12) $\left(arcctg\,u\right)'=-\dfrac{1}{1+u^2}u'$.

Задачи

1. Найти производные указанных функций:

1) $y=x^3-x^2/5+2x-4$;

2) $y=\sqrt{x}-\dfrac{3}{x}+\dfrac{9}{x^2}$;

3) $y=x\sqrt[3]{x}+3\sin 1$;

4) $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-\dfrac{2}{x^5}+\sqrt{7}x$;

5) $y=5\cdot 2^x+\dfrac{3}{4}ctg\,x$; 6) $y=tg\,x-ctg\,x$;

7) $y=10arctg\,x+7e^x$; 8) $y=x^3\log_2 x$;

9) $y=(x^2+x-1)\cdot(x^2-x-1)$; 10) $f(t)=\dfrac{1+e^t}{1-e^t}$;

11) $z=(\sqrt{y}+1)\cdot\arcsin y$.

2. Найти производные указанных порядков:

1) $y=tg3x,\ y''=?$; 2) $y=-x\cos x,\ y''=?$; 3) $y=\ln^2 x,\ y''=?$;

4) $y=x\ln x,\ y'''=?$; 5) $y=e^{2x},\ y^{(V)}=?$.

3. Найти производную и дифференциал заданных функций:

1) $y=\left(3x^4-\dfrac{5}{\sqrt[4]{x}}+2\right)^5$; 2) $y=\dfrac{4x^2-3x+5}{x}$;

3) $y=\sqrt[3]{x+5}$; 4) $y=\arccos 2x+\sqrt{1-4x^2}$;

5) $y=\left(x^2+tgx+1\right)^{10}$; 6) $y=\ln\dfrac{x^2}{1+5x}$;

7) $y=2^{tg\,x}+x\cdot\sin 2x$; 8) $y=\dfrac{6x}{\sqrt[3]{2+2x}}-6\sqrt[3]{2+2x}$;

9) $y=\sqrt[3]{(4+2x^2)^5}$; 10) $y=\sqrt{x}-arctg\sqrt{x}$;

11) $y=e^{3x}-2x\cdot tg\,3x$; 12) $y=\sin(\cos x)$;

13) $y=arctg\left(1/x\right)$; 14) $y=x^2\sin 3x$;

15) $y=\cos(2x)\cdot\ln(x^2+1)$; 16) $y=\dfrac{1+tgx}{1-tgx}$;

17) $y=\sin^2\left(3x\right)$; 18) $y=\cos^2(x-2)+x^{\frac{7}{3}}\ln x$;

19) $y=10^x tg(2x)+3$; 20) $y=e^{2x}\sin x^2$;

21) $y=arctg(2x+3)e^{3x}$; 22) $y=e^{-x^2}+e^{2x}$;

23) $y=(x^2-1)\cdot\ln x+3$; 24) $y=x^2\cdot\ln x+\sin 3$;

25) $y=(x+5)\lg x$; 26) $y=x^5 ctg(7x-2)$;

27) $y=\arcsin(2x-x^3)$; 28) $y=(x^2-7\sqrt{x}+1/\sqrt{x})\sin x+10$;

29) $y=3^{x-1}\sin x$; 30) $y=\arccos(x^2+1)$;

31) $y=\sqrt{x+\cos x}$; 32) $y=\sin x^2+\sin^3 2x$;

33) $y=\ln(1+tg\,x)$; 34) $y=2^{\cos^3(x)}$;

35) $y=\arcsin\sqrt{x+5}$; 36) $y=\sqrt[5]{2x-x\sin x^2}$;

37) $y=\ln\sqrt[5]{\dfrac{1-5x}{1+5x}}$; 38) $y=\ln\sqrt[3]{\dfrac{\sin^6 x}{x^2}}$;

39) $y=\dfrac{e^{-x-1}}{x+2}$; 40) $y=e^{-x}\cos\sqrt{2x}$;

41) $y=x\cdot\sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}}$; 42) $\begin{cases} x=tg(t^3) \\ y=1/\sin^2 t \end{cases}$;

43) $\begin{cases} x=\arcsin(t^2+3) \\ y=\arccos 2t \end{cases}$; 44) $\begin{cases} x=0.5\sin t \\ y=\cos^3(0.5t^2) \end{cases}$.

4. Найти предел, используя правило Лопиталя:

1) $\lim\limits_{x\to 0} x\,ctg\,2x$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x+5)}{\sqrt[4]{x+3}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin(4x)}{5-5e^{-3x}}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}}{\ln(1+x^2)}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x+7)}{\sqrt[3]{x-3}}$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(2x+1)}{\sqrt[3]{2x-3}}$; 8) $\lim\limits_{x\to+0}\sqrt[3]{x}\ln x$;

9) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{x-1}\right)$; 10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg(4x)}{2-2e^{-2x}}$;

11) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-4x^2+4x}{x^3-12x+16}$; 12) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin(x)}-\dfrac{1}{x}\right)$;

13) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+x+1\right)^{1/x}$; 14) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\sin(x)\right)^{tg(x)}$;

15) $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{2x}+x\right)^{1/x}$; 16) $\lim\limits_{x\to 0}x^{3/(1+\ln(x))}$;

17) $\lim\limits_{x\to 0}(ctg(x))^{1/\ln(x)}$.

5. Средствами дифференциального исчисления найти экстремумы и точки перегиба функции:

1) $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 16$;

2) $y = x^3 - 11x^2 + 39x - 45$;

3) $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 4$;

4) $y = x^3 + x^2 - 5x + 3$;

5) $y = 1/(1 + x^2)$;

6) $y = x - \ln(x + 1)$; 7) $y = e^{-x^2}$.

6. Найти уравнение касательной и нормали в точке перегиба функции $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 5$.

7. Найти угол между касательными к графику функции $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 1$, проведенными в точках с абсциссами $x_0 = 0$ и $x_1 = 1$.

8. Найти асимптоты функции:

1) $y=\dfrac{x^4}{x^3-1}$; 2) $y=\dfrac{(x-3)^2}{4(x-1)}$; 3) $y=\dfrac{2-4x^2}{1-4x^2}$;

4) $y=\dfrac{x^2+16}{4x}$; 5) $y=\dfrac{3-x^2}{x+2}$; 6) $y=\dfrac{x^3-1}{4x^2}$.

9. Вычислить приближенное значение:

1) $\sin 31^\circ$; 2) $\sqrt[4]{15}$; 3) $\sqrt[4]{256,96}$; 4) $\sqrt[5]{32,85}$.

10. Исследовать функцию средствами дифференциального исчисления и построить её схематический график:

1) $f(x)=\dfrac{x^2}{4(x+2)}$;

2) $f(x)=\dfrac{2x^2}{4x^2-1}$;

3) $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2}$;

4) $f(x)=\dfrac{(x-1)^3}{2x^2}$;

5) $f(x)=(x+1)^2e^{\frac{1}{x+1}}$;

6) $f(x)=\dfrac{x}{2}+arctg(x)$.

11. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=x^4-2x^2+3$ на отрезке $[-2;3]$.

12. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=2x^2-20x+3$ на отрезке $[-1;9]$.

13. Представить функцию $y=f(x)$ в виде многочлена пятой степени относительно двучлена $x-x_0$:

1) $y=\sqrt[3]{x}$, $x_0 = 1$;

2) $y=\ln(5x+3)$, $x_0 = -2/5$;

3) $y=\sin\left(\pi x/4\right)$, $x_0 = 2$;

4) $y=\dfrac{1}{(3-x)^2}$, $x_0 = 1$.

7. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ И СВОЙСТВА

Функция $F(x)$ называется **первообразной** функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$, если для любого $x \in (a;b)$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется семейство первообразных $F(x) + C$, где C – произвольное число, и обозначается: $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Свойства неопределенного интеграла

1) $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx, \left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$;

2) $\int dF(x) = F(x) + C$;

3) $\int af(x)dx = a\int f(x)dx,\ a = const \neq 0$;

4) $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$;

5) Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то и $\int f(u)du = F(u) + C,\ u = \varphi(x)$.

Таблица неопределенных интегралов:

1) $\int 0dx = C$;

2) $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1 \left(\int dx = x + C\right)$;

3) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$;

4) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$;

5) $\int e^x dx = e^x + C$;

6) $\int \sin x dx = -\cos x + C$;

7) $\int \cos x dx = \sin x + C$;

8) $\int tg\, x dx = -\ln|\cos x| + C$;

9) $\int ctg\, x dx = \ln|\sin x| + C$;

10) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tg\, x + C$;

11) $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctg\, x + C$;

12) $\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left| tg\, \frac{x}{2} \right| + C$;

13) $\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln\left| tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C$;

14) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$;

15) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$;

16) $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$;

17) $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$;

18) $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$;

19) $\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln\left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$.

Формула интегрирования по частям: $\int u dv = u \cdot v - \int v du$.

Формула Ньютона-Лейбница: $\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

Площадь плоской фигуры, ограниченной кривыми $f_1(x)$ и $f_2(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$ при условии $f_1(x) \le f_2(x)$ можно найти по формуле: $S = \int\limits_a^b f_2(x)dx - \int\limits_a^b f_1(x)dx = \int\limits_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$.

Площадь плоской фигуры в полярной системе координат, ограниченной непрерывной линией $r = r(\varphi)$ и двумя лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$:

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi.$$

Длина дуги плоской кривой AB, описываемой уравнением $y = f(x)$, где $a \le x \le b$:

$$l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx.$$

Длина дуги плоской кривой AB, заданной в параметрической форме

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \alpha \le t \le \beta: \ l = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\,dt.$$

Длина дуги плоской кривой AB, заданной в полярной системе координат:

$$r = r(\varphi),\ \alpha \le \varphi \le \beta: \ l = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{\left(r(\varphi)\right)^2 + \left(r'(\varphi)\right)^2}\,d\varphi.$$

Объем тела вращения вокруг оси OX криволинейной трапеции ограниченной непрерывной линией $y = f(x)$, $f(x) \ge 0$, где $a \le x \le b$:

$$V_x = \pi\int\limits_a^b y^2(x)dx.$$

Объем тела вращения вокруг оси OY криволинейной трапеции ограниченной непрерывной линией $x = \varphi(y)$, $\varphi(y) \geq 0$, где $c \leq y \leq d$:

$$V_y = \pi \int_c^d x^2(y)dy.$$

Площадь поверхности вращения вокруг оси OX криволинейной трапеции ограниченной непрерывной линией $y = f(x)$, $f(x) \geq 0$, где $a \leq x \leq b$:

$$S_x = 2\pi \int_a^b y(x)\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}\,dx.$$

Задачи

1. Найти неопределённые интегралы, результаты проверить дифференцированием:

- с использовавнием свойств и таблицы неопределенных интегралов:

1) $\int (x^2 + x\sqrt[3]{x} - \cos x)dx$;
2) $\int \left(3x^2 + \sqrt[3]{x} - \dfrac{1}{1+x^2}\right)dx$;

3) $\int \left(ctg\, x + x^3 + 3\sqrt{x}\right)dx$;
4) $\int (x^{-2} - 5x^{-1} - 3\sin x)dx$;

5) $\int \dfrac{x^2 + x\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}}dx$;
6) $\int (2e^x - 2^{-x})dx$;

7) $\int (4^x + 5^x)dx$;
8) $\int \left(\dfrac{1}{\cos^2 x} + \sqrt{x}\right)dx$;

9) $\int \left(\dfrac{1}{x} + 2^x + x^2\right)dx$;
10) $\int \left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}\right)dx$;

11) $\int \left(\dfrac{1}{1+x^2} + e^{x+1}\right)dx$;
12) $\int \left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} + x^{-1}\right)dx$.

• с использовавнием приема внесения функции под знак дифференциала или замены переменной:

13) $\int((x-1)^4+3\sin(2x-1))dx$; 14) $\int\left(\frac{1}{\sin^2 2x}-\frac{1}{4x+3}\right)dx$;

15) $\int\left(\frac{1}{3x-1}+2^{2x+1}+(x-1)^2\right)dx$; 16) $\int\left(\frac{1}{4+4x^2}+2^{3x}\right)dx$;

17) $\int\left(\frac{1}{7x+4}+\frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}\right)dx$; 18) $\int(tg10x+10^{2x+10})dx$;

19) $\int xe^{1-2x^2}dx$; 20) $\int\frac{dx}{x\ln x}$;

21) $\int\frac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{(x+3)^3}}dx$ 22) $\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2-4}}$;

23) $\int xe^{x^2}dx$; 24) $\int x^3\sqrt{x^4-5}dx$;

25) $\int e^{\sin x}\cos xdx$; 26) $\int x^2\cos x^3dx$

27) $\int\frac{\cos x}{\sin^3 x}dx$ 28) $\int\frac{x^2}{9+x^6}dx$;

29) $\int\frac{\ln^2 x}{x}dx$; 30) $\int\frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}}dx$.

• с использовавнием метода интегрирования по частам:

31) $\int xe^{1-2x}dx$; 32) $\int x\sin 2xdx$;

33) $\int arctg\, xdx$; 34) $\int x\arccos xdx$;

35) $\int xarctg\, 2xdx$; 36) $\int x^2\sin(2x)dx$;

37) $\int x\ln(x^2+1)dx$; 38) $\int x\arccos xdx$;

39) $\int x\ln(x-1)dx$; 40) $\int x^2arctg\, xdx$.

Найти интегралы от дробно-рациональных функций:

41) $\int \frac{xdx}{x^2+2x+1}$;

42) $\int \frac{5x+2}{x^3+x}dx$;

43) $\int \frac{x^3dx}{x^4+2x^3+x^2}$;

44) $\int \frac{x+1}{x^2-3x+2}dx$;

45) $\int \frac{x^3-12x-7}{x^3-x^2}dx$;

46) $\int \frac{x^3-2}{x^2-5x+6}dx$;

47) $\int \frac{x^3-12}{x^2+4x-5}dx$;

48) $\int \frac{x^3+6}{x^2+5x-6}dx$.

Найти интегралы от тригонометрических функций:

49) $\int \frac{1}{3\cos x+4\sin x}dx$;

50) $\int \frac{1}{2\sin x+\cos x+2}dx$;

51) $\int \frac{1}{4\cos x+3\sin x+5}dx$;

52) $\int \frac{1}{1-5\sin^2 x}dx$;

53) $\int \frac{\sin 2x}{1+4\cos^2 x}dx$;

54) $\int \frac{1}{2\sin x+\sin 2x}dx$;

55) $\int \frac{(\sin x+\sin^3 x)}{\cos 2x}dx$;

56) $\int \frac{(\cos^3 x+\cos^5 x)}{\sin^2 x+\sin^4 x}dx$;

57) $\int \sin^2(x/4)\cos^2(x/4)dx$;

58) $\int \sin(3x)\sin x dx$;

59) $\int \frac{\cos^5 x}{\sin x}dx$;

60) $\int \sin^3 x\cos^2 x dx$;

61) $\int \sin^4 x dx$;

62) $\int \cos^5 x dx$.

2. Вычислить определённые интегралы:

1) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^3 2x\,dx$;

2) $\int\limits_0^1 \frac{x+1}{x^2-4}dx$;

3) $\int\limits_0^{\pi} x^2\cos 2x\,dx$;

4) $\int\limits_0^2 \frac{x}{(x+1)^3}dx$;

5) $\int\limits_0^1 x\ln(x^2+1)dx$;

6) $\int\limits_1^2 (e^x+3)e^x dx$;

7) $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} x\sin 2x dx$; 8) $\int\limits_{2}^{5} \frac{dx}{x\ln x}$; 9) $\int\limits_{1/2}^{1} x arctg(2x) dx$;

10) $\int\limits_{1}^{3} \frac{x}{x^4+1} dx$; 11) $\int\limits_{1}^{2} 4xe^{-2x} dx$.

3. Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

1) $x{\cdot}y = 4$, $y = x$, $x = 4$; 2) $y = 3x^2 - 2x + 7$, $y = x + 13$;

3) $3y = x^2 - 6x$, $y = x$; 4) $x \cdot y = 4$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$;

5) $y = -x^2 + 3x + 7$, $y = 2x + 1$; 6) $y = x^2 + 4x$, $y = x + 4$;

7) $y^2 = 4 + x$, $x + 3y = 0$; 8) $y = x^2$, $4y = x^2$,; $x = \pm 2$;

9) $y = x^2 - 6x + 5$, $y = 2x - 7$; 10) $y = -x^2 + 3x + 7$, $y = 2x + 1$;

11) $y = 3x^2 - 2x + 7$, $y = x + 13$.

4. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной в параметрическом виде: $\begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = \sin^3 t. \end{cases}$

5. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной в полярных координатах уравнением $\rho = 4\sqrt{\cos 2\varphi}$.

6. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями $y = xe^x$; $y = 0$; $x = 1$.

7. Найти длину кривой $y = \ln\sin x$ для $x \in [\pi/4; \pi/2]$.

8. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями

1) $\rho = 8\cos 3\varphi$, $\rho = 3$, $(\rho \geq 3)$; 2) $\rho = 2\cos 4\varphi$, $\rho = 1$, $(\rho \geq 1)$

9. Вычислить длину дуги кривой:

1) $\rho = 2(1+\cos\phi)$; 2) $y^2 = x^3$, $0 \leq x \leq 4/3$.

10. Вычислить площадь поверхности вращения дуги вокруг оси *OX*

1) $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$; 2) $y^2 = 2x$, $0 \leq x \leq 1{,}5$.

11. Найти объем тела вращения дуги вокруг оси OX

1) $y = 3 - x^2,\ y = x^2 + 1;$ 2) $y = (2 - x)\sqrt{x},\ y = 0;$

3) $y = 2^x,\ y = x + 1;$ 4) $(y - 1)^2 = x,\ x = 1.$

12. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость:

1) $\int\limits_0^{\infty} \frac{x}{(x+1)^3} dx;$ 2) $\int\limits_1^{5} \frac{dx}{x \ln x};$ 3) $\int\limits_{-1}^{\infty} \frac{x}{x^2 + x + 1} dx;$

4) $\int\limits_1^{\infty} x \sin x dx;$ 5) $\int\limits_0^{\sqrt{2/\pi}} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \cdot \frac{dx}{x^3};$ 6) $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{x^2 + x^4};$

7) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{\left(x^2 + 5\right)^3}};$ 8) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^3} dx;$ 9) $\int\limits_1^{e} \frac{dx}{x \cdot \ln^3 x};$

10) $\int\limits_0^{2} \frac{x^3 dx}{\sqrt{4 - x^2}}.$

8. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

Частные производные функции двух переменных $z = f(x, y)$:

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x},$$

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Частные производные высших порядков функции двух переменных $z = f(x, y)$:

$$z''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \ z''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

$$z''_{xy} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \ z''_{yx} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

Полный дифференциал: $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = d_x z + d_y z$, где $d_x z$, $d_y z$ – частные дифференциалы.

Дифференциалы высших порядков:

$$d^2 z = d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 z =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$$

$$d^n z = d(d^{n-1}z) = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z.$$

Производная сложной функции $z = f(x;\, y)$, в случае если $x = x(t)$, $y = y(t)$:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}.$$

Производная функции, заданной неявно $F(x;\, y;\, z) = 0$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z},\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z},\ F'_z \neq 0.$$

Градиент функции $w = f(x;\, y;\, z)$ в точке $M(x_0;\, y_0;\, z_0)$:

$$grad\ f(x;y;z)\big|_{M(x_0;y_0;z_0)} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M(x_0;y_0;z_0)}\vec{i} +$$

$$+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{M(x_0;y_0;z_0)}\vec{j} + \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{M(x_0;y_0;z_0)}\vec{k}$$

Производная по направлению вектора $\vec{a}$ от функции $w = f(x;\, y;\, z)$ в точке $M(x_0;\, y_0;\, z_0)$:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}\right|_{M(x_0;y_0;z_0)} = \frac{grad\ f(x;y;z)\big|_{M(x_0;y_0;z_0)}\cdot\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|}.$$

Уравнение касательной плоскости к поверхности $F(x;\, y;\, z) = 0$ *в* точке $M(x_0;\, y_0;\, z_0)$:

$$F'_x(x_0;y_0;z_0)\cdot(x-x_0) + F'_y(x_0;y_0;z_0)\cdot(y-y_0) + F'_z(x_0;y_0;z_0)\cdot(z-z_0) = 0.$$

Уравнение нормали к поверхности $F(x;\, y;\, z) = 0$ в точке $M(x_0;\, y_0;\, z_0)$:

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0;y_0;z_0)} = \frac{y-y_0}{F'_y(x_0;y_0;z_0)} = \frac{z-z_0}{F'_z(x_0;y_0;z_0)}.$$

Необходимое условие экстремума. Если в точке $M(x_0; y_0)$ дифференцируемая функция $z = f(x; y)$ имеет экстремум, то её частные производные в этой точке равны нулю: $f'_x(x_0; y_0) = 0$, $f'_y(x_0; y_0) = 0$. Точка $M(x_0; y_0)$ называется стационарной. Стационарные точки и точки, в которых хотя бы одна частная производная не существует, называются критическими.

Достаточное условие экстремума. Пусть в стационарной точке $M(x_0; y_0)$ и некоторой её окрестности функция $f(x; y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно, и

$$A = f''_{xx}(x_0; y_0), \quad B = f''_{xy}(x_0; y_0), \quad C = f''_{yy}(x_0; y_0), \quad \Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2.$$

Тогда: 1) если $\Delta > 0$, то функция $f(x; y)$ в точке $M(x_0; y_0)$ имеет экстремум: максимум, если $A < 0$; минимум, если $A > 0$; 2) если $\Delta < 0$, то функция $f(x; y)$ в точке $M(x_0; y_0)$ экстремума не имеет. В случае, если $A = 0$ требуются дополнительные исследования.

Задачи

1. Найти и изобразить области определения следующих функций:

1) $z = \ln(x^2 - y^2 - R^2),\ R > 0$;
2) $z = x + \arccos(y)$;
3) $z = \sqrt{y \cdot \sin x}$;
4) $z = \sqrt{1 + \sqrt{-(x+y)^2}}$;
5) $z = \dfrac{1}{\sqrt{y - \sqrt{x}}}$;
6) $z = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{4 - y^2}$;
7) $u(x; y; z) = \arccos(x/2) + \arcsin(y/2) + arctg(z)$;
8) $u(x; y; z) = \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2}}$;
9) $u(x; y; z) = \sqrt{z - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}}$;

10) $z=\arccos\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$;

11) $u(x;y;z)=\sqrt{z-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}}$;

12) $z=\arcsin(x/y)$;

13) $z=\dfrac{\ln(x^2y)}{\sqrt{y-x}}$;

14) $z=-\sqrt{2-x^2-2y^2}$.

2.Найти частные производные, частные дифференциалы данных функций по каждой из независимых переменных (x, y, z, t, ...) и полный дифференциал:

1) $z = (5x^2y - y^3 + 7)^3$;

2) $v = arctg(u/t)$;

3) $z(x, y) = \cos(x^2 + y^2) - \ln(xy)$;

4) $z(x, y) = e^{xy} + y2^{\cos(x)}$;

5) $z(x, y) = arctg(x^2 + y^2)$;

6) $z(x, y) = (2\cdot x - \cos(x))^{\sin(y)}$.

3.Найти частные производные второго порядка: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$:

1) $z(x, y) = \cos(x^2 + y^2) - \ln(xy)$;

2) $z(x, y) = arctg(x^2 + y^2)$.

4.Найти производную функции $u=xz^2-\sqrt{x^3y}$ в точке $M_0(2; 2; 4)$ по направлению внешней нормали $\vec{n}$ к поверхности S, заданной уравнением $x^2 - y^2 - 3z + 12 = 0$.

5.Найти угол между градиентами функций $u=f(x,y,z)$ и $v=g(x,y,z)$ в точке $M_0\left(x;y;z\right)$:

1) $u=\dfrac{xz^2}{y}$, $v=6\sqrt{6}x^3-6\sqrt{6}y^3+2z^3$, $M_0\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}};\dfrac{1}{\sqrt{6}};1\right)$;

2) $u=\dfrac{x^3y^2}{z}$, $v=\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{y}-\dfrac{1}{\sqrt{6}z}$, $M_0\left(1;2;\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$;

3) $u=\dfrac{\sqrt{6}}{2x}-\dfrac{\sqrt{6}}{2y}+\dfrac{2}{3z}$, $v=\dfrac{yz^2}{x}$, $M_0\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$;

4) $u=\dfrac{1}{x^2yz}$, $v=-\dfrac{4\sqrt{2}}{x}+\dfrac{\sqrt{2}}{9y}+\dfrac{1}{\sqrt{3}z}$, $M_0\left(2;\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

6.Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $F(x,y,z)=0$ в заданной на ней точке $M_0(x;y;z)$:

1) $(8-z^2)x^2-4y^2=0$, $M_0(2;\ 2;\ 2)$;

2) $x+y+\ln(z^2+y^2)=0$, $M_0(-1;\ 1;\ 0)$;

3) $x^2z+y^2z-4=0$, $M_0(-2;\ 0;\ 1)$.

7. Дана функция $z(x;y)$, точка $A(x_0;y_0)$ и вектор $\vec{a}=(a_1;a_2)$. Найти: 1) $grad(z)$ в точке A; 2) производную в точке A по направлению вектора $\vec{a}$:

1) $z=2x^2+y$, $A(1;\ 2)$, $\vec{a}=(3;\ 4)$;

2) $z=2x^2+xy$, $A(-1;\ 2)$, $\vec{a}=(3;\ 4)$;

3) $z=arctg(x+y^2)$, $A(-1;\ 1)$, $\vec{a}=(1;\ -1)$;

4) $z=5x^2y+3xy^2$, $A(1;\ 1)$, $\vec{a}=(6;\ -8)$;

5) $z=\ln(3x^2+2xy^2)$, $A(1;\ 2)$, $\vec{a}=(3;\ -4)$;

6) $z=2x^2/y+3x/y^2$, $A(1;\ 2)$, $\vec{a}=(3;\ 4)$.

8. Найти экстремумы функции во всей их области определения:

1) $z=x^2+2xy-3y^2+1$; 2) $z=x^2+x-y+3y^2$;

3) $z=x^2-xy+y^2$; 4) $z=2x^2-xy+4y^2$;

5) $z=x^2+2xy+3y^2$; 6) $z=y^2+2xy-x^2-4y$.

9. Исследовать заданную функцию $z=z(x,y)$ на условный экстремум при условии $\varphi(x,y)=0$.

1) $z=4-2y^2+x^2$, $y+x^2-1=0$; 2) $z=1-xy^2$, $1+2y-x/3=0$;

3) $z=4-2x^2-y^2$, $y-4x^2+4=0$; 4) $z=x^2y$, $x^2+y-1=0$;

5) $z=x^2+xy-2$, $y-4x^2+4=0$; 6) $z=x^2+2xy-10$, $y-x^2+4=0$.

10. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = f(x, y)$ в замкнутой области D, заданной системой неравенств. Сделать чертёж:

1) $z = x^2 + 2y^2 + 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 3;$

2) $z = 3 - 2x^2 - xy - y^2,\ x \leq 1,\ y \geq 0,\ y \leq x;$

3) $z = x^2 + 3y^2 + x - y,\ x \geq 1,\ y \geq -1,\ x + y \leq 1;$

4) $z = x^2 + 2xy - y^2 + 4x,\ x \leq 0,\ y \leq 0,\ x + y + 2 \geq 0;$

5) $z = x^2 + xy,\ -1 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 3.$

11. Вычислить приближенное значение:

1) $\sqrt[3]{(3{,}98)^2 + (3{,}03)^2 + 2}$; 2) $1{,}08^{3{,}97}$; 3) $1{,}94^2 e^{0{,}12}$;

4) $2^{2{,}95} \cdot 10^{0{,}09}$; 5) $3{,}02^{2{,}98}$; 6) $\sin 29°46'$.

12. Изменить порядок интегрирования:

1) $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{-\sqrt{2+y}}^{0} f(x, y)dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{-y}}^{0} f(x, y)dx;$

2) $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{y}} f\left(x, y\right)dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{2-y}} f\left(x, y\right)dx;$

3) $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt[3]{y}} f\left(x, y\right)dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{0}^{2-y} f(x, y)dx;$

4) $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-y}^{0} f\left(x, y\right)dx + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f(x, y)dx;$

5) $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{-(2+y)}^{0} f\left(x, y\right)dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{\sqrt[3]{y}}^{0} f(x, y)dx;$

6) $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{x^2} f\left(x, y\right)dy + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y)dy.$

13. Вычислить площадь фигуры, ограниченной данными линиями: $x^2+y^2-2x=0,\ x^2+y^2-8x=0,\ y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}, x=0.$

14. Найти объем тела, ограниченного данными поверхностями с помощью тройного интеграла:

$$x^2+y^2=2,\ x=\sqrt{y},\ x=0,\ z=0,\ z=15y.$$

15. Найти объем тела, ограниченного данными поверхностями, переходя в сферические или цилиндрические координаты:

$$z=\sqrt{x^2+y^2}\ ;\ z^2=4x.$$

16. Вычислить площадь фигуры, ограниченной данными линиями: $x^2+y^2-4y=0,\ x^2+y^2-6y=0,\ y=\sqrt{3}x,\ x=0.$

17. Найти объем тела, ограниченного данными поверхностями с помощью тройного интеграла: $x+y=8,\ y=\sqrt{4x},\ z=3y,\ z=0.$

9. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

Дифференциальное уравнение **1-го порядка** имеет вид $F(x, y, y') = 0$ или $y' = f(x, y)$.

Условие, что при $x = x_0$ функция y должна равняться заданному числу y_0, называется **начальным условием**. Обозначение $y\big|_{x=x_0} = y_0$.

Общим решением дифференциального уравнения 1-го порядка называется функция $y = \varphi(x, c)$, зависящая от одного произвольного постоянного c. Если общее решение задано неявно $\Phi(x, y, c) = 0$, то это равенство называется **общим интегралом** дифференциального уравнения.

Частным решением дифференциального уравнения 1-го порядка называется любая функция $y = \varphi(x, c_0)$, которая получается из общего решения $y = \varphi(x, c)$, если постоянному c придать определенное значение $c = c_0$. Соответственно $\Phi(x, y, c_0) = 0$, называется **частным интегралом** дифференциального уравнения.

Задачей Коши называется решение дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ при заданном начальном условии $y(x_0) = y_0$.

Дифференциальное уравнение 1-го порядка

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

называется уравнением **с разделяющимися переменными**, если функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ разлагаются на множители, зависящие каждый только от одной переменной:

$$f_1(x) \cdot f_2(y)dx + \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(y)dy = 0.$$

Общий интеграл имеет вид: $\int \frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}dx + \int \frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}dy = 0$.

Дифференциальное уравнение 1-го порядка $y' = f(x, y)$ называется **однородным** если $f(x, y)$ можно представить как функцию только одного отношения переменных $f(x, y) = \varphi(x/y)$, т. е. уравнение вида $y' = \varphi(x/y)$. Однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными посредством замены $y = ux$, тогда $y' = u'x + u$, где $u' = \frac{du}{dx}$.

Линейным уравнением 1-го порядка называется уравнение, линейное относительно неизвестной функции и её производной. Оно имеет вид:

$$y' + P(x) \cdot y = Q(x),$$

где $P(x)$, $Q(x)$ – заданные непрерывные функции от x или константы (содержит y и y' в первой степени).

Решение линейного уравнения ищем в виде произведения двух функций, зависящих от x: $y = uv$, $u = u(x)$, $v = v(x)$, тогда $y' = u'v + uv'$.

Подставляем в исходное уравнение

$$u'v + uv' + Puv = Q,$$

$$u'v + u(v' + Pv) = Q$$

Решение уравнения разбивается на решение двух уравнений:

$$v' + Pv = 0 \qquad и \qquad u'v = Q$$

Линейным однородным уравнением 2-го порядка **с постоянными коэффициентами** называется уравнение вида:

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = 0,$$

где p_1, p_2 константы, функция и ее производные в первой степени.

Общее решение находится с помощью **характеристического уравнения**:

$$\lambda^2 + p_1 \lambda + p_2 = 0,$$

которое получается из исходного дифференциального уравнения заменой

$$y = 1,\ y^{(n)} = \lambda^n.$$

Находим корни характеристического уравнения: λ_1, λ_2.

Тогда общее решение линейного однородного уравнения получаем в виде:

1. если $\lambda_1 \neq \lambda_2$ – различные, действительные, то
$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x};$$
2. если $\lambda_1 = \lambda_2$ – действительные, то
$$y = e^{\lambda_1 x}\left(C_1 + C_2 x\right);$$
3. если $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ – комплексно-сопряженные, то
$$y = C_1 e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x).$$

Линейным неоднородным уравнением 2-го порядка **с постоянными коэффициентами** называется уравнение первой степени относительно функции и ее производной:

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = q(x).$$

Отличие от линейного однородного уравнения – в правой части уравнения $q(x)$ – известная функция от переменной x.

Общее решение линейного неоднородного уравнения имеет вид: $y = y_{oo} + y_{чн}$, где $y_{чн}$ – какое-либо частное решение неоднородного уравнения, y_{oo} – общее решение соответствующего однородного уравнения.

Для специальных видов функции $q(x)$ частное решение $y_{чн}$ можно найти **методом неопределенных коэффициентов**.

По виду правой части $q(x)$:

1) $q(x) = e^{mx}P(x)$, где $P(x)$ многочлен;
2) $q(x) = e^{\alpha x}(A\cdot\cos\beta x + B\cdot\sin\beta x)$;
3) $q(x)$ – сумма указанных функций.

В этих случаях $y_{чн}$ функция подобная $q(x)$, т. е. отличается от $q(x)$ только числовыми коэффициентами. Но если в первом случае m

и во втором случае $\alpha + \beta i$ – корни характеристического уравнения кратности k, то $y_{чн}$ отличается от $q(x)$ множителем x^k. Тогда

1) вид $y_{чн}$ – определяем по правой части уравнения;
2) подставляем $y_{чн}$ в исходное неоднородное уравнение;
3) сравниваем коэффициенты у подобных членов из обеих частей полученного равенства.

Задачи

1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

1) $(\sqrt{xy} + \sqrt{x})y' - y = 0$;
2) $y' = 3^{x-y}$;
3) $y' = \dfrac{y+1}{x+1}$;
4) $ds + s \cdot tgt \cdot dt = 0$;
5) $xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}dx$;
6) $(x^2 - 2xy)y' = xy - y^2$;
7) $x^2 y' = y(x+y)$;
8) $(2x - y)dx + (x+y)dy = 0$;
9) $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$;
10) $(2\sqrt{xy} - xdy) + ydx = 0$;
11) $x^2 y' + y^2 - 2xy = 0$;
12) $(4x - y)dx + (x+y)dy = 0$;
13) $y' + 2y = 3e^x$;
14) $(1+x^2)y' + 2xy = 3e^{x^2}$;
15) $y' + y\cos x = \sin 2x$;
16) $x\dfrac{dy}{dx} + y = 4x^3$.

2. Найти решение задачи Коши:

1) $x^2 y' = 2xy + 3,\ y(1) = -1$;
2) $xy' + xe^{y/x} - y = 0,\ y(1) = 0$
3) $x^2 y' + xy + 1 = 0,\ y(1) = 0$;
4) $xy' - 2y + x^2 = 0,\ y(1) = 0$;
5) $y' - 3x^2 y - x^2 e^{x^3} = 0,\ y(0) = 0$;
6) $xy' + 2y - \ln x = 0,\ y(1) = 0$;
7) $y' + 3\dfrac{y}{x} = \dfrac{2}{x^3},\ y(1) = 0$.

3. Найти частное решение линейного дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям:

1) $y'' - 3y' + 2y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$;

2) $y'' + 2y' + y = 0$, $y(2) = 1$, $y'(2) = 0$;

3) $y'' + 4y' + 4y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;

4) $y'' - 5y' - 6y = 0$, $y(1) = 7$, $y'(1) = 0$;

5) $y'' + 6y' + 9y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;

6) $y'' + 4y' + 8y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$.

4. Найти общее решение дифференциального уравнения второго порядка:

1) $y'' + 16y' = e^{4x}\left(8x - 2\right)$;

2) $y'' + y = \cos 2x$;

3) $y'' - 5y' + 4y = x^2 - 1$;

4) $y'' - 5y' + 6y = xe^x$;

5) $y'' + 9y = xe^{3x}$;

6) $y'' + 9y = x^2 + 1$;

7) $y'' + 2y' + 5y = 3e^{-x}\left(x + 4\right)$;

8) $y'' + 2y' + 5y = 2e^{-x}\left(x + 2\right)$.

10. РЯДЫ

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Пусть задана бесконечная последовательность чисел a_1, a_2, .., a_n, ...

Составленный из этих чисел символ

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (1)$$

называется **числовым рядом**, а сами числа a_1, a_2, ..., a_n, ... называются членами ряда (1); n-й член ряда называется также общим членом ряда. Ряд считается заданным, если задано правило, позволяющее по известному номеру n его члена записать этот член ряда.

Необходимый признак сходимости числового ряда:

$$a_1 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

Если ряд (1) сходится, то предел его общего члена равен нулю: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Отсюда вытекает, что если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд расходится. Если же $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то о сходимости ряда еще ничего нельзя сказать, и требуется исследовать ряд дальше с помощью других признаков.

Рассмотрим два знакоположительных числовых ряда:

$$a_1 + a_2 \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n , \qquad (2)$$

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} b_n . \qquad (3)$$

Признак сравнения I. Пусть даны два числовых ряда (2) и (3). Исследуется на сходимость ряд (2). Известно поведение ряда (3). Если начиная с некоторого номера *n:*

1) $a_n \le b_n$ – члены ряда (2) не больше соответствующих членов ряда (3), и ряд (3) сходится, то и ряд (2) также сходится;

2) $a_n \ge b_n$ – члены ряда (2) не меньше соответствующих членов ряда (3), и ряд (3) расходится, то и ряд (2) также расходится.

Сравнение исследуемых рядов производится обычно со следующими известными рядами:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$, $a \ne 0$ (геометрическая прогрессия, сходящаяся при $|q| < 1$ и расходящаяся при $|q| \ge 1$),

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (расходящийся гармонический ряд),

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ (обобщенный гармонический ряд, сходящийся при $p > 1$ и расходящийся при $p \le 1$).

Признак сравнения II. Пусть даны два числовых ряда (2) и (3). Исследуется на сходимость ряд (2). Известно поведение ряда (3). Если существует конечный предел $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \ne 0$, то оба ряда (2) и (3) либо одновременно сходятся, либо одновременно расходятся. Если же $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, то из сходимости ряда (3) следует сходимость ряда (2).

Если, в частности, общие члены сравниваемых рядов эквивалентны как бесконечно малые при $n \to \infty$ ($a_n \sim b_n$), то оба ряда (в смысле сходимости) ведут себя одинаково.

Замечание. При оценке факториалов больших чисел и вычислении пределов, содержащих $n!$, часто бывает полезна **формула Стирлинга** $n! \sim \sqrt{2\pi} \cdot n^{n+1/2} \cdot e^{-n}$, которая означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi}n^{n+1/2}e^{-n}} = 1$.

Признак Даламбера. Пусть дан числовой ряд (2). Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, то

при $q < 1$ ряд (2) сходится;

при $q > 1$ ряд (2) расходится,

при $q = 1$ вопрос о сходимости ряда (2) остается открытым.

Замечание. Признак Даламбера целесообразно применять тогда, когда общий член ряда содержит факториал или содержит одновременно степенную и показательную функции относительно n.

Признак Коши (радикальный). Пусть дан числовой ряд (2). Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$, то

при $q < 1$ ряд (2) сходится;

при $q > 1$ ряд (2) расходится,

при $q = 1$ вопрос о сходимости ряда (2) остается открытым.

Замечание. Признак Коши (радикальный) целесообразно применять в том случае, если общий член ряда представляет собой n-ю степень некоторого выражения.

Интегральный признак Коши (основан на сравнении рядов с несобственными интегралами). Пусть общий член ряда (2) $a_n = f(n) > 0$. Если функция $f(x)$, принимающая в точках $x = n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ значения $f(n)$, монотонно убывает в некотором интервале $A < x < \infty$, где $A > 1$, то числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и несобственный интеграл $\int\limits_A^{\infty} f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Ряд

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\ldots+(-1)^{n-1}u_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n \tag{4}$$

в котором все u_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ – числа одного знака, называется **знакочередующимся**.

Для знакочередующихся рядов справедлив следующий достаточный признак сходимости.

Признак Лейбница. Пусть дан знакочередующийся ряд (4). Если 1) $|u_{n+1}|<|u_n|$ – члены, начиная с некоторого монотонно убывают по абсолютной величине, 2) $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=0$ – выполнен необходимый признак, то ряд (4) сходится.

Пусть $x_0, c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ – заданные числа. Ряд вида

$$c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2+\ldots+c_n(x-x_0)^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n, \tag{5}$$

называется **степенным**. Членами ряда (5) являются степенные функции $u_n=c_n(x-x_0)^n$, *а,* $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ – называется коэффициентами ряда (5). Этот ряд всегда сходится, по крайней мере при $x=x_0$. При фиксированном x ряд (5) представляет из себя числовой ряд, который либо сходится, либо расходится.

Областью сходимости степенного ряда называется множество всех значений переменной x, для которых ряд (5) сходится.

Теорема Абеля. Если степенной ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n(x-x_0)^n$ сходится при $x=x_1\neq 0$,то он сходится, и притом абсолютно, для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $-|x_1-x_0|<x-x_0<|x_1-x_0|$. Если же степенной ряд расходится при $x=x_1$, то он расходится и для всех значений x, для которых $|x-x_0|>|x_1-x_0|$.

Из теоремы Абеля вытекает:

1) всякая точка сходимости степенного ряда (5) расположена не дальше от точки $x = x_0$, чем всякая точка его расходимости;

2) существует интервал $x_0 - R < x < x_0 + R$, для всех точек x которого степенной ряд сходится, а для всех x, таких что $|x - x_0| > R$ – расходится.

Интервал $(x_0 - R; x_0 + R)$, внутри которого ряд сходится, а вне его расходится называется **интервалом сходимости**, а число R – **радиусом** сходимости степенного ряда. Радиус сходимости степенного ряда можно вычислять по одной из формул

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| \text{ или } R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} \tag{6}$$

при условии, что пределы, в них входящие, существуют.

Замечание. Для каждого степенного ряда вида (5), если только он не является всюду расходящимся, область сходимости представляет собой сплошной промежуток от $x_0 - R$ до $x_0 + R$, со включением концов или нет. Промежуток этот может быть точкой (x_0) или быть бесконечным.

Замечание. Внутри области сходимости, степенной ряд (5) сходится абсолютно. Исследовать степенной ряд на сходимость – значит, найти интервал его сходимости и выяснить, сходится или расходится ряд в граничных точках интервала сходимости.

Замечание. При фиксированном x степенной ряд (5) представляет из себя конкретный числовой ряд (знакопеременный – в общем случае). Для этого ряда (если он знакопеременный) сначала проводится исследование на абсолютную сходимость, т. е. составляется ряд из модулей. Следовательно, для определения области сходимости степенных рядов можно использовать признак Даламбера, т.е. нужно найти те значения x, при которых предел $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < 1$, а затем отдельно исследовать те значения x, при которых данный предел равен единице.

Разложение в степенной ряд (ряд Маклорена) некоторых элементарных функций:

1) $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots,\ x \in \mathrm{R}.$

2) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots,\ x \in R.$

3) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots,\ x \in R.$

4) $arctg\, x = x - \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots, |x| \le 1.$

5) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \ldots, -1 < x \le 1.$

6) $(1+x)^\mu = 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{n!} x^n + \ldots,\ |x| < 1.$

Задачи

1. Исследовать на сходимость числовые ряды:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{2n-3};$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{(n+2)^3};$ 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n+1};$

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n};$ 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{3}{n}\right)^n;$ 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n!};$

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n};$ 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{3^n n!};$ 9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{2^n n!};$

10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n (n+1)};$ 11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n;$ 12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arcsin^n \frac{1}{n};$

13) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+4}{n\cdot\sqrt[3]{n^2+1}}$; 14) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln(n)}$; 15) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot\sqrt[4]{n}}$;

16) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot\ln^3(n)}$; 17) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(4n-3)}{5n}$; 18) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt[3]{n}}{n+2}$.

2. Найти область сходимости степенных рядов:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{5^n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(x+5)^{2n}}{n\sqrt{n+1}}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}10^n x^n$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 10^{n-1}}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(nx)^n}{n!}$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n\sqrt{n+1}}$; 8) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n+1}$; 9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3(x-3)^n}{2^n}$;

10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n n!}{n^n}$; 11) $\sum_{n=1}^{\infty}n!(x-3)^n$; 12) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n\ln(n+2)}$.

3. Вычислить приближенно данное выражение с указанной точностью ε:

1) $\sqrt[3]{e}$, ε = 0,0001; 2) $1/\sqrt[3]{30}$, ε = 0,001; 3) $\sqrt[3]{84}$, ε = 0,0001

4) $\cos 2^0$, ε = 0,001; 5) $\ln 3$, ε = 0,0001; 6) $\operatorname{arctg}(\pi/10)$, ε = 0,001.

4. С помощью рядов вычислить приближенное значение интеграла с заданной точностью ε:

1) $\int_0^1 \cos\sqrt[5]{x}\,dx$, ε = 0,0001; 2) $\int_0^{0,4} x\ln(1+x^3)\,dx$, ε = 0,001;

3) $\int_0^1 \sqrt[3]{x}\cos x\,dx$, ε = 0,001; 4) $\int_0^{0,5}\frac{1}{x^2}\sin(x^3)\,dx$, ε = 0,0001;

5) $\int_0^{0,5}\sqrt{1+x^3}\,dx$, ε = 0,0001; 6) $\int_0^{0,9} x\operatorname{arctg}x\,dx$, ε = 0,001

7) $\int_0^1 e^{-x^2/3}\,dx$, ε = 0,0001; 8) $\int_0^1 e^{-x^2/4}\,dx$, ε = 0,001.

5. Разложить данную функцию $y = f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0, используя табличные разложения:

1) $y = x/(2-x)$, $x_0 = 0$; 2) $y = \cos^2 x$, $x_0 = 0$;

3) $y = \ln(5x+3)$, $x_0 = 1$; 4) $y = 1/\sqrt[3]{x}$, $x_0 = 3$.

Указать область сходимости полученного степенного ряда.

6. Найти четыре первых, отличных от нуля, члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданным начальным условиям:

1) $y' = \arcsin y + x$, $y(0) = 1/2$;

2) $y'' + y' + xy = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$;

3) $y' + y^2 = e^x$, $y(0) = 0$.

11. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Комплексным числом z называется упорядоченная пара действительных чисел $(x; y)$, первое из которых x называется его **действительной частью**, а второе число y – **мнимой частью**. Обозначение: $z = x + i{\cdot}y,\ x = Re\, z,\ y = Im\, z.$ Символ i называется **мнимой единицей** ($i^2 = -1$).

Если $x = 0$, то число $0 + iy = iy$ называется чисто мнимым, если $y = 0$, то число $x + i{\cdot}0 = x$ отождествляется с действительным числом , а это означает, что множество R действительных чисел является подмножеством множества C всех комплексных чисел, т. е. $R \subset C$.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + i{\cdot}y_1$ и $z_2 = x_2 + i{\cdot}y_2$ называются **равными** тогда и только тогда, когда равны их действительные части и равны их мнимые части, т. е. $z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ и${\cdot}y_1 = y_2$.

Два комплексных числа $z = x + iy$ и $\overline{z} = x - iy$, отличающиеся только знаком мнимой части называются **сопряженными**.

Всякое комплексное число $z = x + iy$ можно изобразить точкой $M(x; y)$ плоскости Oxy такой, что $x = Re\, z,\ y = Im\, z$.

Плоскость, на которой изображаются комплексные числа называется **комплексной плоскостью** (ее также обозначают C). Ось абсцисс называется действительной осью, а ось ординат – мнимой.

Комплексное число $z = x + iy$ можно изображать и с помощью радиус-вектора $r = OM = (x; y)$.

Длина вектора r, изображающего комплексное число z называется **модулем** этого числа и обозначается $|z|$ или r. Модуль определяется по формуле $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором *r*, изображающим комплексное число, называется **аргументом** этого числа, обозначается *Arg z*.

Аргумент комплексного числа $z \neq 0$ величина многозначная: $Arg\, z = arg\, z + 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, где $arg z = \varphi$ – главное значение аргумента, заключенное в промежутке $(-\pi; \pi]$. Аргумент комплексного числа $z = 0 + i\,0$ не определен.

Замечание. В качестве значения аргумента можно брать величину принадлежащую промежутку $[0; 2\pi)$.

Запись числа *z* в виде $z = x + iy$ называют **алгебраической формой** комплексного числа.

Запись числа *z* в виде $z = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называется **тригонометрической формой**.

Аргумент φ определяется из формул $\cos\varphi = \frac{x}{r}$, $\sin\varphi = \frac{y}{r}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Аргумент *z* можно найти, используя формулу $tg\varphi = \frac{y}{x}$, *так как* $-\pi < arg\, z \leq \pi$, то

$$\varphi = arg z = \begin{cases} arctg\frac{y}{x} & ,при\ x > 0 \\ arctg\frac{y}{x} + \pi & ,при\ x < 0,\ y > 0 \\ arctg\frac{y}{x} - \pi & ,при\ x < 0,\ y < 0 \\ \frac{\pi}{2} & ,при\ x = 0,\ y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & ,при\ x = 0,\ y < 0 \\ не\ определено & ,при\ x = 0,\ y = 0 \end{cases}$$

Запись числа *z* в виде $z = re^{i\varphi}$ или $z = |z|e^{i\arg z}$ называют **показательной** (или экспоненциальной) формой комплексного числа.

Задачи

1. Выполнить указанные действия, представить результат в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.

1) $\dfrac{(3+2i)(1-4i)}{(4-5i)}$, $(2+i\sqrt{3})^3$; 2) $\dfrac{(5-7i)(2-3i)}{(2+4i)}$, $(3-i\sqrt{2})^4$;

3) $\dfrac{(4-3i)(2+2i)}{(1+7i)}$, $(1+i3)^5$; 4) $\dfrac{(2+3i)(7-4i)}{(2+4i)}$, $(\sqrt{2}+7i)^4$;

5) $\dfrac{(3+2i)(1-4i)}{(4-5i)}$, $(2+i\sqrt{3})^3$.

2. Найти все значения корня и изобразить их на комплексной плоскости, представить результат в алгебраической, тригонометрической и показательной формах:

1) $\sqrt[3]{-2+2i}$; 2) $\sqrt[4]{2-3i}$; 3) $\sqrt[3]{1+8i}$;

4) $\sqrt[5]{2+3i}$; 5) $\sqrt[4]{4-6i}$.

3. Дать геометрическое описание множества всех точек комплексной плоскости, удовлетворяющих неравенствам:

1) $|Imz| < 1$, $0 < Rez < 1$; 2) $|z - i| > 1$; 3) $0 < |z + i| < 2$;

4) $1 < |z - 1| < 3$; 5) $0 < argz < \pi/4$.

4. Вычислить значения функции (ответ дать в алгебраической форме):

1) $\mathrm{Ln}(3^{1/2} + i)$, 2) $\mathrm{Ln}(i^{2i})$, 3) $\cos(1 - i)$,

4) $\cos(-3 - i)$, 5) $\mathrm{sh}(i - 2)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. Полный курс. Высшее образование. – М.: Айрис-прес, 2017. – 560 с. ил.
2. Лунгу К. Н. Сборник задач по высшей математике. 1 курс / К. Н. Лунгу, Д. Т. Письменный, С. Н. Федин, Ю. А. Шевченко. – 5-е изд. М.: Айрис-прес, 2006. – 576 с. ил. – (Высшее образование).
3. Высшая математика : учебник / В.С. Шипачев. — М. : ИНФРА-М, 2018. – 479 с. – (Высшее образование). – www.dx.doi.org/10.12737/5394. – Режим доступа: http://znanium.com/go.php?id=945790.
4. Высшая математика для экономистов: Учебное пособие/О.А.Кастрица, 4-е изд., стер. – М.: НИЦ ИНФРА-М, Нов. знание, 2015. – 491 с.: 60x90 1/16. – (Высшее образование: Бакалавриат) (Переплёт) ISBN 978-5-16-010960-2, 200 экз.
5. Юдин С.В. Математика и экономико-математические модели : учебник для вузов / Юдин С.В. – М. : РИОР: Инфра-М, 2016. – 374с. : ил. – (Высшее образование: Бакалавриат). – Библиогр.:с.365. – ISBN 978-5-369-01409-7.
6. Высшая математика для экономистов: / Учебник для вузов/ под ред. Проф. Н. Ш. Кремера. – 2-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2001. 471 с.
7. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа: Учебное пособие. – СПб.: Издательство «Лань», 2017. – 492 с. : ил. – (Учебники для вузов. Специальная литература)Вы.
8. Выгодский М. Я. Справочник по элементарной математике. – АСТ, 2017. – 512 с.
9. Выгодский М. Я. Справочник по высшей математике. – АСТ, Астрель, 2008. – 992 с.
10. Минорский В. П. Сборник задач по высшей математике. – М.: Наука, 1987.
11. Щипачев В. С. Высшая математика. – М.: Высшая школа, 1985.
12. Математика для гуманитариев: учебн. пособие / С.В. Клишина, Г. Н. Миренкова, Г. А. Анохина, Н. А. Гулюкина. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2006. – 228 с.