НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В. В. Комиссаров
Н. В. Комиссарова

ЛЕКЦИИ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ГЛАВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Новосибирск 2019

На свете ни единому уму,
имевшему учительскую прыть,
глаза не удалось открыть тому,
кто сам не собирался их открыть.
©*Игорь Губерман*

Содержание

1 Аналитические функции

1.1 Производная. Правила дифференцирования

Пусть функция $w = f(z)$ определена в некоторой области $D \subseteq \mathbb{C}$. Введём обозначения $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$. Тогда, если $z \in D$ и $z + \Delta z \in D$, обозначим $\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z)$.

Если $\exists$ конечный предел отношения $\dfrac{\Delta w}{\Delta z}$ при $\Delta z \to 0$ по $\forall$ закону, то

1) функция $f(z)$ называется дифференцируемой;

2) $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z) = \dfrac{df}{dz}$ называется производной.

Функция $f(z)$, имеющая производную в точке $z \in D$ называется *моногенной* в этой точке.

Для того, чтобы $f(z) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ была дифференцируемой в точке $z = x+iy \in D$ необходимо и достаточно, чтобы:

1) вещественнозначные функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ были дифференцируемы в точке z;

2) в этой точке выполнялись равенства:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad (CR)$$

которое называется *условиями Коши–Римана.*

Доказательство

Если функция дифференцируема, то $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta w}{\Delta z}$ должен существовать при $\forall$ законе стремления Δz к 0. Рассмотрим его при $\Delta z = \Delta x$.

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i\frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Пусть теперь $\Delta z = i\Delta y$.

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{i\Delta y} + \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{\Delta y} =$$

$$= -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Отсюда следует условие (CR).

Определение 1. *Заданная в области D однозначная функция $w = f(z)$ называется аналитической или голоморфной, если она дифференцируема (моногенна) в каждой точке этой области.*

Утверждение

1. Если функция $f(z)$ дифференцируема в точке, то в этой точке существуют частные производные её действительной $u(x, y)$ и мнимой $v(x, y)$ части и выполнены условия (CR):
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \qquad (CR)$$

2. Если функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы в точке (x_0, y_0) и в этой точке выполняются условия (CR), то функция $f(z) = u + i \cdot v$ дифференцируема в точке $z = x_0 + i \cdot y_0$.

3. Производная дифференцируемой функции может быть записана по одной из формул:
$$\begin{gathered} f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial x},\ \ f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i \cdot \frac{\partial u}{\partial y}, \\ f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i \cdot \frac{\partial u}{\partial y},\ \ f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial x}. \end{gathered} \qquad (*)$$

Замечания

Выполнение условий (CR) является необходимым условием дифференцируемости функции $f(z)$ в точке. Следовательно, их невыполнение достаточно для утверждения о том, что функция не является дифференцируемой в соответствующей точке.

Условие (CR) не являются достаточными. В соответствующей точке должны быть дифференцируемы функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$.

Правило. Для исследования функции на дифференцируемость и нахождения её производной следует выполнить следующие операции.

1. Для заданной функции $f(z)$ найти её действительную и мнимую части:

$$u = \operatorname{Re} f(z) = u(x,y),\ v = \operatorname{Im} f(z) = v(x,y).$$

2. Найти частные производные функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$.

3. Проверить выполнение условия (CR). Точки, в которых это условия не выполняются, являются точками, где функция не дифференцируема.

   Если условия (CR) выполнены и частные производные непрерывные — дифференцируема.

4. Записать выражение в точках дифференцируемости по одной из формул (*).

Примеры.

1. Показать, что $f(z) = \sin(z+i)$ аналитическая для всех $z \in \mathbb{C}$, найти производную.

1) $f(z) = \sin(x+iy+i) = \sin(x)\cdot\cos(i(y+1))+\cos(x)\cdot\sin(i(y+1)) =$

$$= \sin(x)\operatorname{ch}(y+1) + i\cos(x)\operatorname{sh}(y+1).$$

Таким образом:

$$u(x,y) = \sin(x)\operatorname{ch}(y+1),\ v(x,y) = \cos(x)\operatorname{sh}(y+1)$$

2)
$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=\cos(x)\mathrm{ch}(y+1)\\ \frac{\partial v}{\partial y}&=\cos(x)\mathrm{ch}(y+1)\end{aligned}\right\},\ \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y};$$
$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y}&=\sin(x)\mathrm{sh}(y+1)\\ \frac{\partial v}{\partial x}&=-\sin(x)\mathrm{sh}(y+1)\end{aligned}\right\},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$
3) Условия Коши–Римана выполнены, $\Rightarrow$ функция дифференцируема и $\Rightarrow$ аналитическая.
4) $f'(z)=\cos(x)\mathrm{ch}(y+1)-i\cdot\sin(x)\mathrm{sh}(y+1)$.

2. Исследовать на дифференцируемость функцию:
$$f(z)=\overline{z}=x-i\cdot y.$$
1) $\operatorname{Re}f(z)=u(x,y)=x,\ \operatorname{Im}f(z)=v(x,y)=-y;$
2) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=1,\ \dfrac{\partial v}{\partial y}=-1;\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\neq\dfrac{\partial v}{\partial y}.$
3) Следовательно функция не дифференцируема.

3. Исследовать на дифференцируемость функцию: $f(z)=e^z$.
1) $f(z)=e^z=e^{x+i\cdot y}=e^x(\cos y+i\sin y),$

$\operatorname{Re}f(z)=u(x,y)=e^x\cos y,\ \operatorname{Im}f(z)=v(x,y)=e^x\sin y;$

2) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y,\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-e^x\sin y;\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=e^x\sin y,\ \dfrac{\partial v}{\partial y}=e^x\cos y.$
3) Условия (CR) выполнены. Функция дифференцируема всюду.
4) $f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}=e^x\cos y+i\cdot e^x\sin=e^z.$

1.2 Геометрический смысл модуля и аргумента производной

Производная функции $f(z)$, как функция комплексной переменной, определяет отображение некоторой области D, — области дифференцируемости функции $f(z)$, на область G. В каждой точке $z_0 \in D$ определено комплексное число $f'(z_0)$, следовательно определены $|f'(z_0)|$ и $\arg f'(z_0)$, если $f'(z_0) \neq 0$.

Возникает вопрос: как характеризуют эти величины в точке z_0 само отображение $w = f(z)$?

Для функции действительного переменного $f'(x_0)$ — угловой коэффициент касательной.

Рассмотрим геометрические свойства величин $k = |f'(z_0)|$ и $\alpha = \arg f'(z_0)$, полагая $f'(z_0) \neq 0$ и $f(z)$ дифференцируемая в окрестности точки z_0. Так как по определению производной $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta w}{\Delta z}$ предел в точке не зависит от направления и способа стремления Δz к нулю, то можно взять произвольную гладкую кривую γ, проходящую через точку z_0, и на ней любую точку z из окрестности точки z_0.

Образ кривой γ при отображении $w = f(z)$ обозначим Γ, образы точек z_0 и z через w_0 и w соответственно; из непрерывности отображения следует, что $w_0 \in \Gamma$ и $w \in \Gamma$. Приращения переменных $\Delta z = z - z_0$ и $\Delta w = w - w_0$ геометрически есть векторы, их длины — $|\Delta z|$, $|\Delta w|$.

Используя определение производной $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta w}{\Delta z}$ имеем: $|f'(x_0)| = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \left| \dfrac{\Delta w}{\Delta z} \right|$. Перепишем его следующим образом:

$$|f'(x_0)| = \lim_{\Delta z \to 0} \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta l_\Gamma}{\Delta l_\gamma} = \frac{dl_\Gamma}{dl\gamma},$$

здесь Δl_Γ и Δl_γ — длины соответствующих дуг кривых Γ и γ, dl_Γ, $dl\gamma$ — дифференциалы длин дуг (рис. 1).

Отношение $\dfrac{dl_\Gamma}{dl\gamma}$ определяет изменение масштаба (растяжение, сжатие) в точке z_0 при отображении $w = f(z)$ — **геометрический смысл модуля производной**.

Величина $|f'(z_0)|$ не зависит от вида кривой γ, а является величиной постоянной для данной функции $f(z)$ и данной точки z_0.

Для аргумента производной имеет место равенство $\arg f'(z) = \theta - \varphi$, где θ и φ — углы между действительными осями в плоскостях (w), (z) и касательными к кривым Γ и γ в точке z_0. Это следует из того, что аргумент дроби равен разности аргументов числителя и знаменателя.

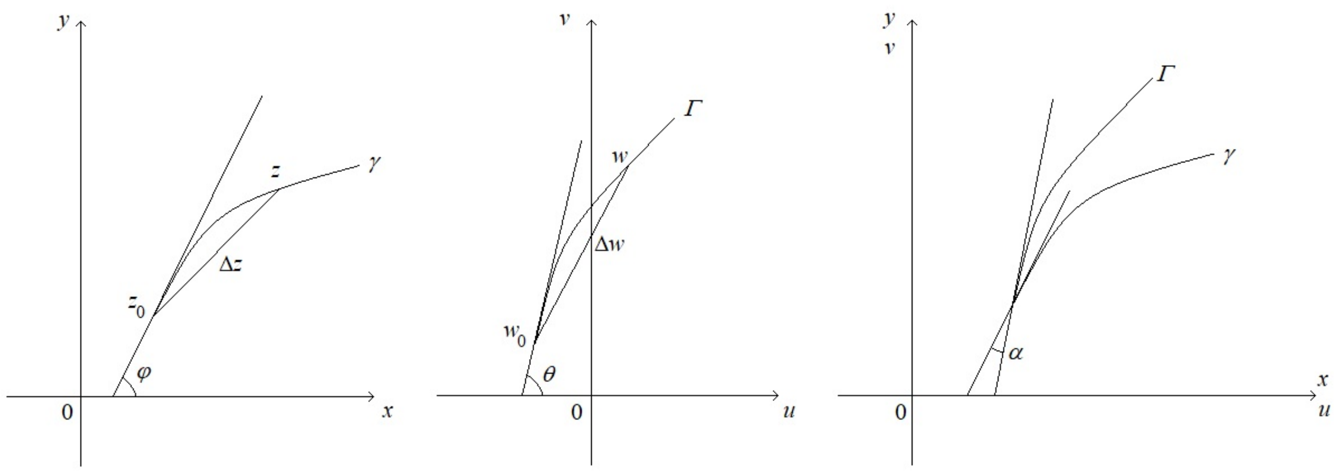

Рис. 1. Геометрический смысл модуля и аргумента производной

Если точки w_0 и z_0 совместить, то $\alpha = \arg f'(x) = \theta - \varphi$ — угол поворота кривой γ в точке z_0 при отображении $w = f(z)$.

Это свойство справедливо для любой пары гладких кривых γ и Γ. Из этого следует, что при отображении сохраняются углы между кривыми.

Отображение, сохраняющее углы между кривыми, называется **конформным**.

Утверждение

1. Модуль $|f'(z_0)|$ производной функции $f(z)$, дифференцируемой в окрестности точки z_0, есть коэффициент линейного растяжения кривой в точке z_0 при отображении $w = f(z)$.

2. Аргумент производной в точке — есть угол поворота кривой в этой точке при отображении $w = f(z)$.

3. Отображение с помощью дифференцируемой в окрестности точки z_0 функции $f(z)$, удовлетворяющее условию $f'(z_0) \neq 0$, является конформным в точке z_0. Оно обладает свойством постоянства растяжение и сохранения углов. Причём углы сохраняются как по величине, так и по направлению.

Примеры.

1. Найти коэффициент растяжения и угол поворота в точке $z = 2i$ при отображении $w = \dfrac{z+1}{z+i}$.

Производная: $w' = \dfrac{z+i-z-1}{(z+i)^2} = \dfrac{i-1}{(z+i)^2}$, её значение в точке $2i$: $w'(2i) = \dfrac{1-i}{9}$.

Коэффициент растяжения: $k = |w'(2i)| = \dfrac{1}{9} \cdot \sqrt{2}$.

Угол поворота: $\arg(w'(2i)) = \operatorname{arctg} \dfrac{-1/9}{1/9} = -\dfrac{\pi}{4}$.

2. Определить, какая часть плоскости при отображении $w = z^2$ растягивается, а какая — сжимается.

$$w' = 2z,\ |w'| = 2|z_0| = k.$$

$k > 1$ при $|z| > \dfrac{1}{2}$ — растягивается вне круга радиуса $\dfrac{1}{2}$, с центром в точке $(0,0)$; $k < 1$ при $|z| < \dfrac{1}{2}$ — сжимается внутри круга.

1.3 Свойства аналитических функций

1. Сумма, произведение функций аналитических в точке, есть функция, аналитическая в этой точке. Поэтому, в силу аналитичности функции $w = c$, линейная комбинация функций, аналитических в точке, является аналитической функцией.

2. Частное функций, аналитических в точке, есть функция, аналитическая в этой точке, если знаменатель в ней отличен от нуля.

3. Суперпозиция аналитических функций — функция аналитическая.

4. Если $f(z)$ — аналитическая в точке z_0 и $f'(z_0) \neq 0$, то обратная функция $f^{-1}(w)$ является аналитической в w_0 $(f(z_0) = w_0)$.

5. *Теорема о бесконечной дифференцируемости аналитической функции.* Функция, аналитическая в точке, имеет в этой точке производные любого порядка, которые являются непрерывными в этой точке.

1.4 Восстановление аналитической функции по заданной её действительной или мнимой части

Определение 2. *Вещественнозначная функция $\varphi(x, y)$, удовлетворяющая в некоторой области $D \subset R^2$ унавнению*

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0,$$

называется ***гармонической*** *в этой области.*

Теорема 1. *Действительная и мнимая части аналитической в некоторой области функции являются гармоническими в этой области.*

Доказательство этой теоремы следует их условия Коши–Римана. Надо продифференцировать его по x или y, и далее сложить или вычесть.

Уравнение $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ или $\Delta u = 0$ называется *уравнение Лапласа*[1].

[1] Пьер–Симон, маркиз де Лаплас (фр. Pierre–Simon de Laplace; 23 марта 1749 — 5 марта 1827) — французский математик, механик, физик и астроном; известен работами в области небесной механики, дифференциальных уравнений, один из создателей теории вероятностей.

Две гармонические функции, связанные между собой условиями CR, называются сопряжёнными гармонмческими функциями. Действительная и мнимая части любой аналитической в обласи D функции являются в D сопряжёнными гармоническими функциями.

Учитывая, что вещественная и мнимая части $u(x, y)$ и $v(x, y)$ аналитической функции не являются независимыми друг от друга, а связаны условиями CR можно попытаться, зная одну из них, восстановить другую.

Правило 1

Для нахождения аналитической функции по заданной её действительной или мнимой части необходимо выполнить.

1. Найти частные производные до второго порядка заданной функции двух переменных $u(x, y)$ или $v(x, y)$. Проверить, если требуется, что заданная функция гармоническая, т. е. выполняется в некоторой области D равенство $\Delta u = 0$ или $\Delta v = 0$.

2. Найти по заданной гармонической функции сопряжённую с ней функцию, используя формулы:

$$v(x, y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy + C.$$

   В случае, если выбрать кривую в виде ломаной со звеньями параллельными осям, то:

$$v(x, y) = \int\limits_{x_0}^{x} -\frac{\partial u(x, y_0)}{\partial y}dx + \int\limits_{y_0}^{y} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}dy + C.$$

Или

$$u(x,y)=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}\frac{\partial v}{\partial y}dx-\frac{\partial v}{\partial x}dy+C=$$

$$=\int\limits_{x_0}^{x}\frac{\partial v(x,y_0)}{\partial y}dx-\int\limits_{y_0}^{y}\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}dy+C.$$

3. Записать функцию $f(z)=u+i\cdot v$.

4. Если задано дополнительное условие — значение функции $f(z)$ в некоторой точке, то следует использовать его для отыскания C.

Правило 2

Если заданы начальные условия, функция восстанавливается однозначно.

1. Дано: $u=u(x,y),\ f(z_0)=C_0$, тогда

$$f(z)=2u\left(\frac{z+\overline{z}_0}{2},\frac{z-\overline{z}_0}{2i}\right)-\overline{C}_0.$$

2. Дано: $v=v(x,y),\ f(z_0)=C_0$, тогда

$$f(z)=2iv\left(\frac{z+\overline{z}_0}{2},\frac{z-\overline{z}_0}{2i}\right)+\overline{C}_0.$$

Примеры.

1. Найти аналитическую функцию $f(z)=u+iv$ по заданной её действительной части $u(x,y)=x^3-3xy^2+2y$.

2. Найти аналитическую функцию $f(z)=u+iv$ по заданной её действительной части $u(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$, если заданы условия: $f(\pi)=\dfrac{1}{\pi}$.

2 Интегрирование функций комплексного переменного

2.1 Основные определения

Определение 3. *Кривая C называется спрямляемой, если каждая конечная дуга этой кривой имеет длину.*

Определение 4. *Область $D \subseteq \mathbb{C}$ называется односвязной, если она ограничена непрерывной спрямляемой кривой без самопересечений.*

Т. е. если для любой замкнутой кривой, принадлежащей области, точки множества, границей которого является кривая, также принадлежат области. В противном случае — область *многосвязная.*

Многосвязная область называется *n-связной*, если её граница состоит из n компонент. n — порядок связности. Например, круг, радиусом R с выколотым центром : $0 < |z - z_0| \leq R$ — двусвязная область. Вся комплексная плоскость — односвязная область; плоскость с выколотой точкой — двусвязная область; эта же плоскость с разрезом от выколотой точки до бесконечно удалённой — односвязная.

Понятие интеграла от функции комплексного переменного вводится (так же, как и в действительной области) как предел последовательности интегральных сумм; функция при этом определена на некоторой кривой l, кривая предполагается гладкой или кусочно-гладкой:

$$\int\limits_l f(z)dz = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k, \tag{1}$$

где ξ_k — точка, выбранная на дуге Δl_k разбиения кривой; Δz_k — приращение аргумента на этом участке разбиения, $\lambda = \max|\Delta z_k|$ — шаг разбиения, $|\Delta z_k|$ — длина хорды, соединяющей концы дуги Δl_k; кривая l разбивается произвольным образом на n частей Δl_k, $k = 1, 2, \ldots < n$. На кривой выбрано направление, т. е. указаны начальная и конечная точки. В случае замкнутой кривой $\left(\int\limits_l f(z)dz = \oint\limits_C f(z)dz\right)$ интегрирование происходит в положительном направлении, т.е. направлении, оставляющем слева конечную область, ограниченную контуром.

Формула (1) определяет *криволинейный интеграл от функции комплексного переменного.*

Учитывая $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ интегральную сумму можно записать в виде двух слагаемых, которые будут являться интегральными суммами криволинейных интегралов второго рода от функции двух действительных переменных.

Если функция $f(z)$ непрерывна на l, то предел в равенстве (1) существует, т. е. существует криволинейный интеграл от функции $f(z)$ по кривой l и имеет место формула:

$$\int\limits_l f(z)dz = \int\limits_l udx - vdy + i \int\limits_l vdx + udy. \qquad (2)$$

Свойства криволинейного интеграла от функции комплексного переменного

1. $\int\limits_l (C_1 f_1(z) + C_2 f_2(z))dz = C_1 \int\limits_l f_1(z)dz + C_2 \int\limits_l f_2(z)dz.$
2. $\int\limits_{AB} f(z)dz = -\int\limits_{BA} f(z)dz.$
3. $\int\limits_{AB} f(z)dz = \int\limits_{AC} f(z)dz + \int\limits_{CB} f(z)dz.$
4. $\int\limits_{AB} |dz| = l_{AB}$ — длина дуги AB.
5. $\left|\int\limits_l f(z)dz\right| \leq \int\limits_l |f(z)||dz|$, в частности, $\left|\int\limits_l f(z)dz\right| \leq M \cdot l_{AB}$, если функция ограничена по модулю на кривой AB, т. е. $|f(z)| \leq M$, $z \in l$.

6. $\int\limits_l dz = z_B - z_A$.

Примеры

1. Вычислить интеграл $\int\limits_{OA} \overline{z}dz$, где

а) отрезок прямой, соединяющей точки $z_1 = 0$ и $z_2 = 1 + i$:

$$f(z) = x - iy; dz = dx + idy,$$

$$\int\limits_{OA} \overline{z}dz = \int\limits_{OA} (x - iy)(dx + idy) = \int\limits_{OA} xdx + ydy + i \int\limits_{OA} xdy - ydx,$$

учитывая, что $y = x$, $0 \leq x \leq 1$

$$\int\limits_{OA} \overline{z}dz = \int\limits_0^1 2xdx = 1;$$

б) ломаная OBA $O(0;0)$, $B(1;0)$, $A(1;1)$:

$$OB: \ y = 0, \ 0 \leq x \leq 1,$$

$$BA: \ x = 1, \ 0 \leq y \leq 1,$$

$$\int\limits_{OBA} \overline{z}dz = \int\limits_{OB} \overline{z}dz + \int\limits_{BA} \overline{z}dz = \int\limits_0^1 xdx + \int\limits_0^1 ydy + i \int\limits_0^1 dy = 1 + i.$$

2. Вычислить интеграл $\int\limits_{OA} zdz$ по дуге, соединяющей точки $z_1 = 0$ и $z_2 = 1 + i$.

$$\int\limits_{OA} zdz = \int\limits_{OA} (x + iy)(dx + idy) = \int\limits_{OA} xdx - ydy + i \int\limits_{OA} xdy + ydx.$$

Подынтегральные функции являются полными дифференциалами и интегралы не зависят от пути интегрирования. Пусть дуга OA $y = x$, $0 \leq x \leq 1$.

Имеем:

$$\int\limits_{OA} zdz = i\int\limits_0^1 2xdx = i.$$

Учитывая, что этот интеграл зависит только от начальной и конечной точки такой же результат получим:

$$\int\limits_{OA} zdz = \int\limits_{(0;0)}^{(1;1)} zdz = \left.\frac{z^2}{2}\right|_{(0;0)}^{(1;1)} = i.$$

Пусть интеграл от непрерывной функции в некоторой области не зависит от вида кривой, соединяющей две точки этой области. Зафиксируем начальную точку, обозначив z_0, конечная точка — переменная, обозначим её z. Тогда значение интеграла будет зависеть только от точки z, т. е. $\int\limits_l f(z)dz$ определяет некоторую функцию в указанной области.

$$\int\limits_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi = F(z). \tag{3}$$

Функция $F(z)$ — *интеграл с переменным верхним пределом.*

$F(z)$ имеет производную в любой точке её определения и, следовательно, является аналитической. При этом:

$$F'(z) = f(z).$$

Производная интеграла с переменным верхним пределом равна значению подынтегральной функции при верхнем переделе.

Определение 5. *Функция $F(z)$, для которой выполняется равенство (3), называется* ***первообразной*** *для функции $f(z)$ в односвязной области, а совокупность (множество) первообразных $\Phi(z) = F(z) + c$, где $c = const$, —* ***неопределённым интегралом*** *от функции $f(z)$.*

Получаем следующее.

1. Интеграл с переменным верхним пределом $\int\limits_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi$ от аналитической в односвязной области функции есть функция, аналитическая в этой области; эта функция является первообразной для подынтегральной функции.

2. Любая аналитическая в односвязной области функция имеет в ней первообразную (существование первообразной).

Замечание. Первообразные аналитических функций в односвязных областях отыскиваются, как и в случае функций вещественного аргумента: используются свойства интегралов, таблица интегралов, правила интегрирования.

Пример. $\int e^z dz = e^z + c$, $\int \frac{1}{1+z^2} dz = \operatorname{arctg} z + c$.

Теорема 2. *(Теорема Ньютона–Лейбница) Если $f(z)$ аналитическая в односвязной области, $F(z)$ — её первообразная, т. е. $F'(z) = f(z)$, C — ориентированная кривая с начальной точкой z_1 и конечной точкой z_2, то выполняется равенство:*

$$\int\limits_C f(z)dz = \int\limits_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1), \qquad (4)$$

т. е. интеграл не зависит от пути, соединяющего точки z_1 и z_2, а зависит только от функции и конечных точек.

Рассмотрим интегралы, которые зависят параметра, содержащегося в подынтегральной функции $\int\limits_l f(\xi, z)d\xi$.

Среди таких интегралов важное место занимает интеграл вида: $\int\limits_l \dfrac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$.

Полагая $f(z)$ непрерывной на l, получаем, что для любой точки z, не принадлежащей l, интеграл существует и определяет в любой области, не содержащей l, некоторую функцию

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_l \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi = F(z). \tag{5}$$

Интеграл (5) называется **интегралом типа Коши**; множитель $\dfrac{1}{2\pi i}$ введён для удобства использования построенной функции.

Эта функция является аналитической всюду в области определения. В отличие от функции (4) здесь не требуется, чтобы порождающая функция $f(z)$ была аналитической, т. е. по формуле (5) на классе непрерывных функций комплексного переменного строится класс аналитических функций.

Дифференцируя равенство (5) по переменной z имеем:

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_l \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2}d\xi.$$

Дифференцирование интеграла, зависящего от параметра

$$I(z,u,v) = \int\limits_u^v f(x,z)dx,$$

здесь $u = u(z)$, $v = v(z)$. Воспользуемся формулу для производной сложной функции, имеем:

$$\frac{dI(z,u,v)}{dz} = \frac{\partial I}{\partial z} + \frac{\partial I}{\partial u}\frac{du}{dz} + \frac{\partial I}{\partial v}\frac{dv}{dz} =$$

$$= \int\limits_u^v f'_z(x,z)dx + f(v,z)v'(z) - f(u,z)u'(z).$$

Процедуру можно продолжить и доказать по индукции формулу для производной любого порядка от функции $F(z)$.

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_l \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}d\xi. \tag{6}$$

2.2 Вычисление интегралов

Первый способ. Вычисление интегралов $\int\limits_l f(z)dz$ от непрерывной функции путём сведения к криволинейным интегралам от функции действительных переменных используя формулу (2).

1. Найти $\operatorname{Re} f(z) = u$, $\operatorname{Im} f(z) = v$.
2. Записать подынтегральное выражение $f(z)dz = (u + iv)(dx + idy) = udx - vdy + i(udy + vdx)$.
3. Вычислить криволинейные интегралы вида $\int\limits_l Pdx + Qdy$ по правилам вычисления криволинейных интегралов второго рода.

Второй способ. Вычисление интегралов $\int\limits_l f(z)dz$ от непрерывной функции путём сведения к определённому интегралу в случае параметрического задания пути интегрирования.

Если кривая l задана параметрически: $z = z(t), \alpha \le t \le \beta$ или $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \alpha \le t \le \beta$, то имеем: $\int\limits_l f(z)dz = \int\limits_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt$.

1. Записать параметрическое уравнение кривой $z = z(t)$ и из него определить пределы интегрирования $t = \alpha$ соответствует начальной точке пути интегрирования, $t = \beta$ — конечной.
2. Найти дифференциал комплекснозначной функции $z(t)$: $dz = z'(t)dt$.
3. Подставить $z(t)$ в подынтегральное выражение, преобразовать интеграл к виду: $\int\limits_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt = \int\limits_\alpha^\beta \varphi(t)dt$.
4. Вычислить полученный определённый интеграл от комплекснозначной функции действительной переменной.

Третий способ. Вычисление интегралов от аналитических функций в односвязных областях — применение формулы Ньютона–Лейбница (4).

1. Найти первообразную $F(z)$, используя свойства интегралов, табличные интегралы и методы, известные из действительного анализа.

2. Применить формулу (4):

$$\int\limits_C f(z)dz = \int\limits_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1).$$

Замечание

1. В случае многосвязной области проводятся разрезы так, чтобы можно было получить однозначную функцию $F(z)$.

2. При интегрировании однозначных ветвей многозначных функций ветвь выделяется заданием значения функции в некоторой точке кривой интегрирования. Если кривая замкнутая, то начальной точкой пути интегрирования считается та точка, в которой задано значение подынтегральной функции. Значение интеграла может зависеть от выбора точки.

Примеры

1. Вычислить $\int\limits_l \mathrm{Re}(z)dz$, где l — линия, соединяющая точку $z_1 = 0$ с точкой $z_2 = 1 + i$: *а*) l — прямая; *б*) — ломаная OBA, где $O(0,0)$, $B(1,0)$, $A(1,1)$.

а) Первый способ. $\mathrm{Re}(z)dz = x(dx + idy)$, $y = x$, $0 \leq x \leq 1$.

$$\int\limits_l \mathrm{Re}(z)dz = \int\limits_l xdx + i\int\limits_l xdy = \int\limits_0^1 xdx + i\int\limits_0^1 xdx = \frac{1+i}{2}.$$

б) $\int\limits_{l} \mathrm{Re}(z)dz = \int\limits_{OB} \mathrm{Re}(z)dz + \int\limits_{BA} \mathrm{Re}(z)dz$, OB: $y = 0$, $0 \le x \le 1$, BA: $x = 1$, $0 \le y \le 1$.

$$\int\limits_{l} \mathrm{Re}(z)dz = \int\limits_{0}^{1} xdx + i\int\limits_{0}^{1} 1 \cdot dy = \frac{1}{2} + i.$$

Подынтегральная функция в данном примере — функция не аналитическая, поэтому интегралы по двум различным кривым, соединяющим две данные точки, могут иметь различные значения.

2. Вычислить $\int\limits_{l} |z|\overline{z}dz$, где l — верхняя полуокружность $|z| = 1$, обход кривой l против часовой стрелки.

Второй способ. Параметрическое уравнение кривой l: $z = e^{it}$, $0 \le t \le \pi$. Подынтегральная функция — непрерывная, аналитической не является.

Для $z = e^{it}$: $\overline{z} = e^{-it}$, $|z| = 1$, $dz = ie^{it}dt$.

$$\int\limits_{l} |z|\overline{z}dz = \int\limits_{0}^{\pi} 1 \cdot e^{-it} \cdot ie^{it}dt = \int\limits_{0}^{\pi} idt = i\pi.$$

3. Вычислить интеграл от аналитической функции (третий способ):

$$\int\limits_{0}^{i} \sin^2 zdz = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{i}(1 - \cos 2z)dz = \frac{1}{2}\left(z - \frac{\sin 2z}{2}\right)\Bigg|_{0}^{i} = \frac{i}{4}(2 - \mathrm{sh}\, 2).$$

4. Вычислить интеграл от аналитической функции (третий способ): $\int\limits_{-i}^{1} \dfrac{dz}{(z-i)^2}$, путь интегрирования не проходит через точку i.

Подынтегральная функция является аналитической всюду, кроме точки i. Проведя разрез по лучу от точки i до ∞, получаем односвязную область, в которой функция является аналитической и интеграл можно вычислять по формуле (4). Примеры проведения разрезов показаны на рис. 2.

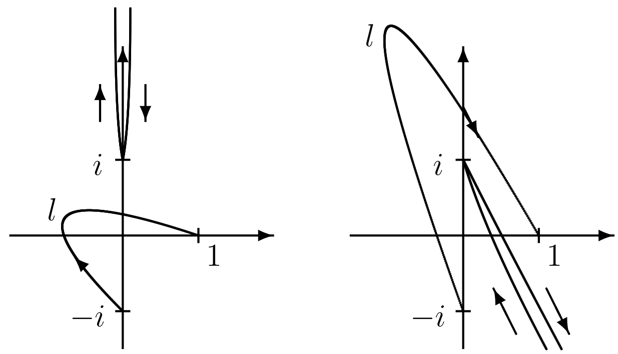

Рис. 2. Примеры проведения разреза на комплексной плоскости

В результате имеем:

$$\int\limits_{-i}^{1} \frac{dz}{(z-i)^2} = \frac{-1}{z-i}\bigg|_{-i}^{1} = -\frac{1}{1-i} - \frac{1}{2i} = -\frac{1}{2}.$$

5. Вычислить интеграл: $\oint\limits_C \dfrac{dz}{(z-a)^n}$, где C — окружность $|z-a| = R$.

Второй способ. Уравнение окружности в параметрической форме: $z - a = Re^{it}$ или $z = a + Re^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$. Дифференциал: $dz = Rie^{it}dt$. Подставим z и dz в интеграл:

$$\oint\limits_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{Rie^{it}}{R^n e^{int}} dt = \frac{i}{R^{n-1}} \int\limits_0^{2\pi} e^{it(1-n)} dt.$$

При $n \ne 1$ получаем:

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{it(1-n)} dt = \frac{1}{i(1-n)} e^{it(1-n)}\bigg|_0^{2\pi} = \frac{1}{i(n-1)} \left(1 - e^{2\pi i(n-1)}\right) = 0,$$

т. к. $e^{2\pi i(n-1)} = e^{2k\pi i} = 1$.

При $n = 1$ получаем

$$\oint\limits_C \frac{dz}{z-a} = i\int\limits_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

В результате:

$$\oint\limits_{|z-a|=R} \frac{dz}{(z-a)^n} = 0,\, n \neq 1;\ \oint\limits_{|z-a|=R} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i,\, n = 1.$$

6. Вычислить интеграл: $\int\limits_1^z \frac{d\xi}{\xi}$, путь интегрирования не проходит через точку $z = 0$ и не обходит её, $-\pi \leq \arg z \leq \pi$.

Интеграл с переменным верхним пределом определяет в односвязной области однозначную аналитическую функцию — первообразную для функции $f(z) = \frac{1}{z}$. Записав исходный интеграл в виде криволинейного интеграла второго рода, можно показать, что подынтегральное выражение — полный дифференциал, и данный интеграл не зависит от вида кривой, соединяющей точки $z_1 = 1$ и z. Выберем путь, состоящий из отрезка оси Ox от точки $z_1 = 1$ до точки $z_2 = r$, где $r = |z|$, и дуги l окружности, соединяющей z_2 и z.

Интеграл запишем в виде суммы: $\int\limits_1^z \frac{d\xi}{\xi} = \int\limits_1^r \frac{dx}{x} + \int\limits_l \frac{d\xi}{\xi}$. Для вычисления интеграла по дуге — второй способ. Параметризуем дугу: $\xi = re^{it}$, $0 \leq t \leq \arg z$, получим:

$$\int\limits_l \frac{d\xi}{\xi} = \int\limits_0^{\arg z} \frac{rie^{it}}{re^{it}} dt = i\arg z.$$

В результате

$$\int\limits_1^z \frac{d\xi}{\xi} = \ln r + i\arg z = \ln z,\ -\pi \leq \arg z \leq \pi.$$

Правая часть определяет однозначную функцию $\ln z$ — главное значение логарифма. Полученное равенство можно принять за определение однозначной функции $\ln z$ в односвязной области — плоскости с разрезом по отрицательной действительной полуоси $(-\infty, 0]$.

7. Вычислить интеграл: $\int\limits_1^z \frac{d\xi}{\xi}$, путь интегрирования не проходит через точку $z = 0$, но обходит её, n раз по окружности против часовой стрелки.

Интеграл можно записать в виде суммы: $\int\limits_1^z \frac{d\xi}{\xi} = \oint\limits_c \frac{dz}{z} + \int\limits_l \frac{d\xi}{\xi}$, где c — n-раз пробегаемая против часовой стрелки окружность $|z| = 1$, а l — кривая, соединяющая точки $z_1 = 1$ и z и не охватывающая точку $z = 0$.

Первое слагаемое равно $2n\pi i$, второе — $\ln z$. В результате:

$$\int\limits_1^z \frac{d\xi}{\xi} = \ln z + 2n\pi i.$$

8. Вычислить интеграл $\int\limits_l \frac{dz}{\sqrt{z}}$ по верхней дуге окружности $|z| = 1$ при условии: а) $\sqrt{1} = 1$; б) $\sqrt{1} = -1$.

Задание значений функции $\sqrt{z}$ в точке контура интегрирования позволяет выделить однозначные ветви выражения $\sqrt{z} = \sqrt{|z|} e^{i\left(\frac{\arg z}{2} + k\pi\right)}$, $k = 0, 1$. Разрез можно провести, например, по мнимой отрицательной полуоси. При $z = 1$ имеем $\sqrt{1} = e^{ik\pi}$, $k = 0, 1$, в первом случае выделяем ветвь с $k = 0$, во втором — с $k = 1$. Подынтегральная функция на контуре непрерывна, кривую зададим уравнением: $z = e^{it}$, $0 \le t \le \pi$.

а) Ветвь определяется при $k = 0$, $\sqrt{z} = e^{i\frac{t}{2}}$, $dz = ie^{it}dt$.

$$\int\limits_l \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int\limits_0^\pi \frac{ie^{it}}{e^{i\frac{t}{2}}} dt = i \int\limits_0^\pi e^{i\frac{t}{2}} dt = 2e^{i\frac{t}{2}}\Big|_0^\pi = 2\left(e^{i\frac{\pi}{2}} - 1\right) = 2(i - 1).$$

б) Ветвь определяется при $k = 1$, $\sqrt{z} = e^{i\left(\frac{t}{2}+\pi\right)} = -e^{i\frac{t}{2}}$, $dz = ie^{it}dt$.

$$\int\limits_{l} \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int\limits_{0}^{\pi} \frac{ie^{it}}{-e^{i\frac{t}{2}}}dt = 2(1-i).$$

2.3 Основные теоремы интегрального исчисления

Теорема 3. *(Теорема Коши для простого контура) Если $f(z)$ аналитическая в односвязной области, то для любого контура C, принадлежащего этой области, справедливо равенство:*

$$\oint\limits_{C} f(z)dz = 0. \tag{7}$$

Доказательство

Учитывая условия CR можно показать, что для каждого из подынтегральных выражений в криволинейных интегралах второго рода (2) выполняются условия полного дифференциала, а интегралы по замкнутым кривым от полных дифференциалов равны нулю.

Следствия из теоремы 3

1. Теорема справедлива и в случае, если C — граница области D, а функция $f(z)$ является аналитической в области и на границе.

2. Интегралы по различным кривым, лежащим в односвязной области аналитичности функции и соединяющие две точки этой области, равны между собой.

Теорема 4. *(Теорема Коши для сложного контура) Если $f(z)$ аналитическая в многосвязной области, и на этом контуре, то интеграл по границе области от функции равен нулю, т. е.*

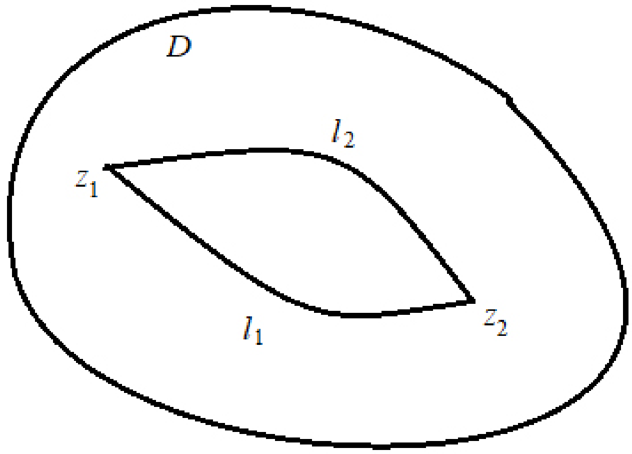

Рис. 3. Интегралы по различным кривым

C — сложный контур, являющийся границей области, то справедливо равенство (7).

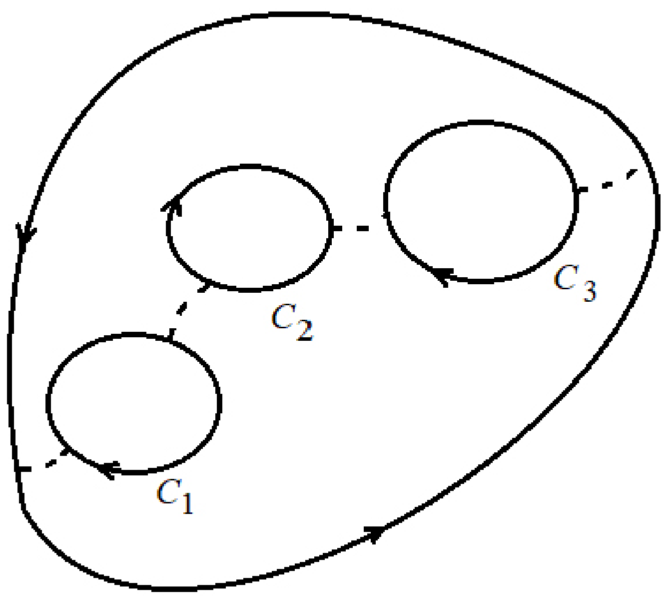

Рис. 4. Теорема Коши для сложного контура

Для доказательства теоремы достаточно провести в области разрезы (на рис. 4 пунктир) так, чтобы получились две односвязные области и воспользоваться теоремой 3.

Следствия из теоремы 4.

1. При выполнении теоремы 4 интеграл по внешнему контуру

равен сумме интегралов по внутренним; обход во всех контурах в одну сторону:

$$\oint\limits_{\Gamma} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint\limits_{C_k} f(z)dz.$$

2. Если $f(z)$ является аналитической в односвязной области D и на границе области, за исключением, быть может точки a этой области, то интегралы по различным замкнутым кривым, которые лежат в области D и ограничивают области, содержащие точку a, равны между собой:

$$\oint\limits_{C_k} f(z)dz = \oint\limits_{C_m} f(z)dz.$$

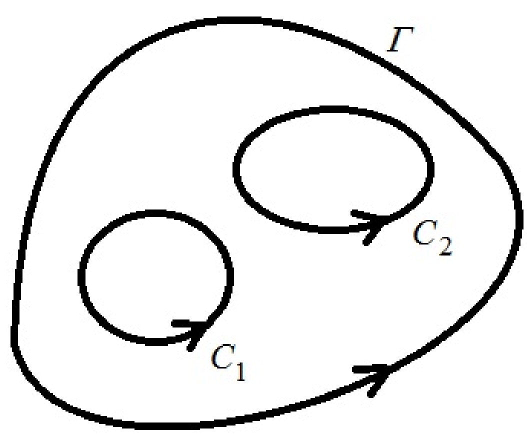

Рис. 5. Следствие 1 из теоремы 4

Теорема 5. *(Интегральная формула Коши) Если функция $f(z)$ является аналитической в области D и на её границе C, то для любой внутренней точки a области $(a \in D)$ имеет место равенство:*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C} \frac{f(z)}{z-a} dz. \tag{8}$$

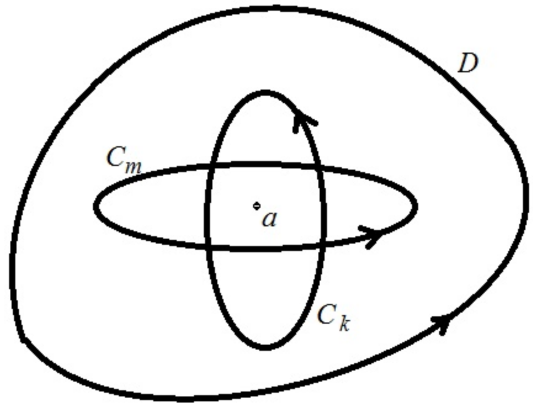

Рис. 6. Следствие 2 из теоремы 4

Доказательство

Рассмотрим окружность S_ρ достаточно малого радиуса ρ с центром в точке a. В области, ограниченной контурами C и S_ρ (то есть состоящей из точек области D за исключением точек внутри S_ρ), подынтегральная функция не имеет особенностей, и по интегральной теореме Коши интеграл от неё по границе этой области равен нулю. Это означает, что независимо от ρ имеем равенство

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \oint_{S_\rho} \frac{f(z)}{z-a}\,dz.$$

Параметризация $z = a + \rho e^{i\varphi}, \varphi \in [0; 2\pi]$.

Учитывая (см. пример 5 стр. 24):

$$\oint_C \frac{dz}{z-a} = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i,$$

имеем:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{S_\rho} \frac{f(z)}{z-a}\,dz - f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{S_\rho} \frac{f(z)}{z-a}\,dz - \frac{1}{2\pi i}\oint_{S_\rho} \frac{f(a)}{z-a}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{S_\rho} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz.$$

Так как функция $f(z)$ комплексно дифференцируема в точке a, то

$$\frac{f(z)-a}{z-a} = f'(a) + o(1).$$

Интеграл от $f'(a)$ равен нулю, как интеграл от аналитической функции:

Интеграл от члена $o(1)$ может быть сделан сколь угодно малым при $\rho \to 0$. Но поскольку он от ρ вообще не зависит, значит он равен нулю. В итоге получаем, что

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C}\frac{f(z)}{z-a}\,dz - f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{S_\rho}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz = 0.$$

Область D может быть односвязной или многосвязной, а граница области простым или сложным контуром.

Точка a не принадлежит границе области и поэтому подынтегральная функция является непрерывной на C и интеграл существует.

Здесь решается краевая задача теории функций: по значениям функции на границе области определяется её значение в любой внутренней точке.

В условиях теоремы интеграл $\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C}\dfrac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi$ определяет аналитическую функцию в любой точке z, не принадлежащей контуру C, причём в точках конечной области D, ограниченной контуром, он равен $f(z)$ (по формуле (8)), а вне $\bar{D}$ — равен нулю в силу основной теоремы Коши. Этот интеграл, называемый **интегралом Коши**, является частным случаем интеграла типа Коши (5). Здесь контур замкнутый, в отличии от произвольного в (5), а функция $f(z)$ является аналитической, в отличии от непрерывной на l в (5). Для интеграла Коши, следовательно, справедливо сформулированное для интеграла типа Коши утверждение о существовании производных.

1. Аналитическая функция в любой точке аналитичности может быть записана в виде интеграла
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C}\frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi,\ z \in D. \tag{9}$$

2. Аналитическая функция имеет производные любого порядка, для которых справедлива формула (*обобщённая инте-*

гральная формула Коши):

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi. \tag{10}$$

2.4 Вычисление интегралов по замкнутому контуру от функций комплексного переменного

Будем рассматривать интегралы вида $\oint\limits_C \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} dz$, где функция $\varphi(z)$ аналитическая в $\bar{D}$, а $\psi(z)$ — многочлен, не имеющий нулей на контуре C.

Правила

1. В области D нет нулей многочлена $\psi(z)$. Тогда $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ функция аналитическая и, применяя основную теорему Коши, имеем:
$$\oint\limits_C \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} dz = 0.$$

2. В области Dрасположен один простой нуль $z = a$ многочлена $\psi(z)$. Тогда записываем подынтегральную функцию в виде: $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{f(z)}{z-a}$, где $f(z)$ — функция аналитическая в $\bar{D}$. Получим:
$$\oint\limits_C \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} dz = \oint\limits_C \frac{f(z)}{(z-a)} dz = 2\pi i \cdot f(a).$$

3. В области D расположен один кратный нуль $z = a$ многочлена $\psi(z)$ (кратности n). Тогда $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{f(z)}{(z-a)^n}$, где $f(z)$ — функция аналитическая в $\bar{D}$.
$$\oint\limits_C \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} dz = \oint\limits_C \frac{f(z)}{(z-a)^n} dz = \frac{2\pi i}{(n-1)!} \cdot f^{(n-1)}(a).$$

4. В области D два нуля многочлена $\psi(z)$: $z_1 = a$, $z_2 = b$. В этом случае интеграл запишем в виде (следствие 1 теоремы 4):

$$\oint\limits_C f(z)dz = \oint\limits_{C_1} f(z)dz + \oint\limits_{C_2} f(z)dz,$$

где C_1 и C_2 — границы непересекающихся окрестностей точек $z_1 = a$, $z_2 = b$. Каждый из полученных интегралов вычисляем в соответствии с пп. 2 и 3. Очевидно, можно рассматривать случаи большего числа нулей $\psi(z)$ в области D.

Примеры

1. Вычислить $\oint\limits_C \frac{dz}{z-a}$, где C — произвольный контур, ограничивающий область, содержащую точку a.

$$\oint\limits_C \frac{dz}{z-a} = \oint\limits_{|z-a|=R} \frac{dz}{z-a} = |f(z) = 1| = 2\pi i.$$

2. $\oint\limits_C \frac{\sin z}{z^3 + 16z} dz$;

   a) $C : |z - 2 - i| = 2$;

   b) $C : |z + 2i| = 1$;

   c) $C : |z| = 2$;

   d) $C : |z + 1 + i| = 2$;

   e) $C : |z + 4i| = 2$.

3. $\oint\limits_C \frac{e^z}{(z-i)^2(z+2)} dz$, $C : |z + 2 - i| = 3$.

3 Функциональные ряды в комплексной области

Рассмотрим функции$f_1(z)$, $f_2(z), \ldots$, $f_n(z), \ldots$, определённые на некотором множестве M. Для $\forall\ z_0 \in M$ получаем последовательность чисел $\{c_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, где $c_n = f_n(z_0)$. Если последовательность c_n сходится, т. е. существует $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$, то говорят, что функциональная последовательность $\{f_n\}$ сходится в точке z_0.

Пределом функциональной последовательности является функция, которая называется *предельной функцией последовательности*: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$, $z \in D$.

Множество точек z, для которых $\exists$ предел последовательности, называется *областью сходимости функциональной последовательности* (область D).

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z),\ z \in D \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\, \exists\, n_0(\varepsilon, z) \in N :$$

$$\forall\, n > n_0(\varepsilon, z) \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon,\ z \in D.$$

В отличие от числовой последовательности номер n_0 зависит не только от ε, но и от z. Т. е. для различных $z_k \in D$ получаем различные $n_k(\varepsilon, z_k)$, имеем последовательность номеров n_k, $k = 1, 2, \ldots$.

Если последовательность n_k, $k = 1, 2, \ldots$ ограничена, т. е. $\exists\, n_0 = n_0(\varepsilon)$, такое, что $n_k < n_0$ для $\forall\, k$, то говорят, что последовательность $f_n(z)$ сходится к $f(z)$ на множестве D *равномерно*, обозначается $f_n(z) \rightrightarrows f(z)$.

$$f_n(z) \rightrightarrows f(z),\ z \in D \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\, \exists\, n_0(\varepsilon) \in N :$$

$$\forall\, n > n_0(\varepsilon) \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon, \forall\, z \in D.$$

Определение 6. *Ряд, членами которого являются функции комплексного переменного $u_k(z)$, $k = 1, 2, \ldots$, определённые на множестве M комплексной плоскости, называется функциональ-*

ным рядом в комплексной плоскости:

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z). \tag{11}$$

Определение 7. *Последовательность* $S_n(z)$, $n = 1, 2, \ldots$, *где* $S_n(z) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(z)$, *называется последовательностью частичных сумм ряда.*

Определение 8. *Ряд называется сходящимся на множестве* D, *если на множестве* D *сходится последовательность его частичных сумм, т. е.* $\exists$ *предел:*

$$\lim_{n\to\infty} S_n(z) = S(z),\ z \in D \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} u_k(z) = S(z),\ z \in D.$$

Определение 9. *Множество точек* $z \in D$ *для которых ряд сходится называется* ***областью сходимости ряда***. *Справедливо:*

$$|S_n(z) - S(z)| < \varepsilon \text{ для } n > n_0(\varepsilon, z),\ z \in D.$$

Определение 10. *Ряд* (11) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ *называется* ***равномерно сходящимся*** *на множестве* D, *если на этом множестве равномерно сходится последовательность* $\{S_n\}$, *т. е.:*

$$|S_n(z) - S(z)| < \varepsilon \text{ для } n > n_0(\varepsilon),\ \forall\, z \in D.$$

Теорема 6 (Признак Вейерштрасса). *Если ряд* (11) *на множестве* D *мажорируется сходящимся числовым рядом с положительными членами, то он сходится на* D *равномерно, т. е. из условия* $|u_n(z)| < c_n$, $z \in D$, $c_n > 0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ *— сходится, следует равномерная сходимость ряда* (11) *на* D.

Равномерно сходящиеся ряды (и последовательности) непрерывных функций комплексного переменного, как и аналогичные ряды в действительной области, обладают свойствами конечных сумм:

- сумма такого рода является функцией непрерывной на множестве, где ряд сходится равномерно;
- ряд можно почленно интегрировать:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int u_n(z)dz = \int\sum_{n=1}^{\infty}u_n(z)dz = \int S(z)dz;$$

- если ряд (11) аналитических в области D функций $u_n(z)$ равномерно сходится внутри D (на $\forall$ замкнутом множестве $\bar{B}\subset D$), то сумма $S(z)$ — аналитична в D;
- ряд можно почленно дифференцировать любое число раз, причём ряд, членами которого являются производные $u_n^{(k)}(z)$, равномерно сходится на любом $\bar{B}\subset D$ и сумма такого ряда равна $S^{(k)}(z)$ т. е.

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n^{(k)}(z) = S^{(k)}(z),\ k=1,2,3,\ldots$$

3.1 Нахождение области сходимости функциональных рядов

- Признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = |f(z)| < 1.$$

- Признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(z)|} = |f(z)| < 1.$$

3.2 Степенные ряды

Степенным рядом называется функциональный ряд, члены которого образованы степенями z^n или $(z-z_0)^n$ т. е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \tag{12}$$

или

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \tag{13}$$

В общем случае область сходимости функционального ряда (11) может быть $\forall$ множество произвольного вида, или, вообще, пустое множество. Для степенного ряда — область сходимости D — это круг либо одна точка.

Теорема 7 (Абеля). *Если степенной ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ (12) *сходится в точке* $z_0 \neq 0$, *то он сходится, и притом абсолютно, для любого* z, *удовлетворяющего неравенству* $|z| < |z_0|$.

Как следствие этой теоремы устанавливается существование положительного числа R, такого, что ряд (12) при $|z| < R$ сходится, а при $|z| > R$ — расходится. R — радиус сходимости. $|z| < R$ — круг сходимости. В частности, если ряд сходится только в точке $z = 0$, то $R = 0$, в случае сходимости на всей комплексной плоскости $R = \infty$.

Радиус сходимости можно найти определив, сначала, область сходимости см. 3.1 или, используя соотношения:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| \text{ или } R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}}.$$

Свойства степенных рядов

1. Если $R \neq 0$, т. е. ряд (12) сходится в круге $|z| < R$, то используя признак Вейерштрасса, нетрудно установить, что ряд сходится равномерно в круге $|z| \le r$, где $0 < r < R$.

2. Внутри круга сходимости сумма степенного ряда есть функция аналитическая.

3. Степенной ряд можно почленно интегрировать и дифференцировать любое число раз внутри круга сходимости.

3.3 Ряды по целым степеням

Рассмотрим два ряда: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{b_n}{(z-z_0)^n}$.

Первый ряд — степенной и пусть его область сходимости круг: $|z-z_0| < R$. Второй ряд степенным не является, но после замены $\dfrac{1}{z-z_0} = w$ получим степенной ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n w^n$ с областью сходимости $|w| < h$. Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{b_n}{(z-z_0)^n}$ имеем: $\left|\dfrac{1}{z-z_0}\right| < h$ или $|z-z_0| > \dfrac{1}{h} = r$. Если $r < R$, то исходные ряды имеют общую область сходимости — кольцо: $r < |z-z_0| < R$.

Два сходящихся ряда можно складывать. В области $r < |z-z_0| < R$ получим ряд вида:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n.$$

Пример

Найти область сходимости и сумму ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{3^n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{z^n}{2^n}$$

Запишем ряд в виде: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{z^n}{3^n} + \dfrac{2^n}{z^n}\right)$.

Рассмотрим вспомогательные ряды: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{z^n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{3^n}$. Области сходимости каждого из них:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{2^n}{z^n}\right|}=\frac{2}{|z|}<1\Rightarrow |z|>2,$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{z^n}{3^n}\right|}=\frac{|z|}{3}<1\Rightarrow |z|<3.$$

На окружностях $|z|=2$, $|z|=3$ ряды расходятся. Область сходимости — кольцо: $2<|z|<3$.

Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{z^n}$ при $|z|>2$ сумму можно рассматривать как бесконечно убывающую геометрическую прогрессию ($b_1=\frac{2}{z}$, $q=\frac{2}{z}$, $|q|<1$):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{z^n}=\frac{\frac{2}{z}}{1-\frac{2}{z}}=\frac{2}{z-2}.$$

Аналогично для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{3^n}$ при $|z|<3$ ($b_1=\frac{z}{3}$, $q=\frac{z}{3}$, $|q|<1$):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{3^n}=\frac{z}{3-z}.$$

Окончательно:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{3^n}+\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{z^n}{2^n}=\frac{z}{3-z}+\frac{2}{z-2}=\frac{z^2-4z+6}{(z-2)(3-z)}.$$

3.4 Разложение функции в степенные ряды. Ряд Тейлора

Рассмотрим задачу, для функции $f(z)$, аналитической в области D, найти ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$, сходящийся к $f(z)$ в круге $|z-z_0|<R$, принадлежащий области D, т. е.

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n(z-z_0)^n,\ |z-z_0|<R. \tag{14}$$

Теорема Тейлора о разложимости функции в степенной ряд

Теорема 8. *Функция, аналитическая в области D, в окрестности каждой точки z_0 этой области представляется в виде степенного ряда (14), радиус сходимости R которого не меньше, чем расстояние от точки z_0 до границы области D. Коэффициенты ряда вычисляются по формуле:*

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi, \; n = 0, 1, \ldots, \tag{15}$$

где γ — произвольный контур, принадлежащий области D и охватывающий точку z_0, в частности γ — окружность $|z - z_0| = \rho$, или по формуле:

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \; n = 0, 1, \ldots. \tag{16}$$

Выражение для коэффициентов ряда (15) легко получить из теоремы Тейлора для дифференцируемой функции и обобщённой интегральной формулы Коши (10):

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint\limits_{C} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi.$$

Алгоритм разложения аналитической функции в степенной ряд

1. Найти производные от данной функции:

$$f'(z),\; f''(z), \ldots, f^{(n)}(z), \ldots$$

2. Вычислить значения производных в точке z_0; записать коэффициенты ряда по формуле (16). Составить ряд по степеням $(z - z_0)$.

3. Найти область сходимости полученного ряда и записать разложение (14).

Основные табличные разложения (Маклорена):

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!},\ (R = \infty);$$

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1}\frac{z^n}{n} + \ldots = \\ = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} z^k}{k},\ (|z| < 1);$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} + \ldots = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1},\ (R = \infty);$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} + \ldots = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k},\ (R = \infty);$$

$$\operatorname{arctg} z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1} + \ldots = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} z^{2k+1},\ (|z| \le 1);$$

$$\operatorname{sh} z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots + \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1} + \ldots = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} z^{2k+1},\ (R = \infty);$$

$$\operatorname{ch} z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots + \frac{1}{(2n)!} z^{2n} + \ldots = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} z^{2k},\ (R = \infty);$$

$$(1+z)^{\alpha} = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2 + \ldots$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}z^n + \ldots, \ (|z|<1) \text{ (биномиальный ряд);}$$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^n + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} z^k, \ (|z|<1);$$

$$\sqrt{1+z} = 1 + \frac{z}{2} - \frac{z^2}{8} + \frac{z^3}{16} - \cdots + \frac{(-1)^n(2n)!}{(1-2n)n!^2 4^n}z^n + \ldots =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(2k)!}{(1-2k)k!^2 4^k}z^k, \ (|z|<1).$$

Используя эти разложения, можно довольно просто находить разложения многих других функций. При этом отпадает необходимость процедуры дифференцирования при нахождении коэффициентов ряда и упрощается нахождение области сходимости ряда, так как области сходимости табличных рядов известны.

Радиус сходимости ряда, полученного при разложении данной функции в окрестности точки z_0, равен расстоянию от центра разложения — точки z_0 до ближайшей особой точки функции. Если функция является аналитической всюду, то $R = \infty$.

Примеры

Разложить по степеням z функции:

1. $\operatorname{ch} 3z = \left| t = 3z \right| = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{9^k z^{2k}}{(2k)!}, \ (R = \infty).$

2. $e^{z+2} = e^2 \cdot e^z = e^2 \cdot \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \ (R = \infty).$

3. $\sin^2 z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2z = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}2^{2k-1}}{(2k)!}z^{2k}, \ (R = \infty).$

4. $f(z) = \ln(3+z).$

   Функция определена всюду, кроме $z = -3$. В односвязной области, например в плоскости с разрезом по лучу $(-\infty; -3]$, где $-\pi < \arg z < \pi$, возможно выделение однозначных ветвей многозначной функции

$$\mathrm{Ln}\,(z+3) = \ln|3+z| + i(\arg 3 + 2\pi k).$$

Выберем ту ветвь, для которой $f(0) = \ln 3$.
Имеем $\mathrm{Ln}\,3 = \ln 3 + i(\arg 3 + 2\pi k) = \ln 3$, следовательно $k = 0$.
Разложим аналитическую функцию $\ln(z+3)$ по степеням z в круге $|z| = 3$ радиус круга $R = 3$ — расстояние от центра разложения $z_0 = 0$ до граничной точки $z = -3$.

$$\ln(3+z) = \ln 3\left(1+\frac{z}{3}\right) = \ln 3 + \ln\left(1+\frac{z}{3}\right) = \left|t = \frac{z}{3}\right| =$$

$$= \ln 3 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}t^k}{k} = \ln 3 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}z^k}{k\cdot 3^k},\ |z| < 3.$$

5. Разложить в окрестности точки $z_0 = 0$ ветвь функции $\ln(z^2 - z - 6)$, для которой $f(0) = \ln 6 + i\pi$.

$$\ln(z^2 - z - 6) = \ln(z+2)(z-3) =$$

$$= \ln 6 + i\pi + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{k+1}}{2^k} - \frac{1}{3^k}\right)\cdot\frac{z^k}{k},\ |z| < 2.$$

Разложить по степеням $(z-2)$ функции:

6. $f(z) = \sin z$.

7. $f(z) = e^z$.

8. $\ln(1+z)$.

Разложить по степеням z функции:

9. $\dfrac{1}{1-az} = \left|t = az\right| = \sum\limits_{k=0}^{\infty} t^k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a^k z^k,\ |z| < \dfrac{1}{|a|} = R.$

10. $\dfrac{1}{a-z} = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{z^k}{a^{k+1}},\ |z| < |a| = R.$

11. $f(z) = \dfrac{1}{(1-z)^2}$.

   Дробь $\dfrac{1}{(1-z)^2}$ является производной дроби $\dfrac{1}{1-z}$, её разложение можно получить используя дифференцирование ряда:

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^n + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} z^k, \ (|z| < 1).$$

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \left(\frac{1}{1-z}\right)' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} kz^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty}(k+1)z^k, \ |z| < 1.$$

Повторяя процедуру дифференцирования, можно получить разложение элементарных дробей вида $\dfrac{1}{(1-z)^k}$ при любом натуральном k.

Рассмотрим разложение в ряд Тейлора рациональных дробей

$$R(z) = \frac{P_m(z)}{Q_n(z)},$$

где $P_m(z)$ и $Q_n(z)$ — многочлены.

Алгоритм разложения рациональных дробей в ряд Тейлора

1. Если дробь неправильная ($m \geq n$), следует выделить целую часть дроби — многочлен.

2. Правильную рациональную дробь разложить на элементарные дроби.

3. Разложить элементарные дроби в степенные ряды (см. примеры 9, 10, 11).

Примеры

Разложить по степеням z функции:

1) $\dfrac{2z-1}{z+2}$; 2) $\dfrac{z^2-z+3}{z+2}$; 3) $\dfrac{z+2}{z^2-2z-3}$; 4) $\dfrac{z+1}{(z-1)^2(z+2)}$, 5) $\dfrac{4}{4+z^2}$.

6) Разложить по степеням $(z-1)$: $\dfrac{z+2}{z^2-2z-3}$.

3.5 Нули аналитических функций

Пусть функция $f(z)$ является аналитической в точке z_0.

Точка z_0 называется *нулём функции* $f(z)$ если её значение в этой точке равно нулю, т. е. $f(z_0) = 0$.

В разложении функции в ряд Тейлора в окрестности нуля этой функции отсутствует свободный член: $c_0 = f(z_0) = 0$.

Если при этом в разложении отсутствуют и слагаемые, содержащие степени разности $(z - z_0)$ до n-ой степени, т. е. имеет вид:

$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k (z - z_0)^k = c_n (z - z_0)^n + c_{n+1} (z - z_0)^{n+1} + \ldots,$$

то точка z_0 называется нулём порядка n функции $f(z)$.

Правую часть последнего равенства можно записать в виде:

$$f(z) = (z - z_0)^n \cdot (c_n + c_{n+1}(z - z_0) + \ldots) = (z - z_0)^n \cdot \varphi(z).$$

$$\varphi(z_0) = c_n \neq 0.$$

Используя формулу (16) для коэффициентов ряда Тейлора $c_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, получаем, что для нуля порядка n функции $f(z)$ в точке z_0 справедливо условие:

$$f^{(n)}(z_0) \neq 0,\ f^{(k)}(z_0) = 0,\ k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1,$$

т. е. порядок нуля функции определяется порядком первой отличной от нуля в этой точке производной.

Пусть функция $f(z) = f_1(z) \cdot f_2(z)$, точка z_0 является нулём порядка k для функции $f_1(z)$ и порядка m для функции $f_2(z)$. Тогда

$$f(z) = (z - z_0)^k \cdot \varphi_1(z) \cdot (z - z_0)^m \cdot \varphi_2(z) = (z - z_0)^{k+m} \cdot \varphi(z).$$

Это означает, что порядок нуля в точке z_0 функции, полученной перемножением аналитических функций, равен сумме порядков нуля в этой точке функций–сомножителей.

Необходимое и достаточное условие нуля порядка n функции $f(z)$ в точке z_0:

$a)$ $f^{(n)}(z_0) \neq 0,\ f^{(k)}(z_0) = 0,\ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1;$

$b)$ $f(z) = (z - z_0)^n \cdot \varphi(z),\ \varphi(z_0) = c_n \neq 0.$

Замечание

Порядок нуля частного равен разности — из порядка нуля числителя вычитается порядок нуля знаменателя.

Алгоритм нахождения нулей аналитических функций и определение их порядков

1. Найти нули аналитической функции $f(z)$, решая уравнение: $f(z) = 0$.

2. Определить порядок каждого полученного нуля. Для этого выполнить одно из следующих действий:

   $a)$ разложить $f(z)$ в ряд по степеням $(z - z_0)$. Младшая степень разности $(z - z_0)$, присутствующая в разложении, определяет порядок нуля z_0;

   $b)$ найти производные $f^{(k)}(z)$ и их значение в нуле функции, т. е. $f^{(k)}(z_0)$, порядок нуля функции определяется порядком первой отличной от нуля в этой точке производной;

   $c)$ записать функцию в виде: $f(z) = (z - z_0)^n \cdot \varphi(z)$, $\varphi(z_0) = c_n \neq 0$, n — порядок нуля;

   $d)$ записать функцию в виде произведения более простых функций и для каждой их них определить порядок нуля z_0, порядок нуля — сумма порядков нуля сомножителей.

3. Для функции $f(z)$ не определённой в точке z_0, но удовлетворяющей в этой точке условию: $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = 0$ порядок нуля определяется как разность порядков нулей числителя и знаменателя.

Примеры

1. Найти все нули функции: $f(z) = z^5 - z^4 + 4z^3 - 4z^2$.
2. Определить порядок нуля $z_0 = 0$ для функции:
$$f(z) = e^{z^2} - 1 - z^2.$$
3. Определить порядок нуля $z_0 = 0$ для функции:
$$f(z) = \sin^3 z - 1 + \cos z.$$
4. Определить порядок нуля $z_0 = 0$ для функции:
$$f(z) = \left(e^{z^2} - 1 - z^2\right) \sin^3 z.$$

3.6 Разложение функции в ряды по целым степеням. Ряд Лорана

При разложении функции в степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ функция предполагается аналитической в точке z_0, ряд сходится в круге $|z - z_0| < R$, $0 \leq R < \infty$.

Другим частным случаем функциональных рядов является ряд по целым степеням разности $(z - z_0)$. Такой ряд сходится в кольце $r < |z - z_0| < R$, $r \geq 0$, $R < \infty$, а его сумма — функция аналитическая внутри этого кольца.

Теорема Лорана о разложении функции по целым степеням

Теорема 9. *Функция $f(z)$ аналитическая в кольце, представляется в этом кольце сходящимся рядом по целым степеням, т. е. имеет место равенство:*
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n. \tag{17}$$
Коэффициенты ряда вычисляются по формуле:
$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{18}$$

где γ — произвольный контур, принадлежащий кольцу и охватывающий точку z_0, в частности γ — окружность $|z-z_0| = \rho$, $r < \rho < R$.

Определение 11. *Ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, коэффициенты которого вычисляются по формуле* (18) *называется рядом Лорана.*

Определение 12. *Совокупность членов ряда Лорана с неотрицательными степенями — $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ называется **правильной** частью ряда Лорана; члены ряда с отрицательными степенями образуют **главную** часть ряда Лорана $\sum\limits_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-z_0)^n$ или $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{c_n}{(z-z_0)^n}$.*

При $r = 0$ получаем частный случай кольца — вырожденное кольцо $0 < |z - z_0| < R$. Это круг с выколотым центром. Точка z_0 — особая точка функции, и разложение функции называется *разложением функции в окрестности особой точки.*

При $R = \infty$ область $|z - z_0| > r$ — есть внешность круга. В частности при $z_0 = 0$ — внешность круга $|z| > r$. Разложение в этом случае называется *разложением в окрестности бесконечно удалённой точки* и имеет вид:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n z^n$$

или

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n}.$$

Здесь совокупность неотрицательных степеней $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ образует *главную часть ряда Лорана в окрестности бесконечно удалённой точки*; совокупность отрицательных $\sum\limits_{n=-\infty}^{-1} c_n z^n$ — *пра-*

вильную часть ряда Лорана в окрестности бесконечно удалённой точки.

Разложение в ряд Лорана сводится к разложению в ряд Тейлора, используются основные разложения и действия над рядами.

Правило

При разложении рациональных дробей, как и в случае рядов Тейлора, выделяется целая часть неправильной дроби, а правильная записывается в виде сумм элементарных дробей, для разложения которых используется формула сумм членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Элементарные дроби преобразуются следующим образом:

- для получения правильной части, т. е. ряда, сходящегося в круге $|z-z_0|<R$, разложение элементарной дроби записывается в виде:

$$\frac{1}{a-(z-z_0)}=\frac{\frac{1}{a}}{1-\frac{z-z_0}{a}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{a^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}c_n(z-z_0)^n,$$

$$|z-z_0|<|a|,\ a\neq 0;$$

- для получения главной части, т. е. ряда, сходящегося вне круга $|z-z_0|>r$:

$$\frac{1}{a-(z-z_0)}=\frac{-\frac{1}{z-z_0}}{1-\frac{a}{z-z_0}}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{(z-z_0)^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{(z-z_0)^n},$$

$$\left|\frac{a}{z-z_0}\right|<1,\ |z-z_0|>|a|.$$

Примеры

1. Разложить функцию $f(z)=\dfrac{z+2}{z^2-2z-3}$ в ряд Лорана по степеням z.

Функция является аналитической всюду, кроме точек $z_1=-1$, $z_2=3$, в частности в круге $|z|<1$, в кольце $1<|z|<3$ и в окрестности бесконечно удалённой точки $|z|>3$.

В круге $|z| < 1$ функция раскладывается в ряд Тейлора:

$$f(z) = \frac{z+2}{z^2-2z-3} = \frac{-0,25}{z+1} + \frac{1,25}{z-3}.$$

Для каждой дроби получим:

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{1-(-z)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n, \ |z| < 1;$$

$$\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z}{3}} = -\frac{1}{3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}, \ |z| < 3.$$

В общей области сходимости $|z| < 1$:

$$\frac{z+2}{z^2-2z-3} = -\frac{1}{4}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n - \frac{5}{4}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}} =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^{n+1} - \frac{5}{3^{n+1}}\right)\cdot z^n, \ |z| < 1.$$

Получим разложение в кольце $1 < |z| < 3$:

$$f(z) = \frac{z+2}{z^2-2z-3} = \frac{-0,25}{z+1} + \frac{1,25}{z-3},$$

первое слагаемое записываем в области $|z| > 1$, т. е. записываем главную часть ряда Лорана, второе в круге $|z| < 3$ — правильная часть ряда.

$$\frac{1}{z+1} = \frac{\dfrac{1}{z}}{1-\left(-\dfrac{1}{z}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{z^n}, \ |z| > 1;$$

$$\frac{1}{z-3} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}, \ |z| < 3.$$

Окончательный результат:

$$\frac{z+2}{z^2-2z-3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4\cdot z^n}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5\cdot z^n}{4\cdot 3^{n+1}},\ 1<|z|<3.$$

Получим разложение в области $|z|>3$ — окрестности бесконечно удалённой точки. В этом случае нужно и первое, и второе слагаемое разложить по отрицательным степеням:

$$\frac{1}{z-3}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{3}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{z^n},\ |z|>3;$$

$$\frac{z+2}{z^2-2z-3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4\cdot z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5\cdot 3^{n-1}}{4\cdot z^n}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+5\cdot 3^{n-1}}{4}\cdot\frac{1}{z^n},\ |z|>3.$$

Получили разложение в окрестности бесконечно удалённой точки, главная часть ряда отсутствует, так как в разложении имеются только члены с отрицательными степенями.

2. Записать разложение функции $f(z)=\dfrac{z+2}{z^2-2z-3}$ в ряд Лорана в окрестностях особых точек $z_1=-1$, $z_2=3$, т. е. по степеням $(z+1)$ и $(z-3)$.

3. Записать разложение функции $f(z)=\dfrac{z+2}{(z+1)^2(z-3)}$ в ряд Лорана в окрестностях особых точек $z_1=-1$, $z_2=3$, т. е. по степеням $(z+1)$ и $(z-3)$.

4. Записать разложение функции $f(z)=z^3\cdot e^{\frac{1}{z}}$ в ряд Лорана в окрестностях точек $z_0=0$, и $z_0=\infty$.

5. Разложить по степеням z функции: $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z^2}$ и $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$.

Список литературы

1. *Бицадзе, А. В.* Основы теории аналитических функций комплексного переменного / А. В. Бицадзе. — М.: Наука, 1969. — 240 с.
2. *Евграфов, М. А.* Аналитические функции. / М. А. Евграфов. — М.: Наука, 1968. — 472 с.
3. *Евграфов, М. А.* Сборник задач по теории аналитических функций / М. А. Евграфов, Ю. В. Сидоров, М. В. Федорук, М. И. Шабунин, К. А. Бежанов. — М.: Наука, 1969. — 388 с.
4. *Пантелеев А. В.* Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах: учеб. пособ. / А. В. Пантелеев, А. С. Якимова. — М.: Высш. шк., 2001. —445 с.
5. *Привалов И. И.* Введение в теорию функций комплексного переменного. / И. И. Привалов. — М.: Физматгиз, 1960. — 444 с.
6. *Лаврентьев, М. А.* Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. — М.: Наука, 1973. — 736 с.
7. *Лунгу, К. Н.* Сборник задач по высшей математики. 2 курс. / К. Н. Лунгу, и др. — М.: Айриспресс, 2006. — 592 с.
8. *Письменный, Д. Т.* Конспект лекций по высшей математике. / Д. Т. Письменный. — М.: Айрис-пресс, 2006.
9. *Буров, А. Н.* Практикум по спецглавам математики: учеб. пособие / А. Н. Буров, Н. Г. Вахрушева, С. В. Клишина — Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2001. — 102 с.
10. http://ru.wikipedia.org/wiki/
11. http://mathhelpplanet.com/portal.php