

АКТИВНАЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

УДК 681.5.015.4
Д 332

Коллектив авторов

В.И. Денисов, В.М. Чубич, О.С. Черникова, Д.И. Бобылева

Рецензенты:

д-р техн. наук, проф. *Г.С. Лбов*;
д-р техн. наук, проф. *В.И. Хабаров*

*Работа выполнена в рамках ведомственной целевой программы
«Развитие научного потенциала высшей школы (2006-2008 годы)»,
проект РНП-2.1.2.43*

Денисов В.И.

Д 332 Активная параметрическая идентификация стохастических линейных систем: монография / В.И. Денисов, В.М. Чубич, О.С. Черникова, Д.И. Бобылева. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2009. – 192 с. (Серия «Монографии НГТУ»).

ISBN 978-5-7782-1182-7

Излагаются теоретические и прикладные аспекты проблемы активной параметрической идентификации многомерных стохастических линейных дискретных и непрерывно-дискретных систем, описываемых моделями в пространстве состояний. Рассматривается наиболее общий характер вхождения неизвестных параметров: в матрицы состояния, управления, возмущения, измерения, в начальные условия и в ковариационные матрицы помех динамики и ошибок измерений в различных комбинациях. Приводятся алгоритмы активной параметрической идентификации во временной и частотной областях, позволяющие решать задачи оптимального оценивания параметров методами максимального правдоподобия и наименьших квадратов с привлечением прямых и двойственных градиентных процедур синтеза оптимальных входных сигналов.

Предназначена для специалистов, научные и профессиональные интересы которых связаны с моделированием динамических объектов стохастической природы.

УДК 681.5.015.4

ISBN 978-5-7782-1182-7

© Коллектив авторов, 2009
© Новосибирский государственный
технический университет, 2009

ACTIVE PARAMETRIC IDENTIFICATION OF STOCHASTIC LINEAR SYSTEMS

Monograph

NOVOSIBIRSK
2009

UDC 681.5.015.4
D 332

Reviewers Prof. G.S. Lbov, D.Sc. (Eng.)
Prof. V.I. Khabarov, D.Sc. (Eng.)

*The work has been conducted within the departmental task programme
'Development of the Scientific Potential of Higher School (2006-2008)',
project RNP-2.1.43*

Denisov V.I.

D 332 Active Parametric Identification of Stochastic Linear Systems: Monograph / V.I. Denisov, V.M. Chubich, O.S. Chernikova, D.I. Bobyleva. – Novosibirsk: NSTU Publisher, 2009. – 192 pp. (the NSTU Monographs series).
ISBN 978-5-7782-1182-7

Theoretical and application aspects of the problem of active parametric identification of multidimensional stochastic linear discrete and discrete-continuous systems described by models in the state space are presented. The most general character of entering unknown parameters into matrices of state, control, disturbance and measurement, into initial conditions and into covariance matrices of dynamics disturbances and measurement errors in various combinations is considered. Algorithms of active parametric identification in the time and frequency domains are given which allow one to solve problems of optimal parameter estimation by the maximum likelihood method and the least-squares method with using direct and dual gradient procedures of optimal input signal synthesis.

The book is designed for specialists who take scientific and professional interest in modeling dynamic stochastic objects.

UDC 681.5.015.4

ISBN 978-5-7782-1182-7

© Denisov V.I., Chubich V.M.,
Chernikova O.S., Bobyleva D.I., 2009
© Novosibirsk State Technical
University, 2009

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящей монографии мы попытались дать систематическое изложение наиболее существенных для практики вопросов теории и техники активной параметрической идентификации многомерных стохастических линейных дискретных и непрерывно-дискретных систем, описываемых моделями в пространстве состояний. Впервые рассмотрена проблема оптимального параметрического оценивания для случая вхождения параметров в матрицы состояния, управления, возмущения, измерения, в начальные условия и в ковариационные матрицы помех динамики и ошибок измерений в различных комбинациях.

Получены аналитические выражения для информационных матриц одноточечного плана, проведен их структурный анализ, предложены алгоритмы вычисления.

На основе сформулированных и доказанных теорем эквивалентности оптимальных планов и выявленных свойств информационных матриц разработаны оригинальные алгоритмы активной параметрической идентификации во временной и частотной областях, позволяющие решать задачи оптимального оценивания параметров математических моделей методами максимального правдоподобия и наименьших квадратов с привлечением прямой и двойственной градиентных процедур синтеза оптимальных входных сигналов. Существенной особенностью указанных алгоритмов оценивания параметров и планирования оптимальных входных сигналов является то, что они позволяют вычислять соответствующие градиенты по рекуррентным формулам.

Численные исследования на примерах моделей динамических систем различной природы показали целесообразность и эффективность применения процедур активной идентификации дискретных и непрерывно-дискретных систем как во временной, так и в частотной областях.

Представленная монография состоит из предисловия, введения, четырех глав, заключения, списка использованных источников и приложений.

Во введении дается постановка проблемы исследования, приводится общая схема активной идентификации с подробным описанием

ее этапов. Проанализировано современное состояние проблемы активной идентификации стохастических линейных дискретных и непрерывно-дискретных систем.

В главе 1 рассмотрены вопросы параметрического оценивания с использованием методов максимального правдоподобия и наименьших квадратов. Даются некоторые важные для дальнейшего изложения понятия и результаты теории планирования оптимального эксперимента. Приводятся прямая и двойственная градиентные процедуры синтеза оптимальных входных сигналов.

В главе 2 для стохастических линейных дискретных и непрерывно-дискретных систем во временной области рассматриваются алгоритмы вычисления значения критериев идентификации и их градиентов, используемые при численном нахождении оценок неизвестных параметров методами нулевого, первого и второго порядков. Представлен вывод выражений для нахождения информационных матриц Фишера при наиболее общем характере вхождения неизвестных параметров в модели, даются алгоритмы их вычисления. Приводятся разработанные алгоритмы вычисления значений выбранных критериев оптимальности и их градиентов, необходимых для синтеза входных сигналов в соответствующих процедурах планирования.

В главе 3 рассматриваются аналогичные вопросы и приводятся соответствующие аналитические выкладки и алгоритмы для стохастических линейных дискретных систем в частотной области.

В главе 4 отражены и проиллюстрированы результаты применения процедуры активной идентификации для динамических систем различной природы.

Материал книги содержит результаты собственных исследований авторов. Монография не имеет ни отечественных, ни зарубежных аналогов. Авторы надеются, что книга окажется полезной для специалистов, научные и профессиональные интересы которых связаны с моделированием динамических объектов стохастической природы.

Результаты проведенных исследований используются в курсах лекций «Математические методы планирования эксперимента», читаемых для магистрантов факультета прикладной математики и информатики Новосибирского государственного технического университета. Все замечания, пожелания и предложения читателей будут с благодарностью приняты и учтены.

Авторы признательны М.И. Вершининой и Е.С. Коновальчик за большую помощь при подготовке рукописи к печати.

ВВЕДЕНИЕ

1. Процедура активной идентификации

Идентификация динамической системы предполагает определение структуры и параметров математической модели, обеспечивающей наилучшее совпадение выходных переменных модели и системы при одинаковых входных воздействиях.

Различают задачи идентификации в узком и широком смыслах [1]. При решении задач идентификации в широком смысле априорная информация о системе либо незначительна, либо вообще отсутствует. Для идентификации подобной системы необходимо решить ряд дополнительных задач, к которым можно отнести, например, выбор класса модели или определение ее типа. При решении задачи идентификации в узком смысле считается, что известны структура системы и класс моделей, к которому она относится. Априорная информация о системе достаточно широка. Такая постановка задачи идентификации наиболее соответствует реальным условиям проектирования и часто используется в инженерной практике.

В настоящее время существуют два подхода к решению задач идентификации: пассивный и активный. Пассивная идентификация выполняется в режиме нормальной эксплуатации исследуемой системы и заключается в оценивании неизвестных параметров, входящих в модель. С методами пассивной идентификации можно ознакомиться, например, по работам [2–5]. Активная идентификация предполагает подачу на вход изучаемой системы специально синтезированного пробного сигнала. Несмотря на трудности, связанные с необходимостью нарушения технологического режима, методы активной идентификации систем предоставляют экспериментатору значительно

бóльшие возможности в получении качественной модели по сравнению с методами пассивной идентификации. Эти возможности обусловлены самой идеологией активной идентификации, базирующейся на сочетании приемов параметрического оценивания с концепцией планирования эксперимента (см., например, [6–11]).

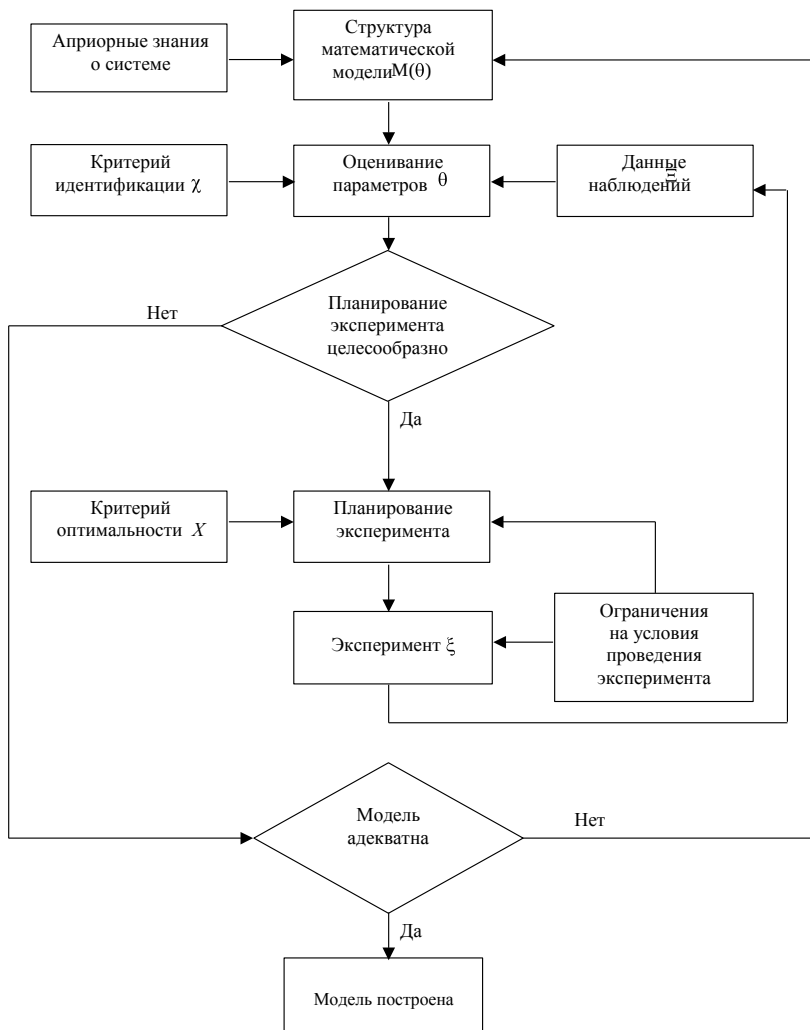


Рис. В.1. Контур идентификации системы

Процедура активной идентификации (см. рис. В.1) предполагает выполнение следующих основных этапов:

1. Подготовка данных наблюдений

Входные и выходные данные регистрируются в процессе проведения целенаправленных идентификационных экспериментов. Этот этап тесно связан с планированием эксперимента, задача которого состоит в том, чтобы, учитывая возможные ограничения, выбрать максимально информативные данные о сигналах системы.

2. Определение структуры математической модели

Это – наиболее важная и ответственная часть процедуры идентификации. Определение общей структуры модели и класса уравнений, которыми предполагается описывать наблюдаемый процесс, является задачей *структурной идентификации*.

Существуют различные подходы к форме задания идентификационных моделей, а также ситуации, требующие соответствующих методов исследования. Математические модели можно классифицировать по разным признакам, например, в зависимости от учета фактора времени, уровня неопределенности, по типу используемого математического аппарата и т.д. Более определенно, различают линейные и нелинейные, стационарные и нестационарные, дискретные, непрерывные и непрерывно-дискретные модели. Другой вариант классификации предусматривает возможность идентификации в терминах детерминированных или стохастических процессов. И, наконец, модели можно описывать в терминах пространства состояний и передаточных функций. Описание динамической системы в пространстве состояний [12–14] позволяет учесть имеющиеся физические представления о механизмах работы системы. В отличие от моделей передаточных функций, которые используются в основном при описании моделей линейных стационарных систем, методы пространства состояний позволяют создать компактную форму представления любых систем: линейных и нелинейных, стационарных и нестационарных, непрерывных и дискретных. Используемый при этом математический аппарат позволяет создавать мощные программные средства для анализа и синтеза динамических систем.

3. Оценивание параметров, входящих в модель

Определение значений параметров по имеющимся экспериментальным данным является задачей *параметрической идентификации* [11, 15–18]. При решении задачи оценивания методами параметрической идентификации выбирается некоторый критерий качества, явно зависящий от вектора неизвестных параметров.

Для нахождения оценок неизвестных параметров используют различные методы оценивания, среди которых выделим метод максимального правдоподобия [19–21], метод наименьших квадратов [22–26] и метод инструментальных переменных [11].

4. Планирование эксперимента

Выбор входных сигналов существенно воздействует на экспериментальные данные. На практике могут использоваться разнообразные способы управления экспериментом. В простейшем случае управление экспериментом сводится к выбору оптимальных моментов измерений, в более сложном – к планированию оптимальных входных сигналов и начальных условий [9, 27]. Для построения оптимальных планов используют различные критерии оптимальности.

5. Проверка адекватности модели

В результате выполнения предыдущих этапов процедуры активной идентификации получается конкретная модель из некоторого класса, причем такая, которая в соответствии с выбранным критерием качества наилучшим образом воспроизводит экспериментальные данные. Далее необходимо проверить соответствие модели данным наблюдений, априорной информации и поставленной прикладной цели. Адекватность построенной модели проверяют подачей на ее вход и вход самой системы тестирующих сигналов, которые не использовались для идентификации, и сравнением полученных выходных данных.

Данная монография посвящена вопросам активной параметрической идентификации в пространстве состояний моделей с предварительно выбранной структурой. В этом случае процедура активной идентификации предполагает выполнение следующих этапов:

1) вычисление оценок параметров по измерительным данным, соответствующим некоторому пробному сигналу (пассивная идентификация);

2) синтез на основе полученных оценок оптимального по некоторому критерию сигнала (планирование);

3) регистрация выходных данных системы, отвечающих поданному синтезированному сигналу;

4) пересчет оценок неизвестных параметров.

В случае необходимости этапы 2–4 повторяются.

2. Современное состояние проблемы активной идентификации стохастических линейных дискретных и непрерывно-дискретных систем

Современный этап развития теории и практики параметрической идентификации характеризуется все более широким распространением идей и методов активной идентификации. Этому способствовали, в частности, труды А.Ж. Абденова, Ю.П. Адлера, В.Г. Горского, С.М. Ермакова, А.А. Жиглявского, Г.К. Круга, Е.В. Марковой, В.В. Налимова, В.Н. Овчаренко, А.А. Попова, Ю.А. Сосулина, А.М. Талалая, В.А. Фатуева, В.В. Федорова, а также Дж.К. Гудвина (G.C. Goodwin), М.Б. Зейропа (M.B. Zarrop), Р.К. Мехры (R.K. Mehra), Р.Л. Пейна (R.L. Payne).

Р.К. Мехра был, по-видимому, первым, кто стал использовать идеи и методы теории планирования оптимального эксперимента для параметрической идентификации во временной и частотной областях динамических систем, описываемых моделями в пространстве состояний [28–30]. Для многомерных стохастических линейных дискретных систем он получил выражение информационной матрицы Фишера в случае вхождения неизвестных параметров в матрицы состояния и управления. Мехра доказал, что при переходе от статических и детерминированных динамических систем к стохастическим линейным дискретным системам основные свойства нормированных информационных матриц планов не меняются. Остаются также справедливыми теоремы эквивалентности для оптимальных планов.

В дальнейшем А.Ж. Абденков в [31] продолжил исследование вопросов активной идентификации многомерных стохастических динамических систем, описываемых моделями в пространстве состояний во временной и частотной областях. В соавторстве с А.А. Поповым он для временной области уточнил в [32] выражение для информацион-

ной матрицы, полученное Р.К. Мехрой в [28], и затем совместно с В.И. Денисовым в [33] обобщил полученный в [32] результат на случай, когда неизвестные параметры входили не только в матрицы состояния и управления, но и в матрицу измерения. Отметим, что в [28, 32, 33] выражения информационных матриц Фишера были получены с использованием фильтра Калмана в форме нормированной обновляющей последовательности.

Другой подход к вычислению информационной матрицы Фишера был предложен А.А. Поповым в [34]. Как и в [32], он рассмотрел случай вхождения неизвестных параметров в матрицы состояния и управления, но запись уравнений фильтра Калмана в форме ненормированной обновляющей последовательности позволила А.А. Попову оптимизировать процедуру вычисления информационной матрицы за счет исключения необходимости извлекать квадратный корень из матрицы для каждого дискретного момента времени.

В [35, 36] А.Ж. Абденов исследовал теоретические и прикладные аспекты применения D -оптимального планирования для параметрической идентификации во временной и частотной областях стохастических линейных дискретных систем. При этом, как и в [28–30], он использовал входные сигналы случайной природы и рассматривал вхождение параметров только в матрицы состояния и управления.

В [37] В.М. Чубич проанализировал структуру выражения для информационной матрицы Фишера из [32] и на этой основе разработал прямую и двойственную градиентные процедуры построения D -оптимальных планов.

Из публикаций по активной идентификации моделей стохастических динамических систем в форме передаточных функций к работам [28–31, 37], пожалуй, наиболее близки в методологическом отношении работы [38, 39]. В них дан практически исчерпывающий анализ задачи синтеза оптимальных сигналов, приведены алгоритмы ее численного решения.

Для непрерывно-дискретных систем наиболее развиты в теоретическом и прикладном отношении вопросы активной параметрической идентификации в детерминированном случае (без динамического шума). В [9] дана постановка и намечены пути решения задачи планирования оптимальных входных воздействий в предположении, что управляющие сигналы являются кусочно-постоянными на фиксированных интервалах времени, а замеры откликов производятся дискрет-

но на правых границах этих интервалов. В [40] для нелинейных непрерывно-дискретных систем предложен прямой алгоритм совместного планирования оптимальных входных сигналов, начальных условий и моментов измерений, основанный на поиске локального экстремума функционала по координатам точек плана методом Нелдера–Мида. В [41] В.Н. Овчаренко рассмотрел решение задачи оценивания параметров линейных непрерывно-дискретных систем совместно с выбором входного сигнала для случая вхождения неизвестных параметров в матрицы состояния и управления, при этом оптимальный закон управления определялся как решение двухточечной краевой задачи для системы линейных разностных уравнений.

Вопросы активной идентификации стохастических непрерывно-дискретных систем менее изучены. По нашему мнению, причина во многом обусловлена самой сложностью проблемы.

В [42, 43] рассмотрена задача идентификации параметров стохастических линейных непрерывно-дискретных систем при вхождении неизвестных параметров в матрицы состояния, управления, возмущения, измерения, в начальные условия и ковариационные матрицы помех динамики и ошибок измерений. Решение этой задачи в [42] определялось в том числе с применением метода Ньютона – Гаусса, для чего предлагалось использовать некоторое выражение для оценки информационной матрицы Фишера.

В [32, 44] А.Ж. Абденов и А.А. Попов распространили идеи Р.К. Мехры из [28,30] для дискретных систем на непрерывно-дискретный случай и получили выражение для информационной матрицы при вхождении неизвестных параметров в матрицы состояния и управления. В [34] А.А. Попов предложил аналогичное соотношение с использованием уравнений фильтра Калмана в форме ненормированной обновляющей последовательности.

В [31, 45, 46] рассмотрены вопросы планирования D -оптимальных входных сигналов с использованием прямой градиентной процедуры для случая, когда неизвестные параметры входят только в матрицы состояния и управления.

Таким образом, публикации по проблеме активной параметрической идентификации стохастических динамических систем носили преимущественно разрозненный характер и имели форму журнальных статей. Последняя из известных нам монографий в области активной идентификации рассматриваемых систем вышла за рубежом приблизи-

тельно 30 лет назад, что говорит о достаточной сложности самого предмета исследования и определенных трудностях получения новых фундаментальных результатов.

В предлагаемой монографии авторы с единых методологических позиций рассматривают теоретические и прикладные аспекты проблемы активной идентификации стохастических линейных дискретных и непрерывно-дискретных систем в наиболее общей постановке, когда подлежащие оцениванию параметры входят в матрицы состояния, управления, возмущения, в начальные условия и ковариационные матрицы помех динамики и ошибок измерений в различных комбинациях.

Глава 1

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ АКТИВНОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ

1.1. Оценивание неизвестных параметров

Решение задачи параметрической идентификации предполагает определение неизвестных параметров модели по имеющимся экспериментальным данным Ξ с учетом физического смысла исследуемого процесса.

При заданном критерии идентификации χ задача нахождения оценок неизвестных параметров заключается в решении задачи нелинейного программирования с ограничениями:

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta \in \Omega_{\theta}} [\chi \ \Xi; \theta]. \quad (1.1)$$

Методы нелинейного программирования [47–52] включают большую группу численных методов, многие из которых приспособлены для решения оптимизационных задач соответствующего класса. Выбор того или иного метода обусловлен сложностью вычисления критерия идентификации χ , необходимой точностью решения, мощностью имеющейся вычислительной машины и т.д.

Численные методы решения задач нелинейного программирования можно разделить на прямые и непрямые. *Прямые методы* оперируют непосредственно исходными задачами оптимизации и учитывают ограничения на допустимую область Ω_{θ} в явном виде. В них в соответствии с правилом

$$\Theta^{k+1} = \Theta^k + \beta_k h^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.2)$$

генерируются последовательности Θ^k , для которых $\chi \Xi; \Theta^{k+1} < \chi \Xi; \Theta^k$. Здесь β_k – длина шага вдоль выбранного направления; h^k – вектор, определяющий направление спуска.

Непрямые методы сводят исходную оптимизационную задачу с ограничениями к задаче без ограничений (задаче безусловной оптимизации), например, с помощью метода штрафных функций. Исходные ограничения учитываются в неявном виде.

Методы безусловной минимизации в зависимости от порядка используемых производных подразделяются на методы нулевого, первого и второго порядков. *Методы нулевого порядка* используют только значения целевой функции. Эффективными методами нулевого порядка являются метод Розенброка, метод Пауэлла, метод конфигураций Хука–Дживса, симплекс-метод Нелдера–Мида.

Методы первого порядка (градиентные) используют кроме значений целевой функций значения ее производных. В градиентных методах h^k в соотношении (1.2) берется равным антиградиенту функции χ в точке Θ^k , т.е. итерационный процесс имеет вид:

$$\Theta^{k+1} = \Theta^k - \beta_k \nabla \chi \Xi; \Theta^k, \quad \beta_k > 0; \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.3)$$

Наиболее эффективными среди градиентных методов являются методы переменной метрики или квазиньютоновские, основанные на аппроксимации матрицы вторых производных или обратной к ней.

Методы второго порядка (ньютоновские) дополнительно требуют вычисления вторых производных и быстро сходятся, если целевая функция выпуклая и достаточно гладкая. К этой группе относятся метод Ньютона и его модификации. В случае метода Ньютона итерационная формула (1.2) имеет вид

$$\Theta^{k+1} = \Theta^k - \beta_k H^{-1} \Theta^k \nabla \chi \Xi; \Theta^k, \quad (1.4)$$

т.е.

$$h^k = -H^{-1} \Theta^k \nabla \chi \Xi; \Theta^k,$$

где H – матрица вторых производных минимизируемой функции χ .

Будем оценивать неизвестные параметры методами оптимизации нулевого, первого и второго порядков в соответствии с критериями максимального правдоподобия и наименьших квадратов.

1.2. Планирование оптимальных входных сигналов

1.2.1. Исходные понятия теории планирования оптимального эксперимента

При анализе моделей динамических систем теория оптимального планирования эксперимента позволяет различными способами воздействовать на повышение точности оценивания неизвестных параметров. В простейшем случае управление экспериментом сводится к выбору оптимальных моментов измерений, в более сложном – к планированию оптимальных входных сигналов и начальных условий [9, 27, 53]. Возможны также различные варианты смешанных схем. Ограничимся задачей планирования оптимальных входных сигналов.

Оптимальный выбор входных сигналов позволяет экспериментатору при заданном числе запусков системы подготовить наиболее информативные данные наблюдений, использующиеся для нахождения оценок неизвестных параметров. Заметим, что свобода в выборе входных характеристик существенно различается в зависимости от приложений. В экономических и экологических системах у экспериментатора нет возможности воздействовать на систему с целью проведения идентификационных экспериментов, в то время как в лабораторных условиях и на стадиях разработки нового оборудования выбор входных величин имеет лишь амплитудные и мощностные ограничения.

Изложим некоторые основополагающие понятия и результаты теории планирования эксперимента.

Предположим, что экспериментатор может произвести v запусков системы, причем сигнал α_1 он подает на вход системы k_1 раз, сигнал α_2 – k_2 раза и так далее, наконец, сигнал α_q – k_q раз. В этом случае *дискретный (точный) нормированный план* эксперимента ξ_v пред-

ставляет собой совокупность точек $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$, называемых *спектром плана*, и соответствующих им долей повторных запусков:

$$\xi_v = \left\{ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q \right\}, \quad \alpha_i \in \Omega_\alpha, \quad i = 1, 2, \dots, q. \quad (1.5)$$

Множество планирования Ω_α определяется ограничениями на условия проведения эксперимента.

Под *непрерывным нормированным планом* ξ условимся понимать совокупность величин

$$\xi = \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q \\ p_1, p_2, \dots, p_q \end{array} \right\}, \quad p_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^q p_i = 1, \quad \alpha_i \in \Omega_\alpha, \quad i = 1, 2, \dots, q. \quad (1.6)$$

В отличие от дискретного нормированного плана в непрерывном нормированном плане снимается требование рациональности весов p_i .

В общем случае непрерывный нормированный план ξ соответствует вероятностной мере $\xi(d\alpha)$, заданной на области Ω_α и удовлетворяющей условиям неотрицательности и нормировки:

$$\int_{\Omega_\alpha} \xi(d\alpha) = 1, \quad \xi(d\alpha) > 0, \quad \alpha \in \Omega_\alpha. \quad (1.7)$$

При этом *нормированная информационная матрица* $M(\xi)$ плана определяется соотношением

$$M(\xi) = \int_{\Omega_\alpha} M(\alpha) \xi(d\alpha). \quad (1.8)$$

Для плана (1.6) интеграл в (1.8) переходит в сумму, т.е.

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^q p_i M(\alpha_i), \quad (1.9)$$

где $M(\alpha_i)$ – информационные матрицы точек спектра плана.

Если $L Y_1^N; \Theta$ – плотность совместного распределения вероятностей по совокупности измерений $Y_1^N = y(1), y(2), \dots, y(N)$ при фикси-

рованном значении вектора параметров Θ , то *информационная матрица Фишера* одноточечного плана определяется равенствами [11]

$$\begin{aligned} M(\alpha) &= \left\| E_Y \left[\frac{\partial \ln L(Y_1^N; \Theta)}{\partial \theta_i} \frac{\partial \ln L(Y_1^N; \Theta)}{\partial \theta_j} \right] \right\| = \\ &= \left\| E_Y \left[-\frac{\partial^2 \ln L(Y_1^N; \Theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right] \right\|, \end{aligned} \quad (1.10)$$

в которых усреднение берется по выборочному пространству.

ТЕОРЕМА 1 [28–30, 37]

Нормированные информационные матрицы обладают следующими свойствами:

1. Для любого непрерывного нормированного плана ξ информационная матрица $M(\xi)$ – вещественная, симметричная, неотрицательно-определенная матрица порядка $s \times s$ (s – количество неизвестных параметров).

2. Множество матриц $M(\xi)$, соответствующее всем возможным нормированным планам (1.6), является выпуклым. Если область допустимых входных сигналов Ω_α замкнута, то и множество информационных матриц замкнуто.

3. Для любого непрерывного нормированного плана ξ всегда найдется дискретный план ξ_d , спектр которого содержит не более чем $d = \frac{s(s+1)}{2} + 1$ точек и нормированная информационная матрица $M(\xi_d)$ которого совпадает с информационной матрицей $M(\xi)$ плана ξ .

Доказательство

1. Вытекает непосредственно из (1.8) и (1.10).

2. Пусть ξ_1 и ξ_2 – два произвольных плана, заданных на множестве Ω_α , а $\xi_1(d\alpha)$ и $\xi_2(d\alpha)$ – им соответствующие вероятностные меры. Следуя [6], условимся под линейной комбинацией планов

$$\xi = a\xi_1 + (1-a)\xi_2 \quad (0 \leq a \leq 1) \quad (1.11)$$

понимать нормированный план с вероятностной мерой

$$a\xi_1(d\alpha) + (1-a)\xi_2(d\alpha).$$

Проверим, что матрица

$$aM(\xi_1) + (1-a)M(\xi_2)$$

является информационной матрицей плана ξ , заданного на Ω_α , т. е. принадлежит рассматриваемому множеству. Действительно, в силу (1.8)

$$\begin{aligned} M(\xi) &= \int_{\Omega_\alpha} M(\alpha)\xi(d\alpha) = \int_{\Omega_\alpha} M(\alpha)a\xi_1(d\alpha) + \int_{\Omega_\alpha} M(\alpha)(1-a)\xi_2(d\alpha) = \\ &= a \int_{\Omega_\alpha} M(\alpha)\xi_1(d\alpha) + (1-a) \int_{\Omega_\alpha} M(\alpha)\xi_2(d\alpha) = aM(\xi_1) + (1-a)M(\xi_2). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Из (1.12) и определения *выпуклого множества*¹ следует, что множество информационных матриц, соответствующих непрерывным нормированным планам, заданным на Ω_α , выпукло.

Замкнутость множества информационных матриц следует из равенства (1.8), замкнутости Ω_α и непрерывности $M(\alpha)$.

3. Симметричная матрица $M(\xi)$ полностью определяется $\frac{s(s+1)}{2}$ элементами. Поэтому каждой информационной матрице можно поставить в соответствие вектор размерности $\frac{s(s+1)}{2}$. Из определения информационной матрицы следует, что множество векторов, определяющих $M(\xi)$, является *выпуклой оболочкой множества*², состоящего из векторов, соответствующих информационным матрицам $M(\alpha)$ однотоочечных планов. Отсюда и из теоремы Каратеодори [6, 10] вытекает справедливость третьего пункта теоремы.

Теорема доказана.

¹ Множество V называется выпуклым, если любая точка $v = av_1 + (1-a)v_2$, где $v_1 \in V$, $v_2 \in V$ и $0 \leq a \leq 1$, принадлежит этому множеству.

² Множество V^* точек $v^* = \sum_{i=1}^k a_i v_i$, где $\sum_{i=1}^k a_i = 1$, $a_i \geq 0$, $v_i \in V$, называется выпуклой оболочкой множества V .

Свойство 3 важно с практической точки зрения. Оно позволяет заменить непрерывный нормированный план, обладающий теми или иными экстремальными показателями информационной матрицы, столь же эффективным дискретным планом.

Планирование оптимальных экспериментов опирается на критерии оптимальности планов. Перечислим наиболее важные критерии, отражающие точность оценивания неизвестных параметров [6–10].

1. *Критерий D-оптимальности.* План ξ^* называется *D-оптимальным*, если

$$\xi^* = \arg \max_{\xi \in \Omega_\xi} \det M(\xi) = \arg \min_{\xi \in \Omega_\xi} \det D(\xi), \quad (1.13)$$

где $D(\xi) = M^{-1}(\xi)$ – *дисперсионная матрица плана*.

Для *D-оптимального* плана объем эллипсоида рассеивания оценок параметров минимален.

2. *Критерий A-оптимальности.* План ξ^* называется *A-оптимальным*, если его дисперсионная матрица имеет наименьший след, т.е.

$$\xi^* = \arg \min_{\xi \in \Omega_\xi} \text{Sp} D(\xi). \quad (1.14)$$

A-оптимальный план позволяет найти оценки неизвестных параметров с минимальной средней дисперсией. При этом эллипсоид рассеивания имеет минимальную сумму квадратов длин осей и наименьшую длину диагоналей параллелепипеда, описанного около этого эллипсоида.

3. *Критерий E-оптимальности.* План ξ^* называется *E-оптимальным*, если он минимизирует (максимизирует) максимальное (минимальное) собственное значение дисперсионной (информационной) матрицы, т.е.

$$\xi^* = \arg \max_{\xi \in \Omega_\xi} \min_i \lambda_i M(\xi) = \arg \min_{\xi \in \Omega_\xi} \max_i \lambda_i D(\xi),$$

где λ_i – собственное значение матрицы $M(\xi)$ или $D(\xi)$.

Поскольку для рассматриваемых в монографии моделей информационные матрицы точек плана и сам оптимальный план зависят от неизвестных параметров, в дальнейшем будем иметь в виду только *локально-оптимальное планирование*.

Ограничимся построением D - и A -оптимальных планов. В этом случае чрезвычайно полезной оказывается следующая *теорема эквивалентности*.

ТЕОРЕМА 2 [28, 37, 54]

Следующие утверждения:

- 1) план ξ^* минимизирует $X[M(\xi)]$;
- 2) план ξ^* минимизирует $\max_{\alpha \in \Omega_\alpha} \mu(\alpha, \xi)$;
- 3) $\max_{\alpha \in \Omega_\alpha} \mu(\alpha, \xi^*) = \eta$

эквивалентны между собой. Информационные матрицы планов, удовлетворяющих условиям 1 – 3, совпадают. Любая линейная комбинация планов, удовлетворяющих 1 – 3, также удовлетворяет 1–3.

Значения параметров теоремы эквивалентности $X[M(\xi)]$, $\mu(\alpha, \xi)$, η представим в табл. 1.1.

Т а б л и ц а 1.1

Соответствие значений параметров теоремы эквивалентности критериям оптимальности

Критерий	Параметры		
	$X[M(\xi)]$	$\mu[\alpha, \xi]$	η
D -оптимальности	$-\ln \det M(\xi)$	$\text{Sp}[M^{-1}(\xi)M(\alpha)]$	s
A -оптимальности	$\text{Sp}M^{-1}(\xi)$	$\text{Sp}[M^{-2}(\xi)M(\alpha)]$	$\text{Sp}M^{-1}(\xi)$

Доказательство

Начнем с критерия A -оптимальности.

1. Покажем, что из 1 следует 2 и 3. Пусть план ξ^* минимизирует $\text{Sp}M^{-1}(\xi)$. Рассмотрим план, соответствующий линейной комбинации плана ξ^* и некоторого произвольного плана ξ :

$$\tilde{\xi} = (1-a)\xi^* + a\xi, \quad 0 \leq a \leq 1. \quad (1.15)$$

В силу выпуклости множества информационных матриц, соответствующих непрерывным нормированным планам, можно записать, что

$$M(\tilde{\xi}) = (1-a)M(\xi^*) + aM(\xi) .$$

Поскольку план ξ^* минимизирует $\text{Sp}M^{-1}(\xi)$, всякое отклонение от ξ^* приведет к увеличению $\text{Sp}M^{-1}(\xi)$, т.е.

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial a} \text{Sp}M^{-1}(\tilde{\xi}) \right|_{a=0} &= \text{Sp} \left. \frac{\partial}{\partial a} M^{-1}(\tilde{\xi}) \right|_{a=0} = \text{Sp} \left[-M^{-1}(\tilde{\xi}) \frac{\partial M(\tilde{\xi})}{\partial a} M^{-1}(\tilde{\xi}) \right] \Big|_{a=0} = \\ &= \text{Sp} M^{-1}(\xi^*) \left[M(\xi^*) - M(\xi) \right] M^{-1}(\xi^*) = \\ &= \text{Sp}M^{-1}(\xi^*) - \text{Sp} M^{-2}(\xi^*)M(\xi) \geq 0 . \end{aligned}$$

Полагая, что спектр плана ξ состоит из одной точки $\alpha \in \Omega_\alpha$, можно получить

$$\text{Sp}M^{-1}(\xi^*) \geq \text{Sp} M^{-2}(\xi^*)M(\alpha) . \quad (1.16)$$

С другой стороны, для любого плана ξ

$$\begin{aligned} \text{Sp}M^{-1}(\xi) &= \text{Sp} M^{-2}(\xi)M(\xi) = \text{Sp} \left\{ M^{-2}(\xi) \int_{\Omega_\alpha} M(\alpha)\xi(d\alpha) \right\} = \\ &= \int_{\Omega_\alpha} \text{Sp}(M^{-2}(\xi)M(\alpha))\xi(d\alpha) \leq \max_{\alpha \in \Omega_\alpha} \text{Sp}(M^{-2}(\xi)M(\alpha)) . \end{aligned} \quad (1.17)$$

Поскольку неравенство справедливо и для ξ^* ,

$$\text{Sp}(M^{-1}(\xi^*)) \leq \max_{\alpha \in \Omega_\alpha} \text{Sp}(M^{-2}(\xi)M(\alpha)) .$$

Таким образом, второй и третий пункты теоремы выполняются.

2. Покажем, что из 2 следуют 1 и 3. Пусть план ξ^* минимизирует $\max_{\alpha \in \Omega_\alpha} \mu(\alpha, \xi)$. В силу неравенства (1.17) это сразу же доказывает третий пункт теоремы.

Для вывода первого пункта предположим противное. Пусть план ξ^* минимизирует $\max_{\alpha \in \Omega_\alpha} \mu(\alpha, \xi)$ и не является A -оптимальным. Выпуклость функционала $\text{Sp} M^{-1}(\xi)$ на множестве информационных матриц обеспечивает существование ξ , для которого

$$\left. \frac{\partial}{\partial a} \text{Sp} M^{-1}((1-a)\xi^* + a\xi) \right|_{a=0} = \text{Sp} M^{-1}(\xi^*) - \text{Sp} \left[M^{-2}(\xi^*) M(\xi) \right] < 0. \quad (1.18)$$

В силу того, что любой план ξ можно представить в виде суперпозиции конечного числа одноточечных планов, будем считать, что ξ состоит из k точек. Тогда

$$\text{Sp} M^{-1}(\xi^*) - \text{Sp} \left[M^{-2}(\xi^*) M(\xi) \right] = \text{Sp} M^{-1}(\xi^*) - \sum_{i=1}^k p_i \text{Sp} \left[M^{-2}(\xi^*) M(\alpha_i) \right].$$

Поскольку план ξ^* минимизирует $\text{Sp} M^{-1}(\xi)$, для него выполняется неравенство (1.18) и

$$\text{Sp} M^{-1}(\xi^*) - \sum_{i=1}^k p_i \text{Sp} \left[M^{-2}(\xi^*) M(\alpha_i) \right] \geq \text{Sp} M^{-1}(\xi^*) - \text{Sp} M^{-1}(\xi^*) \sum_{i=1}^k p_i = 0,$$

т. е.

$$\begin{aligned} \text{Sp} M^{-1}(\xi^*) - \sum_{i=1}^k p_i \text{Sp} \left[M^{-2}(\xi^*) M(U_i) \right] &\geq \\ &\geq \text{Sp} M^{-1}(\xi^*) - \text{Sp} M^{-1}(\xi^*) \sum_{i=1}^k p_i = 0. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Неравенства (1.18) и (1.19) противоречат друг другу. Значит, предположение оказалось неверным и план, минимизирующий $\max_{\alpha \in \Omega_\alpha} \mu(\alpha, \xi)$, является A -оптимальным.

3. Покажем, что все планы, удовлетворяющие условиям 1–3, и их линейные комбинации имеют одинаковые информационные матрицы. Пусть планы ξ_1 и ξ_2 с информационными матрицами $M(\xi_1)$ и $M(\xi_2)$ соответственно являются A -оптимальными и $M(\xi_1) \neq M(\xi_2)$. Рассмотрим линейную комбинацию планов ξ_1 и ξ_2 :

$$\xi = (1-a)\xi_2 + a\xi_1. \quad (1.20)$$

Плану (1.20) соответствует информационная матрица

$$M(\xi) = (1-a)M(\xi_2) + aM(\xi_1). \quad (1.21)$$

Воспользовавшись свойством строгой выпуклости функционала $\text{Sp} M^{-1}(\xi)$, получим:

$$\text{Sp} M(\xi) \leq (1-a)\text{Sp} M(\xi_2) + a\text{Sp} M(\xi_1). \quad (1.22)$$

Поскольку планы ξ_1 и ξ_2 являются A -оптимальными,

$$\text{Sp} M^{-1}(\xi) \geq \text{Sp} M^{-1}(\xi_2) = \text{Sp} M^{-1}(\xi_1). \quad (1.23)$$

Неравенства (1.22) и (1.23) не противоречат друг другу, если

$$M(\xi_1) = M(\xi_2) = M(\xi).$$

Перейдем к критерию D -оптимальности.

1. Снова покажем, что из 1 следуют 2 и 3. Для этого рассмотрим план $\tilde{\xi}$, соответствующий линейной комбинации (1.15). Так как ξ^* максимизирует $\det M(\xi)$, то ξ^* максимизирует $\ln \det M(\xi)$, и всякое отклонение от ξ^* приведет к уменьшению $\ln \det M(\xi)$, т.е.

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial a} \ln \det M(\tilde{\xi}) \right|_{a=0} &= \text{Sp} \left[M^{-1}(\tilde{\xi}) \frac{\partial M(\tilde{\xi})}{\partial a} \right] \Big|_{a=0} = \\ &= \text{Sp} M^{-1}(\tilde{\xi}) \left[M(\xi) - M(\xi^*) \right] \Big|_{a=0} = \text{Sp} M^{-1}(\xi^*) M(\xi) - s \leq 0. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Если спектр плана ξ состоит из одной точки $\alpha \in \Omega_\alpha$, то из (1.24) получим

$$\text{Sp} M^{-1}(\xi^*) M(\alpha) = \mu(\alpha, \xi^*) \leq s. \quad (1.25)$$

Кроме того, для любого плана ξ справедливо

$$\begin{aligned} s = \text{Sp} M^{-1}(\xi) M(\xi) &= \int_{\Omega_\alpha} \text{Sp} M^{-1}(\xi) M(\alpha) \xi d(\alpha) \leq \max_{\alpha \in \Omega_\alpha} \text{Sp}(M^{-1}(\xi) M(\alpha)) = \\ &= \max_{\alpha \in \Omega_\alpha} \mu(\alpha, \xi). \end{aligned} \quad (1.26)$$

Так как неравенство справедливо и для ξ^* , то

$$\max_{\alpha \in \Omega_\alpha} \mu(\alpha, \xi^*) \geq s. \quad (1.27)$$

Из (1.25) – (1.27) следует, что второй и третий пункты теоремы выполняются.

2. Теперь покажем, что из 2 следуют 1 и 3. Пусть план ξ^* минимизирует $\max_{\alpha \in \Omega_\alpha} \mu(\alpha, \xi)$. В силу неравенства (1.26) это сразу же доказывает третий пункт теоремы.

Для вывода первого пункта предположим противное, т.е. что план ξ^* не D -оптимален. Отсюда следует, что $\ln \det M(\xi)$ строго вогнут на множестве невырожденных матриц, последнее равносильно существованию плана ξ , для которого

$$\left. \frac{\partial}{\partial a} \ln \det (1-a)M(\xi^*) + aM(\xi) \right|_{a=0} = \text{Sp} \left[M^{-1}(\xi^*)M(\xi) \right] - s > 0.$$

Воспользовавшись свойством 3 нормированной информационной матрицы, представим план ξ в виде суперпозиций конечного числа точек. Тогда

$$\text{Sp} \left[M^{-1}(\xi^*)M(\xi) \right] - s = \sum_{i=1}^k p_i \text{Sp} \left[M^{-1}(\xi^*)M(\alpha_i) \right] - s = \sum_{i=1}^k p_i \mu(\alpha_i, \xi^*) - s.$$

Для плана ξ^* выполняется

$$\sum_{i=1}^k p_i \mu(\alpha_i, \xi^*) - s \leq s \sum_{i=1}^k p_i - s = 0,$$

т.е.

$$\text{Sp} \left[M^{-1}(\xi^*)M(\xi) \right] - s \leq 0.$$

Получаем противоречие. Следовательно, наше предположение оказалось неверным и план является D -оптимальным.

3. Аналогично доказательству для A -оптимальных планов рассмотрим D -оптимальные планы ξ_1 , ξ_2 и план ξ , являющийся линейной

комбинацией этих планов, с соответствующими им информационными матрицами $M(\xi_1)$, $M(\xi_2)$ и $M(\xi)$.

Воспользовавшись свойством строгой вогнутости функционала $\ln \det M(\xi)$, имеем

$$\ln \det M(\xi) > (1-a) \ln \det M(\xi_2) + a \ln \det M(\xi_1).$$

Так как планы ξ_1 и ξ_2 являются D -оптимальными, то

$$\det M(\xi_1) = \det M(\xi_2) \geq \det M(\xi).$$

Следовательно,

$$M(\xi_1) = M(\xi_2) = M(\xi).$$

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1

В точках спектра A -оптимального плана ξ^* функция $\mu(\alpha, \xi^*)$ достигает своего максимального значения $\text{Sp } M^{-1}(\xi^*)$.

Доказательство

Предположим, что это не так и

$$\mu(\alpha, \xi) < \text{Sp } M^{-1}(\xi^*),$$

где α — одна из точек спектра плана ξ^* , тогда в силу третьего пункта теоремы

$$\int_{\Omega_\alpha} \mu(\alpha, \xi^*) \xi^*(d\alpha) < \max_{\alpha \in \Omega_\alpha} \mu(\alpha, \xi^*) \int_{\Omega_\alpha} \xi^*(d\alpha) = \max_{\alpha \in \Omega_\alpha} \mu(\alpha, \xi^*) = \text{Sp } M^{-1}(\xi^*).$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\alpha} \mu(\alpha, \xi^*) \xi^*(d\alpha) &= \int_{\Omega_\alpha} \text{Sp } M^{-2}(\xi^*) M(\alpha) \xi^*(d\alpha) = \\ &= \text{Sp} \left(M^{-2}(\xi^*) \int_{\Omega_\alpha} M(\alpha) \xi^*(d\alpha) \right) = \text{Sp } M^{-2}(\xi^*) M(\xi^*) = \text{Sp } M^{-1}(\xi^*). \end{aligned}$$

Получаем противоречие. Следствие доказано.

СЛЕДСТВИЕ 2

В точках D -оптимального плана ξ^* функция $\mu(\alpha, \xi^*)$ достигает своего максимального значения s .

Доказательство

Предположим, что это не так и

$$\mu(\alpha, \xi^*) < s,$$

тогда в силу третьего пункта теоремы эквивалентности

$$\int_{\Omega_\alpha} \mu(\alpha, \xi^*) \xi^* (d\alpha) < \max_{\alpha \in \Omega_\alpha} \mu(\alpha, \xi^*) \int_{\Omega_\alpha} \xi^* (d\alpha) = \max_{\alpha \in \Omega_\alpha} \mu(\alpha, \xi^*) = s.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\alpha} \mu(\alpha, \xi^*) \xi^* d(\alpha) &< \int_{\Omega_\alpha} \text{Sp} \left[M^{-1}(\xi^*) M(\alpha) \right] \xi^* d(\alpha) = \\ &= \text{Sp} \left[M^{-1}(\xi^*) M(\xi^*) \right] = s. \end{aligned}$$

Получаем противоречие. Следствие доказано.

Приведенные следствия удобны для проверок планов на A - и D -оптимальность.

Теорема 2 дает еще одну статистическую интерпретацию D -оптимального планирования экспериментов, утверждая эквивалентность D - и G -оптимальных планов. Критерий G -оптимальности относится к группе критериев, направленных на повышение точности оценивания функции отклика [6–10].

G -оптимальный (минимаксный) план ξ^* удовлетворяет условию

$$\max_{\alpha \in \Omega_\alpha} \text{Sp} \left[M^{-1}(\xi^*) M(\alpha) \right] = \min_{\xi \in \Omega_\xi} \max_{\alpha \in \Omega_\alpha} \text{Sp} \left[M^{-1}(\xi) M(\alpha) \right] \quad (1.28)$$

и обеспечивает не слишком высокую обобщенную дисперсию оценки функции отклика за счет минимизации максимальной по $\alpha \in \Omega_\alpha$ дисперсии.

1.2.2. Прямая градиентная процедура синтеза непрерывных оптимальных планов

Оптимизационную задачу

$$\xi^* = \arg \min_{\xi \in \Omega_\xi} X[M \xi] \quad (1.29)$$

можно решать непосредственно (напрямую) с помощью общих методов численного поиска экстремума [47–52]. Характерной особенностью этого подхода является большая размерность экстремальной задачи. Для выпуклого функционала $X[M \xi]$ имеем задачу выпуклого программирования, для решения которой предлагается следующий алгоритм.

Шаг 1. Зададим начальный невырожденный план

$$\xi_0 = \left\{ \alpha_1^0, \alpha_2^0, \dots, \alpha_q^0, \right. \\ \left. p_1^0, p_2^0, \dots, p_q^0 \right\}, \quad \alpha_i^0 \in \Omega_\alpha, \quad p_i^0 = \frac{1}{q}, \quad i = 1, 2, \dots, q,$$

в котором $q = \frac{s}{2} + 1$. Вычислим информационные матрицы $M \alpha_i^0$ одноточечных планов для $i = 1, 2, \dots, q$ и по формуле (1.9) информационную матрицу всего плана ξ_0 . Положим $l = 0$.

Шаг 2. Считая веса $p_1^l, p_2^l, \dots, p_q^l$ фиксированными, для задачи

$$X[M \xi_l] \rightarrow \min_{\alpha_1^l, \dots, \alpha_q^l}, \quad \alpha_i^l \in \Omega_\alpha, \quad i = 1, 2, \dots, q,$$

выполним одну итерацию метода проекции градиента [52]:

$$\tilde{A}^{l+1} = \pi_{\Omega_{\tilde{A}}} \tilde{A}^l - \rho_l' \nabla_{\tilde{A}} X[M \xi_l],$$

где $\tilde{A}^T = \alpha_1^T, \alpha_2^T, \dots, \alpha_q^T$;

$\pi_{\Omega_{\tilde{A}}}(z)$ – проекция точки на множество $\Omega_{\tilde{A}}$;

$\rho_l' \geq 0$ – длина шага.

Для сигналов, ограниченных по мощности или по амплитуде, когда $\Omega_{\tilde{A}}$ – соответственно координатный шар или параллелепипед, известны явные выражения для проекции [52]:

- если $\Omega_{\tilde{A}} = \tilde{A} \in R^k \mid \|\tilde{A}\| \leq C$, то $\pi_{\Omega_{\tilde{A}}} z = \frac{z}{\|z\|} C$;
- если $\Omega_{\tilde{A}} = \tilde{A} \in R^k \mid \beta_j \leq \tilde{A}_j \leq \gamma_j, j = 1, 2, \dots, k$, то

$$\left[\pi_{\Omega_{\tilde{A}}} z \right]_j = \begin{cases} \beta_j, & \text{если } z_j < \beta_j; \\ z_j, & \text{если } \beta_j \leq z_j \leq \gamma_j; \\ \gamma_j, & \text{если } z_j > \gamma_j. \end{cases}$$

Далее составим план

$$\tilde{\xi}_l = \left\{ \alpha_1^{l+1}, \alpha_2^{l+1}, \dots, \alpha_q^{l+1} \right\}, \\ \left\{ p_1^l, p_2^l, \dots, p_q^l \right\},$$

где α_i^{l+1} – точки, найденные на шаге 2. Вычислим $M \alpha_i^{l+1}$, $i = 1, 2, \dots, q$.

Шаг 3. Зафиксируем точки спектра полученного плана и для задачи

$$X \left[M \tilde{\xi}_l \right] \rightarrow \min_{p_1^l, p_2^l, \dots, p_q^l}, \quad \sum_{i=1}^q p_i^l = 1, \quad p_i^l \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, q$$

выполним одну итерацию метода проекции градиента Розена [47]:

$$\tilde{p}^{l+1} = \tilde{p}^l - \rho_l'' P \nabla_{\tilde{p}} X \left[M \tilde{\xi}_l \right],$$

где $\tilde{p} = p_1, p_2, \dots, p_q$, $\rho_l'' \geq 0$ – длина шага;

P – матрица оператора проектирования.

Составим план

$$\xi_{l+1} = \left\{ \alpha_1^{l+1}, \alpha_2^{l+1}, \dots, \alpha_q^{l+1} \right\}, \\ \left\{ p_1^{l+1}, p_2^{l+1}, \dots, p_q^{l+1} \right\}.$$

Шаг 4. Если выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^q \left[\left\| \alpha_i^{l+1} - \alpha_i^l \right\|^2 + \left| p_i^{l+1} - p_i^l \right|^2 \right] \leq \delta,$$

где δ – малое положительное число, перейдем на шаг 5. В противном случае для $l = l + 1$ повторим шаги 2 и 3.

Шаг 5. Проверим необходимое условие оптимальности плана.

$$\left| \mu \left(\alpha_i^{l+1}, \xi_{l+1} \right) - \eta \right| \leq \delta, \quad i = 1, 2, \dots, q.$$

Соответствие значений параметров $X(M(\xi))$, $\mu(\alpha, \xi)$, η прямой процедуры критериям A - и D -оптимальности такое же, как в табл. 1.1.

Если необходимое условие оптимальности выполняется, закончим процесс. В противном случае повторим все сначала, скорректировав начальное приближение ξ_0 .

Приведенный алгоритм требует вычисления градиентов $\nabla_{\bar{A}} X[M(\xi)]$ и $\nabla_{\bar{p}} X[M(\xi)]$.

1.2.3. Двойственная градиентная процедура синтеза непрерывных оптимальных планов

Другой подход (его называют двойственным) к решению оптимизационной задачи (1.29) основан на теореме 2 и заключается в минимизации $X[M(\xi)]$ по набору аргументов α_i, p_i при ограничениях $\alpha_i \in \Omega_\alpha, p_i \geq 0, \sum_{i=1}^q p_i = 1$. В этом случае рассматриваемая задача уже не является задачей выпуклого программирования, но размерность вектора варьируемых параметров может оказаться значительно меньше, чем при прямом подходе.

Предложим следующий двойственный алгоритм синтеза оптимальных входных сигналов [6, 55].

Шаг 1. Зададим начальный невырожденный план ξ_0 и по формуле (1.9) вычислим нормированную матрицу $M(\xi_0)$ плана. Положим $l = 0$.

Шаг 2. Найдем локальный максимум

$$\alpha^l = \arg \max_{\alpha \in \Omega_\alpha} \mu \alpha, \xi_l$$

методом проектирования градиента. Если окажется, что

$$\left| \mu \alpha^l, \xi_l - \eta \right| \leq \delta,$$

закончим процесс.

Если

$$\mu \alpha^l, \xi_l > \eta,$$

перейдем к шагу 3. В противном случае будем искать новый локальный максимум.

Шаг 3. Вычислим τ_l по формуле

$$\tau_l = \arg \min_{0 \leq \tau \leq 1} X \left[M \xi_{l+1}^\tau \right],$$

$$\xi_{l+1}^\tau = 1 - \tau \xi_l + \tau \xi \alpha^l,$$

где $\xi \alpha^l$ – одноточечный план, размещенный в точке α^l .

Шаг 4. Составим план

$$\xi_{l+1} = 1 - \tau_l \xi_l + \tau_l \xi \alpha^l,$$

произведем его «очистку» в соответствии с рекомендациями из [6], положим $l = l + 1$ и перейдем на шаг 2.

Приведенный алгоритм построения оптимальных сигналов требует вычисления градиента $\nabla_\alpha \mu \alpha, \xi$.

Практическое применение построенного непрерывного оптимального плана

$$\xi^* = \left\{ \begin{matrix} \alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_q^* \\ p_1^*, p_2^*, \dots, p_q^* \end{matrix} \right\}, \quad \sum_{i=1}^q p_i^* = 1, \quad p_i^* \geq 0, \quad \alpha_i^* \in \Omega_\alpha, \quad i = 1, 2, \dots, q,$$

затруднено тем обстоятельством, что веса p_i^* представляют собой, вообще говоря, произвольные вещественные числа, заключенные в интервале от нуля до единицы. Несложно заметить, что в случае заданного числа v возможных запусков системы величины $k_i^* = vp_i^*$ могут оказаться нецелыми числами. Проведение эксперимента требует округления величин k_i^* до целых чисел. Очевидно, что полученный в результате такого округления план будет отличаться от оптимального непрерывного плана, причем приближение тем лучше, чем больше число возможных запусков.

Рассмотрим алгоритм «округления» непрерывного плана до точного [10].

Шаг 1. Вычислим числа σ'_i и σ''_i по формулам

$$\sigma'_i = \left\lceil v - q p_i^* \right\rceil; \quad \sigma''_i = \left\lfloor vp_i^* \right\rfloor, \quad i = 1, 2, \dots, q.$$

Здесь $\lceil z \rceil$ – ближайшее к z целое число, большее z ;

$\lfloor z \rfloor$ – целая часть числа z .

Шаг 2. Вычислим v' и v'' , воспользовавшись выражениями

$$v' = v - \sum_{i=1}^q \sigma'_i;$$

$$v'' = v - \sum_{i=1}^q \sigma''_i.$$

При этом если $v' < v''$, то $\sigma_i = \sigma'_i$ для $i = 1, 2, \dots, q$ и $v_1 = v'$. В противном случае $\sigma_i = \sigma''_i$, $v_1 = v''$.

Шаг 3. Величины $vp_i^* - \sigma_i$ ($i = 1, 2, \dots, q$) расположим в порядке убывания их значений. Положим $j = 1$.

Шаг 4. Если $vp_j^* - \sigma_j$ стоит на одном из первых v_1 мест в указанном упорядоченном наборе, то положим $s_j = 1$, в противном случае $s_j = 0$.

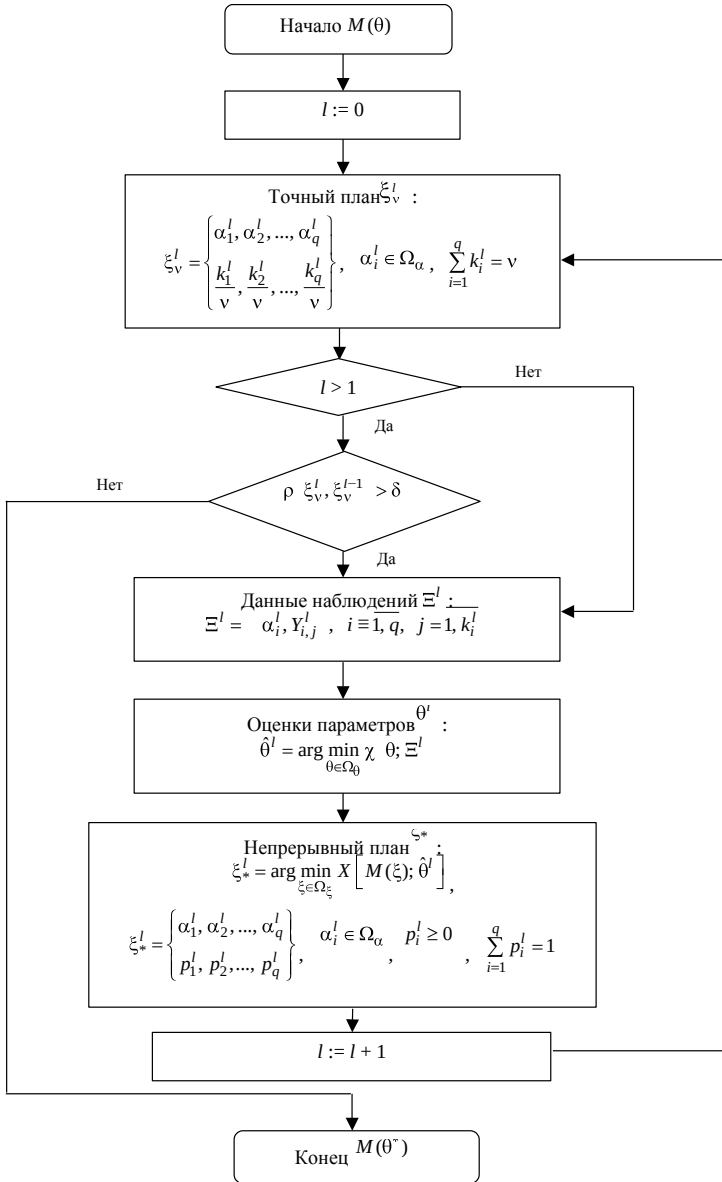


Рис. 1.1. Схема процедуры активной идентификации

Шаг 5. Если $j < q$, увеличим j на единицу и перейдем на шаг 4. В противном случае сформируем приближенный дискретный план

$$\xi_v^* = \left\{ \alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_q^* \right\} = \left\{ \alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_q^* \right\} \\ \left\{ \frac{\sigma_1 + s_1}{v}, \frac{\sigma_2 + s_2}{v}, \dots, \frac{\sigma_q + s_q}{v} \right\} = \left\{ \frac{k_1^*}{v}, \frac{k_2^*}{v}, \dots, \frac{k_q^*}{v} \right\}.$$

Изложенные в данной главе вопросы оценивания неизвестных параметров и планирования оптимальных входных сигналов позволяют в случае предварительно выбранной структуры математической модели представить процедуру активной идентификации в виде схемы на рис. 1.1.

Г л а в а 2

ПРИКЛАДНЫЕ АСПЕКТЫ АКТИВНОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ ВО ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ

2.1. Оценивание неизвестных параметров дискретных систем

2.1.1. Структура дискретной модели

*Р*ассмотрим следующую модель управляемой, наблюдаемой и идентифицируемой стохастической линейной дискретной системы в пространстве состояний:

$$x(t+1) = \Phi x(t) + \Psi u(t) + \Gamma w(t), \quad (2.1)$$

$$y(t+1) = Hx(t+1) + v(t+1), \quad t = 0, 1, \dots, N-1. \quad (2.2)$$

Здесь $x(t)$ — n -вектор состояния;
 $u(t)$ — r -вектор управления (входа);
 $w(t)$ — p -вектор возмущения;
 $y(t+1)$ — m -вектор измерения (выхода);
 $v(t+1)$ — m -вектор ошибки измерения.

Предположим, что:

- Φ, Ψ, Γ, H — постоянные матрицы соответствующих размеров;
- Φ устойчива (все собственные значения матрицы Φ лежат внутри окружности единичного радиуса с центром в начале координат);

- пары (Φ, Ψ) и (Φ, Γ) управляемы $rg[\Psi, \Phi\Psi, \dots, \Phi^{n-1}\Psi] = n$, $rg[\Gamma, \Phi\Gamma, \dots, \Phi^{n-1}\Gamma] = n$), пара (Φ, H) – наблюдаема $rg[H^T, \Phi^T H^T, \dots, (\Phi^T)^{n-1} H^T] = n$;

- случайные векторы $w(t)$ и $v(t+1)$ образуют стационарные белые гауссовские последовательности, причем

$$E[w(t)] = 0, \quad E[w(t)w^T(\tau)] = Q\delta_{t,\tau}; \quad (2.3)$$

$$E[v(t+1)] = 0, \quad E[v(t+1)v^T(\tau+1)] = R\delta_{t,\tau}; \quad (2.4)$$

$$E[v(t)w^T(\tau)] = 0, \quad (2.5)$$

для любых $t, \tau = 0, 1, \dots, N-1$ ($\delta_{t,\tau}$ – символ Кронекера);

- начальное состояние $x(0)$ имеет нормальное распределение с параметрами $\bar{x}(0)$, $P(0)$ и не коррелирует с $w(t)$ и $v(t+1)$ при любых значениях переменной t .

Будем считать, что подлежащие оцениванию параметры $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s)$ могут входить в элементы матриц $\Phi, \Psi, \Gamma, H, Q, R, P(0)$ и в вектор $\bar{x}(0)$ в различных комбинациях.

2.1.2. Критерии идентификации для дискретных систем

Оценивание неизвестных параметров математической модели будем осуществлять по данным наблюдений Ξ в соответствии с выбранным критерием идентификации χ .

Будем считать, что каждая точка α_i спектра плана ξ , определяемого соотношением (2.6), представляет собой последовательность импульсов, «развернутую во времени», т.е.

$$\alpha_i^T = U_i^T = [u^i(0)]^T, [u^i(1)]^T, \dots, [u^i(N-1)]^T, \quad i = 1, 2, \dots, q.$$

Если через $Y_{i,j}$ обозначить j -ю реализацию выходного сигнала ($j = 1, 2, \dots, k_i$), соответствующую i -му входному сигналу U_i ($i =$

$= 1, 2, \dots, q$), то в результате проведения по плану ξ_v идентификационных экспериментов будет сформировано множество

$$\Xi = U_i, Y_{i,j}, \quad j=1, 2, \dots, k_i, \quad i=1, 2, \dots, q, \quad \sum_{i=1}^q k_i = v.$$

Уточним структуру $Y_{i,j}$:

$$Y_{i,j}^T = [y^{i,j}(1)]^T, [y^{i,j}(2)]^T, \dots, [y^{i,j}(N)]^T, \quad j=1, 2, \dots, k_i, \quad i=1, 2, \dots, q$$

и заметим, что в случае пассивной параметрической идентификации, как правило, $q = v = 1$.

Для оценивания параметров воспользуемся методами максимального правдоподобия (ММП) и наименьших квадратов (МНК).

Начнем с метода максимального правдоподобия [42, 43]. В соответствии с этим методом необходимо найти такие значения параметров $\Theta = \hat{\Theta}_{ML}$, для которых выражение (1.1) принимает вид

$$\hat{\Theta}_{ML} = \arg \min_{\theta \in \Omega_\theta} [-\ln L(\Xi; \theta)], \quad (2.6)$$

где в качестве целевой функции выступает $\ln L(\Xi; \theta)$ – логарифмическая функция правдоподобия.

Для построения логарифмической функции правдоподобия введем в рассмотрение обновляющую последовательность:

$$\varepsilon^{i,j}(t+1) = y^{i,j}(t+1) - \hat{y}^{i,j}(t+1|t), \quad (2.7)$$

где $\hat{y}^{i,j}(t+1|t)$ определяются по соответствующим рекуррентным уравнениям дискретного фильтра Калмана [56]:

$$\hat{x}^{i,j}(t+1|t) = \Phi \hat{x}^{i,j}(t|t) + \Psi u^i(t); \quad (2.8)$$

$$P(t+1|t) = \Phi P(t|t) \Phi^T + \Gamma Q \Gamma^T; \quad (2.9)$$

$$\hat{y}^{i,j}(t+1|t) = H \hat{x}^{i,j}(t+1|t); \quad (2.10)$$

$$B(t+1) = H P(t+1|t) H^T + R; \quad (2.11)$$

$$K(t+1) = P(t+1|t) H^T B^{-1}(t+1); \quad (2.12)$$

$$\hat{x}^{i,j}(t+1|t+1) = \hat{x}^{i,j}(t+1|t) + K(t+1)\varepsilon^{i,j}(t+1); \quad (2.13)$$

$$P(t+1|t+1) = [I - K(t+1)H]P(t+1|t), \quad (2.14)$$

для $t = 0, 1, \dots, N-1$, $j=1, 2, \dots, k_i$, $i=1, 2, \dots, q$, с начальными условиями: $\hat{x}^{i,j}(0|0) = \bar{x}(0)$, $P(0|0) = P(0)$.

Здесь $\hat{x}^{i,j}(t+1|t)$ – оценка одношагового предсказания состояния $x^{i,j}(t+1)$;

$$P(t+1|t) = E [x^{i,j}(t+1) - \hat{x}^{i,j}(t+1|t)][x^{i,j}(t+1) - \hat{x}^{i,j}(t+1|t)]^T -$$

ковариационная матрица ошибок одношагового предсказания;

$$\hat{x}^{i,j}(t+1|t+1) - \text{оценка фильтрации состояния } x^{i,j}(t+1);$$

$$P(t+1|t+1) = E [x^{i,j}(t+1) - \hat{x}^{i,j}(t+1|t+1)][x^{i,j}(t+1) -$$

$-\hat{x}^{i,j}(t+1|t+1)]^T$ – ковариационная матрица ошибок фильтрации.

Вычислим ковариационную матрицу вектора $\varepsilon^{i,j}(t+1)$:

$$\begin{aligned} \text{cov} \varepsilon^{i,j}(t+1) &= E \varepsilon^{i,j}(t+1) [\varepsilon^{i,j}(t+1)]^T = \\ &= E [y^{i,j}(t+1) - \hat{y}^{i,j}(t+1|t)] [y^{i,j}(t+1) - \hat{y}^{i,j}(t+1|t)]^T = \\ &= E [Hx^{i,j}(t+1) + v^{i,j}(t+1) - H\hat{x}^{i,j}(t+1|t)] \times \\ &\quad \times [Hx^{i,j}(t+1) + v^{i,j}(t+1) - H\hat{x}^{i,j}(t+1|t)]^T = \\ &= E [H(x^{i,j}(t+1) - \hat{x}^{i,j}(t+1|t)) + v^{i,j}(t+1)] \times \\ &\quad \times [H(x^{i,j}(t+1) - \hat{x}^{i,j}(t+1|t)) + v^{i,j}(t+1)]^T = \\ &= HE [x^{i,j}(t+1) - \hat{x}^{i,j}(t+1|t)] [x^{i,j}(t+1) - \hat{x}^{i,j}(t+1|t)]^T H^T + \\ &\quad + HE [x^{i,j}(t+1) - \hat{x}^{i,j}(t+1|t)] [v^{i,j}(t+1)]^T + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + E \left[v^{i,j}(t+1) \right] \left[x^{i,j}(t+1) - \hat{x}^{i,j}(t+1|t) \right]^T H^T + \\
& + E \left[v^{i,j}(t+1) \right] \left[v^{i,j}(t+1) \right]^T = HP(t+1|t)H^T + R = B(t+1).
\end{aligned}$$

Определим условную плотность распределения вероятности $f \left[y^{i,j}(t+1) | Y_{i,j} \right]$ по уравнениям фильтра Калмана (2.7)–(2.14):

$$\begin{aligned}
& f \left[y^{i,j}(t+1) | Y_{i,j} \right] = \\
& = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m \det B(t+1)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[y^{i,j}(t+1) - \hat{y}^{i,j}(t+1|t) \right]^T B^{-1}(t+1) \times \right. \\
& \quad \left. \times \left[y^{i,j}(t+1) - \hat{y}^{i,j}(t+1|t) \right] \right\} = \\
& = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m \det B(t+1)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\varepsilon^{i,j}(t+1) \right]^T B^{-1}(t+1) \varepsilon^{i,j}(t+1) \right\}; \\
& \quad t = 1, 2, \dots, N-1, \quad j = 1, 2, \dots, k_i, \quad i = 1, 2, \dots, q. \tag{2.15}
\end{aligned}$$

Заметим, что

$$f \left[y^{i,j}(1) \right] = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m \det B(1)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\varepsilon^{i,j}(1) \right]^T B^{-1}(1) \varepsilon^{i,j}(1) \right\}. \tag{2.16}$$

Учитывая, что $y^{i,j}(t+1), t = 0, 1, \dots, N-1$ – гауссовский марковский процесс, с использованием соотношений (2.15), (2.16) можно записать

$$\begin{aligned}
L(U_i, Y_{i,j}) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{Nm}{2}} \prod_{t=0}^{N-1} (\det B(t+1))^{\frac{1}{2}}} \times \\
& \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{t=0}^{N-1} \left[\varepsilon^{i,j}(t+1) \right]^T B^{-1}(t+1) \left[\varepsilon^{i,j}(t+1) \right] \right\}. \tag{2.17}
\end{aligned}$$

Тогда

$$L(\xi_v; \theta) = \prod_{i=1}^q \prod_{j=1}^{k_i} L(U_i, Y_{i,j}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{Nm(k_1+\dots+k_q)}{2}} \prod_{t=0}^{N-1} \det B(t+1)^{\frac{(k_1+\dots+k_q)}{2}}} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{k_i} \sum_{t=0}^{N-1} \left[\varepsilon^{i,j}(t+1) \right]^T B^{-1}(t+1) \left[\varepsilon^{i,j}(t+1) \right] \right\}. \quad (2.18)$$

Согласно (2.18) для метода максимального правдоподобия критерий идентификации имеет вид:

$$\chi(\theta) = -\ln L(\xi_v; \theta) = \\ = \frac{Nmv}{2} \ln 2\pi + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{k_i} \sum_{t=0}^{N-1} \left[\varepsilon^{i,j}(t+1) \right]^T B^{-1}(t+1) \left[\varepsilon^{i,j}(t+1) \right] + \\ + \frac{1}{2} v \sum_{t=0}^{N-1} \ln \det B(t+1). \quad (2.19)$$

Нетрудно показать, что в случае поиска оценок неизвестных параметров методом наименьших квадратов

$$\chi(\theta) = J \xi_v; \theta = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{k_i} \sum_{t=0}^{N-1} \left[\varepsilon^{i,j}(t+1) \right]^T B^{-1}(t+1) \left[\varepsilon^{i,j}(t+1) \right]. \quad (2.20)$$

Поиск условного минимума функций (2.19) и (2.20) можно осуществлять численно с привлечением методов Нелдера–Мида, наискорейшего спуска и Ньютона–Гаусса.

2.1.3. Алгоритмы вычисления значений и градиентов критериев идентификации

Для нахождения оценок методами Нелдера–Мида, наискорейшего спуска и Ньютона – Гаусса необходимо знать значение целевой функции, ее градиент и информационную матрицы Фишера, алгоритм вычисления которой будет приведен в разделе 2.3.

Ранее было получено выражение (2.18) для критерия идентификации по методу максимального правдоподобия.

Подчеркнем, что оцениваемые параметры неявно входят в $\varepsilon^{i,j}(t+1)$, $B(t+1)$ и, как следствие, в $B^{-1}(t+1)$ для каждого значения $t = 0, 1, \dots, N-1$.

Предложим следующий алгоритм вычисления критерия максимального правдоподобия $\chi(\theta)$:

1°. Для заданного θ найдем:

$$\Phi, Q, \Psi, R, \Gamma, \bar{x}(0), H, P(0).$$

2°. Положим $t = 0$; $i = 1$; $j = 1$; $\chi(\theta) = \frac{Nm\nu}{2} \ln 2\pi$; $\Delta_2 = 0$; $P(0|0) = P(0)$.

3°. Используя выражения фильтра Калмана, вычислим:

$$P(t+1|t) = \Phi P(t|t) \Phi^T + \Gamma Q \Gamma^T;$$

$$B(t+1) = H P(t+1|t) H^T + R;$$

$$K(t+1) = P(t+1|t) H^T B^{-1}(t+1);$$

$$P(t+1|t+1) = [I - K(t+1)H] P(t+1|t).$$

4°. Вычислим $\Delta_2 = \Delta_2 + \frac{1}{2} \nu \ln \det B(t+1)$.

5°. Увеличим t на единицу. Если $t \leq N-1$, перейдем на шаг 3°. В противном случае на шаг 6°.

6°. Положим $t = 0$.

7°. Используя выражения фильтра Калмана, найдем:

$$\hat{x}^{i,j}(t+1|t) = \Phi \hat{x}^{i,j}(t|t) + \Psi u^i(t);$$

$$\varepsilon^{i,j}(t+1) = y^{i,j}(t+1) - H \hat{x}^{i,j}(t+1|t);$$

$$\hat{x}^{i,j}(t+1|t+1) = \hat{x}^{i,j}(t+1|t) + K(t+1) \varepsilon^{i,j}(t+1).$$

8°. Найдем значение приращения логарифмической функции правдоподобия Δ_1 , соответствующее текущему значению времени:

$$\Delta_1 = \frac{1}{2} \left[\varepsilon^{i,j}(t+1) \right]^T B^{-1}(t+1) \left[\varepsilon^{i,j}(t+1) \right].$$

9°. Положим $\chi(\theta) = \chi(\theta) + \Delta_1$.

10°. Увеличим t на единицу. Если $t \leq N-1$, перейдем на шаг 7°. В противном случае на шаг 11°.

11°. Увеличим j на единицу. Если $j \leq k_i$, перейдем на шаг 6°. В противном случае на шаг 12°.

12°. Увеличим i на единицу. Если $i \leq q$, перейдем на шаг 6°. В противном случае на шаг 13°.

13°. Положим $\chi(\theta) = \chi(\theta) + \Delta_2$ и закончим процесс.

Для вычисления градиента критерия идентификации по методу максимального правдоподобия продифференцируем (2.19) по θ_k :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi(\theta)}{\partial \theta_k} = & \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{k_i} \sum_{t=0}^{N-1} \left[\frac{\partial \varepsilon^{i,j}(t+1)}{\partial \theta_k} \right]^T B^{-1}(t+1) [\varepsilon^{i,j}(t+1)] - \\ & - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{k_i} \sum_{t=0}^{N-1} [\varepsilon^{i,j}(t+1)]^T B^{-1}(t+1) \frac{\partial B(t+1)}{\partial \theta_k} B^{-1}(t+1) \varepsilon^{i,j}(t+1) + \\ & + \frac{\nu}{2} \sum_{t=0}^{N-1} \text{Sp} \left[B^{-1}(t+1) \frac{\partial B(t+1)}{\partial \theta_k} \right]. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Соотношение (2.21) позволяет предложить следующий алгоритм для вычисления градиента логарифма функции правдоподобия.

1°. Для заданного θ найдем:

$$\begin{aligned} \Phi, \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_k}, \quad k=1, 2, \dots, s; \quad Q, \frac{\partial Q}{\partial \theta_k}, \quad k=1, 2, \dots, s; \\ \Psi, \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_k}, \quad k=1, 2, \dots, s; \quad R, \frac{\partial R}{\partial \theta_k}, \quad k=1, 2, \dots, s; \\ \Gamma, \frac{\partial \Gamma}{\partial \theta_k}, \quad k=1, 2, \dots, s; \quad \bar{x}(0), \frac{\partial \bar{x}(0)}{\partial \theta_k}, \quad k=1, 2, \dots, s; \\ H, \frac{\partial H}{\partial \theta_k}, \quad k=1, 2, \dots, s; \quad P(0), \frac{\partial P(0)}{\partial \theta_k}, \quad k=1, 2, \dots, s. \end{aligned}$$

2°. Положим $t = 0; i = 1; j = 1; \frac{\partial \chi(\theta)}{\partial \theta_k} = 0; P(0|0) = P(0); \frac{\partial P(0|0)}{\partial \theta_k} = \frac{\partial P(0)}{\partial \theta_k}, k = 1, 2, \dots, s; \Delta'_2 = 0.$

3°. Используя выражения фильтра Калмана, вычислим:

$$P(t+1|t) = \Phi P(t|t) \Phi^T + \Gamma Q \Gamma^T;$$

$$B(t+1) = H P(t+1|t) H^T + R;$$

$$K(t+1) = P(t+1|t) H^T B^{-1}(t+1);$$

$$P(t+1|t+1) = [I - K(t+1)H] P(t+1|t).$$

4°. Найдем $\frac{\partial P(t+1|t)}{\partial \theta_k}, \frac{\partial B(t+1)}{\partial \theta_k}, \frac{\partial K(t+1)}{\partial \theta_k}, \frac{\partial P(t+1|t+1)}{\partial \theta_k}$ для всех $k = 1, 2, \dots, s$ по формулам, вытекающим из уравнений фильтра Калмана:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(t+1|t)}{\partial \theta_k} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_k} P(t|t) \Phi^T + \Phi \frac{\partial P(t|t)}{\partial \theta_k} \Phi^T + \Phi P(t|t) \frac{\partial \Phi^T}{\partial \theta_k} + \\ &+ \frac{\partial \Gamma}{\partial \theta_k} Q \Gamma^T + \Gamma \frac{\partial Q}{\partial \theta_k} \Gamma^T + \Gamma Q \frac{\partial \Gamma^T}{\partial \theta_k}; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial B(t+1)}{\partial \theta_k} = \frac{\partial H}{\partial \theta_k} P(t+1|t) H^T + H \frac{\partial P(t+1|t)}{\partial \theta_k} H^T + H P(t+1|t) \frac{\partial H^T}{\partial \theta_k} + \frac{\partial R}{\partial \theta_k};$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial K(t+1)}{\partial \theta_k} &= \left[\frac{\partial P(t+1|t)}{\partial \theta_k} H^T + P(t+1|t) \frac{\partial H^T}{\partial \theta_k} - \right. \\ &\left. - P(t+1|t) H^T B^{-1}(t+1) \frac{\partial B(t+1)}{\partial \theta_k} \right] B^{-1}(t+1); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(t+1|t+1)}{\partial \theta_k} &= [I - K(t+1)H] \frac{\partial P(t+1|t)}{\partial \theta_k} - \\ &- \left[\frac{\partial K(t+1)}{\partial \theta_k} H + K(t+1) \frac{\partial H}{\partial \theta_k} \right] P(t+1|t). \end{aligned}$$

5°. Вычислим $\Delta'_2 = \Delta'_2 + \frac{\nu}{2} \text{Sp} \left[B^{-1}(t+1) \frac{\partial B(t+1)}{\partial \theta_k} \right]$.

6°. Увеличим t на единицу. Если $t \leq N-1$, перейдем на шаг 3°. В противном случае на шаг 7°.

7°. Положим $t = 0$.

8°. Используя выражения фильтра Калмана, найдем:

$$\hat{x}^{i,j}(t+1|t) = \Phi \hat{x}^{i,j}(t|t) + \Psi u^i(t);$$

$$\varepsilon^{i,j}(t+1) = y^{i,j}(t+1) - H \hat{x}^{i,j}(t+1|t);$$

$$\hat{x}^{i,j}(t+1|t+1) = \hat{x}^{i,j}(t+1|t) + K(t+1) \varepsilon^{i,j}(t+1).$$

9°. Найдем $\frac{\partial \hat{x}^{i,j}(t+1|t)}{\partial \theta_k}$, $\frac{\partial \varepsilon^{i,j}(t+1)}{\partial \theta_k}$, $\frac{\partial \hat{x}^{i,j}(t+1|t+1)}{\partial \theta_k}$

для всех $k = 1, 2, \dots, s$ по формулам, вытекающим из уравнений фильтра Калмана:

$$\frac{\partial \hat{x}^{i,j}(t+1|t)}{\partial \theta_k} = \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_k} \hat{x}^{i,j}(t|t) + \Phi \frac{\partial \hat{x}^{i,j}(t|t)}{\partial \theta_k} + \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_k} u^i(t);$$

$$\frac{\partial \varepsilon^{i,j}(t+1)}{\partial \theta_k} = -\frac{\partial H}{\partial \theta_k} \hat{x}^{i,j}(t+1|t) - H \frac{\partial \hat{x}^{i,j}(t+1|t)}{\partial \theta_k};$$

$$\frac{\partial \hat{x}^{i,j}(t+1|t+1)}{\partial \theta_k} = \frac{\partial \hat{x}^{i,j}(t+1|t)}{\partial \theta_k} + \frac{\partial K(t+1)}{\partial \theta_k} \varepsilon^{i,j}(t+1) + K(t+1) \frac{\partial \varepsilon^{i,j}(t+1)}{\partial \theta_k}.$$

10°. Найдем значение приращения градиента Δ'_1 , соответствующее текущему значению времени:

$$\begin{aligned} \Delta'_1 = & \left[\frac{\partial \varepsilon^{i,j}(t+1)}{\partial \theta_k} \right]^T B^{-1}(t+1) \left[\varepsilon^{i,j}(t+1) \right] - \\ & - \frac{1}{2} \left[\varepsilon^{i,j}(t+1) \right]^T B^{-1}(t+1) \frac{\partial B(t+1)}{\partial \theta_k} B^{-1}(t+1) \varepsilon^{i,j}(t+1). \end{aligned}$$

11°. Положим $\frac{\partial \chi(\theta)}{\partial \theta_k} = \frac{\partial \chi(\theta)}{\partial \theta_k} + \Delta'_1$, $k = 1, 2, \dots, s$.

12°. Увеличим t на единицу. Если $t \leq N-1$, перейдем на шаг 8°. В противном случае перейдем на шаг 13°.

13°. Увеличим j на единицу. Если $j \leq k_i$, перейдем на шаг 7°. В противном случае на шаг 14°.

14°. Увеличим i на единицу. Если $i \leq q$, перейдем на шаг 7°. В противном случае на шаг 15°.

15°. Положим $\frac{\partial \chi(\theta)}{\partial \theta_k} = \frac{\partial \chi(\theta)}{\partial \theta_k} + \Delta'_2$, $k = 1, 2, \dots, s$ и закончим процесс.

Отметим, что в случае метода наименьших квадратов вычисление значения критерия идентификации и его градиента осуществляется по алгоритмам, аналогичным методу максимального правдоподобия, с незначительными изменениями.

2.2. Оценивание неизвестных параметров непрерывно-дискретных систем

2.2.1. Структура непрерывно-дискретной модели

Рассмотрим следующую непрерывно-дискретную линейную стационарную модель управляемой, наблюдаемой и идентифицируемой динамической системы в пространстве состояний:

$$\begin{cases} \dot{x} \ t = Fx \ t + Gu \ t + \Gamma w \ t, & t \in t_0, T, \\ y \ t_k = Hx \ t_k + v \ t_k, & k = 1, 2, \dots, N, \end{cases} \quad (2.22)$$

где $x(t)$ – n -вектор состояния системы в момент времени t ; $u(t)$ – r -вектор управления; $w(t)$ – p -вектор возмущения; $y(t_k)$ – m -вектор измерений в момент времени t_k ; $v(t_k)$ – m -вектор ошибок измерений.

Будем считать, что:

- F , Γ , G , H – соответственно матрицы состояния, возмущения, управления и наблюдения системы требуемых размеров;
- F устойчива (собственные значения λ_i матрицы F удовлетворяют условию $\text{Re} \lambda_i < 0$);

- пары F, G и F, Γ управляемы: $rg[G|FG|\dots|F^{n-1}G] = n$ и $rg[\Gamma|F\Gamma|\dots|F^{n-1}\Gamma] = n$;
- пара F, H – наблюдаема: $rg[H^T | F^T H^T | \dots | F^{T \ n-1} H^T] = n$;
- случайные процессы $w \ t, t \in t_0, T$ и $v \ t_k, k=1, 2, \dots, N$ являются стационарными белыми гауссовскими шумами, причем

$$E[w \ t] = 0, \quad E[w \ t \ w^T \ \tau] = Q \delta \ t - \tau, \quad (2.23)$$

$$E[v \ t_k] = 0, \quad E[v \ t_k \ v^T \ t_j] = R \delta_{kj}, \quad (2.24)$$

$$E[v \ t_k \ w^T \ t] = 0, \quad \forall t_k, t,$$

где $\delta \ t - \tau$ – дельта-функция Дирака;

δ_{jk} – символ Кронекера;

Q, R – неотрицательно-определенная и положительно-определенная матрицы интенсивностей помех размеров $p \times p$ и $m \times m$ соответственно;

- начальное состояние $x(t_0)$ имеет нормальное распределение с математическим ожиданием

$$E[x \ t_0] = \bar{x}_0 \quad (2.25)$$

и ковариационной матрицей

$$E[x \ t_0 - \bar{x}_0][x \ t_0 - \bar{x}_0]^T = P_0 \quad (2.26)$$

и не коррелирует с $w(t)$ и $v(t_k)$ при любых значениях переменных t и t_k .

Структура модели (2.22) задана с точностью до неизвестных параметров $\Theta = \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s$, которые могут входить в различных комбинациях в матрицы F, G, Γ, H , а также в ковариационные матрицы Q, R и начальные условия $\bar{x}_0, P_0$.

2.2.2. Критерии идентификации для непрерывно-дискретных систем

Поскольку для непрерывно-дискретных систем уравнение состояния в модели динамической системы непрерывно, каждая точка α_i спектра плана ξ , определяемого соотношением (1.6), задается некоторой управляющей вектор-функцией $u^i t$ на временном интервале t_0, T , т.е.

$$\alpha_i^T = U_i^T = \begin{bmatrix} u^i & t_0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} u^i & t_1 \end{bmatrix}^T, \dots, \begin{bmatrix} u^i & t_{N-1} \end{bmatrix}^T.$$

Введем в рассмотрение обновляющую последовательность и ее ко-вариации:

$$\varepsilon t_k, \theta = y t_k - M y t_k | y t_{k-1}, y t_{k-2}, \dots, y t_1, \quad (2.27)$$

$$B t_k, \theta = M \varepsilon t_k, \theta \varepsilon^T t_k, \theta. \quad (2.28)$$

Они могут быть определены при помощи фильтра Калмана для системы (2.22) по следующим уравнениям [42, 43, 56]:

$$\frac{d}{dt} \hat{x} t | t_{k-1} = F \hat{x} t | t_{k-1} + G u t, \quad t_{k-1} \leq t \leq t_k, \quad \hat{x} t_0 | t_0 = \bar{x}_0, \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} P t | t_{k-1} &= F P t | t_{k-1} + P t | t_{k-1} F^T + \\ &+ \Gamma Q \Gamma^T, \quad t_{k-1} \leq t \leq t_k, \quad P t_0 | t_0 = P_0. \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\varepsilon t_k = y t_k - H \hat{x} t_k | t_{k-1};$$

$$B t_k = H P t_k | t_{k-1} H^T + R;$$

$$K t_k = P t_k | t_{k-1} H^T B^{-1} t_k; \quad (2.31)$$

$$\hat{x} t_k | t_k = \hat{x} t_k | t_{k-1} + K t_k \varepsilon t_k;$$

$$P t_k | t_k = [I - K t_k H] P t_k | t_{k-1}.$$

Здесь $\hat{x} \mid t_{k-1} = E[x \mid Y_1^{k-1}]$; $t_{k-1} \leq t \leq t_k$ – оценка одношагового предсказания состояния $x(t)$, полученная по измерениям $Y_1^{k-1} = y \mid t_1, y \mid t_2, \dots, y \mid t_{k-1}$;

$P \mid t_{k-1}$; $t_{k-1} \leq t \leq t_k$ – ковариационная матрица ошибок одношагового предсказания;

$\hat{x} \mid t_k = E[x \mid t_k \mid Y_1^k]$ – оценка фильтрации состояния $x \mid t_k$, полученная по измерениям $Y_1^k = y \mid t_1, y \mid t_2, \dots, y \mid t_k$;

$P \mid t_k$ – ковариационная матрица ошибок фильтрации.

Определим условную плотность распределения вероятности $f[y \mid t_k \mid Y_1^{k-1}]$ по уравнениям фильтра Калмана:

$$\begin{aligned} f[y \mid t_k \mid Y_1^{k-1}] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi^m \det B \mid t_k}} \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} [y \mid t_k - \hat{y} \mid t_k \mid t_{k-1}]^T B^{-1} \mid t_k [y \mid t_k - \hat{y} \mid t_k \mid t_{k-1}] \right\} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi^m \det B \mid t_k}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \varepsilon^T \mid t_k B^{-1} \mid t_k \varepsilon \mid t_k \right\}; \quad k = 2, 3, \dots, N. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Заметим, что

$$f[y \mid t_1] = \frac{1}{\sqrt{2\pi^m \det B \mid t_1}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \varepsilon^T \mid t_1 B^{-1} \mid t_1 \varepsilon \mid t_1 \right\}. \quad (2.33)$$

Учитывая, что $\{y(t_k), k = 1, 2, \dots\}$ – гауссовский процесс, и воспользовавшись соотношениями (2.32), (2.33), можно построить функцию правдоподобия

$$\begin{aligned} L \mid Y_1^N; \Theta &= f[y \mid t_1] f[y \mid t_2 \mid y \mid t_1] f[y \mid t_3 \mid Y_1^2] \dots f[y \mid t_N \mid Y_1^{N-1}] = \\ &= \frac{1}{2\pi^{\frac{Nm}{2}} \prod_{k=1}^N \det B \mid t_k} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \varepsilon^T \mid t_k B^{-1} \mid t_k \varepsilon \mid t_k \right\}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Для определения неизвестных параметров необходимо максимизировать функцию $L Y_1^N; \Theta$ относительно векторного аргумента Θ или, что гораздо удобнее, минимизировать функцию

$$\chi(\theta) = -\ln L Y_1^N; \theta = \frac{Nm}{2} \ln 2\pi + \\ + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \left[\varepsilon^T t_k, \theta B^{-1} t_k, \theta \varepsilon t_k, \theta + \ln \det B t_k, \theta \right]. \quad (2.35)$$

2.2.3. Алгоритмы вычисления значений и градиентов критериев идентификации

Приведем алгоритм вычисления критерия максимального правдоподобия $\chi(\theta)$:

1°. Пусть $j=1$, $\chi(\theta)=0$.

2°. Решаются дифференциальные уравнения фильтра Калмана с соответствующими начальными условиями:

$$\frac{d}{dt} \hat{x} t | t_{j-1} = F \hat{x} t | t_{j-1} + G u t, \quad t_{j-1} \leq t \leq t_j, \quad \hat{x} t_0 | t_0 = \bar{x}_0;$$

$$\frac{d}{dt} P t | t_{j-1} = F P t | t_{j-1} + P t | t_{j-1} F^T + \Gamma Q \Gamma^T,$$

$$t_{j-1} \leq t \leq t_j, \quad P t_0 | t_0 = P_0.$$

Получаем $\hat{x} t_j | t_{j-1}$ и $P t_j | t_{j-1}$.

3°. Вычисляются

$$\varepsilon t_j = y t_j - H \hat{x} t_j | t_{j-1};$$

$$B t_j = H P t_j | t_{j-1} H^T + R;$$

$$K t_j = P t_j | t_{j-1} H^T B^{-1} t_j.$$

4°. Вычисляется соответствующая j -му моменту времени составляющая функции правдоподобия (2.35)

$$S = \frac{1}{2} \left[\varepsilon^T t_j B^{-1} t_j \varepsilon t_j + \ln \det B t_j \right].$$

5°. Накапливается сумма

$$\chi(\theta) = \chi(\theta) + S.$$

6°. Если $j = N$, то

$$\chi(\theta) = \chi(\theta) + \frac{Nm}{2} \ln 2\pi$$

и вычисления прекращаются, иначе – вычисляются следующие начальные условия по формулам

$$\hat{x} \ t_j | t_j = \hat{x} \ t_j | t_{j-1} + K \ t_j \ \varepsilon \ t_j ;$$

$$P \ t_j | t_j = \left[I - K \ t_j \ H \right] P \ t_j | t_{j-1} ,$$

j заменяется на $j + 1$ и осуществляется переход на шаг 2°.

Продифференцируем выражение для функции $\chi \ \theta$ по неизвестным параметрам:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi(\theta)}{\partial \theta_k} = \sum_{j=1}^N \left\{ \varepsilon^T \ t_j \ B^{-1} \ t_j \ \frac{\partial \varepsilon \ t_j}{\partial \theta_k} - \frac{1}{2} \varepsilon^T \ t_j \ B^{-1} \ t_j \ \frac{\partial B \ t_j}{\partial \theta_k} B^{-1} \ t_j \ \varepsilon \ t_j + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \text{Sp} \left(B^{-1} \ t_j \ \frac{\partial B \ t_j}{\partial \theta_k} \right) \right\}, \quad k = \overline{1, s}, \end{aligned} \quad (2.36)$$

где s – размерность вектора неизвестных параметров Θ .

В выражении (2.36) частные производные $\frac{\partial \varepsilon \ t_j}{\partial \theta_k}$ и $\frac{\partial B \ t_j}{\partial \theta_k}$ вычисляются с помощью следующих уравнений:

$$\frac{\partial \varepsilon \ t_j}{\partial \theta_k} = -\frac{\partial H}{\partial \theta_k} \hat{x} \ t_j | t_{j-1} - H \frac{\partial \hat{x} \ t_j | t_{j-1}}{\partial \theta_k}, \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B \ t_j}{\partial \theta_k} = \frac{\partial H}{\partial \theta_k} P \ t_j | t_{j-1} \ H^T + H \frac{\partial P \ t_j | t_{j-1}}{\partial \theta_k} H^T + \\ + H P \ t_j | t_{j-1} \ \frac{\partial H^T}{\partial \theta_k} + \frac{\partial R}{\partial \theta_k}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Уравнения чувствительности для оценки вектора состояний:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \hat{x} \ t | t_{j-1} \\ \frac{\partial \hat{x} \ t | t_{j-1}}{\partial \theta_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \hat{x} \ t | t_{j-1}}{\partial \theta_s} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} F \hat{x} \ t | t_{j-1} + G u \ t \\ \frac{\partial F}{\partial \theta_1} \hat{x} \ t | t_{j-1} + F \frac{\partial \hat{x} \ t | t_{j-1}}{\partial \theta_1} + \frac{\partial G}{\partial \theta_1} u \ t \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial \theta_s} \hat{x} \ t | t_{j-1} + F \frac{\partial \hat{x} \ t | t_{j-1}}{\partial \theta_s} + \frac{\partial G}{\partial \theta_s} u \ t \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} F & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \theta_1} & F & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial \theta_s} & 0 & \dots & F \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{x} \ t | t_{j-1} \\ \frac{\partial \hat{x} \ t | t_{j-1}}{\partial \theta_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \hat{x} \ t | t_{j-1}}{\partial \theta_s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G \\ \frac{\partial G}{\partial \theta_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial G}{\partial \theta_s} \end{bmatrix} u \ t , \\
 & \quad t_{j-1} \leq t \leq t_j, \quad j = \overline{1, N}.
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

Начальные условия:

- для $j = 1$

$$\begin{bmatrix} \hat{x} \ t_0 | t_0 \\ \frac{\partial \hat{x} \ t_0 | t_0}{\partial \theta_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \hat{x} \ t_0 | t_0}{\partial \theta_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}_0 \\ \frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \theta_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \theta_s} \end{bmatrix}; \tag{2.40}$$

- для $j = 2, 3, \dots, N$

$$\begin{bmatrix} \hat{x} \ t_j | t_j \\ \frac{\partial \hat{x} \ t_j | t_j}{\partial \theta_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \hat{x} \ t_j | t_j}{\partial \theta_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x} \ t_j | t_{j-1} + K \ t_j \ \varepsilon \ t_j \\ \frac{\partial \hat{x} \ t_j | t_{j-1}}{\partial \theta_1} + \frac{\partial K \ t_j}{\partial \theta_1} \varepsilon \ t_j + K \ t_j \ \frac{\partial \varepsilon \ t_j}{\partial \theta_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \hat{x} \ t_j | t_{j-1}}{\partial \theta_s} + \frac{\partial K \ t_j}{\partial \theta_s} \varepsilon \ t_j + K \ t_j \ \frac{\partial \varepsilon \ t_j}{\partial \theta_s} \end{bmatrix}. \quad (2.41)$$

Уравнения чувствительности для ковариационной матрицы оценки вектора состояний:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} P \ t | t_{j-1} \\ \frac{\partial P \ t | t_{j-1}}{\partial \theta_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial P \ t | t_{j-1}}{\partial \theta_s} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} FP \ t | t_{j-1} + P \ t | t_{j-1} F^T + \Gamma Q \Gamma^T \\ \frac{\partial F}{\partial \theta_1} P \ t | t_{j-1} + F \frac{\partial P \ t | t_{j-1}}{\partial \theta_1} + \frac{\partial P \ t | t_{j-1}}{\partial \theta_1} F^T + \\ \quad + P \ t | t_{j-1} \frac{\partial F^T}{\partial \theta_1} + \frac{\partial \Gamma}{\partial \theta_1} Q \Gamma^T + \Gamma \frac{\partial Q}{\partial \theta_1} \Gamma^T + \Gamma Q \frac{\partial \Gamma^T}{\partial \theta_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial \theta_s} P \ t | t_{j-1} + F \frac{\partial P \ t | t_{j-1}}{\partial \theta_s} + \frac{\partial P \ t | t_{j-1}}{\partial \theta_s} F^T + \\ \quad + P \ t | t_{j-1} \frac{\partial F^T}{\partial \theta_s} + \frac{\partial \Gamma}{\partial \theta_s} Q \Gamma^T + \Gamma \frac{\partial Q}{\partial \theta_s} \Gamma^T + \Gamma Q \frac{\partial \Gamma^T}{\partial \theta_s} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} F & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \theta_1} & F & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F}{\partial \theta_s} & 0 & \dots & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \ t | t_{j-1} \\ \frac{\partial P \ t | t_{j-1}}{\partial \theta_1} \\ \dots \\ \frac{\partial P \ t | t_{j-1}}{\partial \theta_s} \end{bmatrix} + \\
&+ \begin{bmatrix} P \ t | t_{j-1} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial P \ t | t_{j-1}}{\partial \theta_1} & P \ t | t_{j-1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial P \ t | t_{j-1}}{\partial \theta_s} & 0 & \dots & P \ t | t_{j-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F^\top \\ \frac{\partial F^\top}{\partial \theta_1} \\ \dots \\ \frac{\partial F^\top}{\partial \theta_s} \end{bmatrix} + \\
&+ \begin{bmatrix} \Gamma \\ \frac{\partial \Gamma}{\partial \theta_1} \\ \dots \\ \frac{\partial \Gamma}{\partial \theta_s} \end{bmatrix} Q \Gamma^\top + \Gamma \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial \theta_1} \\ \dots \\ \frac{\partial Q}{\partial \theta_s} \end{bmatrix} \Gamma^\top + \Gamma Q \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial \Gamma^\top}{\partial \theta_1} \\ \dots \\ \frac{\partial \Gamma^\top}{\partial \theta_s} \end{bmatrix}, \quad t_{j-1} \leq t \leq t_j, \quad j = \overline{1, N}. \quad (2.42)
\end{aligned}$$

Начальные условия:

- для $j=1$

$$\begin{bmatrix} P \ t_0 | t_0 \\ \frac{\partial P \ t_0 | t_0}{\partial \theta_1} \\ \dots \\ \frac{\partial P \ t_0 | t_0}{\partial \theta_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 \\ \frac{\partial P_0}{\partial \theta_1} \\ \dots \\ \frac{\partial P_0}{\partial \theta_s} \end{bmatrix}; \quad (2.43)$$

- для $j = 2, 3, \dots, N$

$$\begin{bmatrix} P_{t_j | t_j} \\ \frac{\partial P_{t_j | t_j}}{\partial \theta_1} \\ \dots \\ \frac{\partial P_{t_j | t_j}}{\partial \theta_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I - K_{t_j} H^T P_{t_j | t_{j-1}} \\ \left[-\frac{\partial K_{t_j}}{\partial \theta_1} H - K_{t_j} \frac{\partial H}{\partial \theta_1} \right] P_{t_j | t_{j-1}} + \\ + I - K_{t_j} H^T \frac{\partial P_{t_j | t_{j-1}}}{\partial \theta_1} \\ \dots \\ \left[-\frac{\partial K_{t_j}}{\partial \theta_s} H - K_{t_j} \frac{\partial H}{\partial \theta_s} \right] P_{t_j | t_{j-1}} + \\ + I - K_{t_j} H^T \frac{\partial P_{t_j | t_{j-1}}}{\partial \theta_s} \end{bmatrix}, \quad (2.44)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_{t_j}}{\partial \theta_k} &= \frac{\partial P_{t_j | t_{j-1}}}{\partial \theta_k} H^T B^{-1} t_j + P_{t_j | t_{j-1}} \frac{\partial H^T}{\partial \theta_k} B^{-1} t_j - \\ &- P_{t_j | t_{j-1}} H^T B^{-1} t_j \frac{\partial B}{\partial \theta_k} B^{-1} t_j. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Приведем алгоритм вычисления градиента функции правдоподобия:

1°. $j = 1$, $\frac{\partial \chi(\theta)}{\partial \theta_k} = 0$, $k = \overline{1, s}$, где s – размерность вектора Θ .

2°. Решаются уравнения чувствительности для оценки вектора состояния (2.39) и его ковариационной матрицы (2.42) с начальными условиями (2.40) и (2.43) соответственно. Получаем $\hat{x}_{t_j | t_{j-1}}$ и

$P_{t_j | t_{j-1}}$.

3°. Вычисляются

$$B \, t_j = H P \, t_j | t_{j-1} H^T + R;$$

$$\frac{\partial B \, t_j}{\partial \theta_k} = \frac{\partial H}{\partial \theta_k} P \, t_j | t_{j-1} H^T + H \frac{\partial P \, t_j | t_{j-1}}{\partial \theta_k} H^T +$$

$$+ H P \, t_j | t_{j-1} \frac{\partial H^T}{\partial \theta_k} + \frac{\partial R}{\partial \theta_k}, \quad k = \overline{1, s}.$$

4°. Вычисляются

$$K \, t_j = P \, t_j | t_{j-1} H^T B^{-1} \, t_j ;$$

$$\frac{\partial K \, t_k}{\partial \theta_i} = \frac{\partial P \, t_k | t_{k-1}}{\partial \theta_i} H^T B^{-1} \, t_k + P \, t_k | t_{k-1} \frac{\partial H^T}{\partial \theta_i} B^{-1} \, t_k -$$

$$- P \, t_k | t_{k-1} H^T B^{-1} \, t_k \frac{\partial B \, t_k}{\partial \theta_i} B^{-1} \, t_k, \quad i = \overline{1, s}.$$

5°. Вычисляются

$$\varepsilon \, t_j = y \, t_j - H \hat{x} \, t_j | t_{j-1} ;$$

$$\frac{\partial \varepsilon \, t_j}{\partial \theta_k} = - \frac{\partial H}{\partial \theta_k} \hat{x} \, t_j | t_{j-1} - H \frac{\partial \hat{x} \, t_j | t_{j-1}}{\partial \theta_k}, \quad k = \overline{1, s}.$$

6°. Вычисляется соответствующая j -му моменту времени составляющая градиента функции правдоподобия (2.36)

$$S \, k = \left\{ \varepsilon^T \, t_j \, B^{-1} \, t_j \frac{\partial \varepsilon \, t_j}{\partial \theta_k} - \frac{1}{2} \varepsilon^T \, t_j \, B^{-1} \, t_j \frac{\partial B \, t_j}{\partial \theta_k} B^{-1} \, t_j \, \varepsilon \, t_j + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \text{Sp} \left(B^{-1} \, t_j \frac{\partial B \, t_j}{\partial \theta_k} \right) \right\}, \quad k = \overline{1, s}.$$

7°. Накапливается сумма

$$\frac{\partial \chi(\theta)}{\partial \theta_k} = \frac{\partial \chi(\theta)}{\partial \theta_k} + S_k, \quad k = \overline{1, s}.$$

8°. Если $j = N$, то вычисления прекращаются, иначе – вычисляются следующие начальные условия по формулам (2.41) и (2.44), j заменяется на $j + 1$ и осуществляется переход на шаг 2°.

2.3. Планирование оптимальных входных сигналов для дискретных систем

2.3.1. Вывод соотношения для информационной матрицы однократного плана

Одно из центральных мест в теории планирования эксперимента отводится информационной матрице Фишера, поскольку именно она используется для вычисления информационной матрицы плана, так или иначе фигурирующей во всех алгоритмах численного построения оптимальных планов.

ТЕОРЕМА 3 [57]

Для математической модели (2.1), (2.2) с априорными предположениями (2.3)–(2.5), когда неизвестные параметры могут входить в различных комбинациях в матрицы $\Phi, \Psi, \Gamma, H, Q, R, P(0)$ и в вектор $\bar{x}(0)$, элементы информационной матрицы плана, сосредоточенного в одной точке, определяются выражениями

$$\begin{aligned} M_{ij}(\Theta) = & \sum_{t=0}^{N-1} \left\{ \text{Sp} \left[C_0 \Sigma_A(t+1|t) + \bar{x}_A(t+1|t) \bar{x}_A^T(t+1|t) C_0^T \frac{\partial H^T}{\partial \theta_j} \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times B^{-1}(t+1) \frac{\partial H}{\partial \theta_i} \right] + \right. \\ & \left. + \text{Sp} \left[C_0 \Sigma_A(t+1|t) + \bar{x}_A(t+1|t) \bar{x}_A^T(t+1|t) C_j^T H^T B^{-1}(t+1) \frac{\partial H}{\partial \theta_i} \right] + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \text{Sp} \left[C_i \Sigma_A(t+1|t) + \bar{x}_A(t+1|t) \bar{x}_A^T(t+1|t) C_0^T \frac{\partial H^T}{\partial \theta_j} B^{-1}(t+1) H \right] + \\
& + \text{Sp} \left[C_i \Sigma_A(t+1|t) + \bar{x}_A(t+1|t) \bar{x}_A^T(t+1|t) C_j^T H^T B^{-1}(t+1) H \right] + \\
& + \frac{1}{2} \text{Sp} \left[\frac{\partial B(t+1)}{\partial \theta_i} B^{-1}(t+1) \frac{\partial B(t+1)}{\partial \theta_j} B^{-1}(t+1) \right] \Bigg\}; \quad i, j = 1, 2, \dots, s.
\end{aligned}$$

где

$$C_i = [\underbrace{0, \dots, 0}_i, I, 0, \dots, 0], \quad i = 0, 1, \dots, s;$$

$$\Psi_A = \begin{bmatrix} \Psi \\ \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_1} \\ \dots \\ \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_s} \end{bmatrix};$$

$$\bar{x}_A(t+1|t) = \begin{cases} \begin{bmatrix} \Phi \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_1} \\ \dots \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_s} \end{bmatrix} \bar{x}(0) + \begin{bmatrix} 0 \\ \Phi \frac{\partial \bar{x}(0)}{\partial \theta_1} \\ \dots \\ \Phi \frac{\partial \bar{x}(0)}{\partial \theta_s} \end{bmatrix} + \Psi_A u(0), & \text{если } t = 0; \\ \Phi_A(t+1, t) \bar{x}(t|t-1) + \Psi_A u(t), & \text{если } t > 0. \end{cases}$$

$$\Sigma_A(t+1|t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t = 0; \\ \Phi_A(t+1, t) \Sigma_A(t|t-1) \Phi_A^T(t+1, t) + K_A(t) B(t) K_A^T(t), & \text{если } t > 0; \end{cases}$$

$$K_A(t+1) = \begin{bmatrix} \tilde{K}(t+1) \\ \frac{\partial \tilde{K}(t+1)}{\partial \theta_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \tilde{K}(t+1)}{\partial \theta_s} \end{bmatrix};$$

$$\Phi_A(t+2, t+1) =$$

$$= \begin{bmatrix} \Phi & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_1} - \tilde{K}(t+1) \frac{\partial H}{\partial \theta_1} & \Phi - \tilde{K}(t+1)H & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_s} - \tilde{K}(t+1) \frac{\partial H}{\partial \theta_s} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \Phi - \tilde{K}(t+1)H \end{bmatrix}.$$

Доказательство

Информационная матрица Фишера $M = \|M_{ij}(\Theta)\|$ связана с логарифмической функцией правдоподобия $\ln L(\Theta)$, равной $\ln L(\xi_v; \theta)$ из формулы (2.19) в случае $v = q = k_1 = 1$, соотношением [11]:

$$M_{ij} = -E_Y \left[\frac{\partial^2 \ln L(\Theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right], \quad i, j = 1, 2, \dots, s, \quad (2.46)$$

в котором усреднение берется по выборочному пространству.

В силу того, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(\Theta)}{\partial \theta_i} &= - \sum_{t=0}^{N-1} \left\{ \frac{\partial \varepsilon^T(t+1)}{\partial \theta_i} B^{-1}(t+1) \varepsilon(t+1) - \right. \\ &- \frac{1}{2} \varepsilon^T(t+1) B^{-1}(t+1) \frac{\partial B(t+1)}{\partial \theta_i} B^{-1}(t+1) \varepsilon(t+1) + \\ &\left. + \frac{1}{2} \text{Sp} \left[B^{-1}(t+1) \frac{\partial B(t+1)}{\partial \theta_i} \right] \right\}, \end{aligned}$$

с учетом свойства симметричности матриц $B(t+1)$, $\frac{\partial B(t+1)}{\partial \theta_i}$, $B^{-1}(t+1)$, $B^{-1}(t+1)\frac{\partial B(t+1)}{\partial \theta_i}B^{-1}(t+1)$ и равенства $a^T b = \text{Sp}(ab^T)$ $\forall a, b \in R^n$ имеем:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \ln L(\Theta)}{\partial \theta_j \partial \theta_i} = & - \sum_{t=0}^{N-1} \left\{ \text{Sp} \left[\frac{\partial^2 \varepsilon(t+1)}{\partial \theta_j \partial \theta_i} \varepsilon^T(t+1) B^{-1}(t+1) \right] + \right. \\
 & + \text{Sp} \left[\frac{\partial \varepsilon(t+1)}{\partial \theta_i} \varepsilon^T(t+1) \frac{\partial B^{-1}(t+1)}{\partial \theta_j} \right] + \\
 & + \text{Sp} \left[\frac{\partial \varepsilon(t+1)}{\partial \theta_i} \frac{\partial \varepsilon^T(t+1)}{\partial \theta_j} B^{-1}(t+1) \right] - \\
 & - \text{Sp} \left[\frac{\partial \varepsilon(t+1)}{\partial \theta_j} \varepsilon^T(t+1) B^{-1}(t+1) \frac{\partial B(t+1)}{\partial \theta_i} B^{-1}(t+1) \right] + \\
 & + \text{Sp} \left[\varepsilon(t+1) \varepsilon^T(t+1) B^{-1}(t+1) \frac{\partial B(t+1)}{\partial \theta_i} B^{-1}(t+1) \frac{\partial B(t+1)}{\partial \theta_j} B^{-1}(t+1) \right] - \\
 & - \frac{1}{2} \text{Sp} \left[\varepsilon(t+1) \varepsilon^T(t+1) B^{-1}(t+1) \frac{\partial^2 B(t+1)}{\partial \theta_j \partial \theta_i} B^{-1}(t+1) \right] - \\
 & - \frac{1}{2} \text{Sp} \left[B^{-1}(t+1) \frac{\partial B(t+1)}{\partial \theta_j} B^{-1}(t+1) \frac{\partial B(t+1)}{\partial \theta_i} \right] + \\
 & + \frac{1}{2} \text{Sp} \left[B^{-1}(t+1) \frac{\partial^2 B(t+1)}{\partial \theta_j \partial \theta_i} \right] \Bigg\}, \quad i, j = 1, 2, \dots, s.
 \end{aligned}$$

Подставим последнее равенство в (3.46) и, воспользовавшись тем, что

$$\frac{\partial B^{-1}(t+1)}{\partial \theta_j} = -B^{-1}(t+1) \frac{\partial B(t+1)}{\partial \theta_j} B^{-1}(t+1);$$

$$\text{Sp}(AB) = \text{Sp}(BA) \quad \forall A \in R_{n \times m}, \quad \forall B \in R_{m \times n};$$

$$E \quad \varepsilon(t+1) \varepsilon^T(t+1) = B(t+1),$$

получим

$$\begin{aligned} M_{ij} = & \sum_{t=0}^{N-1} \left\{ \text{Sp} \left[E \left(\frac{\partial^2 \varepsilon(t+1)}{\partial \theta_j \partial \theta_i} \varepsilon^T(t+1) \right) B^{-1}(t+1) \right] - \right. \\ & - \text{Sp} \left[E \left(\frac{\partial \varepsilon(t+1)}{\partial \theta_i} \varepsilon^T(t+1) \right) B^{-1}(t+1) \frac{\partial B(t+1)}{\partial \theta_j} B^{-1}(t+1) \right] + \\ & + \text{Sp} \left[E \left(\frac{\partial \varepsilon(t+1)}{\partial \theta_i} \frac{\partial \varepsilon^T(t+1)}{\partial \theta_j} \right) B^{-1}(t+1) \right] - \\ & - \text{Sp} \left[E \left(\frac{\partial \varepsilon(t+1)}{\partial \theta_j} \varepsilon^T(t+1) \right) B^{-1}(t+1) \frac{\partial B(t+1)}{\partial \theta_i} B^{-1}(t+1) \right] + \\ & \left. + \frac{1}{2} \text{Sp} \left[\frac{\partial B(t+1)}{\partial \theta_i} B^{-1}(t+1) \frac{\partial B(t+1)}{\partial \theta_j} B^{-1}(t+1) \right] \right\}, \quad i, j = 1, 2, \dots, s. \quad (2.47) \end{aligned}$$

Вычислим следующие математические ожидания:

$$E \left(\frac{\partial \varepsilon(t+1)}{\partial \theta_i} \varepsilon^T(t+1) \right), \quad E \left(\frac{\partial \varepsilon(t+1)}{\partial \theta_i} \frac{\partial \varepsilon^T(t+1)}{\partial \theta_j} \right), \quad E \left(\frac{\partial^2 \varepsilon(t+1)}{\partial \theta_j \partial \theta_i} \varepsilon^T(t+1) \right).$$

Поскольку

$$\frac{\partial \varepsilon(t+1)}{\partial \theta_i} = -\frac{\partial H}{\partial \theta_i} \hat{x}(t+1|t) - H \frac{\partial \hat{x}(t+1|t)}{\partial \theta_i}; \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon(t+1)}{\partial \theta_j \partial \theta_i} = & -\frac{\partial^2 H}{\partial \theta_j \partial \theta_i} \hat{x}(t+1|t) - \frac{\partial H}{\partial \theta_i} \frac{\partial \hat{x}(t+1|t)}{\partial \theta_j} - \\ & - \frac{\partial H}{\partial \theta_j} \frac{\partial \hat{x}(t+1|t)}{\partial \theta_i} - H \frac{\partial^2 \hat{x}(t+1|t)}{\partial \theta_j \partial \theta_i}, \end{aligned} \quad (2.49)$$

можем записать:

$$\begin{aligned} E \left(\frac{\partial \varepsilon(t+1)}{\partial \theta_i} \varepsilon^T(t+1) \right) = & -\frac{\partial H}{\partial \theta_i} E \hat{x}(t+1|t) \varepsilon^T(t+1) - \\ & - HE \left(\frac{\partial \hat{x}(t+1|t)}{\partial \theta_i} \varepsilon^T(t+1) \right); \end{aligned} \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned} E \left(\frac{\partial \varepsilon(t+1)}{\partial \theta_i} \frac{\partial \varepsilon^T(t+1)}{\partial \theta_j} \right) = & \frac{\partial H}{\partial \theta_i} E \hat{x}(t+1|t) \hat{x}^T(t+1|t) \frac{\partial H^T}{\partial \theta_j} + \\ & + \frac{\partial H}{\partial \theta_i} E \left(\hat{x}(t+1|t) \frac{\partial \hat{x}^T(t+1|t)}{\partial \theta_j} \right) H^T + \\ & + HE \left(\frac{\partial \hat{x}^T(t+1|t)}{\partial \theta_i} \hat{x}(t+1|t) \right) \frac{\partial H^T}{\partial \theta_j} + \\ & + HE \left(\frac{\partial \hat{x}(t+1|t)}{\partial \theta_i} \frac{\partial \hat{x}^T(t+1|t)}{\partial \theta_j} \right) H^T; \end{aligned} \quad (2.51)$$

$$\begin{aligned} E \left(\frac{\partial^2 \varepsilon(t+1)}{\partial \theta_j \partial \theta_i} \varepsilon^T(t+1) \right) = & -\frac{\partial^2 H}{\partial \theta_j \partial \theta_i} E \hat{x}(t+1|t) \varepsilon^T(t+1) - \\ & - \frac{\partial H}{\partial \theta_i} E \left(\frac{\partial \hat{x}(t+1|t)}{\partial \theta_j} \varepsilon^T(t+1) \right) - \\ & - \frac{\partial H}{\partial \theta_j} E \left(\frac{\partial \hat{x}(t+1|t)}{\partial \theta_i} \varepsilon^T(t+1) \right) - HE \left(\frac{\partial^2 \hat{x}(t+1|t)}{\partial \theta_j \partial \theta_i} \varepsilon^T(t+1) \right). \end{aligned} \quad (2.52)$$

Таким образом, нас интересуют математические ожидания следующих типов:

- 1) $E \hat{x}(t+1|t)\varepsilon^T(t+1) ;$
- 2) $E \left(\frac{\partial \hat{x}(t+1|t)}{\partial \theta_i} \varepsilon^T(t+1) \right) ;$
- 3) $E \left(\frac{\partial^2 \hat{x}(t+1|t)}{\partial \theta_j \partial \theta_i} \varepsilon^T(t+1) \right) .$

Рассмотрим каждое из этих математических ожиданий отдельно.

Для вычисления первого математического ожидания воспользуемся формулой

$$\begin{aligned} \hat{x}(t+1|t) &= \Phi^{t+1} \bar{x}(0) + \sum_{i=0}^t \Phi^{t-i} \Psi u(i) + \sum_{j=1}^t \Phi^{t+1-j} K(j) \varepsilon(j), \\ t &= 1, 2, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (2.53)$$

которая выводится по индукции из уравнений фильтра Калмана. Принимая во внимание, что

$$E(\varepsilon(t+1)) = 0, \quad (2.54)$$

$$E \varepsilon(t+1) \varepsilon^T(\tau+1) = B(t+1) \delta_{t,\tau}, \quad (2.55)$$

получим

$$\begin{aligned} E \hat{x}(t+1|t) \varepsilon^T(t+1) &= \Phi^{t+1} \bar{x}(0) E \varepsilon^T(t+1) + \sum_{i=0}^t \Phi^{t-i} \Psi u(i) E \varepsilon^T(t+1) + \\ &+ \sum_{j=1}^t \Phi^{t+1-j} K(j) E \varepsilon(j) \varepsilon^T(t+1) = 0. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Для вычисления второго математического ожидания продифференцируем $\hat{x}(t+1|t)$ из (2.53) по θ_i :

$$\frac{\partial \hat{x}(t+1|t)}{\partial \theta_i} = \frac{\partial \Phi^{t+1}}{\partial \theta_i} \bar{x}(0) + \Phi^{t+1} \frac{\partial \bar{x}(0)}{\partial \theta_i} + \sum_{k=0}^t \left(\frac{\partial \Phi^{t-k}}{\partial \theta_i} \Psi + \Phi^{t-k} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_i} \right) u(k) +$$

$$+ \sum_{j=1}^t \left(\frac{\partial \Phi^{t+1-j}}{\partial \theta_i} K(j) \varepsilon(j) + \Phi^{t+1-j} \frac{\partial K(j)}{\partial \theta_i} \varepsilon(j) + \Phi^{t+1-j} K(j) \frac{\partial \varepsilon(j)}{\partial \theta_i} \right). \quad (2.57)$$

В силу того, что

$$E \left(\frac{\partial \varepsilon(j)}{\partial \theta_i} \varepsilon^T(t+1) \right) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, t, \quad (2.58)$$

с учетом соотношений (2.54), (2.55) получим

$$\begin{aligned} E \left(\frac{\partial \hat{x}(t+1|t)}{\partial \theta_i} \varepsilon^T(t+1) \right) &= \frac{\partial \Phi^{t+1}}{\partial \theta_i} \bar{x}(0) E \varepsilon^T(t+1) + \Phi^{t+1} \frac{\partial \bar{x}(0)}{\partial \theta_i} E \varepsilon^T(t+1) + \\ &+ \sum_{k=0}^t \left(\frac{\partial \Phi^{t-k}}{\partial \theta_i} \Psi + \Phi^{t-k} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_i} \right) u(k) E \varepsilon^T(t+1) + \\ &+ \sum_{j=1}^t \left[\frac{\partial \Phi^{t+1-j}}{\partial \theta_i} K(j) E \varepsilon(j) \varepsilon^T(t+1) + \Phi^{t+1-j} \frac{\partial K(j)}{\partial \theta_i} E \varepsilon(j) \varepsilon^T(t+1) + \right. \\ &\left. + \Phi^{t+1-j} K(j) E \left(\frac{\partial \varepsilon(j)}{\partial \theta_i} \varepsilon^T(t+1) \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Для вычисления третьего математического ожидания продифференцируем $\frac{\partial \hat{x}(t+1|t)}{\partial \theta_i}$ из (2.57) по θ_j :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \hat{x}(t+1|t)}{\partial \theta_j \partial \theta_i} &= \frac{\partial^2 \Phi^{t+1}}{\partial \theta_j \partial \theta_i} \bar{x}(0) + \frac{\partial \Phi^{t+1}}{\partial \theta_i} \frac{\partial \bar{x}(0)}{\partial \theta_j} + \frac{\partial \Phi^{t+1}}{\partial \theta_j} \frac{\partial \bar{x}(0)}{\partial \theta_i} + \Phi^{t+1} \frac{\partial^2 \bar{x}(0)}{\partial \theta_j \partial \theta_i} + \\ &+ \sum_{k=0}^t \left(\frac{\partial^2 \Phi^{t-k}}{\partial \theta_j \partial \theta_i} \Psi + \frac{\partial \Phi^{t-k}}{\partial \theta_i} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_j} + \frac{\partial \Phi^{t-k}}{\partial \theta_j} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_i} + \Phi^{t-k} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta_j \partial \theta_i} \right) u(k) + \\ &+ \sum_{q=1}^t \left(\frac{\partial^2 \Phi^{t+1-q}}{\partial \theta_j \partial \theta_i} K(q) \varepsilon(q) + \frac{\partial \Phi^{t+1-q}}{\partial \theta_i} \frac{\partial K(q)}{\partial \theta_j} \varepsilon(q) + \frac{\partial \Phi^{t+1-q}}{\partial \theta_j} K(q) \frac{\partial \varepsilon(q)}{\partial \theta_i} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial \Phi^{t+1-q}}{\partial \theta_j} \frac{\partial K(q)}{\partial \theta_i} \varepsilon(q) + \Phi^{t+1-q} \frac{\partial^2 K(q)}{\partial \theta_j \partial \theta_i} \varepsilon(q) + \Phi^{t+1-q} \frac{\partial K(q)}{\partial \theta_i} \frac{\partial \varepsilon(q)}{\partial \theta_j} + \\
& + \frac{\partial \Phi^{t+1-q}}{\partial \theta_j} K(q) \frac{\partial \varepsilon(q)}{\partial \theta_i} + \Phi^{t+1-q} \frac{\partial K(q)}{\partial \theta_j} \frac{\partial \varepsilon(q)}{\partial \theta_i} + \Phi^{t+1-q} K(q) \frac{\partial^2 \varepsilon(q)}{\partial \theta_j \partial \theta_i} \Bigg). \quad (2.60)
\end{aligned}$$

В силу того, что

$$E \left(\frac{\partial^2 \varepsilon(q)}{\partial \theta_j \partial \theta_i} \varepsilon^T(t+1) \right) = 0, \quad q = 1, 2, \dots, t, \quad (2.61)$$

с учетом соотношений (2.54), (2.55), (2.57) получим

$$\begin{aligned}
& E \left(\frac{\partial^2 \hat{x}(t+1|t)}{\partial \theta_j \partial \theta_i} \varepsilon^T(t+1) \right) = \\
& = \left[\frac{\partial^2 \Phi^{t+1}}{\partial \theta_j \partial \theta_i} \bar{x}(0) + \frac{\partial \Phi^{t+1}}{\partial \theta_i} \frac{\partial \bar{x}(0)}{\partial \theta_j} + \frac{\partial \Phi^{t+1}}{\partial \theta_j} \frac{\partial \bar{x}(0)}{\partial \theta_i} + \Phi^{t+1} \frac{\partial^2 \bar{x}(0)}{\partial \theta_j \partial \theta_i} + \right. \\
& + \sum_{k=0}^t \left(\frac{\partial^2 \Phi^{t-k}}{\partial \theta_j \partial \theta_i} \Psi + \frac{\partial \Phi^{t-k}}{\partial \theta_i} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_j} + \frac{\partial \Phi^{t-k}}{\partial \theta_j} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_i} + \Phi^{t-k} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta_j \partial \theta_i} \right) u(k) \Bigg] E \left[\varepsilon^T(t+1) \right] + \\
& + \sum_{q=1}^t \left[\frac{\partial^2 \Phi^{t+1-q}}{\partial \theta_j \partial \theta_i} K(q) + \frac{\partial \Phi^{t+1-q}}{\partial \theta_i} \frac{\partial K(q)}{\partial \theta_j} + \frac{\partial \Phi^{t+1-q}}{\partial \theta_j} \frac{\partial K(q)}{\partial \theta_i} + \right. \\
& \quad \left. + \Phi^{t+1-q} \frac{\partial^2 K(q)}{\partial \theta_j \partial \theta_i} \right] E \left[\varepsilon(q) \varepsilon^T(t+1) \right] + \\
& + \sum_{q=1}^t \left[\frac{\partial \Phi^{t+1-q}}{\partial \theta_i} K(q) + \Phi^{t+1-q} \frac{\partial K(q)}{\partial \theta_i} \right] E \left[\frac{\partial \varepsilon(q)}{\partial \theta_j} \varepsilon^T(t+1) \right] + \\
& + \sum_{q=1}^t \left[\frac{\partial \Phi^{t+1-q}}{\partial \theta_j} K(q) + \Phi^{t+1-q} \frac{\partial K(q)}{\partial \theta_j} \right] E \left[\frac{\partial \varepsilon(q)}{\partial \theta_i} \varepsilon^T(t+1) \right] = 0. \quad (2.62)
\end{aligned}$$

Подставив соотношения (2.56), (2.59), (2.62) в равенства (2.50) и (2.52), приходим к тому, что

$$E \left(\frac{\partial^2 \varepsilon(t+1)}{\partial \theta_j \partial \theta_i} \varepsilon^T(t+1) \right) = 0; \quad (2.63)$$

$$E \left(\frac{\partial \varepsilon(t+1)}{\partial \theta_i} \varepsilon^T(t+1) \right) = 0. \quad (2.64)$$

Соотношения (2.63), (2.64), (2.51) позволяют записать формулу (2.47) в следующем виде:

$$\begin{aligned} M_{ij} = & \sum_{t=0}^{N-1} \left\{ \text{Sp} \left[\frac{\partial H}{\partial \theta_i} E \hat{x}(t+1|t) \hat{x}^T(t+1|t) \frac{\partial H^T}{\partial \theta_j} B^{-1}(t+1) \right] + \right. \\ & + \text{Sp} \left[\frac{\partial H}{\partial \theta_i} E \left(\hat{x}(t+1|t) \frac{\partial \hat{x}^T(t+1|t)}{\partial \theta_j} \right) H^T B^{-1}(t+1) \right] + \\ & + \text{Sp} \left[H E \left(\frac{\partial \hat{x}(t+1|t)}{\partial \theta_i} \hat{x}^T(t+1|t) \right) \frac{\partial H^T}{\partial \theta_j} B^{-1}(t+1) \right] + \\ & + \text{Sp} \left[H E \left(\frac{\partial \hat{x}(t+1|t)}{\partial \theta_i} \frac{\partial \hat{x}^T(t+1|t)}{\partial \theta_j} \right) H^T B^{-1}(t+1) \right] + \\ & \left. + \frac{1}{2} \text{Sp} \left[\frac{\partial B(t+1)}{\partial \theta_i} B^{-1}(t+1) \frac{\partial B(t+1)}{\partial \theta_j} B^{-1}(t+1) \right] \right\}; \quad i, j = 1, 2, \dots, s. \quad (2.65) \end{aligned}$$

Заметим, что если $\frac{\partial H}{\partial \theta_i} = 0, \forall i = 1, 2, \dots, s$, то

$$\begin{aligned} M_{ij} = & \sum_{t=0}^{N-1} \left\{ \text{Sp} \left[E \left(\frac{\partial \hat{x}^T(t+1|t)}{\partial \theta_i} H^T B^{-1}(t+1) H \frac{\partial \hat{x}(t+1|t)}{\partial \theta_j} \right) \right] + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \text{Sp} \left[\frac{\partial B(t+1)}{\partial \theta_i} B^{-1}(t+1) \frac{\partial B(t+1)}{\partial \theta_j} B^{-1}(t+1) \right] \right\}, \quad i, j = 1, 2, \dots, s, \quad (2.66) \end{aligned}$$

что совпадает с выражением для информационной матрицы Фишера, полученным А.А. Поповым в [34].

Перейдем к вычислению математических ожиданий в соотношении (2.65), для чего введем расширенный вектор состояния

$$\hat{x}_A(t+1|t) = \begin{bmatrix} \hat{x}(t+1|t) \\ \frac{\partial \hat{x}(t+1|t)}{\partial \theta_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \hat{x}(t+1|t)}{\partial \theta_s} \end{bmatrix}$$

размера $n(s+1)$ и матрицы

$$C_i = [\underbrace{0, \dots, 0}_i, I, 0, \dots, 0], \quad i = 0, 1, \dots, s$$

размера $n \cdot n(s+1)$. С учетом этих обозначений

$$E \hat{x}(t+1|t) \hat{x}^T(t+1|t) = C_0 E \hat{x}_A(t+1|t) \hat{x}_A^T(t+1|t) C_0^T; \quad (2.67)$$

$$E \left(\hat{x}(t+1|t) \frac{\partial \hat{x}^T(t+1|t)}{\partial \theta_j} \right) = C_0 E \hat{x}_A(t+1|t) \hat{x}_A^T(t+1|t) C_j^T; \quad (2.68)$$

$$E \left(\frac{\partial \hat{x}(t+1|t)}{\partial \theta_i} \hat{x}^T(t+1|t) \right) = C_i E \hat{x}_A(t+1|t) \hat{x}_A^T(t+1|t) C_0^T; \quad (2.69)$$

$$E \left(\frac{\partial \hat{x}(t+1|t)}{\partial \theta_i} \frac{\partial \hat{x}^T(t+1|t)}{\partial \theta_j} \right) = C_i E \hat{x}_A(t+1|t) \hat{x}_A^T(t+1|t) C_j^T. \quad (2.70)$$

Следовательно, все четыре математических ожидания, стоящих в (2.65), являются однотипными и определяются через

$$E(\hat{x}_A(t+1|t) \hat{x}_A^T(t+1|t)).$$

Обозначим

$$\bar{x}_A(t+1|t) = E \hat{x}_A(t+1|t);$$

$$\Sigma_A(t+1|t) = E \begin{bmatrix} \hat{x}_A(t+1|t) - \bar{x}_A(t+1|t) & \hat{x}_A(t+1|t) - \bar{x}_A(t+1|t)^T \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$E \hat{x}_A(t+1|t) \hat{x}_A^T(t+1|t) = \Sigma_A(t+1|t) + \bar{x}_A(t+1|t) \bar{x}_A^T(t+1|t) \quad (2.71)$$

и окончательное выражение для элементов информационной матрицы Фишера приобретает вид

$$\begin{aligned} M_{ij}(\Theta) = & \sum_{t=0}^{N-1} \left\{ \text{Sp} \left[C_0 \Sigma_A(t+1|t) + \bar{x}_A(t+1|t) \bar{x}_A^T(t+1|t) C_0^T \frac{\partial H^T}{\partial \theta_j} \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times B^{-1}(t+1) \frac{\partial H}{\partial \theta_i} \right] + \right. \\ & + \text{Sp} \left[C_0 \Sigma_A(t+1|t) + \bar{x}_A(t+1|t) \bar{x}_A^T(t+1|t) C_j^T H^T B^{-1}(t+1) \frac{\partial H}{\partial \theta_i} \right] + \\ & + \text{Sp} \left[C_i \Sigma_A(t+1|t) + \bar{x}_A(t+1|t) \bar{x}_A^T(t+1|t) C_0^T \frac{\partial H^T}{\partial \theta_j} B^{-1}(t+1) H \right] + \\ & + \text{Sp} \left[C_i \Sigma_A(t+1|t) + \bar{x}_A(t+1|t) \bar{x}_A^T(t+1|t) C_j^T H^T B^{-1}(t+1) H \right] + \\ & \left. + \frac{1}{2} \text{Sp} \left[\frac{\partial B(t+1)}{\partial \theta_i} B^{-1}(t+1) \frac{\partial B(t+1)}{\partial \theta_j} B^{-1}(t+1) \right] \right\}; \quad i, j = 1, 2, \dots, s. \quad (2.72) \end{aligned}$$

Получим рекуррентные соотношения для вычисления $\bar{x}_A(t+1|t)$ и $\Sigma_A(t+1|t)$. Положим

$$\tilde{K}(t) = \Phi K(t). \quad (2.73)$$

Выразим для $t > 0$ $\hat{x}(t+1|t)$ через $\hat{x}(t|t-1)$:

$$\hat{x}(t+1|t) = \Phi \hat{x}(t|t-1) + \Psi u(t) + \tilde{K}(t) \varepsilon(t). \quad (2.74)$$

Дифференцируя (2.74) по θ_i с учетом формулы (2.48), приходим к тому, что

$$\frac{\partial \hat{x}(t+1|t)}{\partial \theta_i} = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \theta_i} - \tilde{K}(t) \frac{\partial H}{\partial \theta_i} \right] \hat{x}(t|t-1) +$$

$$+ [\Phi - \tilde{K}(t)H] \frac{\partial \hat{x}(t|t-1)}{\partial \theta_i} + \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_i} u(t) + \frac{\partial \tilde{K}(t)}{\partial \theta_i} \varepsilon(t). \quad (2.75)$$

Обозначим

$$\Phi_A(t+1, t) = \begin{bmatrix} \Phi & 0 & . & . & . & 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_1} - \tilde{K}(t) \frac{\partial H}{\partial \theta_1} & \Phi - \tilde{K}(t)H & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_s} - \tilde{K}(t) \frac{\partial H}{\partial \theta_s} & 0 & . & . & . & \Phi - \tilde{K}(t)H \end{bmatrix}; \quad (2.76)$$

$$\Psi_A = \begin{bmatrix} \Psi \\ \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_1} \\ . \\ . \\ \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_s} \end{bmatrix}; \quad (2.77)$$

$$K_A(t) = \begin{bmatrix} \tilde{K}(t) \\ \frac{\partial \tilde{K}(t)}{\partial \theta_1} \\ . \\ . \\ \frac{\partial \tilde{K}(t)}{\partial \theta_s} \end{bmatrix}. \quad (2.78)$$

Тогда равенства (2.74) и (2.75) можно объединить общей компактной формулой

$$\hat{x}_A(t+1|t) = \Phi_A(t+1, t) \hat{x}_A(t|t-1) + \Psi_A u(t) + K_A(t) \varepsilon(t), \quad t > 0. \quad (2.79)$$

При $t = 0$ имеем

$$\hat{x}(1|0) = \Phi \bar{x}(0) + \Psi u(0).$$

Поэтому

$$\frac{\partial \hat{x}(1|0)}{\partial \theta_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_i} \bar{x}(0) + \Phi \frac{\partial \bar{x}(0)}{\partial \theta_i} + \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_i} u(0), \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

и, следовательно,

$$\hat{x}_A(1|0) = \begin{bmatrix} \Phi \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_1} \\ \dots \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_s} \end{bmatrix} \bar{x}(0) + \begin{bmatrix} 0 \\ \Phi \frac{\partial \bar{x}(0)}{\partial \theta_1} \\ \dots \\ \Phi \frac{\partial \bar{x}(0)}{\partial \theta_s} \end{bmatrix} + \Psi_A u(0). \quad (2.80)$$

Вычисляя математические ожидания от (2.79) и (2.80), получаем:

$$\bar{x}_A(t+1|t) = \begin{cases} \begin{bmatrix} \Phi \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_1} \\ \dots \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_s} \end{bmatrix} \bar{x}(0) + \begin{bmatrix} 0 \\ \Phi \frac{\partial \bar{x}(0)}{\partial \theta_1} \\ \dots \\ \Phi \frac{\partial \bar{x}(0)}{\partial \theta_s} \end{bmatrix} + \Psi_A u(0), & \text{если } t=0; \\ \Phi_A(t+1, t) \bar{x}_A(t|t-1) + \Psi_A u(t), & \text{если } t>0. \end{cases} \quad (2.81)$$

Из равенства (2.81) сразу же вытекает, что

$$\Sigma_A(1|0) = 0. \quad (2.82)$$

При $t>0$ в силу соотношений (2.79), (2.81) имеем

$$\begin{aligned} \Sigma_A(t+1|t) &= \Phi_A(t+1, t) \Sigma_A(t|t-1) \Phi_A^T(t+1, t) + \\ &+ \Phi_A(t+1, t) E \left[\hat{x}_A(t|t-1) - \bar{x}_A(t|t-1) \varepsilon^T(t) \right] K_A^T(t) + \\ &+ K_A(t) E \left[\varepsilon(t) \hat{x}_A(t|t-1) - \bar{x}_A(t|t-1)^T \right] \Phi_A^T(t+1, t) + \\ &+ K_A(t) B(t) K_A^T(t). \end{aligned} \quad (2.83)$$

Принимая во внимание выражения (2.54), (2.56) и (2.59), находим

$$\begin{aligned}
 & E \left[\hat{x}_A(t|t-1) - \bar{x}_A(t|t-1) \varepsilon^T(t) \right] = \\
 & = E \left[\hat{x}_A(t|t-1) \varepsilon^T(t) \right] - \bar{x}_A(t|t-1) E \left[\varepsilon^T(t) \right] = \\
 & = E \begin{bmatrix} \hat{x}(t|t-1) \varepsilon^T(t) \\ \frac{\partial \hat{x}(t|t-1)}{\partial \theta_1} \varepsilon^T(t) \\ \vdots \\ \frac{\partial \hat{x}(t|t-1)}{\partial \theta_s} \varepsilon^T(t) \end{bmatrix} = 0.
 \end{aligned}$$

Таким образом, второе и третье слагаемые в выражении (2.83) равны нулю и

$$\begin{aligned}
 \Sigma_A(t+1|t) &= \Phi_A(t+1, t) \Sigma_A(t|t-1) \Phi_A^T(t+1, t) + \\
 &+ K_A(t) B(t) K_A^T(t), \quad t > 0.
 \end{aligned} \tag{2.84}$$

2.3.2. Алгоритм вычисления информационной матрицы одноточечного плана

Приведенные в разделе 2.3.1 аналитические выкладки позволяют предложить следующий *алгоритм вычисления информационной матрицы* [57].

1°. Для заданного θ_i найти:

$$\begin{array}{ll}
 \Phi, \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_i}, \quad i=1, 2, \dots, s; & Q, \frac{\partial Q}{\partial \theta_i}, \quad i=1, 2, \dots, s; \\
 \Psi, \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_i}, \quad i=1, 2, \dots, s; & R, \frac{\partial R}{\partial \theta_i}, \quad i=1, 2, \dots, s; \\
 \Gamma, \frac{\partial \Gamma}{\partial \theta_i}, \quad i=1, 2, \dots, s; & \bar{x}(0), \frac{\partial \bar{x}(0)}{\partial \theta_i}, \quad i=1, 2, \dots, s; \\
 H, \frac{\partial H}{\partial \theta_i}, \quad i=1, 2, \dots, s; & P(0), \frac{\partial P(0)}{\partial \theta_i}, \quad i=1, 2, \dots, s.
 \end{array}$$

Сформировать матрицу Ψ_A в соответствии с равенством (2.77).

$$2^\circ. \text{ Положить } M(\Theta) = 0; P(0|0) = P(0); \frac{\partial P(0|0)}{\partial \theta_i} = \frac{\partial P(0)}{\partial \theta_i},$$

$i = 1, 2, \dots, s, \quad t = 0.$

3°. Вычислить $\Sigma_A(t+1|t)$ по формуле (2.82), если $t = 0$, или по формуле (2.84), если $t > 0$.

4°. Определить $\bar{x}(t+1|t)$ при помощи выражения (2.81).

5°. Найти $P(t+1|t)$, $B(t+1)$, $K(t+1)$, $P(t+1|t+1)$, $\tilde{K}(t+1)$, используя соотношения (2.9), (2.11), (2.12), (2.14) и (2.73).

6°. Сформировать матрицу $\Phi_A(t+2, t+1)$ в соответствии с (2.76).

$$7^\circ. \text{ Вычислить } \frac{\partial P(t+1|t)}{\partial \theta_i}, \frac{\partial B(t+1)}{\partial \theta_i}, \frac{\partial K(t+1)}{\partial \theta_i}, \frac{\partial P(t+1|t+1)}{\partial \theta_i},$$

$\frac{\partial \tilde{K}(t+1)}{\partial \theta_i}$ для всех $i = 1, 2, \dots, s$ по формулам:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(t+1|t)}{\partial \theta_i} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_i} P(t|t) \Phi^T + \Phi \frac{\partial P(t|t)}{\partial \theta_i} \Phi^T + \Phi P(t|t) \frac{\partial \Phi^T}{\partial \theta_i} + \\ &+ \frac{\partial \Gamma}{\partial \theta_i} Q \Gamma^T + \Gamma \frac{\partial Q}{\partial \theta_i} \Gamma^T + \Gamma Q \frac{\partial \Gamma^T}{\partial \theta_i}; \end{aligned} \quad (2.85)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B(t+1)}{\partial \theta_i} &= \frac{\partial H}{\partial \theta_i} P(t+1|t) H^T + H \frac{\partial P(t+1|t)}{\partial \theta_i} H^T + \\ &+ H P(t+1|t) \frac{\partial H^T}{\partial \theta_i} + \frac{\partial R}{\partial \theta_i}; \end{aligned} \quad (2.86)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial K(t+1)}{\partial \theta_i} &= \left[\frac{\partial P(t+1|t)}{\partial \theta_i} H^T + P(t+1|t) \frac{\partial H^T}{\partial \theta_i} - \right. \\ &\left. - P(t+1|t) H^T B^{-1}(t+1) \frac{\partial B(t+1)}{\partial \theta_i} \right] B^{-1}(t+1); \end{aligned} \quad (2.87)$$

$$\frac{\partial P(t+1|t+1)}{\partial \theta_i} = [I - K(t+1)H] \frac{\partial P(t+1|t)}{\partial \theta_i} -$$

$$-\left[\frac{\partial K(t+1)}{\partial \theta_i} H + K(t+1) \frac{\partial H}{\partial \theta_i} \right] P(t+1|t); \quad (2.88)$$

$$\frac{\partial \tilde{K}(t+1)}{\partial \theta_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_i} K(t+1) + \Phi \frac{\partial K(t+1)}{\partial \theta_i}. \quad (2.89)$$

8°. Сформировать матрицу $K_A(t+1)$ в соответствии с (2.78).

9°. Используя выражение (2.72), получить приращение $\Delta M(\Theta)$, отвечающее текущему значению t .

10°. Положить $M(\Theta) = M(\Theta) + \Delta M(\Theta)$.

11°. Увеличить t на единицу. Если $t \leq N-1$, перейти на шаг 3°. В противном случае закончить процесс.

2.3.3. Вычисление градиентов критериев оптимальности

В гл. 1 мы предложили две принципиально разные градиентные процедуры построения непрерывных оптимальных планов. Приведем вычисление градиентов критериев оптимальности, следуя [55]. Начнем с прямой процедуры планирования входных сигналов. Она требует вычисления следующих градиентов:

$$\nabla_{\tilde{A}} X \begin{bmatrix} M & \xi \\ & t \end{bmatrix} = \left\| \frac{\partial X \begin{bmatrix} M & \xi \\ & t \end{bmatrix}}{\partial u_j^i} \right\|; \quad i=1, \dots, q; \quad t=0, \dots, N-1; \quad j=1, \dots, r$$

и

$$\nabla_{\tilde{P}} X \begin{bmatrix} M & \xi \\ & t \end{bmatrix} = \left\| \frac{\partial X \begin{bmatrix} M & \xi \\ & t \end{bmatrix}}{\partial p_i} \right\|; \quad i=1, \dots, q.$$

Начнем с критерия D -оптимальности. Для него

$$\begin{aligned} \frac{\partial X \begin{bmatrix} M & \xi \\ & t \end{bmatrix}}{\partial u_j^i} &= -\text{Sp} \left[M^{-1} \xi \frac{\partial M \begin{bmatrix} M & \xi \\ & t \end{bmatrix}}{\partial u_j^i} \right] = \\ &= -\text{Sp} \left[M^{-1} \xi p_i \frac{\partial M \begin{bmatrix} M & \xi \\ & t \end{bmatrix}}{\partial u_j^i} \right] = -p_i \text{Sp} \left[M^{-1} \xi \frac{\partial M \begin{bmatrix} M & \xi \\ & t \end{bmatrix}}{\partial u_j^i} \right]. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\frac{\partial M}{\partial u_j} \frac{U}{t} = \left\| \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial u_j} \frac{U}{t} \right\|, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, s,$$

для вычисления производных воспользуемся соотношением

$$M_{\alpha\beta}(U; \Theta) = W_{\alpha\beta}(U; \Theta) + A_{\alpha\beta}(\Theta),$$

где

$$\begin{aligned} W_{\alpha\beta}(U; \Theta) = & \sum_{t=0}^{N-1} \left\{ \text{Sp} \left[C_0 \bar{x}_A(t+1|t) \bar{x}_A^T(t+1|t) C_0^T \frac{\partial H^T}{\partial \theta_\beta} B^{-1}(t+1) \frac{\partial H}{\partial \theta_\alpha} \right] + \right. \\ & + \text{Sp} \left[C_0 \bar{x}_A(t+1|t) \bar{x}_A^T(t+1|t) C_\beta^T H^T B^{-1}(t+1) \frac{\partial H}{\partial \theta_\alpha} \right] + \\ & + \text{Sp} \left[C_\alpha \bar{x}_A(t+1|t) \bar{x}_A^T(t+1|t) C_0^T \frac{\partial H^T}{\partial \theta_\beta} B^{-1}(t+1) H \right] + \\ & \left. + \text{Sp} \left[C_\alpha \bar{x}_A(t+1|t) \bar{x}_A^T(t+1|t) C_\beta^T H^T B^{-1}(t+1) H \right] \right\}; \\ A_{\alpha\beta}(\Theta) = & \sum_{t=0}^{N-1} \left\{ \text{Sp} \left[C_0 \Sigma_A(t+1|t) C_0^T \frac{\partial H}{\partial \theta_\beta} B^{-1}(t+1) \frac{\partial H}{\partial \theta_\alpha} \right] + \right. \\ & + \text{Sp} \left[C_0 \Sigma_A(t+1|t) C_\beta^T H^T B^{-1}(t+1) \frac{\partial H^T}{\partial \theta_\alpha} \right] + \\ & + \text{Sp} \left[C_\alpha \Sigma_A(t+1|t) C_0^T \frac{\partial H^T}{\partial \theta_\beta} B^{-1}(t+1) H \right] + \\ & \left. + \text{Sp} \left[C_\alpha \Sigma_A(t+1|t) C_\beta^T H^T B^{-1}(t+1) H \right] + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \text{Sp} \left[\frac{\partial B(t+1)}{\partial \theta_\alpha} B^{-1}(t+1) \frac{\partial B(t+1)}{\partial \theta_\beta} B^{-1}(t+1) \right] \right\}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, s. \end{aligned}$$

Нетрудно получить, что

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial M_{\alpha\beta}(U; \Theta)}{\partial u_j(\tau)} = \frac{\partial W_{\alpha\beta}(U; \Theta)}{\partial u_j(\tau)} = \\
 & = \sum_{t=0}^{N-1} \left\{ \text{Sp} \left[C_0 \left(\bar{x}_A(t+1|t) \frac{\partial \bar{x}_A^T(t+1|t)}{\partial u_j(\tau)} + \frac{\partial \bar{x}_A(t+1|t)}{\partial u_j(\tau)} \bar{x}_A^T(t+1|t) \right) \times \right. \right. \\
 & \quad \times C_0^T \frac{\partial H^T}{\partial \theta_\beta} B^{-1}(t+1) \frac{\partial H}{\partial \theta_\alpha} \left. \right] + \\
 & \quad + \text{Sp} \left[C_0 \left(\bar{x}_A(t+1|t) \frac{\partial \bar{x}_A^T(t+1|t)}{\partial u_j(\tau)} + \frac{\partial \bar{x}_A(t+1|t)}{\partial u_j(\tau)} \bar{x}_A^T(t+1|t) \right) \times \right. \\
 & \quad \times C_\beta^T H^T B^{-1}(t+1) \frac{\partial H}{\partial \theta_\alpha} \left. \right] + \\
 & \quad + \text{Sp} \left[C_\alpha \left(\bar{x}_A(t+1|t) \frac{\partial \bar{x}_A^T(t+1|t)}{\partial u_j(\tau)} + \frac{\partial \bar{x}_A(t+1|t)}{\partial u_j(\tau)} \bar{x}_A^T(t+1|t) \right) \times \right. \\
 & \quad \times C_0^T \frac{\partial H^T}{\partial \theta_\beta} B^{-1}(t+1) H \left. \right] + \\
 & \quad \left. + \text{Sp} \left[C_\alpha \left(\bar{x}_A(t+1|t) \frac{\partial \bar{x}_A^T(t+1|t)}{\partial u_j(\tau)} + \frac{\partial \bar{x}_A(t+1|t)}{\partial u_j(\tau)} \bar{x}_A^T(t+1|t) \right) C_\beta^T H^T B^{-1}(t+1) H \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Найдем производные $\frac{\partial \bar{x}_A(t+1|t)}{\partial u_j(\tau)}$:

$$\frac{\partial \bar{x}_A(t+1|t)}{\partial u_j(\tau)} = \begin{cases} 0, & \text{если } t=0 \text{ и } \tau \neq 0, \\ j\text{-му столбцу } \Psi_A, & \text{если } t=0 \text{ и } \tau=0, \\ \Phi_A(t+1, t) \frac{\partial \bar{x}_A(t|t-1)}{\partial u_j(\tau)} + \Psi_A \frac{\partial u(t)}{\partial u_j(\tau)}, & \text{если } t > 0, \end{cases}$$

где

$$\frac{\partial u(t)}{\partial u_j(\tau)} = \begin{cases} 0, & \text{если } t \neq \tau; \\ \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow j, & \text{если } t = \tau. \end{cases}$$

Алгоритм вычисления $\frac{\partial M(U; \Theta)}{\partial u_j(\tau)}$ может быть следующим.

1°. Для заданного θ найти:

$$\Phi, \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_i}, \quad i=1, 2, \dots, s; \quad \Gamma, H, \frac{\partial H}{\partial \theta_i}, \quad i=1, 2, \dots, s;$$

$$\Psi, \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_i}, \quad i=1, 2, \dots, s; \quad Q; R; P(0), \bar{x}(0), \frac{\partial \bar{x}(0)}{\partial \theta_i}, \quad i=1, 2, \dots, s.$$

Сформировать матрицы $\tilde{\Phi}_A$ и матрицу Ψ_A .

$$\tilde{\Phi}_A = \begin{bmatrix} \Phi \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_1} \\ \dots \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_s} \end{bmatrix},$$

$$\Psi_A = \begin{bmatrix} \Psi \\ \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_1} \\ \dots \\ \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_s} \end{bmatrix}.$$

2°. Положить $\frac{\partial M(U; \Theta)}{\partial u_j(\tau)} = 0$, $P(0|0) = P(0)$, $t = 0$.

3°. Вычислить $\frac{\partial \bar{x}_A(t+1|t)}{\partial u_j(\tau)}$ и $\bar{x}_A(t+1|t)$ по формуле

$$\bar{x}_A(t+1|t) = \begin{cases} \begin{bmatrix} \Phi \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_1} \\ \dots \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_s} \end{bmatrix} \bar{x}(0) + \begin{bmatrix} 0 \\ \Phi \frac{\partial \bar{x}(0)}{\partial \theta_1} \\ \dots \\ \Phi \frac{\partial \bar{x}(0)}{\partial \theta_s} \end{bmatrix} + \Psi_A u(0), & \text{если } t = 0; \\ \Phi_A(t+1, t) \bar{x}(t|t-1) + \Psi_A u(t), & \text{если } t > 0. \end{cases}$$

4°. Найти $P(t+1|t)$, $B(t+1)$, $K(t+1)$, $P(t+1|t+1)$, $\tilde{K}(t+1)$, используя выражения фильтра Калмана.

5°. Сформировать матрицу $\Phi_A(t+2, t+1)$ в соответствии с равенством

$$\Phi_A(t+2, t+1) = \begin{bmatrix} \Phi & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_1} - \tilde{K}(t+1) \frac{\partial H}{\partial \theta_1} & \Phi - \tilde{K}(t+1)H & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_s} - \tilde{K}(t+1) \frac{\partial H}{\partial \theta_s} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \Phi - \tilde{K}(t+1)H \end{bmatrix}.$$

6°. Получить приращение $\Delta \frac{\partial M(U; \Theta)}{\partial u_j(\tau)}$, отвечающее текущему значению t .

7°. Положить $\frac{\partial M(U; \Theta)}{\partial u_j(\tau)} = \frac{\partial M(U; \Theta)}{\partial u_j(\tau)} + \Delta \frac{\partial M(U; \Theta)}{\partial u_j(\tau)}$.

8°. Увеличить t на единицу. Если $t \leq N-1$, перейти на шаг 3°. В противном случае закончить процесс.

Получить выражение для градиента по весам не составляет особого труда, поскольку

$$\begin{aligned} \frac{\partial X[M(\xi)]}{\partial p_i} &= \frac{\partial[-\ln \det M(\xi)]}{\partial p_i} = -\text{Sp} \left[M^{-1}(\xi) \frac{\partial M(\xi)}{\partial p_i} \right] = \\ &= -\text{Sp} \left[M^{-1}(\xi) M(U_i) \right], \quad i = 1, \dots, q. \end{aligned}$$

Перейдем к критерию A -оптимальности. В этом случае

$$\begin{aligned} \frac{\partial X[M(\xi)]}{\partial u_j^{(i)}(t)} &= \frac{\partial[\text{Sp} M^{-1}(\xi)]}{\partial u_j^{(i)}(t)} = \text{Sp} \left[\frac{\partial M^{-1}(\xi)}{\partial u_j^{(i)}(t)} \right] = \\ &= -\text{Sp} \left[M^{-1}(\xi) \frac{\partial M(\xi)}{\partial u_j^{(i)}(t)} M^{-1}(\xi) \right] = -p_i \text{Sp} \left[M^{-1}(\xi) \frac{\partial M(U_i)}{\partial u_j^{(i)}(t)} M^{-1}(\xi) \right], \\ &i = 1, \dots, q; t = 0, \dots, N-1; j = 1, \dots, r \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial X[M(\xi)]}{\partial p_i} &= \frac{\partial[\text{Sp} M^{-1}(\xi)]}{\partial p_i} = \text{Sp} \left[\frac{\partial M^{-1}(\xi)}{\partial p_i} \right] = \\ &= -\text{Sp} \left[M^{-1}(\xi) \frac{\partial M(\xi)}{\partial p_i} M^{-1}(\xi) \right] = \\ &= -\text{Sp} \left[M^{-1}(\xi) M(U_i) M^{-1}(\xi) \right] = -\text{Sp} \left[M^{-2}(\xi) M(U_i) \right], \quad i = 1, 2, \dots, q. \end{aligned}$$

Двойственный алгоритм построения оптимальных сигналов требует вычисления градиента

$$\nabla_{\alpha} \mu_{U, \xi} = \left\| \frac{\partial \mu_{U, \xi}}{\partial u_j t} \right\|, \quad t = 0, 1, \dots, N-1; j = 1, 2, \dots, r.$$

Для критерия D -оптимальности получаем

$$\frac{\partial \mu_{U, \xi}}{\partial u_j t} = \frac{\partial \text{Sp} \left[M^{-1} \xi M U \right]}{\partial u_j t} = \text{Sp} \left[M^{-1} \xi \frac{\partial M U}{\partial u_j t} \right];$$

$$t = 0, 1, \dots, N-1, \quad j = 1, \dots, r,$$

а для критерия A -оптимальности

$$\frac{\partial \mu_{U, \xi}}{\partial u_j t} = \frac{\partial \text{Sp} \left[M^{-2} \xi M U \right]}{\partial u_j t} = \text{Sp} \left[M^{-2} \xi \frac{\partial M U}{\partial u_j t} \right];$$

$$t = 0, 1, \dots, N-1, \quad j = 1, \dots, r.$$

2.4. Планирование оптимальных входных сигналов для непрерывно-дискретных систем

2.4.1. Вывод соотношения для информационной матрицы однократного плана

ТЕОРЕМА 4 [58]

Для математической модели (2.22) с априорными предположениями (2.23)–(2.26), когда неизвестные параметры могут входить в различных комбинациях в матрицы F , G , Γ , H , а также в ковариационные матрицы Q , R и начальные условия $\bar{x}_0$, P_0 , элементы информационной матрицы плана, сосредоточенного в одной точке, определяются выражениями

$$M_{ij}(U; \Theta) =$$

$$= \sum_{k=1}^N \text{Sp} \left[C_0 \Sigma_A t_k | t_{k-1} + \bar{x}_A t_k | t_{k-1} \bar{x}_A^T t_k | t_{k-1} C_0^T \frac{\partial H^T}{\partial \theta_j} B^{-1} t_k \frac{\partial H}{\partial \theta_i} \right] +$$

$$+ \text{Sp} \left[C_0 \Sigma_A t_k | t_{k-1} + \bar{x}_A t_k | t_{k-1} x_A^T t_k | t_{k-1} C_j^T H^T B^{-1} t_k \frac{\partial H}{\partial \theta_i} \right] +$$

$$\begin{aligned}
& + \text{Sp} \left[C_i \Sigma_A t_k | t_{k-1} + \bar{x}_A t_k | t_{k-1} \bar{x}_A^T t_k | t_{k-1} C_0^T \frac{\partial H^T}{\partial \theta_j} B^{-1} t_k H \right] + \\
& + \text{Sp} \left[C_i \Sigma_A t_k | t_{k-1} + \bar{x}_A t_k | t_{k-1} x_A^T t_k | t_{k-1} C_j^T H^T B^{-1} t_k H \right] + \\
& + \frac{1}{2} \text{Sp} \left[\frac{\partial B t_k}{\partial \theta_i} B^{-1} t_k \frac{\partial B t_k}{\partial \theta_j} B^{-1} t_k \right] \Bigg\}; \quad i, j = 1, 2, \dots, s. \quad (2.90)
\end{aligned}$$

При этом справедливо представление

$$M_{ij}(U; \Theta) = W_{ij} U; \Theta + A_{ij} \Theta. \quad (2.91)$$

Доказательство

Учитывая выражение (2.35) для χ_Θ и (2.36) для $\frac{\partial \chi_\Theta}{\partial \theta_i}$, а также свойства симметричности матриц $B(t_k)$, $\frac{\partial B(t_k)}{\partial \theta_i}$, $B^{-1}(t_k)$, $B^{-1}(t_k) \frac{\partial B(t_k)}{\partial \theta_i} B^{-1}(t_k)$ и равенство $a^T b = \text{Sp}(ab^T) \quad \forall a, b \in R^n$, имеем:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \chi(\theta)}{\partial \theta_j \partial \theta_i} &= \sum_{k=1}^N \left\{ \text{Sp} \left[\frac{\partial^2 \varepsilon(t_k)}{\partial \theta_j \partial \theta_i} \varepsilon^T(t_k) B^{-1}(t_k) \right] + \right. \\
&+ \text{Sp} \left[\frac{\partial \varepsilon(t_k)}{\partial \theta_i} \varepsilon^T(t_k) \frac{\partial B^{-1}(t_k)}{\partial \theta_j} \right] + \text{Sp} \left[\frac{\partial \varepsilon(t_k)}{\partial \theta_i} \frac{\partial \varepsilon^T(t_k)}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_k) \right] - \\
&- \text{Sp} \left[\frac{\partial \varepsilon(t_k)}{\partial \theta_j} \varepsilon^T(t_k) B^{-1}(t_k) \frac{\partial B(t_k)}{\partial \theta_i} B^{-1}(t_k) \right] + \\
&+ \text{Sp} \left[\varepsilon(t_k) \varepsilon^T(t_k) B^{-1}(t_k) \frac{\partial B(t_k)}{\partial \theta_i} B^{-1}(t_k) \frac{\partial B(t_k)}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_k) \right] - \\
&- \frac{1}{2} \text{Sp} \left[\varepsilon(t_k) \varepsilon^T(t_k) B^{-1}(t_k) \frac{\partial^2 B(t_k)}{\partial \theta_j \partial \theta_i} B^{-1}(t_k) \right] -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \text{Sp} \left[B^{-1}(t_k) \frac{\partial B(t_k)}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_k) \frac{\partial B(t_k)}{\partial \theta_i} \right] + \\
& + \frac{1}{2} \text{Sp} \left[B^{-1}(t_k) \frac{\partial^2 B(t_k)}{\partial \theta_j \partial \theta_i} \right] \Bigg\}, \quad i, j = 1, 2, \dots, s.
\end{aligned}$$

Воспользовавшись тем, что

$$\begin{aligned}
\frac{\partial B^{-1}(t_k)}{\partial \theta_j} &= -B^{-1}(t_k) \frac{\partial B(t_k)}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_k); \\
\text{Sp}(AB) &= \text{Sp}(BA) \quad \forall A \in R_{n \times m}, \forall B \in R_{m \times n}; \\
E \quad \varepsilon(t_k) \varepsilon^T(t_k) &= B(t_k),
\end{aligned}$$

получим с учетом соотношения (1.10):

$$\begin{aligned}
M_{ij} &= \sum_{k=1}^N \left\{ \text{Sp} \left[E \left(\frac{\partial^2 \varepsilon(t_k)}{\partial \theta_j \partial \theta_i} \varepsilon^T(t_k) \right) B^{-1}(t_k) \right] - \right. \\
& - \text{Sp} \left[E \left(\frac{\partial \varepsilon(t_k)}{\partial \theta_i} \varepsilon^T(t_k) \right) B^{-1}(t_k) \frac{\partial B(t_k)}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_k) \right] + \\
& + \text{Sp} \left[E \left(\frac{\partial \varepsilon(t_k)}{\partial \theta_i} \frac{\partial \varepsilon^T(t_k)}{\partial \theta_j} \right) B^{-1}(t_k) \right] - \\
& - \text{Sp} \left[E \left(\frac{\partial \varepsilon(t_k)}{\partial \theta_j} \varepsilon^T(t_k) \right) B^{-1}(t_k) \frac{\partial B(t_k)}{\partial \theta_i} B^{-1}(t_k) \right] + \\
& \left. + \frac{1}{2} \text{Sp} \left[\frac{\partial B(t_k)}{\partial \theta_i} B^{-1}(t_k) \frac{\partial B(t_k)}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_k) \right] \right\}, \quad i, j = 1, 2, \dots, s. \quad (2.92)
\end{aligned}$$

Вычислим следующие математические ожидания:

$$E \left(\frac{\partial \varepsilon(t_k)}{\partial \theta_i} \varepsilon^T(t_k) \right), \quad E \left(\frac{\partial \varepsilon(t_k)}{\partial \theta_i} \frac{\partial \varepsilon^T(t_k)}{\partial \theta_j} \right), \quad E \left(\frac{\partial^2 \varepsilon(t_k)}{\partial \theta_j \partial \theta_i} \varepsilon^T(t_k) \right).$$

Поскольку

$$\frac{\partial \varepsilon(t_k)}{\partial \theta_i} = -\frac{\partial H}{\partial \theta_i} \hat{x}(t_k | t_{k-1}) - H \frac{\partial \hat{x}(t_k | t_{k-1})}{\partial \theta_i}; \quad (2.93)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon(t_k)}{\partial \theta_j \partial \theta_i} = & -\frac{\partial^2 H}{\partial \theta_j \partial \theta_i} \hat{x}(t_k | t_{k-1}) - \frac{\partial H}{\partial \theta_i} \frac{\partial \hat{x}(t_k | t_{k-1})}{\partial \theta_j} - \\ & - \frac{\partial H}{\partial \theta_j} \frac{\partial \hat{x}(t_k | t_{k-1})}{\partial \theta_i} - H \frac{\partial^2 \hat{x}(t_k | t_{k-1})}{\partial \theta_j \partial \theta_i}, \end{aligned} \quad (2.94)$$

можем записать:

$$\begin{aligned} E \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_i} t_k \varepsilon^T t_k \right) = & -\frac{\partial H}{\partial \theta_i} E \hat{x} t_k | t_{k-1} \varepsilon^T t_k - \\ & - H E \left(\frac{\partial \hat{x}}{\partial \theta_i} t_k | t_{k-1} \varepsilon^T t_k \right); \end{aligned} \quad (2.95)$$

$$\begin{aligned} E \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_i} t_k \frac{\partial \varepsilon^T}{\partial \theta_j} t_k \right) = & \frac{\partial H}{\partial \theta_i} E \hat{x} t_k | t_{k-1} \hat{x}^T t_k | t_{k-1} \frac{\partial H^T}{\partial \theta_j} + \\ & + \frac{\partial H}{\partial \theta_i} E \left(\hat{x} t_k | t_{k-1} \frac{\partial \hat{x}^T}{\partial \theta_j} t_k | t_{k-1} \right) H^T + \\ & + H E \left(\frac{\partial \hat{x}}{\partial \theta_i} t_k | t_{k-1} \hat{x}^T t_k | t_{k-1} \right) \frac{\partial H^T}{\partial \theta_j} + \\ & + H E \left(\frac{\partial \hat{x}}{\partial \theta_i} t_k | t_{k-1} \frac{\partial \hat{x}^T}{\partial \theta_j} t_k | t_{k-1} \right) H^T; \end{aligned} \quad (2.96)$$

$$\begin{aligned} E \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \theta_j \partial \theta_i} t_k \varepsilon^T t_k \right) = & -\frac{\partial^2 H}{\partial \theta_j \partial \theta_i} E \hat{x} t_k | t_{k-1} \varepsilon^T t_k - \\ & - \frac{\partial H}{\partial \theta_i} E \left(\frac{\partial \hat{x}}{\partial \theta_j} t_k | t_{k-1} \varepsilon^T t_k \right) - \\ & - \frac{\partial H}{\partial \theta_j} E \left(\frac{\partial \hat{x}}{\partial \theta_i} t_k | t_{k-1} \varepsilon^T t_k \right) - \end{aligned}$$

$$-HE \left(\frac{\partial^2 \hat{x} \ t_k | t_{k-1}}{\partial \theta_j \partial \theta_i} \varepsilon^T \ t_k \right). \quad (2.97)$$

Таким образом, нас интересуют математические ожидания следующих типов:

- 1) $E \ \hat{x} \ t_k | t_{k-1} \ \varepsilon^T \ t_k \ ;$
- 2) $E \left(\frac{\partial \hat{x} \ t_k | t_{k-1}}{\partial \theta_i} \varepsilon^T \ t_k \right);$
- 3) $E \left(\frac{\partial^2 \hat{x} \ t_k | t_{k-1}}{\partial \theta_j \partial \theta_i} \varepsilon^T \ t_k \right).$

Рассмотрим каждое из этих математических ожиданий отдельно. Для вычисления первого математического ожидания воспользуемся формулой

$$\begin{aligned} \hat{x}(t_k | t_{k-1}) = & \exp \left[F \ t_k - t_0 \right] \bar{x}_0 + \int_{t_0}^{t_k} \exp \left[F \ t_k - \tau \right] G u \ \tau \ d\tau + \\ & + \sum_{p=1}^{k-1} \exp \left[F \ t_k - t_p \right] K \ t_p \ \varepsilon \ t_p, \quad k=1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (2.98)$$

которая выводится по индукции из уравнений фильтра Калмана.

Принимая во внимание, что

$$E \ \varepsilon(t_k) = 0, \quad (2.99)$$

$$E \ \varepsilon(t_k) \varepsilon^T(\tau_k) = B(t_k) \delta_{t, \tau}, \quad (2.100)$$

получим:

$$\begin{aligned} E \ \hat{x}(t_k | t_{k-1}) \varepsilon^T(t_k) = & \exp \left[F \ t_k - t_0 \right] \bar{x}_0 \ E \ \varepsilon^T(t_k) + \\ & + \int_{t_0}^{t_k} \exp \left[F \ t_k - \tau \right] G u \ \tau \ d\tau \ E \ \varepsilon^T(t_k) + \\ & + \sum_{p=1}^{k-1} \exp \left[F \ t_k - t_p \right] K \ t_p \ E \ \varepsilon \ t_p \ \varepsilon^T \ t_p = 0. \end{aligned} \quad (2.101)$$

Для вычисления второго математического ожидания продифференцируем $\hat{x}(t_k | t_{k-1})$ из (2.98) по θ_i :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{x}(t_k | t_{k-1})}{\partial \theta_i} = & t_k - t_0 \frac{\partial F}{\partial \theta_i} \exp[F t_k - t_0] \bar{x}(0) + \exp[F t_k - t_0] \frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \theta_i} + \\ & + \int_{t_0}^{t_k} \left[t_k - \tau \frac{\partial F}{\partial \theta_i} \exp[F t_k - \tau] G + \exp[F t_k - \tau] \frac{\partial G}{\partial \theta_i} \right] u(\tau) d\tau + \\ & + \sum_{p=1}^{k-1} \left[t_k - t_p \frac{\partial F}{\partial \theta_i} \exp[F t_k - t_p] K t_p \varepsilon t_p + \right. \\ & \left. + \exp[F t_k - t_p] \frac{\partial K t_p}{\partial \theta_i} \varepsilon t_p + \right. \\ & \left. + \exp[F t_k - t_p] K t_p \frac{\partial \varepsilon t_p}{\partial \theta_i} \right]. \end{aligned} \quad (2.102)$$

В силу того, что

$$E \left(\frac{\partial \varepsilon(t_j)}{\partial \theta_i} \varepsilon^T(t_k) \right) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k-1, \quad (2.103)$$

с учетом соотношений (2.99), (2.100) получим

$$\begin{aligned} E \left(\frac{\partial \hat{x}(t_k | t_{k-1})}{\partial \theta_i} \varepsilon^T(t_k) \right) = & t_k - t_0 \frac{\partial F}{\partial \theta_i} \exp[F t_k - t_0] \bar{x}(0) E \varepsilon^T(t_k) + \\ & + \exp[F t_k - t_0] \frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \theta_i} E \varepsilon^T(t_k) + \\ & + \int_{t_0}^{t_k} \left[t_k - \tau \frac{\partial F}{\partial \theta_i} \exp[F t_k - \tau] G + \exp[F t_k - \tau] \frac{\partial G}{\partial \theta_i} \right] u(\tau) E \varepsilon^T(t_k) d\tau + \\ & + \sum_{p=1}^{k-1} \left[t_k - t_p \frac{\partial F}{\partial \theta_i} \exp[F t_k - t_p] K t_p E \varepsilon t_p \varepsilon^T(t_k) + \right. \\ & \left. + \exp[F t_k - t_p] \frac{\partial K t_p}{\partial \theta_i} E \varepsilon t_p \varepsilon^T(t_k) + \right. \\ & \left. + \exp[F t_k - t_p] K t_p \frac{\partial \varepsilon t_p}{\partial \theta_i} E \varepsilon^T(t_k) \right]. \end{aligned}$$

$$+ \exp \left[F \ t_k - t_p \right] K \ t_p \ E \left(\frac{\partial \varepsilon \ t_p}{\partial \theta_i} \varepsilon^T \ t_k \right) \Bigg] = 0. \quad (2.104)$$

Для вычисления третьего математического ожидания продифференцируем $\frac{\partial \hat{x}(t_k | t_{k-1})}{\partial \theta_i}$ из (2.102) по θ_j :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \hat{x}(t_k | t_{k-1})}{\partial \theta_j \partial \theta_i} &= (t_k - t_0) \frac{\partial^2 F}{\partial \theta_j \partial \theta_i} \exp \left[F \ t_k - t_0 \right] \bar{x}(0) + \\ &+ (t_k - t_0)^2 \frac{\partial F}{\partial \theta_i} \frac{\partial F}{\partial \theta_j} \exp \left[F \ t_k - t_0 \right] \bar{x}(0) + (t_k - t_0) \frac{\partial F}{\partial \theta_i} \times \\ &\times \exp \left[F \ t_k - t_0 \right] \frac{\partial \bar{x}(0)}{\partial \theta_j} + (t_k - t_0) \frac{\partial F}{\partial \theta_j} \exp \left[F \ t_k - t_0 \right] \frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \theta_i} + \\ &+ \exp \left[F \ t_k - t_0 \right] \frac{\partial^2 \bar{x}_0}{\partial \theta_j \partial \theta_i} + \\ &+ \int_{t_0}^{t_k} \left[t_k - \tau \frac{\partial^2 F}{\partial \theta_j \partial \theta_i} \exp \left[F \ t_k - \tau \right] G + t_k - \tau^2 \frac{\partial F}{\partial \theta_i} \frac{\partial F}{\partial \theta_j} \times \right. \\ &\times \exp \left[F \ t_k - \tau \right] G + t_k - \tau \frac{\partial F}{\partial \theta_i} \exp \left[F \ t_k - \tau \right] \frac{\partial G}{\partial \theta_j} + \\ &+ t_k - \tau \frac{\partial F}{\partial \theta_j} \exp \left[F \ t_k - \tau \right] \frac{\partial G}{\partial \theta_i} + \exp \left[F \ t_k - \tau \right] \frac{\partial^2 G}{\partial \theta_j \partial \theta_i} \Bigg] u \ \tau \ d\tau + \\ &+ \sum_{p=1}^{k-1} \left[t_k - t_p \frac{\partial^2 F}{\partial \theta_j \partial \theta_i} \exp \left[F \ t_k - t_p \right] K \ t_p \ \varepsilon \ t_p + \right. \\ &+ t_k - t_p^2 \frac{\partial F}{\partial \theta_i} \frac{\partial F}{\partial \theta_j} \exp \left[F \ t_k - t_p \right] K \ t_p \ \varepsilon \ t_p + \\ &+ t_k - t_p \frac{\partial F}{\partial \theta_i} \exp \left[F \ t_k - t_p \right] \frac{\partial K \ t_p}{\partial \theta_j} \varepsilon \ t_p + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + t_k - t_p \frac{\partial F}{\partial \theta_i} \exp \left[F t_k - t_p \right] K t_p \frac{\partial \varepsilon t_p}{\partial \theta_j} + \\
& + t_k - t_p \frac{\partial F}{\partial \theta_j} \exp \left[F t_k - t_p \right] \frac{\partial K t_p}{\partial \theta_i} \varepsilon t_p + \\
& + \exp \left[F t_k - t_p \right] \frac{\partial^2 K t_p}{\partial \theta_j \partial \theta_i} \varepsilon t_p + \\
& + \exp \left[F t_k - t_p \right] \frac{\partial K t_p}{\partial \theta_i} \frac{\partial \varepsilon t_p}{\partial \theta_j} + \\
& + t_k - t_p \frac{\partial F}{\partial \theta_j} \exp \left[F t_k - t_p \right] K t_p \frac{\partial \varepsilon t_p}{\partial \theta_i} + \\
& + \exp \left[F t_k - t_p \right] \frac{\partial K t_p}{\partial \theta_j} \frac{\partial \varepsilon t_p}{\partial \theta_i} + \\
& + \exp \left[F t_k - t_p \right] K t_p \frac{\partial^2 \varepsilon t_p}{\partial \theta_j \partial \theta_i} \Bigg]. \tag{2.105}
\end{aligned}$$

В силу того, что

$$E \left(\frac{\partial^2 \varepsilon(q)}{\partial \theta_j \partial \theta_i} \varepsilon^T t_k \right) = 0, \quad q = 1, 2, \dots, k-1, \tag{2.106}$$

с учетом соотношений (2.99), (2.100), (2.103) получим

$$\begin{aligned}
E \left(\frac{\partial^2 \hat{x}(t_k | t_{k-1})}{\partial \theta_j \partial \theta_i} \varepsilon^T t_k \right) &= \left[t_k - t_0 \frac{\partial^2 F}{\partial \theta_j \partial \theta_i} \exp \left[F t_k - t_0 \right] \bar{x}(0) + \right. \\
& + t_k - t_0^2 \frac{\partial F}{\partial \theta_i} \frac{\partial F}{\partial \theta_j} \exp \left[F t_k - t_0 \right] \bar{x}(0) + \\
& \left. + t_k - t_0 \frac{\partial F}{\partial \theta_i} \exp \left[F t_k - t_0 \right] \frac{\partial \bar{x}(0)}{\partial \theta_j} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + t_k - t_0 \frac{\partial F}{\partial \theta_j} \exp[F t_k - t_0] \frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \theta_i} + \exp[F t_k - t_0] \frac{\partial^2 \bar{x}_0}{\partial \theta_j \partial \theta_i} \Big] E \varepsilon^T t_k + \\
& + \int_{t_0}^{t_k} \left[t_k - \tau \frac{\partial^2 F}{\partial \theta_j \partial \theta_i} \exp[F t_k - \tau] G + t_k - \tau^2 \frac{\partial F}{\partial \theta_i} \frac{\partial F}{\partial \theta_j} \exp[F t_k - \tau] G + \right. \\
& + t_k - \tau \frac{\partial F}{\partial \theta_i} \exp[F t_k - \tau] \frac{\partial G}{\partial \theta_j} + t_k - \tau \frac{\partial F}{\partial \theta_j} \exp[F t_k - \tau] \frac{\partial G}{\partial \theta_i} + \\
& \left. + \exp[F t_k - \tau] \frac{\partial^2 G}{\partial \theta_j \partial \theta_i} \right] u \tau E \varepsilon^T t_k d\tau + \\
& + \sum_{p=1}^{k-1} \left[t_k - t_p \frac{\partial^2 F}{\partial \theta_j \partial \theta_i} \exp[F t_k - t_p] K t_p E \varepsilon t_p \varepsilon^T t_k + \right. \\
& + t_k - t_p^2 \frac{\partial F}{\partial \theta_i} \frac{\partial F}{\partial \theta_j} \exp[F t_k - t_p] K t_p E \varepsilon t_p \varepsilon^T t_k + \\
& + t_k - t_p \frac{\partial F}{\partial \theta_i} \exp[F t_k - t_p] \frac{\partial K t_p}{\partial \theta_j} E \varepsilon t_p \varepsilon^T t_k + \\
& + t_k - t_p \frac{\partial F}{\partial \theta_i} \exp[F t_k - t_p] K t_p E \left(\frac{\partial \varepsilon t_p}{\partial \theta_j} \varepsilon^T t_k \right) + \\
& + t_k - t_p \frac{\partial F}{\partial \theta_j} \exp[F t_k - t_p] \frac{\partial K t_p}{\partial \theta_i} E \varepsilon t_p \varepsilon^T t_k + \\
& + \exp[F t_k - t_p] \frac{\partial^2 K t_p}{\partial \theta_j \partial \theta_i} E \varepsilon t_p \varepsilon^T t_k + \\
& + \exp[F t_k - t_p] \frac{\partial K t_p}{\partial \theta_i} E \left(\frac{\partial \varepsilon t_p}{\partial \theta_j} \varepsilon^T t_k \right) + \\
& \left. + t_k - t_p \frac{\partial F}{\partial \theta_j} \exp[F t_k - t_p] K t_p E \left(\frac{\partial \varepsilon t_p}{\partial \theta_i} \varepsilon^T t_k \right) \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \exp \left[F \ t_k - t_p \right] \frac{\partial K \ t_p}{\partial \theta_j} E \left(\frac{\partial \varepsilon \ t_p}{\partial \theta_i} \varepsilon^T \ t_k \right) + \\
& + \exp \left[F \ t_k - t_p \right] K \ t_p \ E \left(\frac{\partial^2 \varepsilon \ t_p}{\partial \theta_j \partial \theta_i} \varepsilon^T \ t_k \right) \Bigg] = 0. \quad (2.107)
\end{aligned}$$

Подставив соотношения (2.101), (2.104) и (2.107) в равенства (2.95) и (2.97), приходим к тому что

$$E \left(\frac{\partial \varepsilon(t_k)}{\partial \theta_i} \varepsilon^T(t_k) \right) = 0; \quad (2.108)$$

$$E \left(\frac{\partial^2 \varepsilon(t_k)}{\partial \theta_j \partial \theta_i} \varepsilon^T(t_k) \right) = 0. \quad (2.109)$$

Соотношения (2.96), (2.108), (2.109) позволяют записать формулу (2.92) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
M_{ij} = & \sum_{k=1}^N \left\{ \text{Sp} \left[\frac{\partial H}{\partial \theta_i} E \left(\hat{x} \ t_k | t_{k-1} \right) \hat{x}^T \ t_k | t_{k-1} \right] \frac{\partial H^T}{\partial \theta_j} B^{-1} \ t_k \right] + \\
& + \text{Sp} \left[\frac{\partial H}{\partial \theta_i} E \left(\hat{x} \ t_k | t_{k-1} \right) \frac{\partial \hat{x}^T \ t_k | t_{k-1}}{\partial \theta_j} \right] H^T B^{-1} \ t_k \right] + \\
& + \text{Sp} \left[H E \left(\frac{\partial \hat{x} \ t_k | t_{k-1}}{\partial \theta_i} \hat{x}^T \ t_k | t_{k-1} \right) \right] \frac{\partial H^T}{\partial \theta_j} B^{-1} \ t_k \right] + \\
& + \text{Sp} \left[H E \left(\frac{\partial \hat{x} \ t_k | t_{k-1}}{\partial \theta_i} \frac{\partial \hat{x}^T \ t_k | t_{k-1}}{\partial \theta_j} \right) \right] H^T B^{-1} \ t_k \right] + \\
& + \frac{1}{2} \text{Sp} \left[\frac{\partial B \ t_k}{\partial \theta_i} B^{-1} \ t_k \frac{\partial B \ t_k}{\partial \theta_j} B^{-1} \ t_k \right] \Bigg\}; \quad i, j = 1, 2, \dots, s. \quad (2.110)
\end{aligned}$$

Перейдем к вычислению математических ожиданий в соотношении (2.110), для чего введем в рассмотрение расширенный вектор состояния:

$$\hat{x}_A(t_k | t_{k-1}) = \begin{bmatrix} \hat{x}(t_k | t_{k-1}) \\ \frac{\partial \hat{x}(t_k | t_{k-1})}{\partial \theta_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \hat{x}(t_k | t_{k-1})}{\partial \theta_s} \end{bmatrix}$$

размера $n \times (s+1)$ и матрицы $C_i = [\underbrace{0, \dots, 0}_i, 1, 0, \dots, 0]$, $i = 0, 1, \dots, s$, размера $n \times n(s+1)$. С учетом этих обозначений

$$E \hat{x}(t_k | t_{k-1}) \hat{x}^T(t_k | t_{k-1}) = C_0 E \hat{x}_A(t_k | t_{k-1}) \hat{x}_A^T(t_k | t_{k-1}) C_0^T; \quad (2.111)$$

$$E \left(\hat{x}(t_k | t_{k-1}) \frac{\partial \hat{x}^T(t_k | t_{k-1})}{\partial \theta_j} \right) = C_0 E \hat{x}_A(t_k | t_{k-1}) \hat{x}_A^T(t_k | t_{k-1}) C_j^T; \quad (2.112)$$

$$E \left(\frac{\partial \hat{x}(t_k | t_{k-1})}{\partial \theta_i} \hat{x}^T(t_k | t_{k-1}) \right) = C_i E \hat{x}_A(t_k | t_{k-1}) \hat{x}_A^T(t_k | t_{k-1}) C_0^T; \quad (2.113)$$

$$E \left(\frac{\partial \hat{x}(t_k | t_{k-1})}{\partial \theta_i} \frac{\partial \hat{x}^T(t_k | t_{k-1})}{\partial \theta_j} \right) = C_i E \hat{x}_A(t_k | t_{k-1}) \hat{x}_A^T(t_k | t_{k-1}) C_j^T. \quad (2.114)$$

Следовательно, все четыре математических ожидания, стоящих в (2.110), являются однотипными и определяются через

$$E \hat{x}_A(t_k | t_{k-1}) \hat{x}_A^T(t_k | t_{k-1}).$$

Обозначим

$$\bar{x}_A(t_k | t_{k-1}) = E \hat{x}_A(t_k | t_{k-1});$$

$$\Sigma_A(t_k | t_{k-1}) = E \begin{bmatrix} \hat{x}_A(t_k | t_{k-1}) - \bar{x}_A(t_k | t_{k-1}) & \hat{x}_A(t_k | t_{k-1}) - \bar{x}_A(t_k | t_{k-1})^T \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$E \hat{x}_A(t_k | t_{k-1}) \hat{x}_A^T(t_k | t_{k-1}) = \Sigma_A(t_k | t_{k-1}) + \bar{x}_A(t_k | t_{k-1}) \bar{x}_A^T(t_k | t_{k-1}). \quad (2.115)$$

Получим рекуррентные соотношения для вычисления $\bar{x}_A(t_k | t_{k-1})$ и $\Sigma_A(t_k | t_{k-1})$. Положим

$$\tilde{K}(t_k) = \exp[F(t_{k+1} - t_k)] K(t_k). \quad (2.116)$$

Воспользовавшись выражением

$$\begin{aligned} \hat{x}(t_k | t_{k-1}) &= \exp[F(t_k - t_{k-1})] \hat{x}(t_{k-1} | t_{k-1}) + \\ &+ \int_{t_{k-1}}^{t_k} \exp[F(t_k - \tau)] G u(\tau) d\tau, \quad k=1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (2.117)$$

выразим для $k > 1$ $\hat{x}(t_k | t_{k-1})$ через $\hat{x}(t_{k-1} | t_{k-2})$:

$$\begin{aligned} \hat{x}(t_k | t_{k-1}) &= \exp[F(t_k - t_{k-1})] \hat{x}(t_{k-1} | t_{k-2}) + \tilde{K}(t_{k-1}) \varepsilon(t_{k-1}) + \\ &+ \int_{t_{k-1}}^{t_k} \exp[F(t_k - \tau)] G u(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (2.118)$$

Дифференцируя (2.118) по θ_i с учетом выражения для $\frac{\partial \varepsilon(t_k)}{\partial \theta_i}$,

приходим к тому, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{x}(t_k | t_{k-1})}{\partial \theta_i} &= (t_k - t_{k-1}) \frac{\partial F}{\partial \theta_i} \exp[F(t_k - t_{k-1})] \hat{x}(t_{k-1} | t_{k-2}) + \\ &+ \exp[F(t_k - t_{k-1})] \frac{\partial \hat{x}(t_{k-1} | t_{k-2})}{\partial \theta_i} + \\ &+ \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - \tau) \frac{\partial F}{\partial \theta_i} \exp[F(t_k - \tau)] G u(\tau) d\tau + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \exp[F(t_k - \tau)] \frac{\partial G}{\partial \theta_i} u(\tau) d\tau + \\ &+ \frac{\partial \tilde{K}(t_{k-1})}{\partial \theta_i} \varepsilon(t_{k-1}) + \tilde{K}(t_{k-1}) \frac{\partial \varepsilon(t_{k-1})}{\partial \theta_i} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[t_k - t_{k-1} \frac{\partial F}{\partial \theta_i} \exp[F t_k - t_{k-1}] - \tilde{K} t_{k-1} \frac{\partial H}{\partial \theta_i} \right] \hat{x}(t_{k-1} | t_{k-2}) + \\
&+ \left[\exp[F t_k - t_{k-1}] - \tilde{K} t_{k-1} H \right] \frac{\partial \hat{x} t_{k-1} | t_{k-2}}{\partial \theta_i} + \tilde{K} t_{k-1} \frac{\partial \varepsilon t_{k-1}}{\partial \theta_i} + \\
&+ \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left[t_k - \tau \frac{\partial F}{\partial \theta_i} \exp[F t_k - \tau] G + \exp[F t_k - \tau] \frac{\partial G}{\partial \theta_i} \right] u \tau d\tau. \quad (2.119)
\end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned}
\Phi_k &= e^{[F t_k - t_{k-1}]}; \\
F_A(t_k, t_{k-1}) &= \\
&= \begin{bmatrix} \Phi_k & 0 & \dots & 0 \\ t_k - t_{k-1} \frac{\partial F}{\partial \theta_1} \Phi_k - \tilde{K} t_{k-1} \frac{\partial H}{\partial \theta_1} \Phi_k - \tilde{K} t_{k-1} H & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_k - t_{k-1} \frac{\partial F}{\partial \theta_s} \Phi_k - \tilde{K} t_{k-1} \frac{\partial H}{\partial \theta_s} & 0 & \dots & \Phi_k - \tilde{K} t_{k-1} H \end{bmatrix}; \quad (2.120)
\end{aligned}$$

$$G_A(t_k, \tau) = \begin{bmatrix} \exp[F t_k - \tau] G \\ t_k - \tau \frac{\partial F}{\partial \theta_1} \exp[F t_k - \tau] G + \exp[F t_k - \tau] \frac{\partial G}{\partial \theta_1} \\ \dots \\ t_k - \tau \frac{\partial F}{\partial \theta_s} \exp[F t_k - \tau] G + \exp[F t_k - \tau] \frac{\partial G}{\partial \theta_s} \end{bmatrix}; \quad (2.121)$$

$$\tilde{K}_A \ t_{k-1} = \begin{bmatrix} \tilde{K} \ t_{k-1} \\ \frac{\partial \tilde{K} \ t_{k-1}}{\partial \theta_1} \\ \dots \\ \frac{\partial \tilde{K} \ t_{k-1}}{\partial \theta_s} \end{bmatrix}. \quad (2.122)$$

Тогда равенства (2.118) и (2.119) можно объединить общей компактной формулой

$$\begin{aligned} \hat{x}_A \ t_k | t_{k-1} = & F_A \ t_k, t_{k-1} \ \hat{x}_A \ t_{k-1} | t_{k-2} + \tilde{K}_A \ t_{k-1} \ \varepsilon \ t_{k-1} + \\ & + \int_{t_{k-1}}^{t_k} G_A \ t_k, \tau \ u \ \tau \ d\tau, \quad k > 1. \end{aligned} \quad (2.123)$$

При $k = 1$ из соотношения (2.117) имеем

$$\hat{x}(t_1 | t_0) = \exp \left[F \ t_1 - t_0 \right] \bar{x}_0 + \int_{t_0}^{t_1} \exp \left[F \ t_1 - \tau \right] G u \ \tau \ d\tau.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{x} \ t_1 | t_0}{\partial \theta_i} = & t_1 - t_0 \ \frac{\partial F}{\partial \theta_i} \exp \left[F \ t_1 - t_0 \right] \bar{x}_0 + \exp \left[F \ t_1 - t_0 \right] \frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \theta_i} + \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \left[t_1 - \tau \ \frac{\partial F}{\partial \theta_i} \exp \left[F \ t_1 - \tau \right] G + \exp \left[F \ t_1 - \tau \right] \frac{\partial G}{\partial \theta_i} \right] u \ \tau \ d\tau; \\ & i = 1, 2, \dots, s \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\hat{x}_A \ t_1 | t_0 = \begin{bmatrix} \exp \left[F \ t_1 - t_0 \right] \\ t_1 - t_0 \ \frac{\partial F}{\partial \theta_1} \exp \left[F \ t_1 - t_0 \right] \\ \dots \\ t_1 - t_0 \ \frac{\partial F}{\partial \theta_s} \exp \left[F \ t_1 - t_0 \right] \end{bmatrix} \bar{x}_0 + \begin{bmatrix} 0 \\ \exp \left[F \ t_1 - t_0 \right] \frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \theta_1} \\ \dots \\ \exp \left[F \ t_1 - t_0 \right] \frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \theta_s} \end{bmatrix} \frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \theta_i} +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} G_A(t_1, \tau) u(\tau) d\tau. \quad (2.124)$$

Вычисляя математические ожидания от (2.123) и (2.124), получаем:

$$\begin{aligned} \bar{x}_A(t_k | t_{k-1}) = & \left[\begin{array}{c} \exp[F(t_1 - t_0)] \\ t_1 - t_0 \frac{\partial F}{\partial \theta_1} \exp[F(t_1 - t_0)] \\ \dots \\ t_1 - t_0 \frac{\partial F}{\partial \theta_s} \exp[F(t_1 - t_0)] \end{array} \right] \bar{x}_0 + \left[\begin{array}{c} 0 \\ \exp[F(t_1 - t_0)] \frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \theta_1} \\ \dots \\ \exp[F(t_1 - t_0)] \frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \theta_s} \end{array} \right] \frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \theta_i} + \\ & + \int_{t_0}^{t_1} G_A(t_1, \tau) u(\tau) d\tau, \quad k=1; \\ & F_A(t_k, t_{k-1}) \bar{x}_A(t_{k-1} | t_{k-2}) + \int_{t_{k-1}}^{t_k} G_A(t_k, \tau) u(\tau) d\tau, \quad k > 1. \end{aligned} \quad (2.125)$$

Из равенства (2.125) сразу же вытекает, что

$$\Sigma_A(t_1 | t_0) = 0. \quad (2.126)$$

При $k > 1$ в силу соотношений (2.123), (2.125) имеем:

$$\begin{aligned} \Sigma_A(t_k | t_{k-1}) = & F_A(t_k, t_{k-1}) \Sigma_A(t_{k-1} | t_{k-2}) F_A^T(t_k, t_{k-1}) + \\ & + F_A(t_k, t_{k-1}) E \left[\hat{x}_A(t_{k-1} | t_{k-2}) - \bar{x}_A(t_{k-1} | t_{k-2}) \varepsilon^T(t_{k-1}) \right] \tilde{K}_A^T(t_{k-1}) + \\ & + \tilde{K}_A(t_{k-1}) E \left[\varepsilon(t_k) \hat{x}_A(t_{k-1} | t_{k-2}) - \bar{x}_A(t_{k-1} | t_{k-2}) \right]^T F_A^T(t_k | t_{k-1}) + \\ & + \tilde{K}_A(t_{k-1}) B(t_{k-1}) \tilde{K}_A^T(t_{k-1}). \end{aligned} \quad (2.127)$$

Принимая во внимание выражения (2.99), (2.101) и (2.104), находим

$$\begin{aligned}
 & E \left[\hat{x}_A \ t_{k-1} | t_{k-2} \ - \bar{x}_A \ t_{k-1} | t_{k-2} \ \varepsilon^T \ t_{k-1} \right] = \\
 & = E \left[\hat{x}_A \ t_{k-1} | t_{k-2} \ \varepsilon^T \ t_{k-1} \right] - \bar{x}_A \ t_{k-1} | t_{k-2} \ E \left[\varepsilon^T \ t_{k-1} \right] = \\
 & = E \left[\begin{array}{c} \hat{x} \ t_{k-1} | t_{k-2} \ \varepsilon^T \ t_{k-1} \\ \frac{\partial \hat{x} \ t_{k-1} | t_{k-2}}{\partial \theta_1} \varepsilon^T \ t_{k-1} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \frac{\partial \hat{x} \ t_{k-1} | t_{k-2}}{\partial \theta_s} \varepsilon^T \ t_{k-1} \end{array} \right] = 0.
 \end{aligned}$$

Таким образом, второе и третье слагаемые в выражении (2.127) равны нулю и

$$\begin{aligned}
 \Sigma_A \ t_k | t_{k-1} &= F_A \ t_k, t_{k-1} \ \Sigma_A \ t_{k-1} | t_{k-2} \ F_A^T \ t_k, t_{k-1} + \\
 &+ \tilde{K}_A \ t_{k-1} \ B \ t_{k-1} \ \tilde{K}_A^T \ t_{k-1}, \quad k > 1.
 \end{aligned} \tag{2.128}$$

Формулы (2.125), (2.128) будут использоваться при непосредственном вычислении информационной матрицы одноточечного плана.

Соотношение (2.90) следует из равенств (2.110)–(2.115).

Заметим, что полученное выражение (2.90) представимо в виде суммы двух слагаемых (2.91), одно из которых зависит от компонент входного сигнала U :

$$\begin{aligned}
 W_{ij} \ U; \Theta &= \sum_{k=1}^N \left\{ \text{Sp} \left[C_0 \bar{x}_A \ t_k | t_{k-1} \ \bar{x}_A^T \ t_k | t_{k-1} \ C_0^T \frac{\partial H^T}{\partial \theta_j} B^{-1} \ t_k \ \frac{\partial H}{\partial \theta_i} \right] + \right. \\
 &+ \text{Sp} \left[C_0 \ \bar{x}_A \ t_k | t_{k-1} \ \bar{x}_A^T \ t_k | t_{k-1} \ C_j^T H^T B^{-1} \ t_k \ \frac{\partial H}{\partial \theta_i} \right] + \\
 &+ \text{Sp} \left[C_i \ \bar{x}_A \ t_k | t_{k-1} \ \bar{x}_A^T \ t_k | t_{k-1} \ C_0^T \frac{\partial H^T}{\partial \theta_j} B^{-1} \ t_k \ H \right] +
 \end{aligned}$$

$$+ \text{Sp} \left[C_i \bar{x}_A t_k | t_{k-1} \bar{x}_A^T t_k | t_{k-1} C_j^T H^T B^{-1} t_k H \right] \Bigg\},$$

$$i, j = 1, 2, \dots, s, \quad (2.129)$$

а второе не зависит:

$$\begin{aligned} A_{ij} \ominus &= \sum_{k=1}^N \left\{ \text{Sp} \left[C_0 \Sigma_A t_k | t_{k-1} C_0^T \frac{\partial H^T}{\partial \theta_j} B^{-1} t_k \frac{\partial H}{\partial \theta_i} \right] + \right. \\ &+ \text{Sp} \left[C_0 \Sigma_A t_k | t_{k-1} C_j^T H^T B^{-1} t_k \frac{\partial H}{\partial \theta_i} \right] + \\ &+ \text{Sp} \left[C_i \Sigma_A t_k | t_{k-1} C_0^T \frac{\partial H^T}{\partial \theta_j} B^{-1} t_k H \right] + \\ &+ \text{Sp} \left[C_i \Sigma_A t_k | t_{k-1} C_j^T H^T B^{-1} t_k H \right] + \\ &\left. + \frac{1}{2} \text{Sp} \left[\frac{\partial B}{\partial \theta_i} t_k B^{-1} t_k \frac{\partial B}{\partial \theta_j} t_k B^{-1} t_k \right] \right\}; \quad i, j = 1, 2, \dots, s. \quad (2.130) \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Выражение (2.91) позволит нам оптимизировать процесс нахождения планов экспериментов за счет того, что при изменении значения входного сигнала будет пересчитываться только значение матрицы $W(U, \Theta)$.

СЛЕДСТВИЕ 1

Если подлежащие оцениванию параметры входят только в матрицы F и G , то выражение для информационной матрицы (2.110) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \sum_{k=1}^N \left\{ \text{Sp} \left[HE \left(\frac{\partial \hat{x} t_k | t_{k-1}}{\partial \theta_i} \frac{\partial \hat{x}^T t_k | t_{k-1}}{\partial \theta_j} \right) H^T B^{-1} t_k \right] + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} \text{Sp} \left[\frac{\partial B}{\partial \theta_i} t_k B^{-1} t_k \frac{\partial B}{\partial \theta_j} t_k B^{-1} t_k \right] \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^N \left\{ E \left[\frac{\partial \hat{x}^T t_k | t_{k-1}}{\partial \theta_j} H^T B^{-1} t_k H \frac{\partial \hat{x} t_k | t_{k-1}}{\partial \theta_i} \right] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \text{Sp} \left[B^{-1} t_k \frac{\partial B t_k}{\partial \theta_i} B^{-1} t_k \frac{\partial B t_k}{\partial \theta_j} \right] \right\}, \quad i, j = 1, 2, \dots, s, \quad (2.131)
\end{aligned}$$

что совпадает с выражением для элементов информационной матрицы Фишера одноточечного плана, приведенным А.А. Поповым в [34].

СЛЕДСТВИЕ 2

Для детерминированной линейной непрерывно-дискретной системы, когда

$$\dot{x} t = Fx t + Gu t, \quad t \in t_0, T,$$

$x t_0$ – задано и модель измерений по-прежнему имеет вид (2.22), из выражения (2.110) находим

$$M_{ij} = \sum_{k=1}^N \frac{\partial x^T t_k}{\partial \theta_i} H^T R H \frac{\partial x t_k}{\partial \theta_j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, s,$$

что соответствует результату, представленному в [30].

2.4.2. Алгоритм вычисления информационной матрицы одноточечного плана

Приведенные в разделе 2.4.1 аналитические выкладки позволяют предложить следующий *алгоритм вычисления информационной матрицы* (2.90) [58]:

1°. Положим $k=1$, $M \Theta = 0$.

Для заданного $\Theta = \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s$ найдем:

$$\begin{aligned}
&F, \frac{\partial F}{\partial \theta_i}, \quad i = 1, 2, \dots, s; & Q, \frac{\partial Q}{\partial \theta_i}, \quad i = 1, 2, \dots, s; \\
&G, \frac{\partial G}{\partial \theta_i}, \quad i = 1, 2, \dots, s; & R, \frac{\partial R}{\partial \theta_i}, \quad i = 1, 2, \dots, s;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma, \frac{\partial \Gamma}{\partial \theta_i}, \quad i=1, 2, \dots, s; & \quad \bar{x}_0, \frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \theta_i}, \quad i=1, 2, \dots, s; \\ H, \frac{\partial H}{\partial \theta_i}, \quad i=1, 2, \dots, s; & \quad P_0, \frac{\partial P_0}{\partial \theta_i}, \quad i=1, 2, \dots, s. \end{aligned}$$

2°. По формуле (2.43) вычислим начальные условия для уравнений чувствительности.

3°. Решим уравнения чувствительности для ковариационной матрицы оценки вектора состояний (2.42). Получаем $P \, t_k | t_{k-1}$ при фиксированном значении вектора неизвестных параметров Θ .

4°. Вычислим

$$\begin{aligned} B \, t_k &= H P \, t_k | t_{k-1} H^T + R; \\ \frac{\partial B \, t_j}{\partial \theta_k} &= \frac{\partial H}{\partial \theta_k} P \, t_j | t_{j-1} H^T + H \frac{\partial P \, t_j | t_{j-1}}{\partial \theta_k} H^T + \\ &+ H P \, t_j | t_{j-1} \frac{\partial H^T}{\partial \theta_k} + \frac{\partial R}{\partial \theta_k}, \quad k = \overline{1, s}. \end{aligned}$$

5°. Вычислим

$$\begin{aligned} K \, t_k &= P \, t_k | t_{k-1} H^T B^{-1} \, t_k; \\ \frac{\partial K \, t_k}{\partial \theta_i} &= \frac{\partial P \, t_k | t_{k-1}}{\partial \theta_i} H^T B^{-1} \, t_k + P \, t_k | t_{k-1} \frac{\partial H^T}{\partial \theta_i} B^{-1} \, t_k - \\ &- P \, t_k | t_{k-1} H^T B^{-1} \, t_k \frac{\partial B \, t_k}{\partial \theta_i} B^{-1} \, t_k, \quad i = \overline{1, s}. \end{aligned}$$

6°. Вычислим

$$\begin{aligned} \tilde{K} \, t_k &= \exp[F \, t_{k+1} - t_k] K \, t_k = \Phi_{k+1} K \, t_k; \\ \frac{\partial \tilde{K} \, t_k}{\partial \theta_i} &= t_{k+1} - t_k \frac{\partial F}{\partial \theta_i} \Phi_{k+1} K \, t_k + \Phi_{k+1} \frac{\partial K \, t_k}{\partial \theta_i}, \quad i = \overline{1, s}. \end{aligned}$$

7°. Вычислим $\Sigma_A t_k | t_{k-1}$ по формуле (2.126), если $k = 1$, или по формуле (2.128), если $k > 1$.

8°. Определим $\bar{x}_A t_k | t_{k-1}$ при помощи выражения (2.125).

9°. Сформируем матрицу $F_A t_{k+1}, t_k$ в соответствии с (2.120), матрицу $G_A t_{k+1}, \tau$ в соответствии с (2.121) и матрицу $\tilde{K}_A t_k$ в соответствии с (2.122).

10°. Используя выражение (2.90), получим приращение $\Delta M(\Theta)$, отвечающее текущему значению k .

11°. Положим $M(\Theta) = M(\Theta) + \Delta M(\Theta)$.

12°. Если $k = N$, то вычисления прекращаются, иначе – вычислим следующие начальные условия по формуле (2.44), k заменим на $k + 1$ и осуществим переход на шаг 3°.

2.4.3. Вычисление градиентов критериев оптимальности

Начнем с прямой процедуры планирования входных сигналов. В этом случае требуется находить значения следующих функционалов:

$$\nabla_{\bar{A}} X \left[M \ \xi \right] = \left\| \frac{\partial X \left[M \ u \ t, \hat{\Theta} \right]}{\partial u_j \ t_i} \right\|, \quad k = 0, \dots, N-1, \quad j = 1, \dots, r;$$

$$\nabla_{\tilde{p}} X \left[M \ \xi \right] = \left\| \frac{\partial X \left[M \ \xi \right]}{\partial p_i} \right\|, \quad i = 1, \dots, q.$$

Для критерия D -оптимальности получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial X \left[M \ u \ t, \hat{\Theta} \right]}{\partial u_j \ t_i} &= \frac{\partial \left[-\ln \det M \ u \ t, \hat{\Theta} \right]}{\partial u_j \ t_i} = \\ &= -\text{Sp} \left[M^{-1} \ u \ t, \hat{\Theta} \frac{\partial M \ u \ t, \hat{\Theta}}{\partial u_j \ t_i} \right], \quad i = 0, \dots, N-1, \quad j = 1, \dots, r. \end{aligned}$$

Так как

$$\frac{\partial M_{u_j t_i}, \hat{\Theta}}{\partial u_j t_i} = \left\| \frac{\partial M_{\alpha\beta u_j t_i}, \hat{\Theta}}{\partial u_j t_i} \right\|, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, s, \quad (2.132)$$

то для вычисления производных (2.132) воспользуемся разложением (2.91).

В [59] показано, что

$$\begin{aligned} & \frac{\partial M_{\alpha\beta U, \Theta}}{\partial u_j t_i} = \frac{\partial W_{\alpha\beta U, \Theta}}{\partial u_j t_i} = \\ &= \sum_{k=1}^N \left\{ \text{Sp} \left[C_0 \left(\frac{\partial \bar{x}_A t_k | t_{k-1}}{\partial u_j t_{i-1}} \bar{x}_A^T t_k | t_{k-1} + \bar{x}_A t_k | t_{k-1} \frac{\partial \bar{x}_A^T t_k | t_{k-1}}{\partial u_j t_{i-1}} \right) C_0^T \times \right. \right. \\ & \quad \times \frac{\partial H^T}{\partial \theta_\beta} B^{-1} t_k \frac{\partial H}{\partial \theta_\alpha} \left. \right] + \\ & \quad + \text{Sp} \left[C_0 \left(\frac{\partial \bar{x}_A t_k | t_{k-1}}{\partial u_j t_{i-1}} \bar{x}_A^T t_k | t_{k-1} + \bar{x}_A t_k | t_{k-1} \frac{\partial \bar{x}_A^T t_k | t_{k-1}}{\partial u_j t_{i-1}} \right) \times \right. \\ & \quad \times C_\beta^T H^T B^{-1} t_k \frac{\partial H}{\partial \theta_\alpha} \left. \right] + \\ & \quad + \text{Sp} \left[C_\alpha \left(\frac{\partial \bar{x}_A t_k | t_{k-1}}{\partial u_j t_{i-1}} \bar{x}_A^T t_k | t_{k-1} + \bar{x}_A t_k | t_{k-1} \frac{\partial \bar{x}_A^T t_k | t_{k-1}}{\partial u_j t_{i-1}} \right) \times \right. \\ & \quad \times C_0^T \frac{\partial H^T}{\partial \theta_\beta} B^{-1} t_k H \left. \right] + \\ & \quad + \text{Sp} \left[C_\alpha \left(\frac{\partial \bar{x}_A t_k | t_{k-1}}{\partial u_j t_{i-1}} \bar{x}_A^T t_k | t_{k-1} + \bar{x}_A t_k | t_{k-1} \frac{\partial \bar{x}_A^T t_k | t_{k-1}}{\partial u_j t_{i-1}} \right) \times \right. \\ & \quad \times C_\beta^T H^T B^{-1} t_k H \left. \right] \left. \right\}, \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Производные $\frac{\partial \bar{x}_A \ t_k | t_{k-1}}{\partial u_j \ t_{i-1}}$ определяются соотношением:

$$\frac{\partial \bar{x}_A \ t_k | t_{k-1}}{\partial u_j \ t_{i-1}} = \begin{cases} 0, & \text{если } k=1, \ i \neq 1; \\ j\text{-му столбцу } G_A \ t_1 | t_0, & \text{если } k=1, \ i=1; \\ F_A \ t_k, t_{k-1} \frac{\partial \bar{x}_A \ t_{k-1} | t_{k-2}}{\partial u_j \ t_{i-1}} + G_A \ t_k, t_{k-1} \frac{\partial u \ t_{k-1}}{\partial u \ t_{i-1}}, & \text{если } k > 1; \\ 0, & \text{если } k < i, \end{cases}$$

где

$$\frac{\partial u \ t_{k-1}}{\partial u \ t_{i-1}} = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq i; \\ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j, & \text{если } k = i. \end{cases}$$

Перейдем к критерию А-оптимальности. В этом случае

$$\begin{aligned} \frac{\partial X[M \ u \ t, \hat{\Theta}]}{\partial u_j \ t_i} &= \frac{\partial [\text{Sp} M^{-1} \ u \ t, \hat{\Theta}]}{\partial u_j \ t_i} = \text{Sp} \left[\frac{\partial M^{-1} \ u \ t, \hat{\Theta}}{\partial u_j \ t_i} \right] = \\ &= -\text{Sp} \left[M^{-1} \ u \ t, \hat{\Theta} \frac{\partial M \ u \ t, \hat{\Theta}}{\partial u_j \ t_i} M^{-1} \ u \ t, \hat{\Theta} \right], \\ i &= 0, \dots, N-1, \quad j = 1, \dots, r. \end{aligned}$$

Запишем соотношения, необходимые для вычисления градиентов по весам. Начнем с критерия D-оптимальности:

$$\frac{\partial X[M \ \xi]}{\partial p_i} = \frac{\partial [-\ln \det M \ \xi]}{\partial p_i} =$$

$$= -\text{Sp} \left[M^{-1} \xi \frac{\partial M \xi}{\partial p_i} \right] = -\text{Sp} \left[M^{-1} \xi M U_i \right], \quad i = 1, 2, \dots, q.$$

Перейдем к критерию А-оптимальности. В этом случае

$$\begin{aligned} \frac{\partial X[M \xi]}{\partial p_i} &= \frac{\partial [\text{Sp} M^{-1} \xi]}{\partial p_i} = \text{Sp} \left[\frac{\partial M^{-1} \xi}{\partial p_i} \right] = \\ &= -\text{Sp} \left[M^{-1} \xi \frac{\partial M \xi}{\partial p_i} M^{-1} \xi \right] = \\ &= -\text{Sp} \left[M^{-1} \xi M U_i M^{-1} \xi \right] = -\text{Sp} \left[M^{-2} \xi M U_i \right], \quad i = 1, 2, \dots, q. \end{aligned}$$

Двойственный алгоритм синтеза входных сигналов требует вычисления градиента

$$\nabla_{\alpha\mu} U, \xi = \left\| \frac{\partial \mu U, \xi}{\partial u_j t_i} \right\|, \quad i = 0, \dots, N-1, \quad j = 1, \dots, r.$$

Получаем:

- для критерия D-оптимальности

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu U, \xi}{\partial u_j t_i} &= \frac{\partial \text{Sp} [M^{-1} \xi M U]}{\partial u_j t_i} = \text{Sp} \left[M^{-1} \xi \frac{\partial M U}{\partial u_j t_i} \right], \\ i &= 0, \dots, N-1, \quad j = 1, \dots, r, \end{aligned}$$

- для критерия А-оптимальности

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu U, \xi}{\partial u_j t_i} &= \frac{\partial \text{Sp} [M^{-2} \xi M U]}{\partial u_j t_i} = \text{Sp} \left[M^{-2} \xi \frac{\partial M U}{\partial u_j t_i} \right], \\ i &= 0, \dots, N-1, \quad j = 1, \dots, r. \end{aligned}$$

Глава 3

ПРИКЛАДНЫЕ АСПЕКТЫ АКТИВНОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ В ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ

3.1. Оценивание неизвестных параметров дискретных систем

Как и во временной области, решать задачу оценивания неизвестных параметров будем методами максимального правдоподобия и наименьших квадратов.

Начнем с определения критерия идентификации в соответствии с методом максимального правдоподобия.

Запишем уравнения дискретного фильтра Калмана [56] в установленном режиме, для которого начиная с некоторого значения τ^* выполняется $\|P(\tau^* + 1 | \tau^*) - P(\tau^* | \tau^* - 1)\| \leq \delta$ (δ – малое положительное число):

$$\varepsilon^{i,j}(\tau+1) = y^{i,j}(\tau+1) - H\hat{x}^{i,j}(\tau+1 | \tau); \quad (3.1)$$

$$\hat{x}^{i,j}(\tau+1 | \tau) = \Phi \hat{x}^{i,j}(\tau | \tau) + \Psi u^i(\tau); \quad (3.2)$$

$$\hat{x}^{i,j}(\tau+1 | \tau+1) = \hat{x}^{i,j}(\tau+1 | \tau) + K_1 \varepsilon^{i,j}(\tau+1); \quad (3.3)$$

$$\tau = \tau^*, \dots, N-1, \quad i = 1, \dots, q, \quad j = 1, \dots, k_i;$$

где

$$B = HPH^T + R; \quad (3.4)$$

$$K_1 = PH^T B^{-1}. \quad (3.5)$$

Положим $t = \tau - \tau^*$ и $N = N - \tau^*$. Подставляя (3.3) в (3.2) и учитывая (3.5), запишем

$$\hat{x}^{i,j}(t+1|t) = \Phi \hat{x}^{i,j}(t|t-1) + \Phi u^i(t) + K_2 \varepsilon(t), \quad (3.6)$$

$$y^{i,j}(t) = H \hat{x}^{i,j}(t|t-1) + \varepsilon^{i,j}(t), \quad (3.7)$$

$$t = 0, 1, \dots, N-1, \quad i = 1, \dots, q, \quad j = 1, \dots, k_i,$$

где $K_2 = \Phi R H^T B^{-1}$.

Подвергнем последовательности векторов, входящих в соотношения (3.6), (3.7), прямому дискретному преобразованию Фурье (ДПФ) [60, 61], понимая под *прямым ДПФ* последовательности векторов $a(t)$, $t = 0, 1, \dots, N-1$ преобразование

$$\tilde{a}(k) = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} a(t) e^{-i \frac{2\pi kt}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} a(t) z_k^t, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (3.8)$$

и под *обратным ДПФ*

$$a(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{a}(k) e^{-i \frac{2\pi kt}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{a}(k) z_k^{-t}, \quad t = 0, 1, \dots, N-1. \quad (3.9)$$

Заметим, что:

1) если $a(t) \leftrightarrow \tilde{a}(k)$, то $a(t+1) \leftrightarrow \tilde{a}(k) z_k$ для $t = 0, 1, \dots, N-1$, $k = 0, 1, \dots, N-1$; ($\leftrightarrow$ означает, что последовательность $\tilde{a}(k)$ получена путем применения ДПФ к последовательности $a(t)$);

2) если $a(t) \leftrightarrow \tilde{a}(k)$, $t = 0, 1, \dots, N-1$, $k = 0, 1, \dots, N-1$

и $\Omega_A = A = \left[a^T(0), \dots, a^T(N-1) \right] \left\| a(\tau) \in R^m, \tau = 0, \dots, N-1; \|A\| \leq \text{const} \right\|$,

то $\Omega_{\tilde{A}} = \tilde{A} = \left[\tilde{a}^T(0), \dots, \tilde{a}^T(N-1) \right] \left\| \tilde{a}(k) \in C^m, k = 0, \dots, N-1; \right\|$

$\|\tilde{A}\| \leq N \text{const}$;

3) если $a(t) \leftrightarrow \tilde{a}(k)$, $t = 0, 1, \dots, N-1$, $k = 0, 1, \dots, N-1$

и $\Omega_A = A = \left[a^T(0), \dots, a^T(N-1) \right] \left\| a(\tau) \in R^m, \tau = 0, \dots, N-1; \right\|$

$\beta_j \leq a_j(\tau) \leq \gamma_j, \quad j = 0, \dots, N-1$,

то $\Omega_{\tilde{A}} = \tilde{A} = \left[\tilde{a}^T(0), \dots, \tilde{a}^T(N-1) \right] \left\| \tilde{a}(k) \in R^m, \quad k = 0, \dots, N-1; \right.$

$$\left. N \sum_{j=0}^{N-1} \beta_j \leq \|\tilde{A}\| \leq N \sum_{j=0}^{N-1} \gamma_j, \quad j = 0, \dots, N-1 \right\}.$$

Перейдем от временных последовательностей $\varepsilon^{i,j}(t)$, $u^i(t)$, $y^{i,j}(t)$, $\hat{x}^{i,j}(t+1|t)$, $\hat{x}^{i,j}(t|t-1)$ к частотным последовательностям $\tilde{\varepsilon}^{i,j}(k)$, $\tilde{u}^i(k)$, $\tilde{y}^{i,j}(k)$, $\tilde{x}^{i,j}(k)$ и запишем модель (3.6), (3.7) в форме передаточных функций:

$$z_k \tilde{x}^{i,j}(k) = \Phi \tilde{x}^{i,j}(k) + \Psi \tilde{u}^i(k) + K_2 \tilde{\varepsilon}^{i,j}(k), \quad (3.10)$$

$$\tilde{y}^{i,j}(k) = H \tilde{x}^{i,j}(k) + \tilde{\varepsilon}^{i,j}(k), \quad (3.11)$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1, \quad i = 1, \dots, q, \quad j = 1, \dots, k_i.$$

Выражая из (3.10) $\tilde{x}^{i,j}(k)$ и подставляя в (3.11), получим

$$\tilde{y}(k) = T_1(z_k, \theta) \tilde{u}(k) + T_2(z_k, \theta) \tilde{\varepsilon}(k), \quad (3.12)$$

где

$$T_1(z_k, \theta) = H(z_k I - \Phi)^{-1} \Psi = T_1(k), \quad (3.13)$$

$$T_2(z_k, \theta) = H(z_k I - \Phi)^{-1} K_2 + I = T_2(k). \quad (3.14)$$

Данное представление (3.12) используется в дальнейшем при выводе выражения для информационной матрицы Фишера.

Следуя (2.19), запишем критерий идентификации по методу максимального правдоподобия в установившемся режиме:

$$\chi(\theta) = \frac{Nm\nu}{2} \ln 2\pi + \frac{N\nu}{2} \ln \det B + \frac{1}{2} \sum_{t=0}^{N-1} \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{k_i} \left[\varepsilon^{i,j}(t+1) \right]^T B^{-1} \varepsilon^{i,j}(t+1).$$

В силу соотношения (3.9) и с учетом того, что

$$\sum_{t=0}^{N-1} z_{k-\tau}^t = \sum_{t=0}^{N-1} z_{k+\tau}^{-t} = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq \tau; \\ N, & \text{если } k = \tau, \end{cases} \quad (3.15)$$

можно записать:

$$\begin{aligned}
 \chi(\theta) &= -\ln L(\xi_v; \theta) = \frac{Nmv}{2} \ln 2\pi + \frac{Nv}{2} \ln \det B + \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{t=0}^{N-1} \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{k_i} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \left[\tilde{\varepsilon}^{i,j}(k) z_k^{-t} \right]^* B^{-1} \sum_{\tau=0}^{N-1} \left[\tilde{\varepsilon}^{i,j}(\tau) z_{\tau}^{-t} \right] \right) = \\
 &= \frac{Nmv}{2} \ln 2\pi + \frac{Nv}{2} \ln \det B + \frac{N}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{k_i} \left[\tilde{\varepsilon}^{i,j}(k) \right]^* B^{-1} \left[\tilde{\varepsilon}^{i,j}(k) \right]. \quad (3.16)
 \end{aligned}$$

* Означает комплексное сопряжение.

Аналогично для случая метода наименьших квадратов имеем:

$$\begin{aligned}
 \chi(\theta) &= \frac{1}{2} \sum_{t=0}^{N-1} \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{k_i} \left[\varepsilon^{i,j}(t+1) \right]^T B^{-1} \varepsilon^{i,j}(t+1) = \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{t=0}^{N-1} \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{k_i} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \left[\tilde{\varepsilon}^{i,j}(k) z_k^{-t} \right]^* B^{-1} \sum_{\tau=0}^{N-1} \left[\tilde{\varepsilon}^{i,j}(\tau) z_{\tau}^{-t} \right] \right) = \\
 &= \frac{N}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{k_i} \left[\tilde{\varepsilon}^{i,j}(k) \right]^* B^{-1} \left[\tilde{\varepsilon}^{i,j}(k) \right]. \quad (3.17)
 \end{aligned}$$

Поиск условного минимума $\chi(\theta)$, так же как и во временной области, можно осуществлять, например, с помощью методов Нелдера–Мида, наискорейшего спуска и Ньютона–Гаусса.

Сопоставляя формулы (3.16), (3.17) с выражениями (2.19), (2.20), приходим к выводу, что при вычислении значений и градиентов критериев идентификации для методов максимального правдоподобия и наименьших квадратов остаются справедливы соответствующие алгоритмы, изложенные в разделе 2.1.3 с точностью до замены $\varepsilon^{i,j}(t+1)$ на $\tilde{\varepsilon}^{i,j}(k)$ и умножения результата на N .

3.2. Планирование оптимальных входных сигналов для дискретных систем

3.2.1. Вывод соотношения для информационной матрицы однократного плана

Как и для случая временной области, начнем с того, что получим соотношение для информационной матрицы Фишера.

ТЕОРЕМА 5 [62]

Для многомерных динамических систем, описываемых моделями в пространстве состояний (2.1), (2.2) с априорными предположениями (2.3)–(2.5), элементы информационной матрицы Фишера в установившемся режиме определяются выражениями

$$M_{ij}(\theta) = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \operatorname{Sp} \left[ND_{ij}(k) \tilde{u}(k) \tilde{u}^*(k) + A_{ij}(k) \right] \right\} + NC_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, s,$$

где $\tilde{u}(k) = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} u(t) e^{i \frac{2\pi kt}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} u(t) z_k^t;$

$$D_{ij}(k) = \left(T_2^{-1}(k) \frac{\partial T_1(k)}{\partial \theta_i} \right)^* B^{-1} \left(T_2^{-1}(k) \frac{\partial T_1(k)}{\partial \theta_j} \right);$$

$$A_{ij}(k) = B^{-1} T_2^{-1}(k) \frac{\partial T_2(k)}{\partial \theta_j} B \frac{\partial T_2^*(k)}{\partial \theta_i} T_2^{-1}(k)^* +$$

$$+ 2 T_2^{-1}(k) \frac{\partial T_2(k)}{\partial \theta_i} T_2^{-1}(k) \frac{\partial T_2(k)}{\partial \theta_j} -$$

$$- T_2^{-1}(k) \frac{\partial^2 T_2(k)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} + \frac{\partial B}{\partial \theta_j} B^{-1} T_2^{-1}(k) \frac{\partial T_2(k)}{\partial \theta_i} + \frac{\partial B}{\partial \theta_i} B^{-1} T_2^{-1}(k) \frac{\partial T_2(k)}{\partial \theta_j};$$

$$C_{ij} = \frac{1}{2} \operatorname{Sp} \left[B^{-1} \frac{\partial B}{\partial \theta_i} B^{-1} \frac{\partial B}{\partial \theta_j} \right];$$

$$T_1(z_k, \theta) = H(z_k I - \Phi)^{-1} \Psi = T_1(k);$$

$$T_2(z_k, \theta) = H(z_k I - \Phi)^{-1} K_2 + I = T_2(k);$$

$$K_2 = \Phi R H^T B^{-1};$$

$$B = H R H^T + R;$$

P – установившееся значение ковариационной матрицы ошибок одношагового предсказания.

Доказательство

Информационная матрица Фишера связана с логарифмической функцией правдоподобия $\ln L(\theta)$, совпадающей с $\ln L(\xi_v; \theta)$ из формулы (3.16) при $q = v = k_1 = 1$, соотношением [11]:

$$M_{ij}(\theta) = -E_Y \left[\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right], \quad i, j = 1, 2, \dots, s. \quad (3.18)$$

В силу того, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_j} &= -N \sum_{k=0}^{N-1} \operatorname{Re} \left[\tilde{\varepsilon}^*(k) B^{-1} \frac{\partial \tilde{\varepsilon}(k)}{\partial \theta_j} \right] - \frac{Nv}{2} \operatorname{Sp} \left(B^{-1} \frac{\partial B}{\partial \theta_j} \right) + \\ &+ \frac{N}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{\varepsilon}^*(k) B^{-1} \frac{\partial B}{\partial \theta_j} B^{-1} \tilde{\varepsilon}(k), \end{aligned}$$

можно получить

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta_j \partial \theta_i} &= -N \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \left[\operatorname{Re} \left(\frac{\partial \tilde{\varepsilon}^*(k)}{\partial \theta_i} B^{-1} \frac{\partial \tilde{\varepsilon}(k)}{\partial \theta_j} + \tilde{\varepsilon}^*(k) B^{-1} \frac{\partial^2 \tilde{\varepsilon}(k)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} + \right. \right. \right. \\ &+ \left. \left. \tilde{\varepsilon}^*(k) \frac{\partial B^{-1}}{\partial \theta_i} \frac{\partial \tilde{\varepsilon}(k)}{\partial \theta_j} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{\varepsilon}^*(k)}{\partial \theta_i} B^{-1} \frac{\partial B}{\partial \theta_j} B^{-1} \tilde{\varepsilon}(k) + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}^*(k) B^{-1} \frac{\partial B}{\partial \theta_i} B^{-1} \frac{\partial B}{\partial \theta_j} B^{-1} \tilde{\varepsilon}(k) - \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}^*(k) B^{-1} \frac{\partial^2 B}{\partial \theta_i \partial \theta_j} B^{-1} \tilde{\varepsilon}(k) + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}^*(k) B^{-1} \frac{\partial B}{\partial \theta_j} B^{-1} \frac{\partial B}{\partial \theta_i} B^{-1} \tilde{\varepsilon}(k) - \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}^*(k) B^{-1} \frac{\partial B}{\partial \theta_j} B^{-1} \frac{\partial \tilde{\varepsilon}(k)}{\partial \theta_i} \right] - \\ &- \left. \frac{1}{2} \operatorname{Sp} \left[B^{-1} \frac{\partial B}{\partial \theta_j} B^{-1} \frac{\partial B}{\partial \theta_i} \right] + \frac{1}{2} \operatorname{Sp} \left[B^{-1} \frac{\partial^2 B}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right] \right\}, \quad i, j = 1, 2, \dots, s. \quad (3.19) \end{aligned}$$

Подставив (3.19) в (3.18) и воспользовавшись свойствами симметричности матриц B , $\frac{\partial B}{\partial \theta_j}$, B^{-1} , $B^{-1} \frac{\partial B}{\partial \theta_j} B^{-1}$, равенствами $a^* b = \text{Sp}(ba^*)$, для любых $a, b \in C^m$ и $\text{Sp}(AB) = \text{Sp}(BA)$, для любых $A \in C_{n \times m}$, $B \in C_{m \times n}$, запишем:

$$\begin{aligned}
 M_{ij}(\theta) = N \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} \text{Sp} \left[\text{Re} \left(B^{-1} E \left[\frac{\partial \tilde{\varepsilon}(k)}{\partial \theta_j} \frac{\partial \tilde{\varepsilon}^*(k)}{\partial \theta_i} \right] + B^{-1} E \left[\frac{\partial^2 \tilde{\varepsilon}(k)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \tilde{\varepsilon}^*(k) \right] - \right. \right. \right. \\
 \left. \left. - B^{-1} \frac{\partial B}{\partial \theta_i} B^{-1} E \left[\frac{\partial \tilde{\varepsilon}(k)}{\partial \theta_j} \tilde{\varepsilon}^*(k) \right] \right) \right] - \frac{1}{2} B^{-1} \frac{\partial B}{\partial \theta_j} B^{-1} E \left[\tilde{\varepsilon}(k) \frac{\partial \tilde{\varepsilon}^*(k)}{\partial \theta_i} \right] + \\
 + \frac{1}{2} B^{-1} \frac{\partial B}{\partial \theta_i} B^{-1} \frac{\partial B}{\partial \theta_j} B^{-1} E \left[\tilde{\varepsilon}(k) \tilde{\varepsilon}^*(k) \right] - \frac{1}{2} B^{-1} \frac{\partial^2 B}{\partial \theta_i \partial \theta_j} B^{-1} E \left[\tilde{\varepsilon}(k) \tilde{\varepsilon}^*(k) \right] + \\
 + \frac{1}{2} B^{-1} \frac{\partial B}{\partial \theta_j} B^{-1} \frac{\partial B}{\partial \theta_i} B^{-1} E \left[\tilde{\varepsilon}(k) \tilde{\varepsilon}^*(k) \right] - \frac{1}{2} B^{-1} \frac{\partial B}{\partial \theta_j} B^{-1} E \left[\frac{\partial \tilde{\varepsilon}(k)}{\partial \theta_i} \tilde{\varepsilon}^*(k) \right] \right] - \\
 \left. - \frac{1}{2} \text{Sp} \left[B^{-1} \frac{\partial B}{\partial \theta_j} B^{-1} \frac{\partial B}{\partial \theta_i} \right] + \frac{1}{2} \text{Sp} \left[B^{-1} \frac{\partial^2 B}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right] \right\}, \quad i, j = 1, 2, \dots, s. \quad (3.20)
 \end{aligned}$$

Выражение (3.20) требует вычисления следующих математических ожиданий:

$$E \left[\tilde{\varepsilon}(k) \tilde{\varepsilon}^*(k) \right], \quad E \left[\frac{\partial \tilde{\varepsilon}(k)}{\partial \theta_j} \frac{\partial \tilde{\varepsilon}^*(k)}{\partial \theta_i} \right], \quad E \left[\frac{\partial^2 \tilde{\varepsilon}(k)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \tilde{\varepsilon}^*(k) \right] \quad \text{и} \quad E \left[\frac{\partial \tilde{\varepsilon}(k)}{\partial \theta_i} \tilde{\varepsilon}^*(k) \right].$$

Рассмотрим каждое из них отдельно.

Используя соотношения (3.9) и (3.15), нетрудно получить:

$$\begin{aligned}
 E \left[\tilde{\varepsilon}(k) \tilde{\varepsilon}^*(j) \right] &= E \left\{ \frac{1}{N^2} \sum_{t=0}^{N-1} \varepsilon(t+1) z_k^t \sum_{\tau=0}^{N-1} \varepsilon(\tau+1) z_j^{\tau} \right\}^* = \\
 &= \frac{1}{N^2} \sum_{t=0}^{N-1} \sum_{\tau=0}^{N-1} E \left[\varepsilon(t) \varepsilon^T(\tau) \right] z_k^t z_j^{-\tau} =
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{N^2} B \sum_{t=0}^{N-1} z_{k+j}^{-t} = \begin{cases} 0, & k \neq j, \\ \frac{1}{N} B, & k = j. \end{cases} \quad (3.21)$$

Из выражения (3.12) можно записать:

$$\tilde{\varepsilon}(k) = T_2^{-1}(k) \tilde{y}(k) - T_2^{-1}(k) T_1(k) \tilde{u}(k).$$

Следуя [38], воспользуемся представлением производных $\frac{\partial \tilde{\varepsilon}(k)}{\partial \theta_i}$ и $\frac{\partial^2 \tilde{\varepsilon}(k)}{\partial \theta_i \partial \theta_j}$ через $\tilde{\varepsilon}(k)$ и $\frac{\partial \tilde{\varepsilon}(k)}{\partial \theta_i}$, которое ускорит дальнейший вывод информации матрицы по сравнению с [29, 35].

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\varepsilon}(k)}{\partial \theta_j} &= -T_2^{-1}(k) \frac{\partial T_2(k)}{\partial \theta_j} T_2^{-1}(k) \tilde{y}(k) + T_2^{-1}(k) \frac{\partial T_2(k)}{\partial \theta_j} T_2^{-1}(k) T_1(k) \tilde{u}(k) - \\ &- T_2^{-1}(k) \frac{\partial T_1(k)}{\partial \theta_j} \tilde{u}(k) = -T_2^{-1}(k) \frac{\partial T_2(k)}{\partial \theta_j} \tilde{\varepsilon}(k) - T_2^{-1}(k) \frac{\partial T_1(k)}{\partial \theta_j} \tilde{u}(k). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Аналогично из (3.22) можно получить:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{\varepsilon}(k)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} &= T_2^{-1}(k) \frac{\partial T_2(k)}{\partial \theta_i} T_2^{-1}(k) \frac{\partial T_2(k)}{\partial \theta_j} \tilde{\varepsilon}(k) - T_2^{-1}(k) \frac{\partial T_2(k)}{\partial \theta_j} \frac{\partial \tilde{\varepsilon}(k)}{\partial \theta_i} - \\ &- T_2^{-1}(k) \frac{\partial^2 T_2(k)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \tilde{\varepsilon}(k) + T_2^{-1}(k) \frac{\partial T_2(k)}{\partial \theta_i} T_2^{-1}(k) \frac{\partial T_1(k)}{\partial \theta_j} \tilde{u}(k) - \\ &- T_2^{-1}(k) \frac{\partial^2 T_1(k)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \tilde{u}(k) = -T_2^{-1}(k) \frac{\partial T_2(k)}{\partial \theta_i} \frac{\partial \tilde{\varepsilon}(k)}{\partial \theta_j} - T_2^{-1}(k) \frac{\partial T_2(k)}{\partial \theta_j} \frac{\partial \tilde{\varepsilon}(k)}{\partial \theta_i} - \\ &- T_2^{-1}(k) \frac{\partial^2 T_1(k)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \tilde{u}(k) - T_2^{-1}(k) \frac{\partial^2 T_2(k)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \tilde{\varepsilon}(k). \end{aligned} \quad (3.23)$$

В силу того, что

$$E \tilde{\varepsilon}(k) = E \left[\frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} \varepsilon(t) z_k^t \right] = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} E \varepsilon(t) z_k^t = 0,$$

и с учетом выражений (3.21)–(3.23) получаем:

$$E \left[\frac{\partial \tilde{\varepsilon}(k)}{\partial \theta_j} \tilde{\varepsilon}^*(k) \right] = -T_2^{-1}(k) \frac{\partial T_2(k)}{\partial \theta_j} E \left[\tilde{\varepsilon}(k) \tilde{\varepsilon}^*(k) \right] - \\ - T_2^{-1}(k) \frac{\partial T_1(k)}{\partial \theta_j} E \left[\tilde{\varepsilon}^*(k) \right] \tilde{u}(k) = -\frac{1}{N} T_2^{-1}(k) \frac{\partial T_2(k)}{\partial \theta_j} B; \quad (3.24)$$

$$E \left[\frac{\partial \tilde{\varepsilon}(k)}{\partial \theta_j} \frac{\partial \tilde{\varepsilon}^*(k)}{\partial \theta_i} \right] = E \left[\left(-T_2^{-1}(k) \frac{\partial T_2(k)}{\partial \theta_j} \tilde{\varepsilon}(k) - T_2^{-1}(k) \frac{\partial T_1(k)}{\partial \theta_j} \tilde{u}(k) \right) \times \right. \\ \left. \times \left(-\tilde{\varepsilon}^*(k) \frac{\partial T_2^*(k)}{\partial \theta_i} T_2^{-1}(k)^* - \tilde{u}^*(k) \frac{\partial T_1^*(k)}{\partial \theta_i} T_2^{-1}(k)^* \right) \right] = \\ = \frac{1}{N} T_2^{-1}(k) \frac{\partial T_2(k)}{\partial \theta_j} B \frac{\partial T_2^*(k)}{\partial \theta_i} T_2^{-1}(k)^* + \\ + T_2^{-1}(k) \frac{\partial T_1(k)}{\partial \theta_j} \tilde{u}(k) \tilde{u}^*(k) \frac{\partial T_1^*(k)}{\partial \theta_i} T_2^{-1}(k)^*. \quad (3.25)$$

$$E \left[\frac{\partial^2 \tilde{\varepsilon}(k)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \tilde{\varepsilon}^*(k) \right] = -T_2^{-1}(k) \frac{\partial T_2(k)}{\partial \theta_i} E \left[\frac{\partial \tilde{\varepsilon}(k)}{\partial \theta_j} \tilde{\varepsilon}^*(k) \right] - \\ - T_2^{-1}(k) \frac{\partial T_2(k)}{\partial \theta_j} E \left[\frac{\partial \tilde{\varepsilon}(k)}{\partial \theta_i} \tilde{\varepsilon}^*(k) \right] - \\ - T_2^{-1}(k) \frac{\partial^2 T_1(k)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \tilde{u}(k) E \left[\tilde{\varepsilon}^*(k) \right] - T_2^{-1}(k) \frac{\partial^2 T_2(k)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} E \left[\tilde{\varepsilon}(k) \tilde{\varepsilon}^*(k) \right] = \\ = \frac{1}{N} T_2^{-1}(k) \frac{\partial T_2(k)}{\partial \theta_i} T_2^{-1}(k) \frac{\partial T_2(k)}{\partial \theta_j} B + \frac{1}{N} T_2^{-1}(k) \frac{\partial T_2(k)}{\partial \theta_j} T_2^{-1}(k) \frac{\partial T_2(k)}{\partial \theta_i} B - \\ - \frac{1}{N} T_2^{-1}(k) \frac{\partial^2 T_2(k)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} B. \quad (3.26)$$

Подставляя формулы (3.21), (3.24)–(3.26) в (3.20), имеем:

$$\begin{aligned}
 M_{ij}(\theta) = & -N \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \text{Sp} \left(\text{Re} \left(\frac{1}{N} B^{-1} T_2^{-1}(k) \frac{\partial T_2(k)}{\partial \theta_j} B \frac{\partial T_2^*(k)}{\partial \theta_j} T_2^{-1}(k)^* + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + B^{-1} T_2^{-1}(k) \frac{\partial T_1(k)}{\partial \theta_j} \tilde{u}(k) \tilde{u}^*(k) \frac{\partial T_1^*(k)}{\partial \theta_i} T_2^{-1}(k)^* + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{N} B^{-1} \frac{\partial B}{\partial \theta_i} B^{-1} T_2^{-1}(k) \frac{\partial T_2(k)}{\partial \theta_j} B + \frac{1}{N} B^{-1} T_2^{-1}(k) \frac{\partial T_2(k)}{\partial \theta_i} T_2^{-1}(k) \frac{\partial T_2(k)}{\partial \theta_j} B + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{N} B^{-1} T_2^{-1}(k) \frac{\partial T_2(k)}{\partial \theta_j} T_2^{-1}(k) \frac{\partial T_2(k)}{\partial \theta_i} B - \frac{1}{N} B^{-1} T_2^{-1}(k) \frac{\partial^2 T_2(k)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} B \right) + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} \frac{1}{N} B^{-1} \frac{\partial B}{\partial \theta_j} B^{-1} B \frac{\partial T_2^*}{\partial \theta_i} T_2^{-1}{}^* + \frac{1}{2} \frac{1}{N} B^{-1} \frac{\partial B}{\partial \theta_i} B^{-1} \frac{\partial B}{\partial \theta_j} - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{2} \frac{1}{N} B^{-1} \frac{\partial^2 B}{\partial \theta_i \partial \theta_j} + \frac{1}{2} \frac{1}{N} B^{-1} \frac{\partial B}{\partial \theta_j} B^{-1} \frac{\partial B}{\partial \theta_i} + \frac{1}{2} \frac{1}{N} B^{-1} \frac{\partial B}{\partial \theta_j} B^{-1} T_2^{-1} \frac{\partial T_2}{\partial \theta_i} B \right) \Bigg\} + \\
 & + \frac{N}{2} \text{Sp} \left[B^{-1} \frac{\partial B}{\partial \theta_j} B^{-1} \frac{\partial B}{\partial \theta_i} \right] - \frac{N}{2} \text{Sp} \left[B^{-1} \frac{\partial^2 B}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right].
 \end{aligned}$$

Упростив последнее выражение, в результате получим

$$M_{ij}(\theta) = \text{Re} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \text{Sp} \left[N D_{ij}(k) \tilde{u}(k) \tilde{u}^*(k) + A_{ij}(k) \right] \right\} + N C_{ij}, \quad (3.27)$$

где

$$D_{ij}(k) = \left(T_2^{-1}(k) \frac{\partial T_1(k)}{\partial \theta_i} \right)^* B^{-1} \left(T_2^{-1}(k) \frac{\partial T_1(k)}{\partial \theta_j} \right); \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned}
 A_{ij}(k) = & B^{-1} T_2^{-1}(k) \frac{\partial T_2(k)}{\partial \theta_j} B \frac{\partial T_2^*(k)}{\partial \theta_i} T_2^{-1}(k)^* + \\
 & + 2 T_2^{-1}(k) \frac{\partial T_2(k)}{\partial \theta_i} T_2^{-1}(k) \frac{\partial T_2(k)}{\partial \theta_j} -
 \end{aligned}$$

$$-T_2^{-1}(k) \frac{\partial^2 T_2(k)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} + \frac{\partial B}{\partial \theta_j} B^{-1} T_2^{-1}(k) \frac{\partial T_2(k)}{\partial \theta_i} + \frac{\partial B}{\partial \theta_i} B^{-1} T_2^{-1}(k) \frac{\partial T_2(k)}{\partial \theta_j}; \quad (3.29)$$

$$C_{ij} = \frac{1}{2} \text{Sp} \left[B^{-1} \frac{\partial B}{\partial \theta_i} B^{-1} \frac{\partial B}{\partial \theta_j} \right]. \quad (3.30)$$

Теорема доказана.

Замечания

1. Как и во временной области, выражение (3.27) представимо в виде суммы двух слагаемых, одно из которых зависит от управляющей последовательности и неизвестных параметров, а другое только от неизвестных параметров.

2. В [63] показано, что (3.27) эквивалентно соответствующему выражению из [35] и по своей структуре совпадает с соотношением, приведенным в [29], но не равносильно ему.

3. Более общий по сравнению с [29, 35] характер вхождения неизвестных параметров не отражается на виде расчетного соотношения для информационной матрицы Фишера и учитывается при вычислении

$$\text{матриц } B, B^{-1}, T_2^{-1}(k), \frac{\partial T_2(k)}{\partial \theta_i}, \frac{\partial T_1(k)}{\partial \theta_i}, \frac{\partial^2 T_2(k)}{\partial \theta_i \partial \theta_j}.$$

3.2.2. Алгоритм вычисления информационной матрицы одноточечного плана

Анализ формулы для информационной матрицы Фишера показывает, что применение формулы (3.27) требует умения находить установившиеся значения матриц

$$\frac{\partial P}{\partial \theta_i}, \frac{\partial^2 P}{\partial \theta_i \partial \theta_j}.$$

Следуя [64], для нахождения установившегося значения ковариационной матрицы одношагового предсказания подставим последовательно в уравнение (2.9) $P(t|t)$, $K(t)$ и $B(t)$, определенные равенствами (2.14), (2.12) и (2.11) соответственно, получим:

$$P(t+1|t) = \Phi[I - K(t)H]P(t|t-1)\Phi^T + \Gamma Q \Gamma^T =$$

$$= \Phi[I - P(t|t-1)H^T(HP(t|t-1)H^T + R)^{-1}H] \times \\ \times P(t|t-1)\Phi^T + \Gamma Q \Gamma^T, \quad t = 1, 2, \dots, N-1.$$

В установившемся режиме, когда

$$P(t+1|t) = P(t|t-1) = P,$$

$$B(t+1) = B = HPH^T + R,$$

$$K(t+1) = K = PH^T B^{-1},$$

полученное соотношение можно записать в виде следующего обобщенного дискретного алгебраического уравнения Риккати:

$$\Phi P \Phi^T - P - \Phi K H P \Phi^T + \Gamma Q \Gamma^T = 0. \quad (3.31)$$

Продифференцировав уравнение (3.31), после преобразований будем иметь:

$$\Phi \frac{\partial P}{\partial \theta_i} \Phi^T - \frac{\partial P}{\partial \theta_i} - \Phi \frac{\partial P}{\partial \theta_i} (\Phi K H)^T + \\ + (\Phi K H) \frac{\partial P}{\partial \theta_i} (\Phi K H)^T - (\Phi K H) \frac{\partial P}{\partial \theta_i} \Phi^T + C = \\ = (\Phi - \Phi K H) \frac{\partial P}{\partial \theta_i} (\Phi - \Phi K H)^T - \frac{\partial P}{\partial \theta_i} + C = 0,$$

что соответствует дискретному уравнению Ляпунова:

$$A \frac{\partial P}{\partial \theta_i} A^T - \frac{\partial P}{\partial \theta_i} + C = 0, \quad (3.32)$$

в котором $A = \Phi - \Phi K H$, $C = C_1 - \Phi C_2 \Phi^T$,

$$C_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_i} P \Phi^T + \Phi P \frac{\partial \Phi^T}{\partial \theta_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_i} K H P \Phi^T - \\ - \Phi K \frac{\partial H}{\partial \theta_i} P \Phi^T - \Phi K H P \frac{\partial \Phi^T}{\partial \theta_i} + \frac{\partial \Gamma}{\partial \theta_i} Q \Gamma^T + \Gamma \frac{\partial Q}{\partial \theta_i} \Gamma^T + \Gamma Q \frac{\partial \Gamma^T}{\partial \theta_i},$$

$$C_2 = P \frac{\partial H^T}{\partial \theta_i} K^T - K C_3 K^T,$$

$$C_3 = \frac{\partial H}{\partial \theta_i} P H^T + H P \frac{\partial H^T}{\partial \theta_i} + \frac{\partial R}{\partial \theta_i}.$$

Продифференцировав уравнение (3.32), снова приходим к дискретному уравнению Ляпунова

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial \theta_j} \frac{\partial P}{\partial \theta_i} A^T + A \frac{\partial^2 P}{\partial \theta_i \partial \theta_j} A^T + A \frac{\partial P}{\partial \theta_i} \frac{\partial A^T}{\partial \theta_j} - \frac{\partial^2 P}{\partial \theta_i \partial \theta_j} + \frac{\partial C}{\partial \theta_j} = \\ = A \frac{\partial^2 P}{\partial \theta_i \partial \theta_j} A^T - \frac{\partial^2 P}{\partial \theta_i \partial \theta_j} + D = 0, \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\text{где } D = \frac{\partial A}{\partial \theta_j} \frac{\partial P}{\partial \theta_i} A^T + A \frac{\partial P}{\partial \theta_i} \frac{\partial A^T}{\partial \theta_j} + \frac{\partial C}{\partial \theta_j},$$

$$\frac{\partial A}{\partial \theta_j} = \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_j} - \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_j} K H - \Phi \frac{\partial K}{\partial \theta_j} H - \Phi K \frac{\partial H}{\partial \theta_j},$$

$$\frac{\partial K}{\partial \theta_j} = \left[\frac{\partial P}{\partial \theta_j} H^T + P \frac{\partial H^T}{\partial \theta_j} - K \left(C_3 + H \frac{\partial P}{\partial \theta_j} H^T \right) \right] B^{-1},$$

$$\frac{\partial C}{\partial \theta_j} = \frac{\partial C_1}{\partial \theta_j} - \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_j} C_2 \Phi^T - \Phi \frac{\partial C_2}{\partial \theta_j} \Phi^T - \Phi C_2 \frac{\partial \Phi^T}{\partial \theta_j},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_1}{\partial \theta_j} = & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta_i \partial \theta_j} P \Phi^T + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_i} \frac{\partial P}{\partial \theta_j} \Phi^T + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_i} P \frac{\partial \Phi^T}{\partial \theta_j} + \\ & + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_j} P \frac{\partial \Phi^T}{\partial \theta_i} + \Phi \frac{\partial P}{\partial \theta_j} \frac{\partial \Phi^T}{\partial \theta_i} + \Phi P \frac{\partial^2 \Phi^T}{\partial \theta_i \partial \theta_j} - \\ & - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta_i \partial \theta_j} K H P \Phi^T - \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_i} \frac{\partial K}{\partial \theta_j} H P \Phi^T - \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_i} K \frac{\partial H}{\partial \theta_j} P \Phi^T - \\ & - \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_i} K H \frac{\partial P}{\partial \theta_j} \Phi^T - \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_i} K H P \frac{\partial \Phi^T}{\partial \theta_j} - \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_j} K \frac{\partial H}{\partial \theta_i} P \Phi^T - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\Phi \frac{\partial K}{\partial \theta_j} \frac{\partial H}{\partial \theta_i} P \Phi^T - \Phi K \frac{\partial^2 H}{\partial \theta_i \partial \theta_j} P \Phi^T - \Phi K \frac{\partial H}{\partial \theta_i} \frac{\partial P}{\partial \theta_j} P \Phi^T - \\
& -\Phi K \frac{\partial H}{\partial \theta_i} P \frac{\partial \Phi^T}{\partial \theta_j} - \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_j} K H P \frac{\partial \Phi^T}{\partial \theta_i} - \Phi \frac{\partial K}{\partial \theta_j} H P \frac{\partial \Phi^T}{\partial \theta_i} - \\
& -\Phi K \frac{\partial H}{\partial \theta_j} P \frac{\partial \Phi^T}{\partial \theta_i} - \Phi K H \frac{\partial P}{\partial \theta_j} \frac{\partial \Phi^T}{\partial \theta_i} - \Phi K H P \frac{\partial^2 \Phi^T}{\partial \theta_i \partial \theta_j} + \\
& + \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \theta_i \partial \theta_j} Q \Gamma^T + \frac{\partial \Gamma}{\partial \theta_i} \frac{\partial Q}{\partial \theta_j} \Gamma^T + \frac{\partial \Gamma}{\partial \theta_i} Q \frac{\partial \Gamma^T}{\partial \theta_j} + \\
& + \frac{\partial \Gamma}{\partial \theta_j} \frac{\partial Q}{\partial \theta_i} \Gamma^T + \Gamma \frac{\partial^2 Q}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \Gamma^T + \Gamma \frac{\partial Q}{\partial \theta_i} \frac{\partial \Gamma^T}{\partial \theta_j} + \\
& + \frac{\partial \Gamma}{\partial \theta_j} Q \frac{\partial \Gamma^T}{\partial \theta_i} + \Gamma Q \frac{\partial^2 \Gamma^T}{\partial \theta_i \partial \theta_j} + \Gamma \frac{\partial Q}{\partial \theta_j} \frac{\partial \Gamma^T}{\partial \theta_i}, \\
\frac{\partial C_2}{\partial \theta_j} &= \frac{\partial P}{\partial \theta_j} \frac{\partial H^T}{\partial \theta_i} K^T + P \frac{\partial^2 H^T}{\partial \theta_i \partial \theta_j} K^T + P \frac{\partial H^T}{\partial \theta_i} \frac{\partial K^T}{\partial \theta_j} - \\
& - \frac{\partial K}{\partial \theta_j} C_3 K^T - K \frac{\partial C_3}{\partial \theta_j} K^T - K C_3 \frac{\partial K^T}{\partial \theta_j}, \\
\frac{\partial C_3}{\partial \theta_j} &= \frac{\partial^2 H}{\partial \theta_i \partial \theta_j} P H^T + \frac{\partial H}{\partial \theta_i} \frac{\partial P}{\partial \theta_j} H^T + \frac{\partial H}{\partial \theta_i} P \frac{\partial H^T}{\partial \theta_j} + \\
& + \frac{\partial H}{\partial \theta_j} P \frac{\partial H^T}{\partial \theta_i} + H \frac{\partial P}{\partial \theta_j} \frac{\partial H^T}{\partial \theta_i} + H P \frac{\partial^2 H^T}{\partial \theta_i \partial \theta_j} + \frac{\partial^2 R}{\partial \theta_i \partial \theta_j}.
\end{aligned}$$

Таким образом, для нахождения установившихся значений ковариационной матрицы ошибок одношагового предсказания и ее производных до второго порядка включительно необходимо решать матричные уравнения Риккати и Ляпунова (3.31)–(3.33). В рамках программной системы MATLAB это можно осуществить, применяя функции `dare()` и `dlyap()` пакета Control System Toolbox [65, 66].

Приведем в соответствии с полученным в разделе 3.2.1 соотношением алгоритм вычисления информационной матрицы однократного плана.

1°. Используя уравнения дискретного фильтра Калмана, определим установившееся значение ковариационной матрицы одношагового предсказания P , для которого $\|P(\tau^* + 1 | \tau^*) - P(\tau^* | \tau^* - 1)\| \leq \delta$, τ^* и $N = N - \tau^*$:

$$P(\tau + 1 | \tau) = \Phi P(\tau | \tau) \Phi^T + \Gamma Q \Gamma^T;$$

$$B(\tau + 1) = H P(\tau + 1 | \tau) H^T + R;$$

$$K(t + 1) = P(\tau + 1 | \tau) H^T B^{-1}(\tau + 1);$$

$$P(\tau + 1 | \tau + 1) = I - K_1(\tau + 1) H \quad P(\tau + 1 | \tau), \quad \tau = 0, 1, \dots$$

2°. Найдем установившиеся значения матриц $\frac{\partial P}{\partial \theta_i}, \frac{\partial^2 P}{\partial \theta_i \partial \theta_j}$ решением соответствующих дискретных уравнений Ляпунова.

3°. Для заданного θ найдем:

$$\Phi, \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_i}, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta_i \partial \theta_j}, \quad i = 1, 2, \dots, s; \quad Q, \frac{\partial Q}{\partial \theta_i}, \frac{\partial^2 Q}{\partial \theta_i \partial \theta_j}, \quad i = 1, 2, \dots, s;$$

$$\Psi, \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_i}, \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta_i \partial \theta_j}, \quad i = 1, 2, \dots, s; \quad R, \frac{\partial R}{\partial \theta_i}, \frac{\partial^2 R}{\partial \theta_i \partial \theta_j}, \quad i = 1, 2, \dots, s;$$

$$\Gamma, \frac{\partial \Gamma}{\partial \theta_i}, \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \theta_i \partial \theta_j}, \quad i = 1, 2, \dots, s; \quad H, \frac{\partial H}{\partial \theta_i}, \frac{\partial^2 H}{\partial \theta_i \partial \theta_j}, \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

4°. Положим $M(\Theta) = 0$, $A(k) = 0$, $D(k) = 0$, $k = 0$.

5°. Вычислим $B, K_1, \frac{\partial K_1}{\partial \theta_i}, \frac{\partial B}{\partial \theta_i}, \frac{\partial^2 B}{\partial \theta_i \partial \theta_j}, \frac{\partial^2 K_1}{\partial \theta_i \partial \theta_j}$ по формулам

$$B = H P H^T + R;$$

$$K_1 = \Phi P H^T B^{-1};$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial B}{\partial \theta_i} &= \frac{\partial H}{\partial \theta_i} P H^T + H \frac{\partial P}{\partial \theta_i} H^T + H P \frac{\partial H^T}{\partial \theta_i} + \frac{\partial R}{\partial \theta_i}; \\
\frac{\partial K_1}{\partial \theta_i} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_i} P H^T B^{-1} + \Phi \frac{\partial P}{\partial \theta_i} H^T B^{-1} + \Phi P \frac{\partial H^T}{\partial \theta_i} B^{-1} - \Phi P H^T B^{-1} \frac{\partial B}{\partial \theta_i} B^{-1}; \\
\frac{\partial^2 B}{\partial \theta_i \partial \theta_j} &= \frac{\partial^2 H}{\partial \theta_i \partial \theta_j} P H^T + \frac{\partial H}{\partial \theta_i} \frac{\partial P}{\partial \theta_j} H^T + \frac{\partial H}{\partial \theta_i} P \frac{\partial H^T}{\partial \theta_j} + \frac{\partial H}{\partial \theta_j} \frac{\partial P}{\partial \theta_i} H^T + \\
&\quad + H \frac{\partial^2 P}{\partial \theta_i \partial \theta_j} H^T + H \frac{\partial P}{\partial \theta_i} \frac{\partial H^T}{\partial \theta_j} + \\
&\quad + \frac{\partial H}{\partial \theta_j} P \frac{\partial H^T}{\partial \theta_i} + H \frac{\partial P}{\partial \theta_j} \frac{\partial H^T}{\partial \theta_i} + H P \frac{\partial^2 H^T}{\partial \theta_i \partial \theta_j} + \frac{\partial^2 R}{\partial \theta_i \partial \theta_j}; \\
\frac{\partial^2 K_1}{\partial \theta_i \partial \theta_j} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \Phi P H^T B^{-1} + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_i} \frac{\partial P}{\partial \theta_j} H^T B^{-1} + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_i} P \frac{\partial H^T}{\partial \theta_j} B^{-1} - \\
&\quad - \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_i} P H^T B^{-1} \frac{\partial B}{\partial \theta_j} B^{-1} + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_j} \frac{\partial P}{\partial \theta_i} H^T B^{-1} + \Phi \frac{\partial^2 P}{\partial \theta_i \partial \theta_j} H^T B^{-1} + \\
&\quad + \Phi \frac{\partial P}{\partial \theta_i} \frac{\partial H^T}{\partial \theta_i} B^{-1} - \Phi \frac{\partial P}{\partial \theta_i} H^T B^{-1} \frac{\partial B}{\partial \theta_j} B^{-1} + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_j} P \frac{\partial H^T}{\partial \theta_i} B^{-1} + \\
&\quad + \Phi P \frac{\partial^2 H^T}{\partial \theta_i \partial \theta_j} B^{-1} + \Phi \frac{\partial P}{\partial \theta_j} \frac{\partial H^T}{\partial \theta_i} B^{-1} - \Phi P \frac{\partial H^T}{\partial \theta_i} B^{-1} \frac{\partial B}{\partial \theta_j} B^{-1} - \\
&\quad - \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_j} P H^T B^{-1} \frac{\partial B}{\partial \theta_i} B^{-1} - \Phi P \frac{\partial H^T}{\partial \theta_j} B^{-1} \frac{\partial B}{\partial \theta_i} B^{-1} - \Phi \frac{\partial P}{\partial \theta_j} H^T B^{-1} \frac{\partial B}{\partial \theta_i} B^{-1} + \\
&\quad + \Phi P H^T B^{-1} \frac{\partial B}{\partial \theta_j} B^{-1} \frac{\partial B}{\partial \theta_i} B^{-1} - \Phi P H^T B^{-1} \frac{\partial^2 B}{\partial \theta_i \partial \theta_j} B^{-1} + \\
&\quad + \Phi P H^T B^{-1} \frac{\partial B}{\partial \theta_i} B^{-1} \frac{\partial B}{\partial \theta_j} B^{-1}
\end{aligned}$$

и матрицу C по формуле (3.30).

6°. Определим $\frac{\partial T_1(k)}{\partial \theta_i}$, $\frac{\partial T_2(k)}{\partial \theta_i}$, $\frac{\partial^2 T_2(k)}{\partial \theta_i \partial \theta_j}$ по формулам:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial T_1(k)}{\partial \theta_i} &= \frac{\partial H}{\partial \theta_i} z_k I - \Phi^{-1} \Psi + \\
 &+ H z_k I - \Phi^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_i} z_k I - \Phi^{-1} \Psi + H z_k I - \Phi^{-1} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta_i}; \\
 \frac{\partial T_2(k)}{\partial \theta_i} &= \frac{\partial H}{\partial \theta_i} z_k I - \Phi^{-1} K_1 + \\
 &+ H z_k I - \Phi^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_i} z_k I - \Phi^{-1} K_1 + H z_k I - \Phi^{-1} \frac{\partial K_1}{\partial \theta_i}; \\
 \frac{\partial^2 T_2(k)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} &= \frac{\partial^2 H}{\partial \theta_i \partial \theta_j} z_k I - \Phi^{-1} K_1 + \frac{\partial H}{\partial \theta_i} z_k I - \Phi^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_j} z_k I - \Phi^{-1} K_1 + \\
 &+ \frac{\partial H}{\partial \theta_i} z_k I - \Phi^{-1} \frac{\partial K_1}{\partial \theta_j} + \frac{\partial H}{\partial \theta_j} z_k I - \Phi^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_i} z_k I - \Phi^{-1} K_1 + \\
 &+ H z_k I - \Phi^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_j} z_k I - \Phi^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_i} z_k I - \Phi^{-1} K_1 + \\
 &+ H z_k I - \Phi^{-1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta_i \partial \theta_j} z_k I - \Phi^{-1} K_1 + \\
 &+ H z_k I - \Phi^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_i} z_k I - \Phi^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_j} z_k I - \Phi^{-1} K_1 + \\
 &+ H z_k I - \Phi^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_i} z_k I - \Phi^{-1} \frac{\partial K_1}{\partial \theta_j} + \frac{\partial H}{\partial \theta_j} z_k I - \Phi^{-1} \frac{\partial K_1}{\partial \theta_i} + \\
 &+ H z_k I - \Phi^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_j} z_k I - \Phi^{-1} \frac{\partial K_1}{\partial \theta_i} + H z_k I - \Phi^{-1} \frac{\partial^2 K_1}{\partial \theta_i \partial \theta_j}.
 \end{aligned}$$

7°. Найдем $D(k)$, $A(k)$ по формулам (3.28) и (3.29).

8°. Используя выражение (3.27), найдем приращение $\Delta M(\Theta)$.

9°. Положим $M(\Theta) = M(\Theta) + \Delta M(\Theta)$.

10°. Увеличим k на единицу. Если $k \leq N-1$, перейдем на шаг 6°, иначе закончим процесс.

3.2.3. Вычисление градиентов критериев оптимальности

Приведем вычисление критериев оптимальности, следуя [62]. Будем считать, что каждая точка α_i спектра плана ξ в частотной области, определяемого соотношением (1.5), имеет вид

$$\alpha_i^T = \tilde{U}_i^T = [\tilde{u}^i(0)]^T, [\tilde{u}^i(1)]^T, \dots, [\tilde{u}^i(N-1)]^T,$$

$$\tilde{U}_i \in \Omega_{\tilde{U}}, \quad p_i \geq 0, \quad i=1, 2, \dots, q, \quad \sum_{i=1}^q p_i = 1.$$

Как и во временной области, начнем с прямой процедуры планирования входных сигналов. Для ее реализации необходимо умение вычислять значения следующих градиентов критериев оптимальности:

$$\nabla_{\tilde{A}} X \left[\begin{matrix} M & \xi \\ \partial \tilde{u}_j^i & k \end{matrix} \right] = \left\| \frac{\partial X \left[\begin{matrix} M & \xi \\ \partial \tilde{u}_j^i & k \end{matrix} \right]}{\partial \tilde{u}_j^i} \right\|; \quad i=1, \dots, q; \quad k=0, 1, \dots, N-1; \quad j=1, \dots, r,$$

и

$$\nabla_{\tilde{p}} X[M(\xi)] = \left\| \frac{\partial X[M(\xi)]}{\partial p_i} \right\|; \quad i=1, \dots, q.$$

Начнем с критерия D -оптимальности. Для него

$$\begin{aligned} \frac{\partial X \left[\begin{matrix} M & \xi \\ \partial \tilde{u}_j^i & k \end{matrix} \right]}{\partial \tilde{u}_j^i} &= -\text{Sp} \left[M^{-1} \xi \frac{\partial M \xi}{\partial \tilde{u}_j^i} \right] = -\text{Sp} \left[M^{-1} \xi \ p_i \frac{\partial M \tilde{U}_i}{\partial \tilde{u}_j^i} \right] = \\ &= -p_i \text{Sp} \left[M^{-1} \xi \frac{\partial M \tilde{U}_i}{\partial \tilde{u}_j^i} \right], \quad k=0, \dots, N-1. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\frac{\partial M}{\partial \tilde{u}_j} \tilde{U} = \left\| \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial \tilde{u}_j} \tilde{U} \right\|, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, s, \quad l = 0, \dots, N-1,$$

для вычисления производных воспользуемся соотношением (3.27):

$$\frac{\partial M_{\alpha\beta}(\tilde{U})}{\partial \tilde{u}_j(l)} = N \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{N-1} \operatorname{Sp} \left[D_{\alpha\beta}(k) \frac{\partial \tilde{u}(k)}{\partial \tilde{u}_j(l)} \tilde{u}^*(k) + D_{\alpha\beta}(k) \tilde{u}(k) \frac{\partial \tilde{u}^*(k)}{\partial \tilde{u}_j(l)} \right],$$

где

$$\frac{\partial \tilde{u}(k)}{\partial \tilde{u}_j(l)} = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq l; \\ \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j, & \text{если } k = l. \end{cases}$$

Отметим, что вычисление градиента по элементам информационной матрицы

$$\frac{\partial M}{\partial \tilde{u}_j} \tilde{U} = \left\| \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial \tilde{u}_j} \tilde{U} \right\| \text{ не представляет трудности, так как}$$

основная часть вычислений отводится на нахождение элементов матрицы $D_{\alpha\beta}(k)$, $\alpha, \beta = 1, \dots, s$, $k = 0, \dots, N-1$, которые функционально входят в выражение для самой информационной матрицы.

Вычисление градиента по весам не составляет особого труда. Для критерия D -оптимальности справедливо

$$\begin{aligned} \frac{\partial X[M(\xi)]}{\partial p_i} &= \frac{\partial [-\ln \det M(\xi)]}{\partial p_i} = -\operatorname{Sp} \left[M^{-1}(\xi) \frac{\partial M(\xi)}{\partial p_i} \right] = \\ &= -\operatorname{Sp} \left[M^{-1}(\xi) M(\tilde{U}_i) \right], \quad i = 1, \dots, q. \end{aligned}$$

Перейдем к критерию A -оптимальности. В этом случае

$$\frac{\partial X[M(\xi)]}{\partial \tilde{u}_j^{(i)}(k)} = \frac{\partial [\operatorname{Sp} M^{-1}(\xi)]}{\partial \tilde{u}_j^{(i)}(k)} = \operatorname{Sp} \left[\frac{\partial M^{-1}(\xi)}{\partial \tilde{u}_j^{(i)}(k)} \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= -\text{Sp} \left[M^{-1}(\xi) \frac{\partial M(\xi)}{\partial \tilde{u}_j^{(i)}(k)} M^{-1}(\xi) \right] = -p_i \text{Sp} \left[M^{-1}(\xi) \frac{\partial M(\tilde{U}_i)}{\partial \tilde{u}_j^{(i)}(k)} M^{-1}(\xi) \right], \\
&\quad i = 1, \dots, q; \quad k = 0, \dots, N-1; \quad j = 1, \dots, r. \\
&\quad \frac{\partial X[M(\xi)]}{\partial p_i} = \frac{\partial [\text{Sp} M^{-1}(\xi)]}{\partial p_i} = \text{Sp} \left[\frac{\partial M^{-1}(\xi)}{\partial p_i} \right] = \\
&= -\text{Sp} \left[M^{-1}(\xi) \frac{\partial M(\xi)}{\partial p_i} M^{-1}(\xi) \right] = -\text{Sp} \left[M^{-1}(\xi) M(\tilde{U}_i) M^{-1}(\xi) \right] = \\
&= -\text{Sp} \left[M^{-2}(\xi) M(\tilde{U}_i) \right], \quad i = 1, 2, \dots, q.
\end{aligned}$$

Для реализации двойственной процедуры планирования входных сигналов приведем значения следующего функционала:

$$\nabla_{\alpha\mu} \tilde{U}, \xi = \left\| \frac{\partial \mu \tilde{U}, \xi}{\partial \tilde{u}_j k} \right\|, \quad k = 0, 1, \dots, N-1; \quad j = 1, 2, \dots, r.$$

Для критерия D -оптимальности получаем:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mu \tilde{U}, \xi}{\partial \tilde{u}_j k} &= \frac{\partial \text{Sp} \left[M^{-1} \xi M \tilde{U} \right]}{\partial \tilde{u}_j k} = \text{Sp} \left[M^{-1} \xi \frac{\partial M \tilde{U}}{\partial \tilde{u}_j k} \right]; \\
&\quad t = 0, 1, \dots, N-1, \quad j = 1, \dots, r,
\end{aligned}$$

а для критерия A -оптимальности

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mu \tilde{U}, \xi}{\partial \tilde{u}_j k} &= \frac{\partial \text{Sp} \left[M^{-2} \xi M \tilde{U} \right]}{\partial \tilde{u}_j k} = \text{Sp} \left[M^{-2} \xi \frac{\partial M \tilde{U}}{\partial \tilde{u}_j k} \right]; \\
&\quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad j = 1, \dots, r.
\end{aligned}$$

Глава 4

АКТИВНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ РАЗЛИЧНОЙ ПРИРОДЫ

4.1. Дискретные системы

4.1.1. Система управления бурильной машиной

Пусть непрерывная система управления задана следующей структурной схемой (рис. 4.1). На практике она может соответствовать, например, системам управления бурильной машиной [67, с. 210], скоростью автомобиля [67, с. 229], электрокардиостимулятором [67, с. 300].

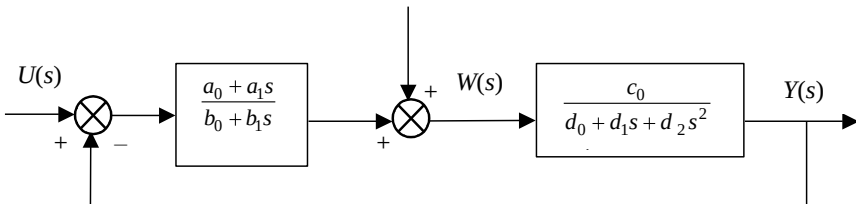


Рис. 4.1. Исходная структурная схема

Запишем по рис. 4.1 модель в форме передаточных функций:

$$Y(s) = \frac{k_0 + k_1 s}{f_0 + f_1 s + f_2 s^2 + f_3 s^3} U(s) + \frac{m_0 + m_1 s}{f_0 + f_1 s + f_2 s^2 + f_3 s^3} W(s),$$

где $k_0 = a_0 c_0$, $k_1 = a_1 c_0$;

$$m_0 = b_0 c_0, \quad m_1 = b_1 c_0;$$

$$f_0 = a_0 c_0 + b_0 d_0;$$

$$f_1 = a_1 c_0 + b_1 d_0 + b_0 d_1;$$

$$f_2 = b_0 d_2 + b_1 d_1;$$

$$f_3 = b_1 d_2.$$

Отсюда

$$Y(s) = \frac{1}{s} \left(-\frac{f_2}{f_3} Y(s) + \frac{1}{s} \left(\left(-\frac{f_1}{f_3} Y(s) + \frac{k_1}{f_3} U(s) + \frac{m_1}{f_3} W(s) \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{s} \left(-\frac{f_0}{f_3} Y(s) + \frac{k_0}{f_3} U(s) + \frac{m_0}{f_3} W(s) \right) \right) \right),$$

что позволяет преобразовать исходную схему следующим образом:

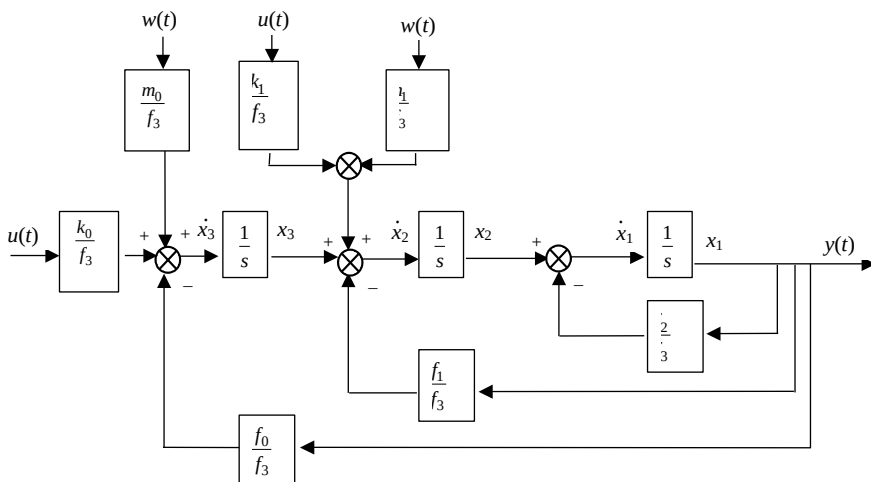


Рис. 4.2. Эквивалентная преобразованная структурная схема

В соответствии с рис. 4.2 введем фазовые переменные x_1 , x_2 , x_3 и запишем уравнения системы в пространстве состояний:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{f_2}{f_3} & 1 & 0 \\ -\frac{f_1}{f_3} & 0 & 1 \\ -\frac{f_0}{f_3} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{k_1}{f_3} \\ \frac{k_0}{f_3} \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{m_1}{f_3} \\ \frac{m_0}{f_3} \end{pmatrix} w(t), \quad (4.1)$$

$$y(t+1) = x_1(t+1), \quad t = 0, 1, \dots, N-1. \quad (4.2)$$

Выполним дискретизацию непрерывной линейной модели (4.1), (4.2), считая вход $u(t)$ и возмущение $w(t)$ кусочно-постоянными функциями на интервале дискретизации и полагая шаг дискретизации равным ΔT . С учетом ошибок измерений приходим к стохастической модели вида (2.1), (2.2).

Рассмотрим задачу активной параметрической идентификации системы управления бурильной машиной [54], которая может быть использована при прокладке тоннелей метрополитенов, строительстве железных дорог и т.д. В этом случае $u(t)$ – заданный угол направления движения, измеряемый в градусах; $y(t)$ – действительное угловое направление движения машины, измеряемое в градусах; $w(t)$ – влияние нагрузки на систему.

Будем считать, что выполнены все указанные априорные предположения из гл. 2, причем $R = Q = 0.2$ и в качестве неизвестного параметра θ выбран a_1 (см. рис. 4.1). Пусть область планирования $\Omega_U = U \in R^N | 0 \leq u(t) \leq 180, t = 0, 1, \dots, N-1$ и шаг дискретизации $\Delta T = 1$ ч. Следуя [67], положим $a_0 = 100$, $b_0 = c_0 = d_1 = d_2 = 1$, $b_1 = d_0 = 0$, что соответствует прецизионной лазерной системе, использовавшейся при сооружении тоннеля под Ла-Маншем в 1987 году. Поскольку в этом случае $f_3 = b_1 d_2 = 0$, модель состояний, соответствующая рис. 4.1, становится двумерной и дискретный аналог системы (4.1), (4.2), учитывающий помехи динамики и ошибки измерений, имеет вид:

$$\begin{pmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} w(t),$$

$$y(t+1) = x_1(t+1) + v(t+1), \quad t = 0, 1, \dots, N-1,$$

где

$$\phi_{11} = e^\alpha \left[\cos \beta - \frac{a + \alpha}{\beta} \sin \beta \right]; \quad \phi_{12} = \frac{1}{\beta} e^\alpha \sin \beta;$$

$$\phi_{21} = -\frac{100}{\beta} e^\alpha \sin \beta; \quad \phi_{22} = e^\alpha \left[\cos \beta - \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta \right];$$

$$\alpha = -\frac{a}{2}; \quad \beta = \frac{\sqrt{400 - a^2}}{2}; \quad a = \theta + 1;$$

$$\begin{aligned} \psi_1 = & \frac{-2\theta\alpha + 100 - \theta a}{\alpha^2 + \beta^2} + \\ & + \frac{e^\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} \left[\theta(\alpha \cos \beta + \beta \sin \beta) + \left(\frac{100 - \theta(a + \alpha)}{\beta} \right) (\alpha \sin \beta - \beta \cos \beta) \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_2 = & \frac{-100(2\alpha + \theta)}{\alpha^2 + \beta^2} + \\ & + \frac{e^\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} \left[100(\alpha \cos \beta + \beta \sin \beta) - \left(\frac{100(\alpha + \theta)}{\beta} \right) (\alpha \sin \beta - \beta \cos \beta) \right]; \end{aligned}$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{e^\alpha}{\beta(\alpha^2 + \beta^2)} (\alpha \sin \beta - \beta \cos \beta);$$

$$\gamma_2 = \frac{-2\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{e^\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} \left[(\alpha \cos \beta - \beta \sin \beta) - \frac{\alpha}{\beta} (\alpha \sin \beta - \beta \cos \beta) \right].$$

Таким образом, неизвестный параметр функционально входит в элементы матриц *состояния* Φ , *управления* Ψ и *возмущения* Γ дискретизованной модели. Для нахождения оценок неизвестных параметров воспользуемся методом максимального правдоподобия. С целью ослабления зависимости результатов оценивания от выборочных данных произведем пять различных запусков системы и усредним полученные оценки неизвестных параметров. Реализации выходных сигналов

получим компьютерным моделированием в соответствии с алгоритмом из [68] при истинном значении параметра $\theta^* = 11$ и $N = 38$ для временной области и $N = 24$ (установившийся режим) для частотной области.

Качество оценивания неизвестных параметров будем сравнивать как в пространстве состояний, так и в пространстве откликов по соответствующим формулам:

$$\frac{\|\theta^* - \hat{\theta}_i^{(0)}\|}{\|\theta^* - \hat{\theta}_i^*\|} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^s \theta_i^* - \hat{\theta}_i^{(0)}{}^2}{\sum_{i=1}^s \theta_i^* - \hat{\theta}_i^*{}^2}},$$

$$\frac{\|Y^{(0)} - \hat{Y}^{(0)}\|}{\|Y^* - \hat{Y}^*\|} = \sqrt{\frac{\sum_{t=0}^{N-1} y_i^{(0)}(t+1) - \hat{y}_i^{(0)}(t+1|t) {}^2}{\sum_{t=0}^{N-1} y_i^*(t+1) - \hat{y}_i^*(t+1|t) {}^2}},$$

где θ_i^* – i -я компонента вектора истинных значений параметров;

$\hat{\theta}_i^{(0)}$ – i -я компонента оценки вектора неизвестных значений параметров на нулевой итерации процедуры активной идентификации;

$\hat{\theta}_i^*$ – i -я компонента оценки вектора неизвестных значений параметров на последней итерации процедуры активной идентификации;

$Y^{(0)} = y^{(0)}(t+1), t = 0, 1, \dots, N-1$ – векторы измерений, соответствующие входному сигналу на нулевой итерации процедуры активной идентификации;

$\hat{Y}^{(0)} = \hat{y}^{(0)}(t+1|t), t = 0, 1, \dots, N-1$ – оценки векторов измерений, соответствующие входному сигналу на нулевой итерации процедуры активной идентификации;

$Y^* = y^*(t+1), t = 0, 1, \dots, N-1$ – векторы измерений, соответствующие входному сигналу на последней итерации процедуры активной идентификации;

$\hat{Y}^* = \hat{y}^*(t+1|t), t = 0, 1, \dots, N-1$ – оценки векторов измерений, соответствующие входному сигналу на последней итерации процедуры активной идентификации.

Результаты расчетов во временной и частотной областях для приведенной модели бурильной машины с одним параметром с использованием различных процедур планирования и критериев оптимальности представим в табл. 4.1–4.4. Для большей наглядности пересчитаем полученные в частотной области результаты во временную область и дадим итерации процедуры активной идентификации в соответствующих таблицах.

Из табл. 4.1–4.4 не представляется возможным сделать вывод о предпочтительности процедур активной идентификации в частотной области над процедурами активной идентификации во временной области, поскольку наиболее точные оценки получены при A -оптимальном входном сигнале в частотной области и при D -оптимальном входном сигнале во временной области. Отметим, что как во временной, так и в частотной области оказался предпочтительнее критерий D -оптимальности. Оценки неизвестных параметров удалось улучшить от 3.2 до 7.8 раза в пространстве параметров и от 3.1 до 5.9 раза в пространстве откликов.

Поскольку оценки, полученные во временной области с применением критерия D -оптимальности лучше согласуются с истинными значениями параметров (см. табл. 4.4), графически представим результаты в пространстве откликов на рис. 4.3 и 4.4 с учетом следующих обозначений:

$y_{cp}(t+1)$ – усредненный по запускам вектор измерений в момент времени $t+1$;

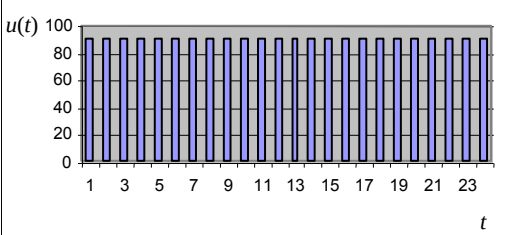
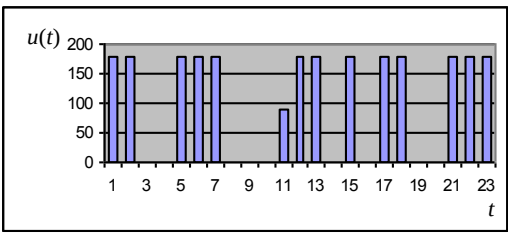
$\hat{y}_{cp}(t+1)$ – оценки усредненного по запускам вектора измерений в момент времени $t+1$.

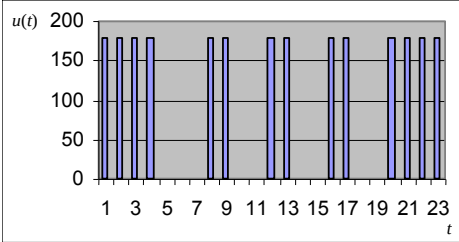
Одним из наиболее часто используемых при идентификации моделей динамических систем тестирующих сигналов является псевдослучайный двоичный сигнал [8].

Сравним оценки неизвестных параметров, полученные с применением «наихудшего» синтезированного из табл. 4.2 и псевдослучайного входного сигнала, и представим результаты в табл. 4.5.

Таблица 4.1

**Итерации процедуры активной идентификации модели бурильной машины с одним параметром
(частотная область, прямая процедура синтеза, критерий A -оптимальности)**

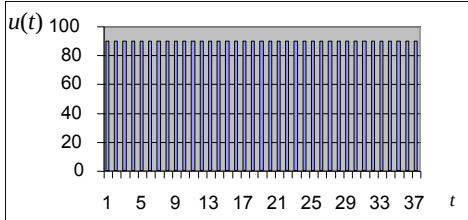
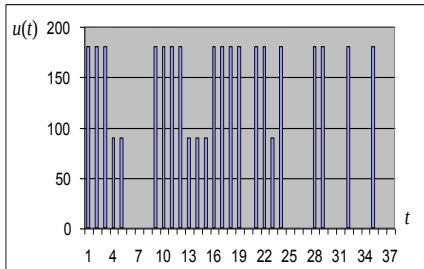
k	Исходный или синтезированный входной сигнал $U^{(k)}$	Обозначение	Номер запуска системы					Средние значения по запускам
			1	2	3	4	5	
			Оценки и нормы ошибок оценивания					
0		$\hat{\theta}^{(k)}$	10.235	9.035	9.112	10.078	10.489	9.789
		$\ \theta^* - \hat{\theta}^{(k)}\ $	0.765	1.965	1.888	0.922	0.511	1.210
1		$\hat{\theta}^{(k)}$	9.112	10.245	10.118	10.107	10.106	9.937
		$\ \theta^* - \hat{\theta}^{(k)}\ $	1.888	0.755	0.882	0.893	0.894	1.062

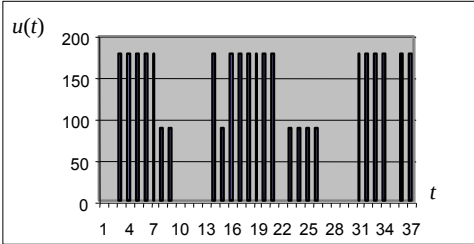
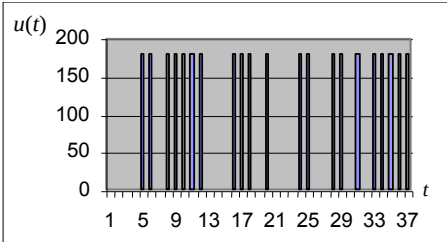
2		$\hat{\theta}^{(k)}$	10.654	10.326	10.705	10.745	10.895	10.663
		$\ \theta^* - \hat{\theta}^{(k)}\ $	0.346	0.674	0.295	0.255	0.105	0.335

Из табл. 4.1 видно, что в результате применения процедуры активной идентификации в *частотной области* получена оптимальная оценка $\hat{\theta}^* = 10.663$, которая лучше исходной в 3.4 раза в пространстве параметров. В пространстве откликов результаты улучшились в 3.2 раза.

Таблица 4.2

**Итерации процедуры активной идентификации модели бурильной машины с одним параметром
(временная область, прямая процедура синтеза, критерий A -оптимальности)**

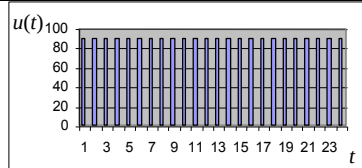
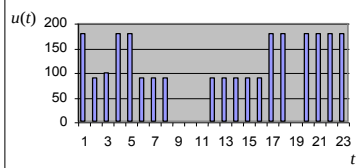
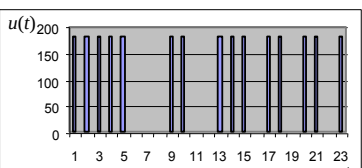
k	Исходный или синтезированный входной сигнал $U^{(k)}$	Обозначение	Номер запуска системы					Средние значения по запускам
			1	2	3	4	5	
			Оценки и нормы ошибок оценивания					
0		$\hat{\theta}^{(k)}$	10.012	9.745	9.325	9.847	9.478	9.681
		$\ \theta^* - \hat{\theta}^{(k)}\ $	0.988	1.255	1.675	1.153	1.522	1.318
1		$\hat{\theta}^{(k)}$	10.112	10.325	10.001	10.045	9.978	10.092
		$\ \theta^* - \hat{\theta}^{(k)}\ $	0.888	0.675	0.999	0.955	1.022	0.907

2		$\hat{\theta}^{(k)}$	10.112	10.458	10.444	10.502	10.213	10.345
		$\ \theta^* - \hat{\theta}^{(k)}\ $	0.888	0.542	0.556	0.498	0.787	0.654
3		$\hat{\theta}^{(k)}$	10.512	10.512	10.645	10.702	10.551	10.584
		$\ \theta^* - \hat{\theta}^{(k)}\ $	0.488	0.488	0.355	0.298	0.449	0.407

Из табл. 4.2 видно, что в результате применения процедуры активной идентификации во *временной области* получена оптимальная оценка $\hat{\theta}^*=10.584$, которая лучше исходной в 3.2 раза в пространстве параметров. В пространстве откликов результаты улучшились в 3.1 раза.

Таблица 4.3

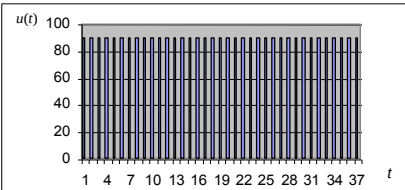
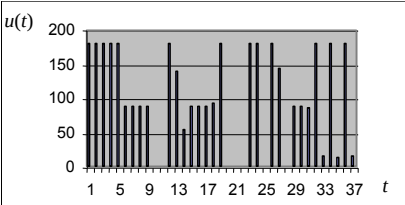
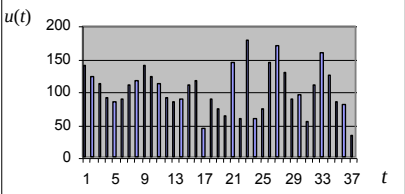
**Итерации процедуры активной идентификации модели бурильной машины с одним параметром
(частотная область, двойственная процедура синтеза, критерий D -оптимальности)**

k	Исходный или синтезированный входной сигнал $U^{(k)}$	Обозначе- ние	Номер запуска системы					Средние значения по запускам
			1	2	3	4	5	
			Оценки и нормы ошибок оценивания					
0		$\hat{\theta}^{(k)}$	9.035	9.458	9.458	9.475	9.578	9.4
		$\ \theta^* - \hat{\theta}^{(k)}\ $	1.965	1.542	1.542	1.525	1.422	1.599
1		$\hat{\theta}^{(k)}$	9.878	9.648	9.785	10.007	10.104	9.884
		$\ \theta^* - \hat{\theta}^{(k)}\ $	1.122	1.352	1.215	0.993	0.896	1.115
2		$\hat{\theta}^{(k)}$	10.115	10.312	10.989	10.874	10.678	10.593
		$\ \theta^* - \hat{\theta}^{(k)}\ $	0.885	0.688	0.011	0.126	0.322	0.406

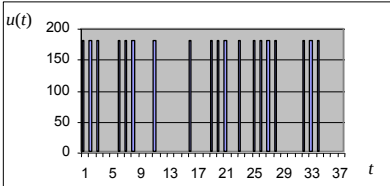
Из табл. 4.3 видно, что в результате применения процедуры активной идентификации в *частотной области* получена оптимальная оценка $\hat{\theta}^*=10.593$, которая лучше исходной в 3.9 раза в пространстве параметров. В пространстве откликов результаты улучшились в 4.6 раза.

Т а б л и ц а 4.4

**Итерации процедуры активной идентификации модели бурильной машины с одним параметром
(временная область, двойственная процедура синтеза, критерий D -оптимальности)**

k	Исходный или синтезированный входной сигнал $U^{(k)}$	Обозначе- ние	Номер запуска системы					Средние значения по запускам
			1	2	3	4	5	
			Оценки и нормы ошибок оценивания					
0		$\hat{\theta}^{(k)}$	9.215	9.314	9.478	9.333	9.789	9.425
		$\ \theta^* - \hat{\theta}^{(k)}\ $	1.785	1.686	1.522	1.667	1.211	1.574
1		$\hat{\theta}^{(k)}$	10.005	9.993	9.978	10.117	10.204	10.059
		$\ \theta^* - \hat{\theta}^{(k)}\ $	0.995	1.007	1.022	0.883	0.796	0.941
2		$\hat{\theta}^{(k)}$	10.115	10.256	10.325	10.745	10.6	10.408
		$\ \theta^* - \hat{\theta}^{(k)}\ $	0.885	0.744	0.675	0.255	0.4	0.591

Окончание табл. 4.4

k	Исходный или синтезированный входной сигнал $U^{(k)}$	Обозначе- ние	Номер запуска системы					Средние значения по запускам
			1	2	3	4	5	
			Оценки и нормы ошибок оценивания					
3		$\hat{\theta}^{(k)}$	10.458	10.978	10.874	10.789	10.892	10.798
		$\ \theta^* - \hat{\theta}^{(k)}\ $	0.542	0.022	0.126	0.211	0.108	0.201

Из табл. 4.4 видно, что в результате применения процедуры активной идентификации во *временной области* получена оптимальная оценка $\hat{\theta}^* = 10.798$, которая лучше исходной в 7.8 раза в пространстве параметров. В пространстве откликов результаты улучшились в 5.9 раза.

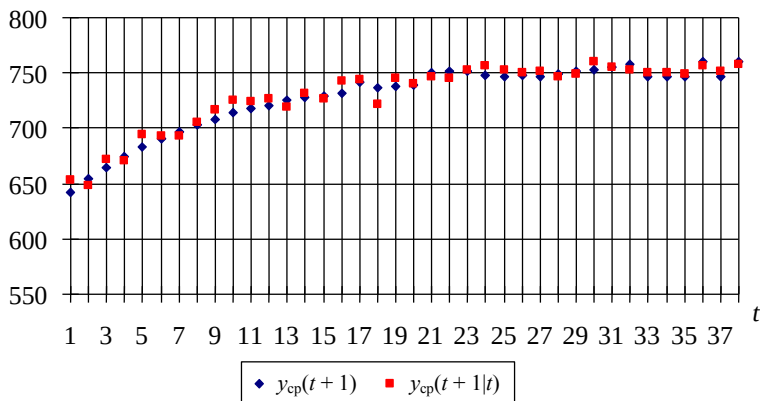


Рис. 4.3. Графическое представление наблюдений $y_{cp}(t+1)$ и их оценок $\hat{y}_{cp}(t+1)$ при входном сигнале $U^{(0)}$ из табл. 4.4

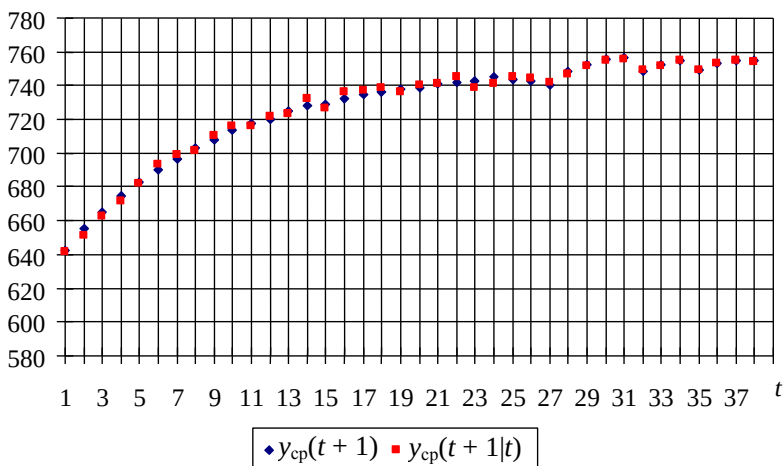
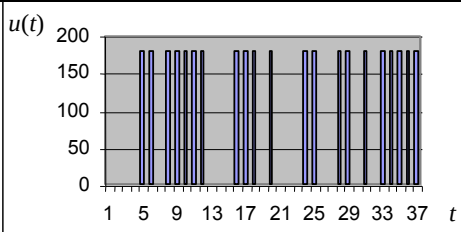
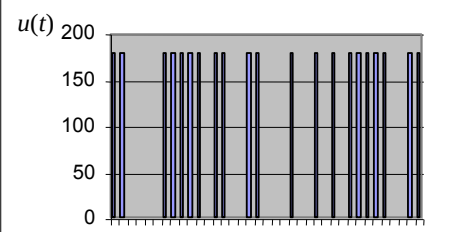


Рис. 4.4. Графическое представление наблюдений $y_{cp}(t+1)$ и их оценок $\hat{y}_{cp}(t+1)$ при входном сигнале $U^{(2)} = U^*$ из табл. 4.4

Таблица 4.5

**Оценки неизвестных параметров, полученные с применением «наихудшего» синтезированного
и псевдослучайного входного сигнала**

Входной сигнал		Обозначение	Номер запуска системы					Средние значения по запускам
			1	2	3	4	5	
			Оценки и нормы ошибок оценивания					
		$\hat{\theta}^{(k)}$	10.512	10.512	10.645	10.702	10.551	10.584
		$\ \theta^* - \hat{\theta}^{(k)}\ $	0.488	0.488	0.355	0.298	0.449	0.407
		$\hat{\theta}^{(k)}$	10.348	10.345	10.406	10.398	10.401	10.379
		$\ \theta^* - \hat{\theta}^{(k)}\ $	0.652	0.655	0.594	0.602	0.599	0.619

Сравнение усредненных евклидовых норм разностей истинных значений параметров и оценок, соответствующих указанным управляющим сигналам, показывает, что качество оценивания с использованием синтезированного входного сигнала в ≈ 1.5 раза выше, чем при использовании псевдослучайного двоичного сигнала.

Рассмотрим теперь случай $a_0 = \theta_1$ и $Q = \theta_2$. Значения остальных параметров a_i, b_i, c_i, d_i – такие же, как и в предыдущем примере. Дискретный аналог системы управления бурильной машиной (4.1), (4.2) с учетом ошибок измерений имеет вид:

$$\begin{pmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} w(t),$$

$$y(t+1) = x_1(t+1) + v(t+1), \quad t = 0, 1, \dots, N-1,$$

где

$$\varphi_{11} = e^\alpha \frac{\beta \cos \beta - (12 + \alpha) \sin \beta}{\beta}; \quad \varphi_{12} = e^\alpha \frac{\sin \beta}{\beta};$$

$$\varphi_{21} = -\theta_1 e^\alpha \frac{\sin \beta}{\beta}; \quad \varphi_{22} = e^\alpha \frac{\beta \cos \beta - \alpha \sin \beta}{\beta};$$

$$\begin{aligned} \psi_1 = \frac{1}{\beta \alpha^2 + \beta^2} & \left[22\alpha\beta + 132\beta - \theta_1\beta \quad e^\alpha \cos \beta - 1 + \right. \\ & \left. + 11\beta^2 - 132\alpha - 11\alpha^2 + \theta_1\alpha \quad e^\alpha \sin \beta \right]; \end{aligned}$$

$$\psi_2 = \frac{\theta_1}{\beta(\alpha^2 + \beta^2)} \left[2\alpha\beta + 11\beta \quad e^\alpha \cos \beta - 1 + \beta^2 - 11\alpha - \alpha^2 \quad e^\alpha \sin \beta \right];$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{\beta(\alpha^2 + \beta^2)} \left[-\beta \quad e^\alpha \cos \beta - 1 + \alpha e^\alpha \sin \beta \right];$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{\beta(\alpha^2 + \beta^2)} \left[2\alpha\beta \quad e^\alpha \cos \beta - 1 + \beta^2 - \alpha^2 \quad e^\alpha \sin \beta \right];$$

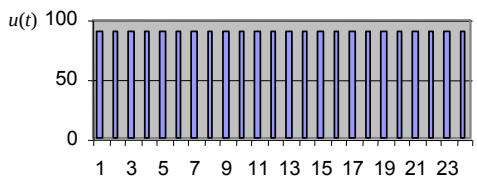
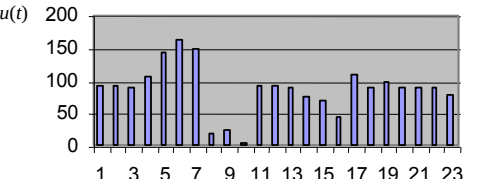
$$\alpha = -6; \quad \beta = \sqrt{\theta_1 - 36}.$$

Таким образом, неизвестные параметры входят в матрицы *состояния* Φ , *управления* Ψ , *возмущения* Γ и *помех динамики* Q .

Для нахождения оценок этих параметров воспользуемся методом максимального правдоподобия. Поскольку в зависимости от используемой процедуры планирования и выбранного критерия оптимальности среднее число итераций процедуры активной идентификации составило во временной области 7, а в частотной – 6, представим результаты только на начальной и на последней итерациях в табл. 4.6 – 4.9 учитывая, что истинные значения параметров $\theta_1^* = 100$ и $\theta_2^* = 0.5$.

Таблица 4.6

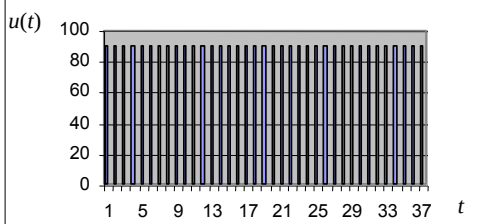
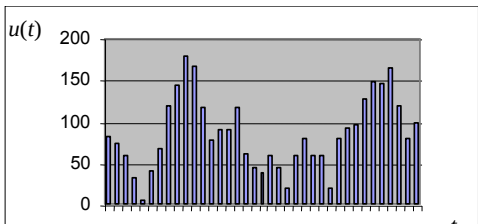
Начальная и конечная итерации процедуры активной идентификации модели бурильной машины с двумя параметрами (частотная область, прямая процедура синтеза, критерий D -оптимальности)

k	Исходный или синтезированный входной сигнал $U^{(k)}$	Обозна- чение	Номер запуска системы					Средние значения по за- пускам
			1	2	3	4	5	
			Оценки и нормы ошибок оценивания					
0		$\hat{\theta}_1^{(k)}$	102.325	101.154	98.125	102.125	103.569	101.6
		$\hat{\theta}_2^{(k)}$	1.325	1.045	0.789	0.815	0.901	0.975
		$\ \theta^* - \hat{\theta}^{(k)}\ $	2.46	1.27	1.89	2.14	3.59	2.272
6		$\hat{\theta}_1^{(k)}$	100.896	101.236	100.897	100.359	101.012	100.88
		$\hat{\theta}_2^{(k)}$	0.589	0.659	0.556	0.512	0.648	0.592
		$\ \theta^* - \hat{\theta}^{(k)}\ $	0.296	1.24	0.288	0.355	1.109	0.657

Из табл. 4.6 видно, что в результате применения процедуры активной идентификации в *частотной области* получены оптимальные оценки $\hat{\theta}_1^* = 100.88$ и $\hat{\theta}_2^* = 0.592$, которые лучше исходных в 3.4 раза в пространстве параметров. В пространстве откликов результаты улучшились в 1.9 раза.

Т а б л и ц а 4.7

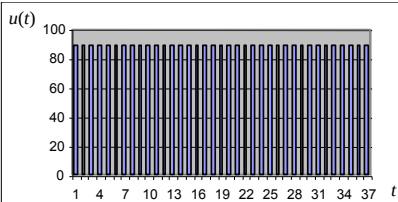
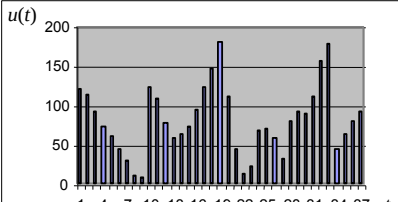
Начальная и конечная итерации процедуры активной идентификации модели бурильной машины с двумя параметрами (временная область, прямая процедура синтеза, критерий D -оптимальности)

k	Исходный или синтезированный входной сигнал $U^{(k)}$	Обозначе- ние	Номер запуска системы					Средние значения по запус- кам
			1	2	3	4	5	
			Оценки и нормы ошибок оценивания					
0		$\hat{\theta}_1^{(k)}$	98.963	100.895	101.102	102.14	102.589	101.13
		$\hat{\theta}_2^{(k)}$	0.987	1.112	0.806	0.955	0.751	0.922
		$\ \theta^* - \hat{\theta}^{(k)}\ $	1.142	1.083	1.141	2.18	2.61	1.631
5		$\hat{\theta}_1^{(k)}$	100.104	100.248	100.49	100.059	100.222	100.224
		$\hat{\theta}_2^{(k)}$	0.589	0.593	0.604	0.501	0.544	0.566
		$\ \theta^* - \hat{\theta}^{(k)}\ $	0.133	0.376	0.5	0.054	0.225	0.257

Из табл. 4.7 видно, что в результате применения процедуры активной идентификации во *временной области* получены оптимальные оценки $\hat{\theta}_1^* = 100.224$ и $\hat{\theta}_2^* = 0.566$, которые лучше исходных в 6.3 раза в пространстве параметров. В пространстве откликов результаты улучшились в 3.1 раза.

Таблица 4.8

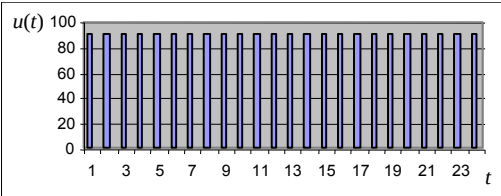
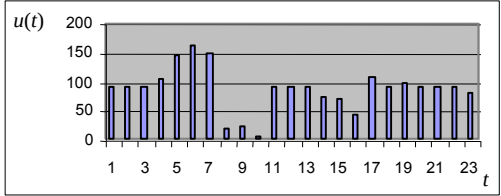
Начальная и конечная итерации процедуры активной идентификации модели бурильной машины с двумя параметрами (частотная область, двойственная процедура синтеза, критерий A -оптимальности)

k	Исходный или синтезированный входной сигнал $U^{(k)}$	Обозначе- ние	Номер запуска системы					Средние значения по запускам
			1	2	3	4	5	
			Оценки и нормы ошибок оценивания					
0		$\hat{\theta}_1^{(k)}$	100.895	101.345	99.101	102.224	102.987	101.31
		$\hat{\theta}_2^{(k)}$	0.789	0.985	0.659	0.995	0.84	0.853
		$\ \theta^* - \hat{\theta}^{(k)}\ $	0.94	1.427	0.912	2.278	1.789	1.469
4		$\hat{\theta}_1^{(k)}$	100.325	101.125	100.096	100.959	100.04	100.9
		$\hat{\theta}_2^{(k)}$	0.612	0.609	0.576	0.542	0.688	0.605
		$\ \theta^* - \hat{\theta}^{(k)}\ $	0.342	1.129	0.12	0.959	0.226	0.554

Из табл. 4.8 видно, что в результате применения процедуры активной идентификации в *частотной области* получены оптимальные оценки $\hat{\theta}_1^* = 100.9$ и $\hat{\theta}_2^* = 0.605$, которые лучше исходных в 2.6 раза в пространстве параметров. В пространстве откликов результаты улучшились в 1.7 раза.

Таблица 4.9

Начальная и конечная итерации процедуры активной идентификации модели бурильной машины с двумя параметрами (временная область, двойственная процедура синтеза, критерий A -оптимальности)

k	Исходный или синтезированный входной сигнал $U^{(k)}$	Обозначение	Номер запуска системы					Средние значения по за- пускам
			1	2	3	4	5	
			Оценки и нормы ошибок оценивания					
0		$\hat{\theta}_1^{(k)}$	99.147	101.145	102.589	101.388	100.774	101
		$\hat{\theta}_2^{(k)}$	0.932	1.356	0.946	0.9	0.812	0.989
		$\ \theta^* - \hat{\theta}^{(k)}\ $	0.955	1.429	1.669	1.444	0.834	1.266
7		$\hat{\theta}_1^{(k)}$	100.021	100.356	100.978	100.592	100.01	100.391
		$\hat{\theta}_2^{(k)}$	0.589	0.59	0.514	0.521	0.59	0.56
		$\ \theta^* - \hat{\theta}^{(k)}\ $	0.265	0.454	0.977	0.6	0.09	0.477

Из табл. 4.9 видно, что в результате применения процедуры активной идентификации во *временной области* получены оптимальные оценки $\hat{\theta}_1^* = 100.391$ и $\hat{\theta}_2^* = 0.56$, которые лучше исходных в 2.7 раза в пространстве параметров. В пространстве откликов результаты улучшились в 1.8 раза.

Результаты применения процедуры активной идентификации, представленные в табл. 4.6–4.9, показывают, что наиболее точные оценки получены при оптимальном входном сигнале во **временной области** как по критерию A -оптимальности, так и по критерию D -оптимальности. Во временной и частотной областях оказался предпочтительнее критерий D -оптимальности. Оценки неизвестных параметров удалось улучшить от 2.6 до 6.3 раза в пространстве параметров и от 1.7 до 3.1 раза в пространстве откликов.

Поскольку оценки, полученные во временной области с применением критерия D -оптимальности, лучше согласуются с истинными значениями параметров (см. табл. 4.7), представим результаты вычислений в пространстве откликов на рис. 4.5, 4.6 с учетом ранее сделанных обозначений.

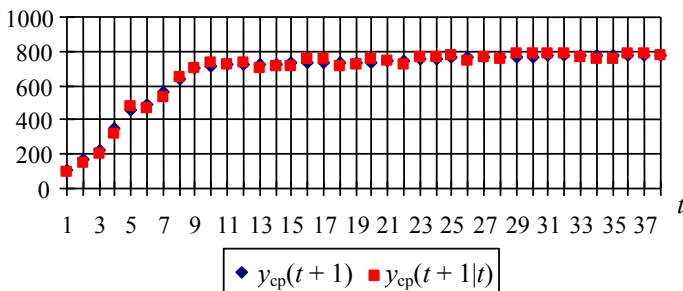


Рис. 4.5. Графическое представление наблюдений $y_{cp}(t+1)$ и их оценок $y_{cp}(t+1|t)$ при входном сигнале $U^{(0)}$ из табл. 4.7

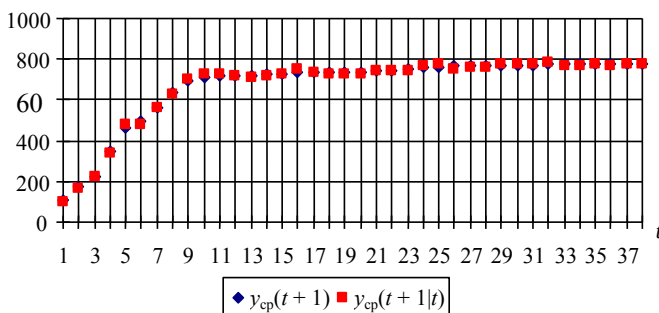


Рис. 4.6. Графическое представление наблюдений $y_{cp}(t+1)$ и их оценок $y_{cp}(t+1|t)$ при входном сигнале $U^{(5)} = U^*$ из табл. 4.7

4.1.2. Система управления электрокардиостимулятором

Рассмотрим теперь активную идентификацию *системы управления электрокардиостимулятором*. В большинстве случаев при нарушении сердечного ритма часть времени сердце продолжает сокращаться нормально. Поэтому стимулятор включается только тогда, когда это требуется. Он включается автоматически и стимулирует сердце до тех пор, пока оно не начнет биться в нормальном ритме.

Частота сердечных сокращений индивидуальна и зависит от возраста, национальности, конституции, образа жизни и профессии. У новорожденного сердце сокращается с частотой 140...180 в одну минуту. Затем с возрастом частота становится реже, и у взрослых нормальными считаются значения от 60 до 100 ударов сердца в минуту. При цифрах ниже 60 состояние трактуется как брадикардия, выше 100 – тахикардия. Поэтому выберем в качестве области планирования множество $\Omega_U = \{U \in R^N \mid 60 \leq u(t) \leq 100, t = 0, 1, \dots, N-1\}$ и шаг дискретизации $\Delta T = 1$ мин. Будем считать, что выполнены все указанные в гл. 2 априорные предположения, причем $Q = 0.2$ и $R = \theta_1$.

Структурная схема, включающая в себя кардиостимулятор и датчик частоты сердечных сокращений, соответствует рис. 4.1, если $a_1 = d_0 = d_2 = 0$, $b_0 = c_0 = d_1 = 1$, $b_1 = \frac{1}{12}$. Как и в модели бурильной машины, здесь $f_3 = b_1 d_2 = 0$, т. е. модель состояний становится двумерной и дискретный аналог системы (4.1), (4.2) со вторым неизвестным параметром $\theta_2 = a_0$, учитывающий помехи динамики и ошибки измерений, имеет вид:

$$\begin{pmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} w(t),$$

$$y(t+1) = x_1(t+1) + v(t+1), \quad t = 0, 1, \dots, N-1,$$

где

$$\varphi_{11} = e^\alpha \frac{\beta \cos \beta - (12 + \alpha) \sin \beta}{\beta}; \quad \varphi_{12} = e^\alpha \frac{\sin \beta}{\beta};$$

$$\varphi_{21} = -12\theta_2 e^{\alpha} \frac{\sin \beta}{\beta}; \quad \varphi_{22} = e^{\alpha} \frac{\beta \cos \beta - \alpha \sin \beta}{\beta};$$

$$\alpha = -6; \quad \beta = \sqrt{12\theta_2 - 36};$$

$$\psi_1 = \frac{12\theta_2}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{12\theta_2 e^{\alpha}}{\beta(\alpha^2 + \beta^2)} \alpha \sin \beta - \beta \cos \beta;$$

$$\psi_2 = -\frac{24\theta_2 \alpha}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{12\theta_2 e^{\alpha}}{\alpha^2 + \beta^2} \alpha \cos \beta + \beta \cos \beta - \frac{12\theta_2 \alpha e^{\alpha}}{\beta(\alpha^2 + \beta^2)} \alpha \sin \beta - \beta \cos \beta;$$

$$\gamma_1 = -\frac{\alpha + 1}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{e^{\alpha}}{\alpha^2 + \beta^2} \alpha \cos \beta + \beta \cos \beta - \frac{e^{\alpha}}{\beta(\alpha^2 + \beta^2)} \alpha \sin \beta - \beta \cos \beta;$$

$$\gamma_2 = -\frac{12(2\alpha + \theta_2)}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{12e^{\alpha}}{\alpha^2 + \beta^2} \alpha \cos \beta + \beta \cos \beta -$$

$$-\frac{12(\alpha + \theta_2)e^{\alpha}}{\beta(\alpha^2 + \beta^2)} \alpha \sin \beta - \beta \cos \beta.$$

Здесь $u(t)$ – заданная частота сердечных сокращений, которая заранее устанавливается при имплантации электрокардиостимулятора, измеряемая в ударах в минуту;

$y(t)$ – действительная частота сердечных сокращений, которая фиксируется посредством измерения пульса;

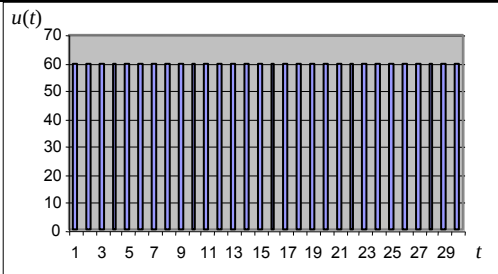
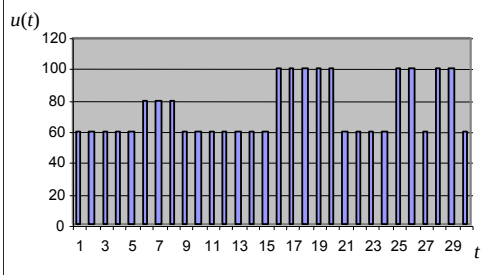
$w(t)$ – возмущения, вносимые в систему, в качестве которых могут выступать, например, ручные электроприборы, сотовые телефоны, находящиеся на расстоянии менее 10 см от места расположения электрокардиостимулятора,

Неизвестные параметры оценим методом наименьших квадратов. Для того чтобы ослабить зависимость результатов оценивания от выборочных данных, произведем пять независимых запусков системы и усредним полученные оценки неизвестных параметров. Реализации выходных сигналов получим компьютерным моделированием при истинных значениях параметра $\theta_1^* = 0.2$, $\theta_2^* = 10$ и $N = 52$ для временной области и $N = 30$ (установившийся режим) для частотной области.

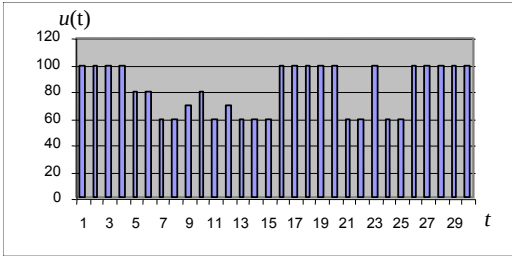
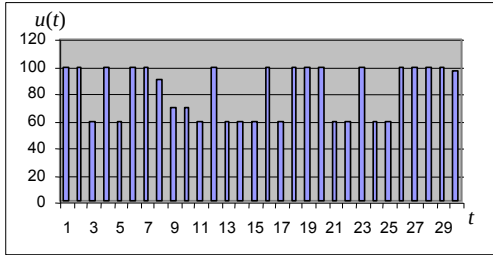
Представим пересчитанные во временную область полученные результаты с использованием различных процедур планирования и критериев оптимальности и дадим итерации процедуры активной идентификации в табл. 4.10–4.15.

Т а б л и ц а 4.10

Итерации процедуры активной идентификации модели электрокардиостимулятора (частотная область, прямая процедура синтеза, критерий D -оптимальности)

k	Исходный или синтезированный входной сигнал $U^{(k)}$	Обозначе- ние	Номер запуска системы					Средние значения по запус- кам
			1	2	3	4	5	
			Оценки и нормы ошибок оценива- ния					
0		$\hat{\theta}_1^{(k)}$	0.115	0.098	0.101	0.113	0.108	0.107
		$\hat{\theta}_2^{(k)}$	9.245	9.015	9.148	9.325	9.221	9.191
		$\ \theta^* - \hat{\theta}^{(k)}\ $	0.916	1.042	0.975	0.873	0.933	0.948
1		$\hat{\theta}_1^{(k)}$	0.126	0.175	0.138	0.162	0.168	0.153
		$\hat{\theta}_2^{(k)}$	9.345	9.389	9.445	9.545	9.501	9.445
		$\ \theta^* - \hat{\theta}^{(k)}\ $	0.853	0.797	0.785	0.702	0.729	0.774

О к о н ч а н и е т а б л. 4.10

k	Исходный или синтезированный входной сигнал $U^{(k)}$	Обозначе- ние	Номер запуска системы					Средние значения по запус- кам
			1	2	3	4	5	
			Оценки и нормы ошибок оценива- ния					
2		$\hat{\theta}_1^{(k)}$	0.173	0.188	0.183	0.185	0.215	0.188
		$\hat{\theta}_2^{(k)}$	9.785	9.789	9.666	9.745	9.74	9.745
		$\ \theta^* - \hat{\theta}^{(k)}\ $	0.492	0.472	0.593	0.519	0.495	0.514
3		$\hat{\theta}_1^{(k)}$	0.18	0.191	0.19	0.198	0.215	0.194
		$\hat{\theta}_2^{(k)}$	9.805	9.945	9.932	9.844	9.94	9.893
		$\ \theta^* - \hat{\theta}^{(k)}\ $	0.464	0.253	0.279	0.397	0.212	0.321

Из табл. 4.10 видно, что в результате применения процедуры активной идентификации в *частотной области* получены оптимальные оценки $\hat{\theta}_1^* = 0.194$ и $\hat{\theta}_2^* = 9.893$, которые лучше исходных в 3 раза в пространстве параметров. В пространстве откликов результаты улучшились 2.8 раза.

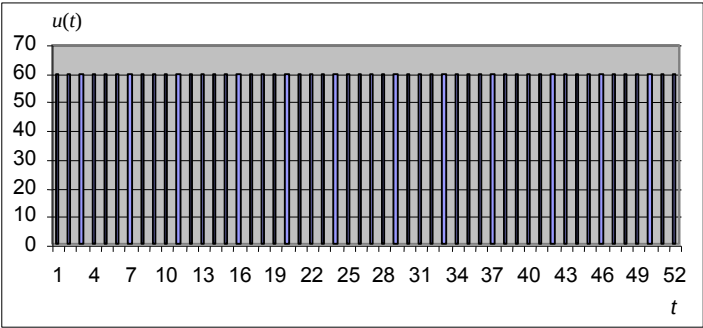
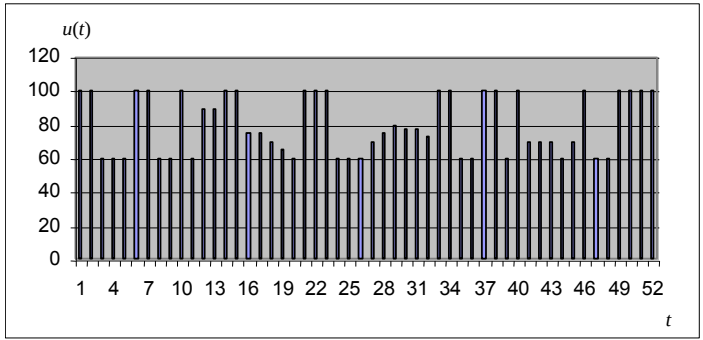
Т а б л и ц а 4.11

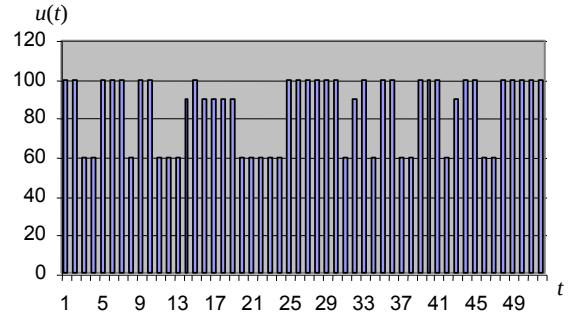
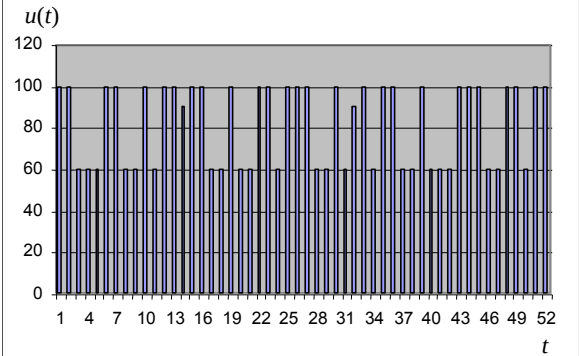
Оценки параметров на различных итерациях процедуры активной идентификации модели электрокардиостимулятора (временная область, прямая процедура синтеза, критерий D -оптимальности)

k	Обозначение	Номер запуска системы					Средние значения по запускам
		1	2	3	4	5	
		Оценки и нормы ошибок оценивания					
0	$\hat{\theta}_1^{(k)}$	0.449	0.45	0.515	0.521	0.479	0.483
	$\hat{\theta}_2^{(k)}$	9.645	9.585	9.512	9.577	9.598	9.583
	$\ \theta^* - \hat{\theta}^{(k)}\ $	0.326	0.406	0.416	0.319	0.351	0.363
1	$\hat{\theta}_1^{(k)}$	0.359	0.349	0.352	0.312	0.331	0.341
	$\hat{\theta}_2^{(k)}$	9.746	9.78	9.741	9.7	9.7	9.733
	$\ \theta^* - \hat{\theta}^{(k)}\ $	0.308	0.267	0.327	0.434	0.411	0.349
2	$\hat{\theta}_1^{(k)}$	0.449	0.45	0.515	0.521	0.479	0.483
	$\hat{\theta}_2^{(k)}$	9.645	9.585	9.512	9.577	9.598	9.583
	$\ \theta^* - \hat{\theta}^{(k)}\ $	0.326	0.406	0.416	0.319	0.351	0.363
3	$\hat{\theta}_1^{(k)}$	0.359	0.349	0.352	0.312	0.331	0.341
	$\hat{\theta}_2^{(k)}$	9.746	9.78	9.741	9.7	9.7	9.733
	$\ \theta^* - \hat{\theta}^{(k)}\ $	0.308	0.267	0.327	0.434	0.411	0.349

Таблица 4.12

Локально-оптимальные входные сигналы, соответствующие итерациям процедуры активной идентификации из табл. 4.11

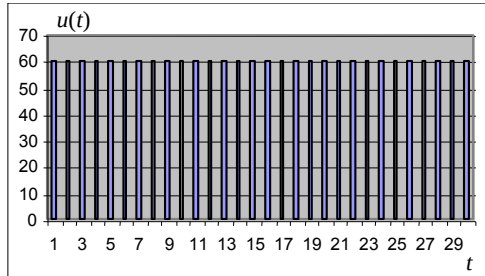
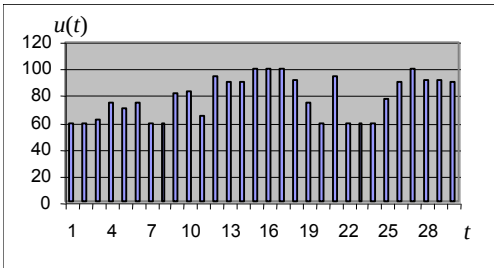
k	Исходный или синтезированный входной сигнал $U^{(k)}$
0	
1	

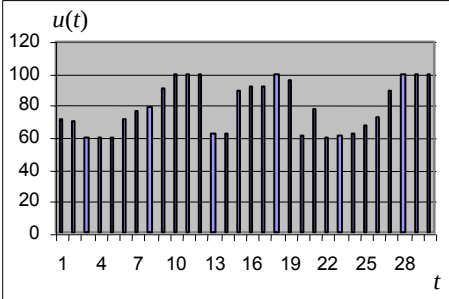
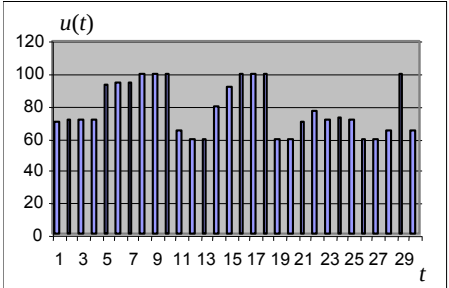
k	Исходный или синтезированный входной сигнал $U^{(k)}$
2	
3	

Из табл. 4.11 видно, что в результате применения процедуры активной идентификации во *временной области* получены оптимальные оценки $\hat{\theta}_1^* = 0.242$ и $\hat{\theta}_2^* = 9.904$, которые лучше исходных в 1.6 раза в пространстве параметров. В пространстве откликов результаты улучшились в 1.2 раза.

Т а б л и ц а 4.13

Итерации процедуры активной идентификации модели электрокардиостимулятора (частотная область, двойственная процедура синтеза, критерий А-оптимальности)

k	Исходный или синтезированный входной сигнал $U^{(k)}$	Обозначе- ние	Номер запуска системы					Средние значения по за- пускам
			1	2	3	4	5	
			Оценки и нормы ошибок оценивания					
0		$\hat{\theta}_1^{(k)}$	0.444	0.478	0.429	0.4	0.402	0.431
		$\hat{\theta}_2^{(k)}$	9.236	9.445	9.405	9.339	9.499	9.385
		$\ \theta^* - \hat{\theta}^{(k)}\ $	0.721	0.526	0.605	0.679	0.547	0.616
1		$\hat{\theta}_1^{(k)}$	0.326	0.344	0.319	0.302	0.298	0.318
		$\hat{\theta}_2^{(k)}$	9.512	9.632	9.695	9.701	9.7	9.648
		$\ \theta^* - \hat{\theta}^{(k)}\ $	0.602	0.473	0.413	0.444	0.449	0.48

2		$\hat{\theta}_1^{(k)}$	0.245	0.218	0.229	0.28	0.214	0.237
		$\hat{\theta}_2^{(k)}$	0.275	0.297	0.278	0.319	0.331	0.3
		$\ \theta^* - \hat{\theta}^{(k)}\ $	0.163	0.149	0.148	0.214	0.173	0.199
3		$\hat{\theta}_1^{(k)}$	0.219	0.197	0.205	0.211	0.197	0.205
		$\hat{\theta}_2^{(k)}$	0.255	0.26	0.269	0.275	0.301	0.272
		$\ \theta^* - \hat{\theta}^{(k)}\ $	0.13	0.114	0.125	0.132	0.141	0.128

Из табл. 4.13 видно, что в результате применения процедуры активной идентификации в *частотной области* получены оптимальные оценки $\hat{\theta}_1^* = 0.207$ и $\hat{\theta}_2^* = 9.918$, которые лучше исходных в 2.3 раза в пространстве параметров. В пространстве откликов результаты улучшились в 2.1 раза.

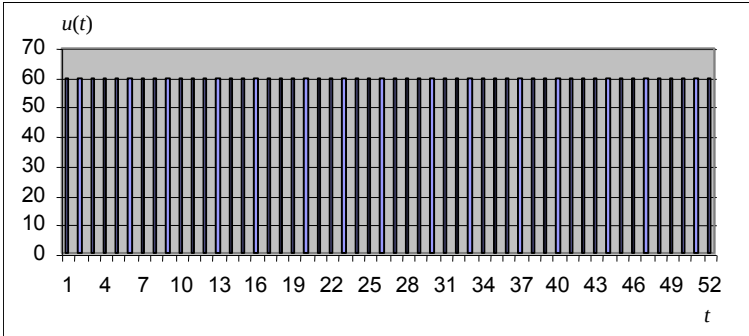
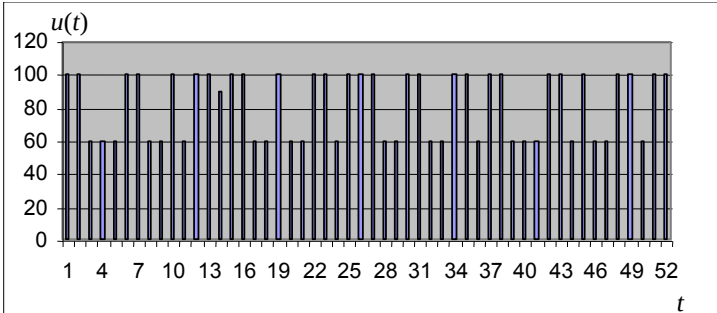
Таблица 4.14

Оценки параметров на различных итерациях процедуры активной идентификации модели электрокардиостимулятора (временная область, двойственная процедура синтеза, критерий *A*-оптимальности)

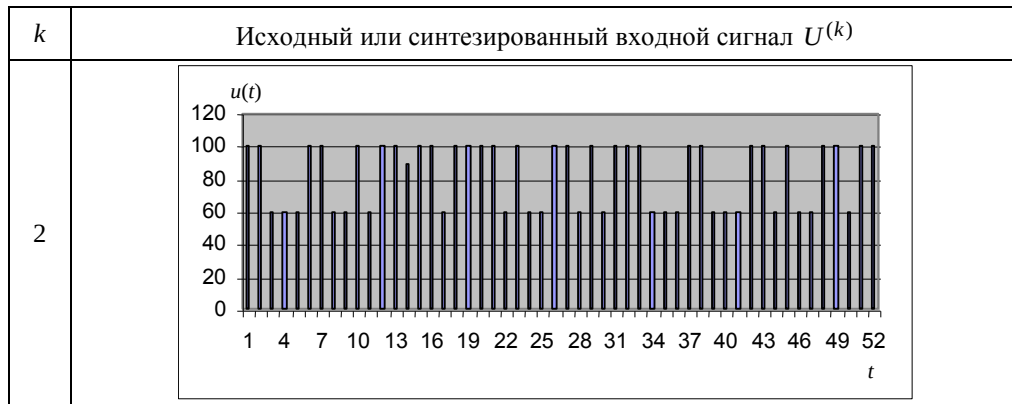
k	Обозначение	Номер запуска системы					Средние значения по запускам
		1	2	3	4	5	
		Оценки и нормы ошибок оценивания					
0	$\hat{\theta}_1^{(k)}$	0.35	0.322	0.298	0.35	0.322	0.328
	$\hat{\theta}_2^{(k)}$	9.458	9.554	9.578	9.483	9.47	9.509
	$\ \theta^* - \hat{\theta}^{(k)}\ $	0.626	0.569	0.569	0.606	0.639	0.602
1	$\hat{\theta}_1^{(k)}$	0.312	0.299	0.293	0.287	0.25	0.288
	$\hat{\theta}_2^{(k)}$	9.689	9.754	9.658	9.73	9.737	9.714
	$\ \theta^* - \hat{\theta}^{(k)}\ $	0.446	0.383	0.499	0.428	0.462	0.444
2	$\hat{\theta}_1^{(k)}$	0.274	0.251	0.2	0.234	0.222	0.236
	$\hat{\theta}_2^{(k)}$	9.802	9.839	9.912	9.948	9.921	9.884
	$\ \theta^* - \hat{\theta}^{(k)}\ $	0.352	0.332	0.297	0.134	0.239	0.27

Т а б л и ц а 4.15

Локально-оптимальные входные сигналы, соответствующие итерациям процедуры активной идентификации из табл. 4.14

k	Исходный или синтезированный входной сигнал $U^{(k)}$
0	
1	

Окончание табл. 4.15



Из табл. 4.14 видно, что в результате применения процедуры активной идентификации во *временной области* получены оптимальные оценки $\hat{\theta}_1^* = 0.236$ и $\hat{\theta}_2^* = 9.884$, которые лучше исходных в 2.2 раза в пространстве параметров. В пространстве откликов результаты улучшились в 1.9 раза.

По результатам табл. 4.10–4.15 видно, что как по критерию D -оптимальности, так и по критерию A -оптимальности оказалась эффективнее процедура активной идентификации в **частотной области**. При этом во временной области оказался эффективнее критерий A -оптимальности, а в частотной области – критерий D -оптимальности. Оценки неизвестных параметров удалось улучшить от 1.6 до 3 раз в пространстве параметров и от 1.2 до 2.8 раза в пространстве откликов.

Поскольку оценки, полученные в частотной области с применением критерия D -оптимальности лучше согласуются с истинными значениями параметров (см. табл. 4.10), графически представим результаты в пространстве откликов на рис. 4.7, 4.8.

По результатам приведенных в данном разделе расчетов можно сделать следующие **выводы**.

1. В зависимости от выбранных модельных структур, критериев идентификации и оптимальности, качество оценивания удалось улучшить от 2.6 (см., например, табл. 4.8) до 10.2 (см., например, табл. 4.14) раза в пространстве параметров и от 1.7 (см., например, табл. 4.8) до 6.3 (см., например, табл. 4.3) раза в пространстве откликов, что позволяет говорить о **целесообразности и эффективности применения процедур активной идентификации** как во временной, так и в частотной области.

2. Поскольку для различных модельных структур более эффективными могут оказаться процедуры активной идентификации как во

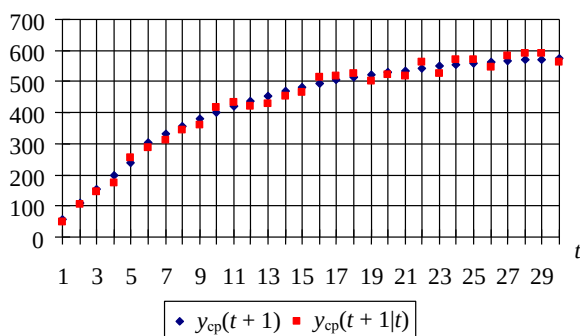


Рис. 4.7. Графическое представление наблюдений $y_{cp}(t+1)$ и их оценок $\hat{y}_{cp}(t+1)$ при входном сигнале

$U^{(0)}$ из табл. 4.10

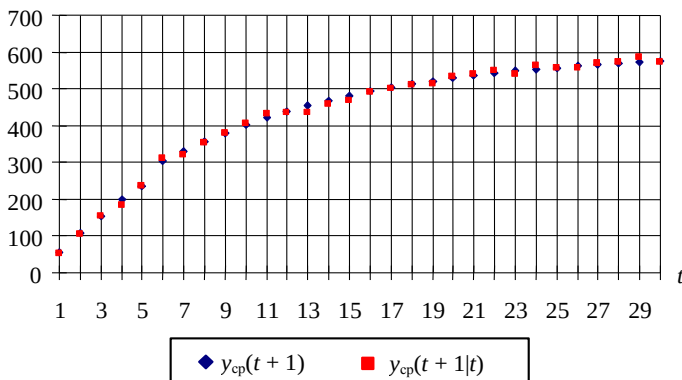


Рис. 4.8. Графическое представление наблюдений $y_{cp}(t+1)$

и их оценок $\hat{y}_{cp}(t+1)$ при входном сигнале $U^{(2)} = U^*$ из табл. 4.10

временной области (см., например, табл. 4.7), так и в частотной области (см., например, табл. 4.1), **не представляется возможным рекомендовать исследователю применять процедуру активной идентификации в какой-либо одной конкретной области.**

3. В силу того, что для одних модельных структур предпочтительнее оказался критерий A -оптимальности (см., например, табл. 4.13, 4.14), а для других — критерий D -оптимальности (см., например, табл. 4.3, 4.4), экспериментатору можно порекомендовать **использовать процедуры планирования по различным критериям оптимальности.**

4.2. Непрерывно-дискретные системы

4.2.1. Система регулирования температуры в жилом помещении

Начнем с примера планирования D -оптимальных входных сигналов для стохастической модели, описывающей процесс изменения температуры в двухкомнатной квартире со смежными комнатами и нагревателем,

расположенным в первой из них [69] (соответствующая детерминированная модель приведена в [70, с. 332]):

$$\dot{x} \ t = \begin{bmatrix} -\frac{k}{Cm_1} - k_1 & k_1 \\ k_1 & -\frac{k}{Cm_2} - k_1 \end{bmatrix} x \ t + \begin{bmatrix} \frac{1}{Cm_1} \\ 0 \end{bmatrix} u \ t + \begin{bmatrix} \frac{kx_e}{Cm_1} \\ \frac{kx_e}{Cm_2} \end{bmatrix} w \ t, \quad t \in t_0, T. \quad (4.3)$$

Здесь $x_i \ t$ – температура воздуха ($^{\circ}\text{C}$) в i -й комнате ($i=1, 2$);

$u \ t$ – управление количеством теплоты (кДж/мин), выделяемой нагревателем;

$w \ t$ – помехи, обусловленные влиянием внешней среды; t – время (мин);

$C=1$ кДж/ кг $\cdot^{\circ}\text{C}$ – теплоемкость воздуха;

$m_1=57.6$ кг, $m_2=72$ кг – массы воздуха в комнатах;

$x_e=5^{\circ}\text{C}$ – температура наружного воздуха;

k – параметр, характеризующий потери за счет конвенции ($k > 0$);

k_1 – коэффициент теплообмена между комнатами.

Будем считать, что $\theta_1=k$ и $\theta_2=k_1$.

Дополним модель состояния следующей моделью наблюдения, исходя из возможности измерять значение температуры в дискретные моменты времени в каждой из комнат:

$$\begin{bmatrix} y_1 \ t_k \\ y_2 \ t_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \ t_k \\ x_2 \ t_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \ t_k \\ v_2 \ t_k \end{bmatrix}, \quad k=1, 2, \dots, 25, \quad (4.4)$$

где $v_i \ t_k$ – соответствующая компонента вектора ошибок измерения.

Модель (4.3), (4.4) удовлетворяет требованиям управляемости, наблюдаемости, устойчивости и является частным случаем стохастической модели (2.22). Будем считать, что априорные предположения, приведенные в п. 2.2.1, выполнены и

$$Q=0.1; \quad R=\begin{bmatrix} 0.25 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix}; \quad \bar{x}_0=\begin{bmatrix} 10 \\ 15 \end{bmatrix}; \quad P_0=\begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

Необходимо синтезировать в соответствии с выбранным критерием оптимальности входной сигнал, который позволит нам повысить точ-

ность оценивания неизвестных параметров θ_1 и θ_2 , функционально входящих в элементы матрицы F и Γ модели состояния.

Решать задачу будем с учетом того, что управление количеством теплоты $u(t)$ удовлетворяет неравенству $10^{-3} \leq u(t) \leq 60$, $t \in [0, 25]$. Ограничение сверху связано с тем, что при подаче $u(t) = 60$ кДж/мин на всем интервале управления температура воздуха в комнатах становится близкой к выбранному максимально допустимому значению 28°C .

На соседние моменты управления наложим ограничение вида $\tau_i \leq \tau_{i+1} - 0.05$ – управляющий сигнал может подаваться на вход системы не чаще, чем раз в 3 секунды, связанное с предполагаемыми физическими характеристиками нагревателя.

В качестве оценок неизвестных параметров выберем следующие значения: $\hat{\Theta} = 0.2, 0.8$.

Вычислим информационную матрицу Фишера и ее определитель при единичном управляющем сигнале и зафиксированных значениях $\hat{\Theta}$:

$$M(u(t), \hat{\Theta}) = 10^4 \begin{bmatrix} 1.454 & -0.137 \\ -0.137 & 0.014 \end{bmatrix},$$

$$\det M(u(t), \hat{\Theta}) = 1.402 \cdot 10^5.$$

Следуя методике, изложенной в [71, 72], рассмотрим задачи с дискретным временем:

$$u^* \tau_k = \arg \min_{u \tau_1, \dots, u \tau_{N-1}} X \left[M(u \tau_1, \dots, u \tau_{N-1}, \hat{\Theta}) \right] \quad (4.6)$$

или

$$u^* \tau_k^* = \arg \min_{u \tau_1, \dots, u \tau_{N-1}, \tau_1, \dots, \tau_{N-1}} X \left[M(u \tau_1, \dots, u \tau_{N-1}, \tau_1, \dots, \tau_{N-1}, \hat{\Theta}) \right], \quad (4.7)$$

при этом будем искать оптимальное в смысле выбранного критерия X · управление $u(t)$ в классе кусочно-постоянных функций.

Полученные D -оптимальные входные сигналы приведены в табл. 4.16, 4.17 и представлены на рис. 4.9, 4.10.

Т а б л и ц а 4.16
Синтезированный *D*-оптимальный
входной сигнал $u^* \tau_k$ для модели
(4.3), (4.4)

k	τ_k	$u^* \tau_k$
1	0	60.00
2	1	38.80
3	2	31.67
4	3	28.82
5	4	27.23
6	5	25.75
7	6	24.32
8	7	22.82
9	8	21.25
10	9	19.63
11	10	17.97
12	11	16.28
13	12	14.59
14	13	12.92
15	14	11.29
16	15	9.70
17	16	8.21
18	17	6.77
19	18	5.46
20	19	4.29
21	20	3.26
22	21	2.43
23	22	1.98
24	23	1.67
25	24	1.50

Т а б л и ц а 4.17
Синтезированный *D*-оптимальный
входной сигнал $u^* \tau_k^*$ для моде-
ли (4.3), (4.4)

k	τ_k^*	$u^* \tau_k^*$
1	0.05	60.00
2	0.10	60.00
3	8.32	60.00
4	9.36	59.94
5	9.41	60.00
6	12.39	60.00
7	13.77	60.00
8	14.93	57.28
9	14.98	60.00
10	18.87	60.00
11	22.11	51.72
12	23.69	40.22
13	23.74	37.85
14	24.05	31.22
15	24.10	27.15
16	24.36	22.80
17	24.44	19.06
18	24.58	15.83
19	24.65	12.37
20	24.70	8.86
21	24.75	6.86
22	24.80	4.65
23	24.85	3.02
24	24.90	1.75
25	24.95	1.60

Значение информационной матрицы и ее определителя после решения задачи оптимизации (4.6):

$$M_{u^* \tau_k}, \hat{\Theta} = 10^6 \begin{bmatrix} 6.088 & -0.314 \\ -0.314 & 0.016 \end{bmatrix},$$

$$\det M_{u^* \tau_k}, \hat{\Theta} = 5.712 \cdot 10^7.$$

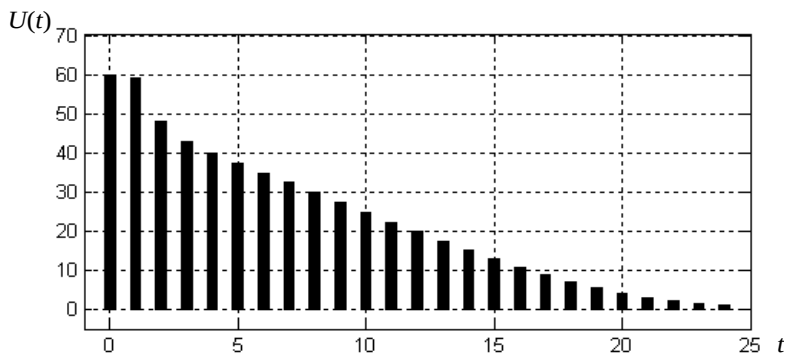


Рис. 4.9. Оптимальный входной сигнал $u^* \tau_k$ для модели (4.3), (4.4)

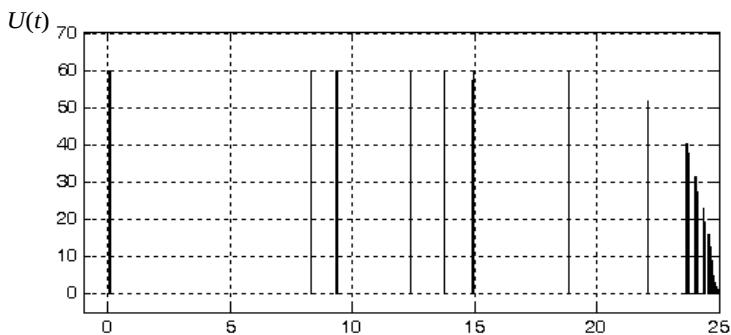


Рис. 4.10. Оптимальный входной сигнал $u^* \tau_k^*$ для модели (4.3), (4.4)

Значение информационной матрицы и ее определителя после решения задачи оптимизации (4.7):

$$M_{u^* \tau_k^*}, \hat{\Theta} = 10^7 \begin{bmatrix} 1.762 & -0.089 \\ -0.089 & 0.005 \end{bmatrix},$$

$$\det M_{u^* \tau_k^*}, \hat{\Theta} = 4.305 \cdot 10^8.$$

Проанализировав приведенные результаты, можно сделать вывод об **эффективности планирования оптимального входного сигнала**

вместе с моментами времени, в которые подается этот сигнал. В этом случае наблюдается увеличение определителя информационной матрицы на три порядка по сравнению со значением для неоптимального сигнала u $t = 1$. При планировании только оптимального входного сигнала значение определителя увеличивается на два порядка.

Приведем теперь результаты применения процедуры активной идентификации для стохастической модели динамической системы, описывающей процесс изменения температуры и определяемой уравнениями (4.3), (4.4), следуя [69, 73].

В соответствии с алгоритмом из [74] смоделируем при u $t = 1$, $t \in 0, 25$ выборку измерений $Y_1^{25} = y_{t_1}, y_{t_2}, \dots, y_{t_{25}}$, считая истинными значения параметров $\theta_{\text{ист}} = 0.2$, $\theta_{2\text{ист}} = 0.8$.

Найдем оценки максимального правдоподобия $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$, используя которые осуществим поиск D -оптимальных входных сигналов посредством решения оптимизационных задач (4.6) и (4.7) (обозначим их через $u^* t = u \tau_k$, $\tau_k \leq t \leq \tau_{k+1}$, $k = 1, 2, \dots, 24$ и $u^{**} t = u \tau_k^*$, $\tau_k^* \leq t \leq \tau_{k+1}^*$, $k = 1, 2, \dots, 24$ соответственно), а также D - и A -оптимальных сигналов с использованием прямой и двойственной градиентных процедур ($u^{***}(t)$ – D -оптимальный входной сигнал, найденный с использованием прямой градиентной процедуры; $u^{****}(t)$ – A -оптимальный входной сигнал, найденный с использованием двойственной градиентной процедуры). Найденные входные сигналы представим на рис. 4.11–4.14.

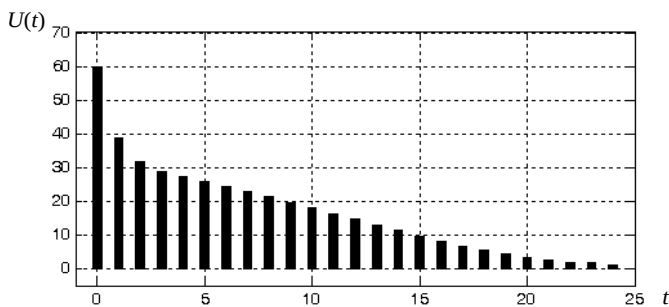


Рис. 4.11. D -оптимальный входной сигнал $u^* t$ для модели (4.3), (4.4)

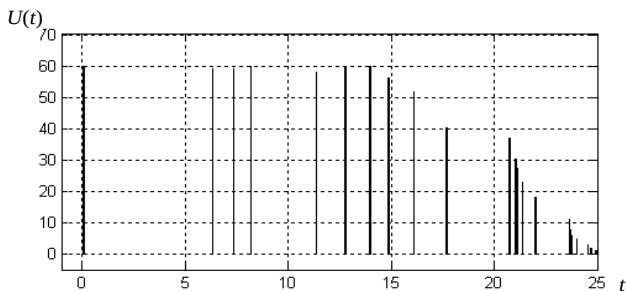


Рис. 4.12. D-оптимальный входной сигнал $u^{**} t$ для модели (4.3), (4.4)

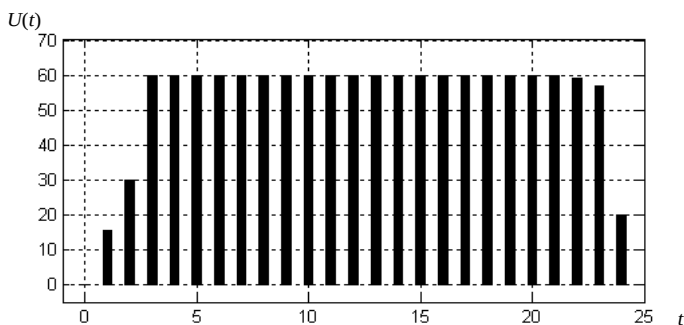


Рис. 4.13. D-оптимальный входной сигнал $u^{***} t$ для модели (4.3), (4.4)

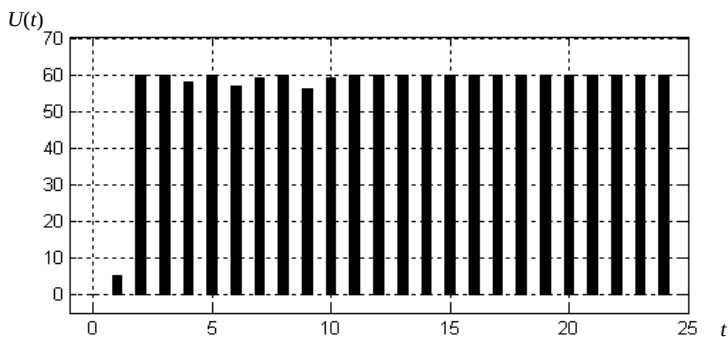


Рис. 4.14. A-оптимальный входной сигнал $u^{****} t$ для модели (4.3), (4.4)

Теперь мы имеем возможность вычислить и сравнить оценки, найденные с использованием пяти различных управляющих сигналов (включая начальный), а также сравнить прогнозируемые отклики системы.

Для того чтобы ослабить зависимость результатов оценивания от выборочных данных, произведем пять независимых запусков системы и усредним полученные оценки неизвестных параметров. Результаты представим в табл. 4.18.

Т а б л и ц а 4.18

Оценки неизвестных параметров модели (4.3), (4.4), полученные при различных управляющих сигналах

Входной сигнал	Обозначение	Номер запуска системы					Усредненные значения
		1	2	3	4	5	
		Оценки и нормы ошибок оценивания					
$u_0 \quad t = 1$	$\hat{\theta}_1$	0.13	0.32	0.20	0.21	0.16	0.2040
	$\hat{\theta}_2$	0.90	1.85	0.79	1.25	1.70	1.2980
	$\ \hat{\Theta} - \Theta_{\text{ист}}\ $	0.12	1.06	0.01	0.45	0.90	0.4992
$u^* \quad t$	$\hat{\theta}_1^*$	0.20	0.12	0.22	0.40	0.24	0.2360
	$\hat{\theta}_2^*$	0.64	0.60	1.99	0.29	0.76	0.8560
	$\ \hat{\Theta}^* - \Theta_{\text{ист}}\ $	0.16	0.22	1.19	0.55	0.06	0.0648
$u^{**} \quad t$	$\hat{\theta}_1^{**}$	0.16	0.22	0.34	0.19	0.19	0.2200
	$\hat{\theta}_2^{**}$	1.33	0.69	0.89	0.45	0.71	0.8140
	$\ \hat{\Theta}^{**} - \Theta_{\text{ист}}\ $	0.53	0.11	0.17	0.35	0.09	0.0244
$u^{***} \quad t$	$\hat{\theta}_1^{***}$	0.17	0.21	0.19	0.15	0.20	0.1840
	$\hat{\theta}_2^{***}$	0.83	0.64	0.83	1.01	0.57	0.7760
	$\ \hat{\Theta}^{***} - \Theta_{\text{ист}}\ $	0.04	0.16	0.03	0.22	0.23	0.0288
$u^{****} \quad t$	$\hat{\theta}_1^{****}$	0.22	0.19	0.17	0.15	0.16	0.1780
	$\hat{\theta}_2^{****}$	0.81	0.98	0.83	0.73	0.78	0.8260
	$\ \hat{\Theta}^{****} - \Theta_{\text{ист}}\ $	0.02	0.18	0.04	0.09	0.04	0.0340

Сравнивая по табл. 4.18 усредненные евклидовы нормы разностей истинных значений параметров и оценок, соответствующих указанным управляющим сигналам, заметим, что наиболее точные оценки получены при D -оптимальном входном сигнале $u^{**} t$, когда оптимизация проводилась по моментам времени, в которые подается управляющий сигнал вместе со значениями управляющего сигнала, и при входном сигнале $u^{***} t$, найденном с помощью прямой градиентной процедуры.

Наименее точные оценки получены при исходном входном сигнале $u t = 1, \forall t \in t_0, T$. При этом применение процедуры планирования эксперимента позволило улучшить качество оценивания неизвестных параметров, в смысле отклонения полученных оценок от истинных значений:

- для $u t = u^{*} t$ в

$$\frac{\|\hat{\Theta} - \Theta_{\text{ист}}\|}{\|\hat{\Theta}^{*} - \Theta_{\text{ист}}\|} \approx 8 \quad (4.8)$$

раз;

- для $u t = u^{**} t$; в

$$\frac{\|\hat{\Theta} - \Theta_{\text{ист}}\|}{\|\hat{\Theta}^{**} - \Theta_{\text{ист}}\|} \approx 20 \quad (4.9)$$

раз;

- для $u t = u^{***} t$ в

$$\frac{\|\hat{\Theta} - \Theta_{\text{ист}}\|}{\|\hat{\Theta}^{***} - \Theta_{\text{ист}}\|} \approx 17 \quad (4.10)$$

раз;

- для $u t = u^{****} t$ в

$$\frac{\|\hat{\Theta} - \Theta_{\text{ист}}\|}{\|\hat{\Theta}^{****} - \Theta_{\text{ист}}\|} \approx 14 \quad (4.11)$$

раз.

Убедившись в эффективности применения процедуры активной идентификации в пространстве параметров, посмотрим, что происходит в пространстве откликов.

Смоделируем наблюдения $Y = y_i t_k, i=1, \dots, m; k=1, \dots, N$ и вычислим прогнозируемые отклики системы $\hat{Y} = \hat{y}_i t_{k+1}|t_k, i=1, \dots, m; k=0, \dots, N-1$ при истинных значениях неизвестных параметров и двух различных входных сигналах $u_0 t$ и $u^{**} t$. Данные входные сигналы выбраны из тех соображений, что с их помощью получены наименее и наиболее точные оценки неизвестных параметров соответственно. Обозначим через Y_0 и $\hat{Y}_0$ – наблюдения и их оценки для $u t = u_0 t$, Y^{**} и $\hat{Y}^{**}$ – наблюдения и их оценки для $u t = u^{**} t$. Результаты представим в табл. 4.19.

Вычислив евклидовы нормы разностей $\|\hat{Y}_0 - Y_0\|$ и $\|\hat{Y}^{**} - Y^{**}\|$, получим:

$$\|\hat{Y}_0 - Y_0\| = 5.09,$$

$$\|\hat{Y}^{**} - Y^{**}\| = 3.94.$$

Видно, что отклик $\hat{Y}^{**}$ лучше согласуется с вектором измерений, по сравнению с откликом $\hat{Y}_0$, что также можно заметить по рис. 4.15 и 4.16.

Таким образом, применяя процедуру активной идентификации, нам удалось повысить точность оценок неизвестных параметров до 20 раз. Кроме того, мы смогли более эффективно спрогнозировать отклики системы. Использование синтезированных оптимальных входных сигналов позволило получить прогнозируемые отклики, более близкие к вектору измерений, чем прогнозируемые отклики, вычисленные при исходном, неоптимальном входном сигнале. Соответствующие нормы разностей уменьшились в

$$\frac{\|\hat{Y}_0 - Y_0\|}{\|\hat{Y}^{**} - Y^{**}\|} \approx 1.3 \quad (4.12)$$

раза для $u(t) = u^{**}(t)$, что позволяет сделать вывод о целесообразности применения процедуры активной идентификации для повышения качества оценивания как в пространстве параметров, так и в пространстве откликов.

Таблица 4.19

Наблюдения Y и их оценки $\hat{Y}$, полученные при управляющих сигналах $u_0(t)$ и $u^{}(t)$**

k	Y_0		$\hat{Y}_0$		Y^{**}		$\hat{Y}^{**}$	
0	11.13	12.23	13.06	12.04	13.38	11.15	13.79	12.27
1	12.15	12.27	12.45	12.24	13.71	13.47	13.79	12.95
2	12.46	11.94	12.39	12.34	14.64	13.38	14.32	13.63
3	11.18	11.80	12.40	12.37	14.24	14.28	14.87	14.20
4	11.87	11.57	12.31	12.29	14.82	14.70	15.37	14.72
5	11.92	12.57	12.28	12.26	14.39	14.69	15.89	15.23
6	12.26	11.82	12.32	12.31	15.74	15.53	16.32	15.66
7	11.36	11.20	12.34	12.33	15.95	16.51	16.83	16.18
8	12.22	11.34	12.29	12.28	17.23	15.43	17.35	16.70
9	11.57	11.11	12.30	12.28	17.71	16.99	17.84	17.18
10	11.80	11.67	12.27	12.26	17.51	17.63	18.37	17.71
11	11.87	10.80	12.28	12.27	18.61	17.95	18.88	18.22
12	11.41	11.68	12.27	12.25	19.25	17.81	19.40	18.74
13	11.17	11.34	12.27	12.26	20.06	19.03	19.90	19.25
14	11.21	11.24	12.26	12.25	19.20	19.05	20.43	19.78
15	12.06	11.34	12.25	12.24	20.83	19.46	20.92	20.26
16	11.00	12.20	12.27	12.26	21.04	20.63	21.43	20.77
17	11.52	11.84	12.29	12.27	20.77	21.11	21.94	21.29
18	11.54	10.50	12.31	12.29	22.13	22.12	22.44	21.79
19	11.37	10.71	12.30	12.28	22.22	21.38	22.97	22.32
20	11.69	11.08	12.30	12.28	23.50	22.05	23.46	22.81
21	11.37	10.57	12.31	12.29	22.94	22.37	23.97	23.32
22	11.06	10.85	12.30	12.29	23.33	21.88	24.36	23.78
23	10.52	11.31	12.30	12.28	23.99	23.50	24.69	24.18
24	11.11	10.80	12.30	12.28	23.77	22.69	24.68	24.46

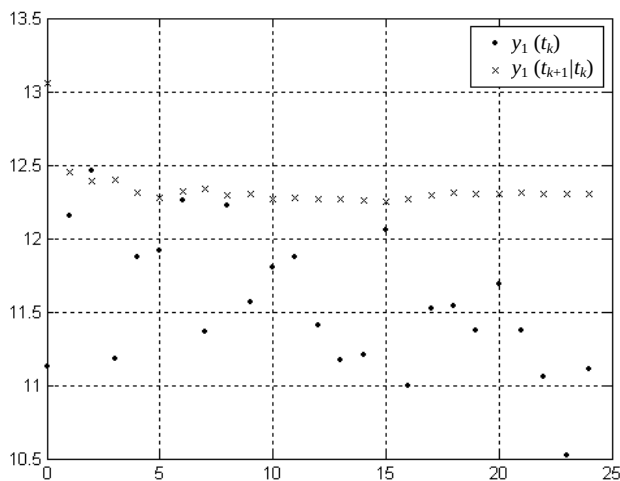


Рис. 4.15. Графическое представление первых компонент векторов наблюдений Y_0 и их оценок $\hat{Y}_0$ при входном сигнале u_0 t из табл. 4.19

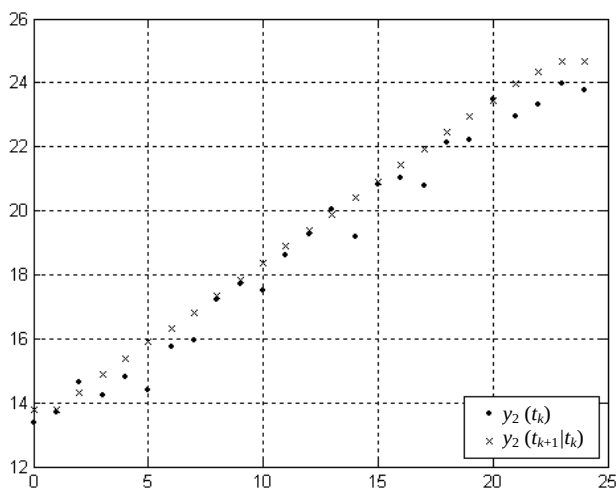


Рис. 4.16. Графическое представление первых компонент векторов наблюдений Y^{**} и их оценок $\hat{Y}^{**}$ при входном сигнале u^{**} t из табл. 4.19

4.2.2. Система управления боковым движением автобуса

Следуя [73], рассмотрим пример планирования D -оптимальных входных сигналов для стохастической модели, описывающей процесс управления боковым движением автобуса (соответствующая детерминированная модель приведена в [70, с. 558]):

$$\dot{x} \ t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & a_{25} \\ 1/q_1 & 0 & 0 & 1/q_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x \ t + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \ t + w \ t, \quad t \in t_0, T; \quad (4.13)$$

$$y \ t_k = 0, 0, 1, l_s, 0 \ x \ t_k + v \ t_k, \quad k=1, 2, \dots, N, \quad (4.14)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= -2q_1q_2 \delta_F + \delta_R, \quad a_{12} = -1 - 2q_1^2q_2 \delta_F l_F - \delta_R l_R, \\ a_{21} &= -2q_2 \delta_F l_F - \delta_R l_R / C, \quad a_{22} = -2q_1q_2 \delta_F l_F^2 + \delta_R l_R^2 / C, \\ a_{15} &= 2q_1q_2 \delta_F, \quad a_{25} = 2q_2 \delta_F l_F / C. \end{aligned}$$

Переменные в модели имеют следующий смысл: $x_1 \ t$ – угол скольжения в центре масс автобуса; $x_2 \ t$ – скорость сноса; $x_3 \ t$ – расстояние от центра масс автобуса до направления движения; $x_4 \ t$ – угол сноса; $x_5 \ t$ – угол поворота передних колес; $u \ t$ – усилие на гидравлическом приводе поворота передних колес; $y \ t_k$ – расстояние от переднего датчика автобуса до направления движения; $w \ t$ – помехи, связанные с влиянием внешней среды; $v \ t_k$ – ошибки измерения.

Параметры автобуса таковы: $l_s = 6$ м – расстояние от переднего датчика до центра масс; $l_F = 3.67$ м – расстояние от переднего вала до центра масс; $l_R = 1.93$ м – расстояние от заднего вала до центра масс;

$\delta_F = 99$ кН/рад – коэффициент боковой силы сноса, действующей на передние колеса; $\delta_R = 235$ кН/рад – коэффициент боковой силы сноса, действующей на задние колеса; $C = J/m = 10,86$ м²; J – момент инерции автобуса по отношению к вертикальной оси, проходящей через центр масс; $m = 16$ т – масса автобуса; $s = 20$ м/с – скорость движения автобуса; $\mu = 1$ – коэффициент трения (при сухой дороге); $q_1 = 1/s$ – величина, обратная скорости движения автобуса; $q_2 = \mu/m$ – отношение коэффициента трения к массе автобуса.

При этом условия комфортности для пассажиров автобуса и технические требования приводят к следующим ограничениям:

$$|u \ t| \leq 23 \text{ град/с.}$$

Заметим, что уравнение (4.13) является неустойчивым, так как нулевому собственному значению матрицы состояния соответствует кратный элементарный делитель [70, с. 32]. Обеспечим асимптотическую устойчивость уравнения состояния введением в систему управления регулятора.

Поскольку уравнению (4.13) без учета помех динамики соответствует передаточная функция

$$W_1 \ p = \frac{a_0 p^2 + a_1 p + a_2}{p^5 + b_1 p^4 + b_2 p^3},$$

в которой

$$a_0 = 20a_{15} + 6a_{25},$$

$$a_1 = 20 \ a_{12}a_{25} + a_{25} - a_{22}a_{15} + 6 \ a_{21}a_{15} - a_{11}a_{21} \ ,$$

$$a_2 = 20 \ a_{21}a_{15} - a_{25}a_{11} \ ,$$

$$b_1 = -a_{22} - a_{11},$$

$$b_2 = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \ ,$$

выберем параметры регулятора следующими:

$$W_2 \ p = \frac{0.25 p^2 + p + 1}{0.0025 p^2 + 0.1 p + 1}.$$

Образую контур с единичной отрицательной обратной связью, запишем результирующую передаточную функцию:

$$W(p) = \frac{W_1(p) W_2(p)}{1 + W_1(p) W_2(p)} = \frac{\alpha_0 p^4 + \alpha_1 p^3 + \alpha_2 p^2 + \alpha_3 p + \alpha_4}{\beta_0 p^7 + \beta_1 p^6 + \beta_2 p^5 + \beta_3 p^4 + \beta_4 p^3 + \beta_5 p^2 + \beta_6 p + \beta_7}.$$

Здесь $\alpha_0 = 0.25a_0$; $\alpha_1 = a_0 + 0.25a_1$; $\alpha_2 = a_0 + a_1 + 0.25a_2$;
 $\alpha_3 = a_1 + a_2$; $\alpha_4 = a_2$;
 $\beta_0 = 0.0025$; $\beta_1 = 0.1 + 0.0025b_1$; $\beta_2 = 1 + 0.1b_1 + 0.0025b_2$;
 $\beta_3 = b_1 + 0.1b_2 + 0.25a_0$; $\beta_4 = b_2 + a_0 + 0.25a_1$;
 $\beta_5 = a_0 + a_1 + 0.25a_2$; $\beta_6 = a_1 + a_2$; $\beta_7 = a_2$.

В пространстве состояний передаточной функции $W(p)$ с учетом помех динамики соответствует уравнение:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -\beta_1/\beta_0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta_2/\beta_0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta_3/\beta_0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\beta_4/\beta_0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta_5/\beta_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\beta_6/\beta_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\beta_7/\beta_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_0/\beta_0 \\ \alpha_1/\beta_0 \\ \alpha_2/\beta_0 \\ \alpha_3/\beta_0 \\ \alpha_4/\beta_0 \end{bmatrix} u(t) + w(t), \quad t \in [t_0, T]. \quad (4.15)$$

Дополнив (4.15) уравнением наблюдений

$$y(t_k) = 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \cdot x(t_k) + v(t_k), \quad k=1, 2, \dots, N, \quad (4.16)$$

получим окончательный вариант модели, описывающей процесс управления боковым движением автобуса. Данная модель удовлетворяет требованиям управляемости, наблюдаемости и устойчивости.

Будем считать, что оцениваются коэффициенты боковых сил сноса, действующих на передние и задние колеса автобуса, т. е. $\theta_1 = \delta_F$ и $\theta_2 = \delta_R$. Таким образом, неизвестные параметры нелинейно входят в

элементы матриц состояния и управления. При таком характере вхождения параметров уравнение (4.17) принимает следующий вид:

$$\dot{x} \ t = \begin{bmatrix} -f_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -f_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -f_3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -f_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -f_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -f_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -f_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x \ t + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g_3 \\ g_4 \\ g_5 \\ g_6 \\ g_7 \end{bmatrix} u \ t + w \ t, \quad t \in [0, 14],$$

где $f_1 = 40 + 0.0140\theta_1 + 0.0084\theta_2$;

$$f_2 = 400 + 0.5178\theta_1 + 0.3580\theta_2 + 1.1280 \cdot 10^{-4}\theta_1\theta_2;$$

$$f_3 = 41.7562\theta_1 + 4.2461\theta_2 + 4.5120 \cdot 10^{-3}\theta_1\theta_2;$$

$$f_4 = 134.4843\theta_1 + 8.8858\theta_2 + 0.3646\theta_1\theta_2;$$

$$f_5 = 151.3812\theta_1 + 2.0836\theta_1\theta_2;$$

$$f_6 = 4.5007\theta_1\theta_2;$$

$$f_7 = 3.2228\theta_1\theta_2;$$

$$g_3 = 37.8453\theta_1;$$

$$g_4 = 151.3812\theta_1 + 0.3195\theta_1\theta_2;$$

$$g_5 = 151.3812\theta_1 + 2.0836\theta_1\theta_2;$$

$$g_6 = 4.5007\theta_1\theta_2;$$

$$g_7 = 3.2228\theta_1\theta_2.$$

Пусть

$$Q = \text{diag } 0.1, \ 0.1, \ 0.1, \ 0.1, \ 0.1, \ 0.1, \ 0.1; \quad R = 0.25;$$

$$\bar{x}_0 = 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, {}^T;$$

$$P_0 = \text{diag } 0.1, \ 0.1, \ 0.1, \ 0.1, \ 0.1, \ 0.1, \ 0.1.$$

Положим $t_0 = 0$, $T = 14$, $N = 15$. Выберем в качестве оценок неизвестных параметров $\hat{\theta}_1 = 111.43$, $\hat{\theta}_2 = 143.62$ и решим задачи (4.6) и (4.7), используя критерий D -оптимальности. Результаты приведем в

табл. 4.20, 4.21. Синтезированные входные сигналы представим на рис. 4.17 и 4.18.

Таблица 4.16
Синтезированный *D*-оптимальный
входной сигнал $u^* \tau_k$ для модели
(4.15), (4.16)

k	τ_k	$u^* \tau_k$
1	0	-23
2	1	23
3	2	23
4	3	-23
5	4	-23
6	5	-23
7	6	23
8	7	-23
9	8	-23
10	9	23
11	10	-23
12	11	-23
13	12	23
14	13	-23
15	14	23

Таблица 4.17
Синтезированный *D*-оптимальный
входной сигнал $u^* \tau_k^*$ для моде-
ли (4.15), (4.16)

k	τ_k^*	$u^* \tau_k^*$
1	0.38	-23
2	2.40	23
3	3.62	-23
4	3.75	-23
5	5.42	23
6	6.70	23
7	6.75	-23
8	7.99	23
9	8.04	23
10	8.30	-23
11	11.21	23
12	12.24	23
13	13.19	23
14	13.40	-23
15	13.53	-23

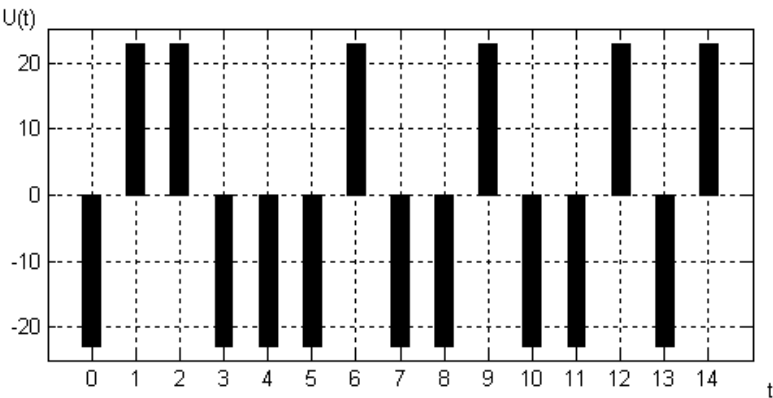


Рис. 4.17. Оптимальный входной сигнал $u^* \tau_k$ для модели (4.15), (4.16)

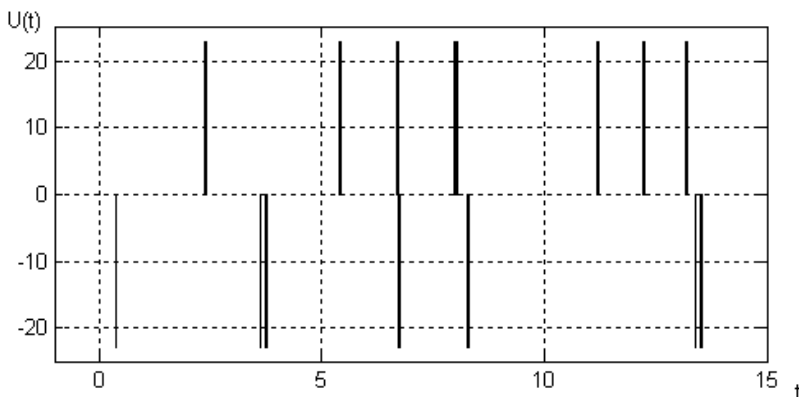


Рис. 4.18. Оптимальный входной сигнал $u^* \tau_k^*$ для модели (4.15), (4.16)

Информационная матрица и ее определитель, полученные в результате решения оптимизационной задачи (4.6):

$$M u^* \tau_k^*, \hat{\Theta} = \begin{bmatrix} 4.0847 & 4.0626 \\ 4.0626 & 4.3526 \end{bmatrix},$$

$$\det M u^* \tau_k^*, \hat{\Theta} = 1.2742.$$

Информационная матрица и ее определитель, полученные в результате решения оптимизационной задачи (4.7):

$$M u^* \tau_k^*, \hat{\Theta} = \begin{bmatrix} 9.0398 & 2.1153 \\ 2.1153 & 0.7807 \end{bmatrix},$$

$$\det M u^* \tau_k^*, \hat{\Theta} = 2.5829.$$

Для данной модели также наблюдается увеличение (в два раза) определителя информационной матрицы, соответствующей входному сигналу, найденному посредством решения задачи (4.7), по сравнению с решением задачи (4.6).

Одним из наиболее часто используемых при идентификации моделей динамических систем тестирующих сигналов является двоичный псевдослучайный входной сигнал [8] $u_{\text{bin}} t_k$. Смоделируем его и представим результат на рис. 4.19.

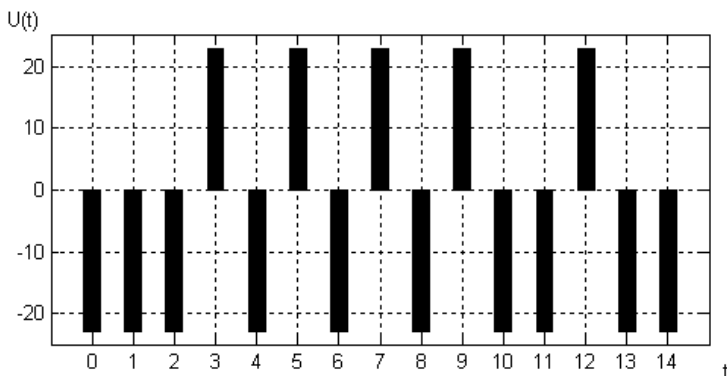


Рис. 4.19. Двоичный псевдослучайный входной сигнал $u_{\text{bin}} t_k$

Информационная матрица и ее определитель, соответствующие входному сигналу $u_{\text{bin}} t_k$:

$$M_{u_{\text{bin}} t_k}, \hat{\Theta} = \begin{bmatrix} 4.0667 & 3.5229 \\ 3.5229 & 3.2256 \end{bmatrix},$$

$$\det M_{u_{\text{bin}} t_k}, \hat{\Theta} = 0.7067.$$

Подчеркнем, что по сравнению с определителем информационной матрицы, отвечающей двоичному псевдослучайному входному сигналу, применение методов планирования эксперимента позволило нам увеличить значение определителя в 1.8 раза при оптимизации только по значениям управляющего сигнала и в 3.5 раза при одновременной оптимизации по моментам времени подачи управляющего сигнала и по значениям самого сигнала.

Приведем теперь результаты применения процедуры активной идентификации системы управления боковым движением автобуса (4.15), (4.16), следуя [73, 75].

Будем для каждого исследуемого входного сигнала производить пять независимых запусков системы и усреднять полученные оценки неизвестных параметров.

Вычислим и сравним оценки этих параметров, найденные с использованием следующих управляющих сигналов: двух D -оптимальных входных сигналов, полученных решением оптимизационных задач (4.6) и (4.7) (обозначим их через $u^* t = u \tau_k$, $\tau_k \leq t \leq \tau_{k+1}$,

$k=1, 2, ..., 14$ и $u^{**} t = u^* \tau_k^*$, $\tau_k^* \leq t \leq \tau_{k+1}^*$, $k=1, 2, ..., 14$ соответственно), D - и A -оптимальных сигналов, синтезированных с использованием прямой и двойственной градиентных процедур ($u^{***}(t)$ – D -оптимальный входной сигнал, найденный с использованием двойственной градиентной процедуры; $u^{****}(t)$ – A -оптимальный входной сигнал, найденный с использованием прямой градиентной процедуры), а также двоичного псевдослучайного сигнала $u_{\text{bin}} t$. Результаты представим в табл. 4.22.

Т а б л и ц а 4.22

Оценки неизвестных параметров модели (4.15), (4.16), полученные при различных управляющих сигналах

Сигнал	Обозначение	Номер запуска системы					Усред- ненные значения
		1	2	3	4	5	
		Оценки и нормы ошибок оценивания					
$u^* t$	$\hat{\theta}_1^*$	98.811	99.103	99.176	99.194	98.644	98.986
	$\hat{\theta}_2^*$	236.378	235.155	235.419	235.199	235.189	235.468
	$\ \hat{\Theta}^* - \Theta_{\text{ист}}\ $	1.3909	0.1861	0.4545	0.2779	0.4031	0.4682
$u^{**} t$	$\hat{\theta}_1^{**}$	98.992	98.599	98.913	99.203	99.2768	98.990
	$\hat{\theta}_2^{**}$	234.918	234.499	234.282	235.334	235.384	234.883
	$\ \hat{\Theta}^{**} - \Theta_{\text{ист}}\ $	0.0822	0.6415	0.7246	0.3908	0.4724	0.1169
$u^{***} t$	$\hat{\theta}_1^{***}$	100.407	97.805	98.307	98.527	99.413	98.892
	$\hat{\theta}_2^{***}$	235.201	236.014	234.856	234.851	235.159	235.416
	$\ \hat{\Theta}^{***} - \Theta_{\text{ист}}\ $	1.4208	1.5673	0.7082	0.4961	0.4423	0.2420
$u^{****} t$	$\hat{\theta}_1^{****}$	99.838	98.901	99.740	99.966	98.899	99.469
	$\hat{\theta}_2^{****}$	235.773	235.671	234.915	235.023	234.985	235.274
	$\ \hat{\Theta}^{****} - \Theta_{\text{ист}}\ $	1.1395	0.6774	0.7455	0.9702	0.1360	0.5344
$u_{\text{bin}} t$	$\hat{\theta}_{1\text{bin}}$	99.176	98.811	97.644	98.312	99.603	98.709
	$\hat{\theta}_{2\text{bin}}$	235.266	235.866	237.604	234.157	235.142	235.607
	$\ \hat{\Theta}_{\text{bin}} - \Theta_{\text{ист}}\ $	0.3190	0.8865	2.9361	1.0884	0.6194	0.6731

Сравнивая по табл. 4.22 усредненные евклидовы нормы разностей истинных значений параметров и оценок, соответствующих указанным управляющим сигналам, заметим, что наиболее точные оценки получены при D -оптимальном входном сигнале $u^{**} t$, $\forall t \in t_0, T$. При этом применение процедуры планирования эксперимента позволило улучшить качество оценивания неизвестных параметров, в смысле отклонения полученных оценок от истинных значений:

- для $u t = u^{*} t$ в

$$\frac{\|\hat{\Theta}_{\text{bin}} - \Theta_{\text{ист}}\|}{\|\hat{\Theta}^{*} - \Theta_{\text{ист}}\|} \approx 1.44$$

раза;

- для $u t = u^{**} t$ в

$$\frac{\|\hat{\Theta}_{\text{bin}} - \Theta_{\text{ист}}\|}{\|\hat{\Theta}^{**} - \Theta_{\text{ист}}\|} \approx 5.76$$

раза;

- для $u t = u^{***} t$ в

$$\frac{\|\hat{\Theta}_{\text{bin}} - \Theta_{\text{ист}}\|}{\|\hat{\Theta}^{***} - \Theta_{\text{ист}}\|} \approx 2.78$$

раза;

- для $u t = u^{****} t$ в

$$\frac{\|\hat{\Theta}_{\text{bin}} - \Theta_{\text{ист}}\|}{\|\hat{\Theta}^{****} - \Theta_{\text{ист}}\|} \approx 1.26$$

раза.

Убедившись в эффективности применения процедуры активной идентификации в пространстве параметров, посмотрим, что происходит в пространстве откликов.

Смоделируем выборку наблюдений $Y = y t_k$, $k=1, \dots, 14$ и спрогнозируем отклики $\hat{Y} = \hat{y} t_{k+1} | t_k$, $k=0, \dots, 13$ при истинных

значениях неизвестных параметров и двух различных входных сигналах $u_{\text{bin}} t$ и $u^{***} t$. Обозначим через Y_{bin} и $\hat{Y}_{\text{bin}}$ – наблюдения и их оценки для $u t = u_{\text{bin}} t$, Y^{***} и $\hat{Y}^{***}$ – наблюдения и их оценки для $u t = u^{***} t$. Вычислив евклидовы нормы разностей $\|\hat{Y}_{\text{bin}} - Y_{\text{bin}}\|$ и $\|\hat{Y}^{***} - Y^{***}\|$, получим:

$$\|\hat{Y}_{\text{bin}} - Y_{\text{bin}}\| = 3.23 \cdot 10^2,$$

$$\|\hat{Y}^{***} - Y^{***}\| = 2.61 \cdot 10^2.$$

Отклик $\hat{Y}^{***}$ лучше согласуется с последовательностью измерений, чем отклик $\hat{Y}_{\text{bin}}$.

Таким образом, применяя процедуру активной идентификации, нам удалось повысить точность оценок неизвестных параметров до 5.76 раза. Кроме того, мы смогли эффективнее спрогнозировать отклики системы. Использование синтезированных оптимальных входных сигналов позволило получить прогнозируемые отклики, более близкие к последовательности измерений, чем прогнозируемые отклики, вычисленные при двоичном псевдослучайном сигнале. Соответствующие нормы разностей уменьшились для $u t = u^{***} t$

$$\text{в } \frac{\|\hat{Y}_{\text{bin}} - Y_{\text{bin}}\|}{\|\hat{Y}^{***} - Y^{***}\|} \approx 1.23 \text{ раза,}$$

что позволяет сделать вывод о целесообразности применения процедуры активной идентификации для повышения качества оценивания как в пространстве параметров, так и в пространстве откликов.

По результатам приведенных в данном разделе расчетов можно сделать следующие **выводы**:

1. Рассмотренные примеры активной идентификации систем регулирования температуры в жилом помещении и управления боковым движением автобуса показали **эффективность и целесообразность применения процедуры активной идентификации**. В зависимости от используемого подхода к решению задачи синтеза входных сигналов, выбранных модельных структур, критериев оптимальности и вида

первоначального входного сигнала, качество оценивания удалось улучшить от 1.26 до 20 раз в пространстве параметров и от 1.23 до 1.3 раза в пространстве откликов.

2. Для одних модельных структур, с точки зрения качества получаемых оценок и времени, требуемого для их нахождения, предпочтительнее оказался подход, предполагающий решение соответствующей оптимизационной задачи методами нелинейного программирования, для других – подход, основывающийся на идеях и методах теории планирования экспериментов. В связи с этим экспериментатору можно порекомендовать использовать оба данных подхода.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Дано систематическое изложение наиболее существенных для практики вопросов теории и техники активной параметрической идентификации многомерных стохастических линейных дискретных и непрерывно-дискретных систем, описываемых моделями в пространстве состояний.

Впервые рассмотрена и решена актуальная задача оптимального параметрического оценивания, обобщенная на случай вхождения параметров в матрицы состояния, управления, возмущения, измерения, в начальные условия и в ковариационные матрицы помех динамики и ошибок измерений в различных комбинациях.

Получены аналитические выражения для информационных матриц одноточечного плана, проведен их структурный анализ, предложены алгоритмы их вычисления.

На основе сформулированных и доказанных теорем эквивалентности D - и A -оптимальных планов и выявленных свойств информационных матриц разработаны оригинальные алгоритмы активной параметрической идентификации во временной и частотной областях, позволяющие решать задачи оптимального оценивания математических моделей методами максимального правдоподобия и наименьших квадратов с привлечением прямой и двойственной градиентных процедур синтеза A - и D -оптимальных входных сигналов. Существенной особенностью указанных алгоритмов оценивания параметров и планирования оптимальных входных сигналов является то, что они позволяют вычислять соответствующие градиенты по рекуррентным формулам.

Численные исследования на примерах моделей динамических систем различной природы показали, что в зависимости от характера вхождения параметров, критериев идентификации и оптимальности качество оценивания удалось улучшить от 1.26 до 20 раз в пространстве параметров и от 1.23 до 6.3 раза в пространстве откликов. Это позволяет говорить о целесообразности и эффективности применения процедур активной идентификации дискретных и непрерывно-дискретных систем как во временной, так и в частотной области. Поскольку для различных модельных структур более эффективными могут оказаться процедуры активной идентификации как во временной, так и в частотной области, не представляется возможным рекомендовать исследователю применять процедуру активной идентификации в какой-либо одной конкретной области. В силу того, что для одних модельных структур предпочтительнее оказался критерий *A*-оптимальности, а для других – критерий *D*-оптимальности, экспериментатору можно порекомендовать использовать процедуры планирования по различным критериям оптимальности.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Справочник по теории автоматического управления / под ред. А. А. Красовского. – М. : Наука, 1987. – 712 с.
2. Сейдж Э. П. Идентификация систем управления / Э. П. Сейдж, Дж. Л. Мелса. – М. : Наука, 1974. – 246 с.
3. Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления. Оценивание параметров и состояния / П. Эйкхофф. – М. : Мир, 1975. – 683 с.
4. Гроп Д. Методы идентификации систем / Д. Гроп. – М. : Мир, 1979. – 302 с.
5. Кашьяп Р. Л. Построение динамических стохастических моделей по экспериментальным данным / Р. Л. Кашьяп, А. Р. Рао. – М. : Наука, 1983. – 384 с.
6. Федоров В. В. Теория оптимального эксперимента (планирование регрессионных экспериментов) / В. В. Федоров. – М. : Наука, 1971. – 312 с.
7. Денисов В. И. Математическое обеспечение системы ЭВМ – экспериментатор / В. И. Денисов. – М. : Наука, 1977. – 251 с.
8. Круг Г. К. Планирование эксперимента в задачах идентификации и экстраполяции / Г. К. Круг, Ю. А. Сосулин, В. А. Фатуев. – М. : Наука, 1977. – 208 с.
9. Горский В. Г. Планирование промышленных экспериментов (модели динамики) / В. Г. Горский, Ю. П. Адлер, А. М. Талалай. – М. : Metallurgy, 1978. – 112 с.

10. *Ермаков С. М.* Математическая теория оптимального эксперимента / С. М. Ермаков, А. А. Жиглявский. – М. : Наука, 1987. – 320 с.
11. *Льюнг Л.* Идентификация систем: теория для пользователя / Л. Льюнг. – М. : Наука, 1991. – 432 с.
12. *Деруссо П.* Пространство состояний в теории управления / П. Деруссо, Р. Рой, Ч. Клоуз. – М. : Наука, 1970. – 620 с.
13. *Казаков И. Е.* Статистическая теория систем управления в пространстве состояний / И. Е. Казаков. – М. : Наука, 1975. – 432 с.
14. *Заде Л.* Теория линейных систем. Метод пространства состояний / Л. Заде, Ч. Дезоер. – М. : Наука, 1970. – 204 с.
15. *Рао С. Р.* Линейные статистические методы и их применения / С. Р. Рао. – М. : Наука, 1968. – 547 с.
16. *Дейч А. М.* Методы идентификации динамических объектов / А. М. Дейч. – М. : Энергия, 1974. – 240 с.
17. *Крамер Г.* Математические методы статистики / Г. Крамер. – М. : Мир, 1975. – 648 с.
18. *Спиди К.* Теория управления: идентификация и оптимальное управление / К. Спиди, Р. Браун, Дж. Гудвин. – М. : Мир, 1973. – 248 с.
19. *Боровков А. А.* Математическая статистика / А. А. Боровков. – Новосибирск : Наука, 1984. – 472 с.
20. *Клепиков Н. П.* Анализ и планирование экспериментов методом максимума правдоподобия / Н. П. Клепиков, С. Н. Соколов. – М. : Физматгиз, 1964. – 184 с.
21. *Уилкс С.* Математическая статистика / С. Уилкс. – М. : Наука, 1967. – 632 с.
22. *Линник Ю. В.* Метод наименьших квадратов и основы математико – статистической теории обработки наблюдений / Ю. В. Линник. – М. : Физматгиз, 1958. – 334 с.
23. *Айвазян С. А.* Прикладная статистика. Исследование зависимостей / С. А. Айвазян, И. С. Енюков, Л. Д. Мешалкин. – М. : Финансы и статистика, 1985. – 487 с.
24. *Дрейпер Н.* Прикладной регрессионный анализ. В 2 кн. / Н. Дрейпер, Г. Смит. – М. : Финансы и статистика, 1987. – Кн. 2. – 351 с.
25. *Справочник по прикладной статистике. В 2 т. / под ред. Э. Ллойда, У. Ледермана.* – М. : Финансы и статистика, 1989. – Т. 1. – 510 с.
26. *Брандт З.* Анализ данных. Статистические и вычислительные методы для научных работников и инженеров / З. Брандт. – М. : Мир, 2003. – 686 с.
27. *Денисов В. И.* Пакет программ оптимального планирования эксперимента / В. И. Денисов, А. А. Попов. – М. : Финансы и статистика, 1986. – 159 с.
28. *Mehra R. K.* Optimal input signals for parameter estimation in dynamic systems – survey and new results / R. K. Mehra // IEEE Trans. Automat. Control. – 1974. – Vol. AC-19. – № 6. – P. 753–768.

29. Mehra R. K. Synthesis of optimal input for multiinput – multioutput (MIMO) systems with process noise. Part I: frequency domain synthesis / R. K. Mehra // System identification – advances and case studies / Eds. R. K. Mehra, D. G. Lainiotis. – New York : Academic press, 1976. – P. 211–229.

30. Mehra R. K. Synthesis of optimal input for multiinput – multioutput (MIMO) systems with process noise. Part II time domain synthesis / R. K. Mehra // System identification – advances and case studies / Eds. R. K. Mehra, D. G. Lainiotis. – New York : Academic press, 1976. – P. 230–257.

31. Абденов А. Ж. Активная идентификация для стохастических динамических систем, описываемых моделями в пространстве состояний : дис. ... д-ра техн. наук : 05.13.01 / А. Ж. Абденов. – Новосибирск, 1999. – 370 с.

32. Абденов А. Ж. Планирование D-оптимальных входных воздействий при идентификации линейных систем / А. Ж. Абденов, А. А. Попов. – 12 с. – Деп. в ВИНТИ 19.02.82, №771–82.

33. Абденов А. Ж. Планирование эксперимента при неопределенностях параметров в моделях динамики и измерителя / А. Ж. Абденов, В. И. Денисов // Машинные методы планирования эксперимента и оптимизации многофакторных систем : межвуз. сб. науч. тр. – Новосибирск : Изд-во НЭТИ, 1987. – С. 29– 37.

34. Попов А. А. Вычисление информационной матрицы Фишера в задаче планирования входного сигнала для динамических систем / А. А. Попов // Сб. науч. тр. НГТУ. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 1998. – № 2 (11). – С. 8–16.

35. Абденов А. Ж. Активная идентификация линейных динамических систем для решения задач калмановской фильтрации. I. Теоретические и алгоритмические аспекты / А. Ж. Абденов // Науч. вест. НГТУ. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 1998. – № 1 (4). – С. 3–18.

36. Абденов А. Ж. Активная идентификация линейных динамических систем для решения задач калмановской фильтрации. II. Практические дискретных систем, описываемых моделями аспекты / А. Ж. Абденов // Науч. вест. НГТУ. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 1998. – № 1 (4). – С. 19–29.

37. Чубич В. М. Планирование D-оптимальных входных сигналов для стохастических линейных дискретных систем : дис. ... канд. техн. наук : 05.13.16 / В. М. Чубич. – Новосибирск, 1995. – 97 с.

38. Goodwin G. C. Dynamic system identification: experimental design and data analysis / G. C. Goodwin, R. L. Payne. – New York : Academic Press, 1977. – 273 p.

39. Zarrop M. B. Optimal experimental design for dynamic system identification / M. B. Zarrop. – New York : Springer-Verlag., 1979 – 197 p.

40. Стасышин В. М. Алгоритмическое и программное обеспечение задач планирования эксперимента для моделей в форме систем обыкновенных дифференциальных уравнений : дис. ... канд. техн. наук : 05.13.01 / В. М. Стасышин. – Новосибирск, 1985. – 244 с.

41. Овчаренко В. Н. Выбор входных сигналов при идентификации линейных непрерывных динамических систем по дискретным наблюдениям / В. Н. Овчаренко // Автоматика и телемеханика. – 1987. – № 4. – С. 87–95.
42. Gupta N. K. Computational aspects of maximum likelihood estimation and reduction in sensitivity function calculations / N. K. Gupta, R. K. Mehra // IEEE transactions on automatic control. – 1974. – Vol. 19. – № 6. – P. 774–783.
43. Åström K. J. Maximum likelihood and prediction errors methods / K. J. Åström // Automatica. – 1980. – Vol. 16. – P. 551–574.
44. Абденов А. Ж. Планирование *D*-оптимальных входных сигналов для непрерывно-дискретных систем при некоррелированных и взаимно-коррелированных шумах объекта и измерителя / А. Ж. Абденов, А. А. Попов // Алгоритмическое и программное обеспечение задач оптимального планирования и проектирования : межвуз. сб. науч. тр. – Новосибирск : Изд-во НЭТИ, 1983. – С. 7–13.
45. Абденов А. Ж. Алгоритмическое обеспечение задачи планирования входных сигналов для линейных непрерывно-дискретных динамических систем / А. Ж. Абденов, А. С. Дегтерев // Информатика и проблемы телекоммуникаций : материалы междунар. науч.-техн. конф. – Новосибирск, 1995. – Т. 1. – С. 29–31.
46. Абденов А. Ж. К вопросу вычисления градиента функционала в задаче *D*-оптимального планирования для стохастических динамических систем / А. Ж. Абденов, А. С. Дегтерев // Информатика и проблемы телекоммуникаций : материалы междунар. науч.-техн. конф. – Новосибирск, 1995. – Т. 1. – С. 32–34.
47. Базара М. Нелинейное программирование / М. Базара, К. Шетти. – М. : Мир, 1982. – 583 с.
48. Васильев В. П. Численные методы решения экстремальных задач / В. П. Васильев. – М. : Мир, 1982. – 372 с.
49. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование / Д. Химмельблау. – М. : Мир, 1975. – 534 с.
50. Моисеев Н. Н. Методы оптимизации / Н. Н. Моисеев, Ю. П. Иванов, Е. М. Столярова. – М. : Наука, 1980. – 351 с.
51. Поляк Б. Т. Введение в оптимизацию / Б. Т. Поляк. – М. : Наука, 1983. – 384 с.
52. Сухарев А. Г. Курс методов оптимизации / А. Г. Сухарев, В. В. Тимохов, В. В. Федоров. – М. : Наука, 1986. – 328 с.
53. Абденов А. Ж. Введение в оценивание и планирование для стохастических динамических систем / А. Ж. Абденов, В. И. Денисов, В. М. Чубич. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 1993. – 45 с.
54. Черникова О. С. Активная параметрическая идентификация стохастических линейных дискретных систем : дис. ...канд. техн. наук: 05.13.17 / О. С. Черникова. – Новосибирск, 2007. – 150 с.

55. *Денисов В. И.* Активная идентификация стохастических линейных дискретных систем во временной области / В. И. Денисов, В. М. Чубич, О. С. Черникова // Сиб. журн. индустр. матем. – Новосибирск : Изд-во ин-та математики, 2003. – Т. 6. – № 3 (15). – С. 70–87.

56. *Огарков М. А.* Методы статистического оценивания параметров случайных процессов / М. А. Огарков. – М. : Энергоатомиздат, 1980. – 206 с.

57. *Денисов В. И.* Новое обобщенное выражение для информационной матрицы Фишера в задаче активной параметрической идентификации стохастических линейных дискретных систем / В. И. Денисов, В. М. Чубич, О. С. Рябых (Черникова) // Науч. вест. НГТУ. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2001. – № 2 (11). – С. 29–42.

58. *Денисов В. И.* Особенности вычисления информационной матрицы Фишера в задаче активной параметрической идентификации стохастических линейных непрерывно-дискретных систем / В. И. Денисов, В. М. Чубич, Д. И. Бобылева // Науч. вест. НГТУ. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2004. – № 2 (17). – С. 45–57.

59. *Денисов В. И.* Построение оптимальных планов экспериментов в задачах идентификации стохастических линейных непрерывно-дискретных систем / В. И. Денисов, В. М. Чубич, Д. И. Бобылева // Науч. вест. НГТУ. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2006 – № 4 (25). – С. 25–43.

60. *Кули Дж. У.* Быстрое преобразование Фурье и его применения к анализу временных рядов / Дж. У. Кули, П. А. У. Льюис, П. Д. Уэлч // Стат. методы для ЭВМ / К. Энслейн, Э. Рэлстон, Г. С. Уилф. – М. : Наука, 1986. – С. 373–434.

61. *Деммель Дж.* Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения / Дж. Деммель. – М. : Мир, 2001. – 430 с.

62. *Денисов В. И.* Активная параметрическая идентификация стохастических линейных дискретных систем в частотной области / В. И. Денисов, В. М. Чубич, О. С. Черникова // Сиб. журн. индустр. матем. . – Новосибирск : Изд-во ин-та математики, 2007. – Т. 10. – № 1 (29). – С. 70–89.

63. *Черникова О. С.* Эквивалентность выражений для информационных матриц Фишера в задаче активной идентификации стохастических линейных дискретных систем в частотной области / О. С. Черникова // Сб. науч. тр. НГТУ. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2006. – № 4 (46). – С. 11–18.

64. *Денисов В. И.* Вычисление установившихся значений ковариационной матрицы ошибки одношагового предсказания, ее первой и второй производных в задачах активной идентификации стохастических линейных дискретных систем / В. И. Денисов, В. М. Чубич, О. С. Черникова // Сб. науч. тр. НГТУ. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2005. – № 4 (42). – С. 11–16.

65. *Круглов В. В.* Математические пакеты расширения MATLAB : спец. справочник / В. В. Круглов. – СПб. : Питер, 2001. – 480 с.

66. *Дьяконов В. П.* MATLAB 5.0/5.3. Система символьной математики / В. П. Дьяконов, И. В. Абраменкова. – М. : Нолидж, 1999. – 640 с.

67. *Дорф Р.* Современные системы управления / Р. Дорф, Р. Бишоп. – М. : Лаборатория базовых знаний, 2002. – 832 с.
68. *Денисов В. И.* Моделирование выборки измерений по описанию стохастической линейной стационарной системы с дискретным временем в пространстве состояний / В. И. Денисов, В. М. Чубич, О. С. Рябых (Черникова) // Науч. вест. НГТУ. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2002. – № 2(13). – С. 64–70.
69. *Денисов В. И.* Активная идентификация стохастических линейных непрерывно-дискретных систем. II. Практические аспекты / В. И. Денисов, В. М. Чубич, Д. И. Бобылева // Сб. науч. тр. НГТУ. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2005 – № 4 (42). – С. 3–10.
70. *Афанасьев В. Н.* Математическая теория конструирования систем управления / В. Н. Афанасьев, В. Б. Колмановский, В. Р. Носов. – М. : Высш. шк., 1998. – 574 с.
71. *Табак Д.* Оптимальное управление и математическое программирование / Д. Табак, Б. Куо. – М. : Наука, 1975. – 367 с.
72. *Денисов В. И.* Активная идентификация стохастических линейных непрерывно-дискретных систем. I. Теоретические аспекты / В. И. Денисов, В. М. Чубич, Д. И. Бобылева // Сб. науч. тр. НГТУ. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2005 – № 3 (41). – С. 3–10.
73. *Бобылева Д. И.* Активная идентификация стохастических линейных непрерывно-дискретных систем : дис. ...канд. техн. наук: 05.13.17 / Д. И. Бобылева. – Новосибирск, 2007. – 129 с.
74. *Бекарева Н. Д.* Моделирование случайного процесса, заданного стохастическим дифференциальным уравнением / Н. Д. Бекарева, А. В. Парлюк // Сб. науч. тр. НГТУ. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 1999. – № 1 (14). – С. 13–18.
75. *Бобылева Д. И.* Активная идентификация стохастических линейных непрерывно-дискретных систем с применением идей и методов теории планирования экспериментов / Д. И. Бобылева // Сб. науч. тр. НГТУ. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2007 – № 2 (48). – С. 3–10.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	7
ВВЕДЕНИЕ	9
1. Процедура активной идентификации.....	9
2. Современное состояние проблемы активной идентификации стохастических линейных дискретных и непрерывно-дискретных систем	13
Г л а в а 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ АКТИВНОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ	17
1.1. Оценивание неизвестных параметров.....	17
1.2. Планирование оптимальных входных сигналов	19
1.2.1. Исходные понятия теории планирования оптимального эксперимента.....	19
1.2.2. Прямая градиентная процедура синтеза непрерывных оптимальных планов	31
1.2.3. Двойственная градиентная процедура синтеза непрерывных оптимальных планов.....	33
Г л а в а 2. ПРИКЛАДНЫЕ АСПЕКТЫ АКТИВНОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ ВО ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ	38
2.1. Оценивание неизвестных параметров дискретных систем	38
2.1.1. Структура дискретной модели	38
2.1.2. Критерии идентификации для дискретных систем	39
2.1.3. Алгоритмы вычисления значений и градиентов критериев идентификации.....	43
2.2. Оценивание неизвестных параметров непрерывно-дискретных систем.....	48
2.2.1. Структура непрерывно-дискретной модели	48
2.2.2. Критерии идентификации для непрерывно-дискретных систем	50
2.2.3. Алгоритмы вычисления значений и градиентов критериев идентификации.....	52

2.3. Планирование оптимальных входных сигналов для дискретных систем.....	59
2.3.1. Вывод соотношения для информационной матрицы одноточечного плана.....	59
2.3.2. Алгоритм вычисления информационной матрицы одноточечного плана.....	73
2.3.3. Вычисление градиентов критериев оптимальности...	75
2.4. Планирование оптимальных входных сигналов для непрерывно – дискретных систем	81
2.4.1. Вывод соотношения для информационной матрицы одноточечного плана.....	81
2.4.2. Алгоритм вычисления информационной матрицы одноточечного плана.....	98
2.4.3. Вычисление градиентов критериев оптимальности...	100
Г л а в а 3. ПРИКЛАДНЫЕ АСПЕКТЫ АКТИВНОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ В ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ.....	104
3.1. Оценивание неизвестных параметров дискретных систем	104
3.2. Планирование оптимальных входных сигналов для дискретных систем.....	108
3.2.1. Вывод соотношения для информационной матрицы одноточечного плана.....	108
3.2.2. Алгоритм вычисления информационной матрицы одноточечного плана.....	114
3.2.3. Вычисление градиентов критериев оптимальности...	121
Г л а в а 4. АКТИВНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ РАЗЛИЧНОЙ ПРИРОДЫ.....	124
4.1. Дискретные системы	124
4.1.1. Система управления бурильной машиной	124
4.1.2. Система управления электрокардиостимулятором	145
4.2. Непрерывно-дискретные системы.....	158
4.2.1. Система регулирования температуры в жилом помещении	158
4.2.2. Система управления боковым движением автобуса ..	170
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	180
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	181

CONTENTS

PREFACE	7
INTRODUCTION	9
1. The Procedure of Active Identification	9
2. The State-of-the-Art Problem of Active Identification of Stochastic Linear Discrete and Discrete-Continuous Systems	13
Chapter 1. THEORETICAL ASPECTS OF ACTIVE IDENTIFICATION	17
1.1. Unknown parameter estimation	17
1.2. Optimal input signal planning	19
1.2.1. Basic concepts of the optimal experiment planning theory	19
1.2.2. The direct gradient procedure of continuous optimal plan synthesis	31
1.2.3. The dual gradient procedure of continuous optimal plans	33
Chapter 2. APPLICATION ASPECTS OF ACTIVE IDENTIFICATION IN THE TIME DOMAIN	38
2.1 Estimation of Unknown Parameters of Discrete Systems	38
2.1.1. A Discrete model structure	38
2.1.2. Identification tests for discrete systems	39
2.1.3. Calculation algorithms of identification test values and gradients	43
2.2. Estimation of unknown parameters of discrete-continuous systems	48
2.2.1. A discrete-continuous model structure	48
2.2.2. Identification tests for discrete-continuous systems	50
2.2.3. Calculation algorithms of identification test values and gradients	52
2.3. Planning of optimal input signal for discrete systems	59
2.3.1. Derivation of the information matrix relation of a single-point plan	59

2.3.2. A calculation algorithm of a single-point plan information matrix	73
2.3.3. Calculation of optimality test gradients	75
2.4. Planning of optimal input signals for discrete-continuous systems	81
2.4.1. Derivation of an information matrix relation of a single-point plan.....	81
2.4.2. A calculation algorithm of a single-point plan information matrix	98
2.4.3. Calculation of optimality test gradients.....	100
Chapter 3 APPLICATION ASPECTS OF ACTIVE IDENTIFICATION IN THE FREQUENCY DOMAIN	104
3.1. Estimation of unknown parameters of discrete system	104
3.2. Planning of optimal input signals for discrete systems	108
3.2.1. Derivation of an information matrix relation of a single-point plan.....	108
3.2.2. A calculation algorithm of a single-point plan information matrix	114
3.2.3. Calculation of optimality test gradients.....	121
Chapter 4. ACTIVE IDENTIFICATION OF DYNAMIC SYSTEMS OF VARIOUS NATURE	124
4.1. Discrete systems.....	124
4.1.1. A control system of a drilling machine.....	124
4.1.2. A control system of an electric cardiostimulator	145
4.2. Discrete-continuous systems.....	158
4.2.1. A temperature control system for dwelling houses	158
4.2.2. A control system of a bus lateral movement	170
CONCLUSION.....	180
REFERENCES	181

НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ

**Денисов Владимир Иванович
Чубич Владимир Михайлович
Черникова Оксана Сергеевна
Бобылева Диана Игоревна**

**АКТИВНАЯ
ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ
СТОХАСТИЧЕСКИХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ**

Монография

Редактор *И.Л. Кескевич*
Выпускающий редактор *И.П. Брованова*
Художественный редактор *А.В. Ладыжская*
Корректор *И.Е. Семенова*
Компьютерная верстка *В.Ф. Ноздрева*

Подписано в печать 15.06.2009
Формат 60×90 1/16. Бумага офсетная
Уч.-изд. л. 12,00. Печ. л. 12,0
Тираж 3000 экз. (1-й з-д – 1–150 экз.)
Изд. № 360. Заказ № 965

Издательство Новосибирского государственного
технического университета
630092, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20
Тел. (383) 346-31-87
E-mail: office@publish.nstu.ru

Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета
630092, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20