НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В. В. Комиссаров
Н. В. Комиссарова

ЛЕКЦИИ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ГЛАВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Новосибирск 2019

Содержание

1 Комплексные числа

1.1 Основные понятия и определения

Определение 1. *__Комплексным числом__ z называется упорядоченная пара действительных чисел $(x; y)$, первое из которых x называется его __действительной частью__, а второе число y — __мнимой частью__.*

Обозначение: $z = x+iy$. Символ i называется __мнимой единицей__ $(i^2 = -1)$.

Если $x = 0$, то число $0 + iy = iy$ называется *чисто мнимым*, если $y = 0$, то число $x + i \cdot 0 = x$ отождествляется с действительным числом, а это означает, что множество $\mathbb{R}$ действительных чисел является подмножеством множества $\mathbb{C}$ всех комплексных чисел, т. е. $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Число x называется *действительной частью* комплексного числа z и обозначается $x = \operatorname{Re} z$, а y — *мнимой частью*, $y = \operatorname{Im} z$.

Определение 2. *Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называются равными тогда и только тогда, когда равны их действительные части и равны их мнимые части, т. е. $z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.*

Определение 3. *Два комплексных числа $z = x + iy$ и $\overline{z} = x - iy$, отличающиеся только знаком мнимой части называются __сопряжёнными__.*

Всякое комплексное число $z = x + i \cdot y$ можно изобразить точкой $(x; y)$ плоскости Oxy такой, что $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$.

Плоскость, на которой изображаются комплексные числа называется *комплексной плоскостью* (её также обозначают $\mathbb{C}$). Ось абсцисс называется действительной осью, а ось ординат — мнимой.

Комплексное число $z = x+iy$ можно изображать и с помощью радиус-вектора $\vec{r} = \vec{OM}$.

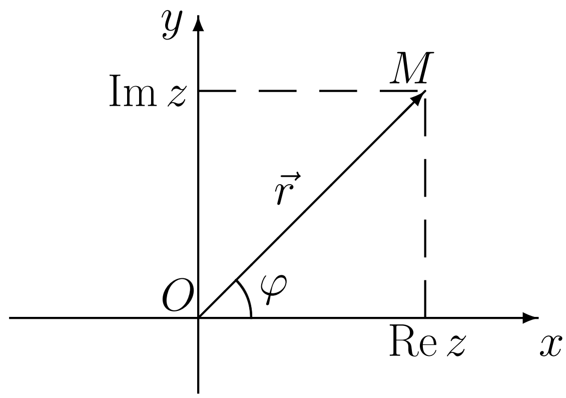

Рис. 1. Комплексная плоскость

Длина вектора $\vec{r}$, изображающего комплексное число z, называется *модулем* этого числа и обозначается $|z|$. Модуль определяется по формуле $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором $\vec{r}$, изображающим комплексное число, называется *аргументом* этого числа, обозначается $\operatorname{Arg} z$.

Аргумент комплексного числа $z \neq 0$ величина многозначная: $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k,\ \ k = 0, \pm 1, \pm, 2, \ldots$, где $\arg z = \varphi$ — *главное значение аргумента*, заключённое в промежутке $(-\pi; \pi]$. Аргумент комплексного числа $z = 0 + i \cdot 0$ не определен.

Замечание. В качестве значения аргумента можно брать величину принадлежащую промежутку $[0; 2\pi)$.

Аргумент φ определяется из формул $\cos\varphi = \dfrac{x}{|z|}$, $\sin\varphi = \dfrac{y}{|z|}$, где $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Аргумент z можно найти, используя формулу $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}$, так как $-\pi < \arg z \leq \pi$, то

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} y/x, \text{ при } x > 0 \\ \operatorname{arctg} y/x + \pi, \text{ при } x < 0,\ y > 0 \\ \operatorname{arctg} y/x - \pi, \text{ при } x < 0,\ y < 0 \\ \pi/2, \text{ при } x = 0,\ y > 0 \\ -\pi/2, \text{ при } x = 0,\ y < 0 \\ \text{не определён } x = 0,\ y = 0 \end{cases}$$

Запись числа z в виде $z = x + i \cdot y$ называют *алгебраической формой* комплексного числа.

Запись числа z в виде $z = |z|(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$ называется *тригонометрической формой.*

Запись числа z в виде $z = |z|e^{i\varphi}$ или $z = |z|e^{i\arg z}$ называют *показательной* (или *экспоненциальной*) формой комплексного числа[1].

Примеры: комплексные числа изобразить векторами, найти их модуль и аргумент и записать в тригонометрической и показательной формах:

1) $z = 2 + 2i$;

2) $z = -1 + i\sqrt{3}$;

2) $z = -3 - 2i$;

4) $z = -(\cos\pi/5 - i\sin\pi/5)$.

Понятие бесконечности на множестве комплексных чисел

Как и в действительной области, на множестве комплексных чисел вводится понятие бесконечности, бесконечно удалённой точки. Это можно сделать по аналогии с множеством $\mathbb{R}$ действительных чисел из геометрических соображений.

Рассмотрим числовую прямую и окружность S, которая касается прямой в точке O; точку, диаметрально противоположную точке O, обозначим N (рис. 2).

Будем соединять прямыми различные точки оси с точкой N; точки пересечения прямых с окружностью будем обозначать X. Очевидно, каждой точке $x \in \mathbb{R}$ соответствует точка $X \in S$. Обратное справедливо для всех точек окружности, за исключением точки N. Но по мере удаления x по прямой от точки O (с увеличением расстояния, равного $|x|$), её образ на окружности

[1]Обоснование этой записи см. далее: формула Эйлера

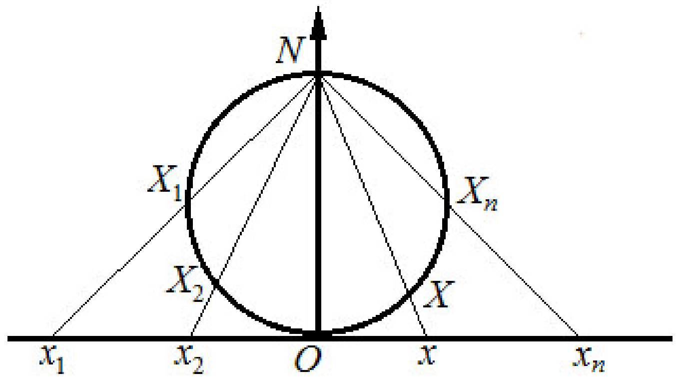

Рис. 2. Бесконечно удалённая точка на множестве $\mathbb{R}$ действительных чисел

приближается к точке N. Для последовательности такого вида в анализе принято название бесконечно большая последовательность (величина). Её предел обозначается $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ и называется бесконечностью или бесконечно удалённой точкой. Поэтому точку N можно рассматривать как образ бесконечно удалённой точки на окружности, а бесконечность — как «точку» оси Ox, образом которой на окружности является точка N.

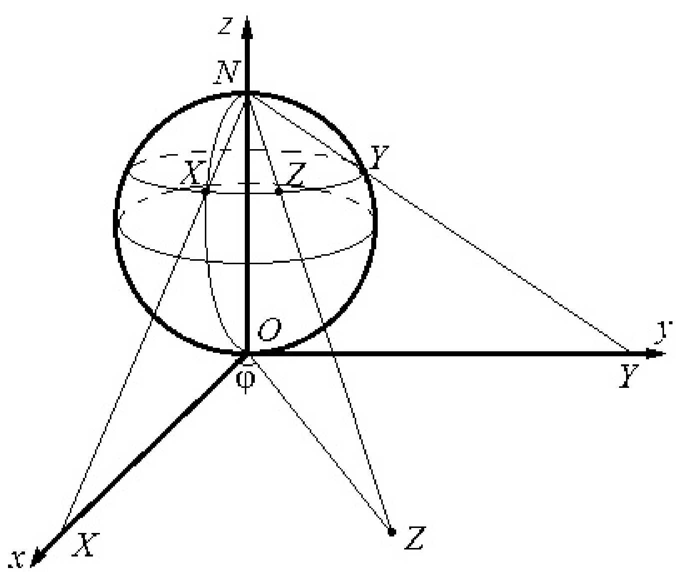

Рис. 3. Сфера Римана и стереографическая проекция

По аналогии рассмотрим плоскость $\mathbb{C}$ (плоскость Oxy) и сферу S, касающуюся ее в начале координат, т.е. в точке O (рис. 3). Лучи, соединяющие точки $z \in \mathbb{C}$ с точкой N пересекают сферу в точках $Z \in S$. При этом любой точке $z \in \mathbb{C}$ соответствует единственная точка $Z \in S$, и наоборот, любой точке $Z \in S \setminus N$ соответствует единственная точка $z \in \mathbb{C}$. Очевидно, чем дальше расположена точка $z \in \mathbb{C}$ от начала координат ($\lim\limits_{n\to\infty} \rho = \infty$, $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ — длина радиуса-вектора точки $z = x + iy$), тем ближе ее образ $Z \in S$ к точке N. Чтобы соответствие было полным, вводится «несобственный» элемент (символ ∞) , бесконечно удаленная точка как точка плоскости, образом которой на S является точка N.

Плоскость $\mathbb{C}$, дополненная элементом ∞, называется расширенной комплексной плоскостью и обозначается $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Построенное взаимно однозначное соответствие точек сферы и множества $\mathbb{C}$ называется стереографической проекцией, а сфера S — *сферой Римана.*

1.2 Действия над комплексными числами

Определение 4. ***Полем*** *называется непустое множество, для элементов которого определено два действия, называемых сложением и умножением, которые удовлетворяют следующим аксиомам:*

1) $a + b = b + a$ *(коммутативность сложения);*

2) $(a + b) + c = a + (b + c)$ *(ассоциативность сложения);*

3) $\exists 0 :\ \forall a\ a + 0 = a$ *(существование нуля);*

4) $\forall a\ \exists(-a) :\ a+(-a) = 0$ *(существование противоположного элемента);*

5) $ab = ba$ *(коммутативность умножения);*

6) $(ab)c = a(bc)$ *(ассоциативность умножения);*

7) $\exists 1 :\ \forall a\ a \cdot 1 = a$ *(существование единицы);*

8) $\forall a \neq 0\ \exists a^{-1} :\ a \cdot a^{-1} = 1$ *(существование обратного элемента);*

9) $(a+b)c = ac + bc$ *(дистрибутивность);*

10) $1 \neq 0$ *(в поле должно существовать хотя бы два элемента).*

Определим на этом множестве $\mathbb{C}$ арифметические операции.

Сложение и вычитание в поле комплексных чисел

Суммой $z_1 + z_2$ комплексных чисел $z_1 = x_1 + y_1 i$ и $z_2 = x_2 + y_2 i$ называется комплексное число

$$z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) \cdot i\,.$$

Из этого определения и свойств операции сложения действительных чисел следует, что:

- операция сложения комплексных чисел коммутативна: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;
- операция сложения комплексных чисел ассоциативна: $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3 \ \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$;
- существует нулевой элемент $\theta = 0 + 0i$: $z + \theta = \theta + z = z$ $\forall z \in \mathbb{C}$; нулевой элемент обозначается просто символом нуль $0 = 0 + 0i$;
- для каждого комплексного числа $z = x + yi$ существует противоположный ему элемент $(-z) = (-x) + (-y)i$: $z + (-z) = (-z) + z = 0$.

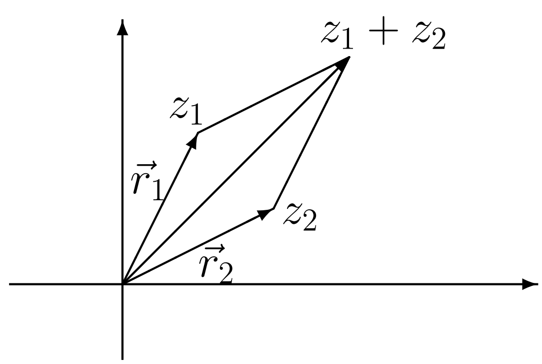

Рис. 4. Сумма комплексных чисел

Из последнего свойства следует, что на множестве комплексных чисел определена операция вычитания (обратная к сложению). Разностью чисел $z_1 = x_1 + y_1 i$ и $z_2 = x_2 + y_2 i$ называется комплексное число $z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) \cdot i$.

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

т. е. модуль разности двух комплексных чисел равен расстоянию между точками, изображающими эти числа на плоскости.

Умножение и деление в поле комплексных чисел

Произведением $z_1 z_2$ комплексных чисел $z_1 = x_1 + y_1 i$ и $z_2 = x_2 + y_2 i$ называется комплексное число

$$z = z_1 \cdot z_2 = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1) \cdot i\,.$$

В частности,

$$i \cdot i = (0+1i) \cdot (0+1i) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1) + (0 \cdot 1 + 0 \cdot 1)i = -1 + 0 \cdot i = -1,$$

то есть $i \cdot i = -1$.

Правую часть формулы умножения можно получить, если перемножить выражения $(x_1 + y_1 i)$ и $(x_2 + y_2 i)$, как двучлены, и учесть равенство $i \cdot i = -1$.

Из определения свойств операции умножения действительных чисел следует, что:

- операция умножения комплексных чисел коммутативна: $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1 \ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;
- операция умножения комплексных чисел ассоциативна: $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3 \ \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$;
- существует единичный элемент $e = 1 + 0i$: $ze = ez = z$ $\forall z \in \mathbb{C}$; единичный элемент обозначается просто символом единица: $1 = 1 + 0i$;
- для каждого комплексного числа $z = x + yi$, отличного от нуля, существует обратный ему элемент $z^{-1} = \dfrac{x}{x^2 + y^2} + \dfrac{-y \cdot i}{x^2 + y^2}$ такой, что $z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = 1$.

В самом деле, знаменатель дробей отличен от нуля, так как равенство $x^2+y^2=0$ означает, что $x=0$ и $y=0$, т. е. $z=0+0i=0$. Следовательно, для $z\neq 0$ правая часть определена. Проверим равенство $zz^{-1}=1$. Используя определение умножения и равенство $i\cdot i=-1$, получаем:

$$z\cdot z^{-1}=(x+yi)\cdot\left(\frac{x}{x^2+y^2}+\frac{-y\cdot i}{x^2+y^2}\right)=$$

$$=\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}+\frac{-xy+yx}{x^2+y^2}\cdot i=1+0i=1\,.$$

Из последнего свойства следует, что на множестве отличных от нуля комплексных чисел определена операция деления (обратная к умножению).

Частным двух чисел $z_1=x_1+y_1i$ и $z_2=x_2+y_2i$ называется комплексное число

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\frac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\cdot i\,.$$

Правую часть этой формулы можно получить, если умножить числитель и знаменатель дроби $\dfrac{z_1}{z_2}$ на число x_2-y_2i.

Операции сложения и умножения комплексных чисел связаны законом дистрибутивности:

$$(z_1+z_2)\cdot z_3=z_1\cdot z_3+z_2\cdot z_3\qquad\forall z_1\in\mathbb{C},\quad\forall z_2\in\mathbb{C},\quad\forall z_3\in\mathbb{C}.$$

Таким образом, множество $\mathbb{C}$ комплексных чисел является *полем.*

Воспользуемся тригонометрической формой записи комплексных чисел:

$$z_1\cdot z_2=|z_1|(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot|z_2|(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=$$

$$=|z_1||z_2|((\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2+\sin\varphi_1\cos\varphi_2))=$$

$$=|z_1||z_2|(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)).$$

При умножении комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме их модули перемножаются, а аргументы складываются.

Из этого следует *формула Муавра* для возведения комплексных чисел в натуральную степень:

$$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Деление комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Несложно эти соотношения получить, используя показательную форму записи комплексных чисел.

Корень n-ой степени из комплексного числа

Воспользуемся формулой Муавра

$$\sqrt[n]{z} = |z|^{1/n}\left(\cos\frac{\operatorname{Arg} z}{n} + i\sin\frac{\operatorname{Arg} z}{n}\right) =$$

$$= |z|^{1/n}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) = |z|^{1/n}e^{\frac{\varphi+2\pi k}{n}}.$$

В результате корень n-ой степени из комплексного числа имеет n различных значений, которые находятся в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $R = \sqrt[n]{|z|}$ с центром в начале координат.

Пример

Найти все значения $z = \sqrt[3]{4 + 4\sqrt{3}i}$

$$z = \sqrt[3]{4 + 4\sqrt{3}i} = \left(8e^{i(\pi/3+2\pi k}\right)^{\frac{1}{3}} = 2e^{i(\pi/9+2\pi k/3)}.$$

$$k = 0 \quad z_1 = 2e^{i\pi/9},$$

$$k = 1 \quad z_1 = 2e^{i\pi 7/9},$$

$$k = -1 \quad z_1 = 2e^{-i\pi 5/9}.$$

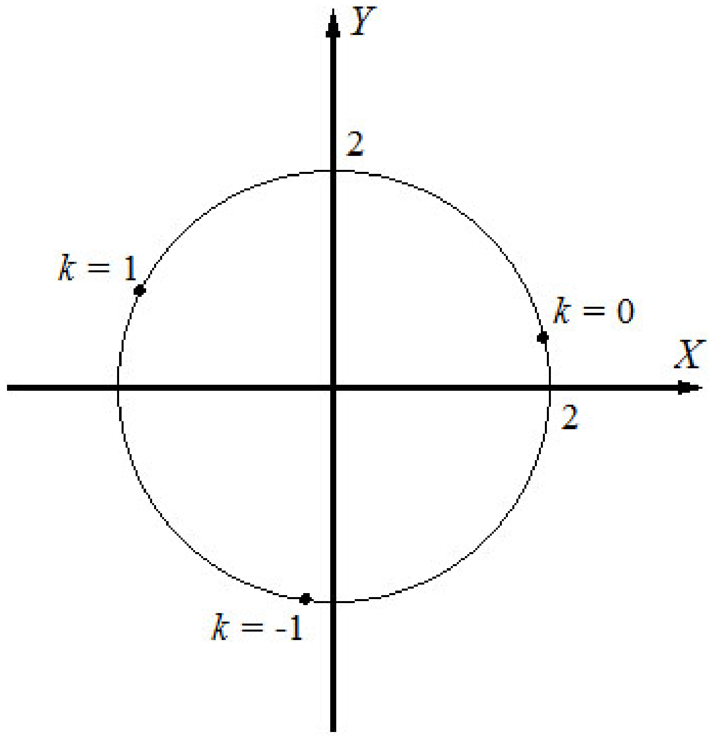

Рис. 5. Значения $z = \sqrt[3]{4+4\sqrt{3}i}$

Примеры

1. Найти модули и аргументы следующих комплексных чисел: 1) i; 2) -3; 3) $1+i^{123}$; 4) $-\dfrac{1}{2}+i\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; 5) $\dfrac{1-i}{1+i}$.

2. Вычислить $\overline{z}_1$; z_1+z_2; z_1-z_2; $z_1\cdot z_2$; z_1/z_2, если $z_1=1+2i$, $z_2=2-i$, результат записать в алгебраической форме.

3. Найти все корни уравнения $x^2+4x+6=0$.

4. Найти модуль и аргумент комплексного числа: $(-1-i\cdot\sqrt{3})^{11}$.

5. Найти все значения корня: 1) $\sqrt{3+i\cdot 4}$; 2) $\sqrt[3]{8}$.

6. На множестве комплексных чисел решить уравнение $z^5+32=0$.

7. Выяснить геометрический смысл соотношения и сделать чертёж: $|z+i|+|z-i|=4$.

- Сравнение: $a + bi = c + di$ означает, что $a = c$ и $b = d$ (два комплексных числа равны между собой тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части).
- Сложение: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$.
- Вычитание: $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$.
- Умножение:

  $(a+bi)\cdot(c+di) = ac+bci+adi+bdi^2 = (ac-bd)+(bc+ad)i.$
- Деление:
  $$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)i.$$
  В частности, $\dfrac{1}{a+bi} = \dfrac{a}{a^2+b^2} - \left(\dfrac{b}{a^2+b^2}\right)i.$
- Операции $>$, $<$, $\geq$, $\leq$ на множестве комплексных чисел не определены.

2 Функции комплексного переменного

2.1 Основные определения

На расширенных плоскостях комплексных переменных z и w рассмотрим множества D и G. Если указан закон f, по которому каждому значению $z \in D$ сопостовляется определённое значение $w \in G$, то говорят, что w является однозначной функцией переменного z: $w = f(z)$.

Задано отображение D в множество G. $w \in G$ — образ точки $z \in D$, а точка z — прообраз точки w. Для прообраза принято обозначение $z = f^{-1}(w) = \varphi(w)$.

$$z = x + i \cdot y, \qquad w = u + i \cdot v,$$

$$w = u + i \cdot v = f(x, y),$$

$$u = \operatorname{Re} f(z) = u(x, y),\ v = \operatorname{Im} f(z) = v(x, y).$$

Т. е. задание функции $w = f(z)$ комплексного переменного равносильно заданию двух функций действительного переменного.

При отображении, осуществляемом с помощью однозначной функции $w = f(z)$ может оказаться, что каждым двум различным прообразам z_1 и z_2 соответствуют разные образы, т. е. $f(z_1) \neq f(z_2)$ при $z_1 \neq z_2$.

Такое отображение *называется взаимнооднозначным* или *однолистным*, а осуществляющая его функция $w = f(z)$ — *однолистной.*

Отображение $w = f(z)$ будет однолистным $\Leftrightarrow$ обе функции $f(z)$ и $\varphi(w)$ — однозначны.

Простейшим однолистным (во всей комплексной плоскости) отображением являются отображения $w = z$ и $w = \overline{z}$. Первое отображает любую область, в том числе и всю комплексную плоскость, на себя, второе — верхнюю полуплоскость на нижнюю, а нижнюю на верх.

Примером неоднолистного в $\mathbb{C}$ отображения является $w = z^2$. Действительно, разным точкам, например $z_1 = 1$ и $z_2 = -1$ соответствует $w = 1$, точкам $z = \pm i \to w = -1$. Неоднолистное отображение и $w = z^n$. Каждой точке w, $w \neq 0$, $w \neq \infty$ соответствует n значений z_k, n-местное отображение.

Услове однолистности отображения: отображение является однолистным на множестве D, если для $\forall$ точек z_1 и z_2, принадлежащих D, равенство $f(z_1) = f(z_2) \Leftrightarrow z_1 = z_2$. Т. е. отображение однолистно на множестве D, если множество не содержит ни одной пары чисел z_1, z_2, таких, что $z_1 \neq z_2$ и выполняется условие $f(z_1) = f(z_2)$.

Пример. Найти область однолистности функции $w = z^2$.

Во всей комплексной плоскости отображение не является однолистным, но можно найти множество, где условие однолистности будут выполняться, т. е. множество, которое не содержит различных точек z_1 и z_2, для которых $f(z_1) = f(z_2)$.

Рассмотрим две произвольные точки z_1 и z_2 и разность $w_1 - w_2 = z_1^2 - z_2^2 = (z_1 - z_2) \cdot (z_1 + z_2)$. Т. к. $z_1 \neq z_2$ равенство $w_1 = w_2$ выполняется если $z_1 + z_2 = 0$. Таким образом отображение $w = z^2$ будет однолистным в $\forall$ области, в которой не лежат одновременно две точки z_1 и z_2 такие, что $z_1 = -z_2$. Эти точки нужно расположить на границе области. Так как указанному условию удовлетворяют точки, симметрично расположенные относительно начала координат, то в качестве границы можно выбрать $\forall$ прямую, проходящую через $z = 0$.

Отображение однолистно в $\forall$ полуплоскости, границей которой является прямая, проходящая через начало координат, например $\operatorname{Im} z > 0$ или $\operatorname{Im} z < 0$. При этом каждую точку полуплоскости $w = z^2$ отображает на всю плоскость. выполнено

2.2 Основные трансцендентные функции комплексного переменного

1. *Целая рациональная функция*

   Функция $w = P_n(z)$ — комплексного переменного z, где

   $$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0,$$

   целая рациональная функция или полином над полем комплексных чисел, $n > 0$, $n \in N$ — степень полинома. При $n = 1$: $P_1(z) = a_0 + a_1 z$ — линейная функция.

2. *Дробно-рациональная функция*

   $$w = \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0}{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \ldots + b_1 z + b_0} = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}.$$

3. *Показательная функция*

   $$w = e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots \qquad (1)$$

степенной ряд сходится на всей комплексной плоскости.

Свойства

- $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$, $\forall z_1 \in \mathbb{C},\ z_2 \in \mathbb{C}$;
- $e^{z+2k\pi i} = e^z$, $\forall k \in N$, функция является периодической с периодом $T = 2\pi i$;
- область значений — все комплексные числа за исключением $z = 0$.

Заменим в ряде (1) переменное z через iz:

$$w = e^z = 1 + iz + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \ldots + \frac{(iz)^n}{n!} + \ldots =$$

учитывая: $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1 \ldots$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} + i\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Эти ряды сходятся на всей комплексной плоскости. Обозначим суммы соответственно $\cos z$ и $\sin z$. В результате:

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \tag{2}$$

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}. \tag{3}$$

В силу соотношений (2), (3)

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z. \tag{4}$$

$$\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \frac{\cos z + i\sin z + \cos(-z) + i\sin(-z)}{2} = \frac{2\cos z}{2} = \cos z,$$

$$\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = \frac{\cos z + i\sin z - \cos(-z) - i\sin(-z)}{2i} = \frac{2i\sin z}{2i} = \sin z.$$

В результате:
$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \tag{5}$$
$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \tag{6}$$
Соотношения (4–6) — *формулы Эйлера.*

Подставим в $e^z e^t = e^{z+t}$ вместо $t = 2k\pi i,\ k \in Z$.
$$e^{z+2k\pi i} = e^z e^{2k\pi i} = e^z(\cos(2k\pi) + i\sin(2k\pi)) = e^z,$$
т. е. e^z является периодической с периодом $2\pi i = T$.
$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y).$$
Из этого соотношения:
$$|e^z| = e^x|\cos y + i\sin y| = e^x\sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = e^x.$$

4. *Тригонометрические функции*
$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k}}{(2k)!} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$
$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$
Очевидны равенства:
$$\cos(z+t) = \frac{e^{i(z+t)} + e^{-i(z+t)}}{2} =$$
$$\frac{(\cos z + i\sin z)(\cos t + i\sin t) + (\cos z - i\sin z)(\cos t - i\sin t)}{2} =$$
$$= \cos z\cos t - \sin z\sin t.$$
Аналогично легко получаются равенства:
$$\cos(z-t) = \cos z\cos t + \sin z\sin t,$$
$$\sin(z+t) = \sin z\cos t + \cos z\sin t,$$

$$\sin(z-t) = \sin z \cos t - \cos z \sin t.$$

Замечание.

$$\cos i = \frac{e^1 + e^{-1}}{2} > 1 \ \Rightarrow$$

$\sin z$ и $\cos z$ могут принимать любые значения.

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z},\ \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

5. *Гиперболические функции*

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2},\ \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z},\ \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Подставим в (5) и (6) в качестве аргумента функций iz:

$$\cos iz = \frac{e^{i(zi)} + e^{-i(zi)}}{2} = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \operatorname{ch} z; \tag{7}$$

$$\sin iz = \frac{e^{i(zi)} - e^{-i(zi)}}{2i} = \frac{e^{-z} - e^z}{2i} = i\frac{e^z - e^{-z}}{2} = i \cdot \operatorname{sh} z \tag{8}$$

или

$$\cos iz = \operatorname{ch} z, \quad \operatorname{sh} z = -i \sin iz.$$

В силу определения гиперболический синус $\operatorname{sh} z$ и гиперболический косинус $\operatorname{ch} z$ в комплексной области периодические (как e^z) с периодом $T = 2\pi i$.

6. *Функции $w = z^n$ и $w = \sqrt[n]{z}$, $n \in N$*

$w = z^n$ — однозначная.

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),\ w = \rho(\cos\theta + i\sin\theta),$$

$$\rho = r^n,\ \theta = n\varphi.$$

Отображение $w = z^n$ сводится к повороту каждого вектора $z \neq 0$ на угол $(n-1)\arg z$ и растяжению его в $|z|^{n-1}$ раз.

Очевидно, что точки z_1 и z_2 с равными модулями и аргументами, отличающиеся на целое кратное $2\pi/n$, и только такие точки переходят при отображении $w = z^n$ в одну точку.

Следовательно, для однолистности отображения $w = z^n$ в некоторой области D необходимо и достаточно, чтобы D не содержала никаких двух точек z_1 и z_2 связанных соотношением:

$$|z_1| = |z_2|,\ \arg z_1 = \arg z_2 + \frac{2\pi k}{n},\ k \neq 0.$$

Этому условию удовлетворяют секторы:

$$k\frac{2\pi}{n} < \varphi < (k+1)\frac{2\pi}{n},\ k \in N_+.$$

Функция $w = \sqrt[n]{z}$ — обратная к функции $z = w^n$, n-значна.

7. *Логарифмическая функция*

Логарифмом числа $z \neq 0$ называется число A такое, что справедливо равенство $e^z = A$, обозначается $A = \ln z$

$$\ln z = A \Leftrightarrow e^A = z,\ z \neq 0.$$

Будем искать A в виде $A = u + i \cdot v$: $e^{u+iv} = re^{i\varphi}$ или $e^u e^{iv} = re^{i\varphi}$.

$$e^u = r \ \text{ т. е. } u = \ln r,\ v = \varphi + 2k\pi, k \in Z,$$

где $r = |z|$, $\varphi = \arg z$.

Из этого следует, что логарифм комплексного числа определяется неоднозначно.

Множество значений логарифма:

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi),\ k \in Z. \tag{9}$$

При $k = 0$ — *главное значение*

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z,\ -\pi < \arg z < \pi.$$

8. *Обратные тригонометрические и гиперболические функции*

Рассмотрим $z = \cos w = \dfrac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$. Из этого соотношения: $e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0$ и $e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1}$. Здесь знаки $\pm$ в формуле решения квадратного уравнения можно опустить, если понимать корень как двузначную функцию. В результате имеем:

$$\arccos z = -i\,\mathrm{Ln}\,(z + \sqrt{z^2 - 1}). \tag{10}$$

Аналогично получаем:

$$\arcsin z = \frac{\pi}{2} - \arccos z = -i\,\mathrm{Ln}\,(iz + \sqrt{1 - z^2}); \tag{11}$$

$$\mathrm{arctg}\, z = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arcctg}\, z = -\frac{i}{2}\,\mathrm{Ln}\,\frac{1 + iz}{1 - iz}; \tag{12}$$

$$\mathrm{arcctg}\, z = -\frac{i}{2}\,\mathrm{Ln}\,\frac{z + i}{z - i}; \tag{13}$$

$$\mathrm{arcsh}\, z = \mathrm{Ln}\,(z + \sqrt{z^2 + 1}); \tag{14}$$

$$\mathrm{arcch}\, z = \mathrm{Ln}\,(z + \sqrt{z^2 - 1}); \tag{15}$$

$$\mathrm{arcth}\, z = \frac{1}{2}\,\mathrm{Ln}\,\frac{1 + z}{1 - z}; \tag{16}$$

$$\mathrm{arccth}\, z = \frac{1}{2}\,\mathrm{Ln}\,\frac{z + 1}{z - 1}. \tag{17}$$

Все эти функции в силу определения $\mathrm{Ln}\, z$ многозначны.

9. *Общая степенная функция $w = z^a$ $a = \alpha + i\,\beta$*

$$w = z^a = e^{a\,\mathrm{Ln}\, z},$$

учитывая $z = r\,e^{i\varphi}$, $\mathrm{Ln}\; = \ln r + i(\varphi + 2k\pi)$, получим

$$z^a = e^{a\ln r - \beta(\varphi + 2k\pi)} e^{i(\alpha(\varphi + 2k\pi) + \beta\ln r)},\ k \in Z.$$

Отсюда видно, что при $\beta \neq k$ всегда имеем бесконечно много значений, лежащих при фиксированных z и a на окружности $|w| = \rho_k$ с радиусами $\rho_k = e^{a\ln r - \beta(\varphi + 2k\pi)}$, $k \in Z$.

Примеры

Вычислить значения функций (ответ записать в алгебраической форме)

1) $\cos(-2-i)$;
2) $\operatorname{tg}(\pi+i)$;
3) $\ln(-3-4i)$.

3 Аналитические функции

3.1 Производная. Правила дифференцирования

Пусть функция $w = f(z)$ определена в некоторой области $D \subseteq \mathbb{C}$. Введём обозначения $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$. Тогда, если $z \in D$ и $z + \Delta z \in D$, обозначим $\Delta w = f(z+\Delta z) - f(z)$.

Если $\exists$ конечный предел отношения $\dfrac{\Delta w}{\Delta z}$ при $\Delta z \to 0$ по $\forall$ закону, то

1) функция $f(z)$ называется дифференцируемой;
2) $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z) = \dfrac{df}{dz}$ называется производной.

Функция $f(z)$, имеющая производную в точке $z \in D$ называется *моногенной* в этой точке.

Для того, чтобы $f(z) = f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ была дифференцируемой в точке $z = x+iy \in D$ необходимо и достаточно, чтобы:

1) вещественнозначные функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ были дифференцируемы в точке z;
2) в этой точке выполнялись равенства:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad (CR)$$

которое называется *условиями Коши–Римана.*

Доказательство

Если функция дифференцируема, то $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta w}{\Delta z}$ должен существовать при $\forall$ законе стремления Δz к 0. Рассмотрим его при $\Delta z = \Delta x$.

$$f'(z) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x} + i\frac{v(x+\Delta x, y) - v(x,y)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Пусть теперь $\Delta z = i\Delta y$.

$$f'(z) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(x, y+\Delta y) - u(x,y)}{i\Delta y} + \frac{v(x, y+\Delta y) - v(x,y)}{\Delta y} =$$

$$= -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Отсюда следует условие (CR).

Определение 5. *Заданная в области D однозначная функция $w = f(z)$ называется аналитической или голоморфной, если она дифференцируема (моногенна) в каждой точке этой области.*

Утверждение

1. Если функция $f(z)$ дифференцируема в точке, то в этой точке существуют частные производные её действительной $u(x,y)$ и мнимой $v(x,y)$ части и выполнены условия (CR):
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \qquad (CR)$$

2. Если функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ дифференцируемы в точке (x_0, y_0) и в этой точке выполняются условия (CR), то функция $f(z) = u + i\cdot v$ дифференцируема в точке $z = x_0 + i\cdot y_0$.

3. Производная дифференцируемой функции может быть записана по одной из формул:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, \quad f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i \cdot \frac{\partial u}{\partial y}, \\ f'(z) &= \frac{\partial u}{\partial x} - i \cdot \frac{\partial u}{\partial y}, \quad f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned} \qquad (*)$$

Замечания

Выполнение условий (CR) является необходимым условием дифференцируемости функции $f(z)$ в точке. Следовательно, их невыполнение достаточно для утверждения о том, что функция не является дифференцируемой в соответствующей точке.

Условие (CR) не являются достаточными. В соответствующей точке должны быть дифференцируемы функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$.

Правило. Для исследования функции на дифференцируемость и нахождения её производной следует выполнить следующие операции.

1. Для заданной функции $f(z)$ найти её действительную и мнимую части:

$$u = \operatorname{Re} f(z) = u(x, y), \ v = \operatorname{Im} f(z) = v(x, y).$$

2. найти частные производные функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$.

3. Проверить выполнение условия (CR). Точки, в которых это условия не выполняются, являются точками, где функция не дифференцируема.

   Если условия (CR) выполнены и частные производные непрерывные — дифференцируема.

4. Записать выражение в точках дифференцируемости по одной из формул (*).

Примеры.

1. Показать, что $f(z)=\sin(z+i)$ аналитическая для всех $z\in\mathbb{C}$, найти производную.

1) $f(z)=\sin(x+iy+i)=\sin(x)\cdot\cos(i(y+1))+\cos(x)\cdot\sin(i(y+1))=$

$$=\sin(x)\mathrm{ch}(y+1)+i\cos(x)\mathrm{sh}(y+1).$$

Таким образом:

$$u(x,y)=\sin(x)\mathrm{ch}(y+1),\ v(x,y)=\cos(x)\mathrm{sh}(y+1)$$

2)

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\cos(x)\mathrm{ch}(y+1)\\ \dfrac{\partial v}{\partial y}=\cos(x)\mathrm{ch}(y+1)\end{array}\right\},\ \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y};$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial u}{\partial y}=\sin(x)\mathrm{sh}(y+1)\\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=-\sin(x)\mathrm{sh}(y+1)\end{array}\right\},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

3) Условия Коши–Римана выполнены, $\Rightarrow$ функция дифференцируема и $\Rightarrow$ аналитическая.
4) $f'(z)=\cos(x)\mathrm{ch}(y+1)-i\cdot\sin(x)\mathrm{sh}(y+1)$.

2. Исследовать на дифференцируемость функцию:

$$f(z)=\overline{z}=x-i\cdot y.$$

1) $\operatorname{Re}f(z)=u(x,y)=x,\ \operatorname{Im}f(z)=v(x,y)=-y;$
2) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=1,\ \dfrac{\partial v}{\partial y}=-1;\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\neq\dfrac{\partial v}{\partial y}.$
3) Следовательно функция не дифференцируема.

3. Исследовать на дифференцируемость функцию: $f(z)=e^z$.
1) $f(z)=e^z=e^{x+i\cdot y}=e^x(\cos y+i\sin y)$,

$$\operatorname{Re}f(z)=u(x,y)=e^x\cos y,\ \operatorname{Im}f(z)=v(x,y)=e^x\sin y;$$

2) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y$; $\dfrac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y$.

3) Условия (CR) выполнены. Функция дифференцируема всюду.

4) $f'(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y + i \cdot e^x \sin = e^z$.

3.2 Геометрический смысл модуля и аргумента производной

Производная функции $f(z)$, как функция комплексной переменной, определяет отображение некоторой области D, — области дифференцируемости функции $f(z)$, на область G. В каждой точке $z_0 \in D$ определено комплексное число $f'(z_0)$, следовательно определены $|f'(z_0)|$ и $\arg f'(z_0)$, если $f'(z_0) \neq 0$.

Возникает вопрос: как характеризуют эти величины в точке z_0 само отображение $w = f(z)$?

Для функции действительного переменного $f'(x_0)$ — угловой коэффициент касательной.

Рассмотрим геометрические свойства величин $k = |f'(z_0)|$ и $\alpha = \arg f'(z_0)$, полагая $f'(z_0) \neq 0$ и $f(z)$ дифференцируемая в окрестности точки z_0. Так как по определению производной $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta w}{\Delta z}$ предел в точке не зависит от направления и способа стремления Δz к нулю, то можно взять произвольную гладкую кривую γ, проходящую через точку z_0, и на ней любую точку z из окрестности точки z_0.

Образ кривой γ при отображении $w = f(z)$ обозначим Γ, образы точек z_0 и z через w_0 и w соответственно; из непрерывности отображения следует, что $w_0 \in \Gamma$ и $w \in \Gamma$. Приращения переменных $\Delta z = z - z_0$ и $\Delta w = w - w_0$ геометрически есть векторы, их длины — $|\Delta z|$, $|\Delta w|$.

Используя определение производной $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta w}{\Delta z}$ имеем:

$|f'(x_0)| = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \left|\dfrac{\Delta w}{\Delta z}\right|$. Перепишем его следующим образом:

$$|f'(x_0)| = \lim_{\Delta z \to 0} \left|\frac{\Delta w}{\Delta z}\right| = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta l_\Gamma}{\Delta l_\gamma} = \frac{dl_\Gamma}{dl\gamma},$$

здесь Δl_Γ и Δl_γ — длины соответствующих дуг кривых Γ и γ, dl_Γ, $dl\gamma$ — дифференциалы длин дуг (рис. 6).

Отношение $\dfrac{dl_\Gamma}{dl\gamma}$ определяет изменение масштаба (растяжение, сжатие) в точке z_0 при отображении $w = f(z)$ — **геометрический смысл модуля производной**.

Величина $|f'(z_0)|$ не зависит от вида кривой γ, а является величиной постоянной для данной функции $f(z)$ и данной точки z_0.

Для аргумента производной имеет место равенство $\arg f'(z) = \theta - \varphi$, где θ и φ — углы между действительными осями в плоскостях (w), (z) и касательными к кривым Γ и γ в точке z_0. Это следует из того, что аргумент дроби равен разности аргументов числителя и знаменателя.

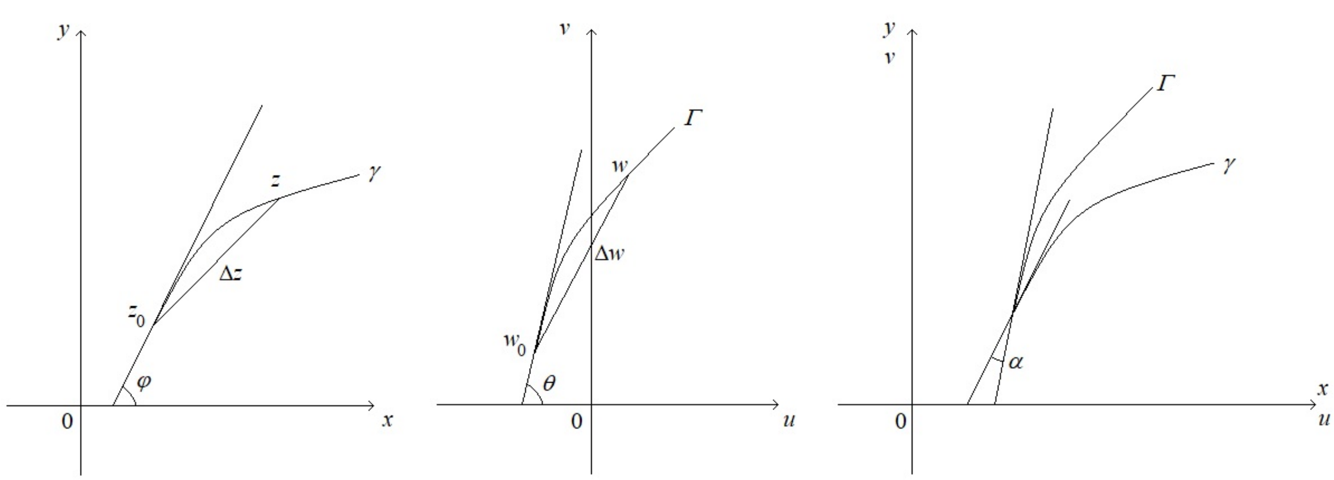

Рис. 6. Геометрический смысл модуля и аргумента производной

Если точки w_0 и z_0 совместить, то $\alpha = \arg f'(x) = \theta - \varphi$ — угол поворота кривой γ в точке z_0 при отображении $w = f(z)$.

Это свойство справедливо для любой пары гладких кривых γ и Г. Из этого следует, что при отображении сохраняются углы между кривыми.

Отображение, сохраняющее углы между кривыми, называется **конформным**.

Утверждение

1. Модуль $|f'(z_0)|$ производной функции $f(z)$, дифференцируемой в окрестности точки z_0, есть коэффициент линейного растяжения кривой в точке z_0 при отображении $w = f(z)$.

2. Аргумент производной в точке — есть угол поворота кривой в этой точке при отображении $w = f(z)$.

3. Отображение с помощью дифференцируемой в окрестности точки z_0 функции $f(z)$, удовлетворяющее условию $f'(z_0) \neq 0$, является конформным в точке z_0. Оно обладает свойством постоянства растяжение и сохранения углов. Причём углы сохраняются как по величине, так и по направлению.

Примеры.

1. Найти коэффициент растяжения и угол поворота в точке $z = 2i$ при отображении $w = \dfrac{z+1}{z+i}$.

Производная: $w' = \dfrac{z+i-z-1}{(z+i)^2} = \dfrac{i-1}{(z+i)^2}$, её значение в точке $2i$: $w'(2i) = \dfrac{1-i}{9}$.

Коэффициент растяжения: $k = |w'(2i)| = \dfrac{1}{9} \cdot \sqrt{2}$.

Угол поворота: $\arg(w'(2i)) = \operatorname{arctg} \dfrac{-1/9}{1/9} = -\dfrac{\pi}{4}$.

2. Определить, какая часть плоскости при отображении $w = z^2$ растягивается, а какая — сжимается.

$$w' = 2z, \ |w'| = 2|z_0| = k.$$

$k > 1$ при $|z| > \dfrac{1}{2}$ — растягивается вне круга радиуса $\dfrac{1}{2}$, с центром в точке $(0,0)$; $k < 1$ при $|z| < \dfrac{1}{2}$ — сжимается внутри круга.

3.3 Свойства аналитических функций

1. Сумма, произведение функций аналитических в точке, есть функция, аналитическая в этой точке. Поэтому, в силу аналитичности функции $w = c$, линейная комбинация функций, аналитических в точке, является аналитической функцией.

2. Частное функций, аналитических в точке, есть функция, аналитическая в этой точке, если знаменатель в ней отличен от нуля.

3. Суперпозиция аналитических функций — функция аналитическая.

4. Если $f(z)$ — аналитическая в точке z_0 и $f'(z_0) \neq 0$, то обратная функция $f^{-1}(w)$ является аналитической в w_0 $(f(z_0) = w_0)$.

5. *Теорема о бесконечной дифференцируемости аналитической функции.* Функция, аналитическая в точке, имеет в этой точке производные любого порядка, которые являются непрерывными в этой точке.

3.4 Восстановление аналитической функции по заданной её действительной или мнимой части

Определение 6 *Вещественнозначная функция $\varphi(x, y)$, удовлетворяющая в некоторой области $D \subset R^2$ унавнению*

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0,$$

*называется **гармонической** в этой области.*

Теорема 1. *Действительная и мнимая части аналитической в некоторой области функции являются гармоническими в этой области.*

Доказательство этой теоремы следует их условия Коши–Римана. Надо продифференцировать его по x или y, и далее сложить или вычесть.

Уравнение $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ или $\Delta u = 0$ называется *уравнение Лапласа*[2].

Две гармонические функции, связанные между собой условиями CR, называются сопряжёнными гармонмческими функциями. Действительная и мнимая части любой аналитической в обласи D функции являются в D сопряжёнными гармоническими функциями.

Учитывая, что вещественная и мнимая части $u(x, y)$ и $v(x, y)$ аналитической функции не являются независимыми друг от друга, а связаны условиями CR можно попытаться, зная одну из них, восстановить другую.

Для нахождения аналитической функции по заданной её действительной или мнимой части необходимо выполнить.

Правило 1

1. Найти частные производные до второго порядка заданной функции двух переменных $u(x, y)$ или $v(x, y)$. Проверить, если требуется, что заданная функция гармоническая, т. е. выполняется в некоторой области D равенство $\Delta u = 0$ или $\Delta v = 0$.

2. Найти по заданной гармонической функции сопряжённую с

[2]Пьер–Симон, маркиз де Лаплас (фр. Pierre–Simon de Laplace; 23 марта 1749 — 5 марта 1827) — французский математик, механик, физик и астроном; известен работами в области небесной механики, дифференциальных уравнений, один из создателей теории вероятностей.

ней функцию, используя формулы:

$$v(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy + C.$$

В случае, если выбрать кривую в виде ломаной со звеньями параллельными осям, то:

$$v(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} -\frac{\partial u(x,y_0)}{\partial y}dx + \int\limits_{y_0}^{y} \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}dy + C.$$

Или

$$u(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \frac{\partial v}{\partial y}dx - \frac{\partial v}{\partial x}dy + C =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\partial v(x,y_0)}{\partial y}dx - \int\limits_{y_0}^{y} \frac{\partial v(x,y)}{\partial x}dy + C.$$

3. Записать функцию $f(z) = u + i \cdot v$.

4. Если задано дополнительное условие — значение функции $f(z)$ в некоторой точке, то следует использовать его для отыскания C.

Правило 2

Если заданы начальные условия, функция восстанавливается однозначно.

1. Дано: $u = u(x,y),\ f(z_0) = C_0$, тогда
$$f(z) = 2u\left(\frac{z+\overline{z}_0}{2}, \frac{z-\overline{z}_0}{2i}\right) - \overline{C}_0.$$

2. Дано: $v = v(x,y),\ f(z_0) = C_0$, тогда
$$f(z) = 2iv\left(\frac{z+\overline{z}_0}{2}, \frac{z-\overline{z}_0}{2i}\right) + \overline{C}_0.$$

Примеры.

1. Найти аналитическую функцию $f(z) = u + iv$ по заданной её действительной части $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 2y$.

2. Найти аналитическую функцию $f(z) = u + iv$ по заданной её действительной части $u(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$, если заданы условия: $f(\pi) = \dfrac{1}{\pi}$.

Список литературы

1. *Бицадзе, А. В.* Основы теории аналитических функций комплексного переменного / А. В. Бицадзе. — М.: Наука, 1969. — 240 с.
2. *Евграфов, М. А.* Аналитические функции. / М. А. Евграфов. — М.: Наука, 1968. — 472 с.
3. *Евграфов, М. А.* Сборник задач по теории аналитических функций / М. А. Евграфов, Ю. В. Сидоров, М. В. Федорук, М. И. Шабунин, К. А. Бежанов. — М.: Наука, 1969. — 388 с.
4. *Пантелеев А. В.* Теория функций комплексного переменного о операционное исчисление в примерах и задачах: учеб. пособ. / А. В. Пантелеев, А. С. Якимова. — М.: Высш. шк., 2001. —445 с.
5. *Привалов И. И.* ВВедение в теорию функций комплексного переменного. / И. И. Привалов. — М.: Физматгиз, 1960. — 444 с.
6. *Лаврентьев, М. А.* Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. — М.: Наука, 1973. — 736 с.
7. *Лунгу, К. Н.* Сборник задач по высшей математики. 2 курс. / К. Н. Лунгу, и др. — М.: Айриспресс, 2006. — 592 с.
8. *Письменный, Д. Т.* Конспект лекций по высшей математике. / Д. Т. Письменный. — М.: Айрис-пресс, 2006.
9. *Буров, А. Н.* Практикум по спецглавам математики: учеб. пособие / А. Н. Буров, Вахрушева Н. Г., Клишина С. В. — Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2001. — 102 с.
10. http://ru.wikipedia.org/wiki/
11. http://mathhelpplanet.com/portal.php

Приложение

Вариант 1

1. Вычислить $\overline{z}_1$; $z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$; z_1/z_2, если $z_1 = 2 + i3$, $z_2 = 3 - i2$, результат записать в алгебраической, тригонометрической и показательной форме.
2. Найти все корни уравнения $x^2 - 2x + 2 = 0$.
3. Найти модуль и аргумент комплексного числа: $(\sqrt{3} - i)^6$.
4. Найти все значения корня: $\sqrt[3]{-27}$.
5. На множестве комплексных чисел решить уравнение $z^4 + 81 = 0$.
6. Выяснить геометрический смысл соотношения и сделать чертёж: $|z - 2| + |z + 2| = 5$.
7. Вычислить значения функций (ответ записать в алгебраической форме): $\arccos 3$, $\mathrm{Ln}\,(\sqrt{3} + i)$.

Вариант 2

1. Вычислить $\overline{z}_1$; $z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$; z_1/z_2, если $z_1 = 2i$, $z_2 = 1 + i$, результат записать в алгебраической, тригонометрической и показательной форме.
2. Найти все корни уравнения $x^2 - 2x + 5 = 0$.
3. Найти модуль и аргумент комплексного числа: $(-1 + i)^5$.
4. Найти все значения корня: $\sqrt[4]{-16}$.
5. На множестве комплексных чисел решить уравнение $z^5 + 32 = 0$.
6. Выяснить геометрический смысл соотношения и сделать чертёж: $|z - 2| + |z + 2| < 1$.
7. Вычислить значения функций (ответ записать в алгебраической форме): $\arcsin 2$, $\mathrm{Ln}\,(1 - i)$.

Вариант 3

1. Вычислить $\overline{z}_1$; z_1+z_2; z_1-z_2; $z_1\cdot z_2$; z_1/z_2, если $z_1=1+i$, $z_2=1-i$, результат записать в алгебраической, тригонометрической и показательной форме.
2. Найти все корни уравнения $x^2+4x+13=0$.
3. Найти модуль и аргумент комплексного числа: $(2+i\cdot\sqrt{12})^5$.
4. Найти все значения корня: $\sqrt[3]{i}$.
5. На множестве комплексных чисел решить уравнение $z^4-16=0$.
6. Выяснить геометрический смысл соотношения и сделать чертёж: $1<|z-2|<9$.
7. Вычислить значения функций (ответ записать в алгебраической форме): $\operatorname{th}\left(3-\dfrac{\pi i}{2}\right)$, $\operatorname{Ln}(1+i)$.

Вариант 4

1. Вычислить $\overline{z}_1$; z_1+z_2; z_1-z_2; $z_1\cdot z_2$; z_1/z_2, если $z_1=5+2i$, $z_2=3-i4$, результат записать в алгебраической, тригонометрической и показательной форме.
2. Найти все корни уравнения $x^2+4x+8=0$.
3. Найти модуль и аргумент комплексного числа: $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^4$.
4. Найти все значения корня: $\sqrt{1-i\sqrt{3}}$.
5. На множестве комплексных чисел решить уравнение $z^3-8=0$.
6. Выяснить геометрический смысл соотношения и сделать чертёж: $|z-i|=|z+3|$.
7. Вычислить значения функций (ответ записать в алгебраической форме): $\arccos i$, $\operatorname{Ln}(-2i)$.

Вариант 5

1. Вычислить $\overline{z}_1$; $z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$; z_1/z_2, если $z_1 = 2 + 4i$, $z_2 = -7 + i$, результат записать в алгебраической, тригонометрической и показательной форме.
2. Найти все корни уравнения $x^2 - 4x + 12 = 0$.
3. Найти модуль и аргумент комплексного числа: $(-1 - i \cdot \sqrt{3})^7$.
4. Найти все значения корня: $\sqrt[3]{-1 + i}$.
5. На множестве комплексных чисел решить уравнение $z^4 + 1 = 0$.
6. Выяснить геометрический смысл соотношения и сделать чертёж: $|z + 2i| + |z - 2i| > 5$.
7. Вычислить значения функций (ответ записать в алгебраической форме): $\cos(3 + i)$, $\mathrm{Ln}\,(-3 + 4i)$.

Вариант 6

1. Вычислить $\overline{z}_1$; $z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$; z_1/z_2, если $z_1 = -5 + 2i$, $z_2 = -3 - i4$, результат записать в алгебраической, тригонометрической и показательной форме.
2. Найти все корни уравнения $x^2 + 3x + 6 = 0$.
3. Найти модуль и аргумент комплексного числа: $(\sqrt{3} + i)^5$.
4. Найти все значения корня: $\sqrt[4]{1 + i}$.
5. На множестве комплексных чисел решить уравнение $z^4 + 625 = 0$.
6. Выяснить геометрический смысл соотношения и сделать чертёж: $|z| < \mathrm{Re}\, z + 1$.
7. Вычислить значения функций (ответ записать в алгебраической форме): $\mathrm{sh}\,(2 - i)$, $\mathrm{Ln}\,(3 - 2i)$.

Вариант 7

1. Вычислить $\overline{z}_1$; z_1+z_2; z_1-z_2; $z_1\cdot z_2$; z_1/z_2, если $z_1=\sqrt{2}-\sqrt{3}i$, $z_2=7-i$, результат записать в алгебраической, тригонометрической и показательной форме.
2. Найти все корни уравнения $x^2-2x+10=0$.
3. Найти модуль и аргумент комплексного числа: $(2-i)^4$.
4. Найти все значения корня: $\sqrt[3]{2-2i}$.
5. На множестве комплексных чисел решить уравнение $z^3-125=0$.
6. Выяснить геометрический смысл соотношения и сделать чертёж: $\operatorname{Re}\dfrac{1}{z}=1$.
7. Вычислить значения функций (ответ записать в алгебраической форме): $\operatorname{ch}(1+2i)$, $\operatorname{Ln}(-1-i)$.

Вариант 8

1. Вычислить $\overline{z}_1$; z_1+z_2; z_1-z_2; $z_1\cdot z_2$; z_1/z_2, если $z_1=-\sqrt{5}-2i$, $z_2=-3+i4$, результат записать в алгебраической, тригонометрической и показательной форме.
2. Найти все корни уравнения $x^2+4x+15=0$.
3. Найти модуль и аргумент комплексного числа: $(-2-i)^6$.
4. Найти все значения корня: $\sqrt[3]{-2+2i}$.
5. На множестве комплексных чисел решить уравнение $z^4+25=0$.
6. Выяснить геометрический смысл соотношения и сделать чертёж: $0<\operatorname{Re}(2iz)<1$.
7. Вычислить значения функций (ответ записать в алгебраической форме): $\operatorname{sh}(2+i)$, $\operatorname{Ln} i^i$.

Вариант 9

1. Вычислить $\overline{z}_1$; z_1+z_2; z_1-z_2; $z_1\cdot z_2$; z_1/z_2, если $z_1=\sqrt{2}+\sqrt{7}i$, $z_2=3-i4$, результат записать в алгебраической, тригонометрической и показательной форме.
2. Найти все корни уравнения $x^2-4x+15=0$.
3. Найти модуль и аргумент комплексного числа: $(-1+i\cdot\sqrt{3})^4$.
4. Найти все значения корня: $\sqrt[4]{32}$.
5. На множестве комплексных чисел решить уравнение $z^4+36=0$.
6. Выяснить геометрический смысл соотношения и сделать чертёж: $\operatorname{Re}\dfrac{1}{z}>\dfrac{1}{2}$.
7. Вычислить значения функций (ответ записать в алгебраической форме): $\cos(3-2i)$, $\operatorname{Ln}(1+i)^i$.

Вариант 10

1. Вычислить $\overline{z}_1$; z_1+z_2; z_1-z_2; $z_1\cdot z_2$; z_1/z_2, если $z_1=-\sqrt{5}+2i$, $z_2=-1+i3$, результат записать в алгебраической, тригонометрической и показательной форме.
2. Найти все корни уравнения $x^2+4x+14=0$.
3. Найти модуль и аргумент комплексного числа: $(1+i\cdot\sqrt{3})^3$.
4. Найти все значения корня: $\sqrt[4]{5-2i}$.
5. На множестве комплексных чисел решить уравнение $z^4+49=0$.
6. Выяснить геометрический смысл соотношения и сделать чертёж: $\operatorname{Im}\dfrac{1}{z}<\dfrac{1}{2}$.
7. Вычислить значения функций (ответ записать в алгебраической форме): $\operatorname{Arctg}(2i)$, $\operatorname{Ln}(i-2)$.