

Задание 1. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Цель задания: ознакомление с поверхностями второго порядка, приобретение практических навыков приведения уравнения поверхности второго порядка к каноническому виду.

Срок выполнения: две недели.

Время защиты: по указанию преподавателя.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ

Поверхность задана уравнением в декартовой прямоугольной системе координат (ДПСК). Приведите уравнение к каноническому виду и определите тип поверхности. Найдите каноническую систему координат. Сделайте проверку $P^T A P = D$. Выполните рисунок поверхности в канонической системе координат. Проверьте правильность нахождения канонического уравнения по инвариантам.

ВЫПОЛНЕНИЕ ЗАДАНИЯ

Табл. 1 содержит 30 пронумерованных уравнений поверхностей второго порядка в исходной ДПСК.

Рассмотрим пример решения типового варианта задания с необходимыми пояснениями. Пусть уравнение поверхности в исходной ДПСК имеет вид

$$x^2 - 4y^2 - 4z^2 + 10yz + 2x + 2y + 2z + 3 = 0. \quad (1)$$

Приведем его к каноническому виду.

Запишем матрицу квадратичной формы A и найдем ее собственные значения и собственные векторы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 5 & -4 \end{pmatrix};$$

$$\begin{aligned} |A - \lambda E| &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -4-\lambda & 5 \\ 0 & 5 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} -4-\lambda & 5 \\ 5 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)((4+\lambda)^2 - 25) = \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2 + 8\lambda - 9) = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 9) = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, матрица A имеет два различных собственных значения $\lambda_1 = 1$;

$\lambda_2 = -9$. Пусть для λ_1 собственные векторы имеют вид $x^{(1)} = (\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \alpha_3^{(1)})^T$.

Найдем их из условия $(A - \lambda_1 E)x^{(1)} = 0$:

$$(A - \lambda_1 E) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 5 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(1)} \\ \alpha_2^{(1)} \\ \alpha_2^{(1)} \end{pmatrix} = \alpha_1^{(1)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2^{(1)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, существуют два линейно независимых собственных вектора $f_1 = (1, 0, 0)^T$ и $f_2 = (0, 1, 1)^T$, соответствующих собственному значению $\lambda_1 = 1$.

Замечание. Если каждому собственному значению матрицы A соответствует один линейно независимый собственный вектор, эти векторы будут ортогональны друг другу в силу свойств симметричной матрицы. В противном случае они могут оказаться не ортогональными и требуется применять процедуру ортогонализации Грама - Шмидта.

У нас векторы f_1 и f_2 ортогональны. Найдем теперь общий вид собственных векторов $x^{(2)} = (\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}, \alpha_3^{(2)})^T$, соответствующих собственному значению λ_2 :

$$(A - \lambda_2 E) = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_2^{(2)} \\ -\alpha_2^{(2)} \end{pmatrix} = \alpha_2^{(2)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Выберем $f_3 = (0, 1, -1)^T$. Подчеркнем, что f_3 ортогонален к f_1 и f_2 как собственный вектор симметричной матрицы, соответствующий другому собственному значению.

Пронормируем полученные векторы и составим из них матрицу перехода

$P = (\tilde{f}_1 | \tilde{f}_2 | \tilde{f}_3)$, где $\tilde{f}_i = \frac{1}{\|f_i\|} f_i$, $i = \overline{1, 3}$. Поскольку $\|f_1\| = 1$, $\|f_2\| = \sqrt{2}$ и $\|f_3\| = \sqrt{2}$,

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Проверим правильность нахождения матрицы P по формуле $P^T A P = D$, где $D = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ - матрица квадратичной формы в базисе $\{\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3\}$:

$$\begin{aligned}
P^T A P &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 5 & -4 \end{pmatrix} P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -9 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} = \text{diag}(1, 1, -9).
\end{aligned}$$

Матрица P найдена верно.

Выполним преобразование переменных

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

и запишем уравнение поверхности (1) в новой ДПСК со старым центром и направляющими векторами $\{\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3\}$:

$$\begin{aligned}
&\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 - 9\tilde{z}^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}(2, 2, 2) \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} + 3 = \\
&= \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 - 9\tilde{z}^2 + 2\tilde{x} + 2\sqrt{2}\tilde{y} + 3 = [\tilde{x}^2 + 2\tilde{x}] + [\tilde{y}^2 + 2\sqrt{2}\tilde{y}] - 9\tilde{z}^2 + 3 = \\
&= \left[(\tilde{x}^2 + 2\tilde{x} + 1) - 1 \right] + \left[(\tilde{y}^2 + 2\sqrt{2}\tilde{y} + 2) - 2 \right] - 9\tilde{z}^2 + 3 = \\
&= (\tilde{x} + 1)^2 + (\tilde{y} + \sqrt{2})^2 - 9\tilde{z}^2 = 0. \quad (3)
\end{aligned}$$

Положив $\tilde{\tilde{x}} = \tilde{x} + 1$, $\tilde{\tilde{y}} = \tilde{y} + \sqrt{2}$, $\tilde{\tilde{z}} = \tilde{z}$, или в матричной записи,

$$\begin{pmatrix} \tilde{\tilde{x}} \\ \tilde{\tilde{y}} \\ \tilde{\tilde{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} + d, \quad (4)$$

где $d = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ - вектор параллельного переноса, получим каноническое

уравнение конуса

$$\tilde{\tilde{x}}^2 + \tilde{\tilde{y}}^2 - 9\tilde{\tilde{z}}^2 = 0, \quad (5)$$

которое можно преобразовать к виду

$$\frac{\tilde{\tilde{x}}^2}{9} + \frac{\tilde{\tilde{y}}^2}{9} - \tilde{\tilde{z}}^2 = 0.$$

Проверим результат (5) по инвариантам. Для исходного уравнения (1) имеем:

$$s_1 = SpA = 1 - 4 - 4 = -7;$$

$$s_2 = m_{1,2}^{1,2} + m_{1,3}^{1,3} + m_{2,3}^{2,3} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -17;$$

$$\delta = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 5 & -4 \end{vmatrix} = -9;$$

$$\sigma = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 5 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 5 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 5 & 1 \\ 5 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 5 & 1 \\ 9 & -9 & 0 \\ 9 & -9 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Для канонического уравнения (5) $A' = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$ и

$$s'_1 = 1 + 1 - 9 = -7;$$

$$s'_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -9 \end{vmatrix} = -17;$$

$$\delta' = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{vmatrix} = -9;$$

$$\sigma' = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Инварианты совпадают.

Определим каноническую систему координат. Координаты начала канонической системы координат $\tilde{c}$ в исходной ДПСК найдутся по формуле

$$c = -Pd = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Направляющими векторами новых осей служат столбцы матрицы P .

Приведем рисунок поверхности (1) в канонической системе координат:

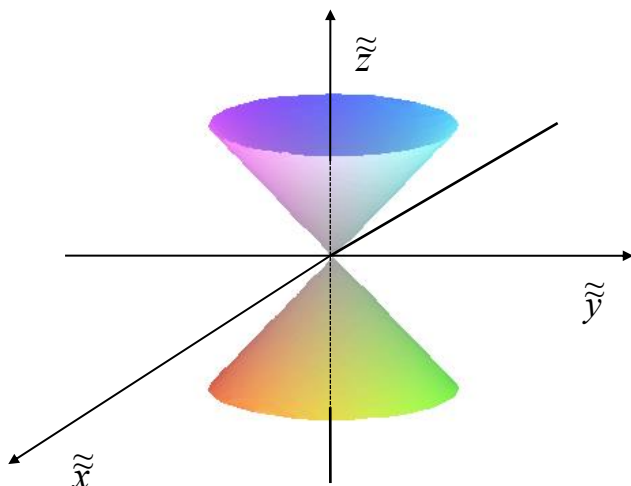


Таблица 1

Варианты уравнений поверхностей второго порядка к заданию 1

№ варианта	Уравнение поверхности
1	$2x^2 + 9y^2 + 2z^2 - 4xy + 4yz - 1 = 0$
2	$4y^2 - 3z^2 + 4xy - 4xz + 8yz + 4x + 2z + 5 = 0$
3	$x^2 + y^2 + 4z^2 - 2xy + 4xz - 4yz - 2x + 2y + 2z = 0$
4	$x^2 + y^2 + z^2 - xy + xz + yz + 3x + 3y - 3z = 0$
5	$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 4x + 4y + 3 = 0$
6	$x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 4yz + 20y + 20z - 10 = 0$
7	$-x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 8yz + 2x + 12y + 24z + 36 = 0$
8	$2x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 6yz + 4x + 16y + 16z + 10 = 0$
9	$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 12x + 4y + 6z - 3 = 0$
10	$x^2 + y^2 + 4z^2 - 2xy + 4xz - 4yz + 24y - 24z + 12 = 0$
11	$16x^2 + 9y^2 - z^2 - 24xy - 9x - 12y + 4z + 71 = 0$
12	$2x^2 + 2y^2 + z^2 - 10xy + 20x - 8y + 29 = 0$
13	$4x^2 + y^2 + 9z^2 + 4xy - 12xz - 6yz + 11x + 3y - z + 1 = 0$
14	$2x^2 + 2y^2 + 8z^2 - 4xy + 8xz - 8yz + 48y - 48z + 12 = 0$
15	$4x^2 - 3y^2 + 4xz - 4yz + 8xy - 2y + 4z - 1 = 0$
16	$8y^2 + 4xy + 2xz + 4yz + 8x + 6y + 4z + 6 = 0$
17	$4x^2 + 4y^2 - 2z^2 + 4xy - 8xz + 8yz + 12x - 12y + 24z - 30 = 0$
18	$x^2 + y^2 - 2z^2 + 10xy + 4xz - 4yz + 24x - 12z - 12 = 0$
19	$4x^2 + y^2 + 9z^2 + 4xy - 12xz - 6yz + 6x - 2y - 6z + 11 = 0$
20	$x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy - 2yz + 18x - 6y + 6z - 18 = 0$

№ варианта	Уравнение поверхности
21	$3x^2 - 7y^2 + 3z^2 + 8xy - 8xz - 8yz - 4x + 6y + 8z + 6 = 0$
22	$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 8xy + 8xz - 8yz - 8x - 4y + 8z + 2 = 0$
23	$2x^2 + 2y^2 - z^2 + 2xy - 4xz + 4yz + 6x - 6y + 12z - 15 = 0$
24	$4y^2 + 2xy + xz + 2yz + 4x + 3y + 2z + 3 = 0$
25	$-x^2 + 10y^2 - z^2 - 8xy + 6xz + 8yz + 24x - 8y - 16z - 2 = 0$
26	$2x^2 - y^2 + 2z^2 + 4xy - 2xz + 4yz + 10x - 2y - 2z + 2 = 0$
27	$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4xy - 24y + 8x + 12z - 6 = 0$
28	$2x^2 + 8y^2 + 18z^2 + 8xy - 12xz - 24yz + 8x + 4y - 12z + 2 = 0$
29	$3y^2 + z^2 + 6xy + 2xz + 4yz + y + z + 1 = 0$
30	$3y^2 + z^2 + 6xy + 2xz + 4yz + y + z + 1 = 0$