НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В. В. Комиссаров
Н. В. Комиссарова

ЛЕКЦИИ

ЭЛЕМЕНТЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

Новосибирск 2020

Содержание

1 **Понятие множества** 5

2 **Способы задания множеств** 7

3 **Отношения между множествами** 8

4 **Операции над множествами** 11
4.1 Объединение множеств . . . 11
4.2 Пересечение множеств . . . 12
4.3 Свойства объединения и пересечения множеств . . . 13
4.4 Разность двух множеств. Дополнение . . . 16
4.5 Свойства разности и дополнения . . . 17
4.6 Декартово произведение множеств . . . 19
4.7 Число элементов конечных множеств . . . 22

5 **Бинарные отношения** 24
5.1 Отображения . . . 29
5.2 Отношения на множестве и их свойства . . . 35
5.3 Функции и операции . . . 42

6 **Логика высказываний** 43

7 **Логические связки** 44
7.1 Связка НЕ . . . 45
7.2 Связка И . . . 45
7.3 Связка ИЛИ . . . 45
7.4 Связка СЛЕДУЕТ . . . 46
7.5 Связка ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА . . . 46
7.6 Таблицы истинности . . . 46

8 **Кванторные конструкции** 47
8.1 ДЛЯ ВСЕХ . . . 47
8.2 СУЩЕСТВУЕТ . . . 48

9 **Предикаты и элементарные формулы** 49

10 **Алгебра логики** 53

11 Канонические формы логических формул **61**
11.1 Алгоритм построения СДНФ по таблице истинности 63
11.2 Алгоритм построения СКНФ по таблице истинности 65
11.3 Минимизация булевых функций. Карты Карно 66

Литература **74**

Введение

В отличие от классической математики, которая изучает непрерывные бесконечные структуры, дискретная математика занимается изучением дискретных структур, возникающих как в пределах самой математики, так и в её приложениях.

В настоящее время интерес к дискретной математике неуклонно растёт. Это объясняется тем, что современные технологии переработки информации базируются на дискретных представлениях.

1. Понятие множества

Теория множеств является одной из сравнительно молодых математических дисциплин. Основоположником её по праву считается немецкий математик Георг Кантор (1845–1918). В основе этой теории лежит понятие множества. Согласно Г. Кантору, «множество есть многое, мыслимое нами как единое». Таким образом, множество рассматривалось им как собрание каких-либо предметов реального мира (или объектов нашей интуиции), обладающих общим свойством. Другими словами, множество — это совокупность предметов, рассматриваемая как один предмет. Все сказанное не является определением множества, а всего лишь поясняет его. Множество — самое широкое понятие математики, оно не может быть определено через другие, более простые понятия [1–2, 4, 6–7, 10–15].

Мыслящему человеку свойственно группировать различные предметы по какому-либо признаку в самостоятельный объект. Этот процесс достаточно полно отражается словами: «группа», «класс», «компания», «экипаж», «набор», «ансамбль» и другими, близкими по смыслу слову «множество».

В реальной действительности мы имеем дело с различными множествами: множество жителей данного города, множество простых чисел, множество букв в русском алфавите и т. п. Универсальность этого понятия сделала возможным применение теории множеств не только во всех областях математики, но и в экономике, биологии, лингвистике и других науках. В разговорной речи термин «множество» всегда связан с большим числом предметов. В теории множеств это не обязательно. Мы будем рассматривать и бесконечные множества, и множества, содержащие любое конечное число предметов, и даже множество, не содержащее ни одного предмета, — пустое множество. Произвольные множества обозначим заглавными буквами латинского алфавита: $A, B, C, D, \ldots$; пустое множество — символом $\varnothing$. Всякое множество состоит из некоторых предметов, называемых его элементами. Элементы множества обозначим малыми буквами латинского алфавита: $a, b, c, d, \ldots$ или какой-нибудь одной буквой с индексом, например, $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots$

Отношение между элементами и множеством выражают словами «является элементом» или «принадлежит». Предложение «Элемент a принадлежит множеству A» запишем с использованием символа: $\in$ ($a \in A$). Если же a не является элементом множества A, то будем писать $a \notin A$.

Обозначения наиболее часто используемых числовых множеств

N — множество натуральных чисел

N_0 — множество целых неотрицательных чисел (или Z_+)

Z — множество целых чисел

Q — множество рациональных чисел

R — множество действительных чисел

R_+ — множество неотрицательных действительных чисел

R_- — множество неположительных действительных чисел

2. Способы задания множеств

Множество считается заданным, если о любом объекте можно сказать, принадлежит он этому множеству или не принадлежит. Множество можно задать непосредственным перечислением всех его элементов в произвольном порядке. В этом случае названия всех элементов множества записываются в строку, отделяются запятыми и заключаются в фигурные скобки. Например, если множество A состоит из однозначных нечётных чисел, то запишем: $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Это множество можно записать и так: $A = \{3, 5, 1, 9, 7\}$ или $A = \{9, 7, 1, 3, 5\}$, или с перечислением элементов в каком-то другом порядке.

Следует отличать символы a и $\{a\}$. Так, a обозначает элемент множества, $\{a\}$ — одноэлементное множество.

Очевидно, что перечислением элементов можно задать только конечное множество, и то с небольшим числом элементов. Когда задать множество перечислением его элементов трудно или невозможно (в случае бесконечных множеств), применяют другой способ задания множества — через указание характеристического свойства его элементов.

Определение 1. *Характеристическим свойством, определяющим множество, называется такое свойство, которым обладает каждый элемент, принадлежащий данному множеству, и не обладает ни один элемент, ему не принадлежащий.*

Множество B, определяемое некоторым характеристическим свойством P, будем обозначать: $B = \{x|P(x)\}$; эта запись читается так: «B есть множество всех x таких, что x обладает свойством P», или «B есть множество всех x , обладающих свойством P».

Например, запись $B = \{x|x \in Z, -2 \leq x < 3\}$ означает, что множество B состоит из целых чисел, больших или равных -2 и меньших 3, а множество корней уравнения $2z^2 - z - 3 = 0$ можно описать как: $C = \{z | 2z^2 - z - 3 = 0\}$.

Таким образом, чтобы задать некоторое множество, надо либо перечислить его элементы, либо указать характеристическое свойство его элементов. Часто одно и то же множество может задаваться обоими способами. Например, заданные выше с помощью характеристического свойства множества B и C могут быть заданы и перечислением: $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $C = \{-1, 3/2\}$.

3. Отношения между множествами

Чтобы наглядно изображать множества, английский математик Джон Венн (1834–1923) предложил использовать замкнутые фигуры на плоскости. Намного раньше Леонард Эйлер (1707–1783) для изображения отношений между множествами использовал круги. Точки внутри круга считаются элементами множества. Позднее такие изображения получили название диаграмм Эйлера–Венна.

Пусть даны два произвольных множества A и B. Рассматривая вопрос об отношениях между ними, необходимо прежде всего отметить две возможности.

I. Множества A и B не имеют общих элементов, то есть из того, что $x \in A$, следует, что $x \notin B$, а из того, что $y \in B$, следует, что $y \notin A$. На диаграммах Эйлера–Венна нет точек (элементов), которые принадлежали бы одновременно A и B (рис. 1а).

II. Множества A и B имеют общие элементы, то есть существуют такие элементы x, для которых верно то, что $x \in A$ и $x \in B$. При этом возможны четыре случая отношений между ними.

1. Не все элементы множества A принадлежат множеству B, и не все элементы множества B принадлежат множеству A.

В этом случае говорят, что множества A и B находятся в отношении *пересечения*. Диаграмма Эйлера–Венна для этих множеств представлена на рис. 1б.

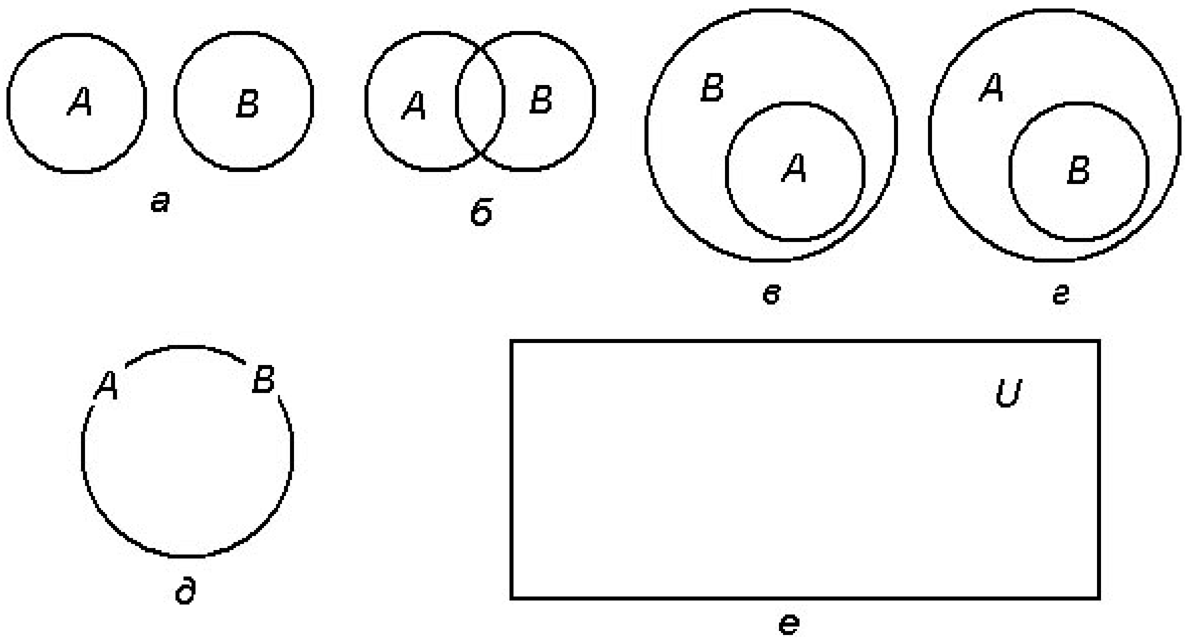


Рис. 1. Диаграммы Эйлера-Венна

Приведём примеры множеств, находящихся в отношении пересечения:

а) $A = \{$п, и, о, н, е, р$\}$; $B = \{$у, ч, е, н, и, к$\}$;

б) A — множество натуральных делителей числа 72; B — множество натуральных делителей числа 85.

2. Все элементы множества A принадлежат множеству B , но множество B может содержать элементы, не принадлежащие множеству A. В этом случае говорят, что множества A и B находятся в отношении *включения*. На диаграмме Эйлера–Венна каждая точка множества A находится внутри фигуры, изображающей множество B (рис. 1в)

Например, A — множество чисел, кратных четырём, и B — множество чисел, кратных двум, находятся в отношении включения.

Определение 2. *Множество A называется подмножеством (или частью) множества B, если каждый элемент множества A является элементом множества B.*

Обозначают включение символом $\subset$: $A \subset B$ — и читают «A включается в B» или «A — подмножество B».

Из определения 2 вытекают следующие свойства отношения включения:

1) рефлексивность: $A \subset A$, то есть всякое множество включается в себя, или всякое множество является подмножеством самого себя;

2) транзитивность: из того что $A \subset B$ и $B \subset C$, следует, что $A \subset C$;

3) для всякого множества A справедливо включение $\varnothing \subset A$. Поскольку $\varnothing$ не имеет элементов, то естественно считать его подмножеством любого множества.

Само множество A и пустое множество $\varnothing$ называют *несобственными* подмножествами множества A. Все остальные подмножества множества A называются *собственными*.

3. Все элементы множества B принадлежат множеству A, но множество A может содержать элементы, не принадлежащие множеству B. В этом случае множество B включается во множество A . Диаграмма Эйлера–Венна для такого варианта включения представлена на рис. 1г.

4. Все элементы множества A принадлежат множеству B, и все элементы множества B принадлежат множеству A. В этом случае говорят, что множества A и B *равны*.

Определение 3. *Два множества A и B называются равными или совпадающими, если $A \subset B$ и $B \subset A$.*

Равенство множеств обозначают символом $=$ ($A = B$), и читают «A равно B». На диаграмме Эйлера–Венна контуры множеств A и B совпадают (рис. 1д).

Пусть, например, A — множество гласных букв в слове «белок», B — множество гласных букв в слове «прогресс». Очевидно, что множества $A = \{$е, о$\}$ и $B = \{$о, е$\}$ равны между собой.

Можно дать и другое определение равенства множеств.

Определение 4. *Два множества A и B называются равными, если они состоят из одних и тех же элементов.*

Отношение равенства множеств обладает следующими свойствами:

1) рефлексивностью: $A = A$, то есть всякое множество равно самому себе;
2) симметричностью: если $A = B$, то и $B = A$;
3) транзитивностью: если $A = B$ и $B = C$, то $A = C$.

Определение 5. *Множество, относительно которого все множества, рассматриваемые в данной задаче, являются подмножествами, называется универсальным.*

Например, множество действительных чисел R является универсальным для рассмотренных выше числовых множеств. Универсальное множество будем обозначать буквой U, а на диаграммах Эйлера–Венна — в виде прямоугольника (рис. 1е).

4. Операции над множествами

4.1. Объединение множеств

Пусть даны два множества: $A = \{15, 30, 45, 60, 75, 90\}$ — множество двузначных чисел, кратных 15; $B = \{18, 36, 54, 72, 90\}$ —

множество двузначных чисел, кратных 18. Образуем новое множество, состоящее из элементов этих множеств. Полученное множество $\{15, 18, 30, 36, 45, 60, 72, 75, 90\}$ называется объединением множеств A и B . Число 90 записали один раз, поскольку элементы множеств не должны повторяться.

Определение 6. *Объединением множеств A и B называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат множеству A или множеству B.*

Союз «или» здесь не выполняет разделительную функцию. Другими словами, если элемент принадлежит объединению множеств, то он принадлежит или A, или B, или обоим множествам одновременно. Обозначают объединение множеств A и B символом $\cup$: $A \cup B$. Аналогично определяется объединение трёх и более множеств. Определение объединения можно записать в таком виде: $A \cup B := \{x | x \in A \text{ или } x \in B\}$. На рис. 2 объединению соответствует заштрихованная часть. На рис. 2б $B \subset A$; поэтому $A \cup B = A$.

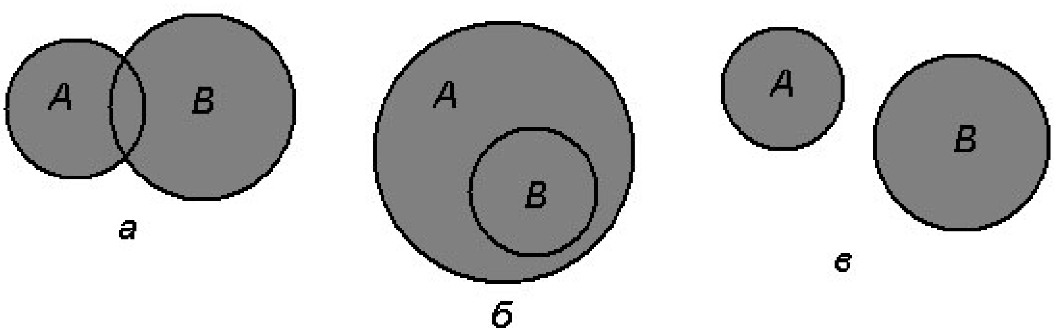


Рис. 2. Объединение множеств

4.2. Пересечение множеств

Пусть имеем два множества: $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ — множество натуральных делителей числа 12; $B = \{1, 3, 6, 9, 18\}$ — множество натуральных делителей числа 18. Образуем множество, состоящее из общих элементов множеств A и B. Вновь полученное множество $\{1, 3, 6\}$ называют пересечением множеств A и B.

Определение 7. *Пересечением множеств A и B называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат множеству A и множеству B одновременно.*

Пересечение множеств A и B обозначают символом $\cap$: $A \cap B$. Аналогично определяется пересечение трёх и более множеств. Определение пересечения можно записать в таком виде: $A \cap B := \{x | x \in A \text{ и } x \in B\}$.

Как следует из определения пересечения, $x \in A \cap B$ тогда и только тогда, когда $x \in A$ и $x \in B$. Соответственно, $x \notin A \cap B$ тогда и только тогда, когда $x \notin A$ или $x \notin B$.

Если множества A и B изобразить с использованием диаграмм Эйлера–Венна, то пересечению будет соответствовать заштрихованная часть (рис. 3). На рис. 3б $B \subset A$, поэтому $A \cap B = B$. На рис. 3в $A \cap B = \varnothing$.

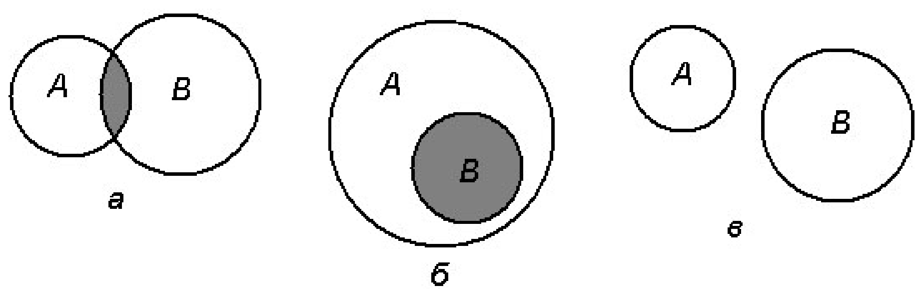


Рис. 3. Пересечение множеств

4.3. Свойства объединения и пересечения множеств

Из определений объединения и пересечения множеств вытекают свойства этих операций, представленные в виде равенств, справедливых для любых множеств A, B и C.

1. $A \cup B = B \cup A$ — коммутативность объединения.
2. $A \cap B = B \cap A$ — коммутативность пересечения.
3. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ — ассоциативность объединения.
4. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ — ассоциативность пересечения.
5. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ — дистрибутивность пересечения относительно объединения.
6. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ — дистрибутивность объединения относительно пересечения.
7. $A \cup A = A$.
8. $A \cap A = A$.
9. $A \cup \varnothing = A$.
10. $A \cap \varnothing = \varnothing$.
11. $A \cup U = U$.
12. $A \cap U = A$.

Свойства 7–12 называются законами поглощения.

Докажем справедливость дистрибутивности объединения относительно пересечения множеств (свойство 6). Введём следующие обозначения: $A \cup (B \cap C) = E_1$ и $(A \cup B) \cap (A \cup C) = E_2$. На основании определения равенства двух множеств достаточно показать справедливость включений: $E_1 \subset E_2$ и $E_2 \subset E_1$.

1. Покажем, что $E_1 \subset E_2$. Выберем произвольный элемент $x \in E_1$, тогда $x \in A \cup (B \cap C)$. На основании определения объединения имеем две возможности: $x \in A$ или $x \in B \cap C$. Если $x \in A$, то, по определению объединения, $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$, но тогда, по определению пересечения, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Если же $x \in B \cap C$, то, по определению пересечения, $x \in B$ и $x \in C$, а по определению объединения, $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$, но тогда, по определению пересечения, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Итак, в обоих случаях из того, что $x \in E_1$, следует, что $x \in E_2$. В силу произвольности выбора элемента x можем утверждать, что каждый элемент множества E_1 является элементом множества E_2. А это, по определению включения, означает, что $E_1 \subset E_2$.

2. Выберем произвольный элемент $y \in E_2$, тогда $y \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. На основании определения пересечения $y \in A \cup B$ и $y \in A \cup C$.

По определению объединения, $y \in A$ или $y \in B$ и $y \in A$ или $y \in C$.

Если $y \in A$, то, по определению объединения, $y \in A \cup (B \cap C)$.

Если же $y \notin A$, то $y \in B$ и $y \in C$, и тогда, по определению пересечения, $y \in B \cap C$, а на основании определения объединения $y \in A \cup (B \cap C)$.

Следовательно, если $y \in E_2$, то $y \in E_1$, то есть $E_2 \subset E_1$.

Так как $E_1 \subset E_2$ и $E_2 \subset E_1$, то $E_1 = E_2$, и справедливость равенства 6 доказана.

Проиллюстрируем это свойство, прибегнув к диаграммам Эйлера–Венна (рис. 4).

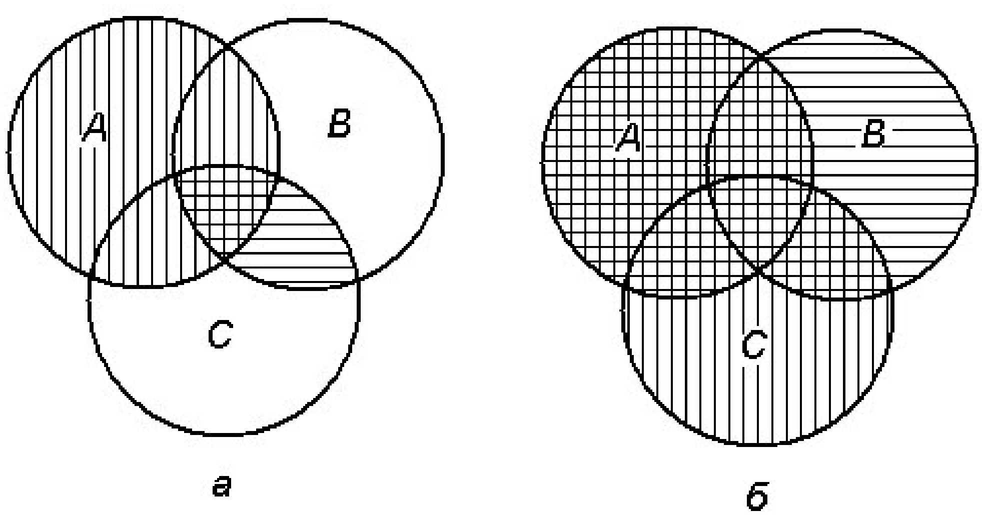


Рис. 4. Доказательство свойства 6 с помощью диаграмм Эйлера–Венна

На рис. 4а $B \cap C$ заштриховано горизонтально, а множество A — вертикально. Область, обозначенная хотя бы одной штриховкой, соответствует множеству $A \cup (B \cap C)$. На рис. 4б $A \cup B$ обозначено горизонтальной штриховкой, а множество $A \cup C$ — вертикальной. Область, заштрихованная двояко, соответствует множеству $(A \cup B) \cap (A \cup C)$. При сравнении указанных областей легко увидеть, что $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

4.4. Разность двух множеств. Дополнение

Пусть A — множество равнобедренных треугольников, B — множество треугольников, не имеющих прямого угла. Тогда множество равнобедренных прямоугольных треугольников состоит из тех и только тех элементов множества A, которые не принадлежат множеству B. Это множество называется *разностью* множеств A и B (рис. 5).

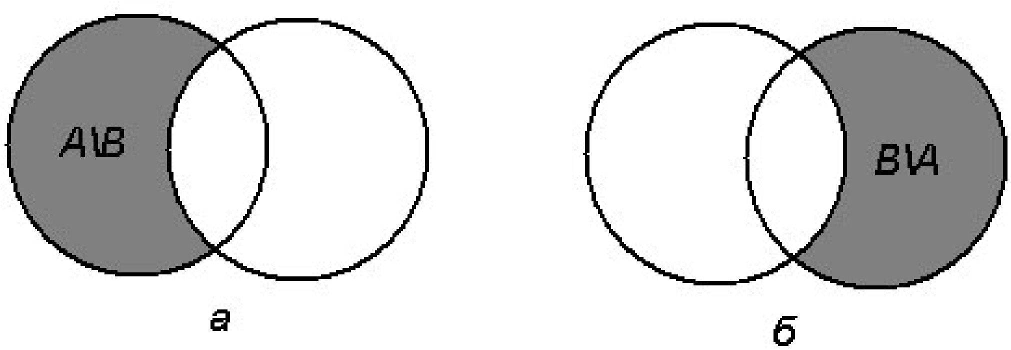


Рис. 5. Разность множеств

Определение 8. *Разностью множеств A и B называется множество, состоящее из тех и только тех элементов множества A, которые не принадлежат множеству B.*

Разность множеств A и B обозначают символом $\setminus$. $A \setminus B$: читается «A без B».

Определение разности можно записать в таком виде: $A \setminus B := \{x | x \in A \text{ и } x \notin B\}$.

Согласно определению разности, $x \in A \setminus B$ тогда и только тогда, когда $x \in A$ и $x \notin B$. Соответственно, $x \notin A \setminus B$ тогда и только тогда, когда $x \notin A$ или $x \in B$. На диаграммах Эйлера–Венна (см. рис. 5) разности соответствует заштрихованная часть. Операция, при помощи которой находится разность множеств, называется *вычитанием.*

Если $B \subset A$, то разность $A \setminus B$ называется дополнением множества B до множества A.

Обозначают дополнение символом $\overline{B}_A$.

Если множество B является подмножеством универсального множества U, то дополнение B до U обозначается $\overline{B}$.

Итак, по определению, $\overline{B} = U \setminus B$.

Из этого определения следует, что $x \in \overline{B}$ тогда и только тогда, когда $x \notin B$, и $x \notin \overline{B}$ тогда и только тогда, когда $x \in B$.

Замечания. В некоторых случаях удобно рассматривать симметричную разность двух множеств A и B, которая определяется как объединение разностей $A \setminus B$ и $B \setminus A$. Симметричную разность множеств A и B будем обозначать символом $\div$; $A \div B$ (или $A \triangle B$). Таким образом, по определению, $A \div B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Последовательность выполнения операций над множествами (операции даны по убыванию приоритетов): $\overline{A}$, $A \setminus B$, $A \cap B$, $A \cup B$, $A \div B$.

4.5. Свойства разности и дополнения

Прежде всего отметим, разность не обладает свойствами коммутативности и ассоциативности, то есть $A \setminus B \neq B \setminus A$; $A \setminus (B \setminus C) \neq (A \setminus B) \setminus C$. В этом легко убедиться, построив диаграммы Эйлера–Венна. Вместе с тем справедливы следующие свойства разности и дополнения:

1. $\overline{\varnothing} = U$.

2. $\overline{U} = \varnothing$.

3. $A \setminus \varnothing = A$.
4. $\overline{\overline{A}} = A$.
5. $\overline{A} \cap A = \varnothing$.
6. $\overline{A} \cup A = U$.
7. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
8. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
9. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.
10. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

Справедливость свойств 1–6 вытекает непосредственно из определений разности и дополнения. Приведем доказательство свойства 7.

1. Докажем, что $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. Пусть $x \in \overline{A \cup B}$. Тогда, по определению дополнения, $x \notin A \cup B$, откуда, по определению объединения, $x \notin \overline{A}$ и $x \notin \overline{B}$. Но тогда, по определению дополнения, $x \in \overline{A}$ и $x \in \overline{B}$. Следовательно, по определению пересечения, $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$.

Итак, из того, что $x \in \overline{A \cup B}$, следует, что $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. В силу произвольности выбора x это означает, что $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

2. Докажем, что $\overline{A} \cap \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. Пусть $y \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Тогда, по определению пересечения, $y \in \overline{A}$ и $y \in \overline{B}$, откуда, по определению дополнения, $y \notin A$ и $y \notin B$. Но тогда, по определению объединения, $y \notin A \cup B$. Следовательно, по определению дополнения, $y \in \overline{A \cup B}$.

Итак, из того, что $y \in \overline{A} \cap \overline{B}$, следует, что $y \in \overline{A \cup B}$, то есть $\overline{A} \cap \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. Далее, исходя из определения равенства множеств заключаем, что $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Легко доказывается это свойство на диаграммах Эйлера–Венна.

Пример операций над множествами

Пусть $U = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{c, d, e, f\}$. Определить $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \div B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$.

$$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\};\ A \cap B = \{c, d\};\ A \setminus B = \{a, b\};$$

$$B \setminus A = \{e, f\};\ A \div B = \{a, b, e, f\};\ \overline{A} = \{e, f, g\};\ \overline{B} = \{a, b, g\}.$$

4.6. Декартово произведение множеств

Пусть имеем число 46, записанное с помощью цифр 4 и 6. Цифры в числе расположены в определённом порядке. Если их поменять местами, то получится другое число 64. Говорят, что 4, 6 — упорядоченная пара цифр.

В общем случае под упорядоченной парой будем понимать два элемента, расположенные в определённом порядке. Упорядоченную пару с первым элементом a и вторым элементом b обозначим (a, b). Элементы a и b пары называют её компонентами. Две пары (a_1, b_1) и (a_2, b_2) считаются равными тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$. В общем случае, если $a \neq b$, то $(a, b) \neq (b, a)$, то есть две пары, отличающиеся только порядком расположения элементов, будут различны. Если же рассматривать двухэлементные множества $\{a, b\}$ и $\{b, a\}$, то они равны, то есть $\{a, b\} = \{b, a\}$.

Упорядоченные пары можно образовать и из элементов двух различных множеств. Пусть $A = \{t, p\}$; $B = \{a, o, e\}$. Составим всевозможные пары, первые элементы которых принадлежат множеству A, а вторые — множеству B.

Получим множество $\{(t, a), (t, o), (t, e), (p, a), (p, o), (p, e)\}$, которое называют декартовым (или прямым) произведением множеств A и B.

Определение 9. *Декартовым произведением двух непустых множеств A и B называется множество, состоящее из всех упорядоченных пар вида (a, b), где $a \in A$ и $b \in B$.*

Декартово произведение множеств A и B обозначают символом $\times$, $A \times B$. Приведённое определение можно записать короче: $A \times B = \{(a, b) | a \in A$ и $b \in B\}$.

Декартово произведение $A \times A$ называют декартовым квадратом множества A и обозначают A^2. Операция, с помощью которой находится декартово произведение множеств, называется декартовым умножением. Говоря о свойствах декартова умножения, прежде всего отметим, что оно не обладает свойствами коммутативности и ассоциативности.

1. Если $A \neq B$, то $A \times B \neq B \times A$.
2. Если ни одно из множеств A, B и C не является пустым, то
$$A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C.$$
3. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.
4. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.
5. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.
6. $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.
7. $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.
8. $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.

Справедливость утверждений 1–2 достаточно проверить на примере. Свойства 3–8 определяют дистрибутивность декартова умножения относительно объединения, пересечения и вычитания множеств.

Докажем справедливость равенства 3. Обозначим левую часть равенства через E_1, а правую — через E_2. Элементами множеств E_1 и E_2 являются упорядоченные пары.

1. Пусть (x, y) — любой элемент множества E_1, тогда $(x, y) \in A \times (B \cup C)$. По определению декартова произведения, $x \in A$ и $y \in B \cup C$, а по определению объединения, $y \in B$ или

$y \in C$. Если $x \in A$ и $y \in B$, то $(x, y) \in A \times B$, или, если $x \in A$ и $y \in C$, то $(x, y) \in A \times C$, по определению декартова произведения. Но тогда, по определению объединения множеств, $(x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$. Итак, любой элемент множества E_1 содержится в E_2, то есть $E_1 \subset E_2$.
2. Пусть теперь (x, y) — любой элемент множества E_2, тогда $(x, y) \in (A\times \times B) \cup (A \times C)$. По определению объединения, $(x, y) \in A \times B)$ или $(x, y) \in \in A \times C$. Отсюда, по определению декартова произведения, $x \in A$ и $y \in B$ или $x \in A$ и $y \in C$. Из этих утверждений вытекает, что $x \in A$ и $y \in B$ или $y \in C$, но тогда, по определению объединения, $x \in A$ и $y \in B \cup C$, а отсюда, по определению декартова произведения, $(x, y) \in A \times (B \cup C)$. То есть любой элемент множества E_1 содержится в E_2, а это означает, что $E_1 \subset E_2$.

На основании определения равенства множеств из пунктов 1 и 2 заключаем, что $E_1 = E_2$, — и справедливость свойства 3 доказана. Доказательства остальных свойств проводятся аналогично.

Понятие упорядоченной пары естественным образом распространяется на наборы из n элементов. Под упорядоченной n-кой (читается «энка») будем понимать n элементов, расположенных в определённом порядке. Обозначают n-ку символом $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и называют кортежем длины n. Некоторые элементы кортежа, или даже все, могут оказаться равными. Два кортежа $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ называются равными, если они имеют одинаковую длину $n = m$ и равные компоненты на местах с одинаковыми номерами, то есть $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2, \ldots, a_n = b_n$.

Пользуясь понятием кортежа, определим декартово произведение n множеств.

Определение 10. *Декартовым произведением непустых множеств A_1, $A_2, \ldots, A_n$ называется множество всевозможных* *кортежей длины n, первая компонента которых принадлежит множеству A_1, вторая — множеству A_2, ..., n-я — множеству A_n.*

Декартово произведение множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ обозначают $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$.

Для наглядного представления декартова произведения двух числовых множеств используют прямоугольную систему координат. При этом элементы множества A считают абсциссами, а элементы множества B — ординатами точек на плоскости. Итак, если A и B — числовые множества, то элементами декартова произведения $A \times B$ будут упорядоченные пары чисел. Изобразив каждую такую пару чисел точкой на координатной плоскости, получим множество точек, наглядно представляющих декартово произведение множеств A и B.

Например, для множеств A и B, если $A = \{x|x \in R, -3 \leq x \leq 1\}, B = \{y|y \in Z, -2 \leq y \leq 3\}$, декартово произведение $A \times B$ состоит из всех точек плоскости, абсциссы которых удовлетворяют неравенству $-3 \leq x \leq 1$, а ординатами являются целые числа из отрезка $[-2; 3]$. Этим условиям удовлетворяют отрезки параллельных прямых.

В случае, если $A = \{x|x \in R, 1 \leq x \leq 4\}$, $B = \{y|y \in R, y \geq -1\}$, множество $A \times B$ состоит из всех точек плоскости, абсциссы которых удовлетворяют неравенству $1 \leq x \leq 4$, а ординаты неравенству $y \geq -1$. Полоса, не ограниченная в положительном направлении оси Oy.

4.7. Число элементов объединения, разности и декартова произведения двух конечных множеств

Пусть A и B — конечные множества. Если $A \cap B = \varnothing$, то вопрос о числе элементов объединения $A \cup B$ решается довольно просто.

Число элементов множества A условимся обозначать символом $mes(A)$ и называть численностью множества A. Численность множества B будем обозначать символом $mes(B)$. Если множества A и B не пересекаются, то $mes(A \cup B) = mes(A) + mes(B)$.

Таким образом, численность объединения конечных непересекающихся множеств равна сумме численностей этих множеств.

Пусть теперь $A \cap B \neq \varnothing$. В этом случае вопрос об определении численности объединения решается несколько сложнее. Поскольку множества A и B пересекаются, то в сумме $mes(A)+mes(B)$ число элементов пересечения $A \cap B$ содержится дважды: один раз в $mes(A)$, а другой — в $mes(B)$. Поэтому, чтобы найти численность объединения $mes(A \cup B)$, нужно из указанной суммы вычесть число элементов, учтённое дважды $mes(A \cap B)$. Итак, можем записать: $mes(A \cup B) = mes(A) + mes(B) - mes(A \cap B)$. Справедливость легко проверить с помощью диаграмм Эйлера–Венна.

Далее определим численность разности множеств A и B. Если $A \cap B = \varnothing$, то $A \setminus B = A$, и поэтому $mes(A \setminus B) = mes(A)$.

Если же $B \subset A$, то $A \cap B = B$, и последнюю формулу можно записать так: $mes(A \setminus B) = mes(A) - mes(B)$.

Выразим теперь численность декартова произведения двух множеств через численность самих множеств. Пусть $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $(b_1, b_2, \ldots, b_k)$, тогда $m(A) = n$, $m(B) = k$. Для определения численности декартова произведения $A \times B$ расположим его элементы в форме таблицы:

(a_1, b_1)	(a_1, b_2)	$\ldots$	(a_1, b_k)
(a_2, b_1)	(a_2, b_2)	$\ldots$	(a_2, b_k)
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
(a_n, b_1)	(a_n, b_2)	$\ldots$	(a_n, b_k)

Таблица состоит из n строк, в каждой из которых k элементов.

Значит, общее число пар равно $n \cdot k$. Следовательно, $mes(A \times B) = mes(A) \cdot mes(B)$.

Можно показать, что последнее равенство распространяется на любое число n конечных множеств, то есть

$$mes(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) = mes(A_1) \cdot mes(A_2) \cdot \ldots \cdot mes(A_n).$$

5. Бинарные отношения

В декартовом произведении множеств A и B содержатся всевозможные пары, где первая компонента принадлежит множеству A, а вторая — множеству B. Иногда целесообразно рассматривать не все, а некоторые пары элементов $A \times B$. В этом случае говорят о бинарном отношении между элементами множеств A и B, или, что то же самое, о соответствии между элементами множеств A и B.

Определение 11. *Бинарным отношением (соответствием) между множествами A и B называется любое подмножество F декартова произведения A на B. F бинарное отношение $\Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow F \subset A \times B$.*

Для бинарного соответствия $P \subset X \times Y$ множество X называют областью отправления, множество Y — областью прибытия, а множество P — графиком соответствия ρ. Если $(x, y) \in P$, то говорят, что при соответствии ρ элементу x соответствует элемент y, и записывают: $x\,\rho\,y$.

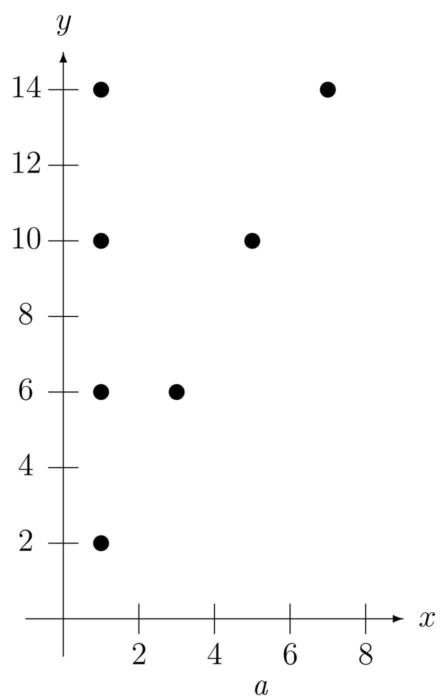
Если соответствие ρ задано между элементами двух числовых множеств, то его график P можно изобразить точками в прямоугольной системе координат.

Пример. Построим график соответствия «делит» между элементами множества $X = \{1, 3, 5, 7\}$ и множества $Y = \{2, 6, 10, 14\}$. Для этого выпишем пары чисел, находящихся в указанном соответствии $P = \{(1{,}2), (1{,}6), (1{,}10), (1{,}14), (3{,}6), (5{,}10), (7{,}14)\}$, и изобразим их точками на плоскости (рис. 6а).

Если хотя бы одно из множеств X или Y бесконечно, то перечислить пары, составляющие график P, невозможно. В таких случаях принадлежность той или иной пары чисел графику P устанавливается с помощью характеристического свойства.

Пример. Рассмотрим соответствие «число x больше числа y» между элементами множеств $X = \{x|x \in Z, -1 \leq x \leq 2\}$ и $Y = \{y|y \in R, -2 \leq y \leq 3\}$. В данном случае множество $X = \{-1, 0, 1, 2\}$ состоит из четырёх элементов, а элементы множества Y сплошь заполняют ось ординат на отрезке $[-2; 3]$.
Если $x = -1$, то $x > y$ при $y \in [-2; -1)$,
если $x = 0$, то $x > y$ при $y \in [-2; 0)$,
если $x = 1$, то $x > y$ при $y \in [-2; 1)$,
если $x = 2$, то $x > y$ при $y \in [-2; 2)$.

График указанного соответствия изображен на рис. 6б.



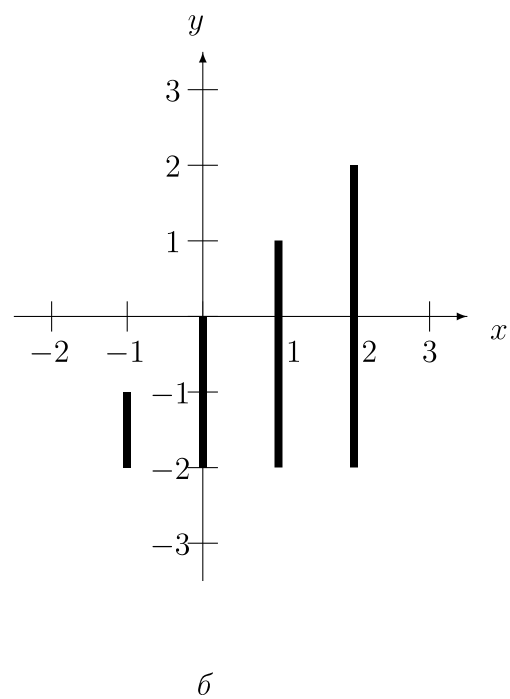


Рис. 6. Примеры графиков соответствий

Соответствия между элементами конечных множеств изображают также при помощи особых чертежей, состоящих из точек и направленных отрезков, идущих из одной точки в другую. Такие чертежи называются *ориентированными графами*. Элементы множеств X и Y изображают точками, а стрелку из точки x в точку y проводят в том и только том случае, если $(x, y) \in P$.

Образом элемента $a \in X$ при соответствии ρ называется элемент $b \in Y$ такой, что $a \, \rho \, b$ истинно. При этом элемент a называется прообразом элемента b.

Полным образом элемента $a \in X$ называется множество всех элементов $y \in Y$, для которых истинно $a \, \rho \, b$. Полный образ элемента a будем обозначать $\rho(a)$.

Полным прообразом элемента $b \in Y$ называется множество всех элементов $x \in X$, для которых истинно $x \, \rho \, b$. Полный прообраз элемента b обозначим $\rho^{-1}(b)$.

Областью определения соответствия ρ называется множество D всех элементов из X, имеющих непустой полный образ.

Множеством (областью) значений соответствия называется множество E всех элементов из Y, имеющих непустой полный прообраз.

Например, на рис. 7а полные образы элементов $\rho(b) = \{1, 2\}$, $\rho(c) = \varnothing$, $\rho(d) = \{1, 2, 3\}$, $\rho(e) = \{3\}$.

На рис. 7б $\rho^{-1}(\text{е}) = \{\text{М, Н}\}$, $\rho^{-1}(\text{и}) = \{\text{Н}\}$, $\rho^{-1}(\text{о}) = \{\text{М, Н, П}\}$, $\rho^{-1}(\text{ю}) = \varnothing$, $\rho^{-1}(\text{я}) = \{\text{Н}\}$.

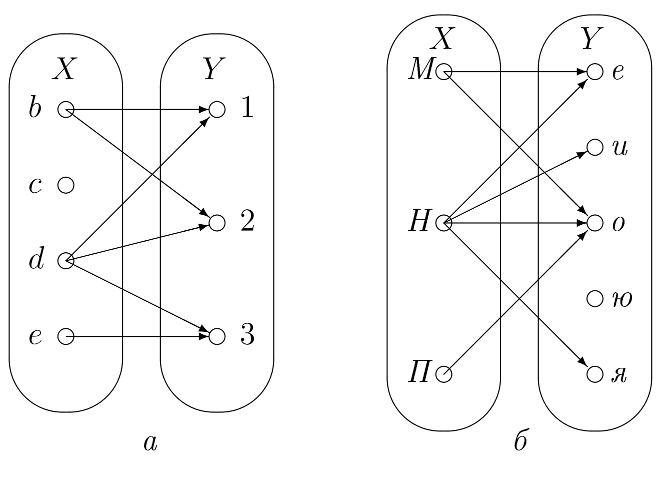


Рис. 7. Ориентированные графы соответствий

Областью определения соответствия, представленного на рис. 7а, является множество $D = \{b, d, e\}$. Очевидно, что

$D \subset X$. На рис. 7б областью определения соответствия является множество $D = \{$М, Н, П$\} = X$.

Способы задания соответствий. Соответствие между элементами множеств X и Y считается заданным, если относительно любого элемента $x \in X$ и любого элемента $y \in Y$ можно сказать истинно $x \, \rho \, y$ или ложно.

Рассмотрим основные способы задания соответствий.

1. **Перечисление пар.** При задании соответствия этим способом перечисляют все пары элементов, принадлежащие графику P. И если упорядоченная пара (a, b), где $a \in X$ и $b \in Y$, принадлежит P, то это означает, что $a \, \rho \, b$ истинно и элементы a и b находятся в соответствии ρ. Если же упорядоченная пара (c, d), где $c \in X$ и $d \in Y$, не принадлежит P, то $c \, \rho \, d$ ложно и элементы c и d не находятся в соответствии ρ.

2. **Табличный способ.** Если множества X и Y конечны, то соответствие между ними может быть задано таблицей. Примером табличного задания соответствия между множеством X (студентов групп) и множеством Y (рабочих дней месяца) является график уборки закреплённой территории. Аналогичные таблицы-графики составляются на предприятиях при двух-, трёхсменной работе. Табличный способ задания соответствий не требует специальной подготовки, его преимуществами перед другими способами являются простота и наглядность, поэтому он широко применяется во всех сферах человеческой деятельности.

3. **Графический способ.** Соответствия между множествами X и Y могут быть заданы при помощи графа или графика.

   Графом заданы соответствия на рис. 7. С помощью графа по стрелкам легко установить, какие элементы соответствуют данному элементу или каким элементам соответствует данный элемент. Недостаток в том, что графы удобны лишь тогда, когда множества X и Y конечны и состоят из небольшого числа элементов.

Если множества X и Y числовые, то соответствие между ними может быть задано с помощью графика в прямоугольной системе координат. Действительно, если M — точка, принадлежащая графику соответствия, то ее абсцисса x и ордината y определяют упорядоченную пару (x, y) такую, что $x\,\rho\,y$ истинно, например рис. 6.

Графиком можно задать соответствие и для случая бесконечных числовых множеств X и Y. Если же множества X и Y не являются числовыми, то соответствия между ними с помощью графика в прямоугольной системе координат не задаются.

4. **Словесный способ.** Часто соответствия между элементами множеств X и Y задаются посредством описания. Формулируется предложение с двумя переменными — двуместный предикат, в котором представляется соответствие между элементами указанных множеств.

   Например: «студент x занимается в кружке y»; «больной x посещает поликлинику y»; «сторона x лежит против угла y».

   В математике многие предложения с упоминанием двух переменных записываются короче. При этом используются как специальные слова: «больше на», «меньше в»; «старше»; «не выше»; «не дешевле» и др., так и специальные символы: $\parallel$ — параллельность; $\perp$ — перпендикулярность; $\geq$ — больше либо равно; $<$ — меньше и др. Обобщением записей: x дешевле y; x не выше y; x старше y; $x \parallel y$ и др. является запись $x\,\rho\,y$.

5. **Аналитический способ.** Соответствие задаётся формулой, выражающей зависимость между элементами множеств X и Y.

Так, формула $y = x^2$ задаёт соответствие между множеством всех действительных чисел R и множеством неотрицательных действительных чисел $R_+ \cup \{0\}$, а формула $y = \ln x$ — между множеством положительных действительных чисел R_+ и множеством всех действительных чисел R. Формула $y = \sin x$ определяет соответствие между множеством всех действительных чисел R и множеством чисел $\{y|y \in R, |y| \leq 1\}$. По каждому из приведённых примеров график соответствия можно изобразить на плоскости в прямоугольной системе координат.

5.1. Отображения

Понятие отображения. Рассматривая общий случай бинарного соответствия между элементами множеств X и Y, мы не требовали, чтобы каждому элементу множества X соответствовал какой-нибудь элемент множества Y и чтобы одному элементу из X соответствовал только один элемент из множества Y.

При представлении соответствия ρ графом из некоторых точек множества X не исходило ни одной стрелки, а из других точек исходило несколько стрелок. Рассмотрим только такие соответствия f между элементами множеств X и Y, при которых каждому элементу множества X соответствует точно один элемент множества Y.

Определение 12. *Бинарное соответствие* $f = (X, Y, F)$ $(F \subset X \times Y)$*, при котором каждому элементу* $x \in X$ *соответствует точно один элемент* $y \in Y$ *, называется отображением множества* X *во множество* Y.

Как следует из определения отображения, его график F содержит столько же упорядоченных пар, сколько элементов содержится во множестве X, и не может содержать двух пар, у которых равны первые компоненты. На графе отображения из каждой точки множества X выходит одна и только одна стрелка.

Виды отображений. Остановимся на рассмотрении трех важных видов отображений.

Определение 13. *Если каждый элемент множества Y является образом не более одного элемента из X, то отображение f называется инъективным (инъекцией), или отображением X в Y.*

Граф инъективного отображения изображён на рис. 8а. Отображение, представленное графом на рис. 8б, не является инъективным, так как элемент $n \in Y$ есть образ двух элементов c и e. При инъективном отображении различным элементам из области определения X соответствуют различные элементы в области значений Y.

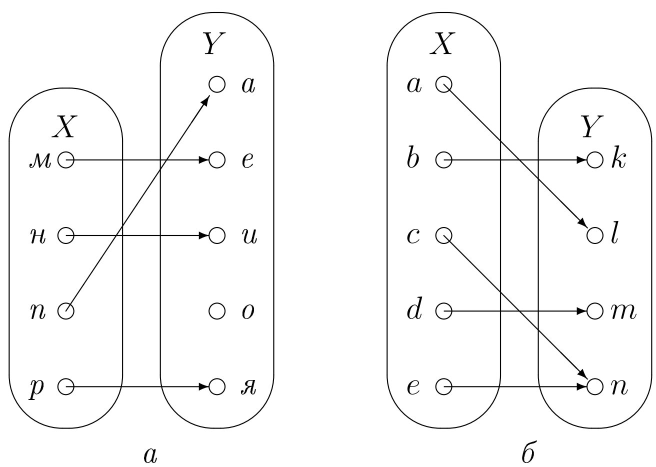


Рис. 8. Виды отображений

Определение 14. *Если каждый элемент множества Y является образом хотя бы одного элемента из X, то отображение называется сюръективным (сюръекцией), или отображением множества X на множество Y.*

Граф сюръективного отображения представлен на рис. 8б, где каждый элемент множества Y соответствует по крайней мере одному элементу из X. Таким образом, множество значений E сюръективного отображения f совпадает с областью прибытия Y, то есть $E = Y$.

Определение 15. *Если каждый элемент множества Y является образом точно одного элемента из X , то отображение f называется биективным (биекцией).*

Иногда биективное отображение называют взаимно-однозначным, или обратимым, отображением X на Y. Биективное отображение является инъективным и сюръективным одновременно. Для его обозначения будем использовать символ $\xleftrightarrow{f}$, $X \xleftrightarrow{f} Y$.

Если f — взаимно-однозначное (биективное) отображение X на Y, то обратное отображение f^{-1} тоже взаимно-однозначно.

Примером взаимно-однозначного отображения является соответствие между сторонами и углами в треугольнике. Каждой стороне соответствует угол, лежащий против неё, и только один. И наоборот, каждому углу в треугольнике соответствует сторона, лежащая против него, и только одна.

Равномощные множества. Выше были рассмотрены отношения между двумя множествами. Понятие биективного (взаимно-однозначного) отображения служит базой для рассмотрения ещё одного очень важного отношения между множествами. Это отношение равномощности.

Определение 16. *Множества X и Y называются равномощными, если существует хотя бы одно биективное отображение $X \xleftrightarrow{f} Y$.*

Равномощные множества будем обозначать символом $\sim$, $X \sim Y$. Обозначая мощность множества X как $m(X)$, для равномощных множеств X и Y запишем $m(X) = m(Y)$. Для конечных множеств мощность означает количество элементов. Поэтому, если множества X и Y конечны, то равномощность означает их равночисленность.

Рассмотрим вопрос о возможности установления биекции между бесконечными множествами.

Определение 17. *Множество X называется счётным, если оно равномощно множеству N натуральных чисел.*

Примерами счётных множеств являются множества N_{2k} — чётных натуральных чисел и N_{2k-1} — нёчетных натуральных чисел. Известно, что $N_{2k} \subset N$, и поэтому кажется, что положительных чётных чисел «меньше», чем натуральных чисел. Однако в области бесконечных множеств меняется привычное отношение целого и части, оказывается, правильная часть может быть равномощна всему множеству.

Легко доказать, что множество Z всех целых чисел счётно, то есть $Z \sim N$, хотя $N \subset Z$. Для доказательства достаточно рассмотреть биективное отображение

$$\begin{array}{rlllllllll} N = & \{1, & 2, & 3, & 4, & 5, & \ldots & ,2n, & 2n+1, & \ldots\} \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \ldots & \updownarrow & \updownarrow & \\ Z = & \{0, & 1, & -1, & 2, & -2, & \ldots, & n, & -n, & \ldots\}, \end{array}$$

из которого следует, что $Z \sim N$, значит, счётность множества Z установлена. Из доказательства последнего факта видно, что установление биективного отображения сводится к указанию способа нумерации элементов множества Z с помощью натуральных чисел.

Вообще, для доказательства счётности множества X достаточно указать способ нумерации его элементов, при котором каждый элемент множества X имел бы точно один натуральный номер и каждое натуральное число служило бы номером точно одного элемента из X.

Докажем теорему, наиболее ярко характеризующую счётные множества.

Теорема 1. *Объединение счётного множества счётных множеств есть множество счётное.*

Доказательство. Пусть дано счётное множество счётных множеств. Тогда сами множества и их элементы можно пронумеровать с помощью натуральных чисел. Пусть

$$
\begin{gathered}
A_1 = \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1m}, \dots\},\\
A_2 = \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, \dots, a_{2m}, \dots\},\\
A_3 = \{a_{31}, a_{32}, a_{33}, \dots, a_{3m}, \dots\},\\
\dots\\
A_n = \{a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, \dots, a_{nm}, \dots\},\\
\dots
\end{gathered}
$$

Расположим элементы этих множеств в форме таблицы:

$$
\begin{array}{cccccccccc}
a_{11} & \rightarrow & a_{12} & & a_{13} & \rightarrow & a_{14} & \dots & a_{1m} & \dots\\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & & \\
a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & a_{24} & \dots & a_{2m} & \dots\\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & & & \\
a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & a_{34} & \dots & a_{3m} & \dots\\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & & \\
a_{41} & & a_{42} & & a_{43} & & a_{44} & \dots & a_{4m} & \dots\\
\downarrow & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
a_{n1} & & a_{n2} & & a_{n3} & & a_{n4} & \dots & a_{nm} & \dots\\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}
$$

Объединение множеств $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ состоит из неповторяющихся элементов таблицы. Таких элементов в ней бесконечно много. Будем нумеровать элементы, двигаясь по направлениям, указанным стрелками. Так, пронумеруем все элементы объединения множеств. При этом каждому элементу объединения соответствует точно одно натуральное число, а каждому натуральному числу соответствует точно один элемент множества $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$. Это означает, что указанное объединение множеств есть множество счётное. Теорема доказана.

Из теоремы вытекает ряд следствий.

Следствие 1. Объединение конечного числа счётных множеств есть множество счётное.

Следствие 2. Объединение счётного множества попарно не пересекающихся конечных множеств есть множество счётное.

Следствие 3. Объединение конечного и счётного множеств есть множество счётное.

Теорема 2. *Множество Q всех рациональных чисел счётно.*

Для доказательства теоремы 2 можно использовать способ, примененный при доказательстве теоремы 1.

Не следует думать, что все бесконечные множества счётны. Мощность счётного множества является наименьшей из мощностей бесконечных множеств. Множество R всех действительных чисел не является счётным. Мощность множества R называется *континуумом*.

В 1878 г. Георг Кантор выдвинул гипотезу, согласно которой не существует множества, мощность которого была бы меньше континуума, но больше мощности счётного множества (гипотеза континуума). Эта гипотеза долгое время стояла в списке проблем Давида Гильберта под номером 1.

В 1940 г. австрийский математик и логик Курт Гёдель доказал невозможность опровергнуть гипотезу континуума, а в 1963 г. профессор Стэнфордского университета (США) Поль Коэн показал невыводимость гипотезы континуума из исходных предложений теории множеств. Это означает, что на базе предложений, принятых в теории множеств за исходные, гипотезу континуума нельзя ни доказать, ни опровергнуть.

5.2. Отношения на множестве и их свойства

Кроме бинарных соответствий ρ между элементами множеств X и Y, приходится рассматривать соответствия между элементами одного множества X. Такие соответствия называют бинарными отношениями между элементами множества X, или бинарными отношениями на множестве X.

Если X — множество жителей данного города, то соответствия: «человек x живет в одном доме с человеком y»; «человек x — родственник человека y»; «человек x старше человека y» — являются отношениями между людьми из одного множества. Бинарное отношение на множестве X считается заданным, если касаемо любых двух элементов этого множества x и y можно сказать, находятся они в этом отношении или нет. Другими словами, бинарное отношение ρ на множестве X задано, если указано множество P, являющееся подмножеством декартова произведения $X \times X = X^2$.

Определение 18. *Бинарным отношением ρ на множестве X называется пара множеств (X, P), где $P \subset X \times X$.*

В символах это определение можно записать так: $\rho = (X, P)$, $P \subset X \times X$.

Множество X называют *областью задания* отношения ρ, а множество P — графиком отношения ρ.

Граф отношения отличается от графа соответствия. При построении графа отношения точками на плоскости отмечаются элементы самого множества X, а стрелками соединяются элементы, находящиеся в данном отношении. При этом точки, изображающие элементы множества X, называются вершинами графа.

Примеры

1. На множестве $X = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ рассмотрим бинарное отношение «x делитель y». График этого отношения — мно-

жество упорядоченных пар: $P = \{(2{,}2),\ (2{,}4),\ (2{,}6),\ (2{,}8),\ (2{,}10),\ (4{,}4),\ (4{,}8),\ (6{,}6),\ (8{,}8),\ (10{,}10)\}$. Изобразим его на координатной плоскости (рис. 9а). Далее построим граф этого отношения. Элементы множества X изобразим точками на плоскости, а затем проведем стрелки от x к y для всех пар (x, y) таких, что x является делителем y. Поскольку каждое число является делителем самого себя, то граф данного отношения в каждой вершине имеет стрелку, начало и конец которой находятся в точке x. Такую стрелку на графе называют петлей (рис. 9б).

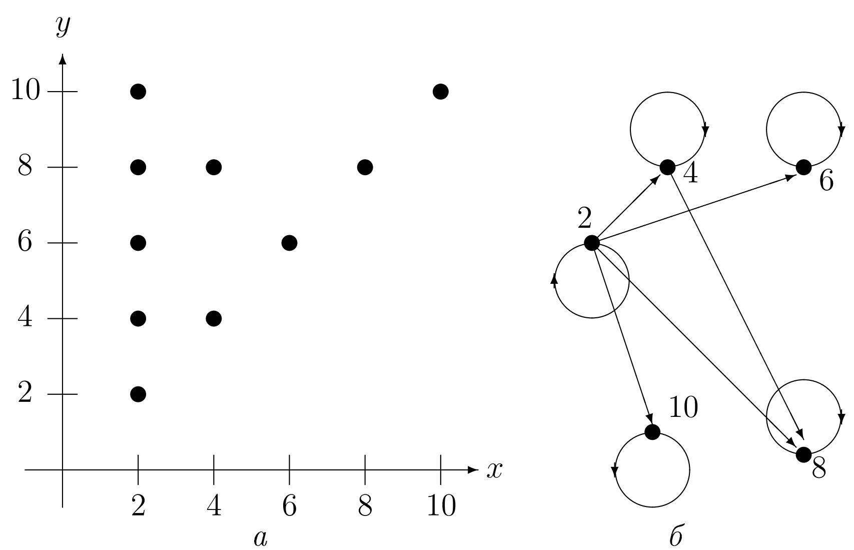


Рис. 9. Пример бинарного отношения «x делитель y»

2. Пусть $X = R$ — множество всех действительных чисел. На этом множестве рассмотрим отношение «$x < y$». Поскольку множество R бесконечно, то нет возможности выписать все элементы, принадлежащие графику этого отношения. По этой же причине невозможно построить его граф.

   График этого отношения представляет собой полуплоскость, выше биссектрисы первого и третьего координатных углов.

3. Пусть X — множество всех прямых заданной плоскости. Рассмотрим на этом множестве отношение «$x \perp y$». В этом слу-

чае нельзя построить ни граф, ни график отношения из-за того, что множество X бесконечно и не является числовым.

Рассмотрим основные свойства бинарных отношений.

Определение 19. *Отношение ρ на множестве X называется рефлексивным, если каждый элемент множества X находится в этом отношении с самим собой.*

Символьная запись определения 19:

ρ рефлексивно на $X \Leftrightarrow (\forall x \in X)\,(x\rho x)$.

Граф рефлексивного отношения в каждой своей вершине имеет петлю. Справедливо и обратное утверждение. Если граф отношения ρ в каждой своей вершине имеет петлю, то это отношение рефлексивно.

Например, свойством рефлексивности обладают отношения: «равно», «делится», «не больше», «не меньше» — на множестве целых чисел; параллельности — на множестве прямых (плоскостей); «быть родственником», «проживать в одном доме» — между людьми, и др.

Определение 20. *Отношение ρ на множестве X называется антирефлексивным, если ни один элемент множества X не находится в этом отношении с самим собой.*

Символьная запись: ρ антирефлексивно на $X \Leftrightarrow (\forall x \in X)(\overline{x\rho x})$.

Согласно определению граф антирефлексивного отношения ни в одной своей вершине не имеет петли. Справедливо и обратное утверждение. Если граф отношения ρ ни в одной своей вершине не имеет петли, то это отношение антирефлексивно.

Примерами антирефлексивных отношений являются отношения: «меньше», «больше» — на множестве чисел; «быть перпендикулярными» — на множестве прямых; «выше», «ниже», «старше», «моложе» — между людьми.

Если отношение не обладает ни одним из вышеуказанных свойств, то есть не является ни рефлексивным, ни антирефлексивным, то его граф в одних своих вершинах имеет петли, а в других нет.

Определение 21. *Отношение ρ на множестве X называется симметричным, если для любых двух элементов x, y множества X из того, что x находится в отношении ρ с y, следует, что y находится в отношении ρ с x.*

Или: ρ симметрично на $X \Leftrightarrow (\forall x, y \in X)(x\rho y \Rightarrow (y\rho x))$.

Граф симметричного отношения обладает следующей характерной особенностью: любые две его вершины либо не связаны стрелкой, либо связаны двумя противоположно направленными стрелками.

Если X — числовое множество, то при построении графика симметричного отношения на координатной плоскости получается фигура, симметричная относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов. Симметричными являются отношения пересечения, параллельности, перпендикулярности прямых и плоскостей, равенства чисел и отрезков и др.

Определение 22. *Отношение ρ на множестве X называется асимметричным, если для любых двух элементов x, y множества X из того, что x находится в отношении ρ с y, следует, что y не находится в отношении ρ с x.*

Символьно: ρ асимметрично $X \Leftrightarrow (\forall x, y \in X)(x\rho y \Rightarrow (\overline{y\rho x}))$.

Особенностью графа асимметричного отношения является то, что любые две его вершины связаны не более чем одной стрелкой, и ни в одной из вершин нет петли. Действительно, если предположить, что в какой-то вершине a асимметричного графа есть петля, то, пользуясь определением, получим, что высказывание $a\,\rho\,a$ истинно и ложно одновременно, а по закону противоречия этого не может быть. Таким образом, из асимметричности отношения автоматически вытекает его антирефлексивность. Примерами асимметричных отношений являются отношения: «меньше», «больше» — на множестве чисел, «длиннее», «короче» — на множестве отрезков, «дешевле», «дороже» — на множестве товаров, «быть отцом», «быть матерью» — на множестве людей.

Определение 23. *Отношение на множестве X называется антисимметричным, если для любых двух элементов x, y множества X из того, что x находится в отношении ρ с элементом y и y находится в отношении ρ с элементом x, следует, что $x = y$.*

Или:

$$(\rho \text{ антисимметрично на } X) \Leftrightarrow (\forall x, y \in X)(x\rho y \wedge y\rho x \Rightarrow x = y).$$

Характерной особенностью графа антисимметричного отношения является то, что любые две его вершины связаны не более чем одной стрелкой, а в вершинах графа допускается петля.

Рассмотрим отношение «любит» на множестве $X = \{$Николай, Алёна, Игорь$\}$, где Николай любит только Алёну, Алёна любит только Игоря, Игорь любит только себя. Указанное отношение является антисимметричным. В качестве примера предлагается построить граф этого отношения.

Антисимметричными являются отношения: «не меньше», «не больше» — на множестве чисел; «не длиннее», «не короче» — на множестве отрезков, «не дороже», «не дешевле» — на множестве товаров.

Если X — числовое множество, то при построении графика асимметричного (антисимметричного) отношения на координатной плоскости получается фигура, все точки которой расположены в одной полуплоскости относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

Кроме симметричных, асимметричных и антисимметричных, встречаются бинарные отношения, которые не обладают ни одним из названных свойств. Примером такого отношения является отношение «быть сестрой» на множестве детей в семье $X = \{$Катя, Олег, Таня$\}$.

Определение 24. *Отношение ρ на множестве X называется транзитивным, если для любых трёх элементов x, y, z множества X из того, что x находится в отношении ρ с элементом y и y находится в отношении ρ с элементом z, следует, что x находится в отношении ρ с элементом z.*

Или:

$$(\rho \text{ транзитивно на } X) \Leftrightarrow (\forall x, y, z \in X)(x\rho y \wedge y\rho z \Rightarrow x\rho z).$$

Граф транзитивного отношения вместе с каждой парой стрелок от x к y и от y к z обязательно содержит стрелку от x к z . Справедливо и обратное утверждение.

Пример. На множестве $X = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ задано отношение ρ перечислением пар: $P = \{$(1,1), (1,3), (3,1), (3,3), (5,5), (5,9), (9,5), (9,9), (7,7)$\}$. Обладает ли отношение ρ свойством транзитивности?

Рассматривая пары, принадлежащие графику P, убеждаемся в выполнении условия транзитивности. Например:

$$\begin{gathered}(1,3) \wedge (3,1) \Rightarrow (1,1),\\ (3,1) \wedge (1,3) \Rightarrow (3,3),\\ (5,9) \wedge (9,5) \Rightarrow (5,5),\\ (9,5) \wedge (5,9) \Rightarrow (9,9).\end{gathered}$$

Примерами транзитивных отношений являются также отношения «больше», «меньше», «равно», «не старше», «не дешевле» и другие.

Определение 25. *Отношение ρ на множестве X называется антитранзитивным, если для любых трёх элементов x, y,*

z множества X из того, что x находится в отношении ρ с элементом y и y находится в отношении ρ с элементом z, следует, что x не находится в отношении ρ с элементом z.

Или:

$$(\rho \text{ антитранзитивно на } X)(\forall x, y, z \in X)(x\rho y \wedge y\rho z \Rightarrow \overline{x\rho z}).$$

Граф антитранзитивного отношения, имея стрелки от x к y и от y к z, не имеет стрелки от x к z. Примером антитранзитивного отношения является отношение перпендикулярности на множестве прямых. Если $a \perp b$ и $b \perp c$, то прямые a и c не являются перпендикулярными (они параллельны).

Определение 26. *Отношение ρ на множестве X называется связным, если для любых двух элементов x, y множества X из того, что $x \neq y$, следует, что x находится в отношении ρ с элементом y или y находится в отношении ρ с элементом x.*

Символьная запись:

$$(\rho \text{ связно на } X) \Leftrightarrow (\forall x, y \in X)(x \neq y \Rightarrow x\,\rho\,y \vee y\rho x).$$

Примерами связных отношений являются отношения «больше», «меньше» на множестве действительных чисел.

Определение 27. *Бинарное отношение ρ на множестве X называется отношением эквивалентности, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.*

Примеры отношений эквивалентности.

1. Отношение «быть однокурсником» на множестве студентов данного университета.
2. Отношение «иметь одинаковые остатки при делении на 5» на множестве целых неотрицательных чисел.
3. Отношение равночисленности на произвольной системе конечных множеств.

4. Отношение «проживать в одном доме» на множестве жителей данного города.

Все эти примеры иллюстрируют основное свойство любого отношения эквивалентности: разбивать соответствующее множество на непересекающиеся подмножества, классы.

5.3. Функции и операции

Определение 28. *Функцией называется бинарное отношение f, если из xfy и xfz следует, что $y = z$.*

Если f — функция, то вместо xfy пишут $y = f(x)$ и говорят, что y — значение функции, соответствующее аргументу x, или y — образ элемента x при отображении f. При этом x называется прообразом элемента y.

Определение 29. *Бинарное отношение f называется n-местной функцией (функциональным отношением, однозначным отношением), если $f : X^n \to Y$, где X^n — декартова степень множества $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.*

В этом случае записывают $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и y — значение функции, соответствующее значениям аргументов $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Из определения функции вытекает, что существует не более одного элемента $y \in Y$ — такого, что $y = f(x)$, т. е. элемент y определяется однозначно.

Функция f называется *инъективной*, если для любых x_1, x_2, y из $y = f(x_1)$ и $y = f(x_2)$ следует, что $x_1 = x_2$.

Функция f называется *сюръективной*, если для любого элемента $y \in Y$ существует элемент $x \in X$ — такой, что $y = f(x)$.

Функция f называется *биективной*, если она одновременно и сюръективна, и инъективна. В этом случае существует взаимно-однозначное соответствие между множествами X и Y.

Пусть задана функция $f: X \to Y$ и E — множество её значений. Совокупность всевозможных упорядоченных пар $(y, f^{-1}(y))$, $y \in E$ образует функцию, которая называется *обратной функцией* для функции f и обозначается f^{-1}.

Для того чтобы f^{-1} являлась функцией, достаточно, чтобы f была инъективной.

6. Логика высказываний

Логика — наука, изучающая понятия с формальной точки зрения: методы их определения и преобразования, суждения о них и структуры доказательных рассуждений. Исследования в логике тесно связаны с изучением «высказываний» [1, 2, 4–7, 9, 11, 13–18]. С помощью высказываний устанавливаются свойства, взаимосвязи между объектами. Высказывание истинно, если оно адекватно отображает эту связь, в противоположном случае оно ложно.

Определение 30. ***Высказывание*** *— повествовательное предложение (утверждение об объектах), имеющее однозначный, точно определенный смысл, о котором можно говорить: оно истинно или ложно.*

Это определение не математическое. С чисто математической точки зрения понятия высказывания и объекта являются исходными.

Определение 31. *Высказывание называется* ***простым*** *(элементарным,атомарным), если никакая его часть не является высказыванием.*

Сложные высказывания образуют из простых применением трех видов операций.

- **Логические связки** применяются к высказываниям, в результате образуют новое высказывание.
  Например: «не», «или», «не только ..., но и ...» и др.

- **Модальности** применяются к высказываниям и изменяют наше отношение к ним.
  Например: «по сведениям Западно-Сибирского гидрометцентра ...», «Маша сказала, что ...» и др.

- **Кванторные конструкции** применяются к совокупности однородных (отличающихся лишь значениями некоторых параметров) высказываний либо выражений и дают единое высказывание либо выражение, которые не зависят от упомянутых выше параметров.
  Например: «большинство...», «все...», «найдется...» и др.

Помимо высказываний, в естественном языке имеется множество предложений такой же грамматической структуры, которые принципиально не могут иметь четкой и однозначной интерпретации — истина это или ложь. Их мы называют **квази-высказываниями**.

- Единственными логическими значениями высказываний являются **истина** и **ложь**, обозначаемые 1 и 0 либо T и $\perp$ соответственно (TRUE и FALSE; ДА и НЕТ).

- Логическое значение сложного высказывания зависит лишь от логических значений его компонентов, а не от его смысла.

7. Логические связки

Для обозначения высказываний обычно используются прописные или строчные буквы латинского алфавита: A, B, C, X, Y, p, q, r, s, t и др. Составные высказывания получаются из простых при помощи так называемых логических связок (операций):

НЕ (отрицание), И (конъюнкция), ИЛИ (дизъюнкция), СЛЕДУЕТ (импликация), ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА, КОГДА (эквивалентность).

7.1. Связка НЕ

Утверждение «не А» символически записывается $\overline{A}$. Знак над буквой называется **отрицанием**. Эта же связка используется при переводе выражений «A неверно», «A ложно», «A не может быть» и т. п. $\overline{A}$ истинно, когда ложно A, и ложно, когда истинно A.

7.2. Связка И

Высказывание «A и B» символически записывается $A \wedge B$. Союзу И соответствует логическая связка $\wedge$. Символ $\wedge$ называется **конъюнкцией**. Эта связка применяется при переводе на формальный язык утверждений вида «A и B», «A, но и B также», «A вместе с B», «A, несмотря на B», «не только A, но и B», «как A, так и B», «A, хотя и B» и т. п. Все они переводятся одинаково: $A \wedge B$.

Утверждение $A \wedge B$ истинно в том и только том случае, когда истинны как A, так и B, и ложно во всех остальных случаях.

7.3. Связка ИЛИ

Высказывание «A или B» символически записывается $A \vee B$. Знак $\vee$ называется **дизъюнкцией**. Эта же связка применяется при переводе утверждений: «A или B, или оба вместе», «либо A, либо B», «A и (или) B» и т. п.

Утверждение $A \vee B$ считается истинным, если хотя бы одно из двух составляющих утверждений истинно, и ложным лишь тогда, когда они оба ложны.

7.4. Связка СЛЕДУЕТ

«Из A следует B» символически записывается: $A \Rightarrow B$. Знак $\Rightarrow$ называется **импликацией**. Другими вариантами содержательных утверждений, так же точно переводимых, служат: «A — достаточное условие для B», «B — необходимое условие для A», «A, только если B», «B, если A», «в случае, если A выполнено, то B», «A есть B».

Высказывание A называется условием (или посылкой), B — заключением (следствием).

Высказывание $A \Rightarrow B$ ложно тогда и только тогда, когда из истины следует ложь.

7.5. Связка ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА

«A тогда и только тогда, когда B» символически записывается $A \Leftrightarrow B$. Знак $\Leftrightarrow$ называется **эквивалентностью**. С использованием этой же связки записывают предложения: «A эквивалентно B», «A — необходимое и достаточное условие для B», «если A, то и B, и наоборот», и т. п.

Часто встречающееся выражение «тогда и только тогда, когда» будем сокращать ттт.

$A \Leftrightarrow B$ истинно ттт истинностные значения A и B совпадают, и ложно ттт их истинностные значения различны.

7.6. Таблицы истинности

Способы вычисления истинностных значений высказываний $\overline{A}$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \Rightarrow B$, $A \Leftrightarrow B$ можно резюмировать следующими таблицами:

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

8. Кванторные конструкции

Квантор — общее название для логических операций, ограничивающих область истинности какого-либо предиката и создающих высказывание.

Символ $\forall$ для квантора всеобщности введён Герхардом Генценом[1] в 1935 году по аналогии с символом квантора существования $\exists$, введённым Джузеппе Пеано[2] в 1897 году.

8.1. ДЛЯ ВСЕХ

Утверждение «для всех x верно $A(x)$» символически записывается $\forall x A(x)$. Символ $\forall$ называется **квантором всеобщности** [1, 2, 7, 9, 13, 18]. Эта же связка используется при переводе утверждений: «A верно при любом значении x», «для произвольного x имеет место $A(x)$», «каково бы ни было x, справедливо $A(x)$» и т. п.

Утверждение $\forall x A(x)$ истинно ттт $A(x)$ истинно при любом фиксированном значении x.

Утверждение $\forall x A(x)$ ложно ттт имеется хотя бы одно конкретное значение x, — такое, что $A(x)$ ложно.

Заметим, что таблицы истинности для связок исчисления высказываний можно применять чисто механически, в частности, вычислять логические значения формул на ЭВМ. Определение

[1] Герхард Карл Эрих Генцен — немецкий математик и логик, 24 ноября 1909 – 4 августа 1945

[2] Джузеппе Пеано — 27 августа 1858 – 20 апреля 1932 — итальянский математик

же истинностного значения формулы $\forall x A(x)$ не всегда сводится к простому вычислению. Например, при данных конкретных натуральных x, y, z, n утверждение $x^{n+2} + y^{n+2} \neq z^{n+2}$ можно проверить простым вычислением, а проблема, верно или неверно на множестве N утверждение $\forall x\, \forall y\, \forall z\, \forall n(x^{n+2} + y^{n+2} \neq z^{n+2})$. Эта проблема известна под названием великой теоремы Ферма[3]. На обычном математическом языке она формулируется следующим образом: уравнение $x^n + y^n = z^n$ при $n > 2$ не имеет решений в положительных целых числах.

8.2. СУЩЕСТВУЕТ

Утверждение «существует такое x, что $A(x)$» записывается на языке математики как $\exists x A(x)$. Знак $\exists$ называется **квантором существования** [1, 2, 7, 9, 13, 18]. Эта же запись применяется при переводе утверждений: «$A(x)$ верно при некоторых x», «$A(x)$ иногда верно», «есть такое x, при котором $A(x)$», «можно найти такое x, при котором $A(x)$» и т. п.

Высказывание $\exists x A(x)$ истинно, если в нашем универсе найдется хотя бы одно значение c, при котором $A(c)$ истинно. $\exists x A(x)$ ложно, если при любом значении c ложно $A(c)$. Нахождение истинностного значения $\exists x A(x)$ также может составлять проблему. Например, натуральное число n называется совершенным, если сумма его делителей (исключая само n) равна n. Например: 6 — совершенное число, т. к. $6 = 1+2+3$; 28 также совершенное число, т. к. $28 = 1+2+4+7+14$. Ясно, что при данном n проверка условия «n — совершенное число» является чисто механическим процессом; ее можно поручить компьютеру. Но проблема «существует ли нечетное совершенное число?» стоит уже более 2000 лет, и пока нет способа ее решения.

Заметим, что утверждение $\exists x A(x)$ не отрицает того, что $\forall x A(x)$.

[3] В общем виде теорема была сформулирована Пьером Ферма в 1637 году на полях «Арифметики» Диофанта. Доказана в 1994 году Эндрю Уайлсом с коллегами (доказательство опубликовано в 1995 году).

В жизни же обычно словом «некоторые» подчеркивают смысл «не все». Итак, кванторы $\forall$ и $\exists$ всегда употребляются вместе с переменной x и заставляют ее «пробегать» весь универс.

Различные обозначения логических связок и кванторов

Конъюнкция	$A \wedge B$	$A \& B$	$A \cdot B$			$A\, and\, B$
Дизъюнкция	$A \vee B$		$A + B$			$A\, or\, B$
Импликация	$A \Rightarrow B$	$A \supset B$	$A \to B$			$A\, impl\, B$
Эквивалентность	$A \Leftrightarrow B$	$A \equiv B$	$A \leftrightarrow B$	$A = B$	$A \sim B$	$A\, eq\, B$
Отрицание	$\overline{A}$		$-A$	$\neg A$	$\sim A$	$not\, A$
Всеобщность	$\forall x A(x)$	$(x)A$	$\Pi_x A$	$\wedge_x A$	$(\underline{A}x)A$	
Существование	$\exists x A(x)$	$(Ex)A$	$\Sigma_x A$	$\vee_x A$	$(\underline{E}x)A$	

9. Предикаты и элементарные формулы

Пусть имеется совокупность некоторых объектов (предметов). Чтобы образовать высказывание из предметов, нужно соединить их **отношением**; n-местное отношение — это операция, сопоставляющая n предметам высказывание.

В логике для единообразия будем пользоваться записью $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, чтобы обозначить высказывание, образованное применением n-местного отношения к предметам $t_1, t_2, \ldots, t_n$.

Символ P, обозначающий отношение, называется предикатом [1, 2, 6, 7, 9, 11]. «Предикат» и «отношение» соотносятся как имя и предмет, им обозначаемый. Но в математике эти два понятия употребляются часто как синонимы.

Элементарные формулы имеют вид: $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, где P — n-местный предикат, $t_1, t_2, \ldots, t_n$ — термы (аргументы). В обычной математике элементарные формулы называются просто формулами. Сложные формулы строятся из элементарных. Задавая язык конкретной математической теории, непосредственно определяют именно элементарные формулы и их смысл. Для того чтобы задать элементарные формулы, необходимо определить предикаты и термы. А чтобы задать термы, нужно определить сорта объектов, константы и операции. В совокупности предикаты, сорта, константы, операции составляют словарь (сигнатуру) теории как способ записи высказываний.

Логика предикатов — новая логическая система, являющаяся развитием логики высказываний. Предикат — это то, что высказывается (утверждается или отрицается) в суждении об объекте, предмете.

Логические формулы. Выражения, с помощью которых записываются высказывания в формальном языке, называются логическими формулами, или просто формулами. Обычные математические формулы являются простейшим случаем логических (так называемые элементарные формулы).

С формальной точки зрения предикаты (отношения) можно рассматривать как функции, сопоставляющие своим аргументам истинностные значения, т. е. функции, принимающие всего два значения: **истина** и **ложь**.

Функция, сопоставленная предикату «$<$», «перерабатывает» пару чисел x, y в 1, если $x < y$, и в 0, если $x \geq y$. Таким образом, принимается следующая гипотеза.

- Как только будет задана интерпретация и зафиксированы значения всех встречающихся в элементарной формуле переменных, становится известным и логическое значение элементарной формулы.

Предикат называется разрешимым, если существуют такие кортежи, компоненты которых обращают предикат в истинное высказывание.

Если предикат при подстановке **любых** конкретных элементов из соответствующих множеств обращается в истинное высказывание, то он называется тождественно **истинным**.

Если предикат при подстановке **любых** конкретных элементов из соответствующих множеств обращается в ложное высказывание, то он называется тождественно **ложным**.

К предикатам, определенным на одном и том же множестве, можно применять операции алгебры высказываний: конъюнкцию, дизъюнкцию, импликацию, эквивалентность, отрицание — и получать новые предикаты.

Конечную последовательность букв, знаков операций и скобок, выражающую логическую структуру высказывания, называют **формулой логики высказываний**. Дадим строгое определение формулы логики высказываний.

1. Символы логических констант 1 и 0 являются формулами.
2. Каждая логическая переменная A, B, C, D,... является формулой.
3. Если A и B — формулы, то $\overline{A}$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \Rightarrow B$, $A \Leftrightarrow B$ — формулы.
4. Других формул в логике высказываний нет.

Формулы, указанные в пунктах 1 и 2, называются элементарными формулами. Скобки в формуле указывают порядок выполнения операций (как в алгебре). Для уменьшения количества скобок и сокращения записи принят следующий порядок выполнения операций: 1) отрицание; 2) конъюнкция; 3) дизъюнкция; 4) импликация; 5) эквивалентность.

Каждая формула задает логическую функцию — функцию от логических переменных, которая сама может принимать только два логических значения. Логические функции могут быть заданы табличным способом или аналитически — в виде соответствующих формул.

Если формула не содержит кванторов и переменных, то ее значение полностью определяется конечным набором значений элементарных формул, из которых она построена. Если таких строительных блоков n, то достаточно перебрать 2^n их значений, чтобы выяснить характер зависимости значения формулы от значений ее компонентов. Систематический перебор всех вариантов значений элементарных блоков и вычисление для них значений формулы и дает таблицу истинности.

В качестве примера построим таблицу истинности для формулы $(A \Rightarrow B \vee C) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$.

A	B	C	$B \vee C$	$A \Rightarrow B \vee C$	$A \Rightarrow B$	Формула
0	0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	1
1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

Здесь три логических переменных: A, B, C, следовательно, имеется 2^3 различных комбинаций их значений, размещенных в трёх первых столбцах. Остальные столбцы заполняются согласно таблице истинности для соответствующих высказываний.

Перебрав восемь возможных значений переменных, мы отыскали то единственное, при котором формула ложна. Если бы такового не оказалось, то формула могла бы считаться логически истинной и применяться невзирая на интерпретацию, а в обычной математике вообще безусловно. Поэтому в логике интересны формулы, тождественно истинные при любой интерпретации, им дали название **тавтологии**. Особое место среди тавтологий занимают эквивалентности — тавтологии вида $A \Leftrightarrow B$. Установленная эквивалентность дает возможность повсюду заменять выражения A и B друг на друга.

Определение 32. *Замкнутые формулы, не содержащие кванторов, называются* ***пропозициональными****. Подъязык логики предикатов, состоящий из пропозициональных формул, на-*

зывается пропозициональным языком или языком логики высказываний.

Рассмотренная выше формула $(A \Rightarrow B \vee C) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ является пропозициональной.

Оценивание пропозициональной формулы — это нахождение функции, ставящей в соответствие всем ее различным элементарным подформулам **истину** либо **ложь**. Таблица истинности — это функция, которая сопоставляет каждому возможному оцениванию значение формулы при этом оценивании. Поскольку элементарных подформул у формулы конечное число и каждая из них может принимать лишь два значения, то составление таблицы истинности — конечная процедура (см. пример, рассмотренный выше).

Пропозициональная формула является **тавтологией** тогда и только тогда, когда ее таблица истинности является функцией, тождественно равной истине, т. е. 1. Она является **противоречием**, если таблица тождественно равна лжи, т. е. 0.

Тавтологии и противоречия важны для логики, потому что они не зависят от конкретной формализации предметной области. Далее, применение тавтологий дает общие средства вывода следствий и преобразования формул.

10. Алгебра логики

Алгебра логики как раздел математической логики изучает строение сложных логических высказываний (логических формул) и способы установления их истинности с помощью алгебраических методов [1–3, 5–7, 10, 11, 13]. Основные объекты, изучаемые в этом разделе, — формулы алгебры логики, состоящие из букв, знаков логических операций и скобок.

Алгебра логики — алгебра, образованная множеством $B = \{0, 1\}$ вместе со всеми возможными операциями на нем. В математической логике, как и в алгебре, операции подчиняются определенным законам, с помощью которых можно упрощать составные высказывания. Имеют место следующие формулы .

1. Идемпотентность дизъюнкции и конъюнкции: $x \vee x \Leftrightarrow x$, $x \wedge x \Leftrightarrow x$.
2. Коммутативность дизъюнкции и конъюнкции: $x \vee y \Leftrightarrow y \vee x$, $x \wedge y \Leftrightarrow y \wedge x$.
3. Ассоциативность дизъюнкции и конъюнкции: $x \vee (y \vee z) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x \vee y) \vee z$, $x \wedge (y \wedge z) \Leftrightarrow (x \wedge y) \wedge z$.
4. Дистрибутивность операций дизъюнкции и конъюнкции относительно друг друга: $x \vee (y \wedge z) \Leftrightarrow (x \vee y) \wedge (x \vee z)$, $x \wedge (y \vee z) \Leftrightarrow (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.
5. Двойное отрицание: $\overline{\overline{x}} \Leftrightarrow x$.
6. Законы де Моргана[4]: $\overline{x} \vee \overline{y} \Leftrightarrow \overline{x \wedge y}$, $\overline{x} \wedge \overline{y} \Leftrightarrow \overline{x \vee y}$.
7. Склеивание: $(x \vee y) \wedge (x \vee \overline{y}) \Leftrightarrow x$, $(x \wedge y) \vee (x \wedge \overline{y}) \Leftrightarrow x$.
8. Поглощение: $x \vee (x \wedge y) \Leftrightarrow x$, $x \wedge (x \vee y) \Leftrightarrow x$.
9. Действия с логическими константами 0 и 1: $x \vee 0 \Leftrightarrow x$, $x \wedge 0 \Leftrightarrow 0$, $x \vee 1 \Leftrightarrow 1$, $x \wedge 1 \Leftrightarrow x$, $x \wedge \overline{x} \Leftrightarrow 0$, $\overline{1} \Leftrightarrow 0$, $\overline{0} \Leftrightarrow 1$.
10. Закон исключения третьего: $x \vee \overline{x} \Leftrightarrow 1$.
11. Тождество: $x \Leftrightarrow x$.
12. Отрицание противоречия: $\overline{x \wedge \overline{x}} \Leftrightarrow 1$.
13. Контрапозиция: $(x \Rightarrow y) \Leftrightarrow (\overline{y} \Rightarrow \overline{x})$.
14. Цепное заключение: $((x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow z)) \Rightarrow (x \Rightarrow z)$.
15. Противоположность: $(y \Rightarrow x) \Leftrightarrow (\overline{x} \Rightarrow \overline{y})$.

[4] Огастес (Август) де Морган (англ. Augustus de Morgan, 27 июня 1806, Мадурай, Индия — 8 марта 1871, Лондон) — шотландский математик и логик, профессор математики в Университетском колледже Лондона

16. Модус поненс (*modus ponens* — правило вывода):
   $(x \wedge (x \Rightarrow y)) \Rightarrow y \Leftrightarrow 1.$

Все вышеописанные законы проверяются с помощью таблиц истинности. При исследовании высказываний на эквивалентность (равносильность) логическую связку $\Leftrightarrow$ можно заменять обычным знаком равенства $=$.

Некоторые эквивалентные формулы с кванторами.

1. Законы де Моргана:
   $\overline{\forall\, x \in M,\ P(x)} \Leftrightarrow \exists\, x \in M,\ \overline{P(x)};$
   $\overline{\exists\, x \in M,\ P(x)} \Leftrightarrow \forall\, x \in M,\ \overline{P(x)}.$

Квантор всеобщности является обобщённым аналогом конъюнкции, а квантор существования — обобщённым аналогом дизъюнкции на любое (не обязательно конечное) множество. Действительно, пусть $P(x)$ — предложение с переменной x, определенное на множестве $M = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Тогда справедливы утверждения:

2. $\forall\, x \in M,\ P(x) \Leftrightarrow P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \ldots \wedge P(a_n);$
   $\exists\, x \in M,\ P(x) \Leftrightarrow P(a_1) \vee P(a_2) \vee \ldots \vee P(a_n).$

Любую логическую функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можно задать таблицей истинности, в левой части которой выписаны все возможные наборы значений ее аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а правая часть представляет собой столбец значений функций, соответствующих этим наборам. Набор значений переменных, на котором функция принимает значение $f = 1$, называется единичным набором функции f; множество всех единичных наборов — единичным множеством функции f. Аналогично: набор значений, на котором $f = 0$, называется нулевым набором функции f, а множество нулевых наборов — нулевым множеством.

Число всех возможных различающихся наборов значений n переменных логической функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ равно 2^n (числу всех возможных двоичных векторов длины n). Число всех различных функций n переменных равно числу возможных расстановок нулей и единиц в столбце с 2^n строками, т. е. равно $\overline{A}_2^{2^n} = 2^{2^n}$.

Рассмотрим множество всех логических функций одной переменной ($n = 1$), так называемых унарных логических операций. Число таких функций: $2^{2^1} = 2^2 = 4$. Далее в таблице: в первом столбце — значение переменной x, в нижней строке — обозначение логических операций для каждой из 4-х функций:

x	f_0	f_1	f_2	f_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1
	0	x	$\overline{x}$	1

Функции f_0 и f_3 — константы 0 и 1 соответственно. Значения этих функций не зависят от переменной x; в таких случаях говорят, что переменная x для этих функций является несущественной (фиктивной); функции $f_1(x) = x$ — повторение переменной, $f_2(x) = \overline{x}$ — отрицание переменной.

Число всех логических функций двух переменных — бинарных логических операций — равно $2^{2^2} = 2^4 = 16$, из которых шесть имеют фиктивные переменные. В нижней дополнительной строке таблицы указаны обозначения логических операций, осуществляемых этими функциями:

x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1
		0	$x_1 \wedge x_2$	$\overline{x_1 \Rightarrow x_2}$	x_1	$\overline{x_2 \Rightarrow x_1}$	x_2	$x_1 \oplus x_2$	$x_1 \vee x_2$

x_1	x_2	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1
		$x_1 \downarrow x_2$	$x_1 \Leftrightarrow x_2$	$\overline{x}_2$	$x_2 \Rightarrow x_1$	$\overline{x}_1$	$x_1 \Rightarrow x_2$	$x_1 \vert x_2$	1

Среди полученных функций имеются ранее не определенные логические операции (связки): $f_6 = x_1 \oplus x_2$ — сложение по модулю 2 (исключающее ИЛИ); $f_8 = x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1 \vee x_2}$ — стрелка Пирса; $f_{14} = x_1|x_2 = \overline{x_1 \wedge x_2}$ — штрих Шеффера.

Таким образом, формула наряду с таблицей служит способом задания и вычисления функции. В общем случае формула описывает логическую функцию как суперпозицию других, более простых, функций.

Эквивалентными, или равносильными, называются формулы, представляющие одну и ту же функцию (эквивалентность формул в алгебре логики обозначается знаком =).

Стандартный метод установления эквивалентности двух формул:

1) для каждой формулы составляется таблица истинности;
2) полученные таблицы сравниваются по каждому набору значений переменных (стандартный метод требует $2 \cdot 2^n$ вычислений).

Одна и та же логическая функция может быть задана формулами, включающими различные наборы логических операций. Например:

$$x_1 \mid x_2 = \overline{x_1 \wedge x_2} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2}.$$

Рассмотрим некоторые важнейшие алгоритмы преобразования формул — формулировки отрицаний и построения двойственных функций.

Алгоритм формулировки отрицаний. Под формулировкой отрицаний подразумевается эквивалентное преобразование формулы $\overline{A}$ таким образом, чтобы операция отрицания применялась лишь к элементарным формулам. Рассмотренные законы (стр. 54) приводят к следующему алгоритму.

1. Если мы пришли к элементарной формуле, оставляем перед ней отрицание и заканчиваем работу.
2. Если A есть $B \vee C$, заменяем $\vee$ на $\wedge$ и формулируем отрицания B, C.
3. Если A есть $B \wedge C$ или $B \Rightarrow C$, заменяем $\wedge$ либо $\Rightarrow$ друг на друга, формулируем отрицание заключения C, оставляя посылку B без изменения.
4. Если A есть $\overline{B}$, отбрасываем оба отрицания и оставляем B без изменения.
5. Если A есть $\forall x B$ или $\exists x B$, то заменяем кванторы друг на друга и формулируем отрицание B.

Например, рассмотрим тождественное преобразование формулы
$$\overline{A \Rightarrow (B \vee C)} = A \wedge \overline{(B \vee C)} = A \wedge \overline{B} \wedge \overline{C}.$$

Несложно проверить с помощью таблиц истинности эквивалентность полученных формул.

Формулировка отрицания является также шагом проверки переводов на формальный язык и выбора из них более приемлемого.

Принцип двойственности булевых функций. Двойственность — это термин математической логики, применяемый в случае таких пар понятий, как конъюнкция и дизъюнкция, квантор общности и квантор существования. Двойственная функция — это функция, полученная из исходной путём замены в ней всех переменных на противоположные. Закон двойственности гласит: если формулы A и B равносильны, то и двойственные им формулы A^* и B^* также равносильны. В теории исчисления высказываний этот закон назван принципом двойственности.

Определение 33. *Функция $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется* ***двойственной*** *функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)}$, и обозначается f^*.*

Пример построения двойственной функции:

$$(x \wedge y)^* = \overline{(\overline{x} \wedge \overline{y})} = x \vee y.$$

Несложно показать, что функция, двойственная к двойственной функции f, равна самой функции f.

Рассмотрим, что происходит с таблицей двойственной функции. Замена набора $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ соответствует «переворачиванию» таблицы истинности. Действительно, наборы $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ расположены симметрично относительно середины таблицы. Теперь остаётся применить операцию отрицания к результату функции, т. е. поменять 0 на 1 и 1 на 0. Вектор значений функции, двойственной к исходной, получается из вектора исходной функции переворачиванием и заменой 0 на 1, 1 на 0.

Функции $x \wedge y$ и $x \vee y$, задаваемые векторами значений $(0, 0, 0, 1)$ и $(0, 1, 1, 1)$, двойственны друг к другу. Также двойственными являются $x \oplus y$ и $x \Leftrightarrow y$, задаваемые векторами $(0, 1, 1, 0)$ и $(1, 0, 0, 1)$. Каждая из функций x и $\overline{x}$ (векторы $(0, 1)$ и $(1, 0)$ соответственно) двойственна сама себе. Если в логическом тождестве заменить каждую функцию на двойственную ей, снова получится верное тождество.

Имеет место следующий закон двойственности: если формулы A и B равносильны, то равносильны и двойственные им формулы, т. е. A^* и B^*.

Функционально полные системы. Существуют наборы логических функций (операций), с помощью которых можно выразить любые другие логические функции. Такие наборы называют **функционально полными системами**, или **базисами**. Функционально полные системы характеризуются определенным набором свойств составляющих их функций.

Систему S функций $f_1, f_2, \ldots, f_m$ алгебры логики называют функционально полной, если любую функцию алгебры логики можно записать с помощью суперпозиции некоторого набора логических функций $f_1, f_2, \ldots, f_m$.

Очевидно, что если S — функционально полная система, то добавление любого числа функций не изменит статуса системы как функционально полной. Функционально полная система функций называется базисом в пространстве P_2, если удаление хотя бы одной из функций, входящих в неё, превращает эту систему в функционально неполную.

Теорема 3 ***(Теорема о функциональной полноте)***. *Для любой булевой функции $f(p_1, \ldots, p_n)$ найдется формула логики высказываний $\varphi(p_1, \ldots, p_n)$ такая, что $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ при всех $\alpha_i \in \{0, 1\}$.*

Наиболее изученным является базис $\{\wedge, \vee, ^-\}$.

Формулы, содержащие кроме переменных (и скобок) только знаки функций конъюнкции, дизъюнкции и отрицания $\{\wedge, \vee, ^-\}$ (И, ИЛИ, НЕ), называются **булевыми**. Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Всякая логическая функция может быть представлена булевой формулой, т. е. как суперпозиция дизъюнкции, конъюнкции и отрицания.*

Из этой теоремы следует, что система булевых функций (операций) $\Sigma = \{\wedge, \vee, ^-\}$ функционально полна.

Наряду с определением свойств функций набора для доказательства его функциональной полноты достаточно показать, что через функции набора можно выразить дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание.

Алгебра $(P_2; \wedge, \vee, ^{-})$, основным множеством которой является множество всех логических функций P_2, а операциями — конъюнкция, дизъюнкция и отрицание, называется **булевой алгеброй логических функций**. Операции и формулы булевой алгебры часто называют булевыми.

11. Канонические формы логических формул

Формулу называют **элементарной конъюнкцией**, если она является конъюнкцией одной или нескольких переменных, взятых с отрицанием или без отрицания. Одну переменную или её отрицание считают одночленной элементарной конъюнкцией.

Формула называется **дизъюнктивной нормальной формой** (ДНФ), если она является дизъюнкцией неповторяющихся элементарных конъюнкций. ДНФ записывается в виде $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$, где каждое A_i — элементарная конъюнкция.

Примеры ДНФ: $x_2 \vee (x_1 \wedge x_3)$; $\overline{x}_2 \vee (x_2 \wedge x_1) \vee \overline{x}_1$.

Формула A от k переменных называется **совершенной дизъюнктивной нормальной формой** (СДНФ), если:

1) A является ДНФ, в которой каждая элементарная конъюнкция A_i есть конъюнкция k переменных $x_1, x_2, \ldots, x_k$, причем на i-м месте этой конъюнкции стоит либо переменная x_i, либо её отрицание;
2) все элементарные конъюнкции A_i в такой ДНФ попарно различны.

Например, формула $A = x_1 \wedge \overline{x}_2 \vee x_1 \wedge x_2$ есть СДНФ от двух переменных. Формулы $B = x_1 \vee x_2 \wedge x_3$ и $C = x_1 \wedge x_2 \vee x_2 \wedge \overline{x}_2$ не являются СДНФ. Формула B зависит от трех переменных, но количество переменных в элементарных конъюнкциях x_1 и

$x_2 \wedge x_3$ меньше трех. В формуле C переменная x_2 дважды входит в одну и ту же элементарную конъюнкцию.

Формулу называют **элементарной дизъюнкцией**, если она является дизъюнкцией одной или нескольких переменных, взятых с отрицанием или без отрицания. Одну переменную или её отрицание считают одночленной элементарной дизъюнкцией.

Формула называется **конъюнктивной нормальной формой** (КНФ), если она является конъюнкцией неповторяющихся элементарных дизъюнкций. КНФ записывается в виде $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$, где каждое A_i — элементарная дизъюнкция.

Примеры КНФ: x_2, $\overline{x}_2$, $x_1 \vee x_2$, $(\overline{x}_2 \vee x_1) \wedge x_3$, $(\overline{x}_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_3)$.

Формула A от k переменных называется **совершенной конъюнктивной нормальной формой** (СКНФ), если:

1) A является КНФ, в которой каждая элементарная дизъюнкция A_i есть дизъюнкция k переменных $x_1, x_2, \ldots, x_k$, причем на i-м месте этой дизъюнкции стоит либо переменная x_i, либо её отрицание;

2) все элементарные дизъюнкции A_i в такой КНФ попарно различны.

Например, формула $A = (x_1 \vee \overline{x}_2) \wedge (x_1 \vee x_2)$ есть СКНФ от двух переменных. Формула $B = (x_1 \vee \overline{x}_1) \wedge (x_2 \vee x_3)$ не является СКНФ, поскольку в первую дизъюнкцию x_1 входит дважды, кроме того, функция зависит от трех переменных, а в каждой элементарной дизъюнкции переменных только две.

Любую булеву функцию, не равную тождественно 0 или 1, можно представить в виде СДНФ или СКНФ. Справедливы следующие две теоремы.

Теорема 5. *Пусть f — булева функция от n переменных, не равная тождественно нулю. Тогда существует совершенная дизъюнктивная нормальная форма, выражающая функцию f.*

Для каждой функции СДНФ единственна (с точностью до перестановок переменных или конъюнкций).

Теорема 6. *Пусть f — булева функция от n переменных, не равная тождественно единице. Тогда существует единственная совершенная конъюнктивная нормальная форма, выражающая функцию f.*

На основании этих утверждений существуют алгоритмы приведения ДНФ к СДНФ и КНФ к СКНФ, и наоборот.

Рассмотрим алгоритм приведения ДНФ к СДНФ. Если в какой-либо элементарной конъюнкции переменных меньше, то в неполную элементарную конъюнкцию необходимо ввести дополнительный множитель, включающий дизъюнкцию отсутствующей переменной и её отрицание. Это всегда можно сделать, так как согласно закону инверсии $\overline{x} \vee x = 1$, а $1 \wedge x = x$.

Далее для удобства операцию конъюнкции $\wedge$ будем обозначать точкой. Например, в ДНФ $x_1 \vee x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3$ в первой элементарной конъюнкции необходимо иметь x_2 и x_3 или их отрицание. Для этого дважды умножим x_1 на 1, чтобы затем эти единицы заменить дизъюнкциями $x_2 \vee \overline{x}_2$ и $x_3 \vee \overline{x}_3$ соответственно:

$$
\begin{gathered}
F(x_1, x_2, x_3) = x_1 \vee x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3 = x_1 \cdot 1 \cdot 1 \vee x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3 = \\
= x_1 \cdot (x_2 \vee \overline{x}_2) \cdot (x_3 \vee \overline{x}_3) \vee x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3 = \\
= (x_1 \cdot x_2 \vee x_1 \cdot \overline{x}_2) \cdot (x_3 \vee \overline{x}_3) \vee x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3 = \\
= x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \vee x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot x_3 \vee x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x}_3 \vee x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3 \vee x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3 = \\
= x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \vee x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot x_3 \vee x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x}_3 \vee x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3.
\end{gathered}
$$

Полученная ДНФ является совершенной.

11.1. Алгоритм построения СДНФ по таблице истинности

1. В таблице истинности функции отмечаем наборы переменных, соответствующих значению 1 (*единичные наборы переменных*).
2. Записываем для каждого отмеченного набора конъюнкцию всех переменных следующим образом: если значение некоторой переменной в этом наборе равно 1, то в конъюнкцию

включаем саму переменную, в противном случае — её отрицание.

3. Все полученные конъюнкции связываем операциями дизъюнкции.

Например, построим СДНФ для функции,

$$f(x_1, x_2, x_3) = (\overline{x}_1 \vee x_2) \Rightarrow (x_1 \wedge x_3).$$

x_1	x_2	x_3	$\overline{x}_1$	$\overline{x}_1 \vee x_2$	$x_1 \wedge x_3$	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	1	1	0	0
1	**0**	**0**	0	0	0	**1**
1	**0**	**1**	0	0	1	**1**
1	1	0	0	1	0	0
1	**1**	**1**	0	1	1	**1**

СДНФ имеет вид: $x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3 \vee x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot x_3 \vee x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = f(x_1, x_2, x_3)$.

Алгоритм приведения КНФ к СКНФ: если в какой-либо элементарной дизъюнкции переменных меньше, то неполную элементарную дизъюнкцию дополним логическим нулем, который в следующем шаге заменяется на конъюнкцию недостающей переменной и её отрицания: $\overline{x} \wedge x = 0$.

Для примера рассмотрим функцию

$$F(x_1, x_2, x_3) = (\overline{x}_1 \vee x_3) \cdot (x_2 \vee \overline{x}_3) \cdot (x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3).$$

Это КНФ — в первых скобках нет x_2, а во вторых x_1. В результате имеем:

$$F(x_1, x_2, x_3) = (\overline{x}_1 \vee 0 \vee x_3) \cdot (0 \vee x_2 \vee \overline{x}_3) \cdot (x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3) =$$

$$= (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \cdot x_2 \vee x_3) \cdot (\overline{x}_1 \cdot x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3) \cdot (x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3) =$$

$$= ((\overline{x}_1 \vee x_2) \cdot (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2) \vee x_3) \cdot ((x_1 \vee x_2) \cdot (\overline{x}_1 \vee x_2) \vee \overline{x}_3) \cdot (x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3) =$$
$$= (\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \cdot (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3) \cdot (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3) \cdot (\overline{x}_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3) \cdot (x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3).$$

Полученная конъюнктивная нормальная форма является совершенной.

11.2. Алгоритм построения СКНФ по таблице истинности

1. В таблице истинности функции отмечаем все наборы переменных, соответствующих значению 0 (*нулевые наборы переменных*).
2. Записываем для каждого отмеченного набора дизъюнкцию всех переменных следующим образом: если значение некоторой переменной в этом наборе равно 0, то в дизъюнкцию включаем саму переменную, в противном случае — её отрицание.
3. Все полученные дизъюнкции связываем операциями конъюнкции.

Замечание. Функция алгебры логики однозначно может быть задана таблично, но этот способ достаточно громоздкий, более компактное её представление — *числовая форма*. Например:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bigvee_1 (0, 1, 3, 6, 7).$$

Эта запись означает, что функция трёх переменных принимает значения равные 1, на наборах переменных, номера которых $0, 1, 3, 6, 7$, т. е. её единичное множество:

$$\{(0,0,0); (0,0,1); (0,1,1); (1,1,0); (1,1,1)\}.$$

Ту же функцию можно записать, зафиксировав нулевые наборы:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bigwedge_0 (2, 4, 5).$$

Рассмотренные булевы функции представлены в виде суперпозиции элементарных функций И, ИЛИ, НЕ. Используя законы алгебры логики, можно заменить громоздкие булевы функции им равносильными, но более простыми. Такой процесс называется **минимизацией булевых функций**. Её проводят для упрощения сложных логических выражений в программах, а также для того, чтобы построенные на их основе функциональные схемы не содержали лишних элементов.

11.3. Минимизация булевых функций. Карты Карно

Минимизировать нормальные формы можно различными способами: методом каскадов, с помощью карт Карно и другими. Минимальная (сокращенная) нормальная форма получается из совершенной конъюнктивной (дизъюнктивной) нормальной формы удалением некоторых элементарных дизъюнкций (конъюнкций).

Тупиковой нормальной формой называется КНФ (ДНФ), из которой нельзя удалить ни одной элементарной конъюнкции (дизъюнкции) так, чтобы сохранить неизменной заданную булеву функцию. Для представления булевой функции в таком виде необходимо сначала представить её в совершенном виде и только затем минимизировать до минимальной из всех тупиковых форм.

Карты Карно являются одним из наиболее удобных способов минимизации. Они впервые были представлены в статье Мориса Карно в 1953 г. (Морис Карно (Maurice Karnaugh), род. 4 октября 1924 года, Нью-Йорк — американский физик). Это специальные таблицы, дающие возможность упростить процесс поиска минимальной формы булева выражения с помощью графического представления для $n \leq 6$. Они имеют вид прямоугольника, разделенного на 2^n клеток, каждая из которых содержит двоичный n-мерный набор значений функции F из таблицы истинности.

Для $n = 2$ карта Карно имеет вид таблицы, состоящей из $2^2 = 4$ клеток.

изменение x_1

изменение x_2

$\overline{x}_1\overline{x}_2$	$x_1\overline{x}_2$
$\overline{x}_1x_2$	x_1x_2

или

00	10
01	11

При $n = 3$ карты Карно имеют вид с $2^3 = 8 = 2 \times 4$ клетками. Карта Карно для булевых функций трех переменных:

изменение x_2x_3

изменение x_1

$\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3$	$\overline{x}_1\overline{x}_2x_3$	$\overline{x}_1x_2x_3$	$\overline{x}_1x_2\overline{x}_3$
$x_1\overline{x}_2\overline{x}_3$	$x_1\overline{x}_2x_3$	$x_1x_2x_3$	$x_1x_2\overline{x}_3$

или

000	001	011	010
100	101	111	110

Для $n = 4$ карты Карно имеют вид с $2^4 = 16 = 4 \times 4$ клетками. Карта Карно для булевых функций четырех переменных:

изменение x_1x_2

изменение x_3x_4

$\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4$	$\overline{x}_1x_2\overline{x}_3\overline{x}_4$	$x_1x_2\overline{x}_3\overline{x}_4$	$x_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4$
$\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3x_4$	$\overline{x}_1x_2\overline{x}_3x_4$	$x_1x_2\overline{x}_3x_4$	$x_1\overline{x}_2\overline{x}_3x_4$
$\overline{x}_1\overline{x}_2x_3x_4$	$\overline{x}_1x_2x_3x_4$	$x_1x_2x_3x_4$	$x_1\overline{x}_2x_3x_4$
$\overline{x}_1\overline{x}_2x_3\overline{x}_4$	$\overline{x}_1x_2x_3\overline{x}_4$	$x_1x_2x_3\overline{x}_4$	$x_1\overline{x}_2x_3\overline{x}_4$

или

0000	0100	1100	1000
0001	0101	1101	1001
0011	0111	1111	1011
0010	0110	1110	1010

Логическая функция F на карте Карно представлена совокупностью клеток, заполненных единицами (1) — для всех клеток, соответствующих единичным наборам переменных, или пустотами (0) — для нулевых наборов переменных, если известны ее значения при всем наборе аргументов, т. е. известна таблица истинности или СДНФ.

Для построения минимальной ДНФ производится «склеивание» единиц. «Склеиваются» только соседние клетки, которые отличаются значением одной переменной. Процесс сводится к объединению в группы единичных клеток карт Карно. При этом общие переменные сохраняются, а различные опускаются.

Рассмотрим более подробно процедуру минимизации с помощью карт Карно. Алгоритм «склеивания» с помощью карт Карно имеет следующий вид.

1. Привести булеву функцию к СДНФ.
2. Нанести единицы на карту Карно.
3. Объединить соседние единицы контурами, охватывающими 2^m клеток, где $m = 0, 1, 2, 3$. При этом может оказаться, что единица попадает одновременно в два контура. Если контур охватывает более одной пары единиц одновременно, то предпочтительнее его не дробить на пары, а рассматривать как единый целый контур, например квадрат.
4. Провести упрощения, т. е. исключить члены, дополняющие друг друга до 1 внутри контура, следя за тем, чтобы переменные внутри контура были связаны операцией конъюнкции.
5. Объединить оставшиеся члены (по одному в каждом контуре) функцией ИЛИ, т. е. дизъюнкцией.
6. Записать полученное упрощенное булево выражение в ДНФ.

При работе с картами Карно необходимо обратить внимание на порядок заполнения строк и столбцов значениями переменных. Последовательность значений переменных должна сохраняться. При этом каждые две соседние клетки отличаются лишь значением одной переменной. Нарушение порядка заполнения строк или столбцов возможно, но это может не дать ожидаемого результата.

Рассмотрим примеры минимизации булевых функций с помощью карт Карно.

Пусть $f(A,B,C) = \overline{A}B\overline{C} \vee \overline{A}BC \vee AB\overline{C} \vee ABC$.

	$\overline{A}\,\overline{B}$	$\overline{A}\,B$	$A\,B$	$A\,\overline{B}$
C		1	1	
$\overline{C}$		1	1	

Нанесем единицы на карту и обведем их сначала попарно двумя контурами. Такое действие соответствует заключению в скобки слагаемых $(\overline{A}B\overline{C} \vee \overline{A}BC)$ и $(AB\overline{C} \vee ABC)$. Вынося за скобки одинаковые конъюнкции согласно распределительному закону, в скобках получаем дизъюнкцию противоположных значений одной из переменных. В данном примере этому шагу соответствуют конъюнкции $\overline{A}B(\overline{C} \vee C)$ и $AB(\overline{C} \vee C)$. Объединение двух соседних единиц всегда приводит в действие закон инверсии, согласно которому дизъюнкция противоположных значений переменной равна 1.

Поэтому при записи ответа после применения карты Карно переменные, заключенные в общий контур, связываются конъюнкцией (как и общий множитель при вынесении за скобки), а такие отдельные конъюнкции, т. е. различные контуры, объединяются между собой дизъюнкцией.

Если записать полученный результат, то к нему вновь можно применить то же правило: $f(A,B,C) = \overline{A}B \vee AB = B$. Однако в данном примере удобнее рассмотреть целиком весь квадрат из четырех единиц и сравнить переменные, записанные в горизонтальных и вертикальных клетках. Очевидно, общие множители сохранятся после упрощения (ведь их можно было вынести за скобки), а инвертируемые уйдут согласно закону инверсии. Поэтому целесообразнее опустить инвертируемые пары $\overline{A} \vee A$ и $\overline{C} \vee C$, а в ответе сохранить общую для всех клеток переменную B. В результате $f(A,B,C) = B$.

Рассмотрим примеры минимизации булевой функции, содержащей четыре переменные.

$$f(A,B,C,D) = A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}\vee\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\cdot D\vee\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot D\vee$$

$$\vee\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C\cdot D\vee\overline{A}\cdot B\cdot C\cdot D\vee A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot D.$$

Занесем единицы в соответствующие клетки карты Карно.

	$\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{C}\,D$	$C\,D$	$C\,\overline{D}$
$\overline{A}\,\overline{B}$		1	1	
$\overline{A}\,B$		1	1	
$A\,B$				
$A\,\overline{B}$	1	1		

Рассмотрим переменные, обозначенные контуром. Среди них есть повторяющиеся в соседних клетках ($\overline{A}$ и D) и инвертируемые (пары B, $\overline{B}$ и C, $\overline{C}$). Повторяющиеся переменные как общий множитель мы сохраним, а инвертируемые опустим. Из контура, содержащего две единицы, вынесем переменные A, $\overline{B}$, расположенные на одной строке, а также одинаковую для первых двух столбцов переменную, при этом опустим инвертируемую пару D, $\overline{D}$. После преобразований булева функция примет вид:

$$f(A,B,C,D) = \overline{A}\cdot D\vee A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}.$$

Проверка. Группируем элементарные конъюнкции: первую с последней, вторую с третьей и четвёртую с пятой.

$$f(A,B,C,D) = A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot(\overline{D}\vee D)\vee\overline{A}\cdot\overline{C}\cdot D\cdot(\overline{B}\vee B)\vee$$

$$\vee\overline{A}\cdot C\cdot D\cdot(\overline{B}\vee B) = A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\vee\overline{A}\cdot D\cdot(\overline{C}\vee C) = \overline{A}\cdot D\vee A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C},$$

т. е. результаты минимизации совпали.

Рассмотрим ещё пример.

Пусть $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_2\overline{x}_3\overline{x}_4\vee\overline{x}_1x_2\overline{x}_3\overline{x}_4\vee\overline{x}_1x_2x_3\overline{x}_4\vee x_1x_2x_3\overline{x}_4$.

Заполним таблицу:

	$\overline{x}_3\overline{x}_4$	$\overline{x}_3x_4$	x_3x_4	$x_3\overline{x}_4$
$\overline{x}_1\overline{x}_2$				
$\overline{x}_1x_2$	1			1
x_1x_2	1			1
$x_1\overline{x}_2$				

Чередование переменных в строках и столбцах ничем не ограничено. Такой порядок был введен для удобства последующего упрощения. Поэтому надо сделать так, чтобы все единицы в данном случае оказались рядом. Для этого достаточно отождествить, т. е. «склеить» крайние левую и правую колонки. Фактически это соответствует свертыванию карты в вертикальный цилиндр, в котором левый край совмещается с правым. При их совмещении единицы первого и последнего столбцов окажутся соседними, и для них можно будет применить алгоритм «склеивания».

Из всей четверки единиц по вертикали сохранится общая переменная второй и третьей строк x_2, а по горизонтали — общая переменная первого и последнего столбцов $\overline{x}_4$: $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2\overline{x}_4$.

В следующем примере (по аналогии с предыдущим) удобно переставить переменные в столбце, что соответствует свертыванию карты в горизонтальный цилиндр.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3x_4 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3x_4.$$

	$\overline{x}_3\overline{x}_4$	$\overline{x}_3x_4$	x_3x_4	$x_3\overline{x}_4$
$\overline{x}_1\overline{x}_2$	1	1		
$\overline{x}_1x_2$				
x_1x_2				
$x_1\overline{x}_2$	1	1		

В этом примере контуры объединены «через край» при свертывании карты Карно в горизонтальный цилиндр так, чтобы совмещались верхний и нижний края карты и клетки, содержащие единицы, образовывали прямоугольник. В первой и последней строках сохраняется общая переменная $\overline{x}_2$, а в первом и втором столбцах — общая переменная $\overline{x}_3$. Их конъюнкция и является ответом: $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x}_2\overline{x}_3$.

Пусть $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2 x_3\overline{x}_4 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4 \vee x_1\overline{x}_2 x_3\overline{x}_4$.

Заполним карту Карно:

	$\overline{x}_3\overline{x}_4$	$\overline{x}_3 x_4$	$x_3 x_4$	$x_3\overline{x}_4$
$\overline{x}_1\overline{x}_2$	1			1
$\overline{x}_1 x_2$				
$x_1 x_2$				
$x_1\overline{x}_2$	1			1

В результате: $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x}_2\overline{x}_4$.

Пусть $f(x_1, x_2) = \overline{x}_1 x_2 \vee x_1\overline{x}_2 \vee x_1 x_2$. Карта Карно имеет вид:

	$\overline{x}_2$	x_2
$\overline{x}_1$		1
x_1	1	1

Получилось два контура, один из которых дает x_1, а второй x_2. Попадание единицы в два контура и более соответствует закону идемпотентности $x = x \vee x$, поэтому каждое слагаемое (элементарная конъюнкция) может быть предоставлено столько раз, сколько нужно для упрощения. При этом они группируются независимо с другими слагаемыми, с которыми попали в один контур. Фактически сделано следующее:

$$f(x_1, x_2) = \overline{x}_1 x_2 \vee x_1 x_2 \vee x_1\overline{x}_2 \vee x_1 x_2 = x_2(\overline{x}_1 \vee x_1) \vee x_1(\overline{x}_2 \vee x_2) = x_1 \vee x_2.$$

Карты Карно дают более рациональный путь минимизации булевых функций.

Замечание. Для получения минимальной КНФ по тем же правилам объединяются клетки, содержащие 0.

Базис $\{\wedge, \vee, ^{-}\}$ не единственно возможный, существует довольно много функционально полных систем. Например, булевы функции можно выразить только через $\{\vee, ^{-}\}$, так как воспользовавшись правилом де Моргана, имеем: $x_1 \wedge x_2 = \overline{\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2}$.

Примеры основных функционально полных систем булевых функций:

- *конъюнкция, дизъюнкция, отрицание:* $S_1 = \{\wedge, \vee, ^{-}\}$*;*
- *конъюнкция, отрицание:* $S_2 = \{\wedge, ^{-}\}$*;*
- *дизъюнкция, отрицание:* $S_3 = \{\vee, ^{-}\}$*;*
- *штрих Шеффера:* $S_4 = \{|\}$*;*
- *стрелка Пирса:* $S_5 = \{\downarrow\}$*;*
- *сумма по модулю два, конъюнкция,* 1: $S_6 = \{\oplus, \wedge, 1\}$*;*
- $x_1\overline{x}_2$*, отрицание:* $S_7 = \{x_1\overline{x}_2, \overline{x}_2\}$*;*
- *импликация, отрицание:* $S_8 = \{\Rightarrow, ^{-}\}$.

Заметим, что полная система функций $S_1 = \{\wedge, \vee, ^{-}\}$ будет избыточной; удалив из неё одну функцию, можно получить новую функционально полную систему $S_2 = \{\wedge, ^{-}\}$ или $S_3 = \{\vee, ^{-}\}$.

Можно построить различные формальные системы (алгебры) — в зависимости от выбранных в качестве базисных логических операций. Так, базис функций $S_1 = \{\wedge, \vee, ^{-}\}$ образует **булеву алгебру**. Множество булевых функций в базисе $S_6 = \{\oplus, \wedge, 1\}$ образует **алгебру Жегалкина**[5].

[5]Иван Иванович Жегалкин (22 июля (3 августа) 1869, Мценск, Российская империя — 28 марта 1947, Москва, СССР) — российский и советский математик и логик, профессор Московского университета. Заслуженный деятель науки РСФСР (1945)

Литература

1. *Москинова, Г. И.* Дискретная математика. Математика для менеджера в примерах и упражнениях : учеб. пособие / Г. И. Москинова. — М. : Логос, 2003. — 240 с.: ил.

2. *Судоплатов, С. В.* Элементы дискретной математики : учебник / С. В. Судоплатов, Е. В. Овчинников. — М. : ИНФРА-М; Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2002. — 280 с.

3. *Яблонский, С. В.* Введение в дискретную математику : учеб. пособие для вузов/под ред. В. А. Садовничего. — М. : Высш. шк., 2001. — 384 с.

4. *Аматова, Г. М.* Математика / Г. М. Аматова, М. А. Аматов. — М. : Московский психолого-социальный институт, 1999. — 488 с.

5. *Андреева, Е. В.* Математические основы информатики : учеб. пособие / Е. В. Андреева, Л. Л. Босова, И. Н. Фалина. — М. : БИНОМ: Лаборатория знаний, 2005. — 328 с.

6. *Асеев, Г. Г.* Дискретная математика : учеб. пособие / Г. Г. Асеев, О. М. Абрамов, Д. Э. Ситников. — Ростов н/Д : Феникс; Харьков : Торсинг, 2003. — 144 с.

7. *Галушкина, Ю. И.* Конспект лекций по дискретной математике : учеб. издание / Ю. И. Галушкина, А. Н. Марьямов. — М. : Айрис-пресс, 2007. — 176 с.

8. *Иванов, Б. Н.* Дискретная математика. Алгоритмы и программы : учеб. пособие / Б. Н. Иванов. — М. : Лаборатория базовых знаний, 2001. — 288 с.

9. *Непейвода, Н. Н.* Прикладная логика : учеб. пособие / Н. Н. Непейвода. — Новосибирск : Изд-во Новосиб. ун-та, 2000. — 521 с.

10. *Новиков, Ф. А.* Дискретная математика для программиста / Ф. А. Новиков. — СПб. : Питер, 2001. — 304 с.

11. *Плотников, А. Д.* Дискретная математика : учеб. издание / А. Д. Плотников. — М. : Новое знание, 2006. — 304 с.
12. *Романовский, И. В.* Дискретный анализ : учеб. пособие. / И. В. Романовский. — СПб. : Невский диалект, 2000. — 240 с.
13. *Рояк, М. Э.* Основы дискретной математики : учеб. пособие / М. Э. Рояк, С. Х. Рояк. — Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2003. — 127 с.
14. *Спирина, М. С.* Дискретная математика / М. С. Спирина, П. А. Спирин. — М. : Академия, 2007. — 368 с.
15. *Комиссаров, В. В.* Математика. Дискретная математика : учеб. пособие / В. В. Комиссаров; НОУ ВПО Центросоюза РФ «СибУПК». — Новосибирск, 2011. — 100 с.
16. *Арасланов, Ш. Ф.* Теория графов. Лекции и практические занятия [Текст] : учебное пособие / Ш. Ф. Арасланов; М-во образования и науки Российской Федерации, Казанский гос. архитек.-строит. ун-т. — Казань : Изд-во Казанск. гос. архитект.-строит. ун-та, 2013. — 86 с. : ил.; 20 см.; ISBN 978-5-7829-0407-4
17. *Зыков, А. А.* Основы теории графов / А. А. Зыков. — М. : Наука, 1987. — 384 с.
18. Бочаров, В. А. Основы логики : учеб. пособие / В. А. Бочаров, В. И. Маркин. — М. : ИНФРА-М, 2000. — 296 с.
19. *Beineke, L. W.* Beitrдge zur Graphentheorie. — Leipzig: Teubner, 1968.