НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В. В. Комиссаров
Н. В. Комиссарова

СБОРНИК ЗАДАЧ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ГЛАВЫ МАТЕМАТЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Новосибирск 2019

Содержание

1. Комплексные числа

1. Вычислить $\overline{z}_1$; z_1+z_2; z_1-z_2; $z_1\cdot z_2$; z_1/z_2, если $z_1=2i$, $z_2=1+i$, результат записать в алгебраической, тригонометрической и показательной форме.

2. Найти действительную и мнимую части следующих комплексных чисел:
   $a)\ \dfrac{1}{1-i}$; $b)\ \left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^3$; $c)\ \left(\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$.

3. Найти модули и аргументы следующих комплексных чисел:
   $a)\ i$; $b)\ -3$; $c)\ 1+i^{123}$; $d)\ -\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $e)\ \dfrac{1-i}{1+i}$;
   $f)\ -\cos\dfrac{\pi}{7}+i\sin\dfrac{\pi}{7}$; $g)\ (-4+3i)^3$.

4. Даны комплексные числа $z_1=2i\cdot e^{-\frac{\pi}{5}i}$, $z_2=\sqrt{3}-i$. Найти $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|$ и $\arg(z_1\cdot z_2)$.

5. Найти вещественные решения уравнений:
   $a)\ (3x-i)(2+i)+(x-iy)(1+2i)=5+6i$;
   $b)\ 12((2x+i)(1+i)+(x+y)(3-2i))=17+6i$;
   $c)\ \dfrac{1}{x+iy-i}+\dfrac{2+i}{1+i}=\sqrt{2}$.

6. Решить квадратные уравнения:
   $a)\ x^2+2x+5=0$; $b)\ x^2+4x+13=0$; $c)\ x^2-3x+7=0$.

7. Вычислить:
   $a)\ (2-2i)^7$; $b)\ \left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{40}$; $c)\ \left(\sqrt{3}-3i\right)^6$; $d)\ \left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^8$.

8. С помощью формулы Муавра выразить через степени $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ следующие функции:
   $a)\ \sin 3\varphi$; $b)\ \cos 3\varphi$; $c)\ \sin 4\varphi$; $d)\ \cos 4\varphi$; $e)\ \sin 5\varphi$; $f)\ \cos 5\varphi$.

9. Вычислить все значения корня:
   $a)$ $\sqrt[4]{-1}$; $b)$ $\sqrt{i}$; $c)$ $\sqrt[3]{i}$; $d)$ $\sqrt[4]{1}$; $e)$ $\sqrt[3]{-1+i}$; $f)$ $\sqrt{2-2\sqrt{3}i}$;
   $g)$ $\sqrt[3]{\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})}$.

10. На множестве комплексных чисел решить уравнение $z^4+81=0$.

11. Сколько корней уравнения $z^8+1=0$ расположены в верхней полуплоскости? Выписать эти корни.

12. Выяснить геометрический смысл соотношения и сделать чертёж:
    $a)$ $|z-2|+|z+2|=5$; $b)$ $|z-3-i|=|z-2|$; $c)$ $|z-1|=|\operatorname{Re} z|$;
    $d)$ $|z-2|-|z+2|=6$; $e)$ $|z-i|+|z+i|<4$; $f)$ $\operatorname{Re}\dfrac{1}{z}<\dfrac{1}{2}$;
    $g)$ $0<\arg\dfrac{i-z}{z+i}<\dfrac{\pi}{2}$.

13. Вычислить значения функций (ответ записать в алгебраической форме):
    $a)$ e^{3-2i}; $b)$ $\cos(2+i)$; $c)$ $\sin(\pi/4+i)$; $d)$ $\arcsin 3$;
    $e)$ $\operatorname{Ln}(\sqrt{2}-i)$; $f)$ $\operatorname{th}\left(3-\dfrac{\pi i}{2}\right)$; $g)$ $\operatorname{Ln}(-3-4i)$; $h)$ $\operatorname{Arctg}(3i)$;
    $i)$ $(-1)^{\sqrt{2}}$; $j)$ $(i)^i$; $k)$ $\cos\pi i$.

14. Решить уравнения:
    $a)$ $e^{-z}+1=0$; $b)$ $4\cos z+7=0$; $c)$ $\sin z=\pi i$; $d)$ $e^{2z}+3e^z-3=0$.

2. Аналитические функции

15. Найти вещественную и мнимую части функций:
    $a)$ $w=2z-1$; $b)$ $w=z+\overline{z}^2$; $c)$ $w=z^{-1}$; $d)$ $w=e^{\overline{z}^2}$;
    $e)$ $w=e^{\overline{z}}$; $f)$ $w=\operatorname{ch}(z-i)$; $g)$ $w=2^{z^2}$; $h)$ $w=\operatorname{sh} z$; $i)$ $w=\operatorname{th} z$;
    $j)$ $w=z^i$; $k)$ $w=\cos iz$.

16. Установить, какие из заданных функций являются аналитическими хотя бы в одной точке:
$a)$ $w = 2z - 1$; $b)$ $w = z + \overline{z}^2$; $c)$ $w = z^{-1}$; $d)$ $w = e^{z^2}\operatorname{Re}\overline{z}$; $e)$ $w = e^{\overline{z}}$; $f)$ $w = \sin(z+i)$; $g)$ $w = |z| + z$; $h)$ $w = \operatorname{ch}\overline{z}$; $i)$ $w = \operatorname{th} z$; $j)$ $w = \cos iz$.

17. Найти $f'(0)$, если $f(z) = \ln(2z+i)$.

18. Определить, в каких точках дифференцируемая функция:
$a)$ $f(z) = z\cdot\operatorname{Re} z$; $b)$ $f(z) = z\cdot\operatorname{Im} z$.

19. Проверить условия Коши–Римана в произвольной точке, и в случае их выполнения найти $f'(z)$ для функций:
$a)$ $f(z) = 3z\cdot e^{2z}$; $b)$ $f(z) = \cos(z+2i)$.

20. Найти $|f'(z_0)|$, $\arg f'(z_0)$, если:
$a)$ $f(z) = e^{2z}$, $z_0 = i$; $b)$ $f(z) = e^{\frac{1}{z}}\cdot\sin\frac{z}{i}$, $z_0 = \dfrac{2}{i}$;
$c)$ $f(z) = e^{\frac{i}{z}}\cdot\sin\frac{z}{i}$, $z_0 = 1$; $d)$ $f(z) = \dfrac{e^z}{z^4+1}$, $z_0 = 1+i$.

21. Установить, какие из заданных функций являются гармоническими:
$a)$ $u = x^2 + 2x - y^2$; $b)$ $u = 2e^x\cos y$; $c)$ $u = 3x^2 + y$; $d)$ $u = \dfrac{x}{x^2+y^2}$; $e)$ $u = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$; $f)$ $u = \dfrac{1}{x^2+y^2}$;
$g)$ $u = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$; $h)$ $u = \ln(x^2+y^2)$; $i)$ $u = x\ln y$.

22. Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию $f(z)$ по известной функции $u(x,y) = \operatorname{Re} f(z)$ или $v(x,y) = \operatorname{Im} f(z)$ и значению $f(z_0)$:
$a)$ $u = x^2 + 2x - y^2$, $f(i) = 2i - 1$;
$b)$ $u = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, $f(\pi) = \dfrac{1}{\pi}$;
$c)$ $v = \operatorname{arctg} y/x\ (x > 0)$, $f(1) = 0$;
$d)$ $v = 2(\operatorname{ch} x\cdot\sin y - xy)$, $f(0) = 0$;
$e)$ $u = 2\sin x\cdot\operatorname{ch} y - x$, $f(0) = 0$;

f) $u = 2(2\operatorname{sh} x \cdot \sin y + xy),\ f(0) = 3;$
g) $v = -2\sin 2x \cdot \operatorname{sh} 2y + y,\ f(0) = 2;$
h) $v = 2\cos x \cdot \operatorname{ch} y - x^2 + y^2,\ f(0) = 2.$

3. Интегрирование функций комплексного переменного

23. Вычислить интегралы:

a) $\int\limits_C z \operatorname{Im} z^2 dz,\ C:\ |Z| = 1\,(-\pi \le \arg z \le 0);$

b) $\int\limits_C e^{|z|^2} \operatorname{Re} z dz,\ C$ — прямая, соединяющая точки $z_1 = 0,$ $z_2 = 1 + i;$

c) $\int\limits_C z \operatorname{Im} z dz,\ C:\ |z| = 1,$ обход против часовой стрелки;

d) $\int\limits_C z\overline{z} dz,\ C:\ |z| = 1,$ обход против часовой стрелки;

e) $\int\limits_C e^{\overline{z}} dz,\ C$ — отрезок $AB,\ A(0, -\pi),\ B(\pi, 0);$

f) $\int\limits_C \operatorname{Re} z^2 dz,\ C$ — задана соотношениями: $z + \overline{z} = 2,$ $|\operatorname{Im} z| \le 1;$

e) $\int\limits_C e^{2z} dz,\ C$ — контур треугольника $AOB,\ A(-1, 1),\ O(0, 0),$ $B(1, 1).$

24. Вычислить интегралы, предварительно убедившись в аналитичности подынтегральных функций:

a) $\int\limits_{1+i}^{-1-i} (2z + 1) dz;$ *b*) $\int\limits_0^{1+i} z^3 dz;$ *c*) $\int\limits_{1+i}^{2i} (z^3 - z) dz;$

d) $\int\limits_0^{i} z \cos z dz;$ *e*) $\int\limits_0^{i} (z - i) e^{-z} dz;$ *f*) $\int\limits_0^{1+i} \sin z \cos z dz.$

25. С помощью интегральной формулы Коши вычислить интегралы (все окружности обходятся против часовой стрелки):

$a)\ \oint\limits_{|z-1|=1} \frac{e^{iz}}{z^2+1}dz;$ $b)\ \oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin iz}{z^2-4z+3}dz;$ $c)\ \oint\limits_{|z|=4} \frac{dz}{(z^2+9)(z+6)};$

$d)\ \oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3}dz;$ $e)\ \oint\limits_{|z|=2} \frac{z\,\mathrm{sh}\, z}{(z^2-1)^2}dz;$ $f)\ \oint\limits_{|z-3|=6} \frac{zdz}{(z-2)^3(z+4)}.$

26. Вычислить интеграл $\int\limits_C \frac{dz}{\sqrt{z}}$ по контурам:

$a)$ C : полуокружность $|z|=1,\ y\geq 0,\ \sqrt{1}=1;$
$b)$ C : полуокружность $|z|=1,\ y\geq 0,\ \sqrt{1}=-1;$
$c)$ C : полуокружность $|z|=1,\ y\leq 0,\ \sqrt{1}=1;$
$d)$ C : окружность $|z|=1, \sqrt{1}=1;$
$e)$ C : окружность $|z|=1,\ \sqrt{-1}=i.$

27. Вычислить интеграл $\int\limits_C \mathrm{Ln}\, z dz$ где:

$a)$ C — единичная окружность и $\mathrm{Ln}1=0;$
$b)$ C — единичная окружность и $\mathrm{Ln}i=\frac{\pi}{2};$
$c)$ C — окружность $|z|=R$ и $\mathrm{Ln}R=\ln R;$
$d)$ C — окружность $|z|=R$ и $\mathrm{Ln}R=\ln R+2\pi i.$

28. Вычислить интеграл $\int\limits_{|z|=1} z^n\cdot \mathrm{Ln}\, z dz$ где n — целое число и

$a)$ $\mathrm{Ln}1=0;$ $b)$ $\mathrm{Ln}(-1)=\pi i.$

29. Вычислить интегралы:

$a)$ $\int\limits_{|z|=1} z^\alpha dz$ где $\alpha\in\mathbb{C}$ и $1^\alpha=1;$

$b)$ $\int\limits_C \frac{dz}{\sqrt[4]{z^3}}$, C — верхняя полуокружность $|z|=1,\ z_1=1,$ $z_2=-1,\ \sqrt[4]{1}=-1;$

$c)$ $\int\limits_C \frac{dz}{\sqrt{z+1}}$, $C:y=x^3-4x,\ z_1=-2,\ z_2=2,\ \sqrt{-1}=-i;$

$d)$ $\int\limits_C \dfrac{dz}{\sqrt{i\sqrt{3}-z}}$, C — прямая,

$z_1 = -1$, $z_2 = 1$, $\sqrt{1+i\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}}$;

$e)$ $\int\limits_C \dfrac{dz}{\sqrt[3]{1-z}}$, C — прямая, $z_1 = -7$, $z_2 = 3+2i$, $\sqrt[3]{8} = 2$.

4. Функциональные ряды в комплексной области

30. Исследовать на сходимость ряды:

$a)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos in}{2^n}$; $b)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n \sin in}{3^n}$; $c)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos in^2}{5^{n^2}}$; $d)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{i2n}}{n\sqrt{n}}$;

$e)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{i\pi/n}}{\sqrt{n}}$; $f)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{sh} i\sqrt{n}}{\sin in}$; $g)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln n}{\operatorname{sh} in}$; $h)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{ch}(i\pi/n)}{n^{\ln n}}$.

31. Найти радиусы сходимости степенных рядов:

$a)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{in} z^n$; $b)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{ch}\dfrac{i}{n} z^n$; $c)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos^n \dfrac{\pi i}{\sqrt{n}} z^n$; $d)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos in \cdot z^n$.

32. Разложить заданные функции в ряд Тейлора, используя табличные разложения, и найти радиусы сходимости полученных рядов:

$a)$ $\sin(2z+1)$ по степеням $z+1$; $b)$ e^z по степеням $2z-1$;

$c)$ $\dfrac{1}{3z+1}$ по степеням $z+2$; $d)$ $\dfrac{z+1}{z^2+4z-5}$ по степеням z;

$e)$ $\cos^2 \dfrac{iz}{2}$ по степеням z; $f)$ $\ln(2-z)$ по степеням z.

33. Найти области сходимости функциональных рядов:

$a)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(1-i)^n z^n}$; $b)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(\sqrt{2}+i\sqrt{2})^n}{z^n}$;

$c)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(z+1-i)^{-n}}{n+i}$; $d)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{n}+in\right)(z+1+i)^n$;

$e)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2(z-i)^n}$; $\qquad f)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{4}\right)^n$;

$g)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n(z-2+i)^n} + \sum_{n=0}^{\infty}(1+in)(z-2+i)^n.$

34. Найти множество точек z, в которых сходятся следующие ряды Лорана:

$a)\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-|n|}z^n$; $\qquad b)\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{3^n+1}$;

$c)\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{\operatorname{ch}\alpha n}$, $(\alpha > 0)$; $\qquad d)\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-n^2}(z+1)^n$;

$e)\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(z-a)^{2n}}{2^{-n^3+1}}$; $\qquad f)\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{n^2+1}$;

$g)\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-n^2}z^{n^3}$; $\qquad h)\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^n z^n.$

35. Разложить функции в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 0$:

$a)\ \frac{\sin z}{z^2}$; $\quad b)\ z^4\cos\frac{1}{z}$; $\quad c)\ \frac{1-\cos z}{z^2}$; $\quad d)\ \frac{1+\cos z}{z^4}.$

36. Разложить функции в указанных кольцах в ряд Лорана:

$a)\ \frac{1}{(z-2)(z-3)}$, $\qquad$ 1) $2 < |z| < 3$, 2) $3 < |z| < \infty$;

$b)\ \frac{1}{z^2+z}$, $\qquad$ 1) $0 < |z| < 1$, 2) $1 < |z| < \infty$;

$c)\ \frac{2z+3}{z^2+3z+2}$, $\qquad$ $1 < |z| < 2$;

$d)\ \frac{z^2-z+3}{z^3-3z+2}$, $\qquad$ 1) $|z| < 1$, 2) $1 < |z| < 2$, $2 < |z| < \infty$.

5. Особые точки функций комплексного переменного. Вычеты

37. Найти нули функций и определить их порядок:

$a)\ f(z) = z^4 + 4z^2;$ $\quad b)\ f(z) = \dfrac{\sin z}{z};$

$c)\ f(z) = \dfrac{\operatorname{sh}^2 z}{z};$ $\quad d)\ f(z) = z^2 \sin z;$

$e)\ f(z) = 1 + \operatorname{ch} z;$ $\quad f)\ f(z) = \dfrac{(1 - \operatorname{sh} z)^2}{z};$

$f)\ f(z) = (z + \pi i)\operatorname{sh} z;$ $\quad g)\ f(z) = (z^2 + \pi^2)(1 + e^{-z}).$

38. Найти порядок нуля $z_0 = 0$ для функций:

$a)\ f(z) = e^{\sin z} - e^{\operatorname{tg} z};$ $\quad b)\ f(z) = \dfrac{z^6}{\left(\dfrac{z}{2}\right)^2 - \left(\sin \dfrac{z}{2}\right)^2};$

$c)\ f(z) = \dfrac{z^3}{1 + z - e^z};$ $\quad d)\ f(z) = 2(\operatorname{ch} z - 1) - z^2.$

39. Найти конечные особые точки и определить их характер для функций:

$a)\ f(z) = \dfrac{1}{1 - \sin z};$ $\quad b)\ f(z) = \dfrac{1 - \cos z}{z^2};$

$c)\ f(z) = \dfrac{z}{z^5 + 2z^4 + z^3};$ $\quad d)\ f(z) = \dfrac{1}{e^{-z} - 1} + \dfrac{1}{z^2};$

$e)\ f(z) = e^{-(1/z^2)};$ $\quad f)\ f(z) = \operatorname{ch}\dfrac{1}{z};$

$g)\ f(z) = \dfrac{z^3 - 1}{(z^3 + 1)(z^3 + i)};$ $\quad h)\ f(z) = \dfrac{z^2 + i}{(e^z - i)(e^z - 1)}.$

40. Определить характер указанных особых точек:

$a)\ f(z) = \dfrac{1 + \cos z}{z - \pi},\ z_0 = \pi;$ $\ b)\ f(x) = \dfrac{z^2 - 3z + 2}{z^2 - 2z + 1},\ z_0 = 1;$

$c)\ f(z) = \dfrac{z^2 - 1}{z^6 + 2z^5 + z^4},\ z_0 = 0,\ z_1 = -1;$ $\ d)\ f(z) = z \cdot \operatorname{sh}\dfrac{1}{z},\ z_0 = 0.$

41. Найти вычеты в особых точках функций:

$a)\ f(z)=\dfrac{4\operatorname{tg} z}{4z^2-\pi z};\quad b)\ f(z)=\dfrac{z}{(z+1)^3(z-2)^2};$

$c)\ f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z^3(z-3)};\quad d)\ f(z)=\dfrac{e^{iz}}{(z^2-1)(z+3)}.$

42. С помощью вычетов интегралы (все контуры обходятся против часовой стрелки):

$a)\ \oint\limits_{|z|=2}\dfrac{e^{iz}}{z^2+1}dz;\quad b)\ \oint\limits_{|z|=2}\dfrac{\sin iz}{z^2-4z+3}dz;\quad c)\ \oint\limits_{|z|=4}\dfrac{dz}{(z^2+9)(z+6)};$

$d)\ \oint\limits_{|z|=1}\dfrac{\cos z}{z^3}dz;\quad e)\ \oint\limits_{|z|=2}\dfrac{z\operatorname{sh} z}{(z^2-1)^2}dz;\quad f)\ \oint\limits_{|z-3|=6}\dfrac{zdz}{(z-2)^3(z+4)};$

$g)\ \oint\limits_{|z|=2}\dfrac{e^z dz}{z^3(z+1)};\quad h)\ \oint\limits_{|z-i|=3}\dfrac{e^{z^2}-1}{z^3-iz^2}dz;\quad i)\ \oint\limits_{|z|=\sqrt{3}}\dfrac{\sin \pi z}{z^2-z}dz;$

$j)\ \oint\limits_{C}\dfrac{\cos(z/2)}{z^2-4}dz,\quad C:\ \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1;\quad k)\ \oint\limits_{|z|=1/3}(z+1)e^{1/z}dz.$

43. Вычислить несобственные интегралы:

$a)\ \int\limits_0^\infty\dfrac{x^2+1}{x^4+1}dx;\quad b)\ \int\limits_{-\infty}^\infty\dfrac{xdx}{(x^2+4x+13)^2};$

$c)\ \int\limits_{-\infty}^\infty\dfrac{dx}{(x^2+a^2)^2(x^2+b^2)^2};\quad d)\ \int\limits_0^\infty\dfrac{x^2+1}{x^6+1}dx.$

6. Операционное исчисление

44. Проверить, являются ли оригиналами функции:

$a)\ f(t)=\eta(t)\cdot\cos t;\quad b)\ f(t)=\eta(t)\cdot t^3;\quad c)\ f(t)=\eta(t)\cdot 2e^{5t};$

$d)\ f(t)=\dfrac{\eta(t)}{t-2};\quad e)\ f(t)=\eta(t)\cdot 3^{4^t};\quad f)\ f(t)=\eta(t)\cdot e^{t^3};$

$g)\ f(t)=\eta(t)\cdot 2e^{-5t};\quad h)\ f(t)=\dfrac{\eta(t)}{t+3};\quad i)\ f(t)=\eta(t)\cdot\operatorname{ch}2t;$

$j)\ f(t)=\eta(t)\cdot\operatorname{tg} t;\quad k)\ f(t)=e^{(2+4i)t};\quad l)\ f(t)=\eta(t)\cdot b^t,\ b>0,\ b\neq 1.$

45. Пользуясь определением, найти изображения функций:

$a)\ f(t)=\eta(t)\cdot t^2;\ \ b)\ f(t)=\eta(t)\cdot e^{3-t};\ \ c)\ f(t)=\eta(t)\cdot\cos 2t.$

46. Найти изображения, используя свойство линейности:

$a)\ f(t)=1+2t+5t^2;$ $b)\ f(t)=-6\cos^2 3t;$
$c)\ f(t)=4\cos 2t\sin 5t;$ $d)\ f(t)=\sin^3 3t;$
$e)\ f(t)=8\cos^4 t;$ $f)\ f(t)=-t^3+\frac{1}{2}e^{-4t};$
$g)\ f(t)=\sin t\sin 3t;$ $h)\ f(t)=\sin 2t\cos 4t;$
$i)\ f(t)=\operatorname{sh} t\operatorname{ch} t;$ $j)\ f(t)=12\operatorname{ch}^2 t.$

47. Найти изображения, пользуясь теоремой смещения:

$a)\ f(t)=e^t\sin t;$ $b)\ f(t)=e^{-4t}\cos 3t;$
$c)\ f(t)=t^2e^{-5t};$ $d)\ f(t)=\operatorname{sh} t\sin 4t;$
$e)\ f(t)=te^{3t}+e^t\sin^2 3t;$ $f)\ f(t)=e^t\cos 6t-2te^{-t}.$

48. Найти изображения, применяя теорему о дифференцирования изображения:

$a)\ f(t)=t\sin t;$ $b)\ f(t)=t^2\mathrm{sh}3t;$
$c)\ f(t)=(t+1)\sin t;$ $d)\ f(t)=t^2\cos t;$
$e)\ f(t)=t\sin t\cos 4t;$ $f)\ f(t)=t^3e^{-5t}.$

49. Пользуясь теоремой о дифференцировании оригинала, найти изображения дифференциальных уравнений:

$a)\ x'+x=e^t,$ $x(0)=1;$
$b)\ x'+2x=\sin t,$ $x(0)=0;$
$c)\ x''+x=\cos t,$ $x(0)=-1,\ x'(0)=1;$
$d)\ x'''+x=0,$ $x(0)=0,\ x'(0)=-1,\ x''(0)=2;$
$e)\ x''-x'=te^t,$ $x(0)=x'(0)=0;$
$f)\ x^{(4)}-x''=1,$ $x(0)=,x'(0)=x''(0)=x'''=0;$
$g)\ x''+x=te^t+4\sin t,$ $x(0)=x'(0)=0.$

50. Пользуясь теоремой об интегрировании оригинала, найти изображения интегралов:

$$a)\, f(t) = \int\limits_0^t \tau \sin \tau d\tau;\ b)\, f(t) = \int\limits_0^t \tau^2 e^{3\tau} d\tau;\ c)\, f(t) = \int\limits_0^t \sin^2 \tau d\tau;$$

$$d)\, f(t) = \int\limits_0^t (\tau + 2) \cos^2 \tau d\tau;\ f)\, f(t) = \int\limits_0^t \tau \mathrm{ch}^2 \tau d\tau.$$

51. Используя теорему об интегрировании изображения, найти изображения:

$$a)\, f(t) = \frac{\sin t}{t};\ b)\, f(t) = \int\limits_0^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau;\ c)\, f(t) = \frac{\sin^2 t}{t};$$

$$d)\, f(t) = \frac{1 - \cos t}{t};\ e)\, f(t) = \frac{e^t - 1 - t}{t};\ f)\, f(t) = \int\limits_0^t \frac{e^\tau - e^{-\tau}}{\tau} d\tau.$$

52. Найти значения несобственных интегралов, пользуясь теоремой об интегрировании изображения:

$$a)\, \int\limits_0^\infty \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt,\ (a > 0, b > 0);$$

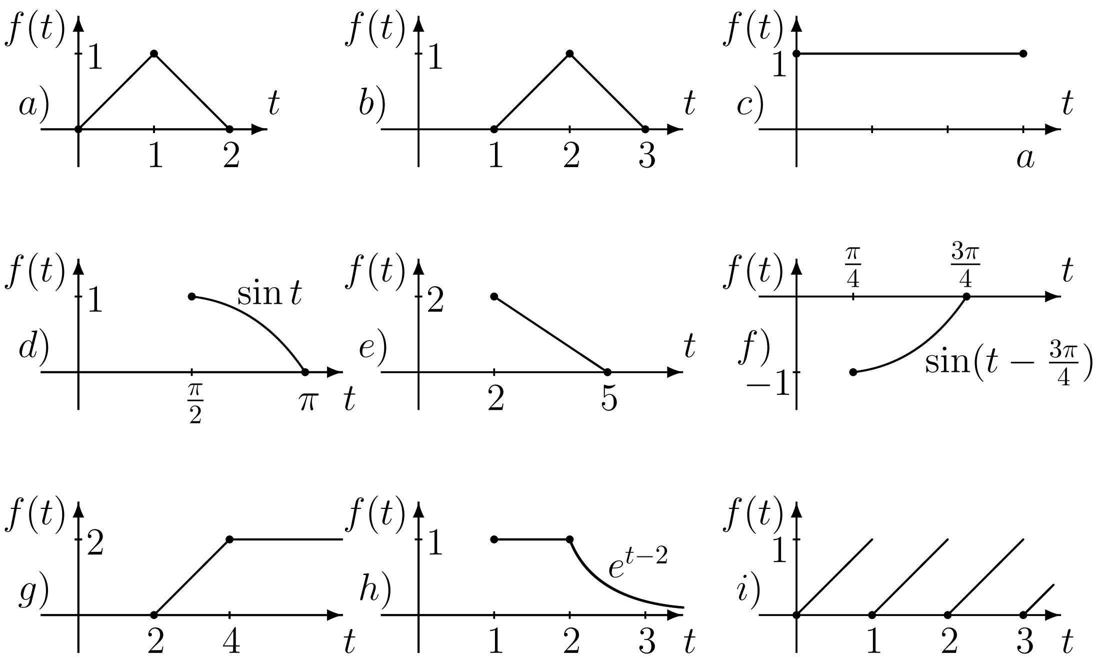
$$b)\, \int\limits_0^\infty \frac{\cos at - \cos bt}{t} dt,\ (a > 0, b > 0);$$

$$c)\, \int\limits_0^\infty \frac{\sin at \cdot \sin bt}{t} dt,\ (a > 0, b > 0).$$

53. Построить графики функций и найти их изображения, пользуясь теоремой запаздывания:

 $a)\ f(t) = \sin^2(t-3)\cdot\eta(t-3)$; $b)\ f(t) = t^2\cdot\eta(t)$;
 $c)\ f(t) = t^2\cdot\eta(t-2)$; $d)\ f(t) = e^t\cdot\eta(t-2)$;
 $e)\ f(t) = e^{2t-14}\cdot\eta(t-7)$; $f)\ f(t) = \sin(t-\pi/4)\cdot\eta(t)$;
 $g)\ f(t) = \sin t\cdot\eta(t-\pi)$; $h)\ f(t) = (t^2+2t-1)\cdot\eta(t-1)$;
 $i)\ f(t) = (t-1)^2\cdot\eta(t-2)$; $j)\ f(t) = \cos^2 t\cdot\eta(t-\pi/2)$.

54. Найти изображения функций, заданных графически, пользуясь теоремой запаздывания:



55. Найти изображения интегралов, пользуясь теоремой о свёртке:

 $a)\ \int\limits_0^t e^{t-\tau}\sin\tau d\tau$; $b)\ \int\limits_0^t e^{\tau}\sin(t-\tau)d\tau$; $c)\ \int\limits_0^t (t-\tau)^2\mathrm{sh}\,\tau d\tau$;
 $d)\ \int\limits_0^t e^{3(t-\tau)}\tau^2 d\tau$; $e)\ \int\limits_0^t \tau^3\mathrm{ch}\,7(t-\tau)d\tau$; $f)\ \int\limits_0^t \tau\cos 2(t-\tau)d\tau$.

56. Найти оригиналы и построить их графики по заданным изображениям:

$$a)\ F(p) = \frac{pe^{-p}}{p^2+4p+5};\quad b)\ F(p) = \frac{e^{-3p}}{p+3};$$

$$c)\ F(p) = \frac{e^{-2p}}{p^2+4p+3},\quad d)\ F(p) = \frac{e^{-p}}{p^2}.$$

57. Найти оригиналы по заданным изображениям:

$$a)\ F(p) = \frac{1}{p^3+2p^2+p};\qquad b)\ F(p) = \frac{2p+3}{p^3+4p^2+5p};$$

$$c)\ F(p) = \frac{1}{p^2(p^2+1)};\qquad d)\ F(p) = \frac{e^{-p}}{p^2-2p+5} + \frac{pe^{-2p}}{p^2+9};$$

$$e)\ F(p) = \frac{p}{(p^2+1)^2};\qquad f)\ F(p) = \frac{1}{p^2+1}(e^{-2p}+2e^{-3p}+3e^{-4p});$$

$$g)\ F(p) = \frac{1}{(p-1)^2(p+2)};\qquad h)\ F(p) = \frac{e^{-p}}{p^2-1} + \frac{pe^{-2p}}{p^2-4};$$

$$i)\ F(p) = \frac{e^{-p/2}}{p(p+1)^2(p^2+4)};\quad j)\ F(p) = \frac{e^{-p}}{p^2} + \frac{2e^{-2p}}{p^3} + \frac{6e^{-3p}}{p^4}.$$

58. Найти решения дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями:

$a)\ x' + x = e^t,\qquad x(0) = 1;$

$b)\ x' + 2x = \sin t,\qquad x(0) = 0;$

$c)\ x'' + x = \cos t,\qquad x(0) = -1,\ x'(0) = 1;$

$d)\ x''' + x = 0,\qquad x(0) = 0,\ x'(0) = -1,\ x''(0) = 2;$

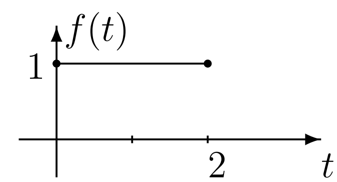
$e)\ x'' - x' = te^t,\qquad x(0) = x'(0) = 0;$

$f)\ x^{(4)} - x'' = 1,\qquad x(0) =, x'(0) = x''(0) = x''' = 0;$

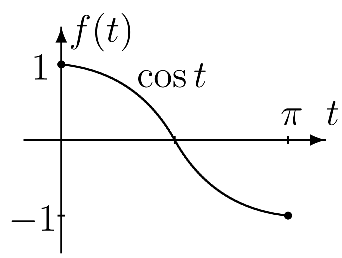
$g)\ x'' + x = te^t + 4\sin t,\qquad x(0) = x'(0) = 0.$

59. Найти решения дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями и графически заданной правой частью:

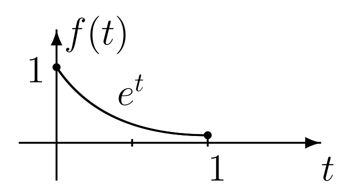
$a)\ x'' + 9x = f(t), \qquad x(0) = 0,\ x'(0) = 1;$



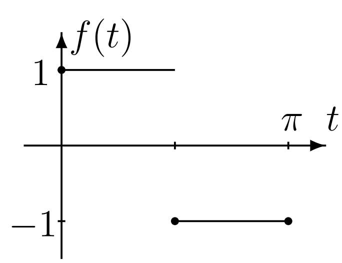
$b)\ x'' + x = f(t), \qquad x(0) = 0,\ x'(0) = 0;$



$c)\ x'' + x = f(t), \qquad x(0) = 0,\ x'(0) = 0;$



$d)\ x'' - x = f(t), \qquad x(0) = 0,\ x'(0) = 0.$



60. Найти решения однородных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, применяя теорему о дифференцировании изображения:

$$a)\ \ tx'' + (2t-1)x' + (t-1)x = 0;$$

$$b)\ x'' + (t+1)x' + tx = 0,\ x(0) = 1,\ x'(0) = -1.$$

61. Найти решения дифференциальных уравнений, применяя формулу Дюамеля:

$$a)\ x'' - x = \frac{1}{e^t + 3}, \qquad x(0) = x'(0) = 0;$$

$$b)\ x'' - x' = \frac{e^{2t}}{(1 + e^t)^2}, \ x(0) = x'(0) = 0;$$

$$c)\ x'' - x' = \frac{1}{1 + e^t}, \qquad x(0) = x'(0) = 0;$$

$$d)\ x'' + x' = \frac{1}{2 + \cos t}, \ x(0) = x'(0) = 0;$$

$$e)\ x'' + x = e^{-t^2}, \qquad x(0) = x'(0) = 0.$$

62. Найти решения систем дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями:

$$a)\ \begin{cases} x' + y = 0, \ x(0) = 1, \\ x + y' = 0, \ y(0) = -1; \end{cases}$$

$$b)\ \begin{cases} 3x' + 2x + y' = 1, \ x(0) = 0, \\ x' + 4y' + 3y = 0, \ y(0) = 0; \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} x' + x + y = e^{-2t}, & x(0) = 0, \\ y' + 2x + 2y = 2e^{-4t}, & y(0) = 0; \end{cases}$$

$$d)\ \begin{cases} 2x'' + x - y' = -3\sin t, & x(0) = 0, \ x'(0) = 1, \\ x + y' = -\sin t, & y(0) = 0; \end{cases}$$

$$e)\ \begin{cases} x'' - y' = 0, & x(0) = -1, \ x'(0) = 1, \\ x - y'' = 2\sin t, & y(0) = 1, \ y'(0) = 1; \end{cases}$$

$$f)\ \begin{cases} x' = x - y + z, & x(0) = 9, \\ y' = x + y - z, & y(0) = 5 \\ z' = 2z - y, & z(0) = 7; \end{cases}$$

$$g)\ \begin{cases} x'' + y' = 2\sin t, & x(0) = 0, \ x'(0) = -1, \\ y'' + z' = 2\cos t, & y(0) = 0, \ y'(0) = -1, \\ z'' - x = 0, & z(0) = 0, \ z'(0) = 1. \end{cases}$$

63. Найти общее решения систем дифференциальных уравнений:
$$\begin{cases} x' = 2x - y + 2z, \\ y' = x + 2z, \\ z' = -2x + y - z. \end{cases}$$

64. Найти решения интегральных уравнений:
   $a)$ $y(t) = at + \int\limits_0^t \sin(t-\tau)\cdot y(\tau)d\tau;$
   $b)$ $y(t) = \dfrac{t^2}{2} + \int\limits_0^t e^{t-\tau}\cdot y(\tau)d\tau.$

65. Найти решения интегро-дифференциальных уравнений:
   $a)$ $\int\limits_0^t e^{t-\tau}\sin(t-\tau)\cdot x(\tau)d\tau = x'' - x' + e^t(1-\cos t),$
   $x(0) = x'(0) = 1;$
   $b)$ $\int\limits_0^t \mathrm{sh}\,(t-\tau)\cdot x(\tau)d\tau = x'' - x' + \dfrac{t}{2}\cdot \mathrm{sh}\, t,\ x(0) = 1,\ x'(0) = 0.$

7. Ряды Фурье. Интеграл Фурье

66. Доказать, что множество функций $\{\sin nx\}_{k\in N}$ образует ортогональную на отрезке $[0,\pi]$ систему функций.

67. Доказать, что множество функций $\{1, \cos nx, \sin nx\}_{k\in N}$ образует ортогональную на отрезке $[-\pi,\pi]$ систему функций.

68. Доказать, что система полиномов Лежандра $\{L_n(x)\}$ образует ортогональную систему в $L_2[-1,1]$ и показать, что $\| L_n \| \Big|_{L_2} = \sqrt{\dfrac{2}{2n+1}}.$

69. Доказать, что система полиномов Чебышева $\{T_n(x)\}$ образует ортогональную систему с весом $p(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ в пространстве $L_2[-1,1]$.

70. Разложить в ряд Фурье по полиномам Лежандра на отрезке $[-1, 1]$ многочлен $2x^3 - 3x^2 + 3x - 5$.

71. Разложить в ряд Фурье по полиномам Чебышева на отрезке $[-1, 1]$ многочлен $x^3 - 2x^2 + 3x - 4$.

72. Разложить в тригонометрический ряд Фурье периодические функции:

    a) $f(x) = \cos^2 x$; *b*) $f(x) = \sin^2 \dfrac{3x}{2}$; *c*) $f(x) = \cos^3 2x$;

    d) $f(x) = \sin^3 x$; *e*) $f(x) = \cos 2x \cdot \sin 3x$; *f*) $f(x) = \sin 3x \cdot \sin 5x$.

73. Разложить функцию $y = f(x)$ в ряд Фурье на промежутке $(-\pi; \pi]$:

    a) $f(x) = \sin \dfrac{|x|}{2}$; *b*) $f(x) = \operatorname{sign} x \cdot e^{-2|x|}$;

    c) $f(x) = x \cdot e^{2x}$; *d*) $f(x) = \operatorname{sign} x \cdot e^{2|x|}$;

    e) $f(x) = |x| \cdot \cos x$; *f*) $f(x) = x \cdot \operatorname{sign} x \cdot \sin x$.

74. Разложить функцию $y = f(x)$ в тригонометрический ряд Фурье в указанном промежутке:

    a) $f(x) = 3 - 5x$, $(-2; 2]$; *b*) $f(x) = x^2 + 1$, $(1; 3]$;

    c) $f(x) = |1 + x|$, $(-2; 2]$; *d*) $f(x) = \dfrac{x}{2}$, $(0; 2]$;

    e) $f(x) = \begin{cases} x, & 1 < x \le 2 \\ -x + 4, & 2 < x \le 4 \end{cases}$; *f*) $f(x) = \begin{cases} x, & -\pi < x \le 0 \\ \pi, & 0 < x \le \pi \end{cases}$;

    g) $f(x) = x \cdot \sin \dfrac{x}{3}$, $(-3; 3]$; *h*) $f(x) = \operatorname{ch} x$, $(-2; 2]$.

75. Разложить функцию $y = f(x)$ в комплексный ряд Фурье в указанном промежутке:

    a) $f(x) = e^{-2x}$, $(-3; 3]$; *b*) $f(x) = x \cdot \sin x$, $(-\pi; \pi]$;

    c) $f(x) = x^3$, $(-2; 2]$; *d*) $f(x) = x \cdot \cos x$, $(-\pi; \pi]$;

    e) $f(x) = e^{3x}$, $(-3; 3]$; *f*) $f(x) = \cos \dfrac{x}{3}$, $(-\pi; \pi]$.

76. Представить функцию $y = f(x)$ вещественным интегралом Фурье:
   $a)\ f(x) = x \cdot e^{-2|x|};$ $b)\ f(x) = e^{-2|x|} \cdot \cos x;$
   $c)\ f(x) = \eta(x) \cdot e^{x};$ $d)\ f(x) = \dfrac{x}{1+x^2};$
   $e)\ f(x) = \operatorname{sign} x \cdot e^{-|x|};$ $f)\ f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}.$

77. Представить функцию $y = f(x)$ комплексным интегралом Фурье:
   $a)\ f(x) = x \cdot e^{-2|x|};$ $b)\ f(x) = e^{-2|x|} \cdot \cos x;$
   $c)\ f(x) = \eta(x) \cdot e^{x};$ $d)\ f(x) = \dfrac{x}{1+x^2};$
   $e)\ f(x) = \operatorname{sign} x \cdot e^{-|x|};$ $f)\ f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}.$

78. Для графически заданной 2π-периодической функции $y = f_1(x)$ и периодически продолженной функции $y = f_2(x)$, заданной на промежутке, выполнить следующие задания:

   (a) Обосновать возможность разложения заданных функций в ряд Фурье, установить вид сходимости ряда Фурье к заданным функциям.

   (b) Построить график суммы ряда Фурье.

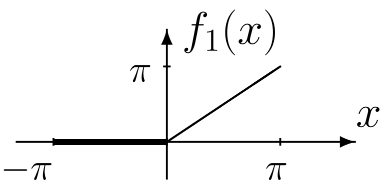
   (c) Представить заданную функцию тригонометрическим рядом Фурье. Вычислить коэффициенты ряда Фурье.

   (d) Построить амплитудный и фазовый спектры функции.

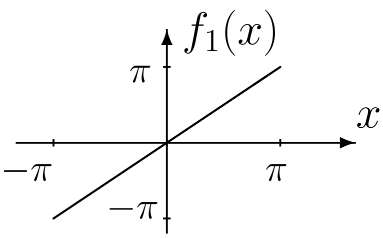
   (e) Определить число гармоник разложения функции в ряд Фурье, содержащих в сумме не менее 90% энергии.

   (f) вычислить среднеквадратическую ошибку между исходной функцией и частичной суммой ряда Фурье для значений x, принадлежащих промежутку задания функции.

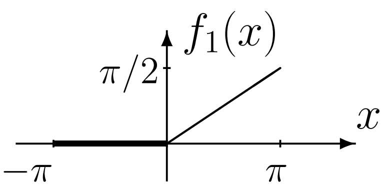
   (g) Построить графики заданной функции и частичной суммы ряда для значений x, принадлежащих промежутку задания функции, взяв число гармоник, содержащих в сумме не менее 90% энергии (п. (е)).

1) 

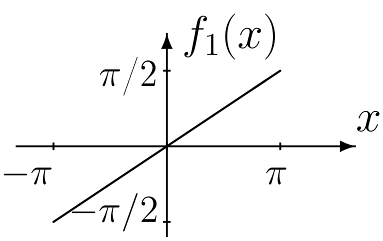
$f_2(x) = x^2,\ x \in [0; 1]$; (чётное)

2) 

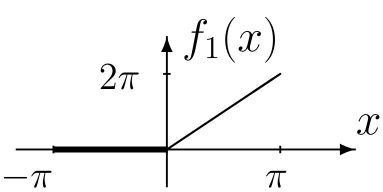
$f_2(x) = x(2 - x),\ x \in [0; 2]$; (нечёт.)

3) 

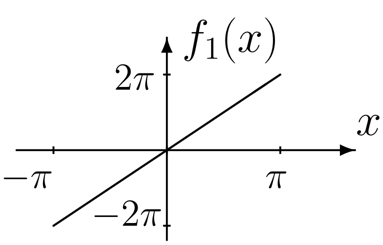
$f_2(x) = \sin\frac{x}{3},\ x \in [0; 3\pi]$; (чёт.)

4) 

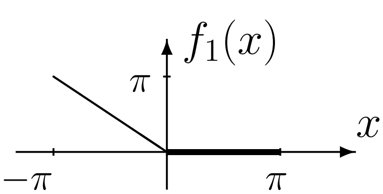
$f_2(x) = e^x,\ x \in [0; 2]$; (чёт.)

5) 

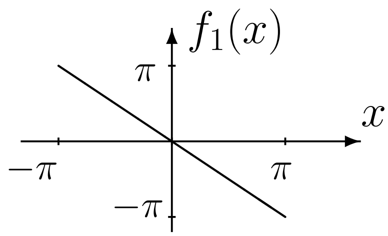
$f_2(x) = \cos\frac{x}{2},\ x \in [0; \pi]$; (чёт.)

6) 

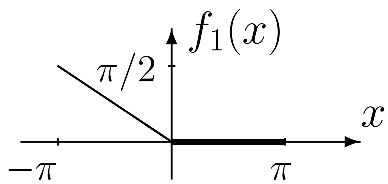
$f_2(x) = e^{2x},\ x \in [0; 2]$; (чёт.)

7) 

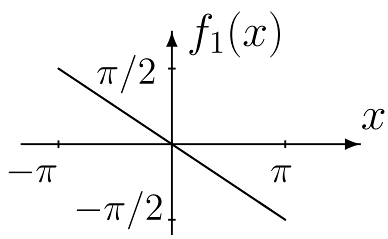
$f_2(x) = x^2,\ x \in [0; 2]$; (чётное)

8) 

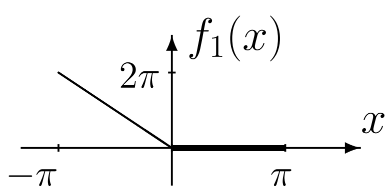
$f_2(x) = x(3-x),\ x \in [0;3];$ (нечёт.)

9) 

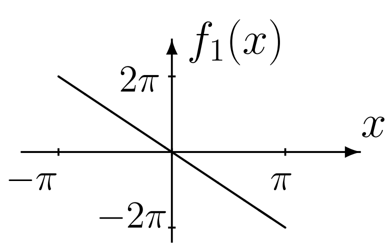
$f_2(x) = \sin\frac{x}{2},\ x \in [0;\pi];$ (чёт.)

10) 

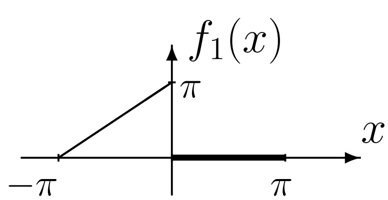
$f_2(x) = e^{x/2},\ x \in [0;2];$ (чёт.)

11) 

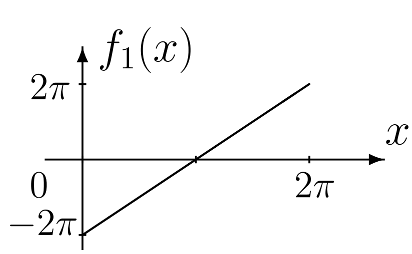
$f_2(x) = \cos\frac{x}{3},\ x \in [0;3\pi];$ (чёт.)

12) 

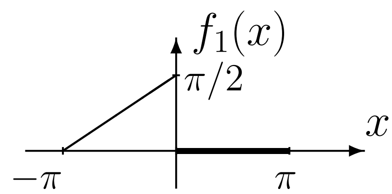
$f_2(x) = e^{x/3},\ x \in [0;3];$ (чёт.)

13) 

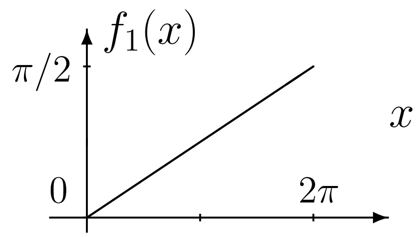
$f_2(x) = x^2,\ x \in [0;3];$ (нечёт.)

14) 

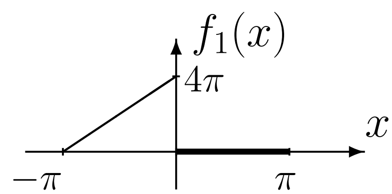
$f_2(x) = x(\pi-x),\ x \in [0;\pi];$ (нечёт.)

15) 

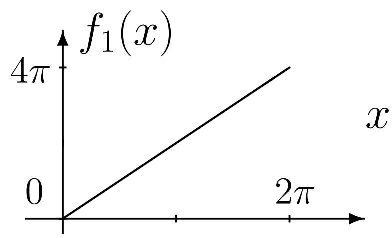
$f_2(x) = \sin 3x$, $x \in [0; \pi/3]$; (чёт.)

16) 

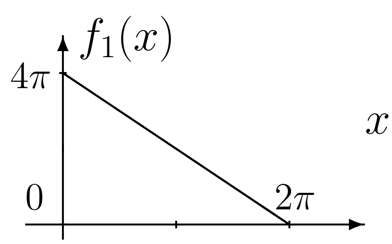
$f_2(x) = x(\pi - x)$, $x \in [0; \pi]$; (нечёт.)

17) 

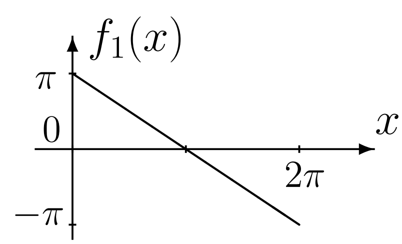
$f_2(x) = \cos \frac{x}{2}$, $x \in [0; \pi]$; (чёт.)

18) 

$f_2(x) = e^{-2x}$, $x \in [0; 2]$; (чёт.)

19) 

$f_2(x) = x^2$, $x \in [0; 4]$; (нечёт.)

20) 

$f_2(x) = x(x - 2)$, $x \in [0; 2]$; (нечёт.)

79. В среде Mathcad (Mathlab) для функции,

$$f(t) = 2 \cdot \sin(kt) + 5\sin(20(t + \pi/3)) + 0,5\cos((20 + 3k)(t + \pi/6)),$$

где k — номер варианта:

1) вычислить значения функции на отрезке $[0; 2\pi]$ с шагом

$h = \dfrac{2\pi}{2^m}$, $m = 8$ и найти спектр с помощью БПФ;

2) построить график амплитудного спектра;
3) убрать средне-частотную гармонику-помеху, обнулив соответствующую часть спектра;
4) восстановить обработанный сигнал, выполнив ОБПФ;
5) построить графики исходной и получившейся функции.

Список литературы

1. *Бицадзе, А. В.* Основы теории аналитических функций комплексного переменного / А. В. Бицадзе. — М.: Наука, 1969. — 240 с.
2. *Евграфов, М. А.* Аналитические функции. / М. А. Евграфов. — М.: Наука, 1968. — 472 с.
3. *Евграфов, М. А.* Сборник задач по теории аналитических функций / М. А. Евграфов, Ю. В. Сидоров, М. В. Федорук, М. И. Шабунин, К. А. Бежанов. — М.: Наука, 1969. — 388 с.
4. *Пантелеев А. В.* Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах: учеб. пособ. / А. В. Пантелеев, А. С. Якимова. — М.: Высш. шк., 2001. —445 с.
5. *Привалов И. И.* Введение в теорию функций комплексного переменного. / И. И. Привалов. — М.: Физматгиз, 1960. — 444 с.
6. *Лаврентьев, М. А.* Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. — М.: Наука, 1973. — 736 с.
7. *Лунгу, К. Н.* Сборник задач по высшей математики. 2 курс. / К. Н. Лунгу, и др. — М.: Айриспресс, 2006. — 592 с.
8. *Письменный, Д. Т.* Конспект лекций по высшей математике. / Д. Т. Письменный. — М.: Айрис-пресс, 2006.
9. *Буров, А. Н.* Практикум по спецглавам математики: учеб. пособие / А. Н. Буров, Вахрушева Н. Г., Клишина С. В. — Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2001. — 102 с.
10. *Воробьёв Н. Н.* Теория рядов. / Н. Н. Воробьёв. — М.: Наука, 1970. — 204 с.

Интернет ресурсы

11. http://ru.wikipedia.org/wiki/
12. http://mathhelpplanet.com/portal.php
13. https://ciu.nstu.ru/kaf/persons/775/for_students

Приложение 1

Запись числа z в виде $z = x + i \cdot y$ называют *алгебраической формой* комплексного числа.

Запись числа z в виде $z = |z|(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$ называется *тригонометрической формой.*

Запись числа z в виде $z = |z|e^{i\varphi}$ или $z = |z|e^{i \arg z}$ называют *показательной* (или *экспоненциальной*) формой комплексного числа.

Модуль определяется по формуле $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Аргумент z можно найти, используя формулу $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}$, так как $-\pi < \arg z \leq \pi$, то

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} y/x, \text{ при } x > 0 \\ \operatorname{arctg} y/x + \pi, \text{ при } x < 0, \ y > 0 \\ \operatorname{arctg} y/x - \pi, \text{ при } x < 0, \ y < 0 \\ \pi/2, \text{ при } x = 0, \ y > 0 \\ -\pi/2, \text{ при } x = 0, \ y < 0 \\ \text{не определён } x = 0, \ y = 0 \end{cases}$$

Формула Муавра для возведения комплексных чисел в натуральную степень:

$$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Корень n-ой степени из комплексного числа

$$\sqrt[n]{z} = |z|^{1/n}\left(\cos\frac{\operatorname{Arg} z}{n} + i\sin\frac{\operatorname{Arg} z}{n}\right) =$$

$$= |z|^{1/n}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) = |z|^{1/n}e^{\frac{\varphi + 2\pi k}{n}}.$$

$$w = e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots$$

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k}}{(2k)!}, \ \sin z = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Формулы Эйлера

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z,\ \cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},\ \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}.$$

Гиперболические функции

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2},\ \operatorname{sh} z = \frac{e^{z}-e^{-z}}{2}.$$

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z},\ \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

$$\cos iz = \operatorname{ch} z,\quad \operatorname{sh} z = -i\sin iz.$$

Множество значений логарифма:

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi),\ k \in Z.$$

При $k = 0$ — *главное значение*

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z,\ -\pi < \arg z < \pi.$$

Обратные тригонометрические и гиперболические функции

$$\arccos z = -i\operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2-1}).$$

$$\arcsin z = \frac{\pi}{2} - \arccos z = -i\operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1-z^2});$$

$$\operatorname{arctg} z = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} z = -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{1+iz}{1-iz};$$

$$\operatorname{arcctg} z = -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{z+i}{z-i};$$

$$\operatorname{arcsh} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2+1});$$

$$\operatorname{arcch} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2-1});$$

$$\operatorname{arcth} z = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{1+z}{1-z};$$

$$\operatorname{arccth} z = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{z+1}{z-1}.$$

Общая степенная функция $w = z^a$ $a = \alpha + i\,\beta$

$$w = z^a = e^{a\operatorname{Ln} z},$$

учитывая $z = r\,e^{i\varphi}$, $\mathrm{Ln} = \ln r + i(\varphi + 2k\pi)$, получим

$$z^a = e^{a\ln r - \beta(\varphi+2k\pi)} e^{i(\alpha(\varphi+2k\pi)+\beta\ln r)},\ k \in Z.$$

Для того, чтобы $f(z) = f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ была дифференцируемой в точке $z = x+iy \in D$ необходимо и достаточно, чтобы:

1) вещественнозначные функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ были дифференцируемы в точке z;

2) в этой точке выполнялись равенства:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad (CR)$$

   которое называется *условиями Коши–Римана.*

Производная дифференцируемой функции может быть записана по одной из формул:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\partial u}{\partial x} + i\cdot\frac{\partial v}{\partial x},\quad f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\cdot\frac{\partial u}{\partial y}, \\ f'(z) &= \frac{\partial u}{\partial x} - i\cdot\frac{\partial u}{\partial y},\quad f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} + i\cdot\frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned} \qquad (*)$$

Для нахождения аналитической функции по заданной её действительной или мнимой части необходимо выполнить.

Правило 1

1. Найти частные производные до второго порядка заданной функции двух переменных $u(x,y)$ или $v(x,y)$. Проверить, если требуется, что заданная функция гармоническая, т. е. выполняется в некоторой области D равенство $\Delta u = 0$ или $\Delta v = 0$.

2. Найти по заданной гармонической функции сопряжённую с ней функцию, используя формулы:

$$v(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy + C.$$

В случае, если выбрать кривую в виде ломаной со звеньями параллельными осям, то:

$$v(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x}-\frac{\partial u(x,y_0)}{\partial y}dx+\int\limits_{y_0}^{y}\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}dy+C.$$

Или

$$u(x,y)=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}\frac{\partial v}{\partial y}dx-\frac{\partial v}{\partial x}dy+C=$$

$$=\int\limits_{x_0}^{x}\frac{\partial v(x,y_0)}{\partial y}dx-\int\limits_{y_0}^{y}\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}dy+C.$$

3. Записать функцию $f(z)=u+i\cdot v$.

4. Если задано дополнительное условие — значение функции $f(z)$ в некоторой точке, то следует использовать его для отыскания C.

Правило 2

Если заданы начальные условия, функция восстанавливается однозначно.

1. Дано: $u=u(x,y),\ f(z_0)=C_0$, тогда

$$f(z)=2u\left(\frac{z+\overline{z}_0}{2},\frac{z-\overline{z}_0}{2i}\right)-\overline{C}_0.$$

2. Дано: $v=v(x,y),\ f(z_0)=C_0$, тогда

$$f(z)=2iv\left(\frac{z+\overline{z}_0}{2},\frac{z-\overline{z}_0}{2i}\right)+\overline{C}_0.$$

Интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=F(z).$$

называется **интегралом типа Коши**.

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_l \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi.$$

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_l \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi.$$

1. Аналитическая функция в любой точке аналитичности может быть записана в виде интеграла Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi, \ z \in D.$$

2. Аналитическая функция имеет производные любого порядка, для которых справедлива формула (*обобщённая интегральная формула Коши)*:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi.$$

Основные табличные разложения (Маклорена):

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \ (R = \infty);$$

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1}\frac{z^n}{n} + \ldots = \\ = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} z^k}{k}, \ (|z| < 1);$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} + \ldots = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}, \ (R = \infty);$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} + \ldots =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}, \ (R = \infty);$$

$$\operatorname{arctg} z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1} + \ldots =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} z^{2k+1}, \ (|z| \le 1);$$

$$\operatorname{sh} z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots + \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1} + \ldots =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} z^{2k+1}, \ (R = \infty);$$

$$\operatorname{ch} z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots + \frac{1}{(2n)!} z^{2n} + \ldots =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} z^{2k}, \ (R = \infty);$$

$$(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \ldots$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} z^n + \ldots, \ (|z| < 1) \text{ (биномиальный ряд)};$$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^n + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} z^k, \ (|z| < 1);$$

$$\sqrt{1+z} = 1 + \frac{z}{2} - \frac{z^2}{8} + \frac{z^3}{16} - \dots + \frac{(-1)^n (2n)!}{(1-2n) n!^2 4^n} z^n + \ldots =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)!}{(1-2k) k!^2 4^k} z^k, \ (|z| < 1).$$

Функция $f(z)$ аналитическая в кольце, представляется в этом кольце сходящимся рядом по целым степеням, т. е. имеет место равенство:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Коэффициенты ряда вычисляются по формуле:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

где γ — произвольный контур, принадлежащий кольцу и охватывающий точку z_0, в частности γ — окружность $|z - z_0| = \rho$, $r < \rho < R$.

Вычетом функции $f(z)$ в изолированной особой точке $z_0 \in \bar{\mathbb{C}}$ называется интеграл $\dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} f(z)dz$, где γ — контур, принадлежащий окрестности точки z_0 и охватывающий её.

Обход контура — положительный, т. е. область им ограниченная и принадлежащая окрестности z_0 при обходе расположена слева: для $z_0 \in \mathbb{C}$ — обход против часовой стрелки, для $z_0 = \infty$ по часовой. Обозначают вычет: $\operatorname*{res}_{z_0} f(z)$.

$$\operatorname*{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z)dz,\ \gamma \in O(z_0) \setminus z_0; 0 < |z - z_0| < R;$$

$$\operatorname*{res}_{\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z)dz,\ \gamma \in O(\infty) \setminus \infty; R < |z| < \infty.$$

В силу того, что в окрестности особой функция разлагается в ряд Лорана, то используя формулы для коэффициентов ряда Лорана справедливо следующее заключение.

Теорема 1 (О вычислении вычета). *Вычет функции в изолированной особой точке равен коэффициенту c_{-1} при первой отрицательной степени в разложении функции в ряд Лорана в окрестности этой точки, т. е. при $\dfrac{1}{z - z_0}$ для $z_0 \in \mathbb{C}$, и этому коэффициенту, взятому с противоположным знаком, для*

$z_0 = \infty$.

$$\operatorname*{res}_{z_0} f(z) = c_{-1},\ z_0 \in \mathbb{C};$$

$$\operatorname*{res}_{\infty} f(z) = -c_{-1},\ z_0 \in \infty.$$

При этом в зависимости от характера особой точки z_0 верны следующие утверждения:

1) *вычет в устранимой особой точке равен нулю;*

2) *для простого полюса* (П(1))*:*

$$\operatorname*{res}_{z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} (f(z)(z - z_0));$$

3) *для полюса порядка n* (П(n), $n > 1$)*:*

$$\operatorname*{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (f(z)(z - z_0)^n);$$

4) *если функция $f(z)$ в окрестности точки $z = z_0$ представима в виде $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, причём $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ —аналитические функции, такие, что $\varphi(z_0 \neq 0)$, $\psi(z_0) = 0$, $\psi'(z_0) \neq 0$ (z_0 — простой полюс), то*

$$\operatorname*{res}_{z_0} f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)};$$

5) *для существенно особой точки вычет находится из разложения Лорана в окрестности точки z_0*

$$\operatorname*{res}_{z_0} f(z) = c_{-1},\ z_0 \in \mathbb{C};$$

$$\operatorname*{res}_{\infty} f(z) = -c_{-1},\ z_0 \in \infty.$$

С помощью вычетов можно записать в другой форме основную теорему Коши для сложного контура.

Теорема 2 (Коши о вычетах). *Если функция $f(z)$ аналитическая в $\bar{D}$ за исключением конечного числа особых точек $z_k \in D$, то справедливо равенство:*

$$\oint\limits_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_k} f(z),\ z_k \in D,$$

где C — граница области D.

Теорема 3 (обобщённая теорема о вычетах). *Сумма вычетов функция $f(z)$ во всех её особых точках, включая бесконечно удалённую точку, равна нулю:*

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_k} f(z) + \operatorname*{res}_{\infty} f(z) = 0.$$

где C — граница области D.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{p} \operatorname*{res}_{z_k} R(z),\ \operatorname{Im} z_k > 0, \tag{1}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x)dx = -2\pi i \sum_{k=1}^{p} \operatorname*{res}_{z_k} R(z),\ \operatorname{Im} z_k < 0, \tag{2}$$

где z_k, $k = 1, 2, \ldots, p$ — все особые точки функции $R(z)$, расположенные выше оси Ox ($\operatorname{Im} z_k > 0$) в случае (1) и ниже оси Ox ($\operatorname{Im} z_k < 0$) в случае (2).

Изображение функции $f(t)$ — функция $F(p)$ комплексного переменного p, определяемая равенством:

$$F(p) = \int\limits_0^{\infty} e^{-pt} f(t)dt.$$

$$f(t) = L^{-1}\left[F(p)\right] = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{pt} F(p)dp,$$

Свойства преобразования Лапласа

1. Линейность. Если $f_1(t), \ldots, f_n(t)$ — оригиналы, $F_1(p), \ldots, F_n(p)$ — соответствующие им изображения, то для любых комплексных чисел c_i, $i = 1, \ldots, n$, функция $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k f_k(t)$ является оригиналом и справедливо равенство:

$$L\left[\sum_{k=1}^{n} c_k f_k(t)\right] = \sum_{k=1}^{n} c_k L\left[f_k(t)\right] = \sum_{k=1}^{n} c_k F_k(p), \qquad (3)$$

$$\operatorname{Re} p > \max(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$$

или

$$\sum_{k=1}^{n} c_k f_k(t) \risingdotseq \sum_{k=1}^{n} c_k F_k(p),\ \operatorname{Re} p > \max(\sigma_1, \ldots, \sigma_n).$$

Справедливо и обратное утверждение: если $F_1(p), \ldots, F_n(p)$ — изображения, то

$$L^{-1}\left[c_1 F_1(p) + \ldots + c_n F_n(p)\right] = c_1 f_1(t) + \ldots + c_n f_n(t).$$

2. Подобие (теорема подобия). Для любого $a > 0$ из $F(p) = L\left[f(t)\right]$ следует

$$L\left[f(at)\right] = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right),\ \operatorname{Re} p > a\sigma_0,$$

и обратно

$$L^{-1}\left[F(ap)\right] = \frac{1}{a} f\left(\frac{t}{a}\right).$$

3. Смещение (теорема смещения). При любом комплексном a из $F(p) = L\left[f(t)\right]$ следует

$$L\left[e^{at} f(t)\right] = F(p-a),\ \operatorname{Re}(p-a) > \sigma_0,$$

т. е. умножение оригинала на e^{at} соответствует смещению изображения на a.

4. Запаздывание (теорема запаздывания). Для любого $\tau > 0$ из $F(p) = L\left[f(t)\right]$ следует

$$L\left[f(t-\tau)\right] = e^{-p\tau} F(p),\ \operatorname{Re} p > \sigma_0,$$

где $f(t-\tau) = f(t-\tau)\cdot\eta(t-\tau)$, т. е. запаздывание оригинала на $\tau > 0$ соответствует умножению изображения на $e^{-p\tau}$.

5. Дифференцирование оригинала. Если $f(t), f'(t), \ldots, f^{(n)}(t)$ являются оригиналами и $F(p) \fallingdotseq f(t)$, то

$$\begin{aligned}
&f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(+0),\\
&f''(t) \risingdotseq p^2F(p) - pf(+0) - f'(+0),\\
&\qquad\qquad\vdots\\
&f^{(n)}(t) \risingdotseq p^nF(p) - p^{n-1}f(+0) - \ldots - f^{(n-1)}(+0),
\end{aligned}$$

где $f^{(k)}(+0) = \lim\limits_{t\to+0} f^{(k)}(t)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

6. Интегрирование оригинала. Если $f(t)$ является оригиналом и $F(p) \fallingdotseq f(t)$, то

$$\int\limits_0^t f(\tau)d\tau \risingdotseq \frac{F(p)}{p},\ \operatorname{Re} p > \sigma_0,$$

т. е. интегрирование оригинала соответствует деление изображения на p.

7. Дифференцирование изображения. Если функция $f(t)$ является оригиналом и $F(p) \fallingdotseq f(t)$, то

$$F^{(n)}(p) \fallingdotseq (-1)^n t^n f(t).$$

Частный случай: $tf(t) \risingdotseq -F'(p)$.

8. Интегрирование изображения. Если $\dfrac{f(t)}{t}$ является оригиналом и $F(p) \fallingdotseq f(t)$, то

$$L\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int\limits_p^\infty F(z)dz.$$

9. Умножение изображений (теорема Бореля). Произведение двух изображений $F_1(p)$ и $F_2(p)$ также является изображением, причём:

$$F_1(p)\cdot F_2(p) \fallingdotseq f_1(t) * f_2(t).$$

Функция $f_1(t) * f_2(t)$, определяемая формулой

$$f_1(t) * f_2(t) = \int\limits_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = \int\limits_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau,$$

называется **свёрткой функций**.

Теорема Бореля утверждает, что умножение изображений равносильно свёртке оригиналов: $f(t) * g(t) \risingdotseq F(p) \cdot G(p)$.

10. Дифференцирование свёртки (интеграл Дюамеля).

$$\begin{aligned} & pF_1(p)F_2(p) \fallingdotseq f_1(0)f_2(t) + f_1' * f_2 = f_2(0)f_1(t) + f_2' * f_1 = \\ & = f_1(0)f_2(t) + \int\limits_0^t f_1'(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = \\ & = f_2(0)f_1(t) + \int\limits_0^t f_1(t-\tau) f_2'(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Начальные значения оригинала находятся по формуле

$$f(+0) = \lim_{p\to\infty} pF(p).$$

Если существует конечный предел $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = f(+\infty)$, то

$$f(+\infty) = \lim_{p\to 0} pF(p).$$

Таблица преобразования Лапласа

№	$f(t)$	$F(p)$	№	$f(t)$	$F(p)$
1	$\eta(t)$	$\frac{1}{p}$	10	$t\sin\omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$
2	C	$\frac{C}{p}$	11	$t\cos\omega t$	$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
3	t	$\frac{1}{p^2}$	12	$e^{\lambda t}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$
4	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	13	$e^{\lambda t}\cos\omega t$	$\frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$
5	$\delta(t)$	1	14	$t\,e^{\lambda t}\sin\omega t$	$\frac{2\omega(p-\lambda)}{((p-\lambda)^2+\omega^2)^2}$
6	$e^{\lambda t}$	$\frac{1}{p-\lambda}$	15	$t\,e^{\lambda t}\cos\omega t$	$\frac{(p-\lambda)^2-\omega^2}{((p-\lambda)^2+\omega^2)^2}$
7	$t^n e^{\lambda t}$	$\frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}$	16	$\operatorname{sh}\omega t$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
8	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	17	$\operatorname{ch}\omega t$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$
9	$\cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	18	$t\operatorname{sh}\omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2-\omega^2)^2}$

№	$f(t)$	$F(p)$	№	$f(t)$	$F(p)$
19	$t\,\mathrm{ch}\,\omega t$	$\dfrac{p^2+\omega^2}{(p^2-\omega^2)^2}$	28	$\dfrac{1}{\lambda^2}(e^{\lambda t}-1-\lambda t)$	$\dfrac{1}{p^2(p-\lambda)}$
20	$t^n\sin\omega t$	$\dfrac{\mathrm{Im}(p+i\omega)^{n+1}}{(p^2+\omega^2)^{n+1}}n!$	29	$\left(t+\dfrac{\lambda t^2}{2}\right)e^{\lambda t}$	$\dfrac{p}{(p-\lambda)^3}$
21	$t^n\cos\omega t$	$\dfrac{\mathrm{Re}(p+i\omega)^{n+1}}{(p^2+\omega^2)^{n+1}}n!$	30	$(1+\lambda t)\,e^{\lambda t}$	$\dfrac{p}{(p-\lambda)^2}$
22	$e^{\lambda t}\mathrm{sh}\,\omega t$	$\dfrac{\omega}{(p-\lambda)^2-\omega^2}$	31	$\cos^2\omega t$	$\dfrac{p^2+2\omega^2}{p(p^2+4\omega^2)}$
23	$e^{\lambda t}\mathrm{ch}\,\omega t$	$\dfrac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2-\omega^2}$	32	$\sin^2\omega t$	$\dfrac{2\omega^2}{p(p^2+4\omega^2)}$
24	$\dfrac{1}{\lambda}e^{-\frac{t}{\lambda}}$	$\dfrac{1}{1+\lambda p}$	33	$\dfrac{1}{2}(\mathrm{sh}\,\omega t-\sin\omega t)$	$\dfrac{\omega^3}{p^4-\omega^4}$
25	$\dfrac{1}{\lambda}(e^{\lambda t}-1)$	$\dfrac{1}{p(p-\lambda)}$	34	$\dfrac{1}{2}(\mathrm{ch}\,\omega t-\cos\omega t)$	$\dfrac{\omega^2 p}{p^4-\omega^4}$
26	$\dfrac{e^{\lambda t}-e^{\mu t}}{\lambda-\mu}$	$\dfrac{1}{(p-\lambda)(p-\mu)}$	35	$\dfrac{1}{2}(\mathrm{sh}\,\omega t+\sin\omega t)$	$\dfrac{\omega p^2}{p^4-\omega^4}$
27	$\dfrac{1}{\omega^2}(1-\cos\omega t)$	$\dfrac{1}{p(p^2+\omega^2)}$	36	$\dfrac{1}{2}(\mathrm{ch}\,\omega t+\cos\omega t)$	$\dfrac{p^3}{p^4-\omega^4}$

Нахождение оригинала по изображению

Если функция $F(p)$ аналитична в некоторой окрестности бесконечно удалённой точки (в кольце $R < |p| < \infty$) и её разложение в ряд Лорана по степеням $\dfrac{1}{p}$ имеет вид:

$$F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{p^{n+1}},$$

то функция

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

является оригиналом, соответствующим изображению $F(p)$.

Если изображение $F(p)$ является однозначной функцией и имеет лишь конечное число особых точек $p_1, p_2, \ldots, p_n$, лежащих в конечной части плоскости, в частности, если изображение $F(p)$ является дробно–рациональной функцией, причём степень числителя меньше степени знаменателя и $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — полюсы этой функции, то его оригиналом служит функция:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{p_k}(e^{pt} F(p)).$$

В случае $F(p) = R(p) = \dfrac{P_m(p)}{Q_n(p)}$, где $P_m(p)$, $Q_n(p)$ — многочлены степени m и n соответственно, не имеющие общих корней. Если все полюсы $p_1, p_2, \ldots, p_n$ функции $F(p)$ простые (т. е. $\Pi(1)$), то справедлива формула:

$$\operatorname*{res}_{p_k} \frac{P_m(p)}{Q_n(p)} e^{pt} = \frac{P_m(p_k)}{Q'_n(p_k)} e^{p_k t}$$

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{P_m(p_k)}{Q'_n(p_k)} e^{p_k t}.$$

Применение таблицы и свойств преобразования Лапласа для нахождения оригинала по изображению

1. Если изображение отличается от табличного на постоянный множитель, то следует умножить и одновременно поделить на этот множитель, а затем воспользоваться свойством линейности.

2. Изображение, заданное в виде дроби $\dfrac{a \pm b}{c}$ разлагается на сумму дробей.

3. Если знаменатель дроби содержит квадратный трёхчлен, то в нём выделяется полный квадрат: $ap^2 + bp + c = a(p \pm \alpha)^2 \pm \omega^2$. При этом числитель дроби представляется в виде многочлена от $p \pm \alpha$.

4. Если изображение представляет собой правильную рациональную дробь, следует разложить её на простейшие дроби и для каждой из них найти оригинал. Так же можно воспользоваться второй теоремой разложения и теоремой Бореля (теоремой о свёртке).

Ряды Фурье. Интеграл Фурье

Определение 1. *Тригонометрическим рядом Фурье периодической функции $f(x)$ с периодом 2π, определенной на промежутке $[-\pi, \pi]$ называется ряд*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{4}$$

где $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx,\ (n = 0, 1, 2, \ldots),$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx,\ (n = 1, 2, \ldots).$$

a_n, b_n *называются коэффициентами ряда Фурье.*

Если этот ряд сходится, то его сумма $S(x)$ есть периодическая функция с периодом 2π, т.е. $S(x + 2\pi) = S(x)$.

Если функция $f(x)$ задана на сегменте $[-L, L]$, где L — произвольное число, то при выполнении на этом сегменте условий Дирихле указанная функция может быть представлена в виде суммы ряда Фурье:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right),$$

где

$$a_n = \frac{1}{L}\int\limits_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx,\ (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int\limits_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx,\ (n = 1, 2, \ldots).$$

В случае, когда $f(x)$ — четная функция, её ряд Фурье содержит только свободный член a_0 и косинусы, т. е.

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L},$$

где

$$a_n=\frac{2}{L}\int\limits_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx,\ (n=0,1,2,\ldots).$$

В случае, когда $f(x)$ — нечетная функция, её ряд Фурье содержит только синусы, т. е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L},$$

где

$$b_n=\frac{2}{L}\int\limits_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx,\ (n=1,2,\ldots).$$

В случае, когда $f(x)$ задана на произвольном интервале (a,b), тогда обозначим $L=\dfrac{b-a}{2}$, зададим конкретное значение функции на одном из концов интервала (например, при $x=b$) и продолжим данную функцию периодически, с периодом $T=2L$ на всю числовую ось. Полученная функция будет удовлетворять условиям теоремы Дирихле.

Коэффициенты ряда Фурье в этом случае можно определить следующим образом:

$$a_n=\frac{1}{L}\int\limits_a^b f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx,\ (n=0,1,2,\ldots),$$

$$b_n=\frac{1}{L}\int\limits_a^b f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx,\ (n=1,2,\ldots).$$

тогда ряд Фурье принимает вид

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right).$$

Если рассматривать $f(t)$ как T-периодическую функцию с периодом $T = 2L$, ввести обозначение $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, учесть, что для T-периодической функции справедливо равенство

$$\int\limits_0^T f(t)dt = \int\limits_c^{c+T} f(t)dt, \; \forall c \in R,$$

можно получить следующую форму ряда Фурье:

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t - \varphi_n) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \psi_n),$$

где $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ — амплитуда, $n\omega$ — частота, $\varphi_n = \operatorname{arctg} \dfrac{b_n}{a_n}$, $\psi_n = \operatorname{arctg} \dfrac{a_n}{b_n}$ — сдвиги по фазе соответствующих гармоник.

Комплексная форма ряда Фурье

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \; c_n = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

Если функция $f(x)$ задана на сегменте $[-L, L]$, где L — произвольное число, то при выполнении на этом сегменте условий Дирихле комплексная форма ряда Фурье:

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{-in\pi x/L}, \; c_n = \frac{1}{2L} \int\limits_{-L}^{L} f(x) e^{-in\pi x/L} dx.$$

Правая часть тождества Бесселя имеет вид:

$$\| f(t) \|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k \| \varphi_k(t) \|^2 = \int_0^T f^2(t)dt - \frac{a_0^2}{4}T - \frac{T}{2}\sum_{k=1}^{n} A_k^2.$$

Относительная среднеквадратическая ошибка $\overline{\nabla}_n^2 = \dfrac{\nabla_n^2}{T}$ может быть записана через амплитуду отдельных гармоник:

$$\overline{\nabla}_n^2 = \frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)dt - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} A_k^2.$$

Равенство Парсеваля имеет вид:

$$\int_0^T f^2(t)dt - \frac{a_0^2}{4}T = \frac{T}{2}\sum_{k=1}^{n} A_k^2.$$

Энергия отдельной гармоники $A_k \cos(k\omega t - \varphi_k)$ за время T:

$$E_k = \int_0^T A_k^2 \cos^2(k\omega t - \varphi_k)dt = \frac{A_k^2}{2}\int_0^T (1 + \cos(2(k\omega t - \varphi_k))dt = A_k^2 \frac{T}{2},$$

тогда энергия спектра может быть найдена по формуле:

$$\mathcal{E} = \frac{T}{2}\sum_{k=1}^{\infty} A_k^2.$$

Используя равенство Парсеваля энергию спектра запишем в виде:

$$\mathcal{E} = \int_0^T f^2(t)dt - \frac{a_0^2}{4}T.$$

Оценить долю k-й гармоники в общей энергии спектра можно по формуле

$$\mathcal{E}_k = \frac{E_k}{\mathcal{E}} = \frac{A_k^2 \cdot \frac{T}{2}}{\int_0^T f^2(t)dt - \frac{a_0^2}{4}T} = \frac{A_k^2}{\frac{2}{T} \cdot \int_0^T f^2(t)dt - \frac{a_0^2}{2}}.$$

Двойной интеграл Фурье

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega(t-x) dt \right) d\omega$$

или интеграл Фурье для функции $f(x)$:

$$f(x) = \int\limits_{0}^{\infty} \left(a(\omega) \cos \omega t + b(\omega) \sin \omega t\right) d\omega,$$

где

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt, \; b(\omega) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt.$$

Комплексная форма интеграла Фурье

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega(t-x)} dt.$$

Интеграл Фурье в комплексной форме можно записать в другом виде:

$$F(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega.$$

Определение 2. *Соответствие $f(x) \to F(\omega)$ называется* ***преобразованием Фурье*** *функции $f(x)$.*
Преобразование $F(\omega) \to f(x)$ называется ***обратным преобразованием Фурье***.

Основные теоремы преобразования Фурье

1. **Теорема сложения.**
   Если $f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega)$ и $f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$,
   то $\alpha_1 f_1(t) \pm \alpha_2 f_2(t) \leftrightarrow \alpha_1 F_1(\omega) \pm \alpha_2 F_2(\omega)$.

2. **Теорема симметрии.**
   Если $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, то $F(\pm t) \leftrightarrow 2\pi f(\mp\omega)$.

3. **Теорема подобия.**
   Если $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ и α — вещественная постоянная,
   то $f(\alpha t) \leftrightarrow \dfrac{1}{\alpha} F(\omega/\alpha)$.

4. **Теорема о временном сдвиге.**
   Если $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, то $f(t \pm \alpha) \leftrightarrow e^{\pm i\alpha\omega} F(\omega)$.

5. **Теорема о частотном сдвиге.**
   Если $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, то $F(\omega \pm \omega_0) \leftrightarrow e^{\mp i\omega_0 t} f(t)$.

6. **Теоремы модуляции.**
$$f(t)\cos(\omega_0 t) \leftrightarrow \frac{1}{2}(F(\omega+\omega_0) + F(\omega-\omega_0)),$$
$$f(t)\sin(\omega_0 t) \leftrightarrow \frac{i}{2}(F(\omega+\omega_0) + F(\omega-\omega_0)).$$

7. **Теорема о производной.**
   Если $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, то $f'(t) \leftrightarrow i\omega \cdot F(\omega)$ и $F'(\omega) \leftrightarrow it \cdot f(t)$,
   $f^{(n)}(t) \leftrightarrow (i\omega)^n F(\omega)$ и $F^{(n)}(\omega) \leftrightarrow (-it)^n \cdot f(t)$.

8. **Теорема об интеграле.**
   Если $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, то $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)dt \leftrightarrow \dfrac{1}{i\omega} F(\omega)$.

9. **Теорема о свёртке.**
$$f_1(t) * f_2(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)d\tau = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\tau) f_2(\tau)d\tau,$$
   Если $f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega)$ и $f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$,
   то $f_1(t) \cdot f_2(t) \leftrightarrow F_1(\omega) * F_2(\omega)$ и $f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$,
   $(f_1(t) * f_2(t))' = f_1'(t) * f_2(t) = f_1(t) * f_2'(t) \leftrightarrow i\omega \cdot F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$.

Приложение 2

Вариант 1

1. Вычислить $\overline{z}_1$; z_1+z_2; z_1-z_2; $z_1\cdot z_2$; z_1/z_2, если $z_1=2+i3$, $z_2=3-i2$, результат записать в алгебраической, тригонометрической и показательной форме.
2. Найти все корни уравнения $x^2-2x+2=0$.
3. Найти модуль и аргумент комплексного числа: $(\sqrt{3}-i)^6$.
4. Найти все значения корня: $\sqrt[3]{-27}$.
5. На множестве комплексных чисел решить уравнение $z^4+81=0$.
6. Выяснить геометрический смысл соотношения и сделать чертёж: $|z-2|+|z+2|=5$.
7. Вычислить значения функций (ответ записать в алгебраической форме): $\arccos 3$, $\mathrm{Ln}\,(\sqrt{3}+i)$.

Вариант 2

1. Вычислить $\overline{z}_1$; z_1+z_2; z_1-z_2; $z_1\cdot z_2$; z_1/z_2, если $z_1=2i$, $z_2=1+i$, результат записать в алгебраической, тригонометрической и показательной форме.
2. Найти все корни уравнения $x^2-2x+5=0$.
3. Найти модуль и аргумент комплексного числа: $(-1+i)^5$.
4. Найти все значения корня: $\sqrt[4]{-16}$.
5. На множестве комплексных чисел решить уравнение $z^5+32=0$.
6. Выяснить геометрический смысл соотношения и сделать чертёж: $|z-2|+|z+2|<1$.
7. Вычислить значения функций (ответ записать в алгебраической форме): $\arcsin 2$, $\mathrm{Ln}\,(1-i)$.

Вариант 3

1. Вычислить $\overline{z}_1$; $z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$; z_1/z_2, если $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - i$, результат записать в алгебраической, тригонометрической и показательной форме.
2. Найти все корни уравнения $x^2 + 4x + 13 = 0$.
3. Найти модуль и аргумент комплексного числа: $(2 + i \cdot \sqrt{12})^5$.
4. Найти все значения корня: $\sqrt[3]{i}$.
5. На множестве комплексных чисел решить уравнение $z^4 - 16 = 0$.
6. Выяснить геометрический смысл соотношения и сделать чертёж: $1 < |z - 2| < 9$.
7. Вычислить значения функций (ответ записать в алгебраической форме): $\operatorname{th}\left(3 - \dfrac{\pi i}{2}\right)$, $\operatorname{Ln}(1 + i)$.

Вариант 4

1. Вычислить $\overline{z}_1$; $z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$; z_1/z_2, если $z_1 = 5 + 2i$, $z_2 = 3 - i4$, результат записать в алгебраической, тригонометрической и показательной форме.
2. Найти все корни уравнения $x^2 + 4x + 8 = 0$.
3. Найти модуль и аргумент комплексного числа: $\left(\dfrac{\sqrt{3} + i}{2}\right)^4$.
4. Найти все значения корня: $\sqrt{1 - i\sqrt{3}}$.
5. На множестве комплексных чисел решить уравнение $z^3 - 8 = 0$.
6. Выяснить геометрический смысл соотношения и сделать чертёж: $|z - i| = |z + 3|$.
7. Вычислить значения функций (ответ записать в алгебраической форме): $\arccos i$, $\operatorname{Ln}(-2i)$.

Вариант 5

1. Вычислить $\overline{z}_1$; z_1+z_2; z_1-z_2; $z_1\cdot z_2$; z_1/z_2, если $z_1=2+4i$, $z_2=-7+i$, результат записать в алгебраической, тригонометрической и показательной форме.
2. Найти все корни уравнения $x^2-4x+12=0$.
3. Найти модуль и аргумент комплексного числа: $(-1-i\cdot\sqrt{3})^7$.
4. Найти все значения корня: $\sqrt[3]{-1+i}$.
5. На множестве комплексных чисел решить уравнение $z^4+1=0$.
6. Выяснить геометрический смысл соотношения и сделать чертёж: $|z+2i|+|z-2i|>5$.
7. Вычислить значения функций (ответ записать в алгебраической форме): $\cos(3+i)$, $\mathrm{Ln}\,(-3+4i)$.

Вариант 6

1. Вычислить $\overline{z}_1$; z_1+z_2; z_1-z_2; $z_1\cdot z_2$; z_1/z_2, если $z_1=-5+2i$, $z_2=-3-i4$, результат записать в алгебраической, тригонометрической и показательной форме.
2. Найти все корни уравнения $x^2+3x+6=0$.
3. Найти модуль и аргумент комплексного числа: $(\sqrt{3}+i)^5$.
4. Найти все значения корня: $\sqrt[4]{1+i}$.
5. На множестве комплексных чисел решить уравнение $z^4+625=0$.
6. Выяснить геометрический смысл соотношения и сделать чертёж: $|z|<\mathrm{Re}\;z+1$.
7. Вычислить значения функций (ответ записать в алгебраической форме): $\mathrm{sh}\,(2-i)$, $\mathrm{Ln}\,(3-2i)$.

Вариант 7

1. Вычислить $\overline{z}_1$; z_1+z_2; z_1-z_2; $z_1\cdot z_2$; z_1/z_2, если $z_1=\sqrt{2}-\sqrt{3}i$, $z_2=7-i$, результат записать в алгебраической, тригонометрической и показательной форме.
2. Найти все корни уравнения $x^2-2x+10=0$.
3. Найти модуль и аргумент комплексного числа: $(2-i)^4$.
4. Найти все значения корня: $\sqrt[3]{2-2i}$.
5. На множестве комплексных чисел решить уравнение $z^3-125=0$.
6. Выяснить геометрический смысл соотношения и сделать чертёж: $\operatorname{Re}\dfrac{1}{z}=1$.
7. Вычислить значения функций (ответ записать в алгебраической форме): $\operatorname{ch}(1+2i)$, $\operatorname{Ln}(-1-i)$.

Вариант 8

1. Вычислить $\overline{z}_1$; z_1+z_2; z_1-z_2; $z_1\cdot z_2$; z_1/z_2, если $z_1=-\sqrt{5}-2i$, $z_2=-3+i4$, результат записать в алгебраической, тригонометрической и показательной форме.
2. Найти все корни уравнения $x^2+4x+15=0$.
3. Найти модуль и аргумент комплексного числа: $(-2-i)^6$.
4. Найти все значения корня: $\sqrt[3]{-2+2i}$.
5. На множестве комплексных чисел решить уравнение $z^4+25=0$.
6. Выяснить геометрический смысл соотношения и сделать чертёж: $0<\operatorname{Re}(2iz)<1$.
7. Вычислить значения функций (ответ записать в алгебраической форме): $\operatorname{sh}(2+i)$, $\operatorname{Ln} i^i$.

Вариант 9

1. Вычислить $\overline{z}_1$; z_1+z_2; z_1-z_2; $z_1\cdot z_2$; z_1/z_2, если $z_1=\sqrt{2}+\sqrt{7}i$, $z_2=3-i4$, результат записать в алгебраической, тригонометрической и показательной форме.
2. Найти все корни уравнения $x^2-4x+15=0$.
3. Найти модуль и аргумент комплексного числа: $(-1+i\cdot\sqrt{3})^4$.
4. Найти все значения корня: $\sqrt[4]{32}$.
5. На множестве комплексных чисел решить уравнение $z^4+36=0$.
6. Выяснить геометрический смысл соотношения и сделать чертёж: $\operatorname{Re}\dfrac{1}{z}>\dfrac{1}{2}$.
7. Вычислить значения функций (ответ записать в алгебраической форме): $\cos(3-2i)$, $\operatorname{Ln}(1+i)^i$.

Вариант 10

1. Вычислить $\overline{z}_1$; z_1+z_2; z_1-z_2; $z_1\cdot z_2$; z_1/z_2, если $z_1=-\sqrt{5}+2i$, $z_2=-1+i3$, результат записать в алгебраической, тригонометрической и показательной форме.
2. Найти все корни уравнения $x^2+4x+14=0$.
3. Найти модуль и аргумент комплексного числа: $(1+i\cdot\sqrt{3})^3$.
4. Найти все значения корня: $\sqrt[4]{5-2i}$.
5. На множестве комплексных чисел решить уравнение $z^4+49=0$.
6. Выяснить геометрический смысл соотношения и сделать чертёж: $\operatorname{Im}\dfrac{1}{z}<\dfrac{1}{2}$.
7. Вычислить значения функций (ответ записать в алгебраической форме): $\operatorname{Arctg}(2i)$, $\operatorname{Ln}(i-2)$.