

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В. В. Комиссаров
Н. В. Комиссарова

ЛЕКЦИИ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ГЛАВЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА
ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Новосибирск 2019



Содержание

1	Операционное исчисление	4
1.1	Преобразование Лапласа	4
1.2	Свойства преобразования Лапласа	8
1.3	Нахождение изображения по оригиналу	20
1.3.1	Таблица преобразования Лапласа	21
1.3.2	Применение таблицы и свойств преобразования Лапласа	23
1.3.3	Нахождение изображений функций, заданных графически	25
1.3.4	Нахождение изображений периодических функций	28
1.4	Нахождение оригинала по изображению	29
1.5	Применение операционного исчисления	36
1.5.1	Решение задачи Коши для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами	36
1.5.2	Применение интеграла Дюамеля и теоремы Бореля	40
	Список литературы	44

1 Операционное исчисление

1.1 Преобразование Лапласа

Определение 1. ***Оригинал** — комплекснозначная функция $f(t)$ действительного аргумента t , которая удовлетворяет следующим условиям:*

- 1) $f(t) = 0, t < 0;$

- 2) $f(t)$ локально интегрируема, то есть на любом конечном промежутке $[a, b], 0 \leq a < b$ существует интеграл $\int_a^b f(t)dt$ (или на любом конечном отрезке $[a, b]$ $f(t)$ удовлетворяет условиям Дирихле, т. е. а) ограничена; б) либо непрерывна, либо имеет конечное число разрывов 1-го рода; в) имеет конечное число экстремумов);

- 3) $f(t)$ имеет ограниченный рост, т. е. возрастает не быстрее показательной функции: существуют такие постоянные $M > 0$ и $\sigma \geq 0$, что

$$|f(t)| < M \cdot e^{\sigma t}, t > 0.$$

Замечание

Величина $\sigma_0 = \inf \sigma$ называется *показателем роста* функции $f(t)$. Для любой ограниченной функции, являющейся оригиналом, можно принять $\sigma_0 = 0$.

Если функция $\varphi(t) \neq 0$ при $t < 0$, то её можно считать умноженной на функцию Хэвисайда $\eta(t)$:

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

т. е. функцию-оригинал можно считать домноженной на эту функцию:

$$f(t) = \varphi(t) \cdot \eta(t).$$

Также используется запись:

$$\eta(t - \tau) = \begin{cases} 1, & t > \tau \\ 0, & t \leq \tau \end{cases}$$

где τ — точка приложения. Так как во многих практических задачах аргумент t имеет смысл времени, то τ также называется моментом приложения единичной ступеньки. В системах автоматического регулирования и управления функция $\eta(t - \tau)$ рассматривается как типовой входной сигнал.

Совокупность всех оригиналов называется *пространством оригиналов*.

Примеры

Проверить, являются ли функции оригиналами:

$$a) f_1(t) = \begin{cases} 2e^{5t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Да. $M = 2$, $\sigma = 5$, условия 1) – 3) выполнены;

$$b) f_2(t) = \begin{cases} \frac{1}{t-2}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Нет. $t = 2$ точка разрыва 2-го рода.

$$c) f_3(t) = \begin{cases} 3^{4t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Нет. $3^{4t} > Me^{\sigma t}$ для $\forall M$ и σ .

Определение 2. *Изображение функции $f(t)$ — функция $F(p)$ комплексного переменного p , определяемая равенством:*

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt. \quad (1)$$

Область существования этой функции определяется областью сходимости **интеграла Лапласа**, стоящего в правой части равенства.

Теорема 1. Если функция $f(t)$ является оригиналом, то интеграл Лапласа сходится абсолютно в области $\operatorname{Re} p = \sigma > \sigma_0$, где σ_0 — показатель роста оригинала. Внутри этой области (рис. 1), т. е. на любом замкнутом подмножестве $\operatorname{Re} p = \sigma \geq a > \sigma_0$, интеграл сходится равномерно и определяет аналитическую функцию $F(p)$.

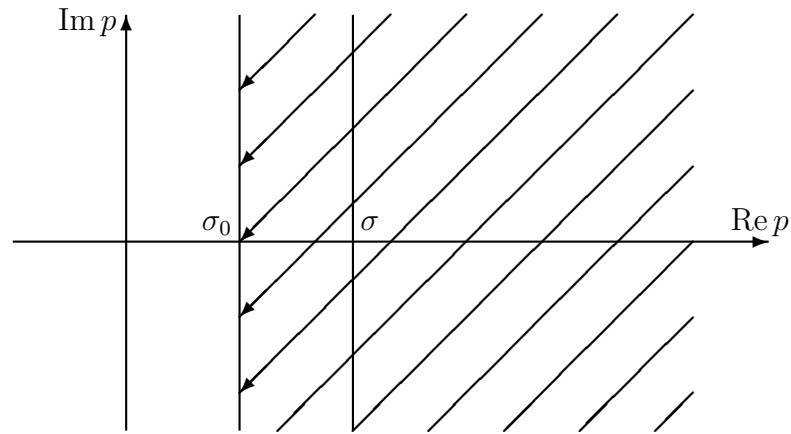


Рис. 1. Область сходимости интеграла Лапласа

Замечания

1. Утверждение теоремы 1 аналогично свойствам степенных рядов, сходящихся в круге и равномерно сходящихся внутри этого круга, где сумма ряда является аналитической функцией.
2. Свойство аналитичности изображения имеет важное значение в теории и практике применения преобразования Лапласа, так как позволяет использовать в пространстве изображений методы теории аналитических функций, в частности разложения функций в ряды и теорию вычетов.
3. Совокупность всех изображений $F(p)$ называется *пространством изображений*.
4. Переход, определяющий изображение $F(p)$ по оригиналу $f(t)$,

называется *преобразованием Лапласа*:

$$F(p) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt.$$

Запись $F(p) = L[f(t)]$ означает, что оригиналу $f(t)$ соответствует изображение $F(p)$.

5. Оригинал по изображению находится с помощью *обратного преобразования Лапласа* по формуле обращения:

$$f(t) = L^{-1}[F(p)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt} F(p) dp, \quad (2)$$

где путь интегрирования — любая прямая $\operatorname{Re} p = \sigma$, параллельная мнимой оси и лежащая правее прямой $\operatorname{Re} p = \sigma_0$ (рис. 1).

6. Для преобразования Лапласа используются различные обозначения, например $f(t) \doteq F(p)$ и $F(p) \doteq f(t)$, что означает: оригиналу $f(t)$ соответствует изображение $F(p)$ и изображению $F(p)$ соответствует оригинал $f(t)$.
7. Функция $F(p)$, являющаяся изображением, удовлетворяет *необходимому условию*: если $F(p)$ есть изображение, то $F(p) \rightarrow 0$ при $\operatorname{Re} p = \sigma \rightarrow \infty$.

Поэтому функции $F_1(p) = 1$, $F_2(p) = p$, $F_3(p) = \sin p$, $F_4(p) = \frac{p}{p-1}$ не являются изображениями. Однако в практических задачах функции типа $F_1(p) = 1$, $F_2(p) = p$ и другие встречаются. Это требует расширение понятия оригинала и изображения.

Класс оригиналов можно расширить, включив в него функции, которые могут быть не ограничены в окрестности некоторых конечных точек, но такие, что интеграл Лапласа от

них, тем не менее, сходится в некоторой полуплоскости $\operatorname{Re} p > \sigma_0$. К числу таких обобщённых оригиналов относятся степенная функция $f(t) = t^\mu$ при $\mu > -1$, $\ln t$ и некоторые другие.

8. Во всякой точке t_0 , являющейся точкой разрыва функции $f(t)$, правая часть формулы (2) равна $\frac{1}{2} [f(t_0 - 0) + f(t_0 + 0)]$.

Примеры

1. Найти изображение функции Хэвисайда $f(t) = \eta(t)$.

Функция $\eta(t)$ ограничена, показатель роста $\sigma_0 = 0$.

$$F(p) = L[\eta(t)] = \int_0^{+\infty} \eta(t) e^{-pt} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A \eta(t) e^{-pt} dt = \frac{1}{p}.$$

2. Найти изображение функции $f(t) = e^{at}$, где $a \in R$.

Показатель роста $\sigma_0 = a$.

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{at} e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} e^{(a-p)t} dt = \frac{1}{p - a}.$$

1.2 Свойства преобразования Лапласа

1. Линейность. Если $f_1(t), \dots, f_n(t)$ — оригиналы, $F_1(p), \dots, F_n(p)$ — соответствующие им изображения, то для любых комплексных чисел c_i , $i = 1, \dots, n$, функция $\sum_{k=1}^n c_k f_k(t)$ является оригиналом и справедливо равенство:

$$L \left[\sum_{k=1}^n c_k f_k(t) \right] = \sum_{k=1}^n c_k L[f_k(t)] = \sum_{k=1}^n c_k F_k(p), \quad (3)$$

$$\operatorname{Re} p > \max(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$$

или

$$\sum_{k=1}^n c_k f_k(t) \doteq \sum_{k=1}^n c_k F_k(p), \operatorname{Re} p > \max(\sigma_1, \dots, \sigma_n).$$

Справедливо и обратное утверждение: если $F_1(p), \dots, F_n(p)$ — изображения, то

$$L^{-1} [c_1 F_1(p) + \dots + c_n F_n(p)] = c_1 f_1(t) + \dots + c_n f_n(t).$$

Примеры

1. Найти изображение функции $f(t) = 3 + 2e^{-t}$.

$$f(t) = 3 \cdot \eta(t) + \eta(t) \cdot 2e^{-t}, \eta(t) \doteq \frac{1}{p}, e^{-t} \doteq \frac{1}{p+1}.$$

$$3 + 2e^{-t} \doteq 3 \cdot \frac{1}{p} + 2 \cdot \frac{1}{p+1}.$$

2. Найти изображение функции $f(t) = \cos(t)$.

$$\cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{1}{2}e^{it} + \frac{1}{2}e^{-it}.$$

$$\cos(t) \doteq \frac{1}{2} \frac{1}{p-i} + \frac{1}{2} \frac{1}{p+i} = \frac{p}{p^2 + 1}.$$

2. Подобие (теорема подобия). Для любого $a > 0$ из $F(p) = L[f(t)]$ следует

$$L[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right), \operatorname{Re} p > a\sigma_0, \quad (4)$$

и обратно

$$L^{-1}[F(ap)] = \frac{1}{a} f\left(\frac{t}{a}\right).$$

Пример

Найти изображение функции $f(t) = \cos(at)$.

$$L[\cos(at)] = \frac{1}{a} \cdot \frac{\frac{p}{a}}{\left(\frac{p}{a}\right)^2 + 1} = \frac{p}{p^2 + a^2}.$$

3. Смещение (теорема смещения). При любом комплексном a из $F(p) = L[f(t)]$ следует

$$L[e^{at}f(t)] = F(p - a), \operatorname{Re}(p - a) > \sigma_0, \quad (5)$$

т. е. умножение оригинала на e^{at} соответствует смещению изображения на a .

Пример

Найти изображение функции $f(t) = e^{at} \cos(bt)$.

Из предыдущего примера $L[\cos(bt)] = \frac{p}{p^2 + b^2}$. Тогда по теореме смещения:

$$L[e^{at} \cos(bt)] = \frac{p - a}{(p - a)^2 + b^2}.$$

4. Запаздывание (теорема запаздывания). Для любого $\tau > 0$ из $F(p) = L[f(t)]$ следует

$$L[f(t - \tau)] = e^{-p\tau} F(p), \operatorname{Re} p > \sigma_0, \quad (6)$$

где $f(t - \tau) = f(t - \tau) \cdot \eta(t - \tau)$, т. е. запаздывание оригинала на $\tau > 0$ соответствует умножению изображения на $e^{-p\tau}$.

Примеры

1. Найти изображение функции $f(t) = \cos(t - 3)$.

По теореме запаздывания при $\tau = 3$

$$L[\cos(t - 3)] = e^{-3p} \cdot \frac{p}{p^2 + 1}.$$

2. Найти оригинал по изображению $F(p) = \frac{p - 1}{(p - 1)^2 + 4} e^{-4p}$.

Имеем: $L[e^{at} \cos(bt)] = \frac{p - a}{(p - a)^2 + b^2}$, $a = 1$, $b = 2$, т. е.

$$\frac{p - 1}{(p - 1)^2 + 4} \doteq e^t \cos 2t.$$

Далее по теореме запаздывания при $\tau = 4$

$$\frac{p - 1}{(p - 1)^2 + 4} e^{-4p} \doteq e^{t-4} \cos 2(t - 4) \cdot \eta(t - 4).$$

3. Найти оригинал по изображению $F(p) = \frac{e^{-p}}{p^2}$.

Найдём изображение для функции $f(t) = \eta(t) \cdot t$:

$$L[t] = \int_0^{+\infty} t \cdot e^{-pt} dt = \frac{1}{p^2},$$

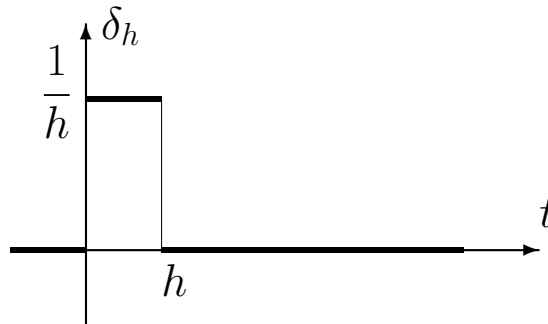
т. е. $L^{-1} \left[\frac{1}{p^2} \right] = t$. По теореме запаздывания при $\tau = 1$ получаем:

$$f(t) = L^{-1} \left[\frac{e^{-p}}{p^2} \right] = (t - 1) \cdot \eta(t - 1).$$

4. Теорему удобно применять при отыскании изображений функций, которые на разных участках задаются различными аналитическими выражениями.

Найти изображение функции

$$\delta_h(t) = \begin{cases} \frac{1}{h}, & 0 < t \leq h \\ 0, & t < 0, t > h. \end{cases}$$



Функцию $\delta_h(t)$ представим в виде:

$$\delta_h(t) = \frac{\eta(t) - \eta(t - h)}{h}.$$

Имеем: $L[\eta(t)] = \frac{1}{p}$. Далее, применяя свойство линейности и запаздывания, получим:

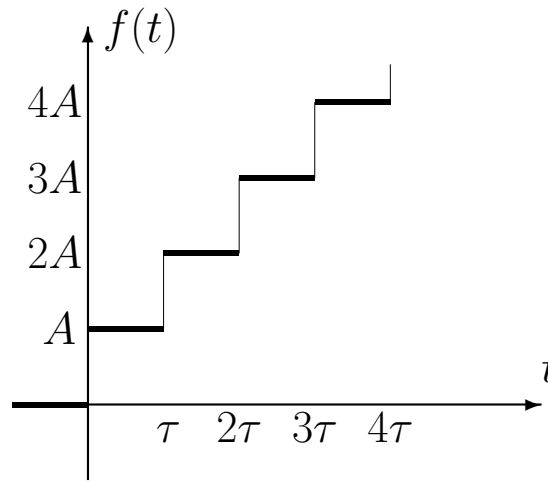
$$L[\delta_h(t)] = \frac{1}{h}L[\eta(t)] - \frac{1}{h}L[\eta(t - h)] = \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{p} - \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{p} e^{-ph} = \frac{1 - e^{-ph}}{ph}.$$

Переходя к пределу при $h \rightarrow 0$ в последнем выражении, можно получить изображение δ -функции¹ $\delta(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \delta_h(t)$:

$$L[\delta(t)] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-ph}}{ph} = \frac{pe^{-ph}}{p} = 1.$$

Изображение дельта-функции не удовлетворяет необходимому условию (см. замечание на стр. 8).

5. Найти изображение ступенчатой функции:



$$f(t) = A(\eta(t) + \eta(t - \tau) + \eta(t - 2\tau) + \eta(t - 3\tau) + \dots)$$

Следовательно применяя свойство линейности и запаздывания, получим:

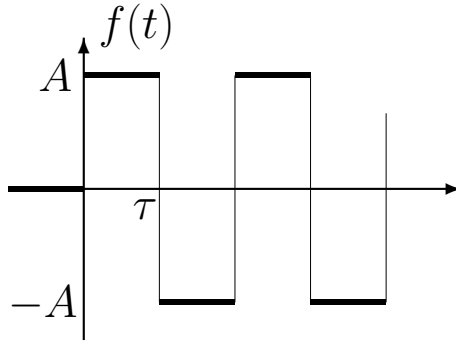
$$f(t) \doteq A \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p} e^{-p\tau} + \frac{1}{p} e^{-2p\tau} + \dots \right) = \frac{A}{p} \cdot \frac{1}{1 - e^{-pt}}.$$

¹ δ -функция часто встречается в инженерных приложениях как идеализация импульса конечной длительности. В теории автоматического регулирования и управления δ -функция вместе с единичной ступенькой является типовыми входными воздействиями.

Дельта-функция относится к обобщённым функциям и задаётся соотношением

$$\int_a^b f(t) \delta(t - \tau) dt = \begin{cases} f(\tau + 0), & a \leq \tau < b, \\ 0, & \tau < a, \tau \geq b. \end{cases}$$

6. Найти изображение функции:



Функцию $f(t)$ можно записать в виде:

$$f(t) = A(\eta(t) - 2\eta(t - \tau) + 2\eta(t - 2\tau) - 2\eta(t - 3\tau) + \dots)$$

Далее применяя свойство линейности и запаздывания, получим:

$$\begin{aligned} f(t) &\doteq A \left(\frac{1}{p} - \frac{2}{p}e^{-p\tau} + \frac{2}{p}e^{-2p\tau} - \dots \right) = \\ &= \frac{A}{p} (1 - (2e^{-p\tau} - 2e^{-2p\tau} + \dots)) = \frac{A}{p} \left(1 - \frac{2e^{-p\tau}}{1 + e^{-p\tau}} \right) = \frac{A}{p} \operatorname{th}(p\tau). \end{aligned}$$

5. Дифференцирование оригинала. Если $f(t), f'(t), \dots, f^{(n)}(t)$ являются оригиналами и $F(p) \doteq f(t)$, то

$$\begin{aligned} f'(t) &\doteq pF(p) - f(+0), \\ f''(t) &\doteq p^2F(p) - pf(+0) - f'(+0), \\ &\vdots \\ f^{(n)}(t) &\doteq p^nF(p) - p^{n-1}f(+0) - \dots - f^{(n-1)}(+0), \end{aligned} \tag{7}$$

где $f^{(k)}(+0) = \lim_{t \rightarrow +0} f^{(k)}(t)$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Доказательство

Переходя к изображению, и интегрируя его по частям, получим:

$$f'(t) \doteq \int_0^\infty f'(t)e^{-pt}dt = f(t)e^{-pt}\Big|_0^\infty + p \cdot \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt.$$

В силу того, что $\operatorname{Re} p = \sigma > \sigma_0$, имеем: $|f(t)e^{-pt}| \leq Me^{(\sigma-\sigma_0)t}$ и предельный переход $t \rightarrow \infty$ в правой части равенства даёт нуль. Следовательно:

$$f'(t) \doteq -f(+0) + p \cdot \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt = p \cdot F(p) - f(+0).$$

Применив этот приём дважды, получим:

$$f''(t) \doteq p^2 F(p) - pf(+0) - f'(+0), \text{ и т. д.}$$

Примеры

1. Найти изображение $f'(t)$, если $f(t) = e^{-t} \cos 3t$.

По теореме смещения имеем:

$$f(t) \doteq \frac{p+1}{(p+1)^2 + 9}.$$

$$f(+0) = \lim_{t \rightarrow +0} e^{-t} \cos 3t = 1.$$

В результате получим:

$$f'(t) \doteq p \cdot \frac{p+1}{(p+1)^2 + 9} - 1.$$

2. Найти изображение выражения $x'' + 3x' + 2x + 1$ с начальными условиями $x(+0) = 1$, $x'(+0) = 4$.

Обозначим $X(p) \doteq x(t)$, тогда $x'(t) \doteq pX(p) - 1$, $x'' = p^2 X(p) - p \cdot 1 - 4$.

Используя свойство линейности, имеем

$$\begin{aligned} L[x'' + 3x' + 2x + 1] &= L[x''] + 3L[x'] + 2L[x] + L[1] = \\ &= p^2 X(p) - p \cdot 1 - 4 + 3pX(p) - 3 + 2X(p) + \frac{1}{p} = \\ &= (p^2 + 3p + 2)X(p) - p - 7 + \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

Если, теперь, рассматривать задачу Коши:

$$x'' + 3x' + 2x + 1 = 0, x(+0) = 1, x'(+0) = 4,$$

то изображение частного решения, удовлетворяющего начальным условиям:

$$X(p) = \frac{p^2 + 7p - 1}{p(p^2 + 3p + 2)}.$$

6. Интегрирование оригинала. Если $f(t)$ является оригиналом и $F(p) \doteq f(t)$, то

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \doteq \frac{F(p)}{p}, \operatorname{Re} p > \sigma_0, \quad (8)$$

т. е. интегрирование оригинала соответствует деление изображения на p .

Доказательство

Легко проверить, что функция $g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$ вместе с $f(t)$ является оригиналом.

Используя теорему о дифференцировании оригинала, имеем: $f(t) = g'(t) \doteq pG(p)$, т. к. $g(0) = 0$. В результате $F(p) = pG(p)$, $\Rightarrow G(p) = \frac{F(p)}{p}$.

Пример

Найти изображение интеграла $\int_0^t f(\tau) d\tau$ от функции $f(t) = \cos t$.

Имеем $L[\cos t] = \frac{p}{p^2 + 1}$. Тогда:

$$L \left[\int_0^t \cos(\tau) d\tau \right] = \frac{p}{p(p^2 + 1)} = \frac{1}{p^2 + 1}.$$

В результате получили: $\sin t \doteq \frac{1}{p^2 + 1}$.

7. Дифференцирование изображения. Если функция $f(t)$ является оригиналом и $F(p) \doteq f(t)$, то

$$F^{(n)}(p) \doteq (-1)^n t^n f(t). \quad (9)$$

Частный случай: $tf(t) \doteq -F'(p)$.

Доказательство

Т. к. функция $F(p)$ является аналитической функцией в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \sigma_0$, то её можно дифференцировать по p . Воспользуемся формулой дифференцирования по параметру (формулой Лейбница):

$$\left(\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx \right)'_y = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x, y) dx + \beta'(y) f(\beta(y), y) - \alpha'(y) f(\alpha(y), y).$$

$$F'(p) = \left(\int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt \right)'_p = - \int_0^\infty t f(t) e^{-pt} dt,$$

т. е. $F'(p) \doteq -tf(t)$.

Примеры

1. Найти изображение функции $f(t) = t \cos 3t$.

Из предыдущего примера: $L[\cos 3t] = \frac{p}{p^2 + 9}$. При $n = 1$ из формулы (9) получаем: $L[-t \cos 3t] = \left(\frac{p}{p^2 + 9} \right)' = -\frac{p^2 - 9}{(p^2 + 9)^2}$.

В результате: $L[t \cos 3t] = \frac{p^2 - 9}{(p^2 + 9)^2}$.

2. Найти изображения функций

$$f_1(t) = t, \quad f_2(t) = t^2, \dots, \quad f^n(t) = t^n.$$

Учитывая $L[\eta(t)] = \frac{1}{p} = F(p)$ и (9) при $n = 1$ получаем
 $L[-t] = F'(p) = -\frac{1}{p^2}$ или $L[t] = \frac{1}{p^2}$. При $n = 2$ имеем
 $L[t^2] = F''(p) = \frac{2}{p^3}$. Аналогично $L[t^n] = \frac{n!}{p^{n+1}}$.

8. Интегрирование изображения. Если $\frac{f(t)}{t}$ является оригиналом и $F(p) \doteq f(t)$, то

$$L\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_p^\infty F(z)dz. \quad (10)$$

Доказательство

Имеем:

$$\int_p^\infty F(z)dz = \int_p^\infty dz \int_0^\infty f(t)e^{-zt}dt = \int_0^\infty f(t)dt \int_p^\infty e^{-zt}dz = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t}e^{-pt}dp.$$

Пример

Найти изображение функции $f(t) = \frac{\sin t}{t}$.

Имеем: $\sin t \doteq \frac{1}{p^2 + 1} = F(p)$. В результате:

$$\frac{\sin t}{t} \doteq \int_p^\infty \frac{dz}{p^2 + 1} = \operatorname{arctg} z|_p^\infty = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p.$$

9. Умножение изображений (теорема Бореля). Произведение двух изображений $F_1(p)$ и $F_2(p)$ также является изображением, причём:

$$F_1(p) \cdot F_2(p) \doteq f_1(t) * f_2(t). \quad (11)$$

Определение 3. Функция $f_1(t) * f_2(t)$, определяемая формулой

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau)f_2(t - \tau)d\tau = \int_0^t f_1(t - \tau)f_2(\tau)d\tau, \quad (12)$$

называется **свёрткой функций**.

Теорема Бореля утверждает, что умножение изображений равносильно свёртке оригиналов: $f(t) * g(t) \doteq F(p) \cdot G(p)$.

Пример

Найти оригинал, соответствующий изображению $F(p) = \frac{p}{(p^2 + 1)^2}$.

Функцию $F(p)$ представим в виде: $F(p) = \frac{1}{p^2 + 1} \cdot \frac{p}{p^2 + 1}$. Учитывая, что $\frac{1}{p^2 + 1} \doteq \sin t$ и $\frac{p}{p^2 + 1} \doteq \cos t$, имеем:

$$\begin{aligned} \frac{p}{(p^2 + 1)^2} &\doteq \int_0^t \sin \tau \cos(t - \tau) d\tau = \frac{1}{2} \int_0^t (\sin t + \sin(2\tau - t)) d\tau = \\ &= \frac{1}{2} \left(\sin t \cdot \tau - \frac{\cos(2\tau - t)}{2} \right) \Big|_0^t = \frac{t}{2} \cdot \sin t. \end{aligned}$$

10. Дифференцирование свёртки (интеграл Дюамеля).

$$\begin{aligned} pF_1(p)F_2(p) &\doteq f_1(0)f_2(t) + f_1' * f_2 = f_2(0)f_1(t) + f_2' * f_1 = \\ &= f_1(0)f_2(t) + \int_0^t f_1'(\tau)f_2(t - \tau) d\tau = \\ &= f_2(0)f_1(t) + \int_0^t f_1(t - \tau)f_2'(\tau) d\tau. \end{aligned} \tag{13}$$

Доказательство

Используя формулы (7) (дифференцирование оригинала) и (11) (теорема Бореля) имеем:

$$L^{-1} [(f_1(t) * f_2(t))'] = p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p).$$

Получим выражения для $(f_1(t) * f_2(t))'$, применяя формулу дифференцирования по параметру.

$$(f_1(t) * f_2(t))' = \frac{d}{dt} \int_0^t f_1(\tau)f_2(t - \tau) d\tau =$$

$$\begin{aligned}
&= f_2(0)f_1(t) + \int_0^t f_1(\tau)f_2'(t-\tau)d\tau = f_2(0)f_1(t) + \int_0^t f_1(t-\tau)f_2'(\tau)d\tau, \\
&(f_1(t) * f_2(t))' = \frac{d}{dt} \int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau = \\
&= f_1(0)f_2(t) + \int_0^t f_1'(t-\tau)f_2(\tau)d\tau = f_1(0)f_2(t) + \int_0^t f_1'(\tau)f_2(t-\tau)d\tau.
\end{aligned}$$

Интеграл Дюамеля (13) применяется для решения дифференциальных уравнений (см. далее).

Примеры

Найти оригиналы, соответствующие изображениям,

1. $F(p) = \frac{p}{(p-1)(p-2)}$. В данном случае нельзя непосредственно воспользоваться теоремой Бореля, так как в произведении $F(p) = \frac{p}{p-1} \cdot \frac{1}{p-2}$ множитель $F_1(p) = \frac{p}{p-1}$ не является изображением (не выполняется необходимое условие). Представим изображение в виде произведения $F(p) = p \cdot \frac{1}{p-1} \cdot \frac{1}{p-2}$. Имеем $\frac{1}{p-1} \doteq f_1(t) = e^t$, $\frac{1}{p-2} \doteq f_2(t) = e^{2t}$, в результате по формуле (13):

$$\begin{aligned}
p \cdot \frac{1}{p-1} \cdot \frac{1}{p-2} &\doteq f_1(0)f_2(t) + f_1' * f_2 = 1 \cdot e^{2t} + \int_0^t e^\tau \cdot e^{2(t-\tau)} d\tau = \\
&= e^{2t} + e^{2t} \int_0^t e^{-\tau} d\tau = -e^{-t} + e^{2t}.
\end{aligned}$$

Этот же результат можно получить представив изображение в виде:

$$F(p) = \frac{p-1+1}{(p-1)(p-2)} = \frac{1}{p-2} + \frac{1}{p-1} \cdot \frac{1}{p-2},$$

далее воспользуемся линейностью и теоремой Бореля.

$$2. F(p) = \frac{p^3}{(p^2 + 1)(p^2 + 4)}.$$

11. Связь «начальных» и «конечных» значений оригинала и изображения.

Начальные значения оригинала находятся по формуле

$$f(+0) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p). \quad (14)$$

Если существует конечный предел $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = f(+\infty)$, то

$$f(+\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p). \quad (15)$$

Соотношения (14), (15) позволяют находить начальные и конечные значения оригинала только зная соответствующее изображение. Например, (15) применяется для нахождения установившегося значения выходного сигнала в системах автоматического регулирования.

1.3 Нахождение изображения по оригиналу

Используя рассмотренные свойства и примеры можно сформировать таблицу преобразования Лапласа.

1.3.1 Таблица преобразования Лапласа

№	$f(t)$	$F(p)$	№	$f(t)$	$F(p)$
1	$\eta(t)$	$\frac{1}{p}$	10	$t \sin \omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}$
2	C	$\frac{C}{p}$	11	$t \cos \omega t$	$\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$
3	t	$\frac{1}{p^2}$	12	$e^{\lambda t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p - \lambda)^2 + \omega^2}$
4	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	13	$e^{\lambda t} \cos \omega t$	$\frac{p - \lambda}{(p - \lambda)^2 + \omega^2}$
5	$\delta(t)$	1	14	$t e^{\lambda t} \sin \omega t$	$\frac{2\omega(p - \lambda)}{((p - \lambda)^2 + \omega^2)^2}$
6	$e^{\lambda t}$	$\frac{1}{p - \lambda}$	15	$t e^{\lambda t} \cos \omega t$	$\frac{(p - \lambda)^2 - \omega^2}{((p - \lambda)^2 + \omega^2)^2}$
7	$t^n e^{\lambda t}$	$\frac{n!}{(p - \lambda)^{n+1}}$	16	$\operatorname{sh} \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$
8	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	17	$\operatorname{ch} \omega t$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$
9	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	18	$t \operatorname{sh} \omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2 - \omega^2)^2}$

№	$f(t)$	$F(p)$	№	$f(t)$	$F(p)$
19	$t \operatorname{ch} \omega t$	$\frac{p^2 + \omega^2}{(p^2 - \omega^2)^2}$	28	$\frac{1}{\lambda^2}(e^{\lambda t} - 1 - \lambda t)$	$\frac{1}{p^2(p - \lambda)}$
20	$t^n \sin \omega t$	$\frac{\operatorname{Im}(p + i\omega)^{n+1}}{(p^2 + \omega^2)^{n+1}} n!$	29	$\left(t + \frac{\lambda t^2}{2}\right) e^{\lambda t}$	$\frac{p}{(p - \lambda)^3}$
21	$t^n \cos \omega t$	$\frac{\operatorname{Re}(p + i\omega)^{n+1}}{(p^2 + \omega^2)^{n+1}} n!$	30	$(1 + \lambda t) e^{\lambda t}$	$\frac{p}{(p - \lambda)^2}$
22	$e^{\lambda t} \operatorname{sh} \omega t$	$\frac{\omega}{(p - \lambda)^2 - \omega^2}$	31	$\cos^2 \omega t$	$\frac{p^2 + 2\omega^2}{p(p^2 + 4\omega^2)}$
23	$e^{\lambda t} \operatorname{ch} \omega t$	$\frac{p - \lambda}{(p - \lambda)^2 - \omega^2}$	32	$\sin^2 \omega t$	$\frac{2\omega^2}{p(p^2 + 4\omega^2)}$
24	$\frac{1}{\lambda} e^{-\frac{t}{\lambda}}$	$\frac{1}{1 + \lambda p}$	33	$\frac{1}{2}(\operatorname{sh} \omega t - \sin \omega t)$	$\frac{\omega^3}{p^4 - \omega^4}$
25	$\frac{1}{\lambda}(e^{\lambda t} - 1)$	$\frac{1}{p(p - \lambda)}$	34	$\frac{1}{2}(\operatorname{ch} \omega t - \cos \omega t)$	$\frac{\omega^2 p}{p^4 - \omega^4}$
26	$\frac{e^{\lambda t} - e^{\mu t}}{\lambda - \mu}$	$\frac{1}{(p - \lambda)(p - \mu)}$	35	$\frac{1}{2}(\operatorname{sh} \omega t + \sin \omega t)$	$\frac{\omega p^2}{p^4 - \omega^4}$
27	$\frac{1}{\omega^2}(1 - \cos \omega t)$	$\frac{1}{p(p^2 + \omega^2)}$	36	$\frac{1}{2}(\operatorname{ch} \omega t + \cos \omega t)$	$\frac{p^3}{p^4 - \omega^4}$

1.3.2 Применение таблицы и свойств преобразования Лапласа

Для нахождения изображения по оригиналу требуется применить свойства преобразования Лапласа так, чтобы к функции или её составляющим можно было применить таблицу основных оригиналов и изображений (преобразований Лапласа).

Примеры

Найти изображения функций.

$$1. f(t) = \frac{5}{2}t^2 e^{4t}.$$

Используя свойство линейности и формулу (7) таблицы получаем

$$f(t) \doteq F(p) = \frac{5}{2} \frac{2!}{(p-4)^3}.$$

$$2. f(t) = 2e^{-t} \cos 2t - \frac{1}{2}e^{-t} \sin 2t.$$

Применим линейность и формулы (12), (13):

$$F(p) = 2 \frac{p+1}{(p+1)^2 + 4} - \frac{1}{2} \frac{2}{(p+1)^2 + 4}.$$

$$3. f(t) = \sin^4 t.$$

$$\begin{aligned} f(t) = \sin^4 t &= \frac{1}{4}(1 - \cos 2t)^2 = \frac{1}{4}(1 - 2\cos 2t + \cos^2 2t) = \\ &= \frac{1}{4}(1 - 2\cos 2t + \frac{1}{2}(1 + \cos 4t)) = \frac{1}{8}(\cos 4t - 4\cos 2t + 3). \end{aligned}$$

Далее применим линейность и формулы (1), (9):

$$F(p) = \frac{1}{8} \left(\frac{p}{p^2 + 16} - 4 \frac{p}{p^2 + 4} + \frac{3}{p} \right).$$

$$4. f(t) = te^{2t} \sin 3t.$$

Изображение этой функции можно найти по формуле (14) таблицы. Получим эту формулу. Согласно формуле (13) имеем: $e^{2t} \sin 3t \doteq \frac{3}{(p-2)^2 + 9}$. Далее дифференцирование изоб-

ражения: $t \cdot f(t) \doteq -F'(p)$. В результате:

$$te^{2t} \sin 3t \doteq - \left(\frac{3}{(p-2)^2 + 9} \right)' = \frac{6(p-2)}{((p-2)^2 + 9)^2}.$$

Другой способ. Из формулы (10) таблицы $t \sin 3t \doteq \frac{6p}{(p^2 + 9)^2}$ и свойства смещения $e^{at} f(t) \doteq F(p-a)$, $\text{Re}(p-a) > \sigma_0$ получаем:

$$te^{2t} \sin 3t \doteq \frac{6(p-2)}{((p-2)^2 + 9)^2}.$$

5. $f(t) = \frac{2}{t}(1 - \cos t).$

Применяем линейность и формулы (1), (9) таблицы имеем:

$1 - \cos t \doteq \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 1}$, далее интегрирование изображения:

$\frac{f(t)}{t} \doteq \int_p^\infty F(z) dz$ и в результате получим:

$$f(t) \doteq 2 \int_p^\infty \frac{1}{z} - \frac{z}{z^2 + 1} dz = \ln \frac{p^2 + 1}{p^2}.$$

6. $f(t) = \begin{cases} \cos 4(t-2), & t > 2, \\ 0, & t \leq 2. \end{cases}$

Функцию $f(t)$ можно записать в виде:

$$f(t) = \cos 4(t-2)\eta(t-2).$$

Применим теорему запаздывания и формулу (9) таблицы:

$$\cos 4(t-2)\eta(t-2) \doteq e^{-2p} \frac{p}{p^2 + 16}.$$

7. $f(t) = \int_0^t \frac{\text{sh } \tau}{\tau} d\tau$. Формула (16) таблицы $\text{sh } t \doteq \frac{1}{p^2 - 1}$, инте-

гирование изображения $\frac{f(t)}{t} \doteq \int_p^\infty F(z)dz$.

$$\frac{\text{sh } t}{t} \doteq \int_p^\infty \frac{dz}{z^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \frac{p+1}{p-1}.$$

Интегрирование оригинала: $\int_0^t f(\tau)d\tau \doteq \frac{F(p)}{p}$, $\text{Re } p > \sigma_0$.

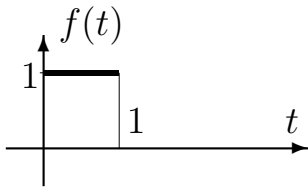
$$\int_0^t \frac{\text{sh } \tau}{\tau} d\tau \doteq \frac{1}{2p} \ln \frac{p+1}{p-1}.$$

1.3.3 Нахождение изображений функций, заданных графически

При решении прикладных задач оригинал часто задаётся графиком. Это может быть, например, входной сигнал, действующий на систему автоматического регулирования. В этом случае сначала записывается аналитическое выражение оригинала с помощью единичной ступенчатой функции, привести полученное выражение к виду, удобному для применения таблицы и свойств преобразования Лапласа.

Примеры

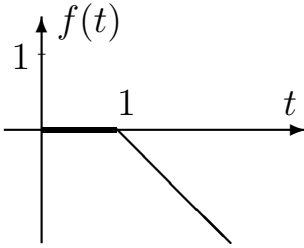
1. Записать аналитическое выражение ступеньки.



$$f(t) = \eta(t) - \eta(t - 1).$$

В момент времени $t = 0$ «включение», в момент времени $t = 1$ «выключение».

2. Найти изображения функции, заданной графиком.

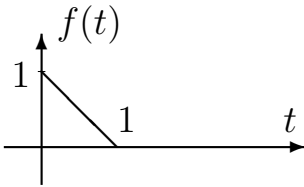


Представим функцию в виде: $f(t) = (1 - t)\eta(t - 1) = -(t - 1)\eta(t - 1)$.

Применим формулу (3) таблицы и теорему запаздывания:

$$F(p) = -\frac{1}{p^2}e^{-p}.$$

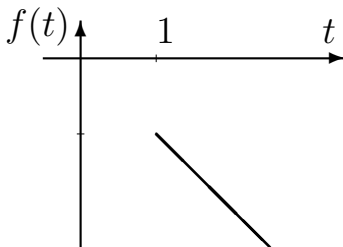
3. Найти изображения функции, заданной графиком.



$$f(t) = (1 - t)(\eta(t) - \eta(t - 1)) = (1 - t)\eta(t) + (t - 1)\eta(t - 1).$$

Применим: свойство линейности, теорему запаздывания и формулы (1), (3) таблицы: $F(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^2}e^{-p}$.

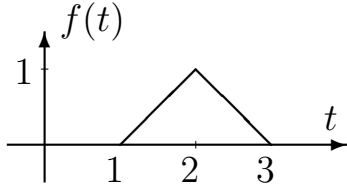
4. Найти изображения функции, заданной графиком.



Представим функцию в виде: $f(t) = -t\eta(t - 1) = -(t + 1 - 1)\eta(t - 1) = -(t - 1)\eta(t - 1) - \eta(t - 1)$.

Применим формулу (3) таблицы, линейность и теорему запаздывания: $F(p) = -\frac{1}{p^2}e^{-p} - \frac{1}{p}e^{-p}$.

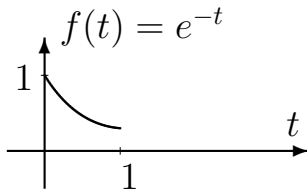
5. Найти изображения функции, заданной графиком.



$$\begin{aligned}
 f(t) &= (t-1)(\eta(t-1) - \eta(t-2)) + (3-t)(\eta(t-2) - \eta(t-3)) = \\
 &= (t-1)\eta(t-1) - (t-2+1)\eta(t-2) - (t-3)\eta(t-2) + (t-3)\eta(t-3) = \\
 &= (t-1)\eta(t-1) - (t-2)\eta(t-2) - \eta(t-2) - (t-2-1)\eta(t-2) + \\
 &+ (t-3)\eta(t-3) = (t-1)\eta(t-1) - (t-2)\eta(t-2) - \eta(t-2) - \\
 &- (t-2)\eta(t-2) + \eta(t-2) + (t-3)\eta(t-3) = \\
 &= (t-1)\eta(t-1) - 2(t-2)\eta(t-2) + (t-3)\eta(t-3).
 \end{aligned}$$

Применим: свойство линейности, теорему запаздывания и формулу (3) таблицы: $F(p) = \frac{e^{-p}}{p^2} - 2\frac{e^{-2p}}{p^2} + \frac{e^{-3p}}{p^2}$.

6. Найти изображения функции, заданной графиком.



$$f(t) = e^{-t}(\eta(t) - \eta(t-1)) = e^{-t}\eta(t) - \frac{e^{-(t-1)}}{e}\eta(t-1).$$

Применим: свойство линейности, теорему запаздывания и формулу (6) таблицы: $F(p) = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{e} \cdot \frac{e^{-p}}{p+1}$.

1.3.4 Нахождение изображений периодических функций

Пусть $f(t)$ — оригинал с периодом T , образованный повторением функции $f_0(t)$.

$$f_0(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ \varphi(t), & 0 < t \leq T, \\ 0, & t > T. \end{cases}$$

Алгоритм нахождения изображения $F(p)$ периодической функции $f(t)$.

1. Найти изображение функции $f_0(t)$:

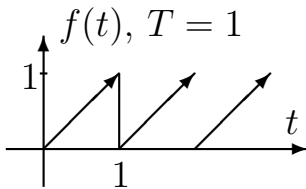
$$f_0(t) \doteq F_0(p).$$

2. Найти изображение $F(p)$ по формуле:

$$F(p) = \frac{F_0(p)}{1 - e^{-Tp}}.$$

Примеры

1. Найти изображение периодической функции.



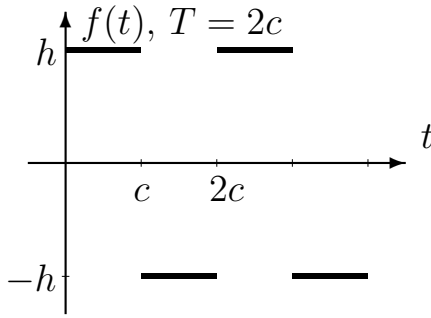
$$\begin{aligned} f_0(t) &= t(\eta(t) - \eta(t-1)) = t\eta(t) - (t-1+1)\eta(t-1) = \\ &= t\eta(t) - (t-1)\eta(t-1) - \eta(t-1). \end{aligned}$$

Применим: свойство линейности, теорему запаздывания и формулы (1), (3) таблицы: $F_0(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{e^{-p}}{p^2} - \frac{e^{-p}}{p}$.

Окончательно:

$$F(p) = \frac{1 - e^{-p} - pe^{-p}}{p^2(1 - e^{-p})}.$$

2. Найти изображение периодической функции.



$$f_0(t) = h(\eta(t) - \eta(t - c)) - h(\eta(t - c) - \eta(t - 2c)) =$$

$$= h\eta(t) - 2h\eta(t - c) + h\eta(t - 2c).$$

$$F_0(p) = \frac{h}{p} - \frac{2h}{p}e^{-pc} + \frac{h}{p}e^{-2pc}.$$

Окончательно:

$$F(p) = \frac{h(1 - 2e^{-pc} + e^{-2pc})}{p(1 - e^{-2pc})}.$$

1.4 Нахождение оригинала по изображению

Теорема 2. (Первая теорема разложения) Если функция $F(p)$ аналитична в некоторой окрестности бесконечно удалённой точки (в кольце $R < |p| < \infty$) и её разложение в ряд Лорана по степеням $\frac{1}{p}$ имеет вид:

$$F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{p^{n+1}},$$

то функция

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \quad (16)$$

является оригиналом, соответствующим изображению $F(p)$.

Теорема 3. (Вторая теорема разложения) Если изображение $F(p)$ является однозначной функцией и имеет лишь конечное число особых точек $p_1, p_2, \dots, p_n$, лежащих в конечной части плоскости, в частности, если изображение $F(p)$ является дробно-рациональной функцией, причём степень числителя меньше степени знаменателя и $p_1, p_2, \dots, p_n$ — полюсы этой функции, то его оригиналом служит функция:

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{p_k} (e^{pt} F(p)). \quad (17)$$

Формула (17) принимает наиболее простой вид в случае $F(p) = R(p) = \frac{P_m(p)}{Q_n(p)}$, где $P_m(p)$, $Q_n(p)$ — многочлены степени m и n соответственно, не имеющие общих корней. Если все полюсы $p_1, p_2, \dots, p_n$ функции $F(p)$ простые (т. е. $\Pi(1)$), то справедлива формула:

$$\operatorname{res}_{p_k} \frac{P_m(p)}{Q_n(p)} e^{pt} = \frac{P_m(p_k)}{Q'_n(p_k)} e^{p_k t}$$

и формула (17) примет вид:

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{P_m(p_k)}{Q'_n(p_k)} e^{p_k t}. \quad (18)$$

Замечание

Комплексные корни полинома $Q_n(p)$ являются попарно сопряжёнными, в этом случае сумму вычетов в таких точках можно заменить нахождением действительной части вычета в одной из них.

$$\operatorname{res}_{\bar{p}_k} \frac{P_m(p)}{Q_n(p)} e^{pt} = \frac{P_m(\bar{p}_k)}{Q'_n(\bar{p}_k)} e^{\bar{p}_k t} = \frac{\overline{P_m(p_k)}}{\overline{Q'_n(p_k)}} e^{\bar{p}_k t} = \overline{\left(\frac{P_m(p_k)}{Q'_n(p_k)} e^{p_k t} \right)}.$$

В результате сумма вычетов в комплексно сопряжённых точках:

$$\operatorname{res}_{p_k} \frac{P_m(p)}{Q_n(p)} e^{pt} + \operatorname{res}_{\bar{p}_k} \frac{P_m(p)}{Q_n(p)} e^{pt} = 2 \operatorname{Re} \left(\operatorname{res}_{p_k} \frac{P_m(p)}{Q_n(p)} e^{pt} \right).$$

Примеры

1. Найти оригинал функции: $F(p) = \frac{1}{p} e^{p^{-2}}$.

Воспользуемся первой теоремой разложения.

Используя разложение

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

представляя $F(p)$ в виде $F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{p^{n+1}}$ имеем:

$$F(p) = \frac{1}{p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p^{2n} n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p^{2n+1} n!}, \quad c_{2n} = \frac{1}{n!}.$$

В результате:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{t^{2n}}{(2n)!}.$$

2. Найти оригинал функции: $F(p) = \frac{1}{p} \cos \frac{1}{p}$.

Аналогично предыдущему примеру:

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!},$$

$$F(p) = \frac{1}{p} \cos \frac{1}{p} = \frac{1}{p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{p^{2n} (2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{p^{2n+1} (2n)!}, \quad c_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n)!}.$$

В результате:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{((2n)!)^2}.$$

3. Найти оригинал функции: $F(p) = \frac{1}{\sqrt{p}} \sin \frac{1}{\sqrt{p}}$.

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$F(p) = \frac{1}{\sqrt{p}} \sin \frac{1}{\sqrt{p}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{p^{n+1}(2n+1)!}, \quad c_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}.$$

В результате:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{(2n+1)!n!}.$$

4. Найти оригинал функции: $F(p) = \frac{p}{p^2 + 4p + 5}$.

Воспользуемся второй теоремой разложения.

$$F(p) = \frac{P_1(p)}{Q_2(p)} = \frac{p}{(p - (-2 + i))(p - (-2 - i))}.$$

В точках $p = -2 \pm i$ простые полюсы, воспользуемся формулой (18):

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=1}^2 \frac{P_m(p_k)}{Q'_n(p_k)} e^{p_k t} = \sum_{k=1}^2 \frac{p_k}{2p_k + 4} e^{p_k t} = \\ &= \frac{-2 + i}{-4 + 2i + 4} e^{(-2+i)t} + \frac{-2 - i}{-4 - 2i + 4} e^{(-2-i)t} = e^{-2t} (\cos t - 2 \sin t). \end{aligned}$$

5. Найти оригинал функции: $F(p) = \frac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+4)}$.

Функция имеет четыре простых полюса: $p = -1$, $p = 2$, $p = \pm 2i$.

$$\operatorname{res}_{p_k} F(p) = \lim_{p \rightarrow p_k} F(p)(p - p_k).$$

В результате:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=1}^4 \operatorname{res}_{p_k} (F(p) e^{pt}) = \\ &= \lim_{p \rightarrow -1} \frac{p+2}{(p-2)(p^2+4)} e^{pt} + \lim_{p \rightarrow 2} \frac{p+2}{(p+1)(p^2+4)} e^{pt} + \\ &+ \lim_{p \rightarrow 2i} \frac{p+2}{(p+1)(p-2)(p+2i)} e^{pt} + \lim_{p \rightarrow -2i} \frac{p+2}{(p+1)(p-2)(p-2i)} e^{pt} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{15}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{2t} + \frac{2+2i}{8-24i}e^{2it} + \frac{2-2i}{8+24i}e^{-2it} = \\
&= -\frac{1}{15}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{2t} - \frac{1}{10}\cos 2t - \frac{1}{5}\sin 2t.
\end{aligned}$$

Рассмотрим применение таблицы и свойств преобразования Лапласа для нахождения оригинала по изображению.

1. Если изображение отличается от табличного на постоянный множитель, то следует умножить и одновременно поделить на этот множитель, а затем воспользоваться свойством линейности.

$$a) F(p) = \frac{3}{(p+2)^3}$$

Запишем изображение в виде: $F(p) = \frac{3}{2!} \frac{2!}{(p+2)^3}$, далее воспользуемся формулой (7) таблицы при $n=2$, $\lambda=-2$.

$$f(t) = \frac{3}{2!}t^2e^{-2t}.$$

$$b) F(p) = \frac{5}{p^2-7}.$$

$F(p) = \frac{5}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{p^2 - (\sqrt{7})^2}$, далее воспользуемся формулой (16) таблицы:

$$f(t) = \frac{5}{\sqrt{7}}\text{sh}(\sqrt{7}t).$$

2. Изображение, заданное в виде дроби $\frac{a \pm b}{c}$ разлагается на сумму дробей.

$$a) F(p) = \frac{3p}{(p+5)^2}.$$

$$F(p) = \frac{3p}{(p+5)^2} = \frac{3(p+5) - 15}{(p+5)^2} = \frac{3}{p+5} - \frac{15}{(p+5)^2}.$$

Воспользуемся свойством линейности, теоремой смещения и формулами (6) и (7) таблицы:

$$f(t) = 3e^{-5t} - 15te^{-5t}.$$

$$b) F(p) = \frac{3p - 2}{(p + 5)^2}.$$

$$F(p) = \frac{3p - 2}{(p + 5)^2} = \frac{3p}{(p + 5)^2} - \frac{2}{1!} \frac{1!}{(p + 5)^2},$$

$$f(t) = 3e^{-5t} - 15te^{-5t} - 2te^{-5t} = e^{-5t}(3 - 17t).$$

$$c) F(p) = \frac{p^3 + 2p + 2}{p^3(p + 1)}.$$

$$F(p) = \frac{p^3 + 2(p + 1)}{p^3(p + 1)} = \frac{1}{p + 1} + \frac{2}{p^3},$$

линейность и формулы (4) и (6) таблицы:

$$f(t) = e^{-t} + t^2.$$

3. Если знаменатель дроби содержит квадратный трёхчлен, то в нём выделяется полный квадрат: $ap^2 + bp + c = a(p \pm \alpha)^2 \pm \omega^2$. При этом числитель дроби представляется в виде многочлена от $p \pm \alpha$.

$$a) F(p) = \frac{3}{p^2 + 4p + 7}.$$

$$F(p) = \frac{3}{p^2 + 4p + 7} = \frac{3}{p^2 + 4p + 4 + 3} = \frac{3}{(p + 2)^2 + (\sqrt{3})^2},$$

далее теорема смещения и формула (12) таблицы:

$$f(t) = \sqrt{3} \sin(\sqrt{3}t) e^{-2t}.$$

$$b) F(p) = \frac{3p + 2}{2(p^2 - 4p + 3)}.$$

$$F(p) = \frac{1, 5p + 1}{2(p^2 - 4p + 4 - 1)} = \frac{1, 5p + 1}{(p - 2)^2 - 1} =$$

$$= 1,5 \frac{p-2}{(p-2)^2-1} + 4 \frac{1}{(p-2)^2-1}.$$

Далее воспользуемся линейностью, теоремой смещения и формулами (16), (17) таблицы:

$$f(t) = \frac{3}{2} \operatorname{ch} t \cdot e^{2t} + 4 \operatorname{sh} t \cdot e^{2t} = \frac{11}{4} e^{3t} - \frac{5}{4} e^t.$$

Найдём оригинал этой функции, используя вторую теорему разложения.

$$F(p) = \frac{P_1(p)}{Q_2(p)} = \frac{3p+2}{2(p^2-4p+3)} = \frac{3p+2}{2(p-1)(p-3)}.$$

В точках $p=1$ и $p=3$ простые полюсы:

$$\begin{aligned} f(t) &= \operatorname{res}_1 F(p) e^{pt} + \operatorname{res}_3 F(p) e^{pt} = \lim_{p \rightarrow 1} \frac{(3p+2)}{2(2p-4)} + \lim_{p \rightarrow 3} \frac{(3p+2)}{2(2p-4)} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{5e^t}{2-4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{11e^3t}{6-4} = \frac{11}{4} e^{3t} - \frac{5}{4} e^t. \end{aligned}$$

4. Если изображение представляет собой правильную рациональную дробь, следует разложить её на простейшие дроби и для каждой из них найти оригинал. Так же можно воспользоваться второй теоремой разложения и теоремой Бореля (теоремой о свёртке).

$$a) F(p) = \frac{3p^2 + 3p - 13}{p(p^2 + 4p + 13)}.$$

$$F(p) = \frac{3p^2 + 3p - 13}{p(p^2 + 4p + 13)} = -\frac{1}{p} + 4 \frac{p+2}{(p+2)^2 + 3^2} - \frac{1}{3} \frac{3}{(p+2)^2 + 3^2}.$$

Далее воспользуемся линейностью, теоремой смещения и формулами (1), (12), (13) таблицы:

$$f(t) = -1 + 4 \cos 3t \cdot e^{-2t} - \frac{1}{3} \sin 3t \cdot e^{-2t}.$$

$$b) F(p) = \frac{p}{(p^2 + 1)(p^2 + 4)}.$$

$$F(p) = \frac{p}{(p^2 + 1)(p^2 + 4)} = \frac{p}{p^2 + 4} \cdot \frac{1}{p^2 + 1} = F_1(p) \cdot F_2(p).$$

$$F_1(p) \doteq \cos 2t, F_2(p) \doteq \sin t.$$

Воспользуемся теоремой Бореля (теоремой о свёртке):

$$F_1(p) \cdot F_2(p) \doteq f_1(t) * f_2(t).$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_0^t \cos(2\tau) \sin(t-\tau) d\tau = \frac{1}{2} \int_0^t (\sin(t+\tau) - \sin(3\tau-t)) d\tau = \\ &= \frac{1}{2} (-\cos 2t + \cos t + \frac{1}{3} \cos 2t - \frac{1}{3} \cos t). \end{aligned}$$

1.5 Применение операционного исчисления

1.5.1 Решение задачи Коши для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Рассмотрим задачу Коши для ЛОДУ:

$$\begin{cases} a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 x = f(t), \\ x(0) = x_0, x'(0) = x_1, \dots, x^{(n-1)}(0) = x_{n-1} \end{cases} \quad (19)$$

или

$$\begin{cases} \vec{x} = A\vec{x} + \vec{f}(t), \\ \vec{x}(0) = \vec{x}_0, \end{cases} \quad (20)$$

A — матрица коэффициентов, $\vec{x}$ — вектор неизвестных функций, $\vec{f}$ — заданная вектор-функция.

Здесь будем предполагать, что заданная функция $f(t)$ и искомая функция $x(t)$ принадлежат классу оригиналов.

Алгоритм решения задачи Коши

1. Применить преобразование Лапласа: от неизвестных и известных функций перейти к их изображениям, записать уравнение (систему) в изображениях, соответствующее решаемой задаче.
2. Решить полученное уравнение (систему): найти изображение искомого решения.
3. Применить обратное преобразование Лапласа: найти оригинал для полученного в п.2 изображения.

Замечание

- Преимущество операционного метода заключается в том, что при его применении функции из пространства оригиналов и производимые над ними операции заменяются функциями и операциями в пространстве изображений, которые оказываются более простыми. Так, вместо дифференциальных уравнений решаются алгебраические уравнения.
- Начальные условия при записи решения в изображениях учитываются автоматически.
- Операционный метод позволяет найти не только частное, но и общее решение дифференциального уравнения. Для этого достаточно положить $x^{(k)}(0) = C_k$, $k = 0, \dots, n - 1$.

Примеры

1. Решить задачу Коши:

$$x' + x = \eta(t),$$

$$x(0) = \frac{1}{2}.$$

Перейдём к изображениям:

$$x(t) \doteq X(p), \quad x'(t) \doteq pX(p) - x(0) = pX(p) - \frac{1}{2}, \quad \eta(t) \doteq \frac{1}{p}.$$

В терминах изображений имеем:

$$pX(p) + X(p) - \frac{1}{2} = \frac{1}{p}.$$

$$X(p) = \frac{2+p}{2p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{2(p+1)}.$$

Далее используя линейность и формулы (1) и (6) таблицы запишем решение задачи Коши:

$$x(t) = 1 - \frac{1}{2}e^{-t}.$$

2. Решить задачу Коши для линейного дифференциального уравнения второго порядка:

$$\begin{aligned} x'' - 3x' + 3x &= 2e^{3t}, \\ x(0) &= 1, \\ x'(0) &= 3. \end{aligned}$$

Перейдём к изображениям:

$$\begin{aligned} x(t) &\doteq X(p), \\ x'(t) &\doteq pX(p) - x(0), \\ x''(t) &\doteq p^2X(p) - px(0) - x'(0), \\ e^{3t} &\doteq \frac{1}{p-3}. \end{aligned}$$

$$p^2X(p) - p \cdot 1 - 3 - 3(pX(p) - 1 + 2X(p)) = 2 \frac{1}{p-3}$$

или

$$X(p) = \frac{2}{(p-3)(p^2-3p+2)} + \frac{p}{p^2-3p+2} = \frac{1}{p-3}.$$

В результате, используя формулу (6) таблицы, решение исходной задачи:

$$x(t) = e^{3t}.$$

3. Решить задачу Коши:

$$\begin{aligned}x' &= x + 2y - 9t, \\y' &= 2x + y - 4e^t, \\x(0) &= 1, \\y(0) &= 2.\end{aligned}$$

Перейдём к изображениям:

$$\begin{aligned}pX(p) - 1 &= X(p) + 2Y(p) - \frac{9}{p^2}, \\pY(p) - 2 &= 2X(p) + Y(p) - \frac{4}{p-1}.\end{aligned}$$

Из первого уравнения:

$$X(p) = \frac{2Y(p)}{p-1} + \frac{1}{p-1} - \frac{9}{p^2(p-1)},$$

подставим во второе уравнение.

$$pY(p) - 2 = \frac{4Y(p)}{p-1} + \frac{2}{p-1} - \frac{18}{p^2(p-1)} + Y(p) + \frac{4}{p-1}.$$

$$\begin{aligned}Y(p) &= \frac{2(p-1)}{(p+1)(p-3)} + \frac{6}{(p+1)(p-3)} - \frac{18}{p^2(p+1)(p-3)} = \\&= \frac{4}{p} + \frac{6}{p^2} + \frac{4}{p+1} + \frac{2}{p-3};\end{aligned}$$

$$X(p) = \frac{4}{p-1} - \frac{3}{p} - \frac{3}{p^2} - \frac{8}{p(p-1)} + \frac{8}{(p+1)(p-1)} + \frac{4}{(p-3)(p+1)}.$$

В результате:

$$\begin{aligned}x(t) &= 2e^{3t} - 4e^{-t} - 3e^t + 5 - 3t, \\y(t) &= -4 + 6t + 4e^{-t} + 2e^{3t}.\end{aligned}$$

1.5.2 Применение интеграла Дюамеля и теоремы Бореля

Дифференцирование свёртки (интеграл Дюамеля)

$$\begin{aligned} pF_1(p)F_2(p) &\doteq f_1(0)f_2(t) + f_1' * f_2 = f_2(0)f_1(t) + f_2' * f_1 = \\ &= f_1(0)f_2(t) + \int_0^t f_1'(\tau)f_2(t-\tau)d\tau = \\ &= f_2(0)f_1(t) + \int_0^t f_1(t-\tau)f_2'(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

Теорема Бореля утверждает, что умножение изображений равносильно свёртке оригиналов: $f(t) * g(t) \doteq F(p) \cdot G(p)$.

$$F_1(p) \cdot F_2(p) \doteq f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau = \int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau.$$

Рассмотрим задачу Коши для ЛОДУ с нулевыми начальными условиями:

$$\begin{cases} a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_0 x = f(t), \\ x(0) = 0, x'(0) = 0, \dots, x^{(n-1)}(0) = 0. \end{cases}$$

Первый способ (применение интеграла Дюамеля)

Рассмотрим задачу, полученную из исходной:

$$\begin{cases} a_n h^{(n)} + a_{n-1} h^{(n-1)} + \dots + a_0 h = \eta(t), \\ h(0) = 0, h'(0) = 0, \dots, h^{(n-1)}(0) = 0. \end{cases}$$

Решение этой задачи $h(t)$ — единичная переходная функция.

Перейдём от оригиналов к изображениям:

$$x(t) \doteq X(p), h(t) \doteq H(p), f(t) \doteq F(p), \eta(t) \doteq \frac{1}{p}.$$

Учитывая нулевые начальные условия:

$$x^{(k)}(t) \doteq p^k X(p), h^{(k)}(t) \doteq p^k H(p).$$

В результате в изображениях получим:

$$D(p)X(p) = F(p), \quad D(p)H(p) = \frac{1}{p},$$

где $D(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0$ — характеристический многочлен.

Исключая $D(p)$: $D(p) = \frac{F(p)}{X(p)}$, $D(p) = \frac{1}{pH(p)}$, находим:

$$\frac{F(p)}{X(p)} = \frac{1}{pH(p)}$$

или

$$X(p) = pH(p)F(p).$$

Используем интеграл Дюамеля, и учитывая нулевые начальные условия $h(0) = 0$ имеем:

$$x(t) = \int_0^t h'(\tau) f(t - \tau) d\tau \quad (21)$$

Алгоритм

1. Найти единичную переходную функцию $h(t)$, соответствующую исходной задаче.
2. Найти производную $h'(t)$ единичной переходной функции.
3. Определить решение исходной задачи Коши по формуле (21).

Второй способ (применение теоремы Бореля)

Рассмотрим в качестве вспомогательной задачу:

$$\begin{cases} a_n k^{(n)} + a_{n-1} k^{(n-1)} + \dots + a_0 k = \delta(t), \\ k(0) = 0, k'(0) = 0, \dots, k^{(n-1)}(0) = 0. \end{cases}$$

$k(t)$ — импульсная переходная функция; $\delta(t)$ — дельта-функция (см. стр. 12) .

Перейдём к изображениям:

$$\begin{aligned}x(t) &\doteq X(p), \quad k(t) \doteq K(p), \quad f(t) \doteq F(p), \quad \delta(t) \doteq 1, \\x^{(k)}(t) &\doteq p^k X(p), \quad k^{(k)}(t) \doteq p^k K(p), \quad k = 0, 1, \dots, n.\end{aligned}$$

В результате в изображениях получим:

$$D(p)X(p) = F(p), \quad D(p)K(p) = 1.$$

Отсюда имеем:

$$X(p) = K(p)F(p).$$

Согласно теореме Бореля можно найти оригинал::

$$x(t) = \int_0^t k(\tau)f(t-\tau)d\tau = \int_0^t k(t-\tau)f(\tau)d\tau. \quad (22)$$

Замечание

Связь между переходными функциями

Из соотношений (21), (22) следует:

$$k(t) = h'(t).$$

Алгоритм

1. Найти импульсную переходную функцию $k(t)$, решая вспомогательную задачу соответствующую исходной.
2. По формуле (22) найти решение исходной задачи.

Пример

Решить задачу Коши:

$$\begin{cases} x' + x = e^t, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

I. Составим вспомогательную задачу:

$$\begin{cases} h' + h = \eta(t), \\ h(0) = 0. \end{cases}$$

В изображениях имеем:

$$pH(p) + H(p) = \frac{1}{p},$$

$$H(p) = \frac{1}{p(p+1)} \doteq 1 - e^{-t}.$$

Дифференцируем: $h'(t) = e^{-t}$.

В результате по формуле (21):

$$x(t) = \int_0^t e^{-\tau} e^{t-\tau} d\tau = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}).$$

II. Составим вспомогательную задачу:

$$\begin{cases} k' + k = \delta(t), \\ k(0) = 0. \end{cases}$$

В изображениях имеем:

$$pK(p) + K(p) = 1,$$

$$K(p) = \frac{1}{p+1} \doteq e^{-t}.$$

В результате по формуле (22):

$$x(t) = \int_0^t e^{-\tau} e^{t-\tau} d\tau = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}).$$

Список литературы

1. *Бицадзе, А. В.* Основы теории аналитических функций комплексного переменного / А. В. Бицадзе. — М.: Наука, 1969. — 240 с.
2. *Евграфов, М. А.* Аналитические функции. / М. А. Евграфов. — М.: Наука, 1968. — 472 с.
3. *Евграфов, М. А.* Сборник задач по теории аналитических функций / М. А. Евграфов, Ю. В. Сидоров, М. В. Федорук, М. И. Шабунин, К. А. Бежанов. — М.: Наука, 1969. — 388 с.
4. *Пантелеев А. В.* Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах: учеб. пособ. / А. В. Пантелеев, А. С. Якимова. — М.: Высш. шк., 2001. — 445 с.
5. *Привалов И. И.* Введение в теорию функций комплексного переменного. / И. И. Привалов. — М.: Физматгиз, 1960. — 444 с.
6. *Лаврентьев, М. А.* Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. — М.: Наука, 1973. — 736 с.
7. *Лунгу, К. Н.* Сборник задач по высшей математики. 2 курс. / К. Н. Лунгу, и др. — М.: Айриспресс, 2006. — 592 с.
8. *Письменный, Д. Т.* Конспект лекций по высшей математике. / Д. Т. Письменный. — М.: Айрис-пресс, 2006.
9. *Буров, А. Н.* Практикум по спецглавам математики: учеб. пособие / А. Н. Буров, Н. Г. Вахрушева, С. В. Клишина — Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2001. — 102 с.
10. <http://ru.wikipedia.org/wiki/>
11. <http://mathhelpplanet.com/portal.php>