Нуб-

Министерство образования Российской Федерации

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

№ 2118

ГЕОМЕТРИЯ И АЛГЕБРА

Часть 1

Методические указания к выполнению РГЗ
для студентов 1 курса факультета прикладной математики и
информатики (направление 510200)

НОВОСИБИРСК
2001

УДК 514+512] (07)
Г 361

Первая часть методических указаний содержит три задания по курсу геометрии и алгебры. Выполнение этих заданий предусмотрено программой в первом учебном семестре.

Каждое задание содержит 30 типовых вариантов приблизительно одинаковой степени сложности, образцы их выполнения и оформления. Теоретический материал не излагается.

Составители: *Н.Д. Бекарева* (задачи 1 и 2 задания 2, задание 3),
Ю.Д. Григорьев (задачи 1 и 2 задания 2, задание 3),
В.М. Чубич (задача 3 задания 2), *Н.Б. Иткина* (задание 1)

Рецензент *Э.П. Шурина*, д-р техн. наук, проф.

Работа выполнена на кафедре прикладной математики

ПАМЯТКА ДЛЯ СТУДЕНТОВ

Каждый студент выполняет вариант заданий под номером, совпадающим с его порядковым номером в групповом журнале.

При оформлении задания необходимо следовать нижеперечисленным требованиям:

1. Решение каждой задачи начинайте с нового листа.
2. Условие каждой задачи записывайте полностью.
3. Не допускайте сокращений слов и выкладок при записи решений.
4. Решение задач сопровождайте краткими пояснениями.
5. Титульный лист оформляйте в соответствии с установленной в университете формой.

Задание 1. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И ИХ СВОЙСТВА

Цель задания: ознакомление с понятием определителя, приобретение практических навыков вычисления определителей и их применение для решения крамеровских систем линейных алгебраических уравнений.

Срок выполнения: три недели.
Время защиты: по указанию преподавателя.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ

Задача 1. Вычислите определитель матрицы, воспользовавшись его определением и свойствами.

Задача 2. Вычислите определитель матрицы из задачи 1, разложив его по элементам какой-либо строки и какого-либо столбца.

Задача 3. Вычислите определитель матрицы из задачи 1, разложив его по двум и трем каким- либо строкам (столбцам).

Задача 4. Решите крамеровскую систему линейных алгебраических уравнений методом обратных матриц и проверьте по формуле Крамера одну из компонент решения.

ВЫПОЛНЕНИЕ ЗАДАНИЯ

Варианты матриц к задачам 1, 4 представлены в табл. 1, варианты векторов правых частей для задачи 4 – в табл.2.

Табл. 1 содержит 30 пронумерованных матриц размера 4х4; табл. 2–30 векторов-столбцов размера 4.

Рассмотрим пример решения типового варианта задания с необходимыми пояснениями.

Задача 1. Вычислите определитель матрицы, воспользовавшись его определением и свойствами.

Решение. Исходные данные берем из табл. 1.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для вычисления определителя матрицы A воспользуемся методом приведения его к верхнему треугольному виду. Полученный определитель равен произведению элементов главной диагонали.

Первую строку определителя прибавим к третьей его строке. Получим

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Умножив теперь вторую строку на (-1) и прибавив ее к четвертой строке, будем иметь

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=1\cdot1\cdot2\cdot2=4.$$

Задача 2. Вычислите определитель матрицы из задачи 1, разложив его по элементам какой- либо строки и какого- либо столбца.

Решение. Разложим определитель по первой строке

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}\cdot(-1)^{1+1}+1\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}\cdot(-1)^{1+3}=2+2=4.$$

Разложим определитель по первому столбцу

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}\cdot(-1)^{1+1}+(-1)\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}\cdot(-1)^{1+3}=2-(-2)=4.$$

Задача 3. Вычислите определитель матрицы из задачи 1, разложив его по двум и трем каким- либо строкам (столбцам).

Решение. Разложим определитель по первой и второй строкам

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\cdot(-1)^{3+1+2}+\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}(-1)^{3+1+3}+$$

$$+\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\cdot(-1)^{3+1+4}+\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\cdot(-1)^{3+2+3}+\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\cdot(-1)^{3+2+4}+$$

$$+\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\cdot(-1)^{3+3+4}=1+0+1+1+0+1=4.$$

Разложим определитель по первому, второму и третьему столбцам

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}\cdot1\cdot(-1)^{6+1+2+3}+\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}\cdot0\cdot(-1)^{6+1+2+4}+$$

$$+\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}\cdot(-1)\cdot(-1)^{6+1+3+4}+\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}\cdot0\cdot(-1)^{6+2+3+4}=2+0+2+0=4.$$

Задача 4. Решите крамеровскую систему линейных алгебраических уравнений методом обратных матриц и проверьте по формуле Крамера одну из компонент решения.

Решение. Исходные данные берем из табл. 1 и 2. Для нахождения обратной матрицы A^{-1} воспользуемся соотношением

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} \end{bmatrix},$$

где A_{ij} – алгебраическое дополнение к элементу a_{ij} матрицы A. Вычислим алгебраические дополнения:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\1&0&1\end{vmatrix}(-1)^{1+1}=2; \qquad A_{21}=\begin{vmatrix}0&1&0\\0&1&0\\1&0&1\end{vmatrix}(-1)^{2+1}=0;$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}0&1&0\\1&0&-1\\1&0&1\end{vmatrix}(-1)^{3+1}=-2; \qquad A_{41}=\begin{vmatrix}0&1&0\\1&0&-1\\0&1&0\end{vmatrix}(-1)^{4+1}=0;$$

$$A_{12}=\begin{vmatrix}0&0&-1\\-1&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}(-1)^{1+2}=0; \qquad A_{22}=\begin{vmatrix}1&1&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}(-1)^{2+2}=2;$$

$$A_{32}=\begin{vmatrix}1&1&0\\0&0&-1\\0&0&1\end{vmatrix}(-1)^{3+2}=0; \qquad A_{42}=\begin{vmatrix}1&1&0\\0&0&-1\\-1&1&0\end{vmatrix}(-1)^{4+2}=2;$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}0&1&-1\\-1&0&0\\0&1&1\end{vmatrix}(-1)^{1+3}=2; \qquad A_{23}=\begin{vmatrix}1&0&0\\-1&0&0\\0&1&1\end{vmatrix}(-1)^{2+3}=0;$$

$$A_{33}=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&1&1\end{vmatrix}(-1)^{3+3}=2; \qquad A_{43}=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\-1&0&0\end{vmatrix}(-1)^{4+3}=0;$$

$$A_{14}=\begin{vmatrix}0&1&0\\-1&0&1\\0&1&0\end{vmatrix}(-1)^{1+4}=0; \qquad A_{24}=\begin{vmatrix}1&0&1\\-1&0&1\\0&1&0\end{vmatrix}(-1)^{2+4}=-2;$$

$$A_{34}=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&1&0\end{vmatrix}(-1)^{3+4}=0; \qquad A_{44}=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&0\\-1&0&1\end{vmatrix}(-1)^{4+4}=2.$$

Отсюда

$$A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}2&0&-2&0\\0&2&0&2\\2&0&2&0\\0&-2&0&2\end{bmatrix}.$$

Указание. Убедитесь в правильности нахождения обратной матрицы, проверкой равенства

$$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E.$$

Определим вектор неизвестных

$$x=A^{-1}\cdot b=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}2&0&-2&0\\0&2&0&2\\2&0&2&0\\0&-2&0&2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\0\\\frac{1}{2}\\0\end{bmatrix}.$$

Проверим компоненту x_1 по формуле Крамера

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&-1\\0&0&1&0\\0&1&0&1\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

Таблица 1

Варианты матриц к задачам 1 и 4 задания 1

1	2	3	4	5
1 0 0 -1 2 3 4 7 -3 4 5 9 -4 -5 6 1	3 -1 5 2 2 0 7 0 -3 1 2 0 5 -4 1 2	1 2 3 4 2 1 2 3 0 2 1 2 0 0 2 1	1 0 2 0 0 2 0 3 2 0 3 0 0 3 0 4	2 1 0 0 1 2 1 0 0 1 2 1 0 0 1 2
6	**7**	**8**	**9**	**10**
3 1 1 1 2 1 1 1 -8 5 9 5 -11 7 7 4	9 7 9 7 8 6 8 6 -9 -7 9 7 -8 -6 8 6	6 8 -9 -12 4 6 -6 -9 -3 -4 6 8 -2 -3 4 6	0 1 1 1 1 0 1 1 1 1 0 1 1 0 0 2	2 1 1 1 1 2 1 1 1 1 2 3 1 1 3 4
11	**12**	**13**	**14**	**15**
1 1 1 1 1 2 1 2 1 1 3 1 1 2 1 4	0 1 2 3 1 0 1 2 2 1 0 1 3 2 1 0	0 2 3 4 1 1 2 3 1 0 1 2 1 0 0 1	1 1 0 0 1 3 1 0 1 6 4 1 1 10 10 5	2 1 2 1 1 2 1 2 1 1 3 1 1 2 1 4
16	**17**	**18**	**19**	**20**
3 2 0 0 1 3 2 0 0 1 3 2 0 0 1 3	1 1 1 1 1 -1 1 1 1 1 -1 1 1 1 1 -1	0 1 1 1 1 0 1 1 1 1 0 1 1 1 1 0	2 -5 1 2 -3 7 -1 4 5 -9 2 7 4 -6 1 2	3 -3 -5 8 -3 2 4 -6 2 -5 -7 5 -4 3 5 -6
21	**22**	**23**	**24**	**25**
2 -5 4 3 3 -4 7 5 4 -9 8 5 -3 2 -5 3	3 -3 -2 -5 2 5 4 6 5 5 8 7 4 4 5 6	3 -5 -2 2 -4 7 4 4 4 -9 -3 7 2 -6 -3 2	3 -5 -2 2 -3 4 -5 3 -5 7 -7 5 8 -8 5 -6	-3 9 3 6 -5 8 2 7 4 -5 -3 -2 7 -8 -4 -5
26	**27**	**28**	**29**	**30**
2 2 -1 1 4 3 -1 2 8 5 -3 4 3 3 -2 2	3 2 2 2 9 -8 5 10 5 -8 5 8 6 -5 4 7	2 3 11 5 1 1 5 2 2 1 3 2 1 1 3 4	2 5 4 1 1 3 2 1 2 10 9 7 3 8 9 2	3 4 1 2 3 5 3 5 6 8 1 5 3 5 3 7

Таблица 2

Варианты векторов правых частей к задаче 4 задания 1

1	2	3	4	5
$(1,0,0,0)^T$	$(0,1,0,0)^T$	$(0,0,1,0)^T$	$(0,0,0,1)^T$	$(1,0,0,1)^T$
6	7	8	9	10
$(1,1,0,0)^T$	$(1,0,1,0)^T$	$(1,-1,0,0)^T$	$(1,0,-1,0)^T$	$(1,0,0,-1)^T$
11	12	13	14	15
$(-1,0,1,0)^T$	$(-1,1,0,0)^T$	$(-1,0,-1,0)^T$	$(-1,0,0,-1)^T$	$(1,2,0,0)^T$
16	17	18	19	20
$(2,1,0,0)^T$	$(2,0,1,0)^T$	$(1,0,2,0)^T$	$(1,0,2,1)^T$	$(1,0,1,2)^T$
21	22	23	24	25
$(2,1,0,1)^T$	$(2,0,1,1)^T$	$(1,0,2,2)^T$	$(2,1,0,2)^T$	$(2,1,-3,0)^T$
26	27	28	29	30
$(4,6,12,6)^T$	$(4,0,1,-1)^T$	$(2,1,-3,-3)^T$	$(20,11,40,37)^T$	$(-3,-6,-8,-8)^T$

Задание 2. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ (СЛАУ)

Цель задания: ознакомление с понятиями линейной зависимости систем векто-ров, базой, базисом, суммой и пересечением подпространств, приобретение практических навыков решения и исследования СЛАУ.

Срок выполнения: четыре недели.

Время защиты: по указанию преподавателя.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ

Задача 1. Найдите все базы каждой из двух систем векторов. Определите, эквивалентны ли эти системы. Для каждой из систем векторов найдите такую базу, чтобы линейно- зависимые векторы системы выражались через векторы базы в виде линейной комбинации с целыми коэффициентами. Запишите соответствующие выражения.

Задача 2. Найдите базисы суммы и пересечения подпространств L_1 и L_2, натянутых на заданные системы векторов. Если $L_1 = L_2$, то решите задачу, используя исходные данные к задаче 1.

Задача 3. Исследуйте совместность и запишите общее решение неоднородной СЛАУ в виде суммы частного решения этой системы и линейной комбинации базисных решений соответствующей однородной системы.

ВЫПОЛНЕНИЕ ЗАДАНИЯ

Варианты систем векторов к задачам 1 и 2 представлены в табл. 4, содержащей 60 пронумерованных квадратных матриц. Каждая строка матрицы представляет собой вектор четырехмерного арифметического пространства. В табл.3 для каждого варианта задания приведены номера матриц из табл. 4. Варианты матриц и векторов правых частей к задаче 3 содержатся в табл. 5 и 6 соответственно.

Приведем пример решения типового варианта задания с необходимыми пояснениями.

Задача 1. Найдите все базы каждой из двух систем векторов. Определите, эквивалентны ли эти системы. Для каждой из систем векторов найдите такую базу, чтобы линейно-зависимые векторы системы выражались через векторы базы в виде линейной комбинации с целыми коэффициентами. Запишите соответствующие выражения.

Решение. Исходные данные берём из табл. 4, записываем их сразу в виде двух систем векторов: $x_1 = (1,1,1,1)$, $x_2 = (1,-1,1,1)$, $x_3 = (1,0,0,1)$, $x_4 = (0,1,1,0)$ и $y_1 = (5,-3,2,1)$, $y_2 = (2,1,9,-3)$, $y_3 = (7,-3,11,-2)$, $y_4 = (3-4,-7,4)$ соответственно. Для нахождения всех баз систем векторов x_i и $y_i, i = \overline{1,4}$, прежде всего определим ранг любой из систем векторов. Для этого каждую систему векторов запишем в виде матрицы, элементарными преобразованиями приведём матрицу к ступенчатому виду, позволяющему без труда найти ранг системы векторов. Обозначим величину ранга системы векторов через r. Теперь будем рассматривать всевозможные подсистемы по r векторов из данных четырёх векторов системы. Число таких подсистем равно C_4^r.

Если ранг некоторой такой подсистемы окажется равным числу r, то исследуемая подсистема образует базу системы векторов, в противном случае рассматриваемая подсистема линейно зависима и по определению не может служить базой системы векторов.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Из последней матрицы последовательности (1) заключаем, что ранг системы векторов x_i равен трём.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Видим, что базами системы векторов x_i, $i = \overline{1,4}$, служат подсистемы x_1, x_2, x_3; x_1, x_2, x_4; x_2, x_3, x_4.

Аналогичным образом поступаем с системой векторов y_i, $i = \overline{1,4}$.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 9 & -3 \\ 7 & -3 & 11 & -2 \\ 3 & -4 & -7 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 11 & 41 & -17 \\ 0 & 6 & 41 & -17 \\ 0 & -11 & -41 & 17 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 11 & 41 & -17 \\ 0 & 0 & 208 & 85 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы системы векторов y_i равен также трём.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 9 & -3 \\ 7 & -3 & 11 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 11 & 41 & -17 \\ 0 & 0 & 208 & 85 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 9 & -3 \\ 3 & -4 & -7 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 11 & 41 & -17 \\ 0 & -11 & -41 & 17 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 11 & 41 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 & 1 \\ 7 & -3 & 11 & -2 \\ 3 & -4 & -7 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 41 & -17 \\ 0 & -11 & -41 & 17 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 41 & -17 \\ 0 & 0 & 208 & 85 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 9 & -3 \\ 7 & -3 & 11 & -2 \\ 3 & -4 & -7 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 9 & -3 \\ 0 & -13 & -41 & 17 \\ 0 & -11 & -41 & 17 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 9 & -3 \\ 0 & -13 & -41 & 17 \\ 0 & 0 & -82 & 34 \end{pmatrix}.$$

Базами системы векторов y_1, y_2, y_3, y_4 служат подсистемы векторов y_1, y_2, y_3; y_1, y_3, y_4; y_2, y_3, y_4.

Так как ранги системы векторов x_i и $y_i, i = \overline{1,4}$, совпадают, эти системы векторов могут быть эквивалентны. Для выяснения данного вопроса вычислим ранг объединённой системы векторов $x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4$. Если ранг объединённой системы векторов совпадает с рангом каждой из этих систем, то системы векторов эквивалентны, в противном случае – неэквивалентны. При вычислении рангов систем векторов x_i и $y_i, i = \overline{1,4}$, видно, что в каждой системе векторов четвёртый вектор является линейной комбинацией первых трёх. Поэтому для вычисления ранга объединённой системы векторов x_i и $y_i, i = \overline{1,4}$, достаточно рассмотреть систему векторов

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 9 & -3 \\ 7 & -3 & 11 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & -3 & -4 \\ 0 & -1 & 7 & -5 \\ 0 & -10 & 4 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 14 & -9 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

Из вышесказанного видно, что ранг объединенной системы векторов равен четырем. Следовательно, системы векторов x_i и $y_i, i = \overline{1,4}$, неэквивалентны.

Замечание. При решении вопроса об эквивалентности систем векторов следует помнить, что эквивалентные системы векторов имеют один и тот же ранг, но не любые две системы одинакового ранга эквивалентны.

Для получения ответа на последний вопрос задачи решим несколько систем линейных уравнений. Возьмем базу x_1, x_2, x_3. Тогда $x_4 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3$. Перейдем от векторной формы записи системы уравнений к координатному

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ \alpha_2 - \alpha_2 \qquad = 1, \\ \alpha_1 + \alpha_2 \qquad = 1, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Решим систему уравнений (2), используя только матрицу системы и расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right). \tag{3}$$

Из последней матрицы последовательности (3) получаем решение: $\alpha_3 = -1$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_1 = 1$. Оно означает, что $x_4 = x_1 + 0 \cdot x_2 - x_3$.

Замечание. Если решение системы (2) не окажется целочисленным, следует рассмотреть базу x_1, x_2, x_4 и найти коэффициенты линейной комбинации $x_3 = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_4 x_4$. Просмотр баз продолжайте до тех пор, пока не будет найдено целочисленное решение. В каждом варианте такое решение существует.

Для системы векторов $y_i, i = \overline{1,4}$, рассмотрим базу y_1, y_2, y_3: $y_4 = \gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2 + \gamma_3 y_3$. Аналогично рассуждая, получим расширенную матрицу системы уравнений, которую затем преобразовываем к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 7 & 3 \\ -3 & 1 & -3 & -4 \\ 2 & 9 & 11 & -7 \\ 1 & -3 & -2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 7 & 3 \\ 0 & 11 & 6 & -11 \\ 0 & -41 & -41 & 41 \\ 0 & 17 & 17 & -17 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 7 & 3 \\ 0 & 11 & 6 & -11 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right). \tag{4}$$

Из последней матрицы последовательности (4) получаем решение $\gamma_3 = 0$, $\gamma_2 = -1$, $\gamma_1 = 1$. Оно также является целочисленным и означает, что $y_4 = y_1 - y_2 + 0 \cdot y_3$.

Задача 2. Найдите базисы суммы и пересечения подпространств L_1 и L_2, натянутых на заданные системы векторов. Если $L_1 = L_2$, то решите задачу, используя исходные данные к задаче 1.

Решение. Данные для задачи 2 берем также из табл. 4. Подпространство L_1 порождают векторы $x_1 = (1,2,1,1)$, $x_2 = (2,3,1,0)$, $x_3 = (3,1,1,-2)$, $x_4 = (-1,-1,0,1)$; подпространство L_2 – векторы $y_1 = (0,4,1,3)$, $y_2 = (1,0,-2,-6)$, $y_3 = (1,0,3,5)$, $y_4 = (2,0,1,-1)$. Прежде всего найдем размерности подпространств L_1, L_2, $L_1 + L_2$, $L_1 \cap L_2$ в четырехмерном пространстве. Для этого сначала вычислим ранги систем векторов x_i, y_i, $i = \overline{1,4}$ соответственно так, как это сделано в задаче 1.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -5 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Видим, что $\dim L_1 = 3$, его базис образуют векторы x_1, x_2, x_3.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 11 \\ 0 & 0 & 5 & 11 \end{pmatrix}.$$

Заключаем, что $\dim L_2 = 3$, базис L_2 образуют векторы y_1, y_2, y_3. Если ранг объединенной системы векторов $x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4$ также равен трем, то пространства L_1 и L_2 равны.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -5 & -2 & -5 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -3 & -7 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ранг системы векторов $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ равен 4. Следовательно, $L_1 \neq L_2$, $\dim(L_1 + L_2) = 4$, в базис пространства $L_1 + L_2$ вошли векторы x_1, x_2, x_3, y_2. Размерность подпространства $L_1 \cap L_2$ находим из условия

$$\dim L_1 + \dim L_2 = \dim(L_1 + L_2) + \dim(L_1 \cap L_2). \qquad (5)$$

По данным задачи $\dim(L_1 \cap L_2) = 3 + 3 - 4 = 2$.

Теперь можно найти базис подпространства $L_1 \cap L_2$. Обозначим базисные векторы подпространства $L_1 \cap L_2$ через z_1 и z_2. Оба вектора, по определению подпространства $L_1 \cap L_2$, принадлежат как подпространству L_1, так и подпространству L_2. Поэтому они могут быть единственным образом представлены в виде линейных комбинаций базисных векторов этих подпространств.

$$\begin{aligned} z_i &= \alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + \alpha_{i3}x_3, \\ z_i &= \beta_{i1}y_1 + \beta_{i2}y_2 + \beta_{i3}y_3, \quad i = 1,2. \end{aligned} \qquad (6)$$

Из равенства (6) получаем

$$\alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + \alpha_{i3}x_3 - \beta_{i1}y_1 - \beta_{i2}y_2 - \beta_{i3}y_3 = 0. \qquad (7)$$

Векторное равенство (7) представляет собой две однородные системы линейных уравнений при $i = 1$ и $i = 2$. Матрицы каждой из систем уравнений совпадают и имеют ранг, равный 4.

Ранее мы получили, что векторы x_1, x_2, x_3, y_2 – линейно независимы, поэтому в системах (7) по две свободных переменных: β_{i1} и β_{i3}. Выберем для них значения $\beta_{11} = 1$, $\beta_{13} = 0$ и $\beta_{21} = 0$, $\beta_{23} = 1$. При таком выборе значений свободных переменных получаемые решения систем уравнений при $i = 1$ и $i = 2$ линейно независимы. Выпишем расширенные матрицы систем уравнений при $i = 1$ и $i = 2$ при соответствующих значениях свободных переменных

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 6 & 3 \end{array}\right) \quad \text{и} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 6 & 5 \end{array}\right).$$

Поскольку матрицы отличаются только столбцом свободных членов, то удобно объединить их в одну расширенную матрицу, но с двумя столбцами свободных членов для того, чтобы найти решение систем более экономно

$$\left(\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 6 & 3 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -5 & 7 & 3 & 4 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & -5 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 4 \end{array}\right).$$

Осуществляя обратный ход в вычислительной схеме Гаусса, мы сначала рассматриваем первый столбец свободных членов, полученный при значениях свободных переменных $\beta_{11} = 1$, $\beta_{13} = 0$, а затем второй, полученный при значениях свободных переменных $\beta_{21} = 0$, $\beta_{23} = 1$. В результате будем иметь: $\alpha_{13} = -1, \alpha_{12} = 1, \alpha_{11} = 1, \beta_{12} = 0$ и $\alpha_{23} = 1, \alpha_{22} = -1, \alpha_{21} = 1, \beta_{22} = 1$. Эти числа вместе со значениями свободных переменных дают коэффициенты линейных комбинаций (6) при $i = 1, 2$, т.е.:

$$\begin{aligned} z_1 &= \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 = x_1 + x_2 - x_3, \\ z_1 &= \beta_{11}y_1 + \beta_{12}y_2 + \beta_{13}y_3 = y_1\,; \\ z_2 &= \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 = x_1 - x_2 + x_3, \\ z_2 &= \beta_{21}y_1 + \beta_{22}y_2 + \beta_{23}y_3 = y_2 + y_3\,. \end{aligned}$$

Вычислить векторы z_1 и z_2 можно по одному из полученных равенств, используя второе для проверки правильности вычислений. Так, используя для вычисления z_1 равенство $z_1 = x_1 + x_2 - x_3$, получаем $z_1 = (0, 4, 1, 3)$. Результат совпадает с выражением для z_1: $z_1 = y_1 = (0, 4, 1, 3)$; $z_2 = (2, 0, 1, -1)$.

Итак, базис подпространства $L_1 \cap L_2$ составляют векторы $z_1 = (0, 4, 1, 3)$ и $z_2 = (2, 0, 1, -1)$.

Задача 3. Исследуйте совместность и запишите общее решение неоднородной СЛАУ в виде суммы частного решения этой системы и линейной комбинации базисных решений соответствующей однородной системы.

Решение. Данные для задачи 3 берем из табл. 5 и 6.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 2, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 - 3x_5 = 3, \\ 4x_1 + 8x_2 + 13x_3 + 6x_4 - 3x_5 = 9, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 - 2x_5 = 1. \end{cases}$$

Запишем СЛАУ в матричном виде. Используя элементарные преобразования над строками полученной матрицы, приведем ее к ступенчатому виду и проверим выполнимость условия теоремы Кронекера–Капелли

$$\tilde{A} = \left(A|b\right) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 6 & -3 & 3 \\ 4 & 8 & 13 & 6 & -3 & 9 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Поскольку $rgA = rg\tilde{A} = 3$, СЛАУ совместна. Запишем ее общее решение. В силу того, что $n - rgA = 5 - 3 = 2$, будем иметь две свободные переменные. Пусть x_5, x_4 – свободные переменные. Тогда

$$x_3 = 1 + 2x_4 - x_5;$$

$$x_2 = 1 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 1 - \left(1 + 2x_4 - x_5\right) + 2x_4 - x_5 = 0;$$

$$x_1 = 2 - 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 2 - 3\left(1 + 2x_4 - x_5\right) - 2x_4 + x_5 = -1 - 8x_4 + 4x_5.$$

Следовательно, общее решение неоднородной СЛАУ

$$x^{\text{н}}_{\text{общ}} = \left(-1 - 8x_4 + 4x_5, 0, 1 + 2x_4 - x_5, x_4, x_5\right)^T =$$
$$= \left(-1,0,1,0,0\right)^T + \left(-8x_4 + 4x_5, 0, 2x_4 - x_5, x_4, x_5\right)^T =$$
$$= \left(-1,0,1,0,0\right)^T + x_4\left(-8,0,2,1,0\right)^T + x_5\left(4,0,-1,0,1\right)^T.$$

Отметим, что частное решение неоднородной СЛАУ $x^{\text{н}}_{\text{част}} = \left(-1,0,1,0,0\right)^T$, а векторы $y_1 = \left(-8,0,2,1,0\right)^T$ и $y_2 = \left(4,0,-1,0,1\right)^T$ образуют фундаментальную систему решений соответствующей однородной СЛАУ.

Указание. Чтобы избежать ошибок в вычислениях, проверьте полученные результаты.

Таблица 3

Указатель вариантов к задачам 1 и 2 задания 2

Номер варианта	Номера матриц из табл. 4 к задаче 1	Номера матриц из табл. 4 к задаче 2
1	10, 25	28, 36
2	33, 37	16, 45
3	20, 48	41, 46
4	5, 8	6, 21
5	26, 42	22, 32
6	1, 29	27, 39
7	12, 35	18, 30
8	19, 47	2, 43
9	3, 50	51, 52
10	7, 9	11, 13
11	15, 34	31, 38
12	24, 49	4, 17
13	23, 40	14, 44
14	31, 38	23, 40
15	11, 13	12, 35
16	4, 17	1, 29
17	2, 43	15, 34
18	27, 39	26, 42
19	16, 45	10, 25
20	6, 21	3, 50
21	18, 30	24, 49
22	41, 46	19, 47
23	28, 36	7, 9
24	14, 44	33, 37
25	22, 32	20, 48
26	51, 52	5, 8
27	53, 54	59, 60
28	55, 56	57, 58
29	58, 60	55, 56
30	57, 59	53, 54

Таблица 4

Матрицы к задачам 1 и 2 задания 2

1	2	3	4	5
2 1 -1 0 2 2 -1 -2 4 3 -2 -2 -2 -3 1 4	-3 0 0 1 -5 2 -1 1 6 3 -2 -3 1 -4 2 1	0 0 1 4 -1 1 2 5 -1 1 2 4 -2 2 2 3	0 0 1 1 2 -1 0 4 -1 0 5 3 1 -3 1 3	1 -1 1 -1 -1 2 0 1 -2 3 -1 2 -1 3 1 1
6	7	8	9	10
-3 -4 2 1 2 2 1 -4 0 0 -3 5 4 -2 2 -3	2 -1 0 0 3 0 2 3 5 -2 1 3 -4 1 0 6	-2 2 -1 2 -1 1 0 1 1 -1 2 -1 -1 1 1 1	2 -1 0 2 1 -1 4 0 3 -2 4 2 0 1 -8 2	1 0 -1 0 -1 1 1 2 -2 1 2 2 -1 3 1 6
11	12	13	14	15
2 0 -1 2 1 -2 0 0 3 -2 -1 1 -3 -2 2 1	1 1 0 1 0 2 1 1 -2 4 3 1 -1 5 3 2	2 0 -1 0 -1 2 0 1 -3 2 1 0 -4 4 1 2	-1 1 0 0 1 -1 1 1 1 0 1 2 0 1 1 1	1 1 -1 0 1 3 -1 -3 2 4 -2 -3 -1 -5 1 6
16	17	18	19	20
-1 2 1 -3 -2 5 2 -5 -1 4 1 -2 -1 3 1 -4	1 0 0 2 1 1 -2 0 3 -2 3 9 1 -2 4 6	-4 1 1 0 2 -1 -2 6 0 1 2 -9 -2 2 -2 3	0 0 1 -2 0 1 4 0 -1 2 4 -4 4 -6 1 -2	1 3 -1 0 0 1 -1 1 2 5 -1 -1 3 8 -2 -1
21	22	23	24	25
0 -2 1 0 3 -4 2 -1 -7 2 0 2 -5 0 2 1	-1 1 0 0 -1 1 1 1 0 -1 1 0 1 1 1 3	0 -1 0 2 0 -1 1 2 1 -1 -1 2 1 3 -2 -6	-1 0 1 -2 0 0 1 -2 1 2 -1 1 4 2 -5 9	-5 2 5 4 -2 1 2 2 1 0 -1 0 -1 2 1 4
26	27	28	29	30
-2 -2 3 2 1 1 -2 -1 1 1 0 -1 1 1 -3 -1	1 0 -1 0 2 -2 -2 3 1 -4 -2 7 0 2 2 -5	2 1 -3 1 -1 0 2 2 0 1 1 4 -1 1 3 0	2 1 -1 0 0 -2 0 3 4 1 -1 1 2 1 -5 2	-2 1 0 0 4 -3 1 0 2 -3 2 1 0 -1 1 2
31	32	33	34	35
2 -1 2 3 0 0 -1 2 1 -1 1 5 1 2 -5 -4	3 -3 1 1 3 -1 2 4 2 1 2 5 1 1 3 4	1 1 0 1 1 0 2 -1 2 3 -2 4 3 4 -2 5	0 -2 0 3 1 -2 0 3 2 -1 -1 3 1 7 -1 9	-1 1 1 0 0 4 -1 3 2 0 -3 3 1 -1 1 -6
36	37	38	39	40
-1 0 2 0 -2 1 5 1 -1 2 3 6 0 1 -1 9	3 1 4 -1 2 1 2 0 1 3 -4 5 -1 1 -4 3	0 -1 2 3 1 0 0 -2 0 -1 1 5 2 1 0 -7	0 -2 0 3 1 0 -3 2 0 2 1 -4 1 -2 0 2	1 0 -2 0 1 1 -2 -2 2 1 -4 -2 -1 -2 2 4
41	42	43	44	45
0 1 -1 0 1 0 1 0 2 -3 5 -1 1 -2 3 -2	1 2 -1 0 0 1 0 1 -2 -1 2 3 -1 1 1 3	1 -1 0 0 -6 0 1 2 2 -5 0 1 -2 -1 3 1	1 0 0 1 2 1 1 1 1 2 1 1 0 1 -1 3	0 1 0 1 1 -2 -3 7 0 1 1 -1 -1 3 0 0

Окончание табл.4

46	47	48	49	50
2 -1 0 6 1 0 -2 1 0 -1 3 3 1 1 1 4	1 -3 1 -1 1 -3 0 1 -1 3 2 -5 2 -6 -1 4	3 4 2 -5 2 3 1 -3 1 4 -2 1 1 0 2 -3	1 2 -2 3 2 2 -3 5 3 4 -5 8 3 2 -4 7	2 2 -3 -1 2 1 -3 0 -2 1 3 -2 4 1 -6 1
51	52	53	54	55
1 2 0 0 0 -1 1 1 1 2 1 -1 2 3 1 1	1 1 1 1 1 1 0 0 -1 -2 1 2 0 -1 2 2	1 3 5 -1 2 -1 -3 4 5 1 -1 7 7 7 9 1	4 -1 3 -2 3 -1 4 -2 8 -2 6 -4 6 -2 8 -4	1 2 3 4 2 3 4 5 3 4 5 6 4 5 6 7
56	57	58	59	60
5 2 -3 1 4 1 -2 3 1 1 -1 -2 3 4 -1 2	2 1 -3 1 4 2 -6 2 6 3 -9 3 1 1 1 1	2 -1 3 5 4 -3 1 3 3 -2 3 4 4 -1 15 17	2 1 11 2 1 0 4 -1 11 4 56 5 2 -1 5 -6	1 2 3 4 2 3 -4 1 2 -5 8 -3 3 -4 1 2

Таблица 5

Варианты матриц к задаче 3 задания 2

1	2	3	4	5
3 -2 5 4 9 -6 9 7 3 -2 -1 -1	1 -1 2 -1 3 -3 4 -3 3 -3 8 -3 1 -1 6 -1	1 -1 0 -1 2 1 1 -1 -3 4 6 0 -1 0 -2 4 0 -1 -2 2	3 2 -1 1 4 1 2 -1 1 -6 13 -9	3 -2 6 1 5 -3 9 6 3 -1 3 14
6	7	8	9	10
7 -4 -6 5 4 -1 -3 -7 5 -2 -4 -3	1 -3 -14 -3 2 -3 -1 -6 3 -5 -6 -9	2 4 -3 5 3 7 -2 4 -1 -5 -6 8	8 4 1 2 2 -6 3 1 -2 2 -2 3	1 1 2 -1 3 1 -1 2 5 1 -4 5 7 1 -7 8
11	12	13	14	15
2 7 3 1 3 5 2 2 9 4 1 7	2 -3 5 7 4 -6 2 3 2 -3 -11 -15	3 4 1 2 6 8 2 5 9 12 3 10	3 -2 5 4 6 -4 4 3 9 -6 3 2	2 -1 3 -7 6 -3 1 -4 4 -2 14 -31
16	17	18	19	20
9 -3 5 6 6 -2 3 1 3 -1 3 14	1 -2 1 1 1 -2 1 -1 1 -2 1 5	2 -1 3 -7 4 -3 1 -4 6 -2 14 -31	7 -5 -2 -4 -3 2 1 2 2 -1 -1 -2 -1 0 1 2 0 -1 1 2	1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 1 1
21	22	23	24	25
3 2 2 2 2 3 2 5 9 1 4 -5 2 2 3 4 7 1 6 -1	6 3 2 3 4 4 2 1 2 3 4 2 3 2 1 2 1 7 3 2	1 2 3 -2 1 3 6 5 -4 3 1 2 7 -4 1 2 4 2 -3 3	6 4 5 2 3 3 2 4 1 2 3 2 -2 1 0 9 6 1 3 2	2 -1 1 2 3 6 -3 2 4 5 6 -3 4 8 13 4 -2 1 1 2
26	27	28	29	30
5 -3 2 4 4 -2 3 7 8 -6 -1 -5 7 -3 7 17	3 2 5 4 2 3 6 8 1 -6 -9 -20 4 1 4 1	2 5 1 3 4 6 3 5 4 14 1 7 2 -3 3 0	2 -1 3 4 4 -2 5 6 6 -3 7 8 8 -4 9 10	2 3 1 2 4 6 3 4 6 9 5 6 8 12 7 8

Таблица 6

Варианты векторов правых частей к задаче 3 задания 2

1	2	3	4	5
$(2.5.1)^T$	$(1,1.5.5)^T$	$(1.2,3,3)^T$	$(2,4,6)^T$	$(5.4.-8)^T$
6	7	8	9	10
$(4,-5,-2)^T$	$(8,-5,-4)^T$	$(3,1,9)^T$	$(-1,3,8)^T$	$(4,0,-4.-8)^T$
11	12	13	14	15
$(6,4,2)^T$	$(1,2,1)^T$	$(3,7,13)^T$	$(2,3,4)^T$	$(5,7,18)^T$
16	17	18	19	20
$(4,5.-8)^T$	$(1,-1,5)^T$	$(5,7,18)^T$	$(8,-3,1,1,3)^T$	$(1,4,-3.2.-1)^T$
21	22	23	24	25
$(2,3,1,5,7)^T$	$(5,4.0,1)^T$	$(4,5,11,6)^T$	$(1,3,-7,2)^T$	$(2.3.9.1)^T$
26	27	28	29	30
$(3,1,9,0)^T$	$(3,5,-11,2)^T$	$(2,4,4,7)^T$	$(5,7,9,11)^T$	$(3,5.7.9)^T$

З а д а н и е 3. ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Цель задания: ознакомление с понятиями ортогонального дополнения, проекции вектора на подпространство, орта вектора к подпространству, ортогональной системы векторов и процедурой ортогонализации Грама–Шмидта.

Срок выполнения: две недели.

Время защиты: по указанию преподавателя.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ

Задача 1. Спроектируйте заданный вектор x на заданное подпространство L. Найдите длину наклонной, перпендикуляра и проекции, а также угол между наклонной и подпространством.

Задача 2. Выполните ортогонализацию базиса двумерного подпространства L, заданного одной из систем векторов в задачах 1или 2 задания 2, и дополните его до ортогонального базиса пространства R_4.

ВЫПОЛНЕНИЕ ЗАДАНИЯ

Варианты задачи 1 представлены в табл. 7. В качестве исходных данных к задаче 2 служит одна из систем векторов ранга 2, встретившихся в задачах 1 или 2 задания 2 (варианты подобраны так, что такая система векторов существует). Табл. 7 содержит 30 пронумерованных квадратных матриц. Первые две

строки матрицы представляют собой векторы трехмерного пространства, порождающие подпространство L из условия задачи 1, а последняя строка задает вектор x, проектируемый на подпространство L.

Приведем пример решения типового варианта задания с необходимыми пояснениями.

Задача 1. Спроектируйте заданный вектор x на заданное подпространство L. Найдите длину наклонной, перпендикуляра и проекции, а также угол между наклонной и подпространством.

Решение. Из табл. 7 выписываем векторы, образующие подпространство L. Пусть это будут векторы $y_1=(1,1,2)$ и $y_2=(-1,3,0)$. Наклонная (заданный вектор x) определяется последней строчкой таблицы. Пусть это будет вектор $x=(2,1,0)$.

Знаем, что трехмерное пространство R_3, в котором заданы векторы y_1, y_2 и x, представимо в виде суммы подпространств L и $L^\perp$, где $L^\perp$ – ортогональное дополнение L в R_3, причем это представление единственное. По определению ортогональной суммы любой вектор x пространства R_3 однозначно представим в виде суммы векторов g и h, $g\in L$, $h\in L^\perp$, т.е. $x=g+h$. Так как $g\in L$, а L порождают линейно-независимые векторы y_1 и y_2, то $g=\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2$. Линейная независимость векторов y_1 и y_2 очевидна или же легко проверяется. Запишем выражение для вектора $h\in L^\perp$:

$$h=x-g=x-\alpha_1 y_1-\alpha_2 y_2.$$

Так как $h\in L^\perp$, то по определению ортогональных множеств это означает, что

$$(h,y_1)=0;\quad (h,y_2)=0. \tag{8}$$

Подставляя в (8) выражение $h=x-\alpha_1 y_1-\alpha_2 y_2$ и используя аксиомы скалярного произведения, приходим к системе линейных уравнений:

$$\begin{cases}(x-\alpha_1 y_1-\alpha_2 y_2, y_1)=0,\\ (x-\alpha_1 y_1-\alpha_2 y_2, y_2)=0\end{cases}\sim\begin{cases}(y_1,y_2)\alpha_1+(y_1,y_2)\alpha_2=(x,y_1),\\ (y_1,y_2)\alpha_1+(y_2,y_2)\alpha_2=(x,y_2)\end{cases}\sim$$

$$\sim\begin{cases}6\alpha_1+2\alpha_2=3,\\ 2\alpha_1+10\alpha_2=1.\end{cases} \tag{9}$$

Решая (9), находим, что $\alpha_1=\frac{1}{2}, \alpha_2=0$. Таким образом,

$$g=\frac{1}{2}y_1=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right),\quad h=x-g=\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2},-1\right).$$

Вычислим длины векторов x, g и h:

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)} = \sqrt{5}, \quad \|g\| = \sqrt{(g,g)} = \frac{\sqrt{6}}{2}, \quad \|h\| = \sqrt{(h,h)} = \frac{\sqrt{14}}{2}.$$

Наконец, по формуле угол между наклонной x и подпространством L равен $\cos(x,L) = \cos(x,g) = \frac{\|g\|}{\|x\|}$:

$$\cos(x,L) = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{30}}{10}, \quad (x,L) = \arccos\left(\frac{\sqrt{30}}{10}\right).$$

Задача 2. Выполните ортогонализацию базиса двумерного подпространства L, заданного одной из систем векторов в задачах 1 или 2 задания 2, и дополните его до ортогонального базиса пространства R_4.

Решение. Будем считать, что двумерное подпространство L задано векторами $x_1 = (1,1,1,1)$ и $x_2 = (1,-1,1,1)$. Так как эти векторы неортогональны, ортогонализируем их с помощью процедуры Грама-Шмидта. Полагаем $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2 - \alpha_{12}x_1$, причем $\alpha_{12} = \frac{(x_2,y_1)}{(y_1,y_1)}$. Итак,

$$y_2 = x_2 - \frac{(x_2,y_1)}{(y_1,y_1)}y_1 = x_2 - \frac{2}{4}y_1 = \left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

Теперь базис подпространства L составляют ортогональные векторы y_1, y_2. Остается найти векторы y_3 и y_4 такие, чтобы в системе векторов y_1, y_2, y_3, y_4 все векторы были попарно ортогональны. Попарная ортогональность векторов системы обеспечит их линейную независимость.

Вектор y_3 найдем из условий:

$$\begin{cases} (y_3,y_1) = 0, \\ (y_3,y_2) = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Условия (10) представляют систему линейных однородных уравнений относительно координат вектора $y_3 = (y_{31}, y_{32}, y_{33}, y_{34})$ с матрицей системы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Ранг матрицы системы равен двум, поэтому для двух координат вектора y_3 значения могут быть выбраны произвольно. Положим $y_{33} = 1, y_{34} = 1$. Тогда с

учетом вида матрицы (11) имеем: $y_{32} = 0, y_{31} = -2$. Итак, третий вектор ортогонального базиса пространства R_4 имеет вид $y_3 = (-2,0,1,1)$.

Вектор $y_4 = (y_{41}, y_{42}, y_{43}, y_{44})$ найдем из условий:

$$\begin{cases} (y_4,y_1) = 0, \\ (y_4,y_2) = 0, \\ (y_4,y_3) = 0. \end{cases}$$

Выпишем матрицу этой системы уравнений относительно координат вектора y_4 и преобразуем ее к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Ранг матрицы (12) равен трем, поэтому значение только одной координаты вектора y_4 выбираем произвольно. Пусть $y_{44} = 1$. Тогда, решая однородную систему уравнений с матрицей (12) относительно координат вектора y_4, получаем $y_{43} = -1, y_{42} = 0, y_{41} = 0$. Следовательно, последним вектором в ортогональном базисе R_4 будет вектор $y_4 = (0,0,-1,1)$. Итак, ортогональный базис пространства R_4 составляют векторы:

$$y_1 = (1,1,1,1), \quad y_2 = \left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right), \quad y_3 = (-2,0,1,1), \quad y_4 = (0,0,1,-1).$$

Замечание. Чтобы избежать ошибок в вычислениях, результат следует проверить, т.е. убедиться в том, что в полученной системе векторов все векторы попарно ортогональны. Результаты вычислений нужно привести в отчете.

Таблица 7

Матрицы к задаче 1 задания 3

1	2	3	4	5
4 1 0 3 1 0 -1 2 5	4 -1 0 -7 2 0 3 -2 4	2 -1 0 -1 1 0 8 -2 1	2 -1 0 5 3 0 4 -3 2	1 1 0 1 2 0 6 -5 1
6	7	8	9	10
3 5 0 4 7 0 9 -1 4	9 4 3 0 5 4 0 -2 5 3 x	-3 2 0 4 -3 0 1 -1 1	5 3 0 8 5 0 1 -2 4	6 -5 0 -5 4 0 2 2 -3
11	12	13	14	15
4 0 1 3 0 1 8 -1 3	4 0 -1 -7 0 2 5 1 -4	2 0 -1 -1 0 1 7 1 2	2 0 -1 5 0 3 4 -2 1	1 0 1 1 2 0 -1 4 9

Окончание табл. 7

16	17	18	19	20
3 0 5 4 0 7 -1 2 3	4 0 3 5 0 4 8 1 -6	-3 0 2 4 0 -3 5 5 -4	5 0 3 8 0 5 -2 7 9	6 0 -5 -5 0 4 1 -1 1
21	22	23	24	25
0 4 1 0 3 1 -1 3 5	0 4 -1 0 -7 2 3 3 -1	0 2 -1 0 -1 1 4 -2 1	0 2 -1 0 5 3 7 -1 4	0 1 1 0 1 2 9 4 -3
26	27	28	29	30
0 3 5 0 4 7 -2 1 6	1 2 3 2 5 7 3 7 11	1 1 1 1 1 2 1 2 3	2 1 -3 3 2 -5 1 -1 1	1 5 3 2 7 3 3 9 4

ГЕОМЕТРИЯ И АЛГЕБРА

Часть 1

Методические указание

Редактор *Н.Ф. Фабричная*
Технический редактор *Г.Е. Телятникова*
Корректор *Л.Н. Ветчакова*

Подписано в печать 21.02.2001. Формат 60 х 84 1/16. Бумага офсетная.
Тираж 125 экз. Уч. -изд. л. 1,25. Печ. л. 1,5. Изд. № 1653. Заказ № 95.
Цена договорная

Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета
630092, г. Новосибирск, пр. К. Маркса. 20