НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В. В. Комиссаров
Н. В. Комиссарова

ЛЕКЦИИ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ГЛАВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

ОСОБЫЕ ТОЧКИ. ВЫЧЕТЫ

Новосибирск 2019

Содержание

1 Особые точки функций комплексного переменного. Вычеты

1.1 Классификация особых точек

Рассмотрим точки в которых нарушается аналитичность функции и, в частности, точки в которых функция не определена.

Исследование функции в особой точке z_0 определяется её поведением в окрестности этой точки, т. е. поведением $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$. Возможны три варианта:

$a)$ $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ — не существует;

$b)$ $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ — существует и равен конечному числу;

$c)$ $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ — равен бесконечности.

Исследование пределов в комплексной области — задача более сложная, чем в действительной области. Представление функции в виде ряда может быть использовано для исследования функции, в частности, в особых точках.

Будем рассматривать *изолированные особые точки* функций, т. е. особые точки для каждой из которых $\exists$ такая её окрестность, в которой нет других особых точек.

Определение 1. *Конечная особая точка $z_0 \in \mathbb{C}$ является изолированной особой точкой функции $f(z)$, если $\exists\ r > 0$, что в круге $|z - z_0| < r$ эта точка единственная особая точка $f(z)$, а в проколотой окрестности $0 < |z - z_0| < r$ — функция аналитическая.*

Согласно теореме Лорана функция $f(z)$ в окрестности особой точки, может быть представлена рядом Лорана, это позволяет свести исследование функции в изолированной особой точке к исследованию соответствующего ряда.

Рассмотрим примеры. Исследуем поведение функций с помощью ряда в окрестности точки $z = 0$:

$a)$ $f(z) = \dfrac{\sin z}{z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!}$, $|z| > 0$.

$$\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = \lim_{z \to 0} \left(1 + \frac{z^2}{3!} + \ldots\right) = 1.$$

Существует конечный предел в этой точке, отсутствует главная часть ряда Лорана.

$b)$ $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^n} = \dfrac{1}{z^{n-1}} - \dfrac{1}{3! z^{n-3}} + \ldots + \dfrac{(-1)^{n-1} z^{n-1}}{(2n-1)!} + \ldots;$

$$\frac{\sin z}{z^n} = \frac{1}{z^{n-1}}(1 - z^2 \varphi(z)).$$

$$\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z^n} = \infty,\ n > 1.$$

Главная часть ряда Лорана содержит конечное число слагаемых.

$c)$ $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$; $\lim\limits_{z \to 0} e^{\frac{1}{z}}$ — не существует.

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2! z^2} + \ldots$$

Ряд Лорана содержит в главной части бесконечно много членов.

Три типа особых точек в зависимости поведения функции в них. В качестве критерия можно выбрать либо тип поведения функции в особой точке, либо вид ряда Лорана.

Определение 2. *Изолированная особая точка $z_0 \in \bar{\mathbb{C}}$ функции $f(z)$ называется:*

- ***устранимой особой точкой****, если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ — существует и равен конечному числу;*

- ***полюсом***, *если* $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ *— равен бесконечности;*
- ***существенно особой точкой***, *если* $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ *— не существует.*

В рассмотренных примерах $z_0 = 0$ для $\dfrac{\sin z}{z}$ — устранимая особая точка; для $\dfrac{\sin z}{z^n}$, $n > 1$ — полюс; для $e^{\frac{1}{z}}$ — существенно особая точка.

Для исследования поведения функции в существенно особой точке имеют место следующие теоремы.

Теорема 1 (Теорема Сохоцкого). *Если z_0 — существенно особая точка функции $f(z)$, то для любого $A \in \bar{\mathbb{C}}$ существует последовательность $\{z_n\}$, сходящаяся к точке z_0, такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = A$.*

Теорема 2 (Теорема Пикара). *В любой окрестности существенно особой точки функция $f(z)$ принимает любое значение (причём бесконечное число раз), кроме, быть может, одного.*

Определение 3. *Особыми точками дробей являются особые точки числителя, особые точки знаменателя и нули знаменателя.*

Ряд Лорана в окрестности особой точки

Вид ряда Лорана в окрестности особой точки зависит от типа особой точки.

- Для того чтобы особая точка функции была её устранимой особой точкой, необходимо и достаточно, чтобы в разложении в ряд Лорана в окрестности этой точки отсутствовала главная часть. Это означает, что если z_0 — устранимая особая точка, то ряд Лорана функции $f(z)$ имеет вид:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,\ 0 < |z - z_0| < r,$$

для z_0 — конечной точки $z_0 \in \mathbb{C}$;

$$f(z) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{z^n},\ R < |z| < \infty, \text{ для } z_0 = \infty.$$

- Для того чтобы особая точка функции была полюсом, необходимо и достаточно, чтобы главная часть ряда Лорана в окрестности этой точки содержала конечное число членов. Ряд Лорана функции $f(z)$ в случае z_0 полюса имеет вид:

$$f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} c_k (z - z_0)^k,\ 0 < |z - z_0| < r,\ z_0 \in \mathbb{C};$$

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{n} c_k \cdot z^k,\ R < |z| < \infty, \text{ для } z_0 = \infty.$$

- Для того чтобы особая точка функции была её существенно особой точкой, необходимо и достаточно, чтобы главная часть ряда Лорана в окрестности этой точки содержала бесконечное число членов. Ряд Лорана функции $f(z)$ в случае z_0 существенно особой точки имеет вид:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,\ 0 < |z - z_0| < r,\ z_0 \in \mathbb{C};$$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot z^n,\ R < |z| < \infty, \text{ для } z_0 = \infty.$$

Номер старшего члена главной части ряда Лорана функции в её разложении в окрестности полюса называется *порядком полюса.*

Так точка $z_0 \in \mathbb{C}$ является полюсом порядка n ($\Pi(n)$) функции $f(z)$ в разложении $f(z) = \sum\limits_{k=-n}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$, $0 < |z - z_0| < r$, $z_0 \in \mathbb{C}$, $c_{-n} \neq 0$, $c_k = 0$, $k < -n$.

Точка $z_0 = \infty$ является полюсом порядка n ($\Pi(n)$) функции $f(z)$, если в разложении $f(z) = \sum\limits_{k=-\infty}^{n} c_k \cdot z^k$, $R < |z| < \infty$, $c_n \neq 0$, $c_k = 0$, $k > n$.

Пример

Определить тип особых точек функции $f(z) = \dfrac{z+2}{z^2 - 2z - 3}$.

Особые точки $z_1 = -1$, $z_2 = 3$, $z = \infty$.

Разложение $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности $z_1 = -1$.

$$f(z) = \frac{z+2}{z^2 - 2z - 3} = \frac{-0,25}{z+1} + \frac{1,25}{z-3} =$$

$$= \frac{-0,25}{z+1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5(z+1)^n}{4^{n+2}},\ 0 < |z+1| < 4.$$

Первое слагаемое — главная часть, $c_1 = -0,25$, второе слагаемое — правильная часть $\Rightarrow z_1 = -1$ — полюс первого порядка.

Аналогично в окрестности $z = 3$.

$$f(z) = \frac{z+2}{z^2 - 2z - 3} = \frac{-0,25}{z+1} + \frac{1,25}{z-3} =$$

$$= \frac{1,25}{z-3} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4^{n+2}}(z-3)^n,\ 0 < |z-3| < 4.$$

$z_2 = 3$ — полюс первого порядка.

Разложение в окрестности бесконечно удалённой точки $|z| > 3$.

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 5 \cdot 3^{n-1}}{4} \frac{1}{z^n},\ |z| > 3.$$

$z = \infty$ — устранимая особая точка.

Для бесконечно удалённой точки справедливы следующие утверждения.

1. Чтобы $z = \infty$ была устранимой особой точкой функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы точка $\xi = 0$ была устранимой (или не особой) для $\varphi(\xi) = f\left(\dfrac{1}{\xi}\right)$.

2. Чтобы $z = \infty$ была полюсом порядка n функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы точка $\xi = 0$ была полюсом порядка n для функции $\varphi(\xi) = f\left(\dfrac{1}{\xi}\right)$.

3. Чтобы $z = \infty$ была существенно особой точкой функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы точка $\xi = 0$ была существенно особой точкой функции $\varphi(\xi) = f\left(\dfrac{1}{\xi}\right)$.

Правила определения порядка полюса

1. Для того чтобы точка z_0 была полюсом порядка n функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы её можно было записать в виде:
$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^n},\ \varphi(z_0) \neq 0.$$

2. Для того чтобы точка z_0 была полюсом порядка n функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы она была нулём порядка n функции $\dfrac{1}{f(z)}$ (связь нулей с полюсом).

3. Если точка z_0 является нулём порядка k функции $f_1(z)$ и нулём порядка m функции $f_2(z)$ $(m > k)$, то она полюс порядка $(m - k)$ для функции $\dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}$.

Порядок определения полюса в бесконечно удалённой точке

Поведение функции $f(z)$ в бесконечно удалённой точке можно определить, вычисляя $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$, или раскладывая функцию в ряд Лорана, или сведя задачу к исследованию конечной точки $\xi = 0$ $\left(\dfrac{1}{z} = \xi\right)$.

Пусть $z = \infty$ — $\Pi(n)$ для функции $f(z)$, тогда $\xi = 0$ — $\Pi(n)$

для $f\left(\dfrac{1}{\xi}\right)$ и можно записать :

$$f\left(\frac{1}{\xi}\right) = \frac{F(\xi)}{\xi^n},\ F(\xi) \neq 0$$

или

$$f(z) = z^n \cdot \varphi(z),\ \lim_{z\to\infty} \varphi(z) \neq 0,\ \lim_{z\to\infty} \varphi(z) \neq \infty.$$

Эти представления функции являются необходимым и достаточным условиям полюса порядка n в точке $z = \infty$.

Пример

Определить тип особой точки $z = \infty$ для функций: $f(z) = z^2(z-2)$ и $f(z) = \dfrac{z^5 + z^2 + 1}{z^3 - 2z}$.

1.2 Определение вычета

Пусть $z_0 \in \bar{\mathbb{C}}$ — изолированная особая точка функции $f(z)$. По следствию из основной теоремы Коши интеграл: $\oint\limits_\gamma f(z)dz$ (γ — произвольный контур, являющийся границей области, содержащей z_0) имеет одно и то же значение, независимо от вида кривой γ, т. е. интеграл характеризует поведение функции $f(z)$ в особой точке z_0.

Определение 4. ***Вычетом функции*** $f(z)$ *в изолированной особой точке* $z_0 \in \bar{\mathbb{C}}$ *называется интеграл* $\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_\gamma f(z)dz$, *где* γ *— контур, принадлежащий окрестности точки* z_0 *и охватывающий её.*

Обход контура — положительный, т. е. область им ограниченная и принадлежащая окрестности z_0 при обходе расположена слева: для $z_0 \in \mathbb{C}$ — обход против часовой стрелки, для $z_0 = \infty$

по часовой. Обозначают вычет: $\operatorname*{res}_{z_0} f(z)$.

$$\operatorname*{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} f(z)dz,\ \gamma \in O(z_0) \setminus z_0; 0 < |z - z_0| < R; \qquad (1)$$

$$\operatorname*{res}_{\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} f(z)dz,\ \gamma \in O(\infty) \setminus \infty; R < |z| < \infty. \qquad (2)$$

В силу того, что в окрестности особой функция разлагается в ряд Лорана, то используя формулы для коэффициентов ряда Лорана справедливо следующее заключение.

Теорема 3 (О вычислении вычета). *Вычет функции в изолированной особой точке равен коэффициенту c_{-1} при первой отрицательной степени в разложении функции в ряд Лорана в окрестности этой точки, т. е. при $\dfrac{1}{z - z_0}$ для $z_0 \in \mathbb{C}$, и этому коэффициенту, взятому с противоположным знаком, для $z_0 = \infty$.*

$$\operatorname*{res}_{z_0} f(z) = c_{-1},\ z_0 \in \mathbb{C}; \qquad (3)$$

$$\operatorname*{res}_{\infty} f(z) = -c_{-1},\ z_0 \in \infty. \qquad (4)$$

При этом в зависимости от характера особой точки z_0 верны следующие утверждения:

1) *вычет в устранимой особой точке равен нулю;*

2) *для простого полюса* ($\Pi(1)$)*:*

$$\operatorname*{res}_{z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} (f(z)(z - z_0));$$

3) *для полюса порядка n* ($\Pi(n)$, $n > 1$)*:*

$$\operatorname*{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (f(z)(z - z_0)^n);$$

4) *если функция* $f(z)$ *в окрестности точки* $z = z_0$ *представима в виде* $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, *причём* $\varphi(z)$ *и* $\psi(z)$ *—аналитические функции, такие, что* $\varphi(z_0 \neq 0)$, $\psi(z_0) = 0$, $\psi'(z_0) \neq 0$ *(*z_0 *— простой полюс), то*

$$\operatorname*{res}_{z_0} f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)};$$

5) *для существенно особой точки вычет находится из разложения Лорана в окрестности точки* z_0

$$\operatorname*{res}_{z_0} f(z) = c_{-1},\ z_0 \in \mathbb{C};$$

$$\operatorname*{res}_{\infty} f(z) = -c_{-1},\ z_0 \in \infty.$$

С помощью вычетов можно записать в другой форме основную теорему Коши для сложного контура.

Теорема 4 (Коши о вычетах). *Если функция* $f(z)$ *аналитическая в* $\bar{D}$ *за исключением конечного числа особых точек* $z_k \in D$, *то справедливо равенство:*

$$\oint\limits_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_k} f(z),\ z_k \in D, \tag{5}$$

где C *— граница области* D.

Теорема 5 (обобщённая теорема о вычетах). *Сумма вычетов функция* $f(z)$ *во всех её особых точках, включая бесконечно удалённую точку, равна нулю:*

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_k} f(z) + \operatorname*{res}_{\infty} f(z) = 0. \tag{6}$$

где C *— граница области* D.

При нахождении вычетов можно использовать формулы (3), (4), т. е. используется разложение функции в рад Лорана. При этом знание типа особой точки, в которой вычисляется вычет функции, не является обязательным. Таким методом всегда определяется вычет в существенно особой точке функции. В случае устранимой особой точки и полюсов задачу вычисления вычета можно заменить некоторыми практически более удобными формулами и правилами. Они следуют из исследования разложения функции в ряд в окрестности особой точки, а тип особой точки определяется по поведению функции, т. е. вычислением предела.

Так, если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) \neq \infty$ и z_0 — конечная особая точка, то в разложении функции в ряд Лорана в окрестности точки z_0 отсутствует главная часть. Следовательно $c_{-1}=0$ и $\operatorname*{res}\limits_{z_0} f(z)=0$.

Если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$, т. е. z_0 — полюс функции $f(z)$, то можно определить порядок полюса, также не прибегая к разложению функции в ряд. Пусть z_0 — $\Pi(n)$ функции $f(z)$, тогда разложение функции в ряд в окрестности z_0 имеет вид: $f(z)=\sum\limits_{k=-n}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$. Умножив обе части равенства на $(z-z_0)^n$ и продифференцировав результат $(n-1)$ раз, получим выражение:

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(f(z)(z-z_0)^n)=(n-1)!c_{-1}+n!c_0(z-z_0)+\ldots,$$

из которого получаем

$$c_{-1}=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(f(z)(z-z_0)^n).$$

В частности при $n=1$ имеем: $c_{-1}=\lim\limits_{z\to z_0} f(z)(z-z_0)$.

Для функции вида $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(z)$, $\psi(z)$ — аналитические функции в точке z_0 и $\varphi(z_0)\neq 0$, $\psi(z_0)=0$ $\psi'(z_0)\neq 0$

получим:

$$c_{-1} = \lim_{z\to z_0} \frac{\varphi(z)(z-z_0)}{\psi(z)} = \lim_{z\to z_0} \frac{\varphi(z)}{\dfrac{\psi(z)-\psi(z_0)}{z-z_0}} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

В результате для конечной особой точки получили следующие утверждения.

1. Если конечная особая точка z_0 является устранимой особой точкой функции $f(z)$, то $\operatorname*{res}_{z_0} f(z) = 0$, $z_0 \in \mathbb{C}$.

2. Если z_0 полюс порядка n функции $f(z)$ $z_0 \in \mathbb{C}$,
$$\operatorname*{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(f(z)(z-z_0)^n).$$

3. Если z_0 — $\Pi(n)$ функции $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(z)$, $\psi(z)$ — аналитические функции в точке z_0 и $\varphi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) = 0$ $\psi'(z_0) \neq 0$:
$$\operatorname*{res}_{z_0} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

Примеры

Найти вычеты в конечных особых точках функций:

1) $f(z) = \dfrac{z+2}{z^2-2z-3}$;

2) $f(z) = \dfrac{z+2}{(z+1)^2(z-3)}$;

3) $f(z) = \dfrac{1-\cos z}{z^2}$.

Рассмотрим бесконечно удалённую точку в случае, когда она является устранимой особой точкой для $f(z)$. Разложение функции в ряд Лорана имеет вид:

$$f(z) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{z^n},\ R < |z| < \infty, \text{ для } z_0 = \infty.$$

Коэффициент c_{-1} можно определить из этого равенства следующим образом: $c_{-1} = \lim\limits_{z\to\infty}((f(z) - c_0)\cdot z)$. Так как, очевидно $c_0 = \lim\limits_{z\to\infty} f(z)$, то, доопределяя функцию, положим $f(\infty) = \lim\limits_{z\to\infty} f(z) = c_0$. Получаем формулу для вычисления вычета в $z = \infty$ — устранимой особой точке функции $f(z)$:

$$\operatorname*{res}_{\infty} f(z) = -c_{-1} = \lim_{z\to\infty}((f(\infty) - f(z))\cdot z).$$

В частности, если $z = \infty$ является нулём функции $f(z)$, т. е. $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$, то формула принимает вид:

$$\operatorname*{res}_{\infty} f(z) = -c_{-1} = \lim_{z\to\infty}(-f(z)\cdot z).$$

Примеры

Найти вычеты функций в $z = \infty$:

1) $f(z) = \dfrac{z+2}{z^2-2z-3}$;

2) $f(z) = \dfrac{3z^2+2}{z^2+z-4}$.

1.3 Вычисление контурных интегралов с помощью вычетов

Алгоритм вычисления интегралов $\oint\limits_C f(z)dz$

1. Найти особые точки функции $f(z)$.
2. Определить, какие из этих точек расположены в области D, ограниченной контуром C.
3. Найти значения вычетов в тех особых точках, которые расположены в области D.
4. Записать результат по формуле:

$$\oint\limits_C f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{res}_{z_k} f(z),\ z_k \in D.$$

Пример

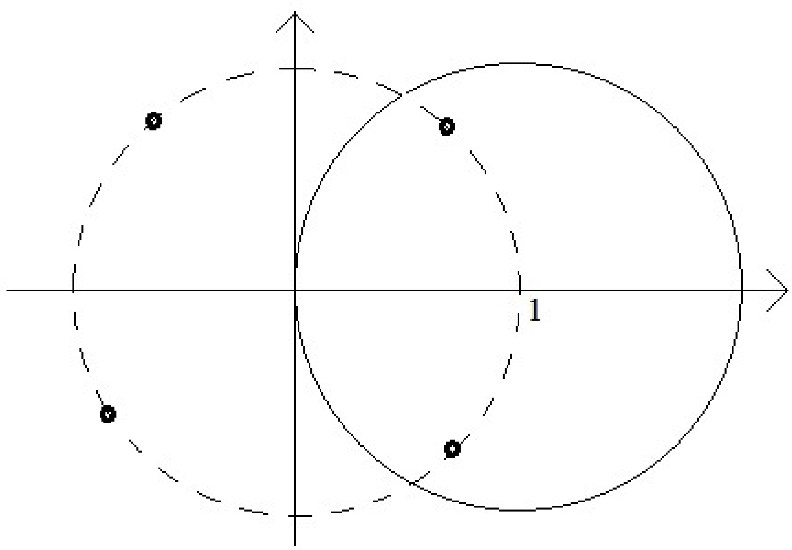
Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z-1|=1} \dfrac{dz}{z^4+1}$.

1) Особые точки функции $f(z) = \dfrac{1}{z^4+1}$ — нули знаменателя:

$$z_k = e^{\left(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\right)i},\ k = 0, 1, 2, 3.$$

Все точки простые полюсы.

2) В область попадают точки $z_0 = e^{\frac{\pi}{4}i}$ и $z_3 = e^{-\frac{\pi}{4}i}$



3) Для нахождения вычетов воспользуемся формулой:

$$\operatorname*{res}_{z_k} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\varphi(z_k)}{\psi'(z_k)}$$

$$\operatorname*{res}_{z_0} \frac{1}{z^4+1} = \left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z=e^{\frac{\pi}{4}i}} = \frac{1}{4}e^{-\frac{3\pi}{4}i},$$

$$\operatorname*{res}_{z_3} \frac{1}{z^4+1} = \left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z=e^{-\frac{\pi}{4}i}} = \frac{1}{4}e^{\frac{3\pi}{4}i},$$

4) $\oint\limits_{|z-1|=1} \dfrac{dz}{z^4+1} = 2\pi i\left(\dfrac{e^{-\frac{3\pi}{4}i}+e^{\frac{3\pi}{4}i}}{4}\right) = \pi i\cos\dfrac{3}{4}\pi = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi i.$

1.4 Применение вычетов к вычислению интегралов от функции действительного переменного

Можно использовать аппарат вычетов при вычислении определённых интегралов от функции действительной переменной.

Если подобрать некоторую функцию, переводящую отрезок $[a,b]$ в замкнутую кривую C, то вычисление интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ можно свести к вычислению интеграла $\oint\limits_C F(z)dz$. Простейшая задача такого вида связана с преобразованием отрезка $[0,2\pi]$ в окружность.

Интегралы вида $\int\limits_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)dx$

Здесь $R(\cos x, \sin x) = R(u,v)$ — рациональная функция аргументов u, v. Для вычисления таких интегралов в математическом анализе используется замена $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$.

Отрезок $[0,2\pi]$ изменения переменной можно рассматривать как изменение $\arg z$ точки z, принадлежащей окружности. Действительно, замена $z = e^{ix}$ переводит отрезок $[0,2\pi]$ в окружность: $|z| = 1$, $0 \leq \arg z \leq 2\pi$. При этом для переменных $u = \cos x$ и $v = \sin x$ получаться несложные, причём рациональные выражения через z.

По формуле Эйлера имеем: $\cos x = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$, $\sin x = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} = \dfrac{1}{2i}\left(z-\dfrac{1}{z}\right)$. Из того, что $e^{ix} = z$ имеем $ie^{ix}dx = dz$, $dx = \dfrac{dz}{iz}$.

В результате получаем формулу, Связывающую интеграл от действительной переменной с интегралом по замкнутой кривой от функции комплексного переменного:

$$\int\limits_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)dx = \oint\limits_{|z|=1} R\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)\frac{dz}{iz}.$$

Полученный интеграл в правой части выражения — есть интеграл от рациональной функции особыми точками которой являются только полюсы.

Пример

Вычислить интеграл $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{(5+4\cos x)^2}dx$.

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\ dx = \frac{dz}{iz},\ 5+4\cos x = \frac{2z^2+5z+2}{z}.$$

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{(5+4\cos x)^2}dx = \oint\limits_{|z|=1} \frac{zdz}{i(2z^2+5z+2)^2}.$$

Особыми точками подынтегральной функции являются нули знаменателя — корни уравнения $2z^2+5z+2=0$, $z_1=-2$, $z_2=-0,5$.

$$(2z^2+5z+2)^2 = (2(z+2)(z+0,5))^2 = 4(z+2)^2(z+0,5)^2.$$

Точка $z_1=-2$ не принадлежит области $|z|<1$, $z_2=-0,5$ — полюс второго порядка: $\Pi(2)$.

$$\operatorname*{res}_{z_2=-0,5} \frac{z}{4i(z+2)^2(z+0,5)^2} = \frac{1}{4i}\lim_{z\to-0,5}\left(\frac{z(z+0,5)^2}{(z+2)^2(z+0,5)^2}\right)' = \frac{5}{27i}.$$

В результате:

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{(5+4\cos x)^2}dx = 2\pi i\cdot\frac{5}{27i} = \frac{10\pi}{27}.$$

1.5 Вычисление несобственных интегралов с помощью вычетов

Рассмотрим применение вычетов для вычисления интегралов вида: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$. Здесь функция $f(x)$ непрерывная на $(-\infty, \infty)$, а интеграл понимается в смысле главного значения: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{-R}^{R} f(x)dx$.

Возможность использования вычетов при решении такой задачи основана на том, что отрезок $[-R, R]$ действительной оси рассматривается как часть замкнутого контура C, состоящего из этого отрезка и дуги окружности, а интеграл по контуру записывается в виде суммы:

$$\oint\limits_C f(z)dz = \int\limits_{-R}^{R} f(x)dx + \int\limits_{C_R} f(z)dz,$$

где C_R — дуга окружности $|z| = R$, $\operatorname{Im} z \geq 0$.

Несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ определяется как предел:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \oint\limits_C f(z)dz - \int\limits_{C_R} f(z)dz.$$

Пример

Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{dx}{x^4+1}$.

Рассмотрим контур C, состоящий из дуги C_R — окружности $|z| = R$, $\operatorname{Im} z \geq 0$ и отрезка $[-R, R]$. Особые точки функции $f(z) = \dfrac{1}{z^4+1}$, попадающие внутрь контура C: $z_0 = e^{\frac{\pi}{4}i}$ и $z_1 = e^{\frac{3\pi}{4}i}$ — простые полюсы. Имеем:

$$\oint\limits_C \frac{dz}{z^4+1} = 2\pi i \left(\operatorname*{res}_{z_0} f(z) + \operatorname*{res}_{z_1} f(z) \right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

Оценим интеграл по дуге $\oint\limits_{C_R} \dfrac{dz}{z^4+1}$. Для подынтегральной функции имеем: $\left|\dfrac{1}{z^4+1}\right| = \dfrac{1}{|z^4+1|} < \dfrac{1}{|z|^4-1}$, т. к. $z \in C_R$, $|z| = R$ имеем: $\left|\dfrac{1}{z^4+1}\right| < \dfrac{1}{R^4-1}$.

$$\left|\int\limits_{C_R} \frac{dz}{z^4+1}\right| < \int\limits_{C_R} \left|\frac{dz}{z^4+1}\right| < \frac{1}{R^4-1}\int\limits_{C_R} |dz| = \frac{1}{R^4-1}\pi R,$$

из этого следует:

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{C_R} \frac{dz}{z^4+1} = 0.$$

В результате: $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{-R}^{R} \dfrac{dx}{x^4+1} = \oint\limits_{C} \dfrac{dz}{z^4+1} = \dfrac{\pi\sqrt{2}}{2}$, т. е.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

Используя подобный приём вычисляются интегралы $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$, где функция $f(x)$ такова, что $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{C_R} f(z)dz = 0$. Для функций этого класса справедлива формула:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \oint\limits_{C} f(z)dz.$$

Рассмотрим интегралы вида $\int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x)dx$, где $R(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ — дробно–рациональная функция, $P_n(x)$, $Q_m(x)$ — многочлены степени n и m.

Теорема 6. *Пусть* $R(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ *удовлетворяет условиям:*

1) $m - n \geq 2$, *т. е. степень знаменателя больше степени числителя по крайней мере на два;*

2) $Q_m(x) \neq 0$ *для* x *— действительных, т. е.* $R(z)$ *не имеет особых точек на действительной оси.*

Тогда справедливы равенства:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{p} \operatorname*{res}_{z_k} R(z),\ \operatorname{Im} z_k > 0, \tag{7}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x)dx = -2\pi i \sum_{k=1}^{p} \operatorname*{res}_{z_k} R(z),\ \operatorname{Im} z_k < 0, \tag{8}$$

где z_k, $k = 1, 2, \ldots, p$ *— все особые точки функции* $R(z)$, *расположенные выше оси* Ox $(\operatorname{Im} z_k > 0)$ *в случае* (7) *и ниже оси* Ox $(\operatorname{Im} z_k < 0)$ *в случае* (8).

Замечание

Если $R(x)$ — чётная функция, то можно, используя эти формулы, вычислять интегралы вида $\int\limits_{0}^{\infty} f(x)dx$, т. к. для чётных функций справедливо равенство: $\int\limits_{-R}^{R} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{R} f(x)dx$.

Алгоритм вычисления интегралов $\int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x)dx$ *с помощью вычетов*

1. Проверить условия применения формул (7) или (8) (см. теорема 6).

2. Найти особые точки подынтегральной функции $R(z)$.

3. Вычислить вычеты в особых точках функции $R(z)$, расположенных

a) выше оси Ox, если применяется (7);

b) ниже оси Ox, если применяется (8).

4. Записать результат по формуле (7) или (8).

Пример

Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{x^2+3}{(x^2+2x+17)^2}dx$.

1. Проверим условия теоремы 6: $n = 2$, $m = 4$, $m - n = 2$, $D = 4 - 68 = -64 < 0$ — вещественных корней знаменателя нет.

2. Особые точки функции $f(z) = \dfrac{z^2+3}{(z^2+2z+17)^2}$ — полюсы второго порядка $z_1 = 1 + 4i$ и $z_2 = 1 - 4i$.

3. Воспользуемся формулой для полюса порядка n $(\Pi(n),\ n > 1)$ $\operatorname*{res}\limits_{z_0} f(z) = \dfrac{1}{(n-1)!} \lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(f(z)(z-z_0)^n)$:

$$\operatorname*{res}_{z_1} \frac{z^2+3}{(z^2+2z+17)^2} = \lim_{z\to z_1} \left(\frac{(z^2+3)(z-z_1)^2}{(z-z_1)^2(z-z_2)^2}\right)' =$$

$$= \lim_{z\to z_1} \left(\frac{(z^2+3)}{(z-z_2)^2}\right)' = \frac{5}{8^2 i}.$$

4. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{x^2+3}{(x^2+2x+17)^2}dx = 2\pi i \dfrac{5}{8^2 i} = \dfrac{5\pi}{32}$.

Список литературы

1. *Бицадзе, А. В.* Основы теории аналитических функций комплексного переменного / А. В. Бицадзе. — М.: Наука, 1969. — 240 с.
2. *Евграфов, М. А.* Аналитические функции. / М. А. Евграфов. — М.: Наука, 1968. — 472 с.
3. *Евграфов, М. А.* Сборник задач по теории аналитических функций / М. А. Евграфов, Ю. В. Сидоров, М. В. Федорук, М. И. Шабунин, К. А. Бежанов. — М.: Наука, 1969. — 388 с.
4. *Пантелеев А. В.* Теория функций комплексного переменного о операционное исчисление в примерах и задачах: учеб. пособ. / А. В. Пантелеев, А. С. Якимова. — М.: Высш. шк., 2001. —445 с.
5. *Привалов И. И.* Введение в теорию функций комплексного переменного. / И. И. Привалов. — М.: Физматгиз, 1960. — 444 с.
6. *Лаврентьев, М. А.* Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. — М.: Наука, 1973. — 736 с.
7. *Лунгу, К. Н.* Сборник задач по высшей математики. 2 курс. / К. Н. Лунгу, и др. — М.: Айриспресс, 2006. — 592 с.
8. *Письменный, Д. Т.* Конспект лекций по высшей математике. / Д. Т. Письменный. — М.: Айрис-пресс, 2006.
9. *Буров, А. Н.* Практикум по спецглавам математики: учеб. пособие / А. Н. Буров, Н. Г. Вахрушева, С. В. Клишина — Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2001. — 102 с.
10. http://ru.wikipedia.org/wiki/
11. http://mathhelpplanet.com/portal.php