Министерство образования и науки Российской Федерации
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В.М. ЧУБИЧ, Е.В. ФИЛИППОВА

АКТИВНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА ДЛЯ МОДЕЛЕЙ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Утверждено
Редакционно-издательским университетом
в качестве учебного пособия

НОВОСИБИРСК
2017

УДК 681.5.015:519.242(075.8)
Ч-813

Рецензенты:
д-р техн. наук, профессор *Т.В. Авдеенко*
канд. техн. наук, доцент *О.С. Черникова*

Работа подготовлена на кафедре теоретической
и прикладной информатики

Чубич В.М.
Ч-813 Активная идентификация стохастических динамических систем. Планирование эксперимента для моделей дискретных систем: учебное пособие / В.М. Чубич, Е.В. Филиппова. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2017. – 88 с.

ISBN 978-5-7782-3235-8

Настоящее издание продолжает серию учебных пособий, посвященных активной параметрической идентификации стохастических динамических систем, описываемых моделями в пространстве состояний. Излагаются теоретические и прикладные вопросы планирования эксперимента для дискретных систем.

В пособии приведены вопросы и упражнения для более глубокого усвоения учебного материала.

Предназначено для магистрантов факультета прикладной математики и информатики НГТУ, изучающих дисциплины «Математические методы планирования эксперимента» и «Методы активной идентификации динамических систем» по направлениям 01.04.02 «Прикладная математика и информатика» и 02.04.03 «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем» соответственно. Может быть полезно специалистам, научные и профессиональные интересы которых связаны с моделированием динамических систем стохастической природы.

УДК 681.5.015:519.242(075.8)

ISBN 978-5-7782-3235-8

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

θ	–	вектор неизвестных параметров размерности s
Ξ	–	данные наблюдений
ξ	–	непрерывный нормированный план эксперимента $\xi = \begin{Bmatrix} \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q \\ p_1, p_2, \ldots, p_q \end{Bmatrix}$, $p_i \geq 0, \sum_{i=1}^{q} p_i = 1$, $\alpha_i \in \Omega_\alpha$, $i = 1, 2, \ldots, q$
ξ^*	–	оптимальный по некоторому критерию непрерывный нормированный план эксперимента
$M(\xi)$	–	информационная матрица плана
$X\left[M(\xi)\right]$	–	критерий оптимальности
$M(\alpha)$	–	информационная матрица Фишера одноточечного плана
U	–	входной сигнал $U = U_0^{N-1} = \left\{u(t_k),\ k = 0, 1, ..., N-1\right\}$
U_i	–	i-й входной сигнал
$u(t_k)$	–	r-мерный вектор управления (входа) в соответствующий момент времени
$x(t_k)$	–	n-мерный вектор состояния в соответствующий момент времени
$\hat{x}\left(t_{k+1} \mid t_k\right)$	–	оценка $x(t_{k+1})$ по измерениям Y_1^k (оценка одношагового прогнозирования)
$\hat{x}^{ij}\left(t_{k+1} \mid t_k\right)$	–	оценка одношагового прогнозирования состояния $x(t_{k+1})$, соответствующая паре (U_i, Y_{ij})

$\hat{x}\left(t_{k+1} \mid t_{k+1}\right)$ – оценка $x(t_{k+1})$ по измерениям Y_1^{k+1} (оценка фильтрации)

$\hat{x}^{ij}\left(t_{k+1} \mid t_{k+1}\right)$ – оценка фильтрации состояния $x(t_{k+1})$, соответствующая паре (U_i, Y_{ij})

$w(t_k)$ – p-мерный вектор шума системы в соответствующий момент времени

$y(t_{k+1})$ – m-мерный вектор измерения (выхода) в момент времени t_{k+1};

Y, Y_1^N – выходной сигнал

$$Y = Y_1^N = \left\{ y(t_{k+1}), k = 0, 1, ..., N-1 \right\}$$

Y_{ij} – j-я реализация выходного сигнала, соответствующая входному сигналу U_i

$L\left(\theta; Y_1^N\right)$ – функция правдоподобия

$v(t_{k+1})$ – m-мерный вектор шума измерения в момент времени t_{k+1}

$\varepsilon(t_{k+1})$ – m-мерный вектор обновления в момент времени t_{k+1}

$\mu(\alpha, \xi), \eta$ – параметры обобщенной теоремы эквивалентности

ξ_ν – дискретный нормированный план эксперимента

$$\xi_\nu = \left\{ \begin{matrix} \alpha_1, & \alpha_2, \ldots, \alpha_q \\ \frac{k_1}{\nu}, & \frac{k_2}{\nu}, \ldots, \frac{k_q}{\nu} \end{matrix} \right\}, \quad \alpha_i \in \Omega_\alpha, \; i = 1, 2, \ldots, q$$

Ω_U – область допустимых входных сигналов

$\nabla_\upsilon g(\upsilon, \gamma)$ – градиент скалярной функции g по аргументу υ:

$$\nabla_\upsilon g(\upsilon, \gamma) = \left[\frac{\partial g(\upsilon, \gamma)}{\partial \upsilon_1}, \frac{\partial g(\upsilon, \gamma)}{\partial \upsilon_2}, ..., \frac{\partial g(\upsilon, \gamma)}{\partial \upsilon_n} \right]^{\mathrm{T}}$$

$E[\bullet]$ – оператор математического ожидания

R_n – вещественное линейное пространство, состоящее из n-мерных векторов-столбцов

$R_{m \times n}$ – множество вещественных матриц, содержащих m строк и n столбцов

$\lVert \bullet \rVert$	– векторная норма $\lVert a^{\mathrm{T}} \rVert = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2}$, если $a^{\mathrm{T}} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$
A^{T}	– матрица, транспонированная к матрице A
A^{-1}	– матрица, обратная к невырожденной матрице A
$\mathrm{sp}\, A$	– след матрицы A
$\det A$	– определитель матрицы A
I	– единичная матрица
δ_{ki}	– символ Кронекера
ИМФ	– информационная матрица Фишера

Г Л А В А 1

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА

При построении моделей динамических систем теория планирования эксперимента позволяет различными способами воздействовать на повышение точности оценивания неизвестных параметров.

1.1. ИСХОДНЫЕ ПОНЯТИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Изложим некоторые основополагающие понятия и результаты теории планирования эксперимента.

Под *дискретным* (*точным*) *нормированным планом* эксперимента ξ_ν будем понимать совокупность точек $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$, называемых *спектром плана*, и соответствующих им долей повторных запусков (*весов*):

$$\xi_\nu = \left\{ \begin{matrix} \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q \\ \dfrac{k_1}{\nu}, \dfrac{k_2}{\nu}, \ldots, \dfrac{k_q}{\nu} \end{matrix} \right\}, \ \alpha_i \in \Omega_\alpha, \ i = 1, 2, \ldots, q. \qquad (1.1)$$

Множество планирования Ω_α определяется ограничениями на условия проведения эксперимента.

Под *непрерывным нормированным планом* эксперимента ξ условимся понимать совокупность величин

$$\xi = \left\{ \begin{matrix} \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q \\ p_1, p_2, \ldots, p_q \end{matrix} \right\}, \ p_i \ge 0, \sum_{i=1}^{q} p_i = 1, \ \alpha_i \in \Omega_\alpha, \ i = 1, 2, \ldots, q. \qquad (1.2)$$

В отличие от дискретного нормированного плана в непрерывном нормированном плане снимается требование рациональности весов p_i.

В общем случае непрерывный нормированный план ξ соответствует вероятностной мере $\xi(d\alpha)$, заданной на области Ω_α и удовлетворяющей условиям неотрицательности и нормировки:

$$\int_{\Omega_\alpha} \xi(d\alpha) = 1, \quad \xi(d\alpha) > 0, \quad \alpha \in \Omega_\alpha .$$

При этом *нормированная информационная матрица* $M(\xi)$ плана определяется соотношением

$$M(\xi) = \int_{\Omega_\alpha} M(\alpha)\xi(d\alpha). \tag{1.3}$$

Для плана (1.2) интеграл в (1.3) переходит в сумму, т. е.

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^{q} p_i M(\alpha_i), \tag{1.4}$$

где $M(\alpha_i)$ – информационные матрицы Фишера (ИМФ) точек спектра плана, вычисляемые для каждого значения i в соответствии с равенствами

$$M(\alpha, \theta) = -E\left[\frac{\partial^2 \ln L\left(\theta; Y_1^N\right)}{\partial\theta\partial\theta^{\mathrm{T}}}\right] = E\left[\frac{\partial \ln L\left(\theta; Y_1^N\right)}{\partial\theta^{\mathrm{T}}}\frac{\partial \ln L\left(\theta; Y_1^N\right)}{\partial\theta}\right], \tag{1.5}$$

где $L\left(\theta; Y_1^N\right)$ – функция правдоподобия $\Big($плотность совместного распределения измерений $Y_1^N = \left\{y(t_{k+1}), k = 0, 1, ..., N-1\right\}\Big)$, рассматриваемая как функция параметра θ.

Поскольку для рассматриваемых моделей информационные матрицы точек плана и сам оптимальный план зависят от неизвестных параметров, в дальнейшем будем иметь в виду исключительно *локально-оптимальное планирование.*

Теорема 1.1 [1–4]. Нормированные информационные матрицы обладают следующими свойствами.

1. Для любого непрерывного нормированного плана ξ информационная матрица $M(\xi)$ – вещественная, симметричная, неотрицательно-определенная матрица порядка $s \times s$ (s – количество неизвестных параметров).

2. Множество матриц $M(\xi)$, соответствующее всем возможным нормированным планам (1.2), выпукло. Если множество планирования Ω_α замкнуто, то и множество информационных матриц замкнуто.

3. Для любого непрерывного нормированного плана ξ всегда найдется дискретный план ξ_ν, спектр которого содержит не более чем $q = \dfrac{s(s+1)}{2} + 1$ точек и нормированная информационная матрица $M(\xi_\nu)$ которого совпадает с информационной матрицей $M(\xi)$ плана ξ.

Доказательство

1. Вытекает непосредственно из (1.3) и (1.5).

2. Пусть ξ_1 и ξ_2 – два произвольных плана, заданных на множестве Ω_α, а $\xi_1(d\alpha)$ и $\xi_2(d\alpha)$ – соответствующие им вероятностные меры. Следуя [5], условимся под линейной комбинацией планов

$$\xi = a\xi_1 + (1-a)\xi_2 \;\; (0 \le a \le 1)$$

понимать нормированный план с вероятностной мерой

$$a\xi_1(d\alpha) + (1-a)\xi_2(d\alpha).$$

Проверим, что матрица

$$aM(\xi_1) + (1-a)M(\xi_2)$$

– это информационная матрица плана ξ, заданного на Ω_α, т. е. принадлежит рассматриваемому множеству. Действительно, в силу (1.3)

$$M(\xi) = \int_{\Omega_\alpha} M(\alpha)\xi(d\alpha) = \int_{\Omega_\alpha} M(\alpha)a\xi_1(d\alpha) +$$

$$+ \int_{\Omega_\alpha} M(\alpha)(1-a)\xi_2(d\alpha) = a\int_{\Omega_\alpha} M(\alpha)\xi_1(d\alpha) +$$

$$+(1-a)\int\limits_{\Omega_\alpha} M(\alpha)\xi_2(d\alpha) = aM(\xi_1) + (1-a)M(\xi_2). \qquad (1.6)$$

Из (1.6) и *определения выпуклого множества*[1] следует, что множество информационных матриц, соответствующих непрерывным нормированным планам, заданным на Ω_α, выпукло.

Замкнутость множества информационных матриц следует из равенства (1.3), замкнутости Ω_α и непрерывности $M(\alpha)$.

3. Симметричная матрица $M(\xi)$ полностью определяется $\frac{s(s+1)}{2}$ элементами. Поэтому каждой информационной матрице можно поставить в соответствие вектор размерности $\frac{s(s+1)}{2}$. Из определения информационной матрицы следует, что множество векторов, определяющих $M(\xi)$, является *выпуклой оболочкой множества*[2], состоящего из векторов, соответствующих информационным матрицам $M(\alpha)$ одноточечных планов. Отсюда и из теоремы Каратеодори [5, 6] вытекает справедливость третьего пункта теоремы.

Теорема доказана.

Последнее свойство важно с практической точки зрения. Оно позволяет заменить непрерывный нормированный план, обладающий теми или иными экстремальными показателями информационной матрицы, столь же эффективным дискретным планом.

Выбранный определенным образом план эксперимента позволяет повысить точность оценивания неизвестных параметров. Будем судить о качестве плана ξ по значению некоторого функционала от информационной матрицы $M(\xi)$ или соответствующей ей дисперсионной матрицы $D(\xi)$. Перечислим наиболее важные критерии, отражающие точность оценивания неизвестных параметров [5–10].

---

[1] Множество V называется выпуклым, если любая точка $v = av_1 + (1-a)v_2$, где $v_1 \in V$, $v_2 \in V$ и $0 \le a \le 1$, принадлежит этому множеству.

[2] Множество V^* точек $v^* = \sum_{i=1}^{k} a_i v_i$, где $\sum_{i=1}^{k} a_i = 1$, $a_i \ge 0, v_i \in V$, называется выпуклой оболочкой множества V.

План ξ^* называется *A-оптимальным*, если его дисперсионная матрица имеет наименьший след, т. е.

$$\xi^* = \arg\min_{\xi\in\Omega_\xi} \operatorname{sp} M^{-1}(\xi) = \arg\min_{\xi\in\Omega_\xi} \operatorname{sp} D(\xi)\,. \tag{1.7}$$

A-оптимальный план позволяет найти оценки неизвестных параметров с минимальной средней дисперсией. При этом эллипсоид рассеивания имеет минимальную сумму квадратов длин осей и наименьшую длину диагоналей параллелепипеда, описанного около этого эллипсоида.

План ξ^* называется *D-оптимальным*, если

$$\xi^* = \arg\max_{\xi\in\Omega_\xi} \det M(\xi) = \arg\min_{\xi\in\Omega_\xi} \left[-\ln\det M(\xi)\right] =$$

$$= \arg\min_{\xi\in\Omega_\xi} \det D(\xi)\,. \tag{1.8}$$

Для *D*-оптимального плана объем эллипсоида рассеивания оценок параметров наименьший.

План ξ^* называется *E-оптимальным*, если он минимизирует (максимизирует) максимальное (минимальное) собственное значение дисперсионной (информационной) матрицы, т. е.

$$\xi^* = \arg\min_{\xi\in\Omega_\xi} \max_i \lambda_i\left[D(\xi)\right] = \arg\max_{\xi\in\Omega_\xi} \min_i \lambda_i\left[M(\xi)\right],$$

где λ_i – собственное значение матрицы $D(\xi)$ или $M(\xi)$. *E*-оптимальный план минимизирует длину максимальной оси эллипсоида рассеивания оценок параметров.

При построении ***A-*** и ***D-оптимальных планов*** чрезвычайно полезной оказывается следующая *обобщенная теорема эквивалентности.*

Теорема 1.2 [1–4]. Следующие утверждения:

1) план ξ^* минимизирует $X\left[M(\xi)\right]$;

2) план ξ^* минимизирует $\max\limits_{\alpha\in\Omega_\alpha} \mu(\alpha, \xi)$;

3) $\max\limits_{\alpha \in \Omega_\alpha} \mu(\alpha, \xi^*) = \eta$

эквивалентны между собой. Информационные матрицы планов, удовлетворяющих условиям 1–3, совпадают. Любая линейная комбинация планов, удовлетворяющих 1–3, также удовлетворяет 1–3.

Значения параметров теоремы эквивалентности $X\left[M(\xi)\right]$, $\mu(\alpha, \xi)$, η представлены в таблице.

Соответствие значений параметров обобщенной теоремы эквивалентности критериям оптимальности

Критерий	Параметры		
	$X\left[M(\xi)\right]$	$\mu[\alpha, \xi]$	η
A-оптимальности	$\operatorname{sp} M^{-1}(\xi)$	$\operatorname{sp}\left[M^{-2}(\xi)M(\alpha)\right]$	$\operatorname{sp} M^{-1}(\xi^*)$
D-оптимальности	$-\ln\det M(\xi)$	$\operatorname{sp}\left[M^{-1}(\xi)M(\alpha)\right]$	s

Доказательство

Начнем с критерия *A*-оптимальности.

1. Покажем, что из утверждения 1 следуют 2 и 3. Пусть план ξ^* минимизирует $\operatorname{sp} M^{-1}(\xi)$. Рассмотрим план, соответствующий линейной комбинации плана ξ^* и некоторого произвольного плана ξ:

$$\tilde{\xi} = (1-a)\xi^* + a\xi\,, \quad 0 \le a \le 1\,. \tag{1.9}$$

В силу выпуклости множества информационных матриц, соответствующих непрерывным нормированным планам, можно записать, что

$$M(\tilde{\xi}) = (1-a)M(\xi^*) + aM(\xi)\,.$$

Поскольку план ξ^* минимизирует $\operatorname{sp} M^{-1}(\xi)$, всякое отклонение от ξ^* приведет к увеличению $\operatorname{sp} M^{-1}(\xi)$, т. е.

$$\frac{\partial}{\partial a}\operatorname{sp}M^{-1}(\tilde{\xi})\Bigg|_{a=0} = \operatorname{sp}\frac{\partial}{\partial a}M^{-1}(\tilde{\xi})\Bigg|_{a=0} =$$

$$= \operatorname{sp}\left[-M^{-1}(\tilde{\xi})\frac{\partial M(\tilde{\xi})}{\partial a}M^{-1}(\tilde{\xi})\right]\Bigg|_{a=0} =$$

$$= \operatorname{sp}\left\{M^{-1}(\xi^*)\left[M(\xi^*) - M(\xi)\right]M^{-1}(\xi^*)\right\} =$$

$$= \operatorname{sp}M^{-1}(\xi^*) - \operatorname{sp}\left\{M^{-2}(\xi^*)M(\xi)\right\} \geq 0 .$$

Полагая, что спектр плана ξ состоит из одной точки $\alpha \in \Omega_\alpha$, можно получить

$$\operatorname{sp}M^{-1}(\xi^*) \geq \operatorname{sp}\left\{M^{-2}(\xi^*)M(\alpha)\right\} .$$

С другой стороны, для любого плана ξ

$$\operatorname{sp}M^{-1}(\xi) = \operatorname{sp}\left\{M^{-2}(\xi)M(\xi)\right\} = \operatorname{sp}\left\{M^{-2}(\xi)\int_{\Omega_\alpha} M(\alpha)\xi(d\alpha)\right\} =$$

$$= \int_{\Omega_\alpha} \operatorname{sp}\left(M^{-2}(\xi)M(\alpha)\right)\xi(d\alpha) \leq \max_{\alpha\in\Omega_\alpha} \operatorname{sp}\left(M^{-2}(\xi)M(\alpha)\right) . \qquad (1.10)$$

Поскольку неравенство справедливо и для ξ^*,

$$\operatorname{sp}\left(M^{-1}(\xi^*)\right) \leq \max_{\alpha\in\Omega_\alpha} \operatorname{sp}\left(M^{-2}(\xi)M(\alpha)\right) .$$

Таким образом, второй и третий пункты теоремы выполняются.

2. Покажем, что из утверждения 2 следует 1 и 3. Пусть план ξ^* минимизирует $\max\limits_{\alpha\in\Omega_\alpha} \mu(\alpha, \xi)$. В силу неравенства (1.10) это сразу же доказывает третье утверждение теоремы.

Для вывода первого утверждения предположим противное. Пусть план ξ^* минимизирует $\max\limits_{\alpha\in\Omega\alpha} \mu(\alpha, \xi)$ и не является A-оптимальным. Выпуклость функционала $\mathrm{sp}\, M^{-1}(\xi)$ на множестве информационных матриц обеспечивает существование ξ, для которого

$$\frac{\partial}{\partial a}\mathrm{sp}\, M^{-1}\Big((1-a)\xi^* + a\xi\Big)\Bigg|_{a=0} =$$

$$= \mathrm{sp}\, M^{-1}(\xi^*) - \mathrm{sp}\Big[M^{-2}(\xi^*)M(\xi)\Big] < 0 . \qquad (1.11)$$

Поскольку любой план ξ можно представить в виде суперпозиции конечного числа одноточечных планов, будем считать, что ξ состоит из k точек. Тогда

$$\mathrm{sp}\, M^{-1}(\xi^*) - \mathrm{sp}\Big[M^{-2}(\xi^*)M(\xi)\Big] =$$

$$= s\mathrm{p}\, M^{-1}(\xi^*) - \sum_{i=1}^{k} p_i\, \mathrm{sp}\Big[M^{-2}(\xi^*)M(\alpha_i)\Big].$$

Так как план ξ^* минимизирует $\mathrm{sp} M^{-1}(\xi)$, для него выполняется неравенство (1.11) и

$$\mathrm{sp}\, M^{-1}(\xi^*) - \sum_{i=1}^{k} p_i\, \mathrm{sp}\Big[M^{-2}(\xi^*)M(\alpha_i)\Big] \geq$$

$$\geq s\mathrm{p}\, M^{-1}(\xi^*) - \mathrm{sp}\, M^{-1}(\xi^*)\sum_{i=1}^{k} p_i = 0 ,$$

т. е.

$$\mathrm{sp}\, M^{-1}(\xi^*) - \mathrm{sp}\Big[M^{-2}(\xi^*)M(\xi)\Big] \geq 0. \qquad (1.12)$$

Неравенства (1.11) и (1.12) противоречат друг другу. Значит, предположение оказалось неверным и план, минимизирующий $\max\limits_{\alpha\in\Omega_\alpha} \mu(\alpha, \xi)$, будет A-оптимальным.

3. Покажем, что все планы, удовлетворяющие условиям 1 – 3, и их линейные комбинации имеют одинаковые информационные матрицы. Пусть планы ξ_1 и ξ_2 с информационными матрицами $M(\xi_1)$ и $M(\xi_2)$ соответственно являются A-оптимальными и $M(\xi_1) \neq M(\xi_2)$. Рассмотрим линейную комбинацию планов ξ_1 и ξ_2:

$$\xi = (1-a)\xi_2 + a\xi_1 . \tag{1.13}$$

Плану (1.13) соответствует информационная матрица

$$M(\xi) = (1-a)M(\xi_2) + aM(\xi_1) .$$

Воспользовавшись свойством строгой выпуклости функционала $\operatorname{sp} M^{-1}(\xi)$, получим

$$\operatorname{sp} M(\xi) \leq (1-a)\operatorname{sp} M(\xi_2) + a\operatorname{sp} M(\xi_1) . \tag{1.14}$$

Поскольку планы ξ_1 и ξ_2 являются A-оптимальными,

$$\operatorname{sp} M^{-1}(\xi) \geq \operatorname{sp} M^{-1}(\xi_2) = \operatorname{sp} M^{-1}(\xi_1) . \tag{1.15}$$

Неравенства (1.14) и (1.15) не противоречат друг другу, если

$$M(\xi_1) = M(\xi_2) = M(\xi) .$$

Перейдем к критерию D-оптимальности.

1. Снова покажем, что из условия 1 следуют 2 и 3. Для этого рассмотрим план $\tilde{\xi}$, соответствующий линейной комбинации (1.9). Так как ξ^* максимизирует $\det M(\xi)$, то ξ^* максимизирует $\ln\det M(\xi)$ и всякое отклонение от ξ^* приведет к уменьшению $\ln\det M(\xi)$, т. е.

$$\frac{\partial}{\partial a}\ln\det M(\tilde{\xi}) \Bigg|_{a=0} = \operatorname{sp}\left[M^{-1}(\tilde{\xi})\frac{\partial M(\tilde{\xi})}{\partial a} \right] \Bigg|_{a=0} =$$

$$= \operatorname{sp}\left\{ M^{-1}(\tilde{\xi})\left[M(\xi) - M(\xi^*) \right]\Big|_{a=0} \right\} =$$

$$= \operatorname{sp}\left\{ M^{-1}(\xi^*) M(\xi) \right\} - s \leq 0 . \tag{1.16}$$

Если спектр плана ξ состоит из одной точки $\alpha \in \Omega_\alpha$, то из (1.16) получим

$$\mathrm{sp}\left\{M^{-1}(\xi^*)M(\alpha)\right\} = \mu(\alpha, \xi^*) \le s\,. \tag{1.17}$$

Кроме того, для любого плана ξ справедливо

$$s = \left\{\mathrm{sp}\,M^{-1}(\xi)M(\xi)\right\} = \int\limits_{\Omega_\alpha} \mathrm{sp}\,M^{-1}(\xi)M(\alpha)\xi d(\alpha) \le$$

$$\le \max_{\alpha\in\Omega_\alpha} \mathrm{sp}\left(M^{-1}(\xi)M(\alpha)\right) = \max_{\alpha\in\Omega_\alpha} \mu(\alpha, \xi)\,. \tag{1.18}$$

Так как неравенство справедливо и для ξ^*, то

$$\max_{\alpha\in\Omega_\alpha} \mu(\alpha, \xi^*) \ge s\,. \tag{1.19}$$

Из (1.17)–(1.19) следует, что второй и третий пункты теоремы выполняются.

2. Теперь покажем, что из условия 2 следуют 1 и 3. Пусть план ξ^* минимизирует $\max\limits_{\alpha\in\Omega_\alpha} \mu(\alpha, \xi)$. В силу неравенства (1.18) это сразу же доказывает третий пункт теоремы.

Для вывода первого условия предположим противное, т. е. что план ξ^* не D-оптимален. Отсюда следует, что $\ln\det M(\xi)$ строго вогнут на множестве невырожденных матриц, последнее равносильно существованию плана ξ, для которого

$$\frac{\partial}{\partial a}\ln\det((1-a)M(\xi^*) + aM(\xi))\Bigg|_{a=0} = \mathrm{sp}\left[M^{-1}(\xi^*)M(\xi)\right] - s > 0\,.$$

Воспользовавшись свойством 3 нормированной информационной матрицы, представим план ξ в виде суперпозиций конечного числа точек. Тогда

$$\mathrm{sp}\left[M^{-1}(\xi^*)M(\xi)\right]-s=\sum_{i=1}^{k}p_i\,\mathrm{sp}\left[M^{-1}(\xi^*)M(\alpha_i)\right]-s=$$

$$=\sum_{i=1}^{k}p_i\mu(\alpha_i,\xi^*)-s.$$

Для плана ξ^* выполняется

$$\sum_{i=1}^{k}p_i\mu(\alpha_i,\xi^*)-s\le s\sum_{i=1}^{k}p_i-s=0\,,$$

т. е.

$$\mathrm{sp}\left[M^{-1}(\xi^*)M(\xi)\right]-s\le 0\,.$$

Получаем противоречие. Следовательно, наше предположение оказалось неверным и план является *D*-оптимальным.

3. Аналогично доказательству для *A*-оптимальных планов, рассмотрим *D*-оптимальные планы ξ_1, ξ_2 и план ξ, являющийся линейной комбинацией этих планов, с соответствующими им информационными матрицами $M(\xi_1)$, $M(\xi_2)$ и $M(\xi)$.

Воспользовавшись свойством строгой вогнутости функционала $\ln\det M(\xi)$, имеем

$$\ln\det M(\xi)>(1-a)\ln\det M(\xi_2)+a\ln\det M(\xi_1)\,.$$

Так как планы ξ_1 и ξ_2 являются *D*-оптимальными, то

$$\det M(\xi_1)=\det M(\xi_2)\ge\det M(\xi)\,.$$

Следовательно,

$$M(\xi_1)=M(\xi_2)=M(\xi)\,.$$

Теорема доказана.

Укажем два следствия, удобных для проверки планов на *A*- и *D*-оптимальность.

Следствие 1

В точках спектра *A*-оптимального плана ξ^* функция $\mu(\alpha, \xi^*)$ достигает своего максимального значения $\operatorname{sp} M^{-1}(\xi^*)$.

Доказательство

Предположим, что это не так и

$$\mu(\alpha, \xi) < \operatorname{sp} M^{-1}(\xi^*),$$

где α – одна из точек спектра плана ξ, тогда в силу условия 3 теоремы

$$\int\limits_{\Omega_\alpha} \mu(\alpha, \xi^*)\xi^*(d\alpha) < \max_{\alpha \in \Omega_\alpha} \mu(\alpha, \xi^*) \int\limits_{\Omega_\alpha} \xi^*(d\alpha) =$$

$$= \max_{\alpha \in \Omega_\alpha} \mu(\alpha, \xi^*) = \operatorname{sp} M^{-1}(\xi^*).$$

С другой стороны,

$$\int\limits_{\Omega_\alpha} \mu(\alpha, \xi^*)\xi^*(d\alpha) = \int\limits_{\Omega_\alpha} \operatorname{sp}\left(M^{-2}(\xi^*)M(\alpha)\right)\xi^*(d\alpha) =$$

$$= \operatorname{sp}\left(M^{-2}(\xi^*) \int\limits_{\Omega_\alpha} M(\alpha)\xi^*(d\alpha) \right) = \operatorname{sp}\left(M^{-2}(\xi^*)M(\xi^*)\right) = \operatorname{sp} M^{-1}(\xi^*).$$

Получаем противоречие. Следствие доказано.

Следствие 2

В точках *D*-оптимального плана ξ^* функция $\mu(\alpha, \xi^*)$ достигает своего максимального значения *s*.

Доказательство

Предположим, что это не так и

$$\mu(\alpha, \xi^*) < s,$$

тогда в силу условия 3 теоремы эквивалентности

$$\int\limits_{\Omega_\alpha} \mu(\alpha, \xi^*)\xi^*(d\alpha) < \max_{\alpha \in \Omega_\alpha} \mu(\alpha, \xi^*) \int\limits_{\Omega_\alpha} \xi^*(d\alpha) = \max_{\alpha \in \Omega_\alpha} \mu(\alpha, \xi^*) = s.$$

С другой стороны,

$$\int_{\Omega_\alpha} \mu(\alpha,\xi^*)\xi^* d(\alpha) < \int_{\Omega_\alpha} \mathrm{sp}[M^{-1}(\xi^*)M(\alpha)]\xi^* d(\alpha) =$$

$$= \mathrm{sp}[M^{-1}(\xi^*)M(\xi^*)] = s\,.$$

Получаем противоречие. Следствие доказано.

Теорема 1.2 дает еще одну статистическую интерпретацию *D*-оптимальному планированию экспериментов, утверждая эквивалентность *D*- и *G*-оптимальных планов.

Критерий *G*-оптимальности относится к группе критериев, направленных на повышение точности прогнозируемых по модели выходных данных [5–10].

План ξ^* называется *G-оптимальным* (*минимаксным*), если он удовлетворяет условию

$$\max_{\alpha\in\Omega_\alpha} \mathrm{sp}\left[M^{-1}(\xi^*)M(\alpha)\right] = \min_{\xi\in\Omega_\xi}\max_{\alpha\in\Omega_\alpha} \mathrm{sp}\left[M^{-1}(\xi)M(\alpha)\right].$$

G-оптимальный план обеспечивает не слишком высокую обобщенную дисперсию ошибки прогнозирования из-за минимизации максимальной по $\alpha \in \Omega_\alpha$ дисперсии.

1.2. ПРЯМАЯ ГРАДИЕНТНАЯ ПРОЦЕДУРА СИНТЕЗА НЕПРЕРЫВНЫХ ОПТИМАЛЬНЫХ ПЛАНОВ

Прямой подход предполагает непосредственное решение оптимизационной задачи

$$\xi^* = \arg\min_{\xi\in\Omega_\xi} X\left[M(\xi)\right] \tag{1.20}$$

различными численными методами оптимизации [11–17], характеризуется многоэкстремальностью, большой размерностью пространства варьируемых переменных и высокой скоростью сходимости на начальных этапах. При этом для критериев *A*- и *D*-оптимальности получается задача выпуклого программирования, варианты решения которой представлены, например, в [3, 7, 18].

Остановимся на следующем варианте **прямой градиентной процедуры** [4, 19–21]♣ на базе метода последовательного квадратичного программирования – в настоящий момент одного из самых передовых и эффективных методов [15, 17].

Шаг 1. Зададим начальный невырожденный план

$$\xi_0 = \begin{Bmatrix} \alpha_1^0, \alpha_2^0, ..., \alpha_q^0, \\ p_1^0, p_2^0, ..., p_q^0 \end{Bmatrix}, \quad \alpha_i^0 \in \Omega_\alpha, \quad p_i^0 = \frac{1}{q}, \quad i = 1, 2, ..., q,$$

в котором $q = \dfrac{s(s+1)}{2} + 1$, s – количество неизвестных параметров. Вычислим информационные матрицы $M\left(\alpha_i^0\right)$ одноточечных планов для $i = 1, 2, ..., q$ и по формуле (1.4) информационную матрицу всего плана ξ_0. Положим $k = 0$.

Шаг 2. Считая веса $p_1^k, p_2^k, ..., p_q^k$ фиксированными, для задачи

$$X\left[M(\xi_k)\right] \to \min_{\alpha_1^k, ..., \alpha_q^k}, \ \alpha_i^k \in \Omega_\alpha, \ i = 1, 2, ..., q,$$

выполним одну итерацию *метода последовательного квадратичного программирования*. Составим план

$$\bar{\xi}_k = \begin{Bmatrix} \alpha_1^{k+1}, \alpha_2^{k+1}, ..., \alpha_q^{k+1} \\ p_1^k, \ p_2^k, ..., p_q^k \end{Bmatrix},$$

где α_i^{k+1} – точки, найденные на шаге 2, и вычислим $M\left(\alpha_i^{k+1}\right)$, $i = 1, 2, ..., q$.

♣ Соответствие значений параметров $X\left[M(\xi)\right]$, $\mu(\alpha, \xi)$, η прямой процедуры критериям *A*- и *D*-оптимальности такое же, как в таблице.

Шаг 3. Зафиксируем точки спектра полученного плана и для задачи

$$X\left[M\left(\overline{\xi}_k\right)\right] \to \min_{p_1^k,\, p_2^k,\, \ldots,\, p_q^k}, \ \sum_{i=1}^{q} p_i^k = 1,\ p_i^k \ge 0,\ i = 1,2,\ldots,q,$$

выполним одну итерацию *метода последовательного квадратичного программирования*. Составим план

$$\xi_{k+1} = \begin{Bmatrix} \alpha_1^{k+1}, \alpha_2^{k+1}, \ldots, \alpha_q^{k+1} \\ p_1^{k+1}, p_2^{k+1}, \ldots, p_q^{k+1} \end{Bmatrix}.$$

Шаг 4. Если для малого положительного числа δ выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^{q}\left[\left\|\alpha_i^{k+1} - \alpha_i^k\right\|^2 + \left(p_i^{k+1} - p_i^k\right)^2\right] \le \delta,$$

перейдем на шаг 5, в противном случае для $k = k+1$ повторим шаги 2 и 3.

Шаг 5. Проверим необходимое условие оптимальности плана

$$\left|\mu\left(\alpha_i^{k+1}, \xi_{k+1}\right) - \eta\right| \le \delta,\ i = 1, 2, \ldots, q.$$

Если требуемое условие оптимальности выполняется (см. следствия из теоремы 1.2), закончим процесс. В противном случае повторим все сначала, скорректировав начальный план ξ_0.

Приведенный алгоритм требует вычисления градиентов

$$\nabla_A X\left[M(\xi)\right] = \left\|\frac{\partial X\left[M(\xi)\right]}{\partial \alpha_{i,j}}\right\|, \quad i = 1, 2, \ldots, q,\ j = 1, 2, \ldots, n, \quad (1.21)$$

и

$$\nabla_P X\left[M(\xi)\right] = \left\|\frac{\partial X\left[M(\xi)\right]}{\partial p_i}\right\|, \quad i = 1,2,\ldots,q. \quad (1.22)$$

Начнем с критерия *A*-оптимальности (1.7). Для него с учетом формулы (1.4) имеем:

$$\frac{\partial X\left[M(\xi)\right]}{\partial \alpha_{i,j}} = \mathrm{sp}\left[\frac{\partial D(\xi)}{\partial \alpha_{i,j}}\right] = -\mathrm{sp}\left[D(\xi)\frac{\partial M(\xi)}{\partial \alpha_{i,j}}D(\xi)\right] =$$

$$= p_i\,\mathrm{sp}\left[D^2(\xi)\frac{\partial M(\alpha_i)}{\partial \alpha_{i,j}}\right]; \tag{1.23}$$

$$\frac{\partial X\left[M(\xi)\right]}{\partial p_i} = \mathrm{sp}\left[\frac{\partial D(\xi)}{\partial p_i}\right] = -\mathrm{sp}\left[D(\xi)\frac{\partial M(\xi)}{\partial p_i}D(\xi)\right] =$$

$$= -\mathrm{sp}\left[D^2(\xi)M(\alpha_i)\right]. \tag{1.24}$$

Перейдем теперь к критерию D-оптимальности (1.8). В этом случае

$$\frac{\partial X\left[M(\xi)\right]}{\partial \alpha_{i,j}} = \frac{\partial\left[-\ln\det M(\xi)\right]}{\partial \alpha_{i,j}} = -\mathrm{sp}\left[D(\xi)\frac{\partial M(\xi)}{\partial \alpha_{i,j}}\right] =$$

$$= -\mathrm{sp}\left[D(\xi)p_i\frac{\partial M(\alpha_i)}{\partial \alpha_{i,j}}\right] = -p_i\;\mathrm{sp}\left[D(\xi)\frac{\partial M(\alpha_i)}{\partial \alpha_{i,j}}\right]; \tag{1.25}$$

$$\frac{\partial X\left[M(\xi)\right]}{\partial p_i} = -\mathrm{sp}\left[D(\xi)\frac{\partial M(\xi)}{\partial p_i}\right] = -\mathrm{sp}\left[D(\xi)M(\alpha_i)\right]. \tag{1.26}$$

Таким образом [см. соотношения (1.23)–(1.26)], применение прямой градиентной процедуры синтеза непрерывных A- или D-оптимальных планов предполагает вычисление ИМФ и их производных по компонентам точек спектра плана эксперимента (1.2).

1.3. ДВОЙСТВЕННАЯ ГРАДИЕНТНАЯ ПРОЦЕДУРА СИНТЕЗА НЕПРЕРЫВНЫХ ОПТИМАЛЬНЫХ ПЛАНОВ

Другой подход (его называют двойственным) к решению оптимизационной задачи (1.20) основан на обобщенной теореме эквивалентности из раздела 1.1. В этом случае рассматриваемая задача уже не будет задачей выпуклого программирования, но размерность пространства варьируемых параметров и в целом скорость сходимости меньше, чем при прямом подходе. Возможные варианты двойственных процедур представлены, например, в [3, 5, 6, 18]. Остановимся на следующей **двойственной градиентной процедуре** построения непрерывных оптимальных планов из [4, 20–23]♣.

Шаг 1. Зададим начальный невырожденный план ξ_0 и по формуле (1.4) вычислим нормированную матрицу $M(\xi_0)$ плана. Положим $k=0$.

Шаг 2. Найдем локальный максимум

$$\alpha^k = \arg\max_{\alpha\in\Omega_\alpha} \mu(\alpha, \xi_k)$$

методом последовательного квадратичного программирования. Если окажется, что $\left|\mu\left(\alpha^k, \xi_k\right)-\eta\right| \le \delta,$ закончим процесс. Если $\mu\left(\alpha^k, \xi_k\right) > \eta,$ перейдем к шагу 3. В противном случае будем искать новый локальный максимум.

Шаг 3. Вычислим τ_k по формуле

$$\tau_k = \arg\min_{0\le\tau\le 1} X\left[M\left(\xi_{k+1}^{\tau}\right)\right].$$

Здесь

$$\xi_{k+1}^{\tau} = (1-\tau)\xi_k + \tau\xi(\alpha^k),$$

где $\xi(\alpha^k)$ – одноточечный план, размещенный в точке α^k.

Шаг 4. Составим план

$$\xi_{k+1} = (1-\tau_k)\xi_k + \tau_k\xi(\alpha^k),$$

произведем его «очистку» в соответствии с рекомендациями из [5], положим $k=k+1$ и перейдем на шаг 2.

♣ Соответствие значений параметров $X\left[M(\xi)\right]$, $\mu(\alpha, \xi)$, η двойственной процедуры критериям *A*- и *D*-оптимальности такое же, как в таблице.

Приведенный алгоритм требует вычисления градиента

$$\nabla_{\alpha}\mu(\alpha,\xi)=\left\|\frac{\partial\mu(\alpha,\xi)}{\partial\alpha_j}\right\|,\quad j=1,2,...,n. \tag{1.27}$$

Для критерия *A*-оптимальности (1.7) получаем

$$\frac{\partial\mu(\alpha,\xi)}{\partial\alpha_j}=\frac{\partial\,\mathrm{sp}\left[M^{-2}(\xi)M(\alpha)\right]}{\partial\alpha_j}=\mathrm{sp}\left[D^2(\xi)\frac{\partial M(\alpha)}{\partial\alpha_j}\right]. \tag{1.28}$$

В случае критерия *D*-оптимальности (1.8) имеем

$$\frac{\partial\mu(\alpha,\xi)}{\partial\alpha_j}=\frac{\partial\,\mathrm{sp}\left[M^{-1}(\xi)M(\alpha)\right]}{\partial\alpha_j}=\mathrm{sp}\left[D(\xi)\frac{\partial M(\alpha)}{\partial\alpha_j}\right]. \tag{1.29}$$

Соотношения (1.28) и (1.29) показывают, что, как и в случае прямой градиентной процедуры, для применения двойственной градиентной процедуры синтеза непрерывных *A*- или *D*-оптимальных планов необходимо разработать алгоритмы вычисления ИМФ и ее производной по компонентам точек спектра плана эксперимента.

Как прямая, так и двойственная процедура обладает своими преимуществами и недостатками. По-видимому, наиболее удачен подход, когда на первых этапах для улучшения начального приближения применяется прямая процедура, а затем при помощи двойственной процедуры строится *A*- или *D*-оптимальный план.

1.4. ПОСТРОЕНИЕ ДИСКРЕТНЫХ ОПТИМАЛЬНЫХ ПЛАНОВ

Предположим, что мы при помощи прямой, двойственной или комбинированной прямой – двойственной процедуры синтезировали непрерывный план

$$\xi^*=\begin{Bmatrix}\alpha_1^*, \alpha_2^*, ..., \alpha_q^*\\ p_1^*,\ p_2^*, ...,\ p_q^*\end{Bmatrix},\ \sum_{i-1}^{q}p_i^*=1,\ p_i^*\geq 0,\ \alpha_i^*\in\Omega_{\alpha},\ i=1,2,...,q.$$

Его практическое использование затруднено тем обстоятельством, что веса p_i^* представляют собой произвольные вещественные числа, заключенные в интервале от нуля до единицы, и в случае заданного числа ν возможных запусков системы величины $k_i^* = \nu p_i^*$ могут не быть целыми числами. Проведение эксперимента требует округления величин k_i^* до целых чисел. Очевидно, что полученный в результате такого округления план будет отличаться от оптимального непрерывного плана, причем приближение будет тем лучше, чем больше число возможных запусков.

Приведем следующий алгоритм «округления» непрерывного плана до точного (см. (1.1)) из [6].

Шаг 1. Вычислим числа σ_i' и σ_i'' по формулам

$$\sigma_i' = \left\lceil (\nu - q) p_i^* \right\rceil; \quad \sigma_i'' = \left\lfloor \nu p_i^* \right\rfloor, \quad i = 1, 2, ..., q$$

(здесь $\lceil z \rceil$ – ближайшее к z целое число, большее z; $\lfloor z \rfloor$ – целая часть числа z).

Шаг 2. Вычислим ν' и ν'', воспользовавшись выражениями

$$\nu' = \nu - \sum_{i=1}^{q} \sigma_i'; \quad \nu'' = \nu - \sum_{i=1}^{q} \sigma_i''.$$

При этом если $\nu' < \nu''$, то $\sigma_i = \sigma_i'$ для $i = 1, 2, ..., q$ и $\nu_1 = \nu'$. В противном случае $\sigma_i = \sigma_i''$, $\nu_1 = \nu''$.

Шаг 3. Величины $\nu p_i^* - \sigma_i$ $(i = 1, 2, ..., q)$ расположим в порядке убывания их значений. Положим $j = 1$.

Шаг 4. Если $\nu p_j^* - \sigma_j$ стоит на одном из первых ν_1 мест в указанном упорядоченном наборе, то положим $s_j = 1$, в противном случае $s_j = 0$.

Шаг 5. Если $j < q$, увеличим j на единицу и перейдем на шаг 4. В противном случае сформируем приближенный дискретный план

$$\xi_\nu^* = \begin{Bmatrix} \alpha_1^*, & \alpha_2^*, & ..., & \alpha_q^* \\ \dfrac{\sigma_1 + s_1}{\nu}, & \dfrac{\sigma_2 + s_2}{\nu}, & ..., & \dfrac{\sigma_q + s_q}{\nu} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_1^*, \alpha_2^*, ..., \alpha_q^* \\ \dfrac{k_1^*}{\nu}, \dfrac{k_2^*}{\nu}, ..., \dfrac{k_q^*}{\nu} \end{Bmatrix}.$$

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1.1. Рассмотрим следующую линейную по параметрам математическую модель:

$$y(t_{k+1}) = \theta^{\mathrm{T}} u(t_{k+1}) + v(t_{k+1}), \;\; k = 0, 1, .., N-1.$$

Будем считать, что случайные величины $v(t_{k+1})$ образуют стационарную белую гауссовскую последовательность, для которой

$$E\left[v(t_{k+1})\right] = 0, \;\; E\left[v(t_{i+1})v(t_{k+1})\right] = \sigma^2 \delta_{ik}$$

(здесь и далее δ_{ik} – символ Кронекера).

Покажите, что в этом случае элементы ИМФ не зависят от параметров θ, причем

$$M_{ij} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=0}^{N-1} u_i(t_{k+1}) u_j(t_{k+1}), \;\; i, \; j = 1, 2, ..., s \; .$$

1.2. Покажите, что для нелинейной безынерционной модели

$$y(t_{k+1}) = f\left[u(t_{k+1}); \theta\right] + v(t_{k+1}), \;\; k = 0, 1, ..., N-1,$$

в предположении, что шумы измерений $v(t_{k+1})$ образуют стационарную белую гауссовскую последовательность с нулевым средним и ковариационной матрицей R, элементы ИМФ вычисляются по следующей формуле:

$$M_{ij}(\theta) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\partial f^{\mathrm{T}}\left[u(t_{k+1}); \theta\right]}{\partial \theta_i} R^{-1} \frac{\partial f\left[u(t_{k+1}); \theta\right]}{\partial \theta_j} \, .$$

1.3. Используя теорему 1.2, покажите, что для модели из упражнения 1.1. при $s = 1$ и $1 \le u(t_{k+1}) \le 2$ A- и D-оптимальные планы эксперимента совпадают и сосредоточены в одной точке $u^*(t_1) = u^*(t_2) = ... = u^*(t_N) = 2$.

1.4. На основе прямой градиентной процедуры разработайте программы синтеза *A*- и *D*-оптимальных планов. Используйте результат упражнения 1.3 для тестирования программного обеспечения.

1.5. На основе двойственной градиентной процедуры разработайте программы построения *A*- и *D*-оптимальных планов. Используйте результат упражнения 1.3 для тестирования программного обеспечения.

ГЛАВА 2
СТРУКТУРНО-ВЕРОЯТНОСТНОЕ ОПИСАНИЕ МОДЕЛЕЙ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Рассмотрим управляемую, наблюдаемую, идентифицируемую модель динамической системы вида

$$x(t_{k+1}) = f\left[x(t_k), u(t_k), t_k\right] + \Gamma(t_k)w(t_k)\,; \tag{2.1}$$

$$y(t_{k+1}) = h\left[x(t_{k+1}), t_{k+1}\right] + v(t_{k+1})\,, \quad k = 0, 1, ..., N-1\,, \tag{2.2}$$

где $x(t_k)$ – n-вектор состояния; $u(t_k)$ – детерминированный r-вектор управления (входа); $w(t_k)$ – p-вектор шума системы (возмущения); $y(t_{k+1})$ – m-вектор измерения (выхода); $v(t_{k+1})$ – m-вектор шума (ошибки) измерения.

Априорные предположения:

- случайные векторы $w(t_k)$ и $v(t_{k+1})$ образуют стационарные белые гауссовские последовательности, для которых

$$E\left[w(t_k)\right] = 0\,,\ E\left[w(t_i)w^{\mathrm{T}}(t_k)\right] = Q\delta_{ik}\,,$$

$$E\left[v(t_{k+1})\right] = 0\,,\ E\left[v(t_{i+1})v^{\mathrm{T}}(t_{k+1})\right] = R\delta_{ik}\,,$$

$$E\left[v(t_{i+1})w^{\mathrm{T}}(t_k)\right] = 0\,,\ k, i = 0, 1, \ldots, N-1\,;$$

- начальное состояние $x(t_0)$ имеет нормальное распределение с параметрами

$$E\left[x(t_0)\right] = \bar{x}(t_0)\,, \quad E\left\{\left[x(t_0) - \bar{x}(t_0)\right]\left[x(t_0) - \bar{x}(t_0)\right]^{\mathrm{T}}\right\} = P(t_0)$$

и не коррелирует с $w(t_k)$ и $v(t_{k+1})$ при любых значениях k ;

- неизвестные постоянные параметры сведены в вектор θ, включающий в себя элементы вектор-функций $f\left[x(t_k), u(t_k), t_k\right]$, $h\left[x(t_{k+1}), t_{k+1}\right]$, матриц $\Gamma(t_k)$, Q, R, $P(t_0)$ и вектора $\overline{x}(t_0)$ в различных комбинациях.

Частным случаем модели (2.1), (2.2) являются модели линейной нестационарной системы

$$x(t_{k+1}) = a\left[u(t_k), t_k\right] + F(t_k)x(t_k) + \Gamma(t_k)w(t_k); \tag{2.3}$$

$$y(t_{k+1}) = A(t_{k+1}) + H(t_{k+1})x(t_{k+1}) + v(t_{k+1}),\ k = 0, 1, ..., N-1, \tag{2.4}$$

и линейной стационарной системы

$$x(t_{k+1}) = Fx(t_k) + \Psi u(t_k) + \Gamma w(t_k); \tag{2.5}$$

$$y(t_{k+1}) = Hx(t_{k+1}) + v(t_{k+1}),\ \ k = 0, 1, ..., N-1. \tag{2.6}$$

При планировании эксперимента для моделей нелинейных систем (2.1), (2.2) с указанными априорными предположениями будем применять *временную* [24, 25] и *статистическую* [26, 27] линеаризацию, в результате сводя исходную задачу к соответствующей задаче для модели вида (2.3), (2.4) со специальным образом определенными векторами $a\left[u(t_k), t_k\right]$, $A(t_{k+1})$ и матрицами $F(t_k)$, $H(t_{k+1})$.

Линеаризация во временной области возможна в предположении, что вектор-функции $f\left[x(t_k), u(t_k), t_k\right]$ и $h\left[x(t_{k+1}), t_{k+1}\right]$ непрерывны и дифференцируемы по $x(t_k)$, $u(t_k)$ и $x(t_{k+1})$ соответственно.

Зададим номинальную траекторию $\left\{x_{\text{н}}(t_{k+1}),\ k = 0, 1, ..., N-1\right\}$ в соответствии с равенством

$$\begin{cases} x_{\text{н}}(t_{k+1}) = f\left[x_{\text{н}}(t_k), u_{\text{н}}(t_k), t_k\right],\ k = 0, 1, \ldots, N-1; \\ x_{\text{н}}(t_0) = \overline{x}(t_0). \end{cases} \tag{2.7}$$

Разложив для каждого k вектор-функции $f\left[x(t_k), u(t_k), t_k\right]$ и $h\left[x(t_{k+1}), t_{k+1}\right]$ в ряды Тейлора в окрестностях точек $\left[x_{\text{н}}(t_k), u_{\text{н}}(t_k)\right]$ и $x_{\text{н}}(t_{k+1})$ соответственно и отбросив члены второго и более высоких порядков, запишем уравнения линеаризованной модели:

$$x(t_{k+1}) = f\left[x_{\text{н}}(t_k), u_{\text{н}}(t_k), t_k\right] + \frac{\partial f\left[x_{\text{н}}(t_k), u_{\text{н}}(t_k), t_k\right]}{\partial x(t_k)}\left[x(t_k) - x_{\text{н}}(t_k)\right] +$$

$$+ \frac{\partial f\left[x_{\text{н}}(t_k), u_{\text{н}}(t_k), t_k\right]}{\partial u(t_k)}\left[u(t_k) - u_{\text{н}}(t_k)\right] + \Gamma(t_k)w(t_k);$$

$$y(t_{k+1}) = h\left[x_{\text{н}}(t_{k+1}), t_{k+1}\right] +$$

$$+ \frac{\partial h\left[x_{\text{н}}(t_{k+1}), t_{k+1}\right]}{\partial x(t_{k+1})}\left[x(t_{k+1}) - x_{\text{н}}(t_{k+1})\right] + v(t_{k+1}).$$

Положив

$$a\left[u(t_k), t_k\right] = f\left[x_{\text{н}}(t_k), u_{\text{н}}(t_k), t_k\right] - \frac{\partial f\left[x_{\text{н}}(t_k), u_{\text{н}}(t_k), t_k\right]}{\partial x(t_k)} x_{\text{н}}(t_k) +$$

$$+ \frac{\partial f\left[x_{\text{н}}(t_k), u_{\text{н}}(t_k), t_k\right]}{\partial u(t_k)}\left[u(t_k) - u_{\text{н}}(t_k)\right]; \tag{2.8}$$

$$F(t_k) = \frac{\partial f\left[x_{\text{н}}(t_k), u_{\text{н}}(t_k), t_k\right]}{\partial x(t_k)}; \tag{2.9}$$

$$A(t_{k+1}) = h\left[x_{\text{н}}(t_{k+1}), t_{k+1}\right] - \frac{\partial h\left[x_{\text{н}}(t_{k+1}), t_{k+1}\right]}{\partial x(t_{k+1})} x_{\text{н}}(t_{k+1}); \tag{2.10}$$

$$H(t_{k+1}) = \frac{\partial h\left[x_{\text{н}}(t_{k+1}), t_{k+1}\right]}{\partial x(t_{k+1})}, \tag{2.11}$$

приходим к модели линейной нестационарной системы (2.3), (2.4).

В отличие от временной линеаризации статистическая линеаризация применима к неоднозначным функциям и к существенным нелинейностям, имеющим характеристики с угловыми точками и разрывами. Статистическая линеаризация заключается в замене нелинейной характеристики эквивалентной (в вероятностном смысле) линеаризованной функциональной зависимостью. В соответствии с [27] получим:

$$f\left[x(t_k), u(t_k), t_k\right] = f_0\left[\bar{x}(t_k), P(t_k), u(t_k), t_k\right] +$$

$$+ f_1\left[\bar{x}(t_k), P(t_k), u(t_k), t_k\right]\left[x(t_k) - \bar{x}(t_k)\right]; \qquad (2.12)$$

$$h\left[x(t_{k+1}), t_{k+1}\right] = h_0\left[\bar{x}(t_{k+1}), P(t_{k+1}), t_{k+1}\right] +$$

$$+ h_1\left[\bar{x}(t_{k+1}), P(t_{k+1}), t_{k+1}\right]\left[x(t_{k+1}) - \bar{x}(t_{k+1})\right], \qquad (2.13)$$

где

$$f_0\left[\bar{x}(t_k), P(t_k), u(t_k), t_k\right] = E\left\{f\left[x(t_k), u(t_k), t_k\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det\left[P(t_k)\right]}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\left[x(t_k), u(t_k), t_k\right] \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[x(t_k) - \bar{x}(t_k)\right]^{\mathrm{T}} P^{-1}(t_k)\left[x(t_k) - \bar{x}(t_k)\right]\right\} dx(t_k); \qquad (2.14)$$

$$f_1\left[\bar{x}(t_k), P(t_k), u(t_k), t_k\right] = \frac{\partial f_0\left[\bar{x}(t_k), P(t_k), u(t_k), t_k\right]}{\partial \bar{x}(t_k)};$$

$$h_0\left[\bar{x}(t_{k+1}), P(t_{k+1}), t_{k+1}\right] = E\left\{h\left[x(t_{k+1}), t_{k+1}\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det\left[P(t_{k+1})\right]}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} h\left[x(t_{k+1}), t_{k+1}\right] \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[x(t_{k+1}) - \bar{x}(t_{k+1})\right]^{\mathrm{T}} \times\right.$$

$$\left. \times P^{-1}(t_{k+1})\left[x(t_{k+1}) - \bar{x}(t_{k+1})\right]\right\} dx(t_{k+1}); \qquad (2.15)$$

$$h_1\left[\bar{x}(t_{k+1}), P(t_{k+1}), t_{k+1}\right] = \frac{\partial h_0\left[\bar{x}(t_{k+1}), P(t_{k+1}), t_{k+1}\right]}{\partial \bar{x}(t_{k+1})};$$

$$\bar{x}(t_k) = E\{x(t_k)\} =$$

$$= \begin{cases} f_0\left[\bar{x}(t_{k-1}),\, P(t_{k-1}),\, u(t_{k-1}),\, t_{k-1}\right], \text{если } k = 1, 2, ..., N-1, \\ \bar{x}(t_0), \text{если } k = 0; \end{cases} \tag{2.16}$$

$$P(t_k) = E\left\{\left[x(t_k) - \bar{x}(t_k)\right]\left[x(t_k) - \bar{x}(t_k)\right]^{\mathrm{T}}\right\} =$$

$$= \begin{cases} f_1\left[\bar{x}(t_{k-1}),\, P(t_{k-1}),\, u(t_{k-1}),\, t_{k-1}\right] P\left(t_{k-1}\right) \times \\ \times f_1^{\mathrm{T}}\left[\bar{x}(t_{k-1}),\, P(t_{k-1}),\, u(t_{k-1}),\, t_{k-1}\right] + \\ + \Gamma(t_k) Q \Gamma^{\mathrm{T}}(t_k), \text{ если } k = 1, 2, ..., N-1, \\ P(t_0), \text{ если } k = 0. \end{cases} \tag{2.17}$$

Отметим, что вычисление интегралов в формулах (2.14), (2.15) можно существенно упростить с помощью представленных в [26, 27] выражений для коэффициентов статистической линеаризации типовых одномерных нелинейностей, встречающихся в системах автоматического управления.

Подставив выражения (2.12), (2.13) в уравнения (2.1), (2.2) соответственно, с учетом обозначений

$$a\left[\bar{x}(t_k),\, P(t_k),\, u(t_k),\, t_k\right] = f_0\left[\bar{x}(t_k),\, P(t_k),\, u(t_k),\, t_k\right] -$$

$$- f_1\left[\bar{x}(t_k),\, P(t_k),\, u(t_k),\, t_k\right]\bar{x}(t_k)\,; \tag{2.18}$$

$$F\left[\bar{x}(t_k),\, P(t_k),\, u(t_k),\, t_k\right] = f_1\left[\bar{x}(t_k),\, P(t_k),\, u(t_k),\, t_k\right]; \tag{2.19}$$

$$A\left[\bar{x}(t_{k+1}),\, P(t_{k+1}),\, t_{k+1}\right] = h_0\left[\bar{x}(t_{k+1}),\, P(t_{k+1}),\, t_{k+1}\right] -$$

$$- h_1\left[\bar{x}(t_{k+1}),\, P(t_{k+1}),\, t_{k+1}\right]\bar{x}(t_{k+1})\,;$$

$$H\left[\bar{x}(t_{k+1}),\, P(t_{k+1}),\, t_{k+1}\right] = h_1\left[\bar{x}(t_{k+1}),\, P(t_{k+1}),\, t_{k+1}\right]$$

приходим к модели линейной нестационарной системы (2.3), (2.4).

ГЛАВА 3

ПЛАНИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ВХОДНЫХ СИГНАЛОВ

При построении моделей динамических систем можно использовать различные способы управления экспериментом. В простейшем случае управление экспериментом сводится к выбору оптимальных моментов измерений, в более сложном – к планированию оптимальных входных сигналов и начальных условий [9]. Возможны также варианты смешанных схем.

Планирование входных сигналов – по-видимому, наиболее эффективный способ управления экспериментом, используемый при построении моделей стохастических динамических систем. Отметим, что свобода в выборе входных характеристик существенно зависит от приложений. В экономических и экологических системах у экспериментатора нет возможности воздействовать на систему с целью проведения идентификационных экспериментов, в то время как в лабораторных условиях и на стадиях разработки нового оборудования выбор входных величин имеет лишь амплитудные и мощностные ограничения.

Остановимся на теоретических и прикладных аспектах синтеза *детерминированных* входных сигналов, рассмотрение которых позволит наполнить конкретным содержанием приведенные в разделах 1.2 и 1.3 прямую и двойственную градиентные процедуры построения непрерывных оптимальных планов.

Следуя [9], будем считать, что непрерывный нормированный план (1.2) в данном случае может быть задан в виде

$$\xi = \begin{Bmatrix} U_1, \ U_2, \ldots, U_q \\ p_1, \ p_2, \ldots, \ p_q \end{Bmatrix}, \ p_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^{q} p_i = 1, \tag{3.1}$$

$$U_i \in \Omega_U, \ i = 1, 2, \ldots, q.$$

При этом каждая точка спектра плана представляет собой последовательность импульсов, «развернутую во времени». Применительно к моделям, структурно-вероятностное описание которых представлено в главе 2, это означает, что

$$U_i = \begin{bmatrix} u^i(t_0) \\ u^i(t_1) \\ \cdots\cdots \\ u^i(t_{N-1}) \end{bmatrix}.$$

Замкнутое ограниченное множество Ω_U представляет собой область допустимых входных сигналов. На практике чаще всего используются два типа ограничений: на амплитуду и на мощность. В первом случае область допустимых входных сигналов определяется соотношением

$$\Omega_U = \left\{ U \in \mathrm{R}^{Nr} \;\middle|\; a_j \le u_j(t_k) \le b_j,\ k = 0, 1, ..., N-1,\ j = 1, 2, ..., r \right\}$$

и представляет собой координатный параллелепипед. Во втором случае

$$\Omega_U = \left\{ U \in R^{Nr} \;\middle|\; \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{r} u_j^2(t_k) \le C \right\}$$

и является шаром.

3.1. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННОЙ МАТРИЦЫ ПЛАНА

Нормированная информационная матрица плана (3.1) определяется соотношением

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^{q} p_i M(U_i; \theta). \tag{3.2}$$

В выражении (3.2) ИМФ одноточечных планов $M(U_i; \theta)$ зависят от подлежащих оцениванию параметров.

3.1.1. ВЫВОД ИНФОРМАЦИОННОЙ МАТРИЦЫ ФИШЕРА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ МОДЕЛЕЙ

Приведем вывод выражения ИМФ для гауссовских линейных нестационарных дискретных систем, которое обобщает все ранее полученные результаты.

Теорема 3.1 [28]. Для математической модели (2.3), (2.4) с априорными предположениями из главы 2 и неизвестными параметрами θ, входящими в матрицы $F(t_k)$, $\Gamma(t_k)$, $H(t_{k+1})$, Q, R, $P(t_0)$ и векторы $a\left[u(t_k), t_k\right]$, $A(t_{k+1})$, $\bar{x}(t_0)$ в различных комбинациях, элементы ИМФ определяются выражением

$$M_{ij}(\theta) = \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \mathrm{sp}\left[\frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_i} E\left[\hat{x}\left(t_{k+1} \mid t_k\right) \hat{x}^{\mathrm{T}}\left(t_{k+1} \mid t_k\right) \right] \times \right.\right.$$

$$\left. \times \frac{\partial H^{\mathrm{T}}(t_{k+1})}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] +$$

$$+\mathrm{sp}\left[\frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_i} E\left[\hat{x}\left(t_{k+1} \mid t_k\right) \frac{\partial \hat{x}^{\mathrm{T}}\left(t_{k+1} \mid t_k\right)}{\partial \theta_j} \right] H^{\mathrm{T}}(t_{k+1}) B^{-1}(t_{k+1}) \right] +$$

$$+\mathrm{sp}\left[\frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_i} E\left[\hat{x}\left(t_{k+1} \mid t_k\right) \right] \frac{\partial A^{\mathrm{T}}(t_{k+1})}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] +$$

$$+\mathrm{sp}\left[H(t_{k+1}) E\left[\frac{\partial \hat{x}\left(t_{k+1} \mid t_k\right)}{\partial \theta_i} \hat{x}^{\mathrm{T}}\left(t_{k+1} \mid t_k\right) \right] \frac{\partial H^{\mathrm{T}}(t_{k+1})}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] +$$

$$+\mathrm{sp}\left[H(t_{k+1}) E\left[\frac{\partial \hat{x}\left(t_{k+1} \mid t_k\right)}{\partial \theta_i} \frac{\partial \hat{x}^{\mathrm{T}}\left(t_{k+1} \mid t_k\right)}{\partial \theta_j} \right] H^{\mathrm{T}}(t_{k+1}) B^{-1}(t_{k+1}) \right] +$$

$$+\mathrm{sp}\left[H(t_{k+1}) E\left[\frac{\partial \hat{x}\left(t_{k+1} \mid t_k\right)}{\partial \theta_i} \right] \frac{\partial A^{\mathrm{T}}(t_{k+1})}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] +$$

$$+\mathrm{sp}\left[\frac{\partial A(t_{k+1})}{\partial\theta_i}E\left[\hat{x}^{\mathrm{T}}\left(t_{k+1}\mid t_k\right)\right]\frac{\partial H^{\mathrm{T}}(t_{k+1})}{\partial\theta_j}B^{-1}(t_{k+1})\right]+$$

$$+\mathrm{sp}\left[\frac{\partial A(t_{k+1})}{\partial\theta_i}E\left[\frac{\partial\hat{x}^{\mathrm{T}}\left(t_{k+1}\mid t_k\right)}{\partial\theta_j}\right]H^{\mathrm{T}}(t_{k+1})B^{-1}(t_{k+1})\right]+$$

$$+\mathrm{sp}\left[\frac{\partial A(t_{k+1})}{\partial\theta_i}\frac{\partial A^{\mathrm{T}}(t_{k+1})}{\partial\theta_j}B^{-1}(t_{k+1})\right]+$$

$$\left.+\frac{1}{2}\mathrm{sp}\left[\frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial\theta_i}B^{-1}(t_{k+1})\frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial\theta_j}B^{-1}(t_{k+1})\right]\right\},\quad i,j=1,2,\ldots,s\,, \tag{3.3}$$

в котором матрицы $B(t_{k+1})$, $\dfrac{\partial B(t_{k+1})}{\partial\theta_i}$ находятся при помощи уравнений дискретного фильтра Калмана.

Доказательство.

Введем в рассмотрение обновляющую последовательность

$$\varepsilon(t_{k+1})=y(t_{k+1})-H(t_{k+1})\hat{x}\left(t_{k+1}\mid t_k\right)-$$

$$-A(t_{k+1}),\quad k=0,1,\ldots,N-1\,. \tag{3.4}$$

В соотношении (3.4) $\hat{x}\left(t_{k+1}\mid t_k\right)$ определяется по следующим уравнениям дискретного фильтра Калмана [27, 29–33]:

$$\hat{x}\left(t_{k+1}\mid t_k\right)=F(t_k)\hat{x}\left(t_k\mid t_k\right)+a\left[u(t_k),t_k\right]; \tag{3.5}$$

$$P\left(t_{k+1}\mid t_k\right)=F(t_k)P\left(t_k\mid t_k\right)F^{\mathrm{T}}(t_k)+\Gamma(t_k)Q\Gamma^{\mathrm{T}}(t_k); \tag{3.6}$$

$$B(t_{k+1})=H(t_{k+1})P\left(t_{k+1}\mid t_k\right)H^{\mathrm{T}}(t_{k+1})+R; \tag{3.7}$$

$$K(t_{k+1})=P\left(t_{k+1}\mid t_k\right)H^{\mathrm{T}}(t_{k+1})B^{-1}(t_{k+1}); \tag{3.8}$$

$$\hat{x}\left(t_{k+1}\mid t_{k+1}\right)=\hat{x}\left(t_{k+1}\mid t_k\right)+K(t_{k+1})\varepsilon(t_{k+1}); \tag{3.9}$$

$$P\left(t_{k+1} \mid t_{k+1}\right) = \left[I - K(t_{k+1})H(t_{k+1})\right]P\left(t_{k+1} \mid t_k\right) \tag{3.10}$$

для $k = 0, 1 \ldots, N-1$, с начальными условиями $\hat{x}\left(t_0 \mid t_0\right) = \bar{x}(t_0)$, $P\left(t_0 \mid t_0\right) = P(t_0)$.

Запишем логарифмическую функцию правдоподобия:

$$\ln L\left(\theta;\, Y_1^N\right) = -\frac{Nm}{2}\ln 2\pi -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\left[\varepsilon^{\mathrm{T}}(t_{k+1})B^{-1}(t_{k+1})\varepsilon(t_{k+1}) + \ln\det B(t_{k+1})\right]. \tag{3.11}$$

Элементы ИМФ связаны с логарифмической функцией правдоподобия (3.11) соотношением [34–38]:

$$M_{ij}(\theta) = -\underset{Y}{E}\left[\frac{\partial^2 \ln L\left(\theta;\; Y_1^N\right)}{\partial\theta_i \partial\theta_j}\right],\quad i, j = 1, 2, \ldots, s, \tag{3.12}$$

в котором усреднение берется по выборочному пространству.

Поскольку

$$\frac{\partial B^{-1}(t_{k+1})}{\partial\theta_j} = -B^{-1}(t_{k+1})\frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial\theta_j}B^{-1}(t_{k+1}),$$

$$\frac{\partial \ln L\left(\theta;\, Y_1^N\right)}{\partial\theta_i} = -\sum_{k=0}^{N-1}\left\{\frac{\partial\varepsilon^{\mathrm{T}}(t_{k+1})}{\partial\theta_i}B^{-1}(t_{k+1})\varepsilon(t_{k+1}) - \frac{1}{2}\varepsilon^{\mathrm{T}}(t_{k+1})B^{-1}(t_{k+1}) \times\right.$$

$$\left.\times\frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial\theta_i}\mathrm{B}^{-1}(t_{k+1})\varepsilon(t_{k+1}) + \frac{1}{2}\mathrm{sp}\left[B^{-1}(t_{k+1})\frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial\theta_i}\right]\right\},$$

с учетом симметричности матриц $B(t_{k+1})$, $\dfrac{\partial B(t_{k+1})}{\partial\theta_i}$, $B^{-1}(t_{k+1})$, $B^{-1}(t_{k+1})\dfrac{\partial B(t_{k+1})}{\partial\theta_i}\,B^{-1}(t_{k+1})$ и равенства $a^{\mathrm{T}}b = \mathrm{sp}(ab^{\mathrm{T}})$, где $a, b \in R_n$, имеем:

$$
\frac{\partial^2 \ln L\left(\theta;\ Y_1^N\right)}{\partial\theta_i \partial\theta_j} = -\sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \mathrm{sp}\left[\frac{\partial^2 \varepsilon(t_{k+1})}{\partial\theta_i \partial\theta_j} \varepsilon^{\mathrm{T}}(t_{k+1}) B^{-1}(t_{k+1}) \right] - \right.
$$

$$
-\mathrm{sp}\left[\frac{\partial \varepsilon(t_{k+1})}{\partial\theta_i} \varepsilon^{\mathrm{T}}(t_{k+1}) B^{-1}(t_{k+1}) \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial\theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] +
$$

$$
+\mathrm{sp}\left[\frac{\partial \varepsilon(t_{k+1})}{\partial\theta_i} \frac{\partial \varepsilon^{\mathrm{T}}(t_{k+1})}{\partial\theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] -
$$

$$
-\mathrm{sp}\left[\frac{\partial \varepsilon(t_{k+1})}{\partial\theta_j} \varepsilon^{\mathrm{T}}(t_{k+1}) B^{-1}(t_{k+1}) \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial\theta_i} B^{-1}(t_{k+1}) \right] +
$$

$$
+\mathrm{sp}\left[\varepsilon(t_{k+1}) \varepsilon^{\mathrm{T}}(t_{k+1}) B^{-1}(t_{k+1}) \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial\theta_i} B^{-1}(t_{k+1}) \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial\theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] -
$$

$$
-\frac{1}{2}\mathrm{sp}\left[\varepsilon(t_{k+1}) \varepsilon^{\mathrm{T}}(t_{k+1}) B^{-1}(t_{k+1}) \frac{\partial^2 B(t_{k+1})}{\partial\theta_j \partial\theta_i} B^{-1}(t_{k+1}) \right] -
$$

$$
-\frac{1}{2}\mathrm{sp}\left[B^{-1}(t_{k+1}) \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial\theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial\theta_i} \right] +
$$

$$
\left. +\frac{1}{2}\mathrm{sp}\left[B^{-1}(t_{k+1}) \frac{\partial^2 B(t_{k+1})}{\partial\theta_i \partial\theta_j} \right] \right\}, \quad i,\ j = 1,\ 2,\ ...,\ s\ .
$$

Подставим последнее равенство в (3.12). Воспользовавшись тем, что

$$
\mathrm{sp}(AB) = \mathrm{sp}(BA), \quad \text{где } A \in R_{n\times m},\ B \in R_{m\times n},
$$

и

$$
E\left[\varepsilon(t_{k+1}) \varepsilon^{\mathrm{T}}(t_{k+1}) \right] = B(t_{k+1}),
$$

получим

$$M_{ij}(\theta)=\sum_{k=0}^{N-1}\left\{\mathrm{sp}\left[E\left(\frac{\partial^2\varepsilon(t_{k+1})}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\varepsilon^{\mathrm{T}}(t_{k+1})\right)B^{-1}(t_{k+1})\right]-\right.$$

$$-\mathrm{sp}\left[E\left(\frac{\partial\varepsilon(t_{k+1})}{\partial\theta_i}\varepsilon^{\mathrm{T}}(t_{k+1})\right)B^{-1}(t_{k+1})\frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial\theta_j}B^{-1}(t_{k+1})\right]+$$

$$+\mathrm{sp}\left[E\left(\frac{\partial\varepsilon(t_{k+1})}{\partial\theta_i}\frac{\partial\varepsilon^{\mathrm{T}}(t_{k+1})}{\partial\theta_j}\right)B^{-1}(t_{k+1})\right]-$$

$$-\mathrm{sp}\left[E\left(\frac{\partial\varepsilon(t_{k+1})}{\partial\theta_j}\varepsilon^{\mathrm{T}}(t_{k+1})\right)B^{-1}(t_{k+1})\frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial\theta_i}B^{-1}(t_{k+1})\right]+$$

$$\left.+\frac{1}{2}\mathrm{sp}\left[\frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial\theta_i}B^{-1}(t_{k+1})\frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial\theta_j}B^{-1}(t_{k+1})\right]\right\},\ i,j=1,2,...,s. \quad (3.13)$$

Таким образом, необходимо вычислить следующие математические ожидания:

$$E\left[\frac{\partial\varepsilon(t_{k+1})}{\partial\theta_{\mathrm{i}}}\varepsilon^{\mathrm{T}}(t_{k+1})\right];\quad E\left[\frac{\partial\varepsilon(t_{k+1})}{\partial\theta_i}\frac{\partial\varepsilon^{\mathrm{T}}(t_{k+1})}{\partial\theta_j}\right];$$

$$E\left[\frac{\partial^2\varepsilon(t_{k+1})}{\partial\theta_{\mathrm{i}}\partial\theta_j}\varepsilon^{\mathrm{T}}(t_{k+1})\right].$$

Поскольку

$$\frac{\partial\varepsilon(t_{k+1})}{\partial\theta_i}=-\frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial\theta_i}\hat{x}\left(t_{k+1}\mid t_k\right)-$$

$$-H\left(t_{k+1}\right)\frac{\partial\hat{x}\left(t_{k+1}\mid t_k\right)}{\partial\theta_i}-\frac{\partial A(t_{k+1})}{\partial\theta_i}; \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial^2\varepsilon(t_{k+1})}{\partial\theta_i\partial\theta_j}=-\frac{\partial^2 H(t_{k+1})}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\hat{x}\left(t_{k+1}\mid t_k\right)-\frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial\theta_i}\frac{\partial\hat{x}\left(t_{k+1}\mid t_k\right)}{\partial\theta_j}-$$

$$-\frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial\theta_j}\frac{\partial\hat{x}\left(t_{k+1}\mid t_k\right)}{\partial\theta_i}-H(t_{k+1})\frac{\partial^2\hat{x}\left(t_{k+1}\mid t_k\right)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}-\frac{\partial^2 A(t_{k+1})}{\partial\theta_i\partial\theta_j}, \quad (3.15)$$

из (3.14), (3.15) следует:

$$E\left[\frac{\partial\varepsilon(t_{k+1})}{\partial\theta_i}\varepsilon^{\mathrm{T}}(t_{k+1})\right]=-\frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial\theta_i}E\left[\hat{x}\left(t_{k+1}\mid t_k\right)\varepsilon^{\mathrm{T}}(t_{k+1})\right]-$$

$$-H(t_{k+1})E\left[\frac{\partial\hat{x}\left(t_{k+1}\mid t_k\right)}{\partial\theta_i}\varepsilon^{\mathrm{T}}(t_{k+1})\right]-\frac{\partial A(t_{k+1})}{\partial\theta_i}E\left[\varepsilon^{\mathrm{T}}(t_{k+1})\right]; \quad (3.16)$$

$$E\left[\frac{\partial\varepsilon(t_{k+1})}{\partial\theta_i}\frac{\partial\varepsilon^{\mathrm{T}}(t_{k+1})}{\partial\theta_j}\right]=\frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial\theta_i}E\left[\hat{x}\left(t_{k+1}\mid t_k\right)\hat{x}^{\mathrm{T}}\left(t_{k+1}\mid t_k\right)\right]\times$$

$$\times\frac{\partial H^{\mathrm{T}}(t_{k+1})}{\partial\theta_j}+\frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial\theta_i}E\left[\hat{x}\left(t_{k+1}\mid t_k\right)\frac{\partial\hat{x}^{\mathrm{T}}\left(t_{k+1}\mid t_k\right)}{\partial\theta_j}\right]H^{\mathrm{T}}(t_{k+1})+$$

$$+\frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial\theta_i}E\left[\hat{x}\left(t_{k+1}\mid t_k\right)\right]\frac{\partial A^{\mathrm{T}}(t_{k+1})}{\partial\theta_j}+$$

$$+H(t_{k+1})E\left[\frac{\partial\hat{x}\left(t_{k+1}\mid t_k\right)}{\partial\theta_i}\hat{x}^{\mathrm{T}}\left(t_{k+1}\mid t_k\right)\right]\frac{\partial H^{\mathrm{T}}(t_{k+1})}{\partial\theta_j}+$$

$$+H(t_{k+1})E\left[\frac{\partial\hat{x}\left(t_{k+1}\mid t_k\right)}{\partial\theta_i}\frac{\partial\hat{x}^{\mathrm{T}}\left(t_{k+1}\mid t_k\right)}{\partial\theta_j}\right]H^{\mathrm{T}}(t_{k+1})+$$

$$+H(t_{k+1})E\left[\frac{\partial\hat{x}\left(t_{k+1}\mid t_k\right)}{\partial\theta_i}\right]\frac{\partial A^{\mathrm{T}}(t_{k+1})}{\partial\theta_j}+$$

$$+\frac{\partial A(t_{k+1})}{\partial\theta_i}E\left[\hat{x}^{\mathrm{T}}\left(t_{k+1}\mid t_k\right)\right]\frac{\partial H^{\mathrm{T}}(t_{k+1})}{\partial\theta_j}+\frac{\partial A(t_{k+1})}{\partial\theta_i}\times$$

$$\times E\left[\frac{\partial\hat{x}^{\mathrm{T}}\left(t_{k+1}\mid t_k\right)}{\partial\theta_j}\right]H^{\mathrm{T}}(t_{k+1})+\frac{\partial A(t_{k+1})}{\partial\theta_i}\frac{\partial A^{\mathrm{T}}(t_{k+1})}{\partial\theta_j}; \qquad (3.17)$$

$$E\left[\frac{\partial^2\varepsilon(t_{k+1})}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\varepsilon^{\mathrm{T}}(t_{k+1})\right]=-\frac{\partial^2 H(t_{k+1})}{\partial\theta_i\partial\theta_j}E\left[\hat{x}\left(t_{k+1}\mid t_k\right)\varepsilon^{\mathrm{T}}(t_{k+1})\right]-$$

$$-\frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial\theta_i}E\left[\frac{\partial\hat{x}\left(t_{k+1}\mid t_k\right)}{\partial\theta_j}\varepsilon^{\mathrm{T}}(t_{k+1})\right]-$$

$$-\frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial\theta_j}E\left[\frac{\partial\hat{x}\left(t_{k+1}\mid t_k\right)}{\partial\theta_i}\varepsilon^{\mathrm{T}}(t_{k+1})\right]-$$

$$-H(t_{k+1})E\left[\frac{\partial^2\hat{x}\left(t_{k+1}\mid t_k\right)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\varepsilon^{\mathrm{T}}(t_{k+1})\right]-\frac{\partial^2 A(t_{k+1})}{\partial\theta_i\partial\theta_j}E\left[\varepsilon^{\mathrm{T}}(t_{k+1})\right]. \qquad (3.18)$$

Для доказательства теоремы нам необходимо вычислить следующие математические ожидания:

1) $E\left[\hat{x}\left(t_{k+1}\mid t_k\right)\varepsilon^{\mathrm{T}}(t_{k+1})\right]$;

2) $E\left[\frac{\partial\hat{x}\left(t_{k+1}\mid t_k\right)}{\partial\theta_i}\varepsilon^{\mathrm{T}}(t_{k+1})\right]$;

3) $E\left[\frac{\partial^2\hat{x}\left(t_{k+1}\mid t_k\right)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\varepsilon^{\mathrm{T}}(t_{k+1})\right]$.

Для вычисления первого математического ожидания воспользуемся формулой

$$\hat{x}\left(t_{k+1} \mid t_k\right) = \Phi(t_{k+1}, t_0)\overline{x}(t_0) + \sum_{\alpha=1}^{k+1} \Phi(t_{k+1}, t_\alpha) a(t_{\alpha-1}) +$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^{k} \Phi(t_{k+1}, t_\alpha) K(t_\alpha) \varepsilon(t_\alpha)\,, \tag{3.19}$$

которая выводится по индукции из уравнений (3.5), (3.9) фильтра Калмана, где

$$\Phi(t_{k+1}, t_\alpha) = \begin{cases} F(t_k)F(t_{k-1})\cdots F(t_\alpha), \text{ если } \alpha = 1, 2, ..., k; \\ I, \text{ если } \alpha = k+1. \end{cases}$$

Положив в выражении (3.19)

$$d(t_{k+1}) = \Phi(t_{k+1}, t_0)\overline{x}(t_0) + \sum_{\alpha=1}^{k+1} \Phi(t_{k+1}, t_\alpha) a(t_{\alpha-1})\,;$$

$$D(t_{k+1}, t_\alpha) = \Phi(t_{k+1}, t_\alpha) K(t_\alpha)\,,$$

получим

$$\hat{x}\left(t_{k+1} \mid t_k\right) = d(t_{k+1}) + \sum_{\alpha=1}^{k} D(t_{k+1}, t_\alpha) \varepsilon(t_\alpha)\,,\ k = 1, 2, ..., N-1\,. \tag{3.20}$$

Принимая во внимание, что

$$E\left[\varepsilon(t_{k+1})\right] = 0\,; \tag{3.21}$$

$$E\left[\varepsilon(t_{i+1})\varepsilon^{\mathrm{T}}(t_{k+1})\right] = B(t_{k+1})\delta_{ik}\,, \tag{3.22}$$

будем иметь:

$$E\left[\hat{x}\left(t_{k+1} \mid t_k\right)\varepsilon^{\mathrm{T}}(t_{k+1})\right] = d(t_{k+1})E\left[\varepsilon^{\mathrm{T}}(t_{k+1})\right] +$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^{k} D(t_{k+1}, t_\alpha) E\left[\varepsilon(t_\alpha)\varepsilon^{\mathrm{T}}(t_{k+1})\right] = \mathrm{O}\,. \tag{3.23}$$

Для вычисления второго математического ожидания продифференцируем $\hat{x}\left(t_{k+1} \mid t_k\right)$ из (3.20) по θ_i:

$$\frac{\partial \hat{x}\left(t_{k+1} \mid t_k\right)}{\partial \theta_i} = \frac{\partial\, d(t_{k+1})}{\partial \theta_i} +$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{k}\left[\frac{\partial D(t_{k+1}, t_\alpha)}{\partial \theta_i}\varepsilon(t_\alpha) + D(t_{k+1}, t_\alpha)\frac{\partial \varepsilon(t_\alpha)}{\partial \theta_i}\right]. \qquad (3.24)$$

В силу того, что

$$E\left[\frac{\partial \varepsilon(t_\alpha)}{\partial \theta_i}\varepsilon^{\mathrm{T}}(t_{k+1})\right] = \mathrm{O}, \quad \alpha = 1, 2, ..., k, \qquad (3.25)$$

с учетом соотношений (3.21), (3.22) получим

$$E\left[\frac{\partial \hat{x}\left(t_{k+1} \mid t_k\right)}{\partial \theta_i}\varepsilon^{\mathrm{T}}(t_{k+1})\right] = \frac{\partial\, d(t_{k+1})}{\partial \theta_i} E\left[\varepsilon^{\mathrm{T}}(t_{k+1})\right] +$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{k}\left\{\frac{\partial D(t_{k+1}, t_\alpha)}{\partial \theta_i} E\left[\varepsilon(t_\alpha)\varepsilon^{\mathrm{T}}(t_{k+1})\right] +\right.$$

$$\left.+D(t_{k+1}, t_\alpha) E\left[\frac{\partial \varepsilon(t_\alpha)}{\partial \theta_i}\varepsilon^{\mathrm{T}}(t_{k+1})\right]\right\} = \mathrm{O}. \qquad (3.26)$$

Для вычисления третьего математического ожидания продифференцируем $\dfrac{\partial \hat{x}\left(t_{k+1} \mid t_k\right)}{\partial \theta_i}$ из (3.24) по θ_j:

$$\frac{\partial^2 \hat{x}\left(t_{k+1} \mid t_k\right)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = \frac{\partial^2 d(t_{k+1})}{\partial \theta_i \partial \theta_j} +$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{k}\left[\frac{\partial^2 D(t_{k+1}, t_\alpha)}{\partial \theta_i \partial \theta_j}\varepsilon(t_\alpha) + \frac{\partial D(t_{k+1}, t_\alpha)}{\partial \theta_i}\frac{\partial \varepsilon(t_\alpha)}{\partial \theta_j} +\right.$$

$$+\frac{\partial D(t_{k+1},t_\alpha)}{\partial\theta_j}\frac{\partial\varepsilon(t_\alpha)}{\partial\theta_i}+D(t_{k+1},t_\alpha)\frac{\partial^2\varepsilon(t_\alpha)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\Bigg]. \tag{3.27}$$

Поскольку

$$E\left[\frac{\partial^2\varepsilon(t_\alpha)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\varepsilon^{\mathrm{T}}(t_{k+1})\right]=\mathrm{O}\,,\quad \alpha=1,2,...,k\,, \tag{3.28}$$

с учетом соотношений (3.21), (3.22), (3.25), (3.28) и (3.27) получим

$$E\left[\frac{\partial^2\hat{x}\left(t_{k+1}|t_k\right)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\varepsilon^{\mathrm{T}}(t_{k+1})\right]=\frac{\partial^2 d(t_{k+1})}{\partial\theta_i\partial\theta_j}E\left[\varepsilon^{\mathrm{T}}(t_{k+1})\right]+$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{k}\left\{\frac{\partial^2 D(t_{k+1},t_\alpha)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}E\left[\varepsilon(t_\alpha)\varepsilon^{\mathrm{T}}(t_{k+1})\right]+\right.$$

$$+\frac{\partial D(t_{k+1},t_\alpha)}{\partial\theta_i}E\left[\frac{\partial\varepsilon(t_\alpha)}{\partial\theta_j}\varepsilon^{\mathrm{T}}(t_{k+1})\right]+\frac{\partial D(t_{k+1},t_\alpha)}{\partial\theta_j}\times$$

$$\left.\times E\left[\frac{\partial\varepsilon(t_\alpha)}{\partial\theta_i}\varepsilon^{\mathrm{T}}(t_{k+1})\right]+D(t_{k+1},t_\alpha)E\left[\frac{\partial^2\varepsilon(t_\alpha)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\varepsilon^{\mathrm{T}}(t_{k+1})\right]\right\}=\mathrm{O}\,. \tag{3.29}$$

Подставив соотношения (3.21), (3.23), (3.26), (3.29) в равенства (3.16) и (3.18), приходим к тому, что

$$E\left[\frac{\partial\varepsilon(t_{k+1})}{\partial\theta_i}\varepsilon^{\mathrm{T}}(t_{k+1})\right]=\mathrm{O}\,; \tag{3.30}$$

$$E\left[\frac{\partial^2\varepsilon(t_{k+1})}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\varepsilon^{\mathrm{T}}(t_{k+1})\right]=\mathrm{O}\,. \tag{3.31}$$

Соотношения (3.17), (3.30), (3.31) позволяют записать формулу (3.13) в виде (3.3). Таким образом, теорема доказана.

Следствие. Для математической модели стационарной системы (2.5), (2.6) с неизвестными параметрами θ, входящими в матрицы F, Ψ, Γ, H, Q, R, $P(t_0)$ и вектор $\overline{x}(t_0)$ в различных комбинациях, формула (3.3) принимает вид

$$M_{ij}(\theta) = \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \mathrm{sp}\left[\frac{\partial H}{\partial \theta_i} E\left[\hat{x}\left(t_{k+1} \mid t_k\right) \hat{x}^{\mathrm{T}}\left(t_{k+1} \mid t_k\right) \right] \frac{\partial H^{\mathrm{T}}}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] + \right.$$

$$+ \mathrm{sp}\left[\frac{\partial H}{\partial \theta_i} E\left[\hat{x}\left(t_{k+1} \mid t_k\right) \frac{\partial \hat{x}^{\mathrm{T}}\left(t_{k+1} \mid t_k\right)}{\partial \theta_j} \right] H^{\mathrm{T}} B^{-1}(t_{k+1}) \right] +$$

$$+ \mathrm{sp}\left[H E\left[\frac{\partial \hat{x}\left(t_{k+1} \mid t_k\right)}{\partial \theta_i} \hat{x}^{\mathrm{T}}\left(t_{k+1} \mid t_k\right) \right] \frac{\partial H^{\mathrm{T}}}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] +$$

$$+ \mathrm{sp}\left[H E\left[\frac{\partial \hat{x}\left(t_{k+1} \mid t_k\right)}{\partial \theta_i} \frac{\partial \hat{x}^{\mathrm{T}}\left(t_{k+1} \mid t_k\right)}{\partial \theta_j} \right] H^{\mathrm{T}} B^{-1}(t_{k+1}) \right] +$$

$$\left. + \frac{1}{2} \mathrm{sp}\left[\frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_i} B^{-1}(t_{k+1}) \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] \right\}, \tag{3.32}$$

что совпадает с результатом из [4, 39].

Непосредственно соотношение (3.3) непригодно для программной реализации, поскольку оно содержит нераскрытые математические ожидания. Перейдем к вычислению этих математических ожиданий.

Введем в рассмотрение расширенный вектор состояния

$$\hat{x}_A\left(t_{k+1} \mid t_k\right) = \begin{bmatrix} \hat{x}\left(t_{k+1} \mid t_k\right) \\ \dfrac{\partial \hat{x}\left(t_{k+1} \mid t_k\right)}{\partial \theta_1} \\ \cdots \\ \dfrac{\partial \hat{x}\left(t_{k+1} \mid t_k\right)}{\partial \theta_s} \end{bmatrix}$$

размером $n \times (s+1)$ и матрицы $C_i = [\underbrace{\mathrm{O}, ..., \mathrm{O}}_{i}, I, \mathrm{O}, ..., \mathrm{O}],\ i = 0, 1, ..., s,$

размером $n \times n(s+1)$. С учетом этих обозначений

$$E\left[\hat{x}(t_{k+1} \mid t_k)\hat{x}^{\mathrm{T}}(t_{k+1} \mid t_k)\right] =$$

$$= C_0 E\left[\hat{x}_A(t_{k+1} \mid t_k)\hat{x}_A^{\mathrm{T}}(t_{k+1} \mid t_k)\right]C_0^{\mathrm{T}}; \tag{3.33}$$

$$E\left[\hat{x}(t_{k+1} \mid t_k)\frac{\partial \hat{x}^{\mathrm{T}}(t_{k+1} \mid t_k)}{\partial \theta_j}\right] =$$

$$= C_0 E\left[\hat{x}_A(t_{k+1} \mid t_k)\hat{x}_A^{\mathrm{T}}(t_{k+1} \mid t_k)\right]C_j^{\mathrm{T}}; \tag{3.34}$$

$$E\left[\frac{\partial \hat{x}(t_{k+1} \mid t_k)}{\partial \theta_i}\hat{x}^{\mathrm{T}}(t_{k+1} \mid t_k)\right] =$$

$$= C_i E\left[\hat{x}_A(t_{k+1} \mid t_k)\hat{x}_A^{\mathrm{T}}(t_{k+1} \mid t_k)\right]C_0^{\mathrm{T}}; \tag{3.35}$$

$$E\left[\frac{\partial \hat{x}(t_{k+1} \mid t_k)}{\partial \theta_i}\frac{\partial \hat{x}^{\mathrm{T}}(t_{k+1} \mid t_k)}{\partial \theta_j}\right] =$$

$$= C_i E\left[\hat{x}_A(t_{k+1} \mid t_k)\hat{x}_A^{\mathrm{T}}(t_{k+1} \mid t_k)\right]C_j^{\mathrm{T}}; \tag{3.36}$$

$$E\left[\hat{x}(t_{k+1} \mid t_k)\right] = C_0 E\left[\hat{x}_A(t_{k+1} \mid t_k)\right]; \tag{3.37}$$

$$E\left[\frac{\partial \hat{x}(t_{k+1} \mid t_k)}{\partial \theta_i}\right] = C_i E\left[\hat{x}_A(t_{k+1} \mid t_k)\right]. \tag{3.38}$$

Соотношения (3.33)–(3.38) позволяют записать выражение (3.3) в виде

$$M_{ij}(\theta)=\sum_{k=0}^{N-1}\left\{\mathrm{sp}\left[\frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial\theta_i}C_0E\left[\hat{x}_A\left(t_{k+1}\mid t_k\right)\hat{x}_A^{\mathrm{T}}\left(t_{k+1}\mid t_k\right)\right]\times\right.\right.$$

$$\left.\times C_0^{\mathrm{T}}\frac{\partial H^{\mathrm{T}}(t_{k+1})}{\partial\theta_j}B^{-1}(t_{k+1})\right]+$$

$$+\mathrm{sp}\left[\frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial\theta_i}C_0E\left[\hat{x}_A\left(t_{k+1}\mid t_k\right)\hat{x}_A^{\mathrm{T}}\left(t_{k+1}\mid t_k\right)\right]C_j^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}(t_{k+1})B^{-1}(t_{k+1})\right]+$$

$$+\mathrm{sp}\left[\frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial\theta_i}C_0E\left[\hat{x}_A\left(t_{k+1}\mid t_k\right)\right]\frac{\partial A^{\mathrm{T}}(t_{k+1})}{\partial\theta_j}B^{-1}(t_{k+1})\right]+$$

$$+\mathrm{sp}\left[H(t_{k+1})C_iE\left[\hat{x}_A\left(t_{k+1}\mid t_k\right)\hat{x}_A^{\mathrm{T}}\left(t_{k+1}\mid t_k\right)\right]C_0^{\mathrm{T}}\frac{\partial H^{\mathrm{T}}(t_{k+1})}{\partial\theta_j}B^{-1}(t_{k+1})\right]+$$

$$+\mathrm{sp}\left[H(t_{k+1})C_iE\left[\hat{x}_A\left(t_{k+1}\mid t_k\right)\hat{x}_A^{\mathrm{T}}\left(t_{k+1}\mid t_k\right)\right]C_j^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}(t_{k+1})B^{-1}(t_{k+1})\right]+$$

$$+\mathrm{sp}\left[H(t_{k+1})C_iE\left[\hat{x}_A\left(t_{k+1}\mid t_k\right)\right]\frac{\partial A^{\mathrm{T}}(t_{k+1})}{\partial\theta_j}B^{-1}(t_{k+1})\right]+$$

$$+\mathrm{sp}\left[\frac{\partial A(t_{k+1})}{\partial\theta_i}E\left[\hat{x}_A^{\mathrm{T}}\left(t_{k+1}\mid t_k\right)\right]C_0^{\mathrm{T}}\frac{\partial H^{\mathrm{T}}(t_{k+1})}{\partial\theta_j}B^{-1}(t_{k+1})\right]+$$

$$+\mathrm{sp}\left[\frac{\partial A(t_{k+1})}{\partial\theta_i}E\left[\hat{x}_A^{\mathrm{T}}\left(t_{k+1}\mid t_k\right)\right]C_j^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}(t_{k+1})B^{-1}(t_{k+1})\right]+$$

$$+\mathrm{sp}\left[\frac{\partial A(t_{k+1})}{\partial\theta_i}\frac{\partial A^{\mathrm{T}}(t_{k+1})}{\partial\theta_j}B^{-1}(t_{k+1})\right]+$$

$$\left.+\frac{1}{2}\mathrm{sp}\left[\frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial\theta_i}B^{-1}(t_{k+1})\frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial\theta_j}B^{-1}(t_{k+1})\right]\right\},\quad i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ s\,. \quad (3.39)$$

Обозначим

$$\overline{x}_A(t_{k+1}) = E\left[\widehat{x}_A\left(t_{k+1} \mid t_k\right)\right]; \tag{3.40}$$

$$\Sigma_A(t_{k+1}) = E\Big\{\left[\widehat{x}_A\left(t_{k+1} \mid t_k\right) - \overline{x}_A(t_{k+1})\right]\times$$

$$\times\left[\widehat{x}_A\left(t_{k+1} \mid t_k\right) - \overline{x}_A(t_{k+1})\right]^{\mathrm{T}}\Big\}. \tag{3.41}$$

Тогда

$$E\left[\widehat{x}_A\left(t_{k+1} \mid t_k\right)\widehat{x}_A^{\mathrm{T}}\left(t_{k+1} \mid t_k\right)\right] =$$

$$= \Sigma_A(t_{k+1}) + \overline{x}_A(t_{k+1})\overline{x}_A^{\mathrm{T}}(t_{k+1}). \tag{3.42}$$

Получим рекуррентные соотношения для $\overline{x}_A(t_{k+1})$ и $\Sigma_A(t_{k+1})$. Положим

$$\tilde{K}(t_k) = F(t_k)K(t_k). \tag{3.43}$$

Воспользовавшись равенствами (3.5) и (3.9), выразим для $k = 1,\ 2,\ ...,\ N-1$, $\widehat{x}\left(t_{k+1} \mid t_k\right)$ через $\widehat{x}\left(t_k \mid t_{k-1}\right)$. Получим

$$\widehat{x}\left(t_{k+1} \mid t_k\right) = F(t_k)\widehat{x}\left(t_k \mid t_{k-1}\right) + a(t_k) + \tilde{K}(t_k)\varepsilon(t_k). \tag{3.44}$$

Дифференцируя (3.44) по θ_i, с учетом формулы (3.14) приходим к тому, что

$$\frac{\partial\widehat{x}\left(t_{k+1} \mid t_k\right)}{\partial\theta_i} = \left[\frac{\partial F(t_k)}{\partial\theta_{\mathrm{i}}} - \tilde{K}(t_k)\frac{\partial H(t_k)}{\partial\theta_i}\right]\widehat{x}\left(t_k \mid t_{k-1}\right) +$$

$$+\left[F(t_k) - \tilde{K}(t_k)H(t_k)\right]\frac{\partial\widehat{x}\left(t_k \mid t_{k-1}\right)}{\partial\theta_i} + \frac{\partial a(t_k)}{\partial\theta_i} +$$

$$+\frac{\partial\tilde{K}(t_k)}{\partial\theta_i}\varepsilon(t_k) - \tilde{K}(t_k)\frac{\partial A(t_k)}{\partial\theta_i}, \quad i = 1,\ 2,\ ...,\ s. \tag{3.45}$$

Пусть

$$F_A(t_k) =$$

$$= \begin{bmatrix} F(t_k) & \mathrm{O} & \cdots & \mathrm{O} \\ \dfrac{\partial F(t_k)}{\partial \theta_1} - \tilde{K}(t_k)\dfrac{\partial H(t_k)}{\partial \theta_1} & F(t_k) - \tilde{K}(t_k)H(t_k) & \cdots & \mathrm{O} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial F(t_k)}{\partial \theta_s} - \tilde{K}(t_k)\dfrac{\partial H(t_k)}{\partial \theta_s} & \mathrm{O} & \cdots & F(t_k) - \tilde{K}(t_k)H(t_k) \end{bmatrix}; \quad (3.46)$$

$$a_A(t_k) = \begin{bmatrix} a(t_k) \\ \dfrac{\partial a(t_k)}{\partial \theta_1} - \tilde{K}(t_k)\dfrac{\partial A(t_k)}{\partial \theta_1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial a(t_k)}{\partial \theta_s} - \tilde{K}(t_k)\dfrac{\partial A(t_k)}{\partial \theta_s} \end{bmatrix}; \quad (3.47)$$

$$K_A(t_k) = \begin{bmatrix} \tilde{K}(t_k) \\ \dfrac{\partial \tilde{K}(t_k)}{\partial \theta_1} \\ \cdots \\ \dfrac{\partial \tilde{K}(t_k)}{\partial \theta_s} \end{bmatrix}. \quad (3.48)$$

С учетом этих обозначений равенства (3.44) и (3.45) можно объединить следующей компактной формулой:

$$\hat{x}_A\left(t_{k+1}|t_k\right) = F_A(t_k)\hat{x}_A\left(t_k|t_{k-1}\right) + a_A(t_k) +$$

$$+K_A(t_k)\varepsilon(t_k),\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1. \quad (3.49)$$

При $k = 0$ из соотношения (3.5) имеем

$$\hat{x}\left(t_1 \mid t_0\right) = F(t_0)\bar{x}(t_0) + a(t_0).$$

Поэтому

$$\frac{\partial \hat{x}\left(t_1 \mid t_0\right)}{\partial \theta_i} = \frac{\partial F(t_0)}{\partial \theta_i} \overline{x}(t_0) + F(t_0) \frac{\partial \overline{x}(t_0)}{\partial \theta_i} + \frac{\partial a(t_0)}{\partial \theta_i}, \quad i = 1, 2, ..., s\ ,$$

и, следовательно,

$$\hat{x}_A\left(t_1 \mid t_0\right) = \begin{bmatrix} F(t_0)\overline{x}(t_0) + a(t_0) \\ \dfrac{\partial F(t_0)}{\partial \theta_1} \overline{x}(t_0) + F(t_0) \dfrac{\partial \overline{x}(t_0)}{\partial \theta_1} + \dfrac{\partial a(t_0)}{\partial \theta_1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial F(t_0)}{\partial \theta_s} \overline{x}(t_0) + F(t_0) \dfrac{\partial \overline{x}(t_0)}{\partial \theta_s} + \dfrac{\partial a(t_0)}{\partial \theta_s} \end{bmatrix}. \tag{3.50}$$

Вычисляя математические ожидания от (3.49) и (3.50), получаем:

$$\overline{x}_A(t_{k+1}) =$$

$$= \begin{cases} F_A(t_k)\overline{x}_A(t_k) + a_A(t_k), \text{ если } k = 1, 2, ..., N-1; \\ \begin{bmatrix} F(t_0)\overline{x}(t_0) + a(t_0) \\ \dfrac{\partial F(t_0)}{\partial \theta_1} \overline{x}(t_0) + F(t_0) \dfrac{\partial \overline{x}(t_0)}{\partial \theta_1} + \dfrac{\partial a(t_0)}{\partial \theta_1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial F(t_0)}{\partial \theta_s} \overline{x}(t_0) + F(t_0) \dfrac{\partial \overline{x}(t_0)}{\partial \theta_s} + \dfrac{\partial a(t_0)}{\partial \theta_s} \end{bmatrix}, \text{ если } k = 0. \end{cases} \tag{3.51}$$

Из равенства (3.51) сразу же вытекает, что

$$\Sigma_A(t_1) = \mathrm{O}\ . \tag{3.52}$$

При $k = 1, 2, ..., N-1$, в силу соотношений (3.41), (3.49), (3.51) имеем

$$\Sigma_A(t_{k+1}) = F_A(t_k)\Sigma_A(t_k)F_A^{\mathrm{T}}(t_k) +$$

$$+ F_A(t_k) E\left\{\left[\hat{x}_A\left(t_k \mid t_{k-1}\right) - \overline{x}_A(t_k)\right]\varepsilon^{\mathrm{T}}(t_k)\right\} K_A^{\mathrm{T}}(t_k) +$$

$$+K_A(t_k)E\left\{\varepsilon(t_k)\left[\hat{x}_A\left(t_k \mid t_{k-1}\right)-\bar{x}_A(t_k)\right]^{\mathrm{T}}\right\}F_A^{\mathrm{T}}(t_k)+$$

$$+K_A(t_k)B(t_k)K_A^{\mathrm{T}}(t_k)\,. \tag{3.53}$$

Принимая во внимание выражения (3.21), (3.23) и (3.26), находим

$$E\left\{\left[\hat{x}_A\left(t_k \mid t_{k-1}\right)-\bar{x}_A(t_k)\right]\varepsilon^{\mathrm{T}}(t_k)\right\}=$$

$$=E\left[\hat{x}_A\left(t_k \mid t_{k-1}\right)\varepsilon^{\mathrm{T}}(t_k)\right]-\bar{x}_A(t_k)E\left[\varepsilon^{\mathrm{T}}(t_k)\right]=$$

$$=E\begin{bmatrix} \hat{x}\left(t_k \mid t_{k-1}\right)\varepsilon^{\mathrm{T}}(t_k) \\ \dfrac{\partial\hat{x}\left(t_k \mid t_{k-1}\right)}{\partial\theta_1}\varepsilon^{\mathrm{T}}(t_k) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial\hat{x}\left(t_k \mid t_{k-1}\right)}{\partial\theta_s}\varepsilon^{\mathrm{T}}(t_k) \end{bmatrix}=\mathrm{O}\,.$$

Таким образом, второе и третье слагаемые в формуле (3.53) равны нулю. С учетом равенства (3.52) получаем следующее рекуррентное соотношение:

$$\Sigma_A(t_{k+1})=\begin{cases} F_A(t_k)\Sigma_A(t_k)F_A^{\mathrm{T}}(t_k)+ \\ +\,K_A(t_k)B(t_k)K_A^{\mathrm{T}}(t_k), \text{ если } k=1,2,\ldots,N-1; \\ \mathrm{O}, \qquad\qquad \text{если } k=0. \end{cases} \tag{3.54}$$

3.1.2. АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНФОРМАЦИОННОЙ МАТРИЦЫ ФИШЕРА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ МОДЕЛЕЙ

Приведенные в предыдущем разделе аналитические выкладки позволяют разработать алгоритм вычисления ИМФ для математической модели (2.3), (2.4) с априорными предположениями из главы 2 при *некотором фиксированном значении вектора оцениваемых параметров* в уравнениях состояния, наблюдения, в начальных условиях и в ковариационных матрицах шумов системы и измерений. Представим возможный вариант такого алгоритма, следуя с незначительными изменениями [28].

Шаг 1. Определить

$$\left\{ \Gamma(t_k), \frac{\partial \Gamma(t_k)}{\partial \theta_i},\ k = 0, 1, ..., N-1,\ i = 1, 2, ..., s \right\},\ Q,\ R,\ \bar{x}(t_0),\ P(t_0),$$

$$\left\{ \frac{\partial Q}{\partial \theta_i}, \frac{\partial R}{\partial \theta_i}, \frac{\partial \bar{x}(t_0)}{\partial \theta_i}, \frac{\partial P(t_0)}{\partial \theta_i},\ i = 1, 2, ..., s \right\}.$$

Шаг 2. Положить $M(\theta) = O$, $k = 0$, $P\left(t_k \mid t_k\right) = P(t_0)$,

$$\left\{ \frac{\partial P\left(t_k \mid t_k\right)}{\partial \theta_i} = \frac{\partial P(t_0)}{\partial \theta_i},\ i = 1, 2, ..., s \right\}.$$

Шаг 3. Определить $a(t_k)$, $\left\{ \frac{\partial a(t_k)}{\partial \theta_i},\ i = 1, 2, ..., s \right\}$, $F(t_k)$ и $\left\{ \frac{\partial F(t_k)}{\partial \theta_i},\ i = 1, 2, ..., s \right\}$.

Шаг 4. Если $k = 0$, вычислить $\bar{x}_A(t_{k+1})$ и $\Sigma_A(t_{k+1})$ по формулам (3.51) и (3.54) соответственно, после чего перейти на шаг 8 .

Шаг 5. Найти $\tilde{K}(t_k)$ при помощи (3.43) и $\left\{ \frac{\partial \tilde{K}(t_k)}{\partial \theta_i},\ i = 1, 2, ..., s \right\}$ по формуле

$$\frac{\partial \tilde{K}(t_k)}{\partial \theta_i} = \frac{\partial F(t_k)}{\partial \theta_i} K(t_k) + F(t_k) \frac{\partial K(t_k)}{\partial \theta_i}.$$

Шаг 6. Сформировать матрицы $F_A(t_k)$, $K_A(t_k)$ и вектор $a_A(t_k)$, воспользовавшись равенствами (3.46)–(3.48).

Шаг 7. Вычислить $\bar{x}_A(t_{k+1})$ и $\Sigma_A(t_{k+1})$ по формулам (3.51) и (3.54) соответственно.

Шаг 8. Определить $\left\{\frac{\partial A(t_{k+1})}{\partial\theta_i},\ i=1,2,...,s\right\}$, $H(t_{k+1})$ и $\left\{\frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial\theta_i},\ i=1,2,...,s\right\}$.

Шаг 9. Найти $P\left(t_{k+1}|t_k\right)$ по формуле (3.6) и $\left\{\frac{\partial P\left(t_{k+1}|t_k\right)}{\partial\theta_i},\ i=1,2,...,s\right\}$ по формуле

$$\frac{\partial P\left(t_{k+1}|t_k\right)}{\partial\theta_i}=\frac{\partial F(t_k)}{\partial\theta_i}P\left(t_k\mid t_k\right)F^{\mathrm{T}}(t_k)+F(t_k)\frac{\partial P\left(t_k\mid t_k\right)}{\partial\theta_i}F^{\mathrm{T}}(t_k)+$$

$$+F(t_k)P\left(t_k\mid t_k\right)\frac{\partial F^{\mathrm{T}}(t_k)}{\partial\theta_i}+\frac{\partial\Gamma(t_k)}{\partial\theta_i}Q\Gamma^{\mathrm{T}}(t_k)+$$

$$+\Gamma(t_k)\frac{\partial Q}{\partial\theta_i}\Gamma^{\mathrm{T}}(t_k)+\Gamma(t_k)Q\frac{\partial\Gamma^{\mathrm{T}}(t_k)}{\partial\theta_i}.$$

Вычислить $B(t_{k+1})$ при помощи равенства (3.7) и $\left\{\frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial\theta_i},\ i=1,2,...,s\right\}$ по формуле

$$\frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial\theta_i}=\frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial\theta_i}P\left(t_{k+1}|t_k\right)H^{\mathrm{T}}(t_{k+1})+$$

$$+H(t_{k+1})\frac{\partial P\left(t_{k+1}\mid t_k\right)}{\partial\theta_\mathrm{i}}H^{\mathrm{T}}(t_{k+1})+$$

$$+H(t_{k+1})P\left(t_{k+1}\mid t_k\right)\frac{\partial H^{\mathrm{T}}(t_{k+1})}{\partial\theta_\mathrm{i}}+\frac{\partial R}{\partial\theta_i}.$$

Определить $K(t_{k+1})$ по формуле (3.8) и $\left\{\frac{\partial K(t_{k+1})}{\partial \theta_i},\ i = 1, 2, ..., s\right\}$ по формуле

$$\frac{\partial K(t_{k+1})}{\partial \theta_i} = \left[\frac{\partial P\left(t_{k+1} \mid t_k\right)}{\partial \theta_i} H^{\mathrm{T}}(t_{k+1}) + P\left(t_{k+1} \mid t_k\right) \frac{\partial H^{\mathrm{T}}(t_{k+1})}{\partial \theta_i} - \right.$$

$$\left. - P\left(t_{k+1} \mid t_k\right) H(t_{k+1})^{\mathrm{T}} B^{-1}(t_{k+1}) \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_i}\right] B^{-1}(t_{k+1}).$$

Найти $P\left(t_{k+1} \mid t_{k+1}\right)$ по формуле (3.10) и $\left\{\frac{\partial P\left(t_{k+1} \mid t_{k+1}\right)}{\partial \theta_i},\right.$ $\left. i = 1, 2, ..., s\right\}$ по формуле

$$\frac{\partial P\left(t_{k+1} \mid t_{k+1}\right)}{\partial \theta_i} = \left[I - K(t_{k+1}) H(t_{k+1})\right] \frac{\partial P\left(t_{k+1} \mid t_k\right)}{\partial \theta_i} -$$

$$- \left[\frac{\partial K(t_{k+1})}{\partial \theta_i} H(t_{k+1}) + K(t_{k+1}) \frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_i}\right] P\left(t_{k+1} \mid t_k\right).$$

Шаг 10. Используя выражения (3.39) с учетом (3.40), (3.42), получить приращение $\Delta M(\theta)$, отвечающее текущему значению k.

Шаг 11. Положить $M(\theta) = M(\theta) + \Delta M(\theta)$.

Шаг 12. Увеличить k на единицу. Если $k \le N - 1$, перейти на шаг 3. В противном случае закончить процесс.

3.1.3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННОЙ МАТРИЦЫ ФИШЕРА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ МОДЕЛЕЙ, ПОЛУЧЕННЫХ В РЕЗУЛЬТАТЕ ВРЕМЕННОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ

В случае применения *линеаризации во временной области* (подробно см. главу 2) к математической модели (2.1), (2.2) алгоритм вычисления ИМФ из п. 3.1.2 претерпевает незначительные изменения. Уточним, какие именно шаги требуют корректировки, и представим их в новой редакции, не повторяя шаги, оставшиеся без изменений.

Шаг 2. Положить $M(\theta) = \mathrm{O}$, $k = 0$, $x_{\text{н}}(t_k) = \overline{x}(t_0)$,

$$\left\{\frac{\partial x_{\text{н}}(t_k)}{\partial \theta_i} = \frac{\partial \overline{x}(t_0)}{\partial \theta_i},\ i = 1, 2, ..., s\right\},\ P\left(t_k \mid t_k\right) = P(t_0),$$

$$\left\{\frac{\partial P\left(t_k \mid t_k\right)}{\partial \theta_i} = \frac{\partial P(t_0)}{\partial \theta_i},\ \ i = 1, 2, ..., s\right\}.$$

Шаг 3. Определить $u_{\text{н}}(t_k),\ u(t_k)$ и при помощи равенства (2.8) найти $a\left[u(t_k),\ t_k\right]$ и $\left\{\frac{\partial a\left[u(t_k),\ t_k\right]}{\partial \theta_i},\quad i = 1, 2, ..., s\right\}$ по формуле

$$\frac{\partial a\left[u(t_k), t_k\right]}{\partial \theta_i} = \frac{\partial f\left[x_{\text{н}}(t_k), u_{\text{н}}(t_k), t_k\right]}{\partial \theta_i} -$$

$$-\frac{\partial^2 f\left[x_{\text{н}}(t_k), u_{\text{н}}(t_k), t_k\right]}{\partial \theta_i \partial x(t_k)} x_{\text{н}}(t_k) - \frac{\partial f\left[x_{\text{н}}(t_k), u_{\text{н}}(t_k), t_k\right]}{\partial x(t_k)} \frac{\partial x_{\text{н}}(t_k)}{\partial \theta_i} +$$

$$+\frac{\partial^2 f\left[x_{\text{н}}(t_k), u_{\text{н}}(t_k), t_k\right]}{\partial \theta_i \partial u(t_k)}\left[u(t_k) - u_{\text{н}}(t_k)\right].$$

Используя выражение (2.9), получить $F(t_k)$ и $\left\{\frac{\partial F(t_k)}{\partial \theta_i},\right.$ $\left. i = 1, 2, ..., s\right\}$.

Шаг 8. Найти $x_{\text{н}}(t_{k+1})$ и $\left\{\frac{\partial x_{\text{н}}(t_{k+1})}{\partial \theta_i}, i = 1, 2, ..., s\right\}$ по формуле (2.7). При помощи равенств (2.10), (2.11) определить $\left\{\frac{\partial A(t_{k+1})}{\partial \theta_i}, i = 1, 2, ..., s\right\}$, $H(t_{k+1})$ и $\left\{\frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_i},\quad i = 1, 2, ..., s\right\}$.

3.2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ИНФОРМАЦИОННОЙ МАТРИЦЫ ФИШЕРА ПО КОМПОНЕНТАМ ВХОДНОГО СИГНАЛА

Построение оптимальных планов будем осуществлять при помощи прямой и двойственной градиентных процедур, что предполагает вычисление следующих градиентов (см. формулы (1.21), (1.22) и (1.27)):

$$\nabla_U X\left[M(\xi)\right] = \left\| \frac{\partial X\left[M(\xi)\right]}{\partial u_\alpha^\gamma(t_\beta)} \right\|, \ \gamma = 1, 2, ..., q,$$

$$\beta = 0, 1, ..., N-1, \ \alpha = 1, 2, ..., r;$$

$$\nabla_P X\left[M(\xi)\right] = \left\| \frac{\partial X\left[M(\xi)\right]}{\partial p_\gamma} \right\|, \ \gamma = 1, 2, ..., q;$$

$$\nabla_U \, \mu(U, \xi) = \left\| \frac{\partial \mu(U, \xi)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} \right\|, \ \beta = 0, 1, ..., N-1, \ \alpha = 1, 2, ..., r.$$

Соотношения (1.23)–(1.26) и (1.28), (1.29) показывают, что для этого необходимо получить выражения для производных от ИМФ по компонентам входного сигнала и разработать соответствующие вычислительные алгоритмы.

3.2.1. НАХОЖДЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ ИНФОРМАЦИОННОЙ МАТРИЦЫ ФИШЕРА ПО КОМПОНЕНТАМ ВХОДНОГО СИГНАЛА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ МОДЕЛЕЙ

Будем считать, что в модели состояния управляемой линейной нестационарной системы (2.3), (2.4)

$$a(t_k) = b(t_k) + \Psi(t_k)u(t_k), \tag{3.55}$$

неизвестные параметры θ входят в матрицы $F(t_k)$, $\Psi(t_k)$, $\Gamma(t_k)$, $H(t_{k+1})$, Q, R, $P(t_0)$ и векторы $b(t_k)$, $A(t_{k+1})$, $\overline{x}(t_0)$ и выполнены априорные предположения из главы 2.

Для вычисления производных

$$\frac{\partial M(U;\,\theta)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} = \left\| \frac{\partial M_{ij}(U;\,\theta)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} \right\|, \quad i,\ j = 1, 2, \ldots, s,$$

$$\beta = 0, 1, \ldots, N-1, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, r,$$

представим ИМФ в виде суммы двух слагаемых, одно из которых зависит от входного сигнала, а другое – нет:

$$M(U;\,\theta) = W(U;\,\theta) + V(\theta). \tag{3.56}$$

Чтобы получить такое разложение, подставим равенства (3.40), (3.42) в формулу (3.39). В результате получим следующие выражения для элементов матриц $W(U;\,\theta)$ и $V(\theta)$:

$$W_{ij}(U;\,\theta) = \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \mathrm{sp}\left[\frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_i} C_0 \bar{x}_A(t_{k+1}) \bar{x}_A^{\mathrm{T}}(t_{k+1}) \times \right.\right.$$

$$\left. \times C_0^{\mathrm{T}} \frac{\partial H^{\mathrm{T}}(t_{k+1})}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] +$$

$$+\mathrm{sp}\left[\frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_i} C_0 \bar{x}_A(t_{k+1}) \bar{x}_A^{\mathrm{T}}(t_{k+1}) C_j^{\mathrm{T}} H^{\mathrm{T}}(t_{k+1}) B^{-1}(t_{k+1}) \right] +$$

$$+\mathrm{sp}\left[\frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_i} C_0 \bar{x}_A(t_{k+1}) \frac{\partial A^{\mathrm{T}}(t_{k+1})}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] +$$

$$+\mathrm{sp}\left[H(t_{k+1}) C_i \bar{x}_A(t_{k+1}) \bar{x}_A^{\mathrm{T}}(t_{k+1}) C_0^{\mathrm{T}} \frac{\partial H^{\mathrm{T}}(t_{k+1})}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] +$$

$$+\mathrm{sp}\left[H(t_{k+1}) C_i \bar{x}_A(t_{k+1}) \bar{x}_A^{\mathrm{T}}(t_{k+1}) C_j^{\mathrm{T}} H^{\mathrm{T}}(t_{k+1}) B^{-1}(t_{k+1}) \right] +$$

$$+\mathrm{sp}\left[H(t_{k+1}) C_i \bar{x}_A(t_{k+1}) \frac{\partial A^{\mathrm{T}}(t_{k+1})}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] +$$

$$+\mathrm{sp}\left[\frac{\partial A(t_{k+1})}{\partial\theta_i}\overline{x}_A^{\mathrm{T}}(t_{k+1})C_0^{\mathrm{T}}\,\frac{\partial H^{\mathrm{T}}(t_{k+1})}{\partial\theta_j}B^{-1}(t_{k+1})\right]+$$

$$+\,\mathrm{sp}\left[\frac{\partial A(t_{k+1})}{\partial\theta_i}\overline{x}_A^{\mathrm{T}}(t_{k+1})C_j^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}(t_{k+1})B^{-1}(t_{k+1})\right]\Bigg\};\qquad(3.57)$$

$$V_{ij}(\theta)=\sum_{k=0}^{N-1}\Bigg\{\mathrm{sp}\left[\frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial\theta_i}C_0\Sigma_A(t_{k+1})C_0^{\mathrm{T}}\,\frac{\partial H^{\mathrm{T}}(t_{k+1})}{\partial\theta_j}B^{-1}(t_{k+1})\right]+$$

$$+\,\mathrm{sp}\left[\frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial\theta_i}C_0\Sigma_A(t_{k+1})C_j^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}(t_{k+1})B^{-1}(t_{k+1})\right]+$$

$$+\mathrm{sp}\left[H(t_{k+1})C_i\Sigma_A(t_{k+1})C_0^{\mathrm{T}}\,\frac{\partial H^{\mathrm{T}}(t_{k+1})}{\partial\theta_j}B^{-1}(t_{k+1})\right]+$$

$$+\mathrm{sp}\left[H(t_{k+1})C_i\Sigma_A(t_{k+1})C_j^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}(t_{k+1})B^{-1}(t_{k+1})\right]+$$

$$+\,\mathrm{sp}\left[\frac{\partial A(t_{k+1})}{\partial\theta_i}\frac{\partial A^{\mathrm{T}}(t_{k+1})}{\partial\theta_j}B^{-1}(t_{k+1})\right]+$$

$$+\,\frac{1}{2}\mathrm{sp}\left[\frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial\theta_i}B^{-1}(t_{k+1})\frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial\theta_j}B^{-1}(t_{k+1})\right]\Bigg\},\ i,\ j=1,\,2,\,...,\,s.$$

Из соотношений (3.56), (3.57) следует, что

$$\frac{\partial M_{ij}(U;\,\theta)}{\partial u_\alpha(t_\beta)}=\frac{\partial W_{ij}(U;\,\theta)}{\partial u_\alpha(t_\beta)}=$$

$$=\sum_{k=0}^{N-1}\Bigg\{\mathrm{sp}\Bigg[\frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial\theta_i}C_0\Bigg(\frac{\partial\overline{x}_A(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)}\overline{x}_A^{\mathrm{T}}(t_{k+1})+$$

$$+\overline{x}_A(t_{k+1})\frac{\partial\overline{x}_A^{\mathrm{T}}(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)}\Bigg)C_0^{\mathrm{T}}\frac{\partial H^{\mathrm{T}}(t_{k+1})}{\partial\theta_j}B^{-1}(t_{k+1})\Bigg]+$$

$$+\,\mathrm{sp}\Bigg[\frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial\theta_i}C_0\Bigg(\frac{\partial\overline{x}_A(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)}\overline{x}_A^{\mathrm{T}}(t_{k+1})+$$

$$+\overline{x}_A(t_{k+1})\frac{\partial\overline{x}_A^{\mathrm{T}}(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)}\Bigg)C_j^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}(t_{k+1})B^{-1}(t_{k+1})\Bigg]+$$

$$+\mathrm{sp}\Bigg[\frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial\theta_i}C_0\frac{\partial\overline{x}_A(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)}\frac{\partial A^{\mathrm{T}}(t_{k+1})}{\partial\theta_j}B^{-1}(t_{k+1})\Bigg]+$$

$$+\mathrm{sp}\Bigg[H(t_{k+1})C_i\Bigg(\frac{\partial\overline{x}_A(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)}\overline{x}_A^{\mathrm{T}}(t_{k+1})+$$

$$+\overline{x}_A(t_{k+1})\frac{\partial\overline{x}_A^{\mathrm{T}}(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)}\Bigg)C_0^{\mathrm{T}}\frac{\partial H^{\mathrm{T}}(t_{k+1})}{\partial\theta_j}B^{-1}(t_{k+1})\Bigg]+$$

$$+\mathrm{sp}\Bigg[H(t_{k+1})C_i\Bigg(\frac{\partial\overline{x}_A(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)}\overline{x}_A^{\mathrm{T}}(t_{k+1})+$$

$$+\overline{x}_A(t_{k+1})\frac{\partial\overline{x}_A^{\mathrm{T}}(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)}\Bigg)C_j^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}(t_{k+1})B^{-1}(t_{k+1})\Bigg]+$$

$$+\mathrm{sp}\Bigg[H(t_{k+1})C_i\frac{\partial\overline{x}_A(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)}\frac{\partial A^{\mathrm{T}}(t_{k+1})}{\partial\theta_j}B^{-1}(t_{k+1})\Bigg]+$$

$$+\operatorname{sp}\left[\frac{\partial A(t_{k+1})}{\partial\theta_i}\frac{\partial\overline{x}_A^{\mathrm{T}}(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)}C_0^{\mathrm{T}}\frac{\partial H^{\mathrm{T}}(t_{k+1})}{\partial\theta_j}B^{-1}(t_{k+1})\right]+$$

$$+\operatorname{sp}\left[\frac{\partial A(t_{k+1})}{\partial\theta_i}\frac{\partial\overline{x}_A^{\mathrm{T}}(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)}C_j^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}(t_{k+1})B^{-1}(t_{k+1})\right]\Bigg\}. \qquad (3.58)$$

Производные $\dfrac{\partial\overline{x}_A(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)}$ найдем при помощи равенства (3.51):

$$\frac{\partial\overline{x}_A(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)}=\begin{cases}F_A(t_k)\dfrac{\partial\overline{x}_A(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)}+\dfrac{\partial a_A(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)}, & \text{если } k=1,2,\ldots,N-1;\\[2ex] \begin{bmatrix}\dfrac{\partial a(t_0)}{\partial u_\alpha(t_\beta)}\\ \dfrac{\partial^2 a(t_0)}{\partial u_\alpha(t_\beta)\partial\theta_1}\\ \cdots\cdots\\ \dfrac{\partial^2 a(t_0)}{\partial u_\alpha(t_\beta)\partial\theta_s}\end{bmatrix}, & \text{если } k=0.\end{cases} \qquad (3.59)$$

Перейдем к определению производных $\left\{\dfrac{\partial a_A(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)},\ k=1,2,\ldots,N-1\right\}$.
Для этого, воспользовавшись формулами (3.47) и (3.55), представим выражение для $a_A(t_k)$ в виде суммы двух слагаемых, одно из которых не зависит, а другое – зависит от $u(t_k)$:

$$a_A(t_k)=\begin{bmatrix}b(t_k)+\Psi(t_k)u(t_k)\\ \dfrac{\partial b(t_k)}{\partial\theta_1}+\dfrac{\partial\Psi(t_k)}{\partial\theta_1}u(t_k)-\tilde{K}(t_k)\dfrac{\partial A(t_k)}{\partial\theta_1}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \dfrac{\partial b(t_k)}{\partial\theta_s}+\dfrac{\partial\Psi(t_k)}{\partial\theta_s}u(t_k)-\tilde{K}(t_k)\dfrac{\partial A(t_k)}{\partial\theta_s}\end{bmatrix}=$$

$$=b_A(t_k)+\Psi_A(t_k)u(t_k), \qquad (3.60)$$

где

$$b_A(t_k) = \begin{bmatrix} b(t_k) \\ \dfrac{\partial b(t_k)}{\partial \theta_1} - \tilde{K}(t_k)\dfrac{\partial A(t_k)}{\partial \theta_1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial b(t_k)}{\partial \theta_s} - \tilde{K}(t_k)\dfrac{\partial A(t_k)}{\partial \theta_s} \end{bmatrix}; \tag{3.61}$$

$$\Psi_A(t_k) = \begin{bmatrix} \Psi(t_k) \\ \dfrac{\partial \Psi(t_k)}{\partial \theta_1} \\ \cdots \\ \dfrac{\partial \Psi(t_k)}{\partial \theta_s} \end{bmatrix}. \tag{3.62}$$

Из соотношения (3.60) и (3.61) следует, что

$$\frac{\partial a_A(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} = \Psi_A(t_k)\frac{\partial u(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} = \begin{cases} \Psi_A(t_k)\begin{bmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \alpha \\ \\ O \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \begin{bmatrix} \psi_{A_{1\alpha}}(t_k) \\ \psi_{A_{2\alpha}}(t_k) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \psi_{A_{n(s+1),\alpha}}(t_k) \end{bmatrix}, & \text{если } \beta = k, \\ \\ O & , \text{если } \beta \neq k. \end{cases} \tag{3.63}$$

Подставляя равенство (3.55) в формулу (3.59) при $k = 0$, с учетом выражения (3.62) получаем

$$\frac{\partial \overline{x}_A(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)} = \begin{bmatrix} \Psi(t_0)\dfrac{\partial u(t_0)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} \\ \dfrac{\partial \Psi}{\partial \theta_1}\dfrac{\partial u(t_0)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial \Psi(t_0)}{\partial \theta_s}\dfrac{\partial u(t_0)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi(t_0) \\ \dfrac{\partial \Psi(t_0)}{\partial \theta_1} \\ \cdots \\ \dfrac{\partial \Psi(t_0)}{\partial \theta_s} \end{bmatrix} \frac{\partial u(t_0)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} =$$

$$= \begin{cases} \Psi_A(t_0)\begin{bmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \alpha \\ O \end{cases} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \psi_{A_{1\alpha}}(t_0) \\ \psi_{A_{2\alpha}}(t_0) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \psi_{A_{n(s+1),\alpha}}(t_0) \end{bmatrix}, \text{ если } \beta = k, \\ O, \text{ если } \beta \neq k. \end{cases} \qquad (3.64)$$

3.2.2. АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ ИНФОРМАЦИОННОЙ МАТРИЦЫ ФИШЕРА ПО КОМПОНЕНТАМ ВХОДНОГО СИГНАЛА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ МОДЕЛЕЙ

Приведенные в предыдущем разделе аналитические выкладки позволяют разработать алгоритм вычисления производных ИМФ по компонентам входного сигнала $\left\{\dfrac{\partial M(U;\theta)}{\partial u_\alpha(t_\beta)},\ \beta = 0, 1, \ldots, N-1,\ \alpha = 1, 2, \ldots, r\right\}$ при *некотором фиксированном значении вектора неизвестных параметров* θ в уравнениях состояния, наблюдения, в начальных условиях и ковариационных матрицах шумов системы и измерений. Представим возможный вариант такого алгоритма, следуя с незначительными изменениями [20]:

Шаг 1. Определить $\{\Gamma(t_k),\ k = 0, 1, \ldots, N-1\}$, Q, R, $P(t_0)$, $\overline{x}(t_0)$, $\left\{\dfrac{\partial \overline{x}(t_0)}{\partial \theta_i},\ i = 1, 2, \ldots, s\right\}$.

Шаг 2. Положить $\left\{\dfrac{\partial M(U;\theta)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} = \mathrm{O},\ \beta = 0, 1, ..., N-1,\ \alpha = 1, 2, ..., r\right\}$, $k = 0$, $P\big(t_k \mid t_k\big) = P(t_0)$.

Шаг 3. Определить $b(t_k)$, $\Psi(t_k)$, $F(t_k)$, $\left\{\dfrac{\partial b(t_k)}{\partial\theta_i}, \dfrac{\partial\Psi(t_k)}{\partial\theta_i}, \dfrac{\partial F(t_k)}{\partial\theta_i},\right.$ $\left. i = 1, 2, ..., s\right\}$. Сформировать матрицу $\Psi_A(t_k)$ в соответствии с равенством (3.62). При помощи выражения (3.55) вычислить $a(t_k)$ и $\left\{\dfrac{\partial a(t_k)}{\partial\theta_i},\ i = 1, 2, ..., s\right\}$.

Шаг 4. Если $k = 0$, вычислить [см. (3.51)]

$$\overline{x}_A(t_{k+1}) = \begin{bmatrix} F(t_0)\overline{x}(t_0) + a(t_0) \\ \dfrac{\partial F(t_0)}{\partial\theta_1}\overline{x}(t_0) + F(t_0)\dfrac{\partial\overline{x}(t_0)}{\partial\theta_1} + \dfrac{\partial a(t_0)}{\partial\theta_1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial F(t_0)}{\partial\theta_s}\overline{x}(t_0) + F(t_0)\dfrac{\partial\overline{x}(t_0)}{\partial\theta_s} + \dfrac{\partial a(t_0)}{\partial\theta_s} \end{bmatrix}$$

и перейти к шагу 8.

Шаг 5. Найти $\tilde{K}(t_k)$ по формуле [см. (3.43)]

$$\tilde{K}(t_k) = F(t_k)K(t_k).$$

Шаг 6. Сформировать матрицу $F_A(t_k)$ и вектор-столбец $a_A(t_k)$ в соответствии с равенствами [см. (3.46), (3.47)]:

$$F_A(t_k) = \begin{bmatrix} F(t_k) & \mathrm{O} & \cdots & \mathrm{O} \\ \dfrac{\partial F(t_k)}{\partial\theta_1} - \tilde{K}(t_k)\dfrac{\partial H(t_k)}{\partial\theta_1} & F(t_k) - \tilde{K}(t_k)H(t_k) & \cdots & \mathrm{O} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial F(t_k)}{\partial\theta_s} - \tilde{K}(t_k)\dfrac{\partial H(t_k)}{\partial\theta_s} & \mathrm{O} & \cdots & F(t_k) - \tilde{K}(t_k)H(t_k) \end{bmatrix};$$

$$a_A(t_k)=\begin{bmatrix} a(t_k) \\ \dfrac{\partial a(t_k)}{\partial\theta_1}-\tilde{K}(t_k)\dfrac{\partial A(t_k)}{\partial\theta_1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial a(t_k)}{\partial\theta_s}-\tilde{K}(t_k)\dfrac{\partial A(t_k)}{\partial\theta_s} \end{bmatrix}.$$

Шаг 7. Вычислить $\overline{x}_A(t_{k+1})$ по формуле [см. (3.51)]

$$\overline{x}_A(t_{k+1})=F_A(t_k)\overline{x}_A(t_k)+a_A(t_k)\ .$$

Шаг 8. Определить $H(t_{k+1})$, $\left\{\dfrac{\partial A(t_{k+1})}{\partial\theta_i},\dfrac{\partial H(t_{k+1})}{\partial\theta_i},\quad i=1,\,2,\,...,\,s\right\}$.

Шаг 9. Найти $P\left(t_{k+1}|t_k\right)$, $B(t_{k+1})$, $K(t_{k+1})$, $P\left(t_{k+1}|t_{k+1}\right)$, используя соотношения [см. (3.6), (3.7), (3.8),(3.10)]:

$$P\left(t_{k+1}\mid t_k\right)=F(t_k)P\left(t_k\mid t_k\right)F^{\mathrm{T}}(t_k)+\Gamma(t_k)Q\Gamma^{\mathrm{T}}(t_k)\,;$$

$$B(t_{k+1})=H(t_{k+1})P\left(t_{k+1}\mid t_k\right)H^{\mathrm{T}}(t_{k+1})+R\,;$$

$$K(t_{k+1})=P\left(t_{k+1}\mid t_k\right)H^{\mathrm{T}}(t_{k+1})B^{-1}(t_{k+1})\,;$$

$$P\left(t_{k+1}\mid t_{k+1}\right)=\left[I-K(t_{k+1})H(t_{k+1})\right]P\left(t_{k+1}\mid t_k\right).$$

Шаг 10. Положить $\beta=0$.

Шаг 11. Если $k=0$, вычислить $\left\{\dfrac{\partial\overline{x}_A(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)},\ \alpha=1,\,2,\,...,\,r\right\}$ при помощи равенства (3.64) и перейти на шаг 14.

Шаг 12. Сформировать $\left\{\dfrac{\partial a_A(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)},\alpha=1,\,2,\,...,\,r\right\}$, применяя выражение (3.63).

Шаг 13. Вычислить $\left\{\dfrac{\partial\overline{x}_A(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)},\ \alpha=1,\,2,\,...,\,r\right\}$ по формуле (3.59).

Шаг 14. Используя выражение (3.58), получить приращения $\left\{ \Delta \dfrac{\partial M(U;\theta)}{\partial u_{\alpha}(t_{\beta})}, \quad \alpha = 1, 2, ..., r \right\}$, отвечающие текущим значениям β и k.

Шаг 15. Положить $\dfrac{\partial M(U;\theta)}{\partial u_{\alpha}(t_{\beta})} = \dfrac{\partial M(U;\theta)}{\partial u_{\alpha}(t_{\beta})} + \Delta \dfrac{\partial M(U;\theta)}{\partial u_{\alpha}(t_{\beta})}, \quad \alpha = 1, 2, ..., r$.

Шаг 16. Увеличить β на единицу. Если $\beta \le N-1$, перейти на шаг 11.

Шаг 17. Увеличить k на единицу. Если $k \le N-1$, перейти на шаг 3. В противном случае закончить процесс.

3.2.3. НАХОЖДЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ ИНФОРМАЦИОННОЙ МАТРИЦЫ ФИШЕРА ПО КОМПОНЕНТАМ ВХОДНОГО СИГНАЛА ДЛЯ МОДЕЛЕЙ, ПОЛУЧЕННЫХ В РЕЗУЛЬТАТЕ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ

В случае применения *статистической линеаризации* к уравнениям (2.1), (2.2) в получившейся линеаризованной модели вида (2.3), (2.4) $a\left[\bar{x}(t_k), P(t_k), u(t_k), t_k\right]$, $F\left[\bar{x}(t_k), P(t_k), u(t_k), t_k\right]$, $A\left[\bar{x}(t_{k+1}), P(t_{k+1}), t_{k+1}\right]$ и $H\left[\bar{x}(t_{k+1}), P(t_{k+1}), t_{k+1}\right]$ зависят от $\{u(t_0), u(t_1), ..., u(t_k)\}$. В результате матрицы $P\left(t_{k+1} \mid t_k\right)$, $B(t_{k+1})$, $K(t_{k+1})$, $P\left(t_{k+1} \mid t_{k+1}\right)$, $\tilde{K}(t_k)$, $F_A(t_k)$, $K_A(t_k)$ и $\Sigma_A(t_{k+1})$ также зависят от указанных переменных, разложение (3.56) становится невозможным и существенно усложняется вычисление производных ИМФ по компонентам входного сигнала.

Остановимся на варианте с нелинейной моделью (2.1) для вектора состояния и линейной моделью (2.2) для вектора измерения. Это устранит зависимость $A(t_{k+1})$ и $H(t_{k+1})$ от входного сигнала и в некоторой степени упростит вычисление производных от ИМФ по его компонентам.

Подставив равенства (3.40), (3.42) в формулу (3.39), получим следующее выражение для элементов ИМФ:

$$M_{ij}(U;\theta)=\sum_{k=0}^{N-1}\left\{\mathrm{sp}\left[\frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial\theta_i}C_0\left[\bar{x}_A(t_{k+1})\bar{x}_A^{\mathrm{T}}(t_{k+1})+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.+\Sigma_A(t_{k+1})C_0^{\mathrm{T}}\frac{\partial H^{\mathrm{T}}(t_{k+1})}{\partial\theta_j}B^{-1}(t_{k+1})\right]+\right.$$

$$+\mathrm{sp}\left[\frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial\theta_i}C_0\left[\bar{x}_A(t_{k+1})\bar{x}_A^{\mathrm{T}}(t_{k+1})+\Sigma_A(t_{k+1})\right]C_j^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}(t_{k+1})B^{-1}(t_{k+1})\right]+$$

$$+\mathrm{sp}\left[\frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial\theta_i}C_0\bar{x}_A(t_{k+1})\frac{\partial A^{\mathrm{T}}(t_{k+1})}{\partial\theta_j}B^{-1}(t_{k+1})\right]+$$

$$+\mathrm{sp}\left[H(t_{k+1})C_i\left[\bar{x}_A(t_{k+1})\bar{x}_A^{\mathrm{T}}(t_{k+1})+\Sigma_A(t_{k+1})\right]C_0^{\mathrm{T}}\frac{\partial H^{\mathrm{T}}(t_{k+1})}{\partial\theta_j}B^{-1}(t_{k+1})\right]+$$

$$+\mathrm{sp}\left[H(t_{k+1})C_i\left[\bar{x}_A(t_{k+1})\bar{x}_A^{\mathrm{T}}(t_{k+1})+\Sigma_A(t_{k+1})\right]C_j^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}(t_{k+1})B^{-1}(t_{k+1})\right]+$$

$$+\mathrm{sp}\left[H(t_{k+1})C_i\bar{x}_A(t_{k+1})\frac{\partial A^{\mathrm{T}}(t_{k+1})}{\partial\theta_j}B^{-1}(t_{k+1})\right]+$$

$$+\mathrm{sp}\left[\frac{\partial A(t_{k+1})}{\partial\theta_i}\bar{x}_A^{\mathrm{T}}(t_{k+1})C_0^{\mathrm{T}}\frac{\partial H^{\mathrm{T}}(t_{k+1})}{\partial\theta_j}B^{-1}(t_{k+1})\right]+$$

$$+\mathrm{sp}\left[\frac{\partial A(t_{k+1})}{\partial\theta_i}\bar{x}_A^{\mathrm{T}}(t_{k+1})C_j^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}(t_{k+1})B^{-1}(t_{k+1})\right]+$$

$$+\mathrm{sp}\left[\frac{\partial A(t_{k+1})}{\partial\theta_i}\frac{\partial A^{\mathrm{T}}(t_{k+1})}{\partial\theta_j}B^{-1}(t_{k+1})\right]+$$

$$\left.+\frac{1}{2}\mathrm{sp}\left[\frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial\theta_i}B^{-1}(t_{k+1})\frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial\theta_j}B^{-1}(t_{k+1})\right]\right\},\quad i,j=1,2,\ldots,s. \tag{3.65}$$

Из соотношения (3.65) следует, что

$$\frac{\partial M_{ij}(U;\theta)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} = \sum_{k=0}^{N-1}\left\{ \mathrm{sp}\left[\frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_i} C_0 \left(\frac{\partial \overline{x}_A(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)} \overline{x}_A^{\mathrm{T}}(t_{k+1}) + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left. + \overline{x}_A(t_{k+1}) \frac{\partial \overline{x}_A^{\mathrm{T}}(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)} + \frac{\partial \Sigma_A(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)} \right) C_0^{\mathrm{T}} \frac{\partial H^{\mathrm{T}}(t_{k+1})}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] +$$

$$+\mathrm{sp}\left[\frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_i} C_0 \left(\overline{x}_A(t_{k+1}) \overline{x}_A^{\mathrm{T}}(t_{k+1}) + \Sigma_A(t_{k+1}) \right) \times\right.$$

$$\left.\times C_0^{\mathrm{T}} \frac{\partial H^{\mathrm{T}}(t_{k+1})}{\partial \theta_j} \frac{\partial B^{-1}(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)} \right] + \mathrm{sp}\left[\frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_i} C_0 \left(\frac{\partial \overline{x}_A(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)} \overline{x}_A^{\mathrm{T}}(t_{k+1}) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \overline{x}_A(t_{k+1}) \frac{\partial \overline{x}_A^{\mathrm{T}}(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)} + \frac{\partial \Sigma_A(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)} \right) C_j^{\mathrm{T}} H^{\mathrm{T}}(t_{k+1}) B^{-1}(t_{k+1}) \right] +$$

$$+\mathrm{sp}\left[\frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_i} C_0 \left(\overline{x}_A(t_{k+1}) \overline{x}_A^{\mathrm{T}}(t_{k+1}) + \Sigma_A(t_{k+1}) \right) C_j^{\mathrm{T}} H^{\mathrm{T}}(t_{k+1}) \frac{\partial B^{-1}(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)} \right] +$$

$$+\mathrm{sp}\left[\frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_i} C_0 \frac{\partial \overline{x}_A(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)} \frac{\partial A^{\mathrm{T}}(t_{k+1})}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] +$$

$$+\mathrm{sp}\left[\frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_i} C_0 \overline{x}_A(t_{k+1}) \frac{\partial A^{\mathrm{T}}(t_{k+1})}{\partial \theta_j} \frac{\partial B^{-1}(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)} \right] +$$

$$+\mathrm{sp}\left[H(t_{k+1}) \mathrm{C}_i \left(\frac{\partial \overline{x}_A(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)} \overline{x}_A^{\mathrm{T}}(t_{k+1}) + \overline{x}_A(t_{k+1}) \frac{\partial \overline{x}_A^{\mathrm{T}}(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\partial \Sigma_A(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)} \right) C_0^{\mathrm{T}} \frac{\partial H^{\mathrm{T}}(t_{k+1})}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1}) \right] +$$

$$+\mathrm{sp}\left[H(t_{k+1})C_i\left(\overline{x}_A(t_{k+1})\overline{x}_A^{\mathrm{T}}(t_{k+1})+\Sigma_A(t_{k+1})\right)C_0^{\mathrm{T}}\frac{\partial H^{\mathrm{T}}(t_{k+1})}{\partial\theta_j}\frac{\partial B^{-1}(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)}\right]+$$

$$+\mathrm{sp}\left[H(t_{k+1})C_i\left(\frac{\partial\overline{x}_A(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)}\overline{x}_A^{\mathrm{T}}(t_{k+1})+\overline{x}_A(t_{k+1})\frac{\partial\overline{x}_A^{\mathrm{T}}(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial\Sigma_A(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)}\right)C_j^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}(t_{k+1})B^{-1}(t_{k+1})\right]+$$

$$+\mathrm{sp}\left[H(t_{k+1})C_i\left(\overline{x}_A(t_{k+1})\overline{x}_A^{\mathrm{T}}(t_{k+1})+\Sigma_A(t_{k+1})\right)C_j^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}(t_{k+1})\frac{\partial B^{-1}(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)}\right]+$$

$$+\mathrm{sp}\left[H(t_{k+1})C_i\frac{\partial\overline{x}_A(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)}\frac{\partial A^{\mathrm{T}}(t_{k+1})}{\partial\theta_j}B^{-1}(t_{k+1})\right]+$$

$$+\mathrm{sp}\left[H(t_{k+1})C_i\overline{x}_A(t_{k+1})\frac{\partial A^{\mathrm{T}}(t_{k+1})}{\partial\theta_j}\frac{\partial B^{-1}(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)}\right]+$$

$$+\mathrm{sp}\left[\frac{\partial A(t_{k+1})}{\partial\theta_i}\frac{\partial\overline{x}_A^{\mathrm{T}}(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)}C_0^{\mathrm{T}}\frac{\partial H^{\mathrm{T}}(t_{k+1})}{\partial\theta_j}B^{-1}(t_{k+1})\right]+$$

$$+\mathrm{sp}\left[\frac{\partial A(t_{k+1})}{\partial\theta_i}\overline{x}_A^{\mathrm{T}}(t_{k+1})C_0^{\mathrm{T}}\frac{\partial H^{\mathrm{T}}(t_{k+1})}{\partial\theta_j}\frac{\partial B^{-1}(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)}\right]+$$

$$+\mathrm{sp}\left[\frac{\partial A(t_{k+1})}{\partial\theta_i}\frac{\partial\overline{x}_A^{\mathrm{T}}(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)}C_j^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}(t_{k+1})B^{-1}(t_{k+1})\right]+$$

$$+\mathrm{sp}\left[\frac{\partial A(t_{k+1})}{\partial\theta_i}\overline{x}_A^{\mathrm{T}}(t_{k+1})C_j^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}(t_{k+1})\frac{\partial B^{-1}(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)}\right]+$$

$$+\operatorname{sp}\left[\frac{\partial A(t_{k+1})}{\partial\theta_i}\frac{\partial A^{\mathrm{T}}(t_{k+1})}{\partial\theta_j}\frac{\partial B^{-1}(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)}\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\operatorname{sp}\left[\frac{\partial^2 B(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)\partial\theta_i}B^{-1}(t_{k+1})\frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial\theta_j}B^{-1}(t_{k+1})\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\operatorname{sp}\left[\frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial\theta_i}\frac{\partial B^{-1}(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)}\frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial\theta_j}B^{-1}(t_{k+1})\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\operatorname{sp}\left[\frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial\theta_i}B^{-1}(t_{k+1})\frac{\partial^2 B(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)\partial\theta_j}B^{-1}(t_{k+1})\right]+$$

$$\left.+\frac{1}{2}\operatorname{sp}\left[\frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial\theta_i}B^{-1}(t_{k+1})\frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial\theta_j}\frac{\partial B^{-1}(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)}\right]\right\}. \qquad (3.66)$$

Производные $\dfrac{\partial\overline{x}_A(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)}$ найдем дифференцированием равенства (3.51). В результате получим:

$$\frac{\partial\overline{x}_A(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)}=\begin{cases}\dfrac{\partial F_A(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)}\overline{x}_A(t_k)+F_A(t_k)\dfrac{\partial\overline{x}_A(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)}+\dfrac{\partial a_A(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)}, & \text{если } k=1,2,\ldots,N-1;\\ \begin{bmatrix}\dfrac{\partial F(t_0)}{\partial u_\alpha(t_\beta)}\overline{x}(t_0)+\dfrac{\partial a(t_0)}{\partial u_\alpha(t_\beta)}\\ \dfrac{\partial^2 F(t_0)}{\partial u_\alpha(t_\beta)\partial\theta_1}\overline{x}(t_0)+\dfrac{\partial F(t_0)}{\partial u_\alpha(t_\beta)}\dfrac{\partial\overline{x}(t_0)}{\partial\theta_1}+\dfrac{\partial^2 a(t_0)}{\partial u_\alpha(t_\beta)\partial\theta_1}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \dfrac{\partial^2 F(t_0)}{\partial u_\alpha(t_\beta)\partial\theta_s}\overline{x}(t_0)+\dfrac{\partial F(t_0)}{\partial u_\alpha(t_\beta)}\dfrac{\partial\overline{x}(t_0)}{\partial\theta_s}+\dfrac{\partial^2 a(t_0)}{\partial u_\alpha(t_\beta)\partial\theta_s}\end{bmatrix}, & \text{если } k=0;\\ \mathrm{O}, & \text{если } \beta>k.\end{cases}$$

(3.67)

Для нахождения матрицы частных производных $\dfrac{\partial F_A(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)}$ воспользуемся формулой (3.46):

$$\frac{\partial F_A(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} & \text{O} & \dots & \text{O} \\ \dfrac{\partial^2 F(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)\partial\theta_1} - \dfrac{\partial \tilde{K}(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)}\dfrac{\partial H(t_k)}{\partial\theta_1} & \dfrac{\partial \phi_A(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} & \dots & \text{O} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial^2 F(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)\partial\theta_s} - \dfrac{\partial \tilde{K}(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)}\dfrac{\partial H(t_k)}{\partial\theta_s} & \text{O} & \dots & \dfrac{\partial \phi_A(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} \end{bmatrix}, \quad (3.68)$$

где

$$\frac{\partial \phi_A(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} = \frac{\partial F(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} - \frac{\partial \tilde{K}(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} H(t_k)\,.$$

Перейдем к определению производных $\left\{\dfrac{\partial a_A(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)},\ k = 1, 2, ..., N-1\right\}$.
Из выражения (3.47) следует, что

$$\frac{\partial a_A(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial a(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} \\ \dfrac{\partial^2 a(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)\partial\theta_1} - \dfrac{\partial \tilde{K}(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)}\dfrac{\partial A(t_k)}{\partial\theta_1} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial^2 a(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)\partial\theta_s} - \dfrac{\partial \tilde{K}(k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)}\dfrac{\partial A(t_k)}{\partial\theta_s} \end{bmatrix}. \quad (3.69)$$

Производные $\dfrac{\partial \Sigma_A(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)}$ найдем дифференцированием соотношения (3.54). Получим:

$$
\frac{\partial \Sigma_A(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)} = \begin{cases} \dfrac{\partial F_A(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} \Sigma_A(t_k) F_A^{\mathrm{T}}(t_k) + F_A(t_k) \dfrac{\partial \Sigma_A(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} F_A^{\mathrm{T}}(t_k) + \\ + F_A(t_k) \Sigma_A(t_k) \dfrac{\partial F_A^{\mathrm{T}}(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} + \dfrac{\partial K_A(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} B(t_k) K_A^{\mathrm{T}}(t_k) + \\ + K_A(t_k) \dfrac{\partial B(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} K_A^{\mathrm{T}}(t_k) + K_A(t_k) B(t_k) \dfrac{\partial K_A^{\mathrm{T}}(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)}, \\ \qquad \text{если } k = 1, 2, \ldots, N-1; \\ O, \qquad \text{если } k = 0; \\ O, \qquad \text{если } \beta > k. \end{cases} \tag{3.70}
$$

Для вычисления производных $\dfrac{\partial K_A(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)}$ воспользуемся равенством (3.48):

$$
\frac{\partial K_A(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \tilde{K}(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)} \\ \dfrac{\partial^2 \tilde{K}(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta) \partial \theta_1} \\ \cdots \\ \dfrac{\partial^2 \tilde{K}(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta) \partial \theta_s} \end{bmatrix}. \tag{3.71}
$$

3.2.4. АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ ИНФОРМАЦИОННОЙ МАТРИЦЫ ФИШЕРА ПО КОМПОНЕНТАМ ВХОДНОГО СИГНАЛА ДЛЯ МОДЕЛЕЙ, ПОЛУЧЕННЫХ В РЕЗУЛЬТАТЕ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ

Приведенные в предыдущем пункте аналитические выкладки позволяют разработать алгоритм вычисления производных ИМФ по компонентам входного сигнала $\left\{ \dfrac{\partial M(U;\theta)}{\partial u_\alpha(t_\beta)},\ \beta = 0, 1, \ldots, N-1,\ \alpha = 1, 2, \ldots, r \right\}$ при *некотором фиксированном значении вектора неизвестных параметров* θ в уравнениях состояния, наблюдения, в начальных условиях и в ковариационных матрицах шумов системы и измерений. Представим возможный вариант такого алгоритма, следуя с незначительными изменениями [40]:

Шаг 1. Определить $\left\{\Gamma(t_k), \dfrac{\partial \Gamma(t_k)}{\partial \theta_i}, k = 0, 1, ..., N-1, i = 1, 2, ..., s\right\}$,

Q, R, $P(t_0)$, $\overline{x}(t_0)$, $\left\{\dfrac{\partial Q}{\partial \theta_i}, \dfrac{\partial R}{\partial \theta_i}, \dfrac{\partial P(t_0)}{\partial \theta_i}, \dfrac{\partial \overline{x}(t_0)}{\partial \theta_i},\ i = 1, 2, ..., s\right\}$.

Шаг 2. Положить $\left\{\dfrac{\partial M(U;\theta)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} = \mathrm{O},\ \beta = 0, 1, ..., N-1,\ \alpha = 1, 2, ..., r\right\}$,

$k = 0$, $P\left(t_k \mid t_k\right) = P(t_0)$.

Шаг 3. Вычислить $a(t_k)$, $\left\{\dfrac{\partial a(t_k)}{\partial \theta_i},\ i = 1, 2, ..., s\right\}$ и $F(t_k)$, $\left\{\dfrac{\partial F(t_k)}{\partial \theta_i},\right.$

$\left. i = 1, 2, ..., s\right\}$ с использованием равенств (2.18) и (2.19) соответственно.

Шаг 4. Если $k = 0$, то определить $\overline{x}_A(t_{k+1})$ и $\Sigma_A(t_{k+1})$ по формулам [см. (3.51), (3.54)]

$$\overline{x}_A(t_{k+1}) = \begin{bmatrix} F(t_0)\overline{x}(t_0) + a(t_0) \\ \dfrac{\partial F(t_0)}{\partial \theta_1}\overline{x}(t_0) + F(t_0)\dfrac{\partial \overline{x}(t_0)}{\partial \theta_1} + \dfrac{\partial a(t_0)}{\partial \theta_1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial F(t_0)}{\partial \theta_s}\overline{x}(t_0) + F(t_0)\dfrac{\partial \overline{x}(t_0)}{\partial \theta_s} + \dfrac{\partial a(t_0)}{\partial \theta_s} \end{bmatrix};$$

$$\Sigma_A(t_{k+1}) = \mathrm{O}$$

и перейти на шаг 8.

Шаг 5. Найти $\tilde{K}(t_k)$ и $\left\{\dfrac{\partial \tilde{K}(t_k)}{\partial \theta_i}, i = 1, 2, ..., s\right\}$ при помощи выражений [см. (3.43)]:

$$\tilde{K}(t_k) = F(t_k)K(t_k);$$

$$\frac{\partial \tilde{K}(t_k)}{\partial \theta_i} = \frac{\partial F(t_k)}{\partial \theta_i} K(t_k) + F(t_k) \frac{\partial K(t_k)}{\partial \theta_i}.$$

Шаг 6. Сформировать матрицы $F_A(t_k)$, $K_A(t_k)$ и вектор-столбец $a_A(t_k)$ в соответствии с равенствами (3.46), (3.48) и (3.47):

$$F_A(t_k) = \begin{bmatrix} F(t_k) & O & \cdots & O \\ \frac{\partial F(t_k)}{\partial \theta_1} - \tilde{K}(t_k)\frac{\partial H(t_k)}{\partial \theta_1} & F(t_k) - \tilde{K}(t_k)H(t_k) & \cdots & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F(t_k)}{\partial \theta_s} - \tilde{K}(t_k)\frac{\partial H(t_k)}{\partial \theta_s} & O & \cdots & F(t_k) - \tilde{K}(t_k)H(t_k) \end{bmatrix};$$

$$K_A(t_k) = \begin{bmatrix} \tilde{K}(t_k) \\ \frac{\partial \tilde{K}(t_k)}{\partial \theta_1} \\ \cdots \\ \frac{\partial \tilde{K}(t_k)}{\partial \theta_s} \end{bmatrix};$$

$$a_A(t_k) = \begin{bmatrix} a(t_k) \\ \frac{\partial a(t_k)}{\partial \theta_1} - \tilde{K}(t_k)\frac{\partial A(t_k)}{\partial \theta_1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial a(t_k)}{\partial \theta_s} - \tilde{K}(t_k)\frac{\partial A(t_k)}{\partial \theta_s} \end{bmatrix}.$$

Шаг 7. Вычислить $\overline{x}_A(t_{k+1})$ и $\Sigma_A(t_{k+1})$ по формулам [см. (3.51), (3.54)]:

$$\overline{x}_A(t_{k+1}) = F_A(t_k)\overline{x}_A(t_k) + a_A(t_k);$$

$$\Sigma_A(t_{k+1}) = F_A(t_k)\Sigma_A(t_k)F_A^{\mathrm{T}}(t_k) + K_A(t_k)B(t_k)K_A^{\mathrm{T}}(t_k).$$

Шаг 8. Определить $H(t_{k+1})$, $\left\{\frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial\theta_i}, \frac{\partial A(t_{k+1})}{\partial\theta_i},\ i=1, 2, ..., s\right\}$.

Шаг 9. Найти $P\left(t_{k+1} \mid t_k\right)$, $B(t_{k+1})$, $K(t_{k+1})$, $P\left(t_{k+1} \mid t_{k+1}\right)$, используя соотношения (3.6), (3.7), (3.8), (3.10):

$$P\left(t_{k+1} \mid t_k\right) = F(t_k)P\left(t_k \mid t_k\right)F^{\mathrm{T}}(t_k) + \Gamma(t_k)Q\Gamma^{\mathrm{T}}(t_k);$$

$$B(t_{k+1}) = H(t_{k+1})P\left(t_{k+1} \mid t_k\right)H^{\mathrm{T}}(t_{k+1}) + R;$$

$$K(t_{k+1}) = P\left(t_{k+1} \mid t_k\right)H^{\mathrm{T}}(t_{k+1})B^{-1}(t_{k+1});$$

$$P\left(t_{k+1} \mid t_{k+1}\right) = \left[I - K(t_{k+1})H(t_{k+1})\right]P\left(t_{k+1} \mid t_k\right).$$

Шаг 10. Вычислить $\left\{\frac{\partial P\left(t_{k+1} \mid t_k\right)}{\partial\theta_i}, \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial\theta_i}, \frac{\partial B^{-1}(t_{k+1})}{\partial\theta_i}, \frac{\partial K(t_{k+1})}{\partial\theta_i},\right.$ $\left.\frac{\partial P\left(t_{k+1} \mid t_{k+1}\right)}{\partial\theta_i},\ i=1, 2, ..., s\right\}$ по формулам (см. шаг 9):

$$\frac{\partial P\left(t_{k+1} \mid t_k\right)}{\partial\theta_i} = \frac{\partial F(t_k)}{\partial\theta_i}P\left(t_k \mid t_k\right)F^{\mathrm{T}}(t_k) + F(t_k)\frac{\partial P\left(t_k \mid t_k\right)}{\partial\theta_i}F^{\mathrm{T}}(t_k) +$$

$$+F(t_k)P\left(t_k \mid t_k\right)\frac{\partial F^{\mathrm{T}}(t_k)}{\partial\theta_i} + \frac{\partial\Gamma(t_k)}{\partial\theta_i}Q\Gamma^{\mathrm{T}}(t_k) +$$

$$+\Gamma(t_k)\frac{\partial Q}{\partial\theta_i}\Gamma^{\mathrm{T}}(t_k) + \Gamma(t_k)Q\frac{\partial\Gamma^{\mathrm{T}}(t_k)}{\partial\theta_i};$$

$$\frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial\theta_i} = \frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial\theta_i}P\left(t_{k+1} \mid t_k\right)H^{\mathrm{T}}(t_{k+1}) +$$

$$+H(t_{k+1})\frac{\partial P\left(t_{k+1} \mid t_k\right)}{\partial\theta_i}H^{\mathrm{T}}(t_{k+1}) +$$

$$+H(t_{k+1})P\left(t_{k+1} \mid t_k\right)\frac{\partial H^{\mathrm{T}}(t_{k+1})}{\partial \theta_i} + \frac{\partial R}{\partial \theta_i};$$

$$\frac{\partial B^{-1}(t_{k+1})}{\partial \theta_i} = -B^{-1}(t_{k+1})\frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_i}B^{-1}(t_{k+1});$$

$$\frac{\partial K(t_{k+1})}{\partial \theta_i} = \frac{\partial P\left(t_{k+1} \mid t_k\right)}{\partial \theta_i}H^{\mathrm{T}}(t_{k+1})B^{-1}(t_{k+1}) +$$

$$+P\left(t_{k+1} \mid t_k\right)\frac{\partial H^{\mathrm{T}}(t_{k+1})}{\partial \theta_i}B^{-1}(t_{k+1}) + P\left(t_{k+1} \mid t_k\right)H^{\mathrm{T}}(t_{k+1})\frac{\partial B^{-1}(t_{k+1})}{\partial \theta_i};$$

$$\frac{\partial P\left(t_{k+1} \mid t_{k+1}\right)}{\partial \theta_i} = -\left[\frac{\partial K(t_{k+1})}{\partial \theta_i}H(t_{k+1}) + K(t_{k+1})\frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_i}\right]P\left(t_{k+1} \mid t_k\right) +$$

$$+\left[I - K(t_{k+1})H(t_{k+1})\right]\frac{\partial P\left(t_{k+1} \mid t_k\right)}{\partial \theta_i}.$$

Шаг 11. Положить $\beta = 0$.

Шаг 12. Найти $\left\{\dfrac{\partial a(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)},\ \ \alpha = 1, 2, ..., r\right\}$, $\left\{\dfrac{\partial F(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)},\ \ \alpha = 1, 2, ..., r\right\}$, $\left\{\dfrac{\partial^2 a(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)\partial \theta_i}, \alpha = 1, 2, ..., r,\ i = 1, 2, .., s\right\}$, $\left\{\dfrac{\partial^2 F(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)\partial \theta_i}, \alpha = 1, 2, ..., r,\ i = 1, 2, ..., s\right\}$ при помощи равенств (2.18), (2.19).

Шаг 13. Если $k = 0$, определить $\left\{\dfrac{\partial \overline{x}_A(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)},\ \alpha = 1, 2, ..., r\right\}$, $\left\{\dfrac{\partial \Sigma_A(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)},\ \alpha = 1, 2, ..., r\right\}$ по формулам (3.67) и (3.70) и перейти на шаг 17.

Шаг 14. Определить $\left\{\frac{\partial \tilde{K}(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)}, \alpha = 1, 2, ..., r\right\}$ с помощью соотношения [см. (3.43)]

$$\frac{\partial \tilde{K}(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} = \frac{\partial F(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} K(t_k) + F(t_k) \frac{\partial K(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)}.$$

Шаг 15. Найти $\left\{\frac{\partial F_A(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)}, \alpha = 1, 2, ..., r\right\}$ и $\left\{\frac{\partial a_A(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)}, \alpha = 1, 2, ..., r\right\}$, в соответствии с выражениями (3.68) и (3.69).

Шаг 16. Определить $\left\{\frac{\partial \overline{x}_A(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)}, \alpha = 1, 2, ..., r\right\}$, $\left\{\frac{\partial \Sigma_A(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)}, \alpha = 1, 2, ..., r\right\}$ и $\left\{\frac{\partial K_A(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)}, \alpha = 1, 2, ..., r\right\}$, используя равенства (3.67), (3.70) и (3.71).

Шаг 17. Вычислить $\left\{\frac{\partial P(t_{k+1} \mid t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)}, \alpha = 1, 2, ..., r\right\}$, $\left\{\frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)}, \alpha = 1, 2, ..., r\right\}$, $\left\{\frac{\partial B^{-1}(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)}, \alpha = 1, 2, ..., r\right\}$, $\left\{\frac{\partial K(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)}, \alpha = 1, 2, ..., r\right\}$, $\left\{\frac{\partial P(t_{k+1} \mid t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)}, \alpha = 1, 2, ..., r\right\}$ по формулам (см. шаг 9):

$$\frac{\partial P(t_{k+1} \mid t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} = \frac{\partial F(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} P(t_k \mid t_k) F^{\mathrm{T}}(t_k) +$$

$$+ F(t_k) \frac{\partial P(t_k \mid t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} F^{\mathrm{T}}(t_k) + F(t_k) P(t_k \mid t_k) \frac{\partial F^{\mathrm{T}}(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)};$$

$$\frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)} = H(t_{k+1})\frac{\partial P\left(t_{k+1} \mid t_k\right)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} H^{\mathrm{T}}(t_{k+1})\,;$$

$$\frac{\partial B^{-1}(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)} = -B^{-1}(t_{k+1})\frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)} B^{-1}(t_{k+1})\,;$$

$$\frac{\partial K(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)} = \frac{\partial P\left(t_{k+1} \mid t_k\right)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} H^{\mathrm{T}}(t_{k+1}) B^{-1}(t_{k+1}) +$$

$$+ P\left(t_{k+1} \mid t_k\right) H^{\mathrm{T}}(t_{k+1}) \frac{\partial B^{-1}(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)}\,;$$

$$\frac{\partial P\left(t_{k+1} \mid t_{k+1}\right)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} = -\frac{\partial K(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)} H(t_{k+1}) P\left(t_{k+1} \mid t_k\right) +$$

$$+\left[I - K(t_{k+1})H(t_{k+1})\right]\frac{\partial P\left(t_{k+1} \mid t_k\right)}{\partial u_\alpha(t_\beta)}\,.$$

Шаг 18. Вычислить $\left\{\dfrac{\partial^2 P\left(t_{k+1} \mid t_k\right)}{\partial u_\alpha(t_\beta)\partial\theta_i}, \alpha = 1, 2, ..., r,\ \ i = 1, 2, ..., s\right\}$, $\left\{\dfrac{\partial^2 B(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)\partial\theta_i}, \alpha = 1, 2, ..., r,\ \ i = 1, 2, ..., s\right\}$, $\left\{\dfrac{\partial^2 K(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)\partial\theta_i}, \alpha = 1, 2, ..., r,\ i = 1, 2, ..., s\right\}$, $\left\{\dfrac{\partial^2 P\left(t_{k+1} \mid t_{k+1}\right)}{\partial u_\alpha(t_\beta)\partial\theta_i},\ \alpha = 1, 2, ..., r,\ \ i = 1, 2, ..., s\right\}$ при помощи следующих соотношений (см. шаг 10):

$$\frac{\partial^2 P\left(t_{k+1} \mid t_k\right)}{\partial u_\alpha(t_\beta)\partial\theta_i} = \frac{\partial^2 F(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)\partial\theta_i} P\left(t_k \mid t_k\right) F^{\mathrm{T}}(t_k) + \frac{\partial F(t_k)}{\partial\theta_i}\frac{\partial P\left(t_k \mid t_k\right)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} F^{\mathrm{T}}(t_k) +$$

$$+\frac{\partial F(t_k)}{\partial\theta_i} P\left(t_k \mid t_k\right)\frac{\partial F^{\mathrm{T}}(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} + \frac{\partial F(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)}\frac{\partial P\left(t_k \mid t_k\right)}{\partial\theta_i} F^{\mathrm{T}}(t_k) +$$

$$+F(t_k)\frac{\partial^2 P\left(t_k \mid t_k\right)}{\partial u_\alpha(t_\beta)\partial\theta_i}F^{\mathrm{T}}(t_k)+F(t_k)\frac{\partial P\left(t_k \mid t_k\right)}{\partial\theta_i}\frac{\partial F^{\mathrm{T}}(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)}+$$

$$+\frac{\partial F(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)}P\left(t_k \mid t_k\right)\frac{\partial F^{\mathrm{T}}(t_k)}{\partial\theta_i}+F(t_k)\frac{\partial P\left(t_k \mid t_k\right)}{\partial u_\alpha(t_\beta)}\frac{\partial F^{\mathrm{T}}(t_k)}{\partial\theta_i}+$$

$$+F(t_k)P\left(t_k \mid t_k\right)\frac{\partial^2 F^{\mathrm{T}}(t_k)}{\partial u_\alpha(t_\beta)\partial\theta_i};$$

$$\frac{\partial^2 B(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)\partial\theta_i}=\frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial\theta_i}\frac{\partial P\left(t_{k+1} \mid t_k\right)}{\partial u_\alpha(t_\beta)}H^{\mathrm{T}}(t_{k+1})+$$

$$+H(t_{k+1})\frac{\partial^2 P\left(t_{k+1} \mid t_k\right)}{\partial u_\alpha(t_\beta)\partial\theta_i}H^{\mathrm{T}}(t_{k+1})+H(t_{k+1})\frac{\partial P\left(t_{k+1} \mid t_k\right)}{\partial u_\alpha(t_\beta)}\frac{\partial H^{\mathrm{T}}(t_{k+1})}{\partial\theta_i};$$

$$\frac{\partial^2 B^{-1}(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)\partial\theta_i}=-\frac{\partial B^{-1}(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)}\frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial\theta_i}B^{-1}(t_{k+1})-$$

$$-B^{-1}(t_{k+1})\frac{\partial^2 B(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)\partial\theta_i}B^{-1}(t_{k+1})-B^{-1}(t_{k+1})\frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial\theta_i}\frac{\partial B^{-1}(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)};$$

$$\frac{\partial^2 K(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)\partial\theta_i}=\frac{\partial^2 P\left(t_{k+1} \mid t_k\right)}{\partial u_\alpha(t_\beta)\partial\theta_i}H^{\mathrm{T}}(t_{k+1})B^{-1}(t_{k+1})+$$

$$+\frac{\partial P\left(t_{k+1} \mid t_k\right)}{\partial\theta_i}H^{\mathrm{T}}(t_{k+1})\frac{\partial B^{-1}(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)}+$$

$$+\frac{\partial P\left(t_{k+1} \mid t_k\right)}{\partial u_\alpha(t_\beta)}\frac{\partial H^{\mathrm{T}}(t_{k+1})}{\partial\theta_i}B^{-1}(t_{k+1})+P\left(t_{k+1} \mid t_k\right)\frac{\partial H^{\mathrm{T}}(t_{k+1})}{\partial\theta_i}\frac{\partial B^{-1}(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)}+$$

$$+\frac{\partial P\left(t_{k+1} \mid t_k\right)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} H^{\mathrm{T}}(t_{k+1}) \frac{\partial B^{-1}(t_{k+1})}{\partial \theta_i} + P\left(t_{k+1} \mid t_k\right) H^{\mathrm{T}}(t_{k+1}) \frac{\partial^2 B^{-1}(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta) \partial \theta_i};$$

$$\frac{\partial^2 P\left(t_{k+1} | t_{k+1}\right)}{\partial u_\alpha(t_\beta) \partial \theta_i} = -\left[\frac{\partial^2 K(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta) \partial \theta_i} H(t_{k+1}) + \frac{\partial K(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)} \frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_i}\right] P\left(t_{k+1} | t_k\right) -$$

$$-\left[\frac{\partial K(t_{k+1})}{\partial \theta_i} H(t_{k+1}) + K(t_{k+1}) \frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_i}\right] \frac{\partial P\left(t_{k+1} \mid t_k\right)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} -$$

$$-\frac{\partial K(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)} H\left(t_{k+1}\right) \frac{\partial P\left(t_{k+1} \mid t_k\right)}{\partial \theta_i} + \left[I - K(t_{k+1}) H(t_{k+1})\right] \frac{\partial^2 P\left(t_{k+1} \mid t_k\right)}{\partial u_\alpha(t_\beta) \partial \theta_i}.$$

Шаг 19. Получить приращение $\left\{\Delta \frac{\partial M(U;\, \theta)}{\partial u_\alpha(t_\beta)},\ \alpha = 1, 2, ..., r\right\}$, отвечающее текущему значению β, в соответствии с равенством (3.66).

Шаг 20. Положить $\frac{\partial M(U;\, \theta)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} = \frac{\partial M(U;\, \theta)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} + \Delta \frac{\partial M(U;\, \theta)}{\partial u_\alpha(t_\beta)}$, $\alpha = 1, 2, ..., r$.

Шаг 21. Положить $\beta = \beta + 1$. Если $\beta \le N - 1$, то перейти на шаг 13.

Шаг 22. Положить $k = k + 1$. Если $k \le N - 1$, то пересчитать $\overline{x}(t_k)$ и $P(t_k)$ по формулам (2.16), (2.17) и перейти на шаг 3, иначе закончить процесс.

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

3.1. Рассмотрим линейную стационарную модель с детерминированным уравнением состояния

$$x(t_{k+1}) = Fx(t_k) + \Psi u(t_k); \tag{3.72}$$

$$y(t_{k+1}) = Hx(t_{k+1}) + v(t_{k+1}), \quad k = 0, 1, ..., N - 1. \tag{3.73}$$

Будем считать, что

- случайные векторы $v(t_{k+1})$ образуют стационарную белую гауссовскую последовательность, для которой

$$E\left[v(t_{k+1})\right] = 0\,,\ E\left[v(t_{i+1})v^{\mathrm{T}}(t_{k+1})\right] = R\delta_{ik}\,;$$

- начальное состояние $x(t_0)$ детерминировано;
- неизвестные постоянные параметры сведены в вектор θ, включающий в себя элементы матриц F и Ψ.

Покажите, что для модели (3.72), (3.73) с учетом указанных априорных предположений выражение для элементов ИМФ имеет вид:

$$M_{ij}(\theta) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\partial x^{\mathrm{T}}(t_{k+1})}{\partial \theta_i} H^{\mathrm{T}} R^{-1} H \frac{\partial x(t_{k+1})}{\partial \theta_j}\,, \quad i,\ j = 1, 2, ..., s.$$

3.2. Рассмотрим нелинейную математическую модель с детерминированным уравнением состояния

$$x(t_{k+1}) = f\left[x(t_k), u(t_k), t_k\right]; \tag{3.74}$$

$$y(t_{k+1}) = h\left[x(t_{k+1}),\ t_{k+1}\right] + v(t_{k+1})\,, \quad k = 0, 1, ..., N-1\,. \tag{3.75}$$

Будем считать, что:

- случайные векторы $v(t_{k+1})$ образуют стационарную белую гауссовскую последовательность, для которой

$$E\left[v(t_{k+1})\right] = 0\,,\ E\left[v(t_{i+1})v^{\mathrm{T}}(t_{k+1})\right] = R\delta_{ik}\,;$$

- начальное состояние $x(t_0)$ детерминировано;
- неизвестные постоянные параметры сведены в вектор θ, включающий в себя элементы вектор-функций $f\left[x(t_k), u(t_k), t_k\right]$.

Покажите, что для модели (3.74), (3.75) с учетом указанных априорных предположений выражение для элементов ИМФ принимает вид

$$M_{ij}(\theta) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\partial h^{\mathrm{T}}\left[x(t_{k+1}), t_{k+1}\right]}{\partial \theta_i} R^{-1} \frac{\partial h\left[x(t_{k+1}), t_{k+1}\right]}{\partial \theta_j}\,,\ i,\ j = 1, 2, ..., s.$$

3.3. Покажите, что если в модели (3.74), (3.75) неизвестные параметры дополнительно входят в матрицу R, то элементы ИМФ вычисляются с помощью следующего соотношения:

$$M_{ij}(\theta) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\partial h^{\mathrm{T}}\left[x(t_{k+1}), t_{k+1}\right]}{\partial \theta_i} R^{-1} \frac{\partial h\left[x(t_{k+1}), t_{k+1}\right]}{\partial \theta_j} +$$

$$+\frac{N}{2}\mathrm{sp}\left(\frac{\partial R}{\partial \theta_i} R^{-1} \frac{\partial R}{\partial \theta_j} R^{-1}\right), \quad i,\ j = 1, 2, ..., s.$$

3.4. Используя материалы п. 3.1.1, покажите, что для модели (2.5), (2.6) с соответствующим вероятностным описанием при вхождении неизвестных параметров в матрицы F, Ψ, Γ, H, Q, R, $P(t_0)$ и вектор $\bar{x}(t_0)$, выражение (3.32) для элементов ИМФ можно представить в следующем удобном для программной реализации виде:

$$M_{ij}(\theta) = \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \mathrm{sp}\left[\frac{\partial H}{\partial \theta_i} C_0 \left(\bar{x}_A(t_{k+1})\bar{x}_A^{\mathrm{T}}(t_{k+1}) + \Sigma_A(t_{k+1})\right) C_0^{\mathrm{T}} \frac{\partial H^{\mathrm{T}}}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1})\right] + \right.$$

$$+ \mathrm{sp}\left[\frac{\partial H}{\partial \theta_i} C_0 \left(\bar{x}_A(t_{k+1})\bar{x}_A^{\mathrm{T}}(t_{k+1}) + \Sigma_A(t_{k+1})\right) C_j^{\mathrm{T}} H^{\mathrm{T}} B^{-1}(t_{k+1})\right] +$$

$$+ \mathrm{sp}\left[H C_i \left(\bar{x}_A(t_{k+1})\bar{x}_A^{\mathrm{T}}(t_{k+1}) + \Sigma_A(t_{k+1})\right) C_0^{\mathrm{T}} \frac{\partial H^{\mathrm{T}}}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1})\right] +$$

$$+ \mathrm{sp}\left[H C_i \left(\bar{x}_A(t_{k+1})\bar{x}_A^{\mathrm{T}}(t_{k+1}) + \Sigma_A(t_{k+1})\right) C_j^{\mathrm{T}} H^{\mathrm{T}} B^{-1}(t_{k+1})\right] +$$

$$\left. + \frac{1}{2}\mathrm{sp}\left[\frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_i} B^{-1}(t_{k+1}) \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1})\right] \right\}, \quad i,\ j = 1, 2, ..., s. \quad (3.76)$$

3.5. Как будет выглядеть соотношение (3.76), в случае когда неизвестные параметры θ входят только в матрицы F и Ψ?

3.6. Используя выражение (3.76), предложите и программно реализуйте алгоритм вычисления ИМФ для линейной стационарной модели.

3.7. Рассмотрим следующую одномерную линейную стационарную модель:

$$x(t_{k+1}) = \theta_1 x(t_k) + \theta_2 u(t_k) + w(t_k);$$

$$y(t_{k+1}) = x(t_{k+1}) + v(t_{k+1}), \quad k = 0, 1.$$

Будем считать, что выполнены все априорные предположения из второй главы, причем

$$E\left[w(t_i)w(t_k)\right] = 0.1\delta_{ik} = Q\delta_{ik};$$

$$E\left[v(t_{i+1})v(t_{k+1})\right] = 0.3\delta_{ik} = R\delta_{ik};$$

$$E\left[x(t_0)\right] = 0 = \bar{x}(t_0), \; E\left[x^2(t_0)\right] = 0.1 = P(t_0).$$

Непосредственными расчетами покажите, что для данной модели при $U^{\mathrm{T}} = \left[u(t_0), u(t_1)\right] = [2, 2]$ и $\theta = [\theta_1, \theta_2] = [1, 1]$ ИМФ $M(\theta) = \begin{pmatrix} 8.35 & 12.31 \\ 12.31 & 27.70 \end{pmatrix}$.

Используйте данное упражнение для отладки программы, разработанной при выполнении упражнения 3.6.

3.8. Покажите, что выражение для вычисления производных ИМФ по компонентам входного сигнала для линейной стационарной модели из упражнения 3.4 выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial M_{ij}(U;\theta)}{\partial u_\alpha(t_\beta)} = \sum_{k=0}^{N-1}\left\{ \mathrm{sp}\left[\frac{\partial H}{\partial \theta_i} C_0 \left(\frac{\partial \bar{x}_A(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)} \bar{x}_A^{\mathrm{T}}(t_{k+1}) + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left. + \bar{x}_A(t_{k+1}) \frac{\partial \bar{x}_A^{\mathrm{T}}(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)}\right) C_0^{\mathrm{T}} \frac{\partial H^{\mathrm{T}}}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1})\right] +$$

$$+ \mathrm{sp}\left[\frac{\partial H}{\partial \theta_i} C_0 \left(\frac{\partial \bar{x}_A(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)} \bar{x}_A^{\mathrm{T}}(t_{k+1}) + \bar{x}_A(t_{k+1}) \frac{\partial \bar{x}_A^{\mathrm{T}}(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)}\right) C_j^{\mathrm{T}} H^{\mathrm{T}} B^{-1}(t_{k+1})\right] +$$

$$+ \mathrm{sp}\left[H C_i \left(\frac{\partial \bar{x}_A(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)} \bar{x}_A^{\mathrm{T}}(t_{k+1}) + \bar{x}_A(t_{k+1}) \frac{\partial \bar{x}_A^{\mathrm{T}}(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)}\right) C_0^{\mathrm{T}} \frac{\partial H^{\mathrm{T}}}{\partial \theta_j} B^{-1}(t_{k+1})\right] +$$

$$+\mathrm{sp}\left[HC_i\left(\frac{\partial\overline{x}_A(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)}\overline{x}_A^{\mathrm{T}}(t_{k+1})+\overline{x}_A(t_{k+1})\frac{\partial\overline{x}_A^{\mathrm{T}}(t_{k+1})}{\partial u_\alpha(t_\beta)}\right)C_j^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}B^{-1}(t_{k+1})\right]\Bigg\}\Bigg],$$

$$\beta=0,1,\ldots,N-1,\ \alpha=1,2,\ldots,r. \qquad (3.77)$$

3.9. Используя выражение (3.77), предложите и программно реализуйте алгоритм вычисления производных ИМФ по компонентам входного сигнала для линейной стационарной модели.

3.10. Непосредственными расчетами покажите, что для модели из упражнения 3.7 при $U^{\mathrm{T}}=[u(t_0),u(t_1)]=[2,2]$ и $\theta=[\theta_1,\theta_2]=[1,1]$ производные ИМФ таковы:

$$\frac{\partial M(U;\theta)}{\partial u(t_0)}=\begin{pmatrix}7.70 & 8.47\\ 8.47 & 15.38\end{pmatrix};\quad \frac{\partial M(U;\theta)}{\partial u(t_1)}=\begin{pmatrix}0 & 3.85\\ 3.85 & 12.31\end{pmatrix}.$$

Используйте данное упражнение для отладки программы, разработанной при выполнении упражнения 3.9.

3.11. Непосредственными вычислениями убедитесь в том, что для модели из упражнения 3.7 градиент критерия D-оптимальности (1.29) равен

$$\nabla_U\mu(U,\xi)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\mu(U,\xi)}{\partial u(t_0)}\\ \dfrac{\partial\mu(U,\xi)}{\partial u(t_1)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1.67\\ -0.10\end{bmatrix}.$$

3.12. Для модели из упражнения 3.7 при $R=0.3$, $P(t_0)=0.1$, $\theta=[\theta_1,\theta_2]=[1,1]$ и $\Omega_U=\left\{U\in R^2 \mid 1\le u(t_k)\le 2,\ k=0,1\right\}$ постройте D-оптимальные планы экспериментов, полагая последовательно $Q=0, 0.1, 1, 10, 100$. Результат сопоставьте с [41]. Влияет ли интенсивность шумов системы на результат планирования? Если да, то как это можно объяснить?

3.13. Покажите, что для линейной стационарной модели (2.5), (2.6) с соответствующими априорными предположениями ИМФ с элементами (3.76) не зависит от входного сигнала в случае вхождения неизвестных параметров в элементы матриц Q, R и $P(t_0)$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Mehra R.K.* Optimal input signals for parameter estimation in dynamic systems: survey and new results / R. K. Mehra //IEEE Trans. On Automat. Control. – 1974. – V.19. – №6. – P.753 – 768.

2. *Mehra R.K.* Synthesis of optimal inputs for multiinput – multioutput (MIMO) systems with process noise. Part II: time domain synthesis / R. K. Mehra // System identification – advances and case studies. – New York: Academic press, 1976. – P. 230 – 249.

3. *Чубич В.М.* Планирование *D*-оптимальных управляющих сигналов для стохастических линейных дискретных систем / В.И. Денисов, В.М. Чубич // Научный вестник НГТУ. – 1995. – № 1. – С. 17–31.

4. *Чубич В.М.* Активная параметрическая идентификация стохастических линейных систем: монография /В.И. Денисов, В.М. Чубич, О.С. Черникова, Д.И. Бобылева. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2009. – 192 с.

5. *Федоров В.В.* Теория оптимального эксперимента / В.В. Федоров. – М.: Наука, 1971. – 312 с.

6. *Ермаков С.М.* Математическая теория оптимального эксперимента / С.М. Ермаков, А.А. Жиглявский. – М.: Наука, 1987. – 320 с.

7. *Денисов В.И.* Математическое обеспечение системы ЭВМ-экспериментатор (регрессионный и дисперсионный анализы) / В.И. Денисов. – М.: Наука, 1977. – 251 с.

8. *Круг Г.К.* Планирование эксперимента в задачах идентификации и экстраполяции / Г.К. Круг, Ю.А. Сосулин, В.А. Фатуев. – М.: Наука, 1977. – 208 с.

9. *Горский В.Г.* Планирование промышленных экспериментов (модели динамики) / В.Г. Горский, Ю.П. Адлер, А.М. Талалай. – М.: Металлургия, 1978. – 112 с.

10. *Григорьев Ю.Г.* Методы оптимального планирования эксперимента. Линейные модели: учеб. пособие / Ю.Г. Григорьев. – СПб.: Лань, 2015. – 320 с.

11. *Химмельблау Д.* Прикладное нелинейное программирование / Д. Химмельблау. – М.: Мир, 1975. – 534 с.

12. *Базара М.* Нелинейное программирование / М. Базара, К. Шетти. – М.: Мир, 1982. – 583 с.

13. *Сухарев А.Г.* Курс методов оптимизации / А.Г. Сухарев, А.В. Тимохов, В.В. Федоров. – М.: Наука, 1986. – 328 с.

14. *Жиглявский А.А.* Методы поиска глобального экстремума / А.А. Жиглявский, А.Г. Жилинскас. – М.: Наука, 1991. – 248 с.

15. *Измаилов А.Ф.* Численные методы оптимизации / А.Ф. Измаилов, М.В. Солодов. – М.: Физматлит, 2008 . – 320 с.

16. *Сергеев Я.Д.* Диагональные методы глобальной оптимизации / Я.Д. Сергеев, Д.Е. Квасов. – М.: Физматлит, 2008. – 352 с.

17. *Гладких Б.А.* Методы оптимизации и исследование операций для бакалавров информатики. Ч. 2. Нелинейное и динамическое программирование / Б.А. Гладких. – Томск: Изд-во НТЛ, 2011. – 264 с.

18. *Чубич В.М.* Активная идентификация стохастических линейных дискретных систем, описываемых моделями в пространстве состояний и ARMAX-моделями / В.И. Денисов, И.Л. Еланцева, В.М. Чубич // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2000. – Т. 3. – № 1(5) – С. 87–100.

19. *Chubich V.M.* Application of methods of experiment design theory in problem of stochastic nonlinear discrete systems identification / V.M. Chubich // ACIT – CDA 2010. The IASTED intern. conf. on automation, control, and information technology - control, diagnostics, and automation, Novosibirsk, Russia: proceedings. – Novosibirsk, 2010. – P. 272–279.

20. *Чубич В.М.* Информационная технология активной параметрической идентификации стохастических квазилинейных дискретных систем / В.М. Чубич // Информатика и ее применения. – 2011. – Т. 5. – Вып. 1. – С. 46–57.

21. *Чубич В.М.* Активная параметрическая идентификация стохастических дискретных систем во временной области / В.И. Денисов, В.М. Чубич, О.С. Черникова // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2003. – Т. 6. – № 3(15). – С. 70–87.

22. *Чубич В.М.* Оптимальная идентификация дискретных систем на основе метода статистической линеаризации / В.М. Чубич // Информационные технологии и вычислительные системы. – 2010. – № 4. – С. 47–56.

23. *Чубич В.М.* Активная параметрическая идентификация стохастических нелинейных непрерывно-дискретных систем на основе линеаризации во временной области / В.М. Чубич // Информационно-управляющие системы. – 2010. – № 6(49). – С. 54–61.

24. *Топчеев Ю.И.* Атлас для проектирования систем автоматического регулирования / Ю.И. Топчеев. – М.: Машиностроение, 1989. – 752 с.

25. *Филлипс Ч.* Системы управления с обратной связью / Ч. Филлипс, Р. Харбор. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2001. – 616 с.

26. *Пугачев В.С.* Основы статистической теории автоматических систем / В.С. Пугачев, И.Е. Казаков, Л.Г. Евланов. – М.: Машиностроение, 1974. – 400 с.

27. *Синицын И.Н.* Фильтры Калмана и Пугачева / И.Н. Синицын. – М.: Логос, 2007. – 776 с.

28. *Чубич В.М.* Вычисление информационной матрицы Фишера в задаче активной параметрической идентификации стохастических нелинейных дискретных систем / В.М. Чубич // Научный вестник НГТУ. – 2009. – № 1(34). – С. 23–40.

29. *Балакришнан А.* Теория фильтрации Калмана / А. Балакришнан. – М.: Мир, 1988. – 168 с.

30. *Jazwinski A.H.* Stochastic processes and filtering theory / A.H. Jazwinski. – New York: Academic press, 1970. – 376 p.

31. *Сейдж Э.* Теория оценивания и ее применение в связи и управлении / Э. Сейдж, Дж. Мелс. – М.: Связь, 1976. – 496 с.

32. *Огарков М.А.* Методы статистического оценивания параметров случайных процессов / М.А. Огарков. – М.: Энергоатомиздат, 1990. – 208 с.

33. *Медич Дж.* Статистически оптимальные линейные оценки и управление / Дж. Медич. – М.: Энергия, 1973. – 440 с.

34. *Льюнг Л.* Идентификация систем. Теория для пользователя / Л. Льюнг. – М.: Наука, 1991. – 432 с.

35. *Рао С.Р.* Линейные статистические методы и их применения / С.Р. Рао. – М.: Наука, 1968. – 548 с.

36. *Леман Э.* Теория точечного оценивания / Э. Леман. – М.: Наука, 1991. – 448 с.

37. *Боровков А.А*. Математическая статистика / А.А. Боровков. – Новосибирск: Наука; Изд-во Ин-та математики, 1997. – 772 с.

38. *Ивченко Г.И.* Введение в математическую статистику / Г.И. Ивченко, Ю.И. Медведев. – М.: Изд-во ЛКИ, 2010. – 600 с.

39. *Чубич В.М.* Новое обобщенное выражение для информационной матрицы Фишера в задаче активной параметрической идентификации стохастических линейных дискретных систем / В.И. Денисов, В.М. Чубич, О.С. Рябых // Научный вестник НГТУ. – 2001. – № 2(1). – С. 29–42.

40. *Чубич В.М.* Алгоритм вычисления производных информационной матрицы Фишера по компонентам входного сигнала в задаче активной параметрической идентификации гауссовских нелинейных дискретных систем / В.М. Чубич, Е.С. Коновальчик // Научный вестник НГТУ. – 2010. – № 3(40). – С. 27 – 40.

41. *Денисов В.И.* Алгоритмы синтеза планов экспериментов для стохастических динамических систем: учеб. пособие / В.И. Денисов, В.М. Чубич. – Новосибирск: Изд-во НГТУ. – 1996. – 36 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Чубич Владимир Михайлович
Филиппова Елена Владимировна

АКТИВНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА ДЛЯ МОДЕЛЕЙ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Учебное пособие

Редактор *И.Л. Кескевич*
Выпускающий редактор *И.П. Брованова*
Корректор *И.Е. Семенова*
Дизайн обложки *А.В. Ладыжская*
Компьютерная верстка *Н.В. Гаврилова*

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции
Издание соответствует коду 95 3000 ОК 005-93 (ОКП)

Подписано в печать 25.05.2017. Формат 60 × 84 1/16. Бумага офсетная
Тираж 80 экз. Уч.-изд. л. 5,11. Печ. л. 5,5. Изд. 386/16. Заказ № 739
Цена договорная

Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета
630073, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20