

**УЧЕБНИКИ
НГТУ**

Серия основана в 2001 году

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
СЕРИИ «УЧЕБНИКИ НГТУ»**

д-р техн. наук, проф. (председатель) *А.А. Батаев*
д-р техн. наук, проф. (зам. председателя) *Г.И. Расторгуев*

д-р техн. наук, проф. *С.В. Брованов*
д-р техн. наук, проф. *А.Г. Вострецов*
д-р техн. наук, проф. *А.А. Воевода*
д-р техн. наук, проф. *В.А. Гридчин*
д-р техн. наук, проф. *В.И. Денисов*
д-р физ.-мат. наук, проф. *В.Г. Дубровский*
д-р филос. наук, проф. *В.И. Игнатъев*
д-р филос. наук, проф. *В.В. Крюков*
д-р техн. наук, проф. *Н.В. Пустовой*
д-р техн. наук, проф. *Х.М. Рахмьянов*
д-р филос. наук, проф. *М.В. Ромм*
д-р техн. наук, проф. *Ю.Г. Соловейчик*
д-р физ.-мат. наук, проф. *В.А. Селезнев*
д-р техн. наук, проф. *А.А. Спектор*
д-р техн. наук, проф. *А.Г. Фишов*
д-р экон. наук, проф. *М.В. Хайруллина*
д-р техн. наук, проф. *А.Ф. Шевченко*
д-р техн. наук, проф. *Н.И. Щуров*

**В. И. ДЕНИСОВ,
В. М. ЧУБИЧ, О. С. ЧЕРНИКОВА**

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

ПРАКТИКУМ



**НОВОСИБИРСК
2018**

УДК 512(075.8)+514(075.8)
Д 332

Рецензенты

д-р физ.-мат. наук, доцент *С.В. Судоплатов*,
канд. техн. наук, доцент *В.С. Карманов*

Денисов В.И.

Д 332 Алгебра и геометрия. Практикум: учебник / В.И. Денисов, В.М. Чубич, О.С. Черникова. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2018. – 307 с. (Серия «Учебники НГТУ»).

ISBN 978-5-7782-3791-9

Учебник содержит необходимый теоретический материал, методические пояснения и рекомендации к решению задач и упражнений по курсу линейной алгебры и аналитической геометрии.

Учебник предназначен для студентов I курса факультета прикладной математики и информатики НГТУ. Может быть также полезен студентам технических специальностей высших учебных заведений с повышенной математической подготовкой.

УДК 512(075.8)+514(075.8)

ISBN 978-5-7782-3791-9

© Денисов В.И., Чубич В.М.,
Черникова О.С., 2018
© Новосибирский государственный
технический университет, 2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	7
Указатель основных обозначений	8
Глава 1. Комплексные числа	11
Комплексные числа и действия с ними	11
Глава 2. Матрицы и определители	17
§ 2.1. Действия с матрицами	17
§ 2.2. Определение и простейшие свойства определителей	23
§ 2.3. Миноры, алгебраические дополнения и теорема Лапласа	30
§ 2.4. Крамеровские системы линейных уравнений. Обратные матрицы	35
Глава 3. Линейные пространства	41
§ 3.1. Определение линейного пространства	41
§ 3.2. Линейная зависимость векторов	47
§ 3.3. Эквивалентные системы векторов	52
§ 3.4. Базис и размерность линейного пространства	56
§ 3.5. Подпространства линейного пространства. Сумма и пересечение под- пространств	64
Глава 4. Системы линейных уравнений	71
§ 4.1. Ранг матрицы. Однородные системы. Фундаментальная система решений	71
§ 4.2. Неоднородные системы. Теорема Кронекера–Капелли	76
Глава 5. Евклидовы и унитарные пространства	81
§ 5.1. Определение евклидова пространства	81
§ 5.2. Длины и углы. Ортогональность. Процесс ортогонализации Грама– Шмидта. Ортонормированный базис	85
§ 5.3. Ортогональное дополнение. Ортогональные суммы подпространств	92
§ 5.4. Унитарное пространство	98



Глава 6. Квадратичные формы	103
§ 6.1. Билинейные формы. Приведение квадратичных форм к каноническому виду методом Лагранжа	103
§ 6.2. Приведение квадратичных форм к каноническому виду методом Якоби. Знакоопределенные квадратичные формы	111
Глава 7. Линейные операторы в линейных пространствах	117
§ 7.1. Определение линейного оператора. Матрица линейного оператора	117
§ 7.2. Связь между координатами вектора-образа и вектора-прообраза. Ядро и образ линейного оператора	125
§ 7.3. Связь между матрицами линейного оператора в разных базисах. Действия с линейными операторами	131
§ 7.4. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора	138
§ 7.5. Линейные операторы простой структуры	144
§ 7.6. Линейные операторы в унитарных и евклидовых пространствах	149
Глава 8. Элементы аналитической геометрии	171
§ 8.1. Прямые в аффинном пространстве	171
§ 8.2. Плоскости в аффинном пространстве	184
§ 8.3. Прямые и плоскости в аффинном пространстве	192
§ 8.4. Кривые второго порядка	198
§ 8.5. Поверхности второго порядка	214
Глава 9. Канонический вид линейных операторов	229
§ 9.1. Жорданова нормальная форма матриц	229
§ 9.2. λ -матрицы	236
Глава 10. Функции от матриц	245
Вычисление значений функций от матриц различными способами	245
Ответы и указания	252
Библиографический список	300
Предметный указатель	302

*Светлой памяти
Чубича Михаила Петровича
посвящается*

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее издание создано на основе учебных пособий В.И. Денисова, В.М. Чубича «Сборник задач по геометрии и алгебре» (Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2001–2003. – Ч. 1–3) и В.М. Чубича, О.С. Черниковой «Сборник задач по аналитической геометрии» (Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2015). Оно обобщает многолетний авторский опыт преподавания линейной алгебры и аналитической геометрии на факультете прикладной математики и информатики Новосибирского государственного технического университета и содержит материалы по основным разделам указанной дисциплины.

Целесообразность подготовки настоящего учебника обусловлена прежде всего отчетливо ощущаемой авторами необходимостью помочь студентам в глубоком и качественном усвоении на практических занятиях наиболее значимых идей и методов дисциплины, а также естественной потребностью компактного расположения решаемых задач и упражнений из многочисленных сборников [2, 9, 11–13, 15–19].

Практикум включает в себя десять глав: «Комплексные числа», «Матрицы и определители», «Линейные пространства», «Системы линейных уравнений», «Евклидовы и унитарные пространства», «Квадратичные формы», «Линейные операторы в линейных пространствах», «Элементы аналитической геометрии», «Канонический вид линейных операторов» и «Функции от матриц». В начале каждой главы приводятся используемые в ней определения, теоремы и формулы. При изложении теоретического материала использованы соответствующие разделы из книг [1, 3–8, 10, 14, 20–22]. На многочисленных примерах с подробными решениями поясняются обсуждаемые вопросы, понятия и методы. Главу завершают задачи для решения на практических занятиях и дома. Номер каждой задачи содержит три разделенных точками числа. Первое число указывает номер главы, второе – номер параграфа, третье – номер задачи в этом параграфе. Аналогичным образом нумеруются формулы, на которые в дальнейшем возможны ссылки.

В конце работы помещены ответы и указания, указатель обозначений, а также предметный указатель.

Главы 1–7, 9, 10 написаны В.И. Денисовым и В.М. Чубичем, глава 8 – В.И. Денисовым, В.М. Чубичем и О.С. Черниковой.

Авторы будут признательны за любую информацию о замеченных опечатках и неточностях.

УКАЗАТЕЛЬ ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

$\operatorname{Re} z$ – действительная часть комплексного числа z

$\operatorname{Im} z$ – мнимая часть комплексного числа z

$|z|$ – модуль комплексного числа z

$\arg z$ – главное значение аргумента комплексного числа z

N – множество натуральных чисел

Z – множество целых чисел

F – поле (обычно R или C)

R – поле действительных чисел

C – поле комплексных чисел

$\det A, |A|$ – определитель матрицы A

$N(i_1, i_2, \dots, i_n)$ – число инверсий в перестановке

$m_{j_1, j_2, \dots, j_k}^{i_1, i_2, \dots, i_k}$ – минор k -го порядка, образованный строками и столбцами с

номераами $i_1, i_2, \dots, i_k$ и $j_1, j_2, \dots, j_k$ соответственно

$M_{j_1, j_2, \dots, j_k}^{i_1, i_2, \dots, i_k}$ – дополнительный минор к минору $m_{j_1, j_2, \dots, j_k}^{i_1, i_2, \dots, i_k}$

A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы A

A^T – транспонированная матрица для матрицы A

A^{-1} – матрица, обратная для матрицы A

$\operatorname{rg} A$ – ранг матрицы линейного оператора A

$\operatorname{Sp} A$ – след матрицы A

L – линейное пространство над полем F

F^n – линейное пространство над полем F , состоящее из n -членных наборов с компонентами из F

R^n – действительное арифметическое пространство

C^n – комплексное арифметическое пространство

$M_n(R)$ – действительное линейное пространство многочленов от одной переменной с действительными коэффициентами степени $\leq n$

$M_n(C)$ – комплексное линейное пространство многочленов от одной переменной с комплексными коэффициентами степени $\leq n$

$R_{m,n}$ – действительное линейное пространство $m \times n$ -матриц с действительными элементами

$\dim L$ – размерность линейного пространства L

$L(x_1, x_2, \dots, x_m)$ – линейная оболочка системы векторов $x_1, x_2, \dots, x_m$

$L_1 + L_2$ – сумма подпространств L_1 и L_2

$L_1 \dot{+} L_2$ – прямая сумма подпространств L_1 и L_2

$L_1 \oplus L_2$ – ортогональная сумма подпространств L_1 и L_2

$L_1 \cap L_2$ – пересечение подпространств L_1 и L_2

$L^\perp$ – ортогональное дополнение подпространства L

(x, y) – скалярное произведение векторов x и y

$\|x\|$ – норма вектора x

$A(x; y)$ – билинейная форма

$A(x; x)$ – квадратичная форма

w_{XY} – пространство линейных операторов, действующих из линейного пространства X в линейное пространство Y

$N(A)$ – ядро линейного оператора A

n_A – дефект линейного оператора A

$R(A)$ – образ линейного оператора A



A^* – оператор (матрица), сопряженный(ая) с оператором (матрицей) A

$A > 0$ – положительно определенный(ая) оператор (матрица)

$A \geq 0$ – неотрицательный(ая) оператор (матрица)

Ω^n – n -мерное аффинное пространство

$M = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – точка M с координатами $x_1, x_2, \dots, x_n$ в аффинной системе координат $(O, e_1, e_2, \dots, e_n)$

$x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ – вектор x с координатами $x_1, x_2, \dots, x_n$ в аффинной системе координат $(O, e_1, e_2, \dots, e_n)$

$N_{\lambda_i}^{(p_i)}$ – корневое подпространство оператора A , отвечающее собственному значению λ_i с алгебраической кратностью p_i

$J_k(\lambda)$ – клетка Жордана размера $k \times k$, соответствующая собственному значению λ

$\text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_m)$ – квазидиагональная матрица с клетками $A_1, A_2, \dots, A_m$ на главной диагонали

$A(\lambda)$ – λ -матрица A

$A(\lambda) \sim B(\lambda)$ – эквивалентность λ -матриц A и B

$E_k(\lambda)$ – k -й инвариантный множитель λ -матрицы

$\psi(\lambda)$ – минимальный многочлен матрицы

ГЛАВА 1

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ДЕЙСТВИЯ С НИМИ

Комплексным числом z называется упорядоченная пара $z = (a, b)$ действительных чисел со следующими свойствами.

1⁰. Два комплексных числа $z_1 = (a_1, b_1)$ и $z_2 = (a_2, b_2)$ равны тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$.

2⁰. Сумма двух комплексных чисел $z_1 = (a_1, b_1)$ и $z_2 = (a_2, b_2)$ определяется следующим образом:

$$z_1 + z_2 = (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2). \quad (1.1.1)$$

3⁰. Вычитание двух комплексных чисел $z_1 = (a_1, b_1)$ и $z_2 = (a_2, b_2)$ определяется как операция, обратная сложению:

$$z_1 - z_2 = (a_1, b_1) - (a_2, b_2) = (a_1 - a_2, b_1 - b_2). \quad (1.1.2)$$

4⁰. Произведение двух комплексных чисел $z_1 = (a_1, b_1)$ и $z_2 = (a_2, b_2)$ определяется следующим образом:

$$z_1 z_2 = (a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1). \quad (1.1.3)$$

5⁰. Деление двух комплексных чисел $z_1 = (a_1, b_1)$ и $z_2 = (a_2, b_2)$ определяется как операция, обратная произведению:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1, b_1)}{(a_2, b_2)} = \left(\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}, \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \right) \text{ при } a_2^2 + b_2^2 \neq 0. \quad (1.1.4)$$



В **алгебраической форме** комплексное число $z = (a, b)$ записывается в виде $a + bi$, где действительное число a называется **действительной частью комплексного числа z** и обозначается $\operatorname{Re} z$, действительное число b называется **мнимой частью комплексного числа z** и обозначается $\operatorname{Im} z$, символом i обозначено комплексное число $(0, 1)$, называемое **мнимой единицей**. Комплексное число $a - bi$ называется **комплексно-сопряженным** с комплексным числом $z = a + bi$ и обозначается $\bar{z}$.

Если на плоскости выбрать прямоугольную систему координат Oxy , то каждое комплексное число $z = a + bi$ можно изобразить радиусом-вектором с координатами (a, b) .

Тригонометрическая форма записи комплексного числа $z = a + bi$ получается при использовании формул связи декартовых координат и полярных координат ($a = r \cos \varphi$, $b = r \sin \varphi$), т. е. $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. При этом полярный радиус r называется **модулем комплексного числа z** (обозначается $|z|$), полярный угол φ — **аргументом комплексного числа z** (обозначается $\operatorname{Arg} z$). Модуль и аргумент комплексного числа выражаются через его действительную и мнимую часть следующим образом:

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (1.1.5)$$

Главным значением аргумента комплексного числа z (обозначается $\arg z$) считают такой его аргумент φ , что $-\pi < \varphi \leq \pi$, если $z \neq 0$, и $\varphi = 0$, если $z = 0$.

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{b}{a}, & \text{если } a > 0; \\ \operatorname{arctg} \frac{b}{a} + \pi, & \text{если } a < 0, b > 0; \\ \operatorname{arctg} \frac{b}{a} - \pi, & \text{если } a < 0, b < 0. \end{cases} \quad (1.1.6)$$

Отметим, что $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Умножение и деление комплексных чисел удобнее выполнять, если они заданы в тригонометрической форме. Пусть

$$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1),$$



$$z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2).$$

Тогда

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 (\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2)); \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2} (\cos (\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 - \varphi_2)). \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

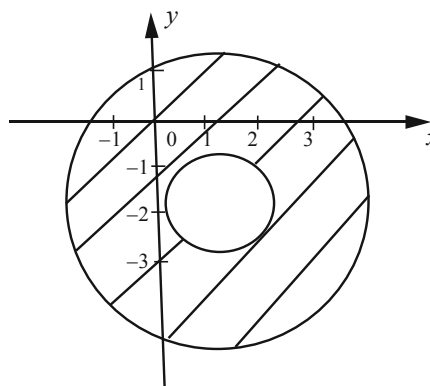
Из (1.1.4) следует, что

$$\begin{aligned} |z_1 z_2| &= |z_1| |z_2|; \\ \arg (z_1 z_2) &= \arg z_1 + \arg z_2; \\ \left| \frac{z_1}{z_2} \right| &= \frac{|z_1|}{|z_2|}; \\ \arg \left(\frac{z_1}{z_2} \right) &= \arg z_1 - \arg z_2. \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

Пример 1. Укажите на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих неравенству $1 < |z - 1 + 2i| < 3$.

Решение. Из соотношения (1.1.2) имеем $|z_1 - z_2| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}$, т. е. модуль разности двух комплексных чисел есть расстояние между точками комплексной плоскости, соответствующими числам z_1 и z_2 . В нашем случае $z - 1 + 2i = z - (1 - 2i)$.

Учитывая геометрическую интерпретацию модуля разности комплексных чисел, получаем искомое множество (см. рисунок).



Пример 2. Запишите в тригонометрической форме комплексное число $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.



Решение. $|z| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$, $\arg z = \arctg \sqrt{3} - \pi = \frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2\pi}{3}$.

Следовательно, $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$.

Пример 3. Вычислите $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^{200}$.

Решение. Запишем число $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ в тригонометрической форме:

$$|z| = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1, \arg z = \arctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\arctg \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6}.$$

Поскольку

$$\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right),$$

$$\begin{aligned} z^{200} &= \cos\left(-\frac{\pi}{6} 200\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6} 200\right) = \cos \frac{100\pi}{3} - i \sin \frac{100\pi}{3} = \\ &= \cos\left(-\frac{2\pi}{3} + 34\pi\right) - i \sin\left(-\frac{2\pi}{3} + 34\pi\right) = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i. \end{aligned}$$

1.1.1. Поле – это множество F , на котором заданы две алгебраические операции, называемые сложением и умножением, обладающие свойствами однозначности и замкнутости и удовлетворяющие следующим аксиомам:

- А. 1) $\alpha + \beta = \beta + \alpha \quad \forall \alpha, \beta \in F$;
 2) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma) \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in F$;
 3) $\exists$ нулевой элемент $\theta \in F$ такой, что $\alpha + \theta = \alpha \quad \forall \alpha \in F$;
 4) $\forall \alpha \in F \exists$ противоположный элемент $(-\alpha) \in F$ такой, что $\alpha + (-\alpha) = \theta$.
- В. 1) $\alpha\beta = \beta\alpha \quad \forall \alpha, \beta \in F$;
 2) $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma) \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in F$;
 3) $\exists$ единичный элемент $1 \in F$ ($1 \neq \theta$) такой, что $1 \cdot \alpha = \alpha \quad \forall \alpha \in F$;



4) $\forall \alpha \in F (\alpha \neq \theta) \exists$ обратный элемент $\alpha^{-1} \in F : \alpha \cdot \alpha^{-1} = 1$.

С. $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in F$.

Покажите, что множество комплексных чисел C является полем относительно определенных соотношениями (1.1.1), (1.1.3) операций сложения и умножения.

1.1.2. Вычислите:

а) $(2 + 3i)(4 - 5i) + (2 - 3i)(4 + 5i)$; б) $(x - 1 - i)(x - 1 + i)(x + 1 + i)(x + 1 - i)$;

в) $\frac{\cos \varphi - i \sin \varphi}{\cos \varphi + i \sin \varphi}$; г) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{16}$; д) $\frac{(1+i)^{1987}}{(1-i)^{1989}}$.

1.1.3. Как расположены на комплексной плоскости радиусы-векторы, соответствующие:

а) z и $\bar{z}$; б) z и $-z$?

1.1.4. Найдите действительные числа x и y из уравнений:

а) $(1 + 2i)x + (3 - 5i)y = 1 - 3i$; б) $\frac{2x + 3yi}{5y - xi} = \frac{-4 + 9i}{15 + 2i}$.

1.1.5. При каком условии квадрат комплексного числа $x + yi$ является чисто мнимым, т. е. числом вида di , где $d \in R$?

1.1.6. В каком случае сумма и произведение двух комплексных чисел являются действительными числами?

1.1.7. При каком действительном значении a число $4i^4 - 3ai^3 + (2 - a)i - 5 + a$ будет:

а) действительным; б) чисто мнимым; в) равным нулю?

1.1.8. Данные комплексные числа запишите в тригонометрической форме:

а) -8 ; б) $-2i$;

в) $-1 + \sqrt{3} \cdot i$; г) $\sin \alpha - i \cos \alpha, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

д) $\sin \alpha + (1 - \cos \alpha)i, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; е) $-\sqrt{2} - \sqrt{2}i$;

ж) $-\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}$; з) $-3 \left(\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5} \right)$.



1.1.9. Докажите равенства:

- а) $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z$; б) $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z$; в) $\overline{\bar{z}} = z$;
г) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$; д) $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$; е) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$;
ж) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$, $z_2 \neq 0$; з) $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$, $n = 1, 2, \dots$;
и) $|\bar{z}| = |z|$; к) $z\bar{z} = |z|^2$.

1.1.10. Укажите на плоскости множества точек, изображающие комплексные числа и удовлетворяющие следующим неравенствам:

- а) $\operatorname{Re} z > 0$; б) $\operatorname{Im} z \leq 2$;
в) $|\operatorname{Re} z| < 1$; г) $|\operatorname{Im} z| < 1$, $0 < \operatorname{Re} z < 1$;
д) $|z| \leq 1$; е) $|z + 3 - 2i| > 1$;
ж) $|z - i| + |z + i| < 4$; з) $\operatorname{Re} \frac{1}{z} < \frac{1}{2}$.

1.1.11. Докажите, что для любого многочлена $f(z)$ с действительными коэффициентами и любого комплексного числа z имеет место равенство $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$.

ГЛАВА 2

МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

§ 2.1. ДЕЙСТВИЯ С МАТРИЦАМИ

Прямоугольной или $(m \times n)$ -матрицей называется совокупность чисел из поля F , расположенных в виде таблицы

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}.$$

Кратко матрицу A записывают в виде $A = (\alpha_{ij})$, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$. Числа α_{ij} , составляющие данную матрицу, называют ее **элементами**. Первый индекс у элемента указывает номер строки, а второй – номер столбца, на пересечении которых находится элемент α_{ij} .

Матрицу называют **комплексной**, если хотя бы один ее элемент является комплексным числом, и **действительной**, если все ее элементы – действительные числа.

Две матрицы одинакового размера $m \times n$ считают **равными**, если попарно равны их соответствующие элементы, т. е. элементы, стоящие на одинаковых местах в этих матрицах.

Матрицу, состоящую из одной строки или одного столбца, называют соответственно **вектор-строкой** или **вектор-столбцом**. Элементы векторов называют их компонентами. Матрица, состоящая из одного числа, отождествляется с этим числом.

Матрица, состоящая из нулей, называется **нулевой** и обозначается O .

Если число строк m матрицы равно числу n ее столбцов, то матрицу называют **квадратной** порядка n . Диагональ квадратной матрицы, соединя-



ющая левый верхний угол с правым нижним, называется **главной**. Квадратные матрицы, у которых отличны от нуля лишь элементы главной диагонали, называют **диагональными**. Примером диагональных матриц является **единичная** матрица

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицу, полученную из данной матрицы A заменой в ней строк соответствующими столбцами, называют **транспонированной** к A и обозначают через A^T . Если A – $(m \times n)$ -матрица, то A^T – $(n \times m)$ -матрица. В частности, если A – вектор-строка, то A^T – вектор-столбец, и наоборот.

Суммой матриц $A = (\alpha_{ij})$ и $B = (\beta_{ij})$ одинакового размера $m \times n$ называется матрица $C = (\gamma_{ij})$ того же размера, элементы которой равны суммам $\alpha_{ij} + \beta_{ij}$ соответствующих элементов слагаемых матриц. Таким образом,

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \beta_{m1} & \dots & \beta_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} + \beta_{11} & \dots & \alpha_{1n} + \beta_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} + \beta_{m1} & \dots & \alpha_{mn} + \beta_{mn} \end{pmatrix}. \quad (2.1.1)$$

Разность матриц определяется аналогично:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \beta_{m1} & \dots & \beta_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} - \beta_{11} & \dots & \alpha_{1n} - \beta_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} - \beta_{m1} & \dots & \alpha_{mn} - \beta_{mn} \end{pmatrix}. \quad (2.1.2)$$

Произведением матрицы $A = (\alpha_{ij})$ **на число** λ называют матрицу λA , все элементы которой равны произведениям соответствующих элементов исходной матрицы на это число:

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda \alpha_{11} & \dots & \lambda \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda \alpha_{m1} & \dots & \lambda \alpha_{mn} \end{pmatrix}. \quad (2.1.3)$$



Сложение матриц и умножение их на числа обладают следующими свойствами:

- 1) $A + B = B + A$;
- 2) $A + (B + C) = (A + B) + C$;
- 3) $A + O = A$;
- 4) $A + (-A) = O$, где $-A = (-1)A$;
- 5) $1 \cdot A = A$;
- 6) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$;
- 7) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$;
- 8) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$

(2.1.4)

при любых матрицах A, B, C и любых числах λ, μ .

Умножение матриц определяется лишь для случая, когда число столбцов первого множителя равно числу строк второго множителя. Пусть

$$A = (\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = (\beta_{jk}) = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1p} \\ \dots & \dots & \dots \\ \beta_{n1} & \dots & \beta_{np} \end{pmatrix}.$$

Произведением матриц A и B , заданных в указанном порядке, называется матрица $C = (\gamma_{ik})$, элементы которой определяются по следующему правилу:

$$\gamma_{ik} = \alpha_{i1}\beta_{1k} + \alpha_{i2}\beta_{2k} + \dots + \alpha_{in}\beta_{nk}, \quad i = 1, \dots, m; \quad k = 1, \dots, p, \quad (2.1.5)$$

т. е. элемент γ_{ik} матрицы C равен сумме произведений элементов i -строки матрицы A на соответствующие элементы k -го столбца матрицы B . Из этого определения следует, что матрица C будет матрицей размера $m \times p$.

Умножение матриц обладает следующими свойствами:

- 1) $AB \neq BA$ в общем случае (если для каких-либо матриц A и B выполняется равенство $AB = BA$, матрицы называются **перестановочными**);



$$\begin{aligned} 2) \quad & A(BC) = (AB)C; \\ 3) \quad & \lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B); \\ 4) \quad & (A+B)C = AC + BC; \\ 5) \quad & C(A+B) = CA + CB. \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

Отметим некоторые свойства операции транспонирования матриц:

$$\begin{aligned} 1) \quad & (\lambda A)^T = \lambda A^T; \\ 2) \quad & (AB)^T = B^T A^T; \\ 3) \quad & (A^T)^T = A; \end{aligned}$$

Пример 1. Найдите матрицу X , удовлетворяющую равенству $3X - A = 2B$, где $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$.

Решение. Исходя из свойств линейных операций над матрицами, равенство $3X - A = 2B$ равносильно равенству $X = \frac{1}{3}(2B + A)$. Таким образом,

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{3} \left[2 \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{3} \left[\begin{pmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 5 \\ 2 \cdot 7 & 2 \cdot 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right] = \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2+4 & 10+5 \\ 14+1 & 18+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Пример 2. Вычислите AB и BA при $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Произведение AB имеет смысл, так как число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B . Поэтому

$$AB = \begin{pmatrix} (-2)2 + 3 \cdot 1 + 0(-1) + 1 \cdot 1 & (-2)0 + 3(-1) + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \\ 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2(-1) + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 1(-1) + 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$



Произведение BA также имеет смысл, поскольку число столбцов матрицы B равно числу строк матрицы A .

$$BA = \begin{pmatrix} 2(-2) + 0 \cdot 1 & 2 \cdot 3 + 0 \cdot 1 & 2 \cdot 0 + 0 \cdot 2 & 2 \cdot 1 + 0(-1) \\ 1(-2) + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 & 1 \cdot 1 + (-1)(-1) \\ (-1)(-2) + 2 \cdot 1 & (-1) \cdot 3 + 2 \cdot 1 & (-1) \cdot 0 + 2 \cdot 2 & (-1) \cdot 1 + 2(-1) \\ 1(-2) + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 3 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 3 \cdot 2 & 1 \cdot 1 + 3(-1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & 6 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 4 & -3 \\ 1 & 6 & 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

Пример 3. Найдите $f(A)$, если $f(x) = x^2 - 2x + 5$, $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Подставляя в многочлен $f(x)$ вместо x матрицу A и учитывая, что $5 = 5x^0$, получаем

$$f(A) = A^2 - 2A + 5E_2 = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^2 - 2 \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & -15 \\ 10 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 & 6 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

2.1.1. Найдите матрицу X , удовлетворяющую условию:

а) $5A + 2X = O$, где $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 8 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}$;

б) $3X - 2B = A$, где $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 4 & 3 & 6 \\ 7 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -9 \\ 1 & -6 & 6 \\ 1 & -1 & 6 \end{pmatrix}$.



2.1.2. Найдите сумму матриц $A+B$, разность матриц $A-B$ и произведения матриц AB и BA , если они существуют:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } A = (1, -2, 5, 3), B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 1 & -5 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } A = (1, 0, 5), B = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad \text{г) } A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix};$$

$$\text{д) } A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \beta_n \end{pmatrix}.$$

2.1.3. Вычислите AB , $A^T B^T$, $B^T A^T$, если

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } A = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.1.4. Вычислите:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^n; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}^n; \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n; \quad \text{г) } \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}^n.$$



2.1.5. Найдите $f(A)$ если:

а) $f(x) = x^2 - 5x + 10$, $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

б) $f(x) = x^3 - 4x^2 + x - 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $f(x) = x^2 - 3x + 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

г) $f(x) = x^2 + 2x + 3$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

2.1.6. Докажите, что для перестановочных матриц A и B имеют место равенства:

а) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$;

б) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$;

в) $A^n - B^n = (A-B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + \dots + AB^{n-2} + B^{n-1})$;

г) $(A+B)^n = A^n + nA^{n-1}B + \frac{n(n-1)}{2!}A^{n-2}B^2 + \dots + B^n$.

Верны ли эти равенства, если $AB \neq BA$?

§ 2.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

Определителем n -го порядка, соответствующим квадратной матрице порядка n , называется алгебраическая сумма $n!$ членов, составленная следующим образом: членами суммы служат всевозможные произведения n элементов матрицы, взятых по одному в каждой строке и в каждом столбце, причем член $\alpha_{i_1 1} \alpha_{i_2 2} \dots \alpha_{i_n n}$ берется со знаком «плюс», если перестановка $i_1, i_2, \dots, i_n$

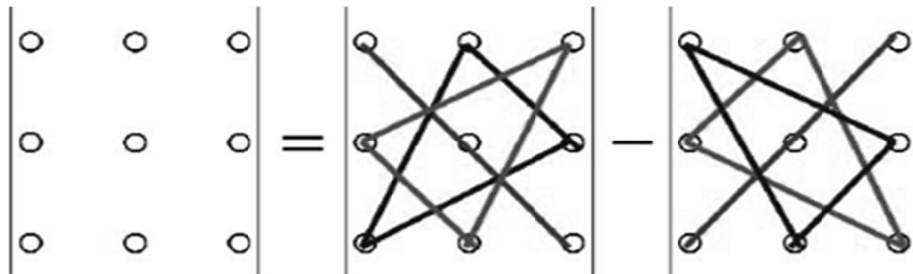


содержит четное число инверсий, и со знаком «минус» – в противном случае. При этом **инверсией** чисел i_k и i_l называется ситуация, в которой $i_k > i_l$, но i_k стоит в перестановке $i_1, i_2, \dots, i_n$ раньше, чем i_l . Для определителя матрицы A будем использовать обозначения $|A|$ или $\det A$.

Определители первого, второго и третьего порядка вычисляются по формулам, вытекающим непосредственно из определения:

$$\begin{aligned} \det(\alpha_{11}) &= \alpha_{11}; \\ \det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} &= \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}; \\ \det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} &= \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} + \alpha_{21}\alpha_{32}\alpha_{13} + \alpha_{31}\alpha_{12}\alpha_{23} - \\ &\quad - \alpha_{11}\alpha_{32}\alpha_{23} - \alpha_{21}\alpha_{12}\alpha_{33} - \alpha_{31}\alpha_{22}\alpha_{13}. \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

При вычислении определителей третьего порядка удобно пользоваться «правилом треугольников», отраженным по следующей схеме:



Из определения определителя следует, что:

$$\text{a) } \det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22}\dots\alpha_{nn}; \quad (2.2.2)$$



$$\begin{aligned} \text{б) } \det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} = \\ &= \alpha_{11}\alpha_{22}\dots\alpha_{nn}. \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

Таким образом, определитель диагональной, **верхней** и **нижней треугольных матриц** равен произведению диагональных элементов.

Основные свойства определителей

1. Определитель не меняется при транспонировании.
2. От перестановки двух строк (столбцов) определитель меняет знак.
3. Определитель, содержащий две равные строки (столбца), равен нулю.

4. Если все элементы i -строки (j -го столбца) определителя представлены в виде суммы двух слагаемых, то и весь определитель представляется в виде суммы двух определителей, у которых все строки (столбцы), за исключением i -й (j -го), такие же, как в исходном определителе, а i -я строка (j -й столбец) в первом определителе состоит из первых слагаемых и во втором – из вторых. Например:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \beta_1 + \gamma_1 & \beta_2 + \gamma_2 & \beta_3 + \gamma_3 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}; \\ \begin{vmatrix} \alpha_{11} + \beta_1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} + \beta_2 & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} + \beta_3 & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \beta_2 & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \beta_3 & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

5. Если все элементы некоторой строки (столбца) умножить на число, то определитель умножится на это число. Общий множитель элементов строки (столбца) определителя можно выносить за знак определителя. Если все элементы определителя умножить на число λ , то определитель умножится на λ^n .

6. Если одна из строк (один из столбцов) определителя состоит из нулей, то определитель равен нулю.



7. Определитель не изменится, если к элементам одной его строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой его строки (столбца), умноженные на одно и то же число.

Пример 1. Определите число инверсий в перестановке 2, 3, 8, 1, 4, 5, 7, 6.

Решение. Так как 2 стоит в перестановке раньше, чем 1, то 2 образует в перестановке одну инверсию, 3 также образует одну инверсию, 8 – пять инверсий, поскольку стоит раньше, чем 1, 4, 5, 7 и 6. Продолжая, получаем, что общее число инверсий в перестановке

$$N(2, 3, 8, 1, 4, 5, 7, 6) = 1 + 1 + 5 + 0 + 0 + 0 + 1 + 0 = 8.$$

Пример 2. Пользуясь только определением, вычислите определитель

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \\ 5 & 6 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Решение. В соответствии с формальным определением определителя

$$|A| = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n} \alpha_{i_1 1} \alpha_{i_2 2} \dots \alpha_{i_n n} (-1)^{N(i_1, i_2, \dots, i_n)}. \quad (2.2.4)$$

Запишем все ненулевые произведения элементов матрицы и соответствующие им перестановки:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \\ 5 & 6 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 (-1)^{N(3, 4, 1, 2)} + 5 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 1 (-1)^{N(3, 4, 2, 1)} + \\ + 1 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 2 (-1)^{N(4, 3, 1, 2)} + 1 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 1 (-1)^{N(4, 3, 2, 1)} = |A|.$$

Учитывая, что

$$N(3, 4, 1, 2) = 2 + 2 = 4;$$

$$N(3, 4, 2, 1) = 2 + 2 + 1 = 5;$$



$$N(4, 3, 1, 2) = 3 + 2 = 5;$$

$$N(4, 3, 2, 1) = 3 + 2 + 1 = 6,$$

окончательно получаем

$$|A| = 100 - 60 - 60 + 36 = 16.$$

Пример 3. Применяя свойства, вычислите определитель

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$$

Решение. Для вычисления определителя воспользуемся методом приведения его к верхнему треугольному виду. Метод заключается в преобразовании определителя к такому виду, где все элементы, расположенные ниже главной диагонали, равны нулю. Полученный определитель равен произведению элементов главной диагонали.

Переставим первую и четвертую строки определителя. Определитель изменит знак:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & -3 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = |A|.$$

Первую строку последнего определителя, умноженную на 5, прибавим ко второй его строке; первую строку, умноженную на (-2) , прибавим к третьей строке; первую строку, умноженную на (-3) , прибавим к четвертой строке. Получим

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & -3 \\ 0 & -24 & 18 & -19 \\ 0 & 10 & -5 & 5 \\ 0 & 16 & -10 & 11 \end{vmatrix}.$$



Переставим вторую и третью строки полученного определителя; вынесем общий множитель элементов второй строки за знак определителя. Получим

$$|A| = 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -24 & 18 & -19 \\ 0 & 16 & -10 & 11 \end{vmatrix}.$$

Вторую строку определителя, умноженную на 12, прибавим к третьей строке; вторую строку, умноженную на (-8) , прибавим к четвертой строке. Будем иметь:

$$|A| = 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & -7 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Переставим третью и четвертую строки. Третью строку полученного определителя, умноженную на 3, прибавим к четвертой строке. Приходим к определителю верхней треугольной матрицы

$$|A| = (-5) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix},$$

который вычисляется просто:

$$|A| = (-5) \cdot 1 \cdot 2 \cdot (-2) \cdot 2 = 40.$$

2.2.1. Входят ли в определитель пятого порядка произведения:

а) $\alpha_{13}\alpha_{24}\alpha_{23}\alpha_{41}\alpha_{55}$; б) $\alpha_{21}\alpha_{13}\alpha_{34}\alpha_{55}\alpha_{42}$?

2.2.2. С каким знаком в определитель шестого порядка входят произведения:

а) $\alpha_{23}\alpha_{31}\alpha_{42}\alpha_{56}\alpha_{14}\alpha_{65}$; б) $\alpha_{32}\alpha_{43}\alpha_{14}\alpha_{51}\alpha_{66}\alpha_{25}$?



2.2.3. Подберите i и k так, чтобы произведение $\alpha_{1i}\alpha_{32}\alpha_{4k}\alpha_{25}\alpha_{53}$ входило в определитель пятого порядка со знаком «плюс».

2.2.4. Запишите (пользуясь определением) определитель четвертого порядка в развернутой форме.

2.2.5. Пользуясь только определением, вычислите определители:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{15} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{25} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{51} & \alpha_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}; \quad \text{в) } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 2 & 0 & b & 0 \\ 3 & c & 4 & 5 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

2.2.6. Вычислите определители:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} \sin \varphi & \cos \varphi \\ -\cos \varphi & \sin \varphi \end{vmatrix}; \quad \text{в) } \begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{5} \\ 2+\sqrt{5} & 1-\sqrt{2} \end{vmatrix};$$

$$\text{г) } \begin{vmatrix} \varepsilon & 1 \\ -1 & \varepsilon \end{vmatrix}, \text{ где } \varepsilon = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}; \quad \text{д) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}; \quad \text{е) } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix};$$

$$\text{ж) } \begin{vmatrix} 1+a & 1+b & 1+c \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}; \quad \text{з) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w \\ 1 & w^2 & w \end{vmatrix}, \text{ где } w = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}.$$

2.2.7. Применяя свойства, вычислите определители:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 \\ 9 & -3 & 0 & -6 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix};$$



$$\text{в) } \begin{vmatrix} 6 & -5 & 8 & 4 \\ 9 & 7 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & 3 & 7 \\ -4 & 8 & -8 & -3 \end{vmatrix}; \quad \text{г) } \begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 & 6 \\ 8 & -9 & 4 & 9 \\ 7 & -2 & 7 & 3 \\ 5 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

2.2.8. Не развертывая определителей, докажите следующие тождества:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x + b_1y + c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2x + b_2y + c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3x + b_3y + c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

$$\text{б) } \begin{vmatrix} a_1 + b_1x & a_1 - b_1x & c_1 \\ a_2 + b_2x & a_2 - b_2x & c_2 \\ a_3 + b_3x & a_3 - b_3x & c_3 \end{vmatrix} = -2x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

$$\text{в) } \begin{vmatrix} a_1 + b_1i & a_1i + b_1 & c_1 \\ a_2 + b_2i & a_2i + b_2 & c_2 \\ a_3 + b_3i & a_3i + b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

$$\text{г) } \begin{vmatrix} a_1 + b_1x & a_1x + b_1 & c_1 \\ a_2 + b_2x & a_2x + b_2 & c_2 \\ a_3 + b_3x & a_3x + b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1 - x^2) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

§ 2.3. МИНОРЫ, АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДОПОЛНЕНИЯ И ТЕОРЕМА ЛАПЛАСА

В квадратной матрице A порядка n выделим k строк и k столбцов. Элементы, стоящие на пересечении этих строк и столбцов, образуют матрицу порядка k . Ее определитель назовем **минором** k -го порядка и обозначим

$$m_{j_1, j_2, \dots, j_k}^{i_1, i_2, \dots, i_k} \quad (2.3.1)$$



где $i_1, i_2, \dots, i_k$ ($j_1, j_2, \dots, j_k$) – номера выделенных строк (столбцов). В частности, минорами первого порядка являются элементы α_{ij} матрицы A .

Если вычеркнуть из матрицы A строки с номерами $i_1, i_2, \dots, i_k$ и столбцы с номерами $j_1, j_2, \dots, j_k$, то останется минор порядка $n - k$, называемый **дополнительным минором** для минора (2.3.1). Дополнительный минор обозначается $M_{j_1, j_2, \dots, j_k}^{i_1, i_2, \dots, i_k}$.

Алгебраическим дополнением минора (2.3.1) называется его дополнительный минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$, где $i = i_1 + i_2 + \dots + i_k$, $j = j_1 + j_2 + \dots + j_k$. Алгебраическое дополнение элемента α_{ij} обозначается A_{ij} .

Теорема Лапласа. Пусть в матрице A порядка n произвольно выбраны k строк (или столбцов), $1 \leq k \leq n - 1$. Тогда определитель матрицы A равен сумме произведений всех миноров порядка k , содержащихся в выбранных строках (столбцах), на их алгебраические дополнения. Запишем формально теорему Лапласа для фиксированных номеров строк:

$$\det A = \sum_{\substack{j_1, j_2, \dots, j_k \\ 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n}} m_{j_1, j_2, \dots, j_k}^{i_1, i_2, \dots, i_k} \cdot M_{j_1, j_2, \dots, j_k}^{i_1, i_2, \dots, i_k} (-1)^{i+j}. \quad (2.3.2)$$

В случае фиксированных номеров столбцов суммирование в соотношении (2.3.2) производится по $i_1, i_2, \dots, i_k$ с учетом того, что $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$.

Используя теорему Лапласа, можно доказать, что определитель произведения двух квадратных матриц одного порядка над полем F равен произведению определителей этих матриц:

$$\det(AB) = \det A \det B. \quad (2.3.3)$$

Частным случаем теоремы Лапласа являются следующие формулы **разложения определителя по строке**

$$\det A = \alpha_{i1} A_{i1} + \alpha_{i2} A_{i2} + \dots + \alpha_{in} A_{in}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (2.3.4)$$



и по столбцу

$$\det A = \alpha_{1j}A_{1j} + \alpha_{2j}A_{2j} + \dots + \alpha_{nj}A_{nj}, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (2.3.5)$$

Соотношения (2.3.4) и (2.3.5) позволяют свести вычисление определителей n -го порядка к вычислению определителей $(n-1)$ -го порядка.

Пример 1. Пользуясь теоремой Лапласа, вычислите определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

Решение. Теорема Лапласа позволяет свести вычисление исходного определителя к вычислению определителей меньших порядков. Ею удобно пользоваться тогда, когда в определителе имеются равные нулю миноры. В этом случае при вычислении определителя необходимо выделять те k строк или столбцов, которые содержат наибольшее число миноров k -го порядка, равных нулю. Исходя из этого разложим определитель по теореме Лапласа, используя вторую и четвертую строки. Получим:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} (-1)^{(2+4)+(1+2)} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} (-1)^{(2+4)+(1+3)} + \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} (-1)^{(2+4)+(1+4)} +$$



$$\begin{aligned}
 & + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} (-1)^{(2+4)+(1+5)} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} (-1)^{(2+4)+(2+3)} + \\
 & + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} (-1)^{(2+4)+(2+4)} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} (-1)^{(2+4)+(2+5)} + \\
 & + \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} (-1)^{(2+4)+(3+4)} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} (-1)^{(2+4)+(3+5)} + \\
 & + \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} (-1)^{(2+4)+(4+5)} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \\
 & = (8-9)(9+24+24-27-16-12) = (-1)(57-55) = -2.
 \end{aligned}$$

Пример 2. Вычислите определитель

$$\begin{vmatrix} 9 & 7 & 6 & 8 & 5 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 4 & 6 & 0 \end{vmatrix}.$$

Решение. Учитывая, что в пятом столбце определителя имеется только один ненулевой элемент, разложим определитель по элементам пятого столбца. Получим



$$\begin{vmatrix} 9 & 7 & 6 & 8 & 5 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 4 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 4 & 6 \end{vmatrix} (-1)^{1+5} = |A|.$$

Разложив последний определитель по элементам третьей строки, будем иметь

$$|A| = 5 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 5 & 4 & 6 \end{vmatrix} (-1)^{3+1} = 5 \cdot 24 = 120.$$

2.3.1. Пользуясь теоремой Лапласа, вычислите определители:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 5 & -2 & 3 & 6 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix};$$

$$\text{в) } \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 5 & 8 \\ 8 & 10 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 9 \end{vmatrix}; \quad \text{г) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 3 & 5 & 7 & -5 \\ 2 & 3 & 7 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

2.3.2. Докажите, что если все элементы одной строки (столбца) определителя равны единице, то сумма алгебраических дополнений всех элементов определителя равна самому определителю.



называется **крамеровской**, если определитель Δ матрицы A этой системы отличен от нуля. Такая система имеет единственное решение, и оно находится по **формулам Крамера**

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.4.2)$$

где определитель Δ_j получается из определителя Δ заменой j -го столбца столбцом свободных членов системы.

Для квадратной матрицы A порядка n **обратной** называют матрицу A^{-1} этого же порядка, удовлетворяющую условию

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E, \quad (2.4.3)$$

где E – единичная матрица.

Для того чтобы матрица A имела обратную матрицу A^{-1} , необходимо и достаточно, чтобы матрица A была **невырожденной**, т. е. чтобы определитель матрицы A был отличен от нуля. При этом матрица A^{-1} также невырожденная и

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \quad (2.4.4)$$

где A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы A , $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Укажем некоторые свойства обратных матриц. Пусть A и B – невырожденные матрицы порядка n над полем F . Тогда справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} \text{а) } (A^{-1})^{-1} &= A; \\ \text{б) } (A^{-1})^T &= (A^T)^{-1}; \\ \text{в) } \det A^{-1} &= (\det A)^{-1}; \\ \text{г) } (AB)^{-1} &= B^{-1}A^{-1}. \end{aligned} \quad (2.4.5)$$



Наличие обратной матрицы A^{-1} к матрице A крамеровской системы $Ax = b$ позволяет решение этой системы записать в матричной форме в виде

$$x = A^{-1}b. \quad (2.4.6)$$

Пример 1. Решите по формулам Крамера систему

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4. \end{cases} \quad (2.4.7)$$

Решение. Вычислим определители:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 28 \neq 0, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 13,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 47, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 21.$$

$$\text{Поэтому } x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{13}{28}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{47}{28}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{21}{28}.$$

Пример 2. Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

найдите матрицу A^{-1} по формуле (2.4.4).

Решение. Сначала находим

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 28 \neq 0,$$



$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 11, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -7,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 13, \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7.$$

Поэтому

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{28} \begin{pmatrix} 11 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 13 \\ 7 & -7 & 7 \end{pmatrix}.$$

Пример 3. Решите систему уравнений (2.4.7) методом обратных матриц.

Решение. По формуле (2.4.6) имеем:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{28} \begin{pmatrix} 11 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 13 \\ 7 & -7 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{28} \\ \frac{47}{28} \\ \frac{21}{28} \end{pmatrix}.$$

2.4.1. Решите следующие системы уравнений по формулам Крамера:

$$\text{а) } \begin{cases} x + 4y = -10, \\ 3x - y = 9; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x - 5y = 1, \\ ax + 5y = -2a - 5; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x + 2y - z = 12, \\ 3x - y + 4z = -13, \\ -x + 5y - z = 27; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} 2x + 4y + 3z = 14, \\ 3x - y + 4z = -13, \\ -x + 5y - z = 27. \end{cases}$$



2.4.2. Найдите обратные матрицы для матриц

$$\text{а) } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}; \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{г) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{д) } \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}; \quad \text{е) } \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

2.4.3. Решите матричные уравнения, т.е. найдите матрицы X , для которых справедливы данные равенства:

$$\text{а) } X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

2.4.4. Методом обратных матриц решите системы а)–в) из задачи 2.4.1.

2.4.5. Матрица A называется **симметричной**, если $A^T = A$. Докажите, что:

а) матрица, обратная невырожденной симметричной, будет симметричной;

б) для любой матрицы B матрица $A = BB^T$ является симметричной;

в) произведение двух симметричных матриц A и B тогда и только тогда будет симметричной матрицей, когда $AB = BA$.

2.4.6. Матрица $A = (\alpha_{ij})$ называется **ортогональной**, если $AA^T = A^T A = E$,

т. е. $A^{-1} = A^T$. Докажите, что для ортогональности матрицы необходимо и достаточно любое из следующих условий:

$$\sum_{k=1}^n \alpha_{ki} \alpha_{kj} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j; \end{cases}$$



$$\sum_{k=1}^n \alpha_{ik} \alpha_{jk} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j \end{cases}$$

δ_{ij} называется **символом Кронекера**.

2.4.7. Докажите, что:

- а) произведение двух ортогональных матриц будет ортогональной матрицей;
- б) матрица, обратная ортогональной, ортогональна.

2.4.8. Найдите обратную матрицу для матрицы A , если:

- а) $A^2 - 4A + E = 0$; б) $A^3 + 5A^2 - 3A - E = 0$.

2.4.9. Вычислите $(AB)^{-1}$ и $(\lambda A)^{-1}$, если:

а) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\lambda = 5$;

б) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda = -3$.

ГЛАВА 3

ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 3.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА

Линейным (векторным) пространством над полем F называется множество L элементов (векторов) $x, y, z, \dots$, удовлетворяющих следующим аксиомам.

A. Каждой паре элементов x и y из L поставлен в соответствие элемент z этого множества, называемый суммой элементов x и y и обозначаемый $x + y$, причем:

1⁰ сложение коммутативно, т. е. $x + y = y + x \quad \forall x, y \in L$;

2⁰ сложение ассоциативно, т. е. $(x + y) + z = x + (y + z) \quad \forall x, y, z \in L$;

3⁰ в множестве L существует нулевой элемент Θ такой, что $x + \Theta = x \quad \forall x \in L$;

4⁰ в множестве L для любого элемента x существует противоположный элемент $(-x)$ такой, что $x + (-x) = \Theta$.

B. Каждому элементу $x \in L$ и каждому числу $\alpha \in F$ отвечает элемент этого множества αx , называемый произведением элемента x на число α , причем:

5⁰ $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x \quad \forall x \in L, \quad \forall \alpha, \beta \in F$;

6⁰ $1x = x \quad \forall x \in L$.

C. Операции сложения векторов и умножения вектора на число связаны между собой соотношениями

7⁰ $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y \quad \forall x, y \in L, \quad \forall \alpha \in F$, т. е. умножение на число дистрибутивно относительно сложения векторов;

8⁰ $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x \quad \forall x \in L, \quad \forall \alpha, \beta \in F$, т. е. умножение дистрибутивно относительно сложения чисел.



Если F есть поле действительных или комплексных чисел, то линейное пространство над F называется соответственно **действительным** или **комплексным**.

Пример 1. Множество L_0 состоит из одного элемента Θ . Операции в L_0 определены следующим образом:

$$а) \Theta + \Theta = \Theta; \quad б) \alpha\Theta = \Theta \quad \forall \alpha \in F.$$

Проверьте, что L_0 является линейным пространством над полем F .

Решение. Поскольку $(\Theta + \Theta) \in L$ и $(\alpha\Theta) \in L$, перейдем непосредственно к проверке аксиом линейного пространства:

$$1) \Theta + \Theta = \Theta + \Theta;$$

$$2) (\overset{а)}{\Theta + \Theta}) + \overset{а)}{\Theta} = \overset{а)}{\Theta} + \overset{а)}{\Theta} = \overset{а)}{\Theta} + (\Theta + \Theta);$$

$$3) \Theta \text{ является нулевым элементом в } L_0, \text{ так как } \Theta + \Theta = \Theta;$$

$$4) \Theta \text{ выполняет роль противоположного элемента в } L_0, \text{ так как } \Theta + \Theta = \Theta;$$

$$5) \overset{б)}{\alpha(\beta\Theta)} = \overset{б)}{\alpha\Theta} = \overset{б)}{\Theta} = \overset{б)}{(\alpha\beta)\Theta} \quad \forall \alpha, \beta \in F;$$

$$6) \overset{б)}{1\Theta} = \overset{б)}{\Theta};$$

$$7) \overset{а)}{\alpha(\Theta + \Theta)} = \overset{а)}{\alpha\Theta} = \overset{б)}{\Theta} = \overset{а)}{\Theta} + \overset{а)}{\Theta} = \overset{б)}{\alpha\Theta} + \overset{б)}{\alpha\Theta} \quad \forall \alpha \in F;$$

$$8) \overset{б)}{(\alpha + \beta)\Theta} = \overset{б)}{\Theta} = \overset{а)}{\Theta} + \overset{б)}{\Theta} = \overset{б)}{\alpha\Theta} + \overset{б)}{\beta\Theta} \quad \forall \alpha, \beta \in F.$$

Поскольку все аксиомы линейного пространства выполнены, заключаем, что L_0 является линейным пространством над полем F (оно называется тривиальным).

Пример 2. В множестве R^+ положительных действительных чисел определены следующие операции:

$$а) \text{ «сложение» } x \oplus y = x \cdot y \text{ (т. е. обычное умножение чисел } x \text{ и } y);$$

$$б) \text{ «умножение на действительное число» } \alpha \cdot x = x^\alpha \text{ (т. е. возведение числа } x \text{ в степень } \alpha).$$

Проверьте, что множество R^+ с указанными операциями является линейным пространством.



Решение. Очевидно, что $(x \oplus y) \in R^+$ и $(\alpha x) \in R^+$. Проверим аксиомы линейного пространства.

$$1) \overset{a)}{x \oplus y} = \overset{b)}{xy} = yx = y \oplus x \quad \forall x, y \in R^+;$$

$$2) (x \oplus y) \oplus z = (xy)z = x(yz) = x \oplus (y \oplus z) \quad \forall x, y, z \in R^+;$$

$$3) \overset{a)}{x \oplus \Theta} = \overset{3^0}{x \cdot \Theta} = x \mapsto \Theta = 1 \in R^+;$$

$$4) \overset{a)}{x \oplus (-x)} = \overset{4^0}{x(-x)} = \overset{3}{\Theta = 1} \mapsto (-x) = \frac{1}{x} \in R^+;$$

$$5) \overset{b)}{\alpha(\beta x)} = \overset{b)}{\alpha(x^\beta)} = (x^\beta)^\alpha = x^{\beta\alpha} = x^{\alpha\beta} = \overset{b)}{(\alpha\beta)x} \quad \forall x \in R^+, \forall \alpha, \beta \in R;$$

$$6) \overset{b)}{1x} = x^1 = x \quad \forall x \in R^+;$$

$$7) \overset{a)}{\alpha(x \oplus y)} = \overset{b)}{\alpha(xy)} = (xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha = \overset{a)}{x^\alpha \oplus y^\alpha} = \overset{b)}{\alpha x \oplus \alpha y} \quad \forall x, y \in R^+, \forall \alpha \in R;$$

$$8) \overset{b)}{(\alpha + \beta)x} = x^{\alpha + \beta} = x^\alpha x^\beta = \overset{a)}{x^\alpha \oplus x^\beta} = \overset{b)}{\alpha x \oplus \beta x} \quad \forall x \in R^+, \forall \alpha, \beta \in R.$$

Все аксиомы линейного пространства выполнены. Следовательно, R^+ является действительным линейным пространством.

Пример 3. Пусть $\tilde{R}_2$ – множество всех упорядоченных пар действительных чисел $x = (\alpha_1, \alpha_2)$ с операциями:

$$a) \text{ если } x = (\alpha_1, \alpha_2) \text{ и } y = (\beta_1, \beta_2), \text{ то } x + y = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2);$$

$$b) \text{ для любого действительного числа } \lambda \quad \lambda x = (\lambda \alpha_1, \lambda \alpha_2).$$

Будет ли $\tilde{R}_2$ действительным линейным пространством?

Решение. Ясно, что $(x + y) \in \tilde{R}_2$ и $(\lambda x) \in \tilde{R}_2$. Проверим аксиомы линейного пространства.

$$1) \overset{a)}{x + y} = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2) = (\beta_1 + \alpha_1, \beta_2 + \alpha_2) = (\beta_1, \beta_2) + (\alpha_1, \alpha_2) = \overset{a)}{y + x},$$

$\forall x, y \in \tilde{R}_2;$



$$\begin{aligned} 2) (x+y)+z &= (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2) + (\gamma_1, \gamma_2) = ((\alpha_1 + \beta_1) + \gamma_1, (\alpha_2 + \beta_2) + \gamma_2) = \\ &= (\alpha_1 + (\beta_1 + \gamma_1), \alpha_2 + (\beta_2 + \gamma_2)) = (\alpha_1, \alpha_2) + (\beta_1 + \gamma_1, \beta_2 + \gamma_2) = x + (y+z) \\ \forall x, y, z \in \tilde{R}_2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) x + \Theta &= (\alpha_1, \alpha_2) + (\xi_1, \xi_2) = (\alpha_1 + \xi_1, \alpha_2 + \xi_2) = x = (\alpha_1, \alpha_2) \mapsto \alpha_1 + \xi_1 = \alpha_1, \\ \alpha_2 + \xi_2 &= \alpha_2 \mapsto \xi_1 = 0, \xi_2 = 0, \text{ т. е. } \Theta = (0, 0) \in \tilde{R}_2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) x + (-x) &= (\alpha_1, \alpha_2) + (\eta_1, \eta_2) = (\alpha_1 + \eta_1, \alpha_2 + \eta_2) = \theta = (0, 0) \mapsto \alpha_1 + \eta_1 = 0, \\ \alpha_2 + \eta_2 &= 0 \mapsto \eta_1 = -\alpha_1, \eta_2 = -\alpha_2, \text{ т. е. } (-x) = (-\alpha_1, -\alpha_2) \in \tilde{R}_2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) \lambda(\mu x) &= \lambda(\mu\alpha_1, \alpha_2) = (\lambda(\mu\alpha_1), \alpha_2) = ((\lambda\mu)\alpha_1, \alpha_2) = (\lambda\mu)(\alpha_1, \alpha_2) = (\lambda\mu)x, \\ \forall x \in \tilde{R}_2, \forall \lambda, \mu \in R; \end{aligned}$$

$$6) 1 \cdot x = (\alpha_1, \alpha_2) = x \quad \forall x \in \tilde{R}_2;$$

$$\begin{aligned} 7) \lambda(x+y) &= \lambda(\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2) = (\lambda(\alpha_1 + \beta_1), \alpha_2 + \beta_2) = (\lambda\alpha_1 + \lambda\beta_1, \alpha_2 + \beta_2) = \\ &= (\lambda\alpha_1, \alpha_2) + (\lambda\beta_1, \beta_2) = \lambda x + \lambda y \quad \forall x, y \in \tilde{R}_2, \forall \lambda \in R; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8) (\lambda + \mu)x &= ((\lambda + \mu)\alpha_1, \alpha_2) \neq \lambda x + \mu x = (\lambda\alpha_1, \alpha_2) + (\mu\alpha_1, \alpha_2) = \\ &= ((\lambda + \mu)\alpha_1, 2\alpha_2) \quad \forall x \in \tilde{R}_2, \forall \lambda, \mu \in R. \end{aligned}$$

Поскольку восьмая аксиома не выполнена, $\tilde{R}_2$ не является действительным линейным пространством.

Для каждого из следующих множеств векторов на плоскости определите, является ли это множество линейным пространством относительно обычных операций сложения векторов и умножения вектора на число. В случае отрицательного ответа укажите, какие именно аксиомы линейного пространства не выполнены. Предполагается, что начало каждого вектора находится в фиксированной точке O плоскости, являющейся началом прямоугольной системы координат.



3.1.1. Все векторы, концы которых лежат на данной прямой.

3.1.2. Все векторы, концы которых лежат: а) в первой четверти системы координат; б) в первой или третьей четверти; в) в первой или во второй четверти.

3.1.3. Являются ли действительными линейными пространствами следующие множества чисел с обычными операциями сложения и умножения:

- а) N – множество всех натуральных чисел;
- б) Z – множество всех целых чисел;
- в) R – множество всех действительных чисел;
- г) C – множество всех комплексных чисел;
- д) R^+ – множество всех положительных действительных чисел?

3.1.4. Пусть F^n – множество всех упорядоченных наборов по n элементов поля F : $x = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Операции в F^n заданы правилами:

а) если $x = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ и $y = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, то

$$x + y = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n);$$

б) для любого λ из поля F

$$\lambda x = (\lambda \alpha_1, \lambda \alpha_2, \dots, \lambda \alpha_n).$$

Проверьте, что F^n является линейным пространством над полем F . Если $F = R$ или C , то F^n называют действительным или комплексным **арифметическим пространством** и обозначают соответственно R^n или C^n .

3.1.5. Пусть $Z^{(2)}$ – поле из двух элементов 0 и 1, в котором операции заданы следующими табличками:

а) сложение

+	0	1
0	0	1
1	1	0

б) умножение

.	0	1
0	0	0
1	0	1



Постройте линейное пространство $Z_n^{(2)}$ (см. задачу 3.1.4). Покажите, что для любого вектора x из $Z_n^{(2)}$ $x + x = \Theta$. Найдите число векторов в $Z_n^{(2)}$.

3.1.6. Являются ли линейными пространствами над полем R следующие множества матриц с обычными операциями сложения матриц и умножения матриц на элемент поля R :

а) $R_{m,n}$ – множество всех прямоугольных $m \times n$ -матриц с действительными элементами;

б) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta, \gamma \in R \right\};$ в) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta, \gamma \in R \right\};$

г) $\left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in R \right\}?$

3.1.7. Выясните, являются ли действительными линейными пространствами следующие множества многочленов от одной переменной с действительными коэффициентами:

а) множество $M_n(R)$ всех многочленов степени $\leq n$;

б) множество всех многочленов степени n ;

в) множество всех многочленов $f(t)$, удовлетворяющих условию $f(0) = 1$;

г) множество всех многочленов $f(t)$, удовлетворяющих условию $f(0) = 0$.

3.1.8. Является ли действительным линейным пространством множество F бесконечных последовательностей действительных чисел (Фибоначчи), элементы которых удовлетворяют соотношению $\alpha_k = \alpha_{k-1} + \alpha_{k-2}$, $k = 3, 4, \dots$?

Операции над последовательностями определены следующим образом:

а) если $x = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots)$, $y = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \dots)$, то

$$x + y = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n, \dots);$$

б) для любого действительного λ

$$\lambda x = (\lambda \alpha_1, \lambda \alpha_2, \dots, \lambda \alpha_n, \dots).$$



§ 3.2. ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ВЕКТОРОВ

Пусть L – линейное пространство над полем F . Произвольный конечный набор

$$x_1, x_2, \dots, x_k \quad (3.2.1)$$

векторов из L , содержащий, по крайней мере, один вектор, называется **системой векторов**.

Если

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \quad (3.2.2)$$

есть некоторые элементы поля F , то вектор $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_k x_k$ называется **линейной комбинацией** векторов (3.2.1), а скаляры (3.2.2) – **коэффициентами** этой **линейной комбинации**. Если для некоторого $y \in L$ существуют такие скаляры (3.2.2), что $y = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_k x_k$, то говорят, что вектор y **линейно выражается через векторы** (3.2.1).

Система векторов (3.2.1) называется **линейно зависимой**, если хотя бы один из векторов x_i линейно выражается через прочие векторы системы, и **линейно независимой** – в противном случае.

Система векторов (3.2.1) линейно независима тогда и только тогда, когда из равенства

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_k x_k = \Theta \quad (3.2.3)$$

следуют равенства $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \dots, \alpha_k = 0$.

В частности, линейная зависимость системы из двух векторов x, y означает, что либо $y = \alpha x$, либо $x = \beta y$. Такие векторы x и y называют **коллинеарными**.

Пример 1. Докажите, что система векторов, содержащая нулевой вектор, линейно зависима.

Доказательство. Не нарушая общности рассуждений, будем считать, что в системе векторов (3.2.1) $x_1 = \Theta$ (в противном случае – перенумеруем). Составим векторное равенство (3.2.3): $\alpha_1 \Theta + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_k x_k = \Theta$, в котором положим $\alpha_2 = 0, \dots, \alpha_k = 0$. Получим $\alpha_1 \Theta = \Theta$, что возможно при любом α_1 , не обязательно равном нулю. Поскольку нам удалось подобрать такой набор



одновременно не равных нулю коэффициентов (3.2.2), удовлетворяющих условию (3.2.3), система векторов, содержащая нулевой вектор, линейно зависима.

Пример 2. Пусть r, s, v – различные действительные числа. Будет ли линейно зависима следующая система многочленов: $(t-r)(t-s)$, $(t-r)(t-v)$, $(t-s)(t-v)$?

Решение. Составим линейную комбинацию данных многочленов, приравняем ее к нулю и выясним, при каких коэффициентах линейной комбинации это равенство возможно:

$$\alpha_1(t-r)(t-s) + \alpha_2(t-r)(t-v) + \alpha_3(t-s)(t-v) = 0.$$

Раскроем скобки в левой части полученного равенства и выпишем коэффициенты при t^2 , t , 1 :

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)t^2 - [\alpha_1(r+s) + \alpha_2(r+v) + \alpha_3(s+v)]t + (\alpha_1rs + \alpha_2rv + \alpha_3sv) = 0,$$

т. е. имеем нулевую линейную комбинацию векторов t^2 , t , 1 с коэффициентами $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, $-\alpha_1(r+s) - \alpha_2(r+v) - \alpha_3(s+v)$ и $\alpha_1rs + \alpha_2rv + \alpha_3sv$ соответственно. Учитывая, что мы работаем в пространстве $M_n(R)$ при $n=3$ (см. задачу 3.1.7а), где система векторов t^n , t^{n-1} , ..., 1 линейно независима (это следует из того, что $a_0t^n + a_1t^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad \forall t \in R \Leftrightarrow a_0 = 0, a_1 = 0, \dots, a_n = 0$), приравняем к нулю коэффициенты построенной линейной комбинации

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ \alpha_1(r+s) + \alpha_2(r+v) + \alpha_3(s+v) = 0, \\ \alpha_1rs + \alpha_2rv + \alpha_3sv = 0, \end{cases}$$

запишем однородную систему линейных алгебраических уравнений в матричном виде и решим ее относительно неизвестных α_1 , α_2 , α_3 методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r+s & r+v & s+v \\ rs & rv & sv \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & v-s & v-r \\ 0 & r(v-s) & s(v-r) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & v-s & v-r \\ 0 & 0 & (v-r)(s-r) \end{pmatrix};$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{11}\lambda_1 = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_{1p}\lambda_1 = 0, \\ \alpha_{1,p+1}\lambda_1 + \alpha_{2,p+1}\lambda_2 = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_{1q}\lambda_1 + \alpha_{2q}\lambda_2 = 0, \\ \alpha_{1,q+1}\lambda_1 + \alpha_{2,q+1}\lambda_2 + \alpha_{3,q+1}\lambda_3 = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_{1t}\lambda_1 + \alpha_{2t}\lambda_2 + \alpha_{3t}\lambda_3 = 0, \\ \alpha_{1,t+1}\lambda_1 + \alpha_{2,t+1}\lambda_2 + \alpha_{3,t+1}\lambda_3 + \dots + \alpha_{r,t+1}\lambda_r = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_{1n}\lambda_1 + \alpha_{2n}\lambda_2 + \alpha_{3n}\lambda_3 + \dots + \alpha_{rn}\lambda_r = 0. \end{array} \right.$$

В силу того, что (по условию) хотя бы один из элементов $\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1p}$ отличен от нуля, из первых p уравнений находим, что $\lambda_1 = 0$. Подставив найденное значение λ_1 в $(p+1)$ -е уравнение, получим: $\alpha_{2,p+1}\lambda_2 = 0$. Поскольку $\alpha_{2,p+1} \neq 0$, имеем $\lambda_2 = 0$ и переходим к уравнению с номером $q+1$. С учетом найденных ранее λ_1, λ_2 оно принимает вид: $\alpha_{3,q+1}\lambda_3 = 0$. Так как $\alpha_{3,q+1} \neq 0$, это равносильно $\lambda_3 = 0$. Продолжая процесс, получим, что все $\lambda_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, r$, т. е. «трапецеидальная» система векторов линейно независима.

3.2.1. Докажите, что любая подсистема линейно независимой системы векторов также линейно независима.

3.2.2. Пусть система векторов $x_1, x_2, \dots, x_m$ линейно независима, а система $x_1, x_2, \dots, x_m, y$ линейно зависима. Докажите, что вектор y однозначно линейно выражается через векторы $x_1, x_2, \dots, x_m$.



3.2.3. Верно ли, что если x, y, z – линейно независимые векторы, то этим же свойством обладают векторы $x + y, y + z, z + x$?

3.2.4. Какому условию должно удовлетворять число α , чтобы векторы $x_1 = (\alpha, 1, 0), x_2 = (1, \alpha, 1), x_3 = (0, 1, \alpha)$ пространства R^3 были линейно зависимы?

3.2.5. Покажите, что для любых векторов x, y, z и любых чисел α, β, γ система векторов $\alpha x - \beta y, \gamma y - \alpha z, \beta z - \gamma x$ линейно зависима.

3.2.6. Найдите линейную комбинацию $3x_1 + 2x_2 - 7x_3$ векторов $x_1 = (-7, 3, 4, 1), x_2 = (0, -1, -6, -5), x_3 = (-3, 1, 0, -1)$ пространства R^4 . Что можно сказать о системе векторов x_1, x_2, x_3 ?

3.2.7. Дана система многочленов $f_1(t) = 1 - t^2, f_2(t) = 1 + t^3, f_3(t) = t - t^3, f_4(t) = 1 + t + t^2 + t^3$. Найдите линейные комбинации многочленов этой системы: а) $5f_1 + f_2 - 4f_3$; б) $f_1 + 9f_2 - 4f_4$. Обсудите полученные результаты. Что можно сказать о заданной системе многочленов?

3.2.8. Для многочлена, полученного в задаче 3.2.7, найдите другие разложения по системе $f_1(t), f_2(t), f_3(t), f_4(t)$.

3.2.9. Докажите, что линейная зависимость или линейная независимость системы векторов не нарушается при следующих преобразованиях системы, называемых **элементарными преобразованиями**: а) перестановка двух векторов системы; б) умножение вектора системы на ненулевое число; в) прибавление к одному вектору системы другого вектора, умноженного на произвольное число.

3.2.10. Докажите, что произвольную систему векторов пространства F^n элементарными преобразованиями можно привести к системе векторов типа (3.2.4), дополненной, быть может, несколькими векторами, равными нулю. Как определить, была ли исходная система линейно зависима?

3.2.11. Выясните, являются ли следующие системы векторов действительных линейных пространств линейно зависимыми:

а) $x_1 = (2, -1, 3), x_2 = (-3, 3, 2), x_3 = (3, -3, -2)$;



б) $x_1 = (1, 1, 1, 1)$, $x_2 = (1, -1, -1, 1)$, $x_3 = (1, -1, 1, -1)$, $x_4 = (1, 1, -1, -1)$;

в) $x_1 = (5, -3, 2, 1, 10)$, $x_2 = (-1, 8, 1, -4, 7)$, $x_3 = (2, 1, 9, -33, 6)$,
 $x_4 = (1, 3, -5, 9, 11)$;

г) $x_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$;

д) $x_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $x_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3.2.12. Покажите, что следующие системы векторов линейно независимы:

а) $t+4$, $3t^2-1$, $2t^2+4t$ в пространстве $M_2(R)$;

б) $(\alpha_1, \alpha_2, 2)$, $(\alpha_1 - \alpha_2, 6, 4)$, α_1 , $\alpha_2 \in R$, $\alpha_1 \neq -3$, $\alpha_2 \neq 3$ в пространстве R^3 ;

в) $1+i$, i в пространстве C над полем R ;

г) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ в пространстве матриц $R_{2,2}$.

§ 3.3. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ СИСТЕМЫ ВЕКТОРОВ

Две системы векторов $x_1, x_2, \dots, x_m$ и $y_1, y_2, \dots, y_n$ линейного пространства L называются **эквивалентными**, если всякий вектор одной системы линейно выражается через векторы другой системы.

Линейной оболочкой $L(x_1, x_2, \dots, x_m)$ системы векторов $x_1, x_2, \dots, x_m$ называется множество всех линейных комбинаций этой системы векторов.

Две системы векторов эквивалентны тогда и только тогда, когда их линейные оболочки совпадают.

Базой системы векторов называется эквивалентная ей линейно независимая подсистема векторов. В общем случае база не единственна, но **все базы состоят из одного и того же числа векторов**, которое называется **рангом**.

Пример 1. Опишите линейные оболочки следующих систем векторов:

а) $x_1 = (-1, 0, 0, 1)$, $x_2 = (-1, 0, 1, 0)$, $x_3 = (-1, 1, 0, 0)$ пространства R^4 ;



б) $x_1 = 1 - t^2$, $x_2 = t - t^2$ пространства $M_2(R)$;

в) $x_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $x_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ пространства $R_{2,2}$.

Решение

$$\begin{aligned} \text{а) } \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 &= \alpha_1(-1, 0, 0, 1) + \alpha_2(-1, 0, 1, 0) + \alpha_3(-1, 1, 0, 0) = \\ &= (-\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3, \alpha_2, \alpha_1) \mapsto L(x_1, x_2, x_3) = \left\{ (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) \left(\sum_{i=1}^4 \beta_i = 0 \right) \right\}; \end{aligned}$$

б) $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \alpha_1(1 - t^2) + \alpha_2(t - t^2) = \alpha_1(1 - t)(1 + t) + \alpha_2(1 - t)t = (1 - t) \times$
 $\times (\alpha_1 t + \alpha_2 t + \alpha_1)$, т. е. $L(x_1, x_2)$ составляют все многочлены степени ≤ 2 с корнем 1;

$$\begin{aligned} \text{в) } \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 &= \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_1 \end{pmatrix} \mapsto \\ \mapsto L(x_1, x_2, x_3) &= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_1 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Пример 2. Найдите все базы системы векторов $x_1 = (4, -2, 12, 8)$, $x_2 = (-6, 12, 9, -3)$, $x_3 = (-10, 5, -30, -20)$, $x_4 = (-14, 28, 21, -7)$.

Решение. Запишем данную систему векторов в виде матрицы и элементарными преобразованиями, не меняющими ранга системы, приведем матрицу к «трапецеидальному» (ступенчатому) виду:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 12 & 8 \\ -6 & 12 & 9 & -3 \\ -10 & 5 & -30 & -20 \\ -14 & 28 & 21 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 & 4 \\ -2 & 4 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & -6 & -4 \\ -2 & 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Видим, что в системе векторов x_1, x_2, x_3, x_4 векторы x_3, x_4 линейно зависимы и ранг этой системы равен 2.



Будем рассматривать всевозможные подсистемы из двух векторов (всего таких подсистем $C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$). Если ранг некоторой такой подсистемы окажется равен рангу всей системы, то исследуемая подсистема образует базу системы векторов. В противном случае рассматриваемая подсистема линейно зависима и по определению не может служить базой системы векторов.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4 & -2 & 12 & 8 \\ -6 & 12 & 9 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 & 4 \\ -2 & 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & 9 & 3 \end{pmatrix}; \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4 & -2 & 12 & 8 \\ -10 & 5 & -30 & -20 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 & 4 \\ -2 & 1 & -6 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4 & -2 & 12 & 8 \\ -14 & 28 & 21 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 & 4 \\ -2 & 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & 9 & 3 \end{pmatrix}; \\ \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -6 & 12 & 9 & -3 \\ -10 & 5 & -30 & -20 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & -6 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 9 & 3 \end{pmatrix}; \\ \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -6 & 12 & 9 & -3 \\ -14 & 28 & 21 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\ \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -10 & 5 & -30 & -20 \\ -14 & 28 & 21 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & -6 & -4 \\ -2 & 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & -6 & -4 \\ 0 & -3 & -9 & -3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Таким образом, базами системы векторов x_1, x_2, x_3, x_4 служат подсистемы x_1, x_2 ; x_1, x_4 ; x_2, x_3 ; x_3, x_4 .

Пример 3. Эквивалентны ли системы векторов $x_1 = (1, 1, 1)$, $x_2 = (1, 0, -1)$, $x_3 = (1, 3, 5)$ и $y_1 = (1, 2, 3)$, $y_2 = (0, 1, 2)$, $y_3 = (3, 4, 5)$, $y_4 = (4, 6, 8)$?

Решение. Начнем с нахождения рангов каждой системы векторов:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$



$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранги систем векторов x_1, x_2, x_3 и y_1, y_2, y_3, y_4 совпадают (они равны двум). Следовательно, данные системы могут быть эквивалентны. Чтобы проверить это, нужно вычислить ранг объединенной системы векторов $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, y_4$. Если ранг объединенной системы совпадет с рангом каждой системы векторов, системы эквивалентны (так как линейные оболочки совпадают). В противном случае – не эквивалентны.

Поскольку в системе x_1, x_2, x_3 вектор x_3 линейно зависим, а в системе y_1, y_2, y_3, y_4 линейно независимы векторы y_3 и y_4 , нам достаточно рассмотреть систему векторов x_1, x_2, y_1, y_2 :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку ранг объединенной системы векторов равен двум, системы векторов x_1, x_2, x_3 и y_1, y_2, y_3, y_4 эквивалентны.

3.3.1. Опишите линейные оболочки следующих систем векторов:

а) $x_1 = (1, 0, 0, 0, 0)$, $x_2 = (0, 0, 1, 0, 0)$, $x_3 = (0, 0, 0, 0, 1)$ пространства R^5 ;

б) $x_1 = 1 + t^2$, $x_2 = t + t^2$, $x_3 = 1 + t + t^2$ пространства $M_2(R)$;

в) $x_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $x_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ пространства $R_{3,3}$.

3.3.2. Рассмотрим линейную оболочку чисел $1, \sqrt{2}$ в множестве действительных чисел в R -векторном пространстве с операциями сложения действи-



тельных чисел и умножения действительного числа на рациональное число. Принадлежит ли этой оболочке число $\sqrt[4]{2}$?

3.3.3. Докажите, что отношение эквивалентности систем векторов рефлексивно, симметрично и транзитивно.

3.3.4. Докажите, что элементарные преобразования системы векторов приводят к эквивалентной системе.

3.3.5. Найдите все базы для каждой из следующих систем векторов:

а) $x_1 = (-3, 1, 0, 0)$, $x_2 = (4, 3, 2, 1)$, $x_3 = (-9, 3, 0, 0)$;

б) $x_1 = (1, -2, 3, -4)$, $x_2 = (2, -4, 6, -8)$, $x_3 = (3, -1, -2, 1)$,
 $x_4 = (9, -3, -6, 3)$;

в) $x_1 = (1, 2, 3)$, $x_2 = (2, 3, 4)$, $x_3 = (-3, -2, -3)$, $x_4 = (4, 3, 4)$, $x_5 = (2, 2, 2)$;

г) $x_1 = (2i, i, -1)$, $x_2 = (2 + 3i, 1 - i, 1 + i)$, $x_3 = (3 - 2i, -1 - i, 1 - i)$,
 $x_4 = (10 + 2i, -4i, 4)$.

3.3.6. Найдите какую-либо базу системы векторов и все векторы системы, не вошедшие в базу, выразите через векторы базы:

а) $x_1 = (-3, 1, 5, 2)$, $x_2 = (-2, 3, 4, 1)$, $x_3 = (1, -5, -3, 0)$, $x_4 = (-1, 2, 3, 4)$;

б) $x_1 = (1, 3, 4, -3)$, $x_2 = (3, 5, 2, -1)$, $x_3 = (3, 4, 3, -2)$, $x_4 = (7, 0, -7, 6)$.

3.3.7. Проверьте, являются ли эквивалентными системы векторов $x_1 = (1, 0, 0)$, $x_2 = (0, 1, 0)$, $x_3 = (0, 0, 1)$ и $y_1 = (0, 0, 1)$, $y_2 = (0, 1, 1)$, $y_3 = (1, 1, 1)$.

3.3.8. Покажите, что системы векторов $x_1 = 1$, $x_2 = t$, $x_3 = t^2$ и $y_1 = t + 2$, $y_2 = 2$, $y_3 = t^2 - 2t + 3$ эквивалентны.

§ 3.4. БАЗИС И РАЗМЕРНОСТЬ ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА

Всякую систему векторов $e_1, e_2, \dots, e_n$ линейного пространства L называют **базисом** этого пространства, если эта система векторов линейно независима и любой вектор пространства L линейно выражается через векторы этой системы.



Существенно различными являются случаи, когда базис пространства конечен и когда он бесконечен. В линейной алгебре изучаются линейные пространства с конечными базисами. Линейное пространство L называют **конечномерным**, если оно обладает базисом, состоящим из конечного числа векторов. Конечномерное пространство может обладать многими различными базисами. Число векторов в каждом базисе конечномерного пространства одинаково. Это число называют **размерностью пространства**. Если размерность пространства L равна n , то записывают $\dim L = n$. Пространство L при этом называют n -мерным.

Пусть в линейном пространстве L над полем F задан некоторый базис

$$e_1, e_2, \dots, e_n. \quad (3.4.1)$$

Произвольный вектор x пространства L линейно выражается через базис (3.4.1):

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n. \quad (3.4.2)$$

Представление вектора x в виде (3.4.2) называется **разложением по базисным векторам** (3.4.1), а коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ в разложении (3.4.2) – **координатами вектора** x в базисе (3.4.1).

Два линейных пространства L и L' над полем F называют **изоморфными**, если между их векторами можно установить взаимно однозначное соответствие, при котором образом суммы двух векторов служит сумма образов этих векторов, а образом произведения вектора на число служит произведение образа этого вектора на то же число, т. е. если из того, что

$$x \leftrightarrow x', \quad y \leftrightarrow y', \quad x, y \in L, \quad x', y' \in L',$$

следует $x + y \leftrightarrow x' + y'$ и $\alpha x \leftrightarrow \alpha x'$.

Необходимым и достаточным условием изоморфного соответствия двух линейных пространств является совпадение их размерностей.

При изоморфизме линейно независимым векторам из L соответствуют линейно независимые векторы из L' , и наоборот.

Пример 1. Выясните, какова размерность каждого из указанных линейных пространств, и найдите какой-либо базис пространства:

а) арифметическое пространство R^n , векторами которого являются упорядоченные наборы по n действительных чисел (см. задачу 3.1.4);



б) пространство $M_n(R)$ многочленов с действительными коэффициентами от одной переменной, степень которых не превышает заданного неотрицательного числа n (см. задачу 3.1.7а);

в) пространство $R_{m,n}$ прямоугольных $m \times n$ -матриц с действительными элементами (см. задачу 3.1.6а).

Решение

а) Одним из возможных базисов R^n является следующий:

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \dots, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0, 0), \dots, \\ e_n &= (0, 0, 0, \dots, 0, 1). \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

Действительно, система векторов $e_1, e_2, \dots, e_n$ линейно независима

$$\begin{aligned} (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \\ = (0, 0, \dots, 0) \Leftrightarrow \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \dots, \alpha_n = 0) \end{aligned}$$

и всякий вектор $x \in R^n$ линейно выражается через векторы этой системы (если $x = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, то $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$). Следовательно, $\dim R^n = n$.

б) Простейшим базисом $M_n(R)$ является такая система векторов:

$$e_1 = 1, e_2 = t, \dots, e_n = t^{n-1}, e_{n+1} = t^n. \quad (3.4.4)$$

Очевидно, что система векторов $e_1, e_2, \dots, e_{n+1}$ линейно независима

$$\begin{aligned} (\alpha_0 e_1 + \alpha_1 e_2 + \dots + \alpha_n e_{n+1} = \alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_n t^n = 0 \quad \forall t \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \alpha_0 = 0, \alpha_1 = 0, \dots, \alpha_n = 0) \end{aligned}$$

и любой вектор $f(t) \in M_n(R)$ линейно выражается через векторы этой системы (если $f(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_n t^n$, то $f(t) = \alpha_0 e_1 + \alpha_1 e_2 + \dots + \alpha_n e_{n+1}$). Таким образом, $\dim M_n(R) = n+1$ и $M_n(R)$ изоморфно R^{n+1} .



в) За базис пространства $R_{m,n}$ можно принять систему векторов

$$\begin{aligned}
 e_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 e_{n+1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad e_{n+2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \\
 e_{2n} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad e_{m \cdot n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{3.4.5}$$

Она линейно независима

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_{m \cdot n} e_{m \cdot n} &= \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_{n+1} & \alpha_{n+2} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{(m-1)n+1} & \alpha_{(m-1)n+2} & \dots & \alpha_{m \cdot n} \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \dots, \alpha_{m \cdot n} = 0,
 \end{aligned}$$

и через нее линейно выражается любой вектор $A \in R_{m,n}$



$$\left(\begin{array}{l} \text{если } A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{m \cdot n} \end{pmatrix}, \text{ то } A = \alpha_{11}e_1 + \alpha_{12}e_2 + \dots + \alpha_{1n}e_n + \\ + \alpha_{21}e_{n+1} + \alpha_{22}e_{n+2} + \dots + \alpha_{2n}e_{2n} + \dots + \alpha_{m \cdot n}e_{m \cdot n} \end{array} \right).$$

Поэтому $\dim R_{m,n} = mn$ и $R_{m,n}$ изоморфно $R^{m \cdot n}$.

Пример 2. Систему многочленов $f_1(t) = t^5 + t^4$, $f_2(t) = 5t^5 - 3t^3$, $f_3(t) = t^5 + 2t^2$, $f_4(t) = t^5 - t$ дополните до базиса пространства $M_5(R)$.

Решение. Известно (см. пример 1 § 3.4), что $\dim M_5(R) = 6$. Выясним, сколько и каких векторов нужно взять, чтобы дополнить данную систему векторов до базиса $M_5(R)$. Воспользуемся изоморфизмом между $M_5(R)$ и R^6 , в котором и будем работать (это проще).

$$f_1(t) \leftrightarrow x_1 = (0, 0, 0, 0, 1, 1), \quad f_2(t) \leftrightarrow x_2 = (0, 0, 0, -3, 0, 5),$$

$$f_3(t) \leftrightarrow x_3 = (0, 0, 2, 0, 0, 1), \quad f_4(t) \leftrightarrow x_4 = (0, -1, 0, 0, 0, 1).$$

Сведем векторы x_1, x_2, x_3, x_4 в матрицу и приведем ее элементарными преобразованиями к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что система векторов x_1, x_2, x_3, x_4 (а значит, и система векторов $f_1(t), f_2(t), f_3(t), f_4(t)$) линейно независима. Дополнять до базиса нужно



двумя векторами. Например, $x_5 = (0, 0, 0, 0, 0, 1) \leftrightarrow f_5(t) = t^5$ и $x_6 = (1, 0, 0, 0, 0, 0) \leftrightarrow f_6(t) = 1$.

Пример 3. Проверьте, что векторы $e_1 = (2, 2, -1)$, $e_2 = (2, -1, 2)$, $e_3 = (-1, 2, 2)$ образуют базис пространства R^3 , и найдите координаты вектора $x = (1, 1, 1)$ в этом базисе.

Решение. $\dim R^3 = 3$. Нужно показать, что векторы e_1, e_2, e_3 линейно независимы.

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \sim \\ \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

Значит, можно вектор x разложить по базисным векторам, т. е. представить в виде $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$, причем такое представление будет единственным.

$$\begin{aligned} \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 &= \alpha_1 (2, 2, -1) + \alpha_2 (2, -1, 2) + \alpha_3 (-1, 2, 2) = \\ &= (2\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3, 2\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3, -\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3) = (1, 1, 1). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 1, \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = 1, \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 1, \end{cases}$$

или в матричном виде

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right).$$



Заметим, что столбцами этой матрицы являются векторы e_1, e_2, e_3, x . Решим систему методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & | & 1 \\ 2 & -1 & 2 & | & 1 \\ -1 & 2 & 2 & | & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & | & 1 \\ 2 & 2 & -1 & | & 1 \\ 2 & -1 & 2 & | & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & | & 1 \\ 0 & 6 & 3 & | & 3 \\ 0 & 3 & 6 & | & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & | & 1 \\ 0 & 3 & 6 & | & 3 \\ 0 & 6 & 3 & | & 3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 2 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & -3 & | & -1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$-3\alpha_3 = -1 \mapsto \alpha_3 = \frac{1}{3};$$

$$\alpha_2 + 2\alpha_3 = 1 \mapsto \alpha_2 = 1 - 2\alpha_3 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3};$$

$$-\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 1 \mapsto \alpha_1 = -1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = -1 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Таким образом, вектор x в базисе e_1, e_2, e_3 имеет координаты $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

3.4.1. Выясните, какова размерность каждого из указанных линейных пространств, и найдите какой-либо базис пространства:

- а) пространство R^+ (см. пример 2 § 3.1);
- б) пространство R (см. задачу 3.1.3в);
- в) пространство комплексных чисел C , рассматриваемое как действительное линейное пространство (см. задачу 3.1.3г);
- г) пространство комплексных чисел C , рассматриваемое как комплексное линейное пространство;
- д) пространство, заданное в задаче 3.1.6б;
- е) пространство, заданное в задаче 3.1.6г;
- ж) пространство F бесконечных действительных последовательностей, элементы которых удовлетворяют соотношению $\alpha_k = \alpha_{k-1} + \alpha_{k-2}$, $k = 3, 4, \dots$ (см. задачу 3.1.8).



3.4.2. В пространстве R^4 найдите два различных базиса, имеющих общие векторы $e_1 = (1, 1, 0, 0)$ и $e_2 = (0, 0, 1, 1)$.

3.4.3. В базисе $-1+2i$, $2-i$ действительного линейного пространства C найдите координаты вектора $-5+4i$.

3.4.4. В базисе $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ действительного линейного пространства $L = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \gamma \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta, \gamma \in R \right\}$ найдите координаты векторов $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

3.4.5. В пространстве R^4 дана система векторов x_1, x_2, x_3, x_4 . Можно ли принять эту систему за базис? Каковы координаты вектора y в этом базисе?

а) $x_1 = (1, 1, 1, 1)$, $x_2 = (1, 1, -1, -1)$, $x_3 = (1, -1, 1, -1)$, $x_4 = (1, -1, -1, 1)$; $y = (1, 2, 1, 1)$.

б) $x_1 = (1, 1, 0, 1)$, $x_2 = (2, 1, 3, 1)$, $x_3 = (1, 1, 0, 0)$, $x_4 = (0, 1, -1, -1)$; $y = (0, 0, 0, 1)$.

3.4.6. Можно ли в пространстве многочленов $M_2(R)$ выбрать в качестве базиса систему многочленов:

а) $x_1 = t^2 + 1$, $x_2 = -t^2 + 1$, $x_3 = 2t + 1$;

б) $x_1 = t^2 + 1$, $x_2 = -t^2 + 1$, $x_3 = 2t^2 + 1$?

3.4.7. Найдите координаты многочлена $t^5 - t^4 + t^3 - t^2 - t + 1$ в каждом из следующих базисов пространства $M_5(R)$:

а) $e_1 = 1$, $e_2 = t$, $e_3 = t^2$, $e_4 = t^3$, $e_5 = t^4$, $e_6 = t^5$;

б) $e_1 = 1$, $e_2 = t + 1$, $e_3 = t^2 + 1$, $e_4 = t^3 + 1$, $e_5 = t^4 + 1$, $e_6 = t^5 + 1$;

в) $e_1 = 1 + t^3$, $e_2 = t + t^3$, $e_3 = t^2 + t^3$, $e_4 = t^3$, $e_5 = t^4 + t^3$, $e_6 = t^5 + t^3$.



§ 3.5. ПОДПРОСТРАНСТВА ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА СУММА И ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОДПРОСТРАНСТВ

Множество L' векторов линейного пространства L называется **подпространством** этого пространства, если: 1) сумма любых двух векторов из L' принадлежит L' ; 2) произведение каждого вектора из L' на любое число из поля F также принадлежит L' .

Рассмотрим два подпространства L_1 и L_2 линейного пространства L .

Суммой подпространств L_1 и L_2 называется множество всех векторов, которые можно представить в виде $x_1 + x_2$, где x_1 и x_2 принадлежат соответственно подпространствам L_1 и L_2 . Сумма подпространств L_1 и L_2 обозначается $L_1 + L_2$.

Пересечением подпространств L_1 и L_2 называется множество векторов, принадлежащих одновременно обоим подпространствам. Пересечение подпространств L_1 и L_2 обозначается $L_1 \cap L_2$.

Сумма и пересечение подпространств L_1 и L_2 являются подпространствами пространства L .

Для любых двух подпространств L_1, L_2 конечномерного пространства L имеет место равенство

$$\dim(L_1 + L_2) + \dim(L_1 \cap L_2) = \dim L_1 + \dim L_2. \quad (3.5.1)$$

Если для каждого вектора x из $S = L_1 + L_2$ представление $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$ единственно, то S называется **прямой суммой подпространств** L_1 и L_2 и обозначается $L_1 \dot{+} L_2$.

Сумма S подпространств $L_1, L_2, \dots, L_m$ тогда и только тогда будет прямой суммой, когда объединение базисов этих подпространств дает базис S .

Пример 1. Покажите, что множество всех векторов $x = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ из R^n , координаты которых удовлетворяют уравнению $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 0$, является подпространством линейного пространства R^n . Найдите один из базисов и размерность этого подпространства.



Решение. Обозначим

$$\tilde{R}^n = \left\{ x = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in R^n \left| \sum_{i=1}^n \alpha_i = 0 \right. \right\}.$$

Множество $\tilde{R}^n$ замкнуто относительно сложения векторов и умножения вектора на действительное число: $\forall x, y \in \tilde{R}^n, \forall \lambda \in R$

$$x + y = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) + (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n),$$

$$\sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i + \sum_{i=1}^n \beta_i = 0 + 0 = 0, \text{ т. е. } (x + y) \in \tilde{R}^n;$$

$$\lambda x = \lambda(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \dots, \lambda\alpha_n),$$

$$\sum_{i=1}^n (\lambda\alpha_i) = \lambda \sum_{i=1}^n \alpha_i = \lambda \cdot 0 = 0, \text{ т. е. } (\lambda x) \in \tilde{R}^n.$$

Следовательно, $\tilde{R}^n$ – подпространство линейного пространства R^n . Покажем, что система векторов

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0, -1),$$

$$e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0, -1),$$

$$e_3 = (0, 0, 1, \dots, 0, -1),$$

.....

$$e_{n-1} = (0, 0, 0, \dots, 1, -1)$$

образует базис в $\tilde{R}^n$:

1) $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_{n-1} e_{n-1} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{n-1}, -\alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_{n-1}) = (0, 0, 0, \dots, 0, 0)$, если и только если $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \dots, \alpha_{n-1} = 0$, т. е. система векторов $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$ линейно независима;

2) $\forall x \in \tilde{R}^n \quad x = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, -\alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_{n-1}) = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_{n-1} e_{n-1}$, т. е. всякий вектор $x \in \tilde{R}^n$ может быть представ-



лен в виде линейной комбинации системы векторов $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$. Таким образом, $\dim \tilde{K}^n = n-1$.

Пример 2. Найдите базисы суммы и пересечения подпространств $L_1 = L(x_1, x_2, x_3, x_4)$ и $L_2 = L(y_1, y_2, y_3, y_4)$, где $x_1 = (1, 1, 1, 1)$, $x_2 = (1, -1, 1, 1)$, $x_3 = (1, 0, 0, 1)$, $x_4 = (0, 1, 1, 0)$; $y_1 = (5, -3, 2, 1)$, $y_2 = (2, 1, 9, -3)$, $y_3 = (7, -3, 11, -2)$, $y_4 = (3, -4, -7, 4)$.

Решение. Сначала найдем базисы подпространств L_1 , L_2 и $L_1 + L_2$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Базис L_1 образуют векторы x_1, x_2, x_3 , $\dim L_1 = 3$.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 9 & -3 \\ 7 & -3 & 11 & -2 \\ 3 & -4 & -7 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & -16 & 7 \\ 2 & 1 & 9 & -3 \\ 7 & -3 & 11 & -2 \\ 3 & -4 & -7 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & -16 & 7 \\ 0 & 11 & 41 & -17 \\ 0 & 32 & 123 & -51 \\ 0 & 11 & 41 & -17 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & -16 & 7 \\ 0 & 11 & 41 & -17 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} y_1 \\ y_3 \\ y_2 \\ y_4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & -16 & 7 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 41 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & -16 & 7 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 41 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$



Базис L_2 образуют векторы y_1, y_2, y_3 , $\dim L_2 = 3$.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 9 & -3 \\ 7 & -3 & 11 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & -3 & -4 \\ 0 & -1 & 7 & -5 \\ 0 & -10 & 4 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & -3 & -4 \\ 0 & -1 & 7 & -5 \\ 0 & -10 & 4 & -9 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Базис $L_1 + L_2$ составляют векторы x_1, x_2, x_3, y_1 , $\dim(L_1 + L_2) = 4$.

Размерность пересечения подпространств L_1 и L_2 определим из соотношения (3.5.1): $\dim(L_1 \cap L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 + L_2) = 3 + 3 - 4 = 2$.

Обозначим базисные векторы подпространства $L_1 \cap L_2$ через z_1 и z_2 . По определению пересечения подпространств

$$z_i = \alpha_{1i}x_1 + \alpha_{2i}x_2 + \alpha_{3i}x_3 = \beta_{1i}y_1 + \beta_{2i}y_2 + \beta_{3i}y_3, \quad i = 1, 2, \quad (3.5.2)$$

или

$$\alpha_{1i}x_1 + \alpha_{2i}x_2 + \alpha_{3i}x_3 + \beta_{1i}(-y_1) = \beta_{2i}y_2 + \beta_{3i}y_3, \quad i = 1, 2, \quad (3.5.3)$$

где слева от равенства записана линейная комбинация векторов, образующих базис $L_1 + L_2$. Переменные β_{2i} и β_{3i} , стоящие при линейно независимых векторах, называются свободными. Выберем их значения в соответствии с таблицей

i	β_{2i}	β_{3i}
1	1	0
2	0	1

При таком выборе значений β_{2i} и β_{3i} системы линейных уравнений (3.5.3) относительно $\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \alpha_{3i}, \beta_{1i}$ будут иметь линейно независимые решения.



Запишем явно системы (3.5.3) и решим их методом Гаусса. Учитывая, что системы уравнений (3.5.3) различаются лишь правыми частями, целесообразно их объединить в одну расширенную матрицу.

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} x_1 & x_2 & x_3 & -y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 & -5 & 2 & 7 \\ 1 & -1 & 0 & 3 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & -2 & 9 & 11 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -3 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 1 & 1 & -5 & 2 & 7 \\ 0 & -2 & -1 & 8 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -5 & -9 \end{array} \right).$$

Осуществляя обратный ход в вычислительной схеме Гаусса, рассматриваем сначала первый столбец свободных членов, соответствующий $\beta_{21} = 1, \beta_{31} = 0$, а затем второй, полученный при $\beta_{22} = 0, \beta_{32} = 1$. В результате приходим к тому, что $\alpha_{11} = \frac{45}{8}, \alpha_{21} = \frac{7}{8}, \alpha_{31} = -\frac{43}{4}, \beta_{11} = -\frac{5}{4}$ и $\alpha_{12} = \frac{41}{8}, \alpha_{22} = \frac{11}{8}, \alpha_{32} = -\frac{43}{4}, \beta_{12} = -\frac{9}{4}$.

Соотношения (3.5.2) будем использовать для вычисления и проверки полученных результатов:

$$\begin{aligned} z_1 &= \alpha_{11}x_1 + \alpha_{21}x_2 + \alpha_{31}x_3 = \frac{45}{8}(1, 1, 1, 1) + \frac{7}{8}(1, -1, 1, 1) - \frac{43}{4}(1, 0, 0, 1) = \\ &= \left(-\frac{17}{4}, \frac{19}{4}, \frac{26}{4}, -\frac{17}{4} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_{11}y_1 + \beta_{21}y_2 + \beta_{31}y_3 &= -\frac{5}{4}(5, -3, 2, 1) + 1(2, 1, 9, -3) + 0(7, -3, 11, -2) = \\ &= \left(-\frac{17}{4}, \frac{19}{4}, \frac{26}{4}, -\frac{17}{4} \right) = z_1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_2 &= \alpha_{12}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{32}x_3 = \frac{41}{8}(1, 1, 1, 1) + \frac{11}{8}(1, -1, 1, 1) - \frac{43}{4}(1, 0, 0, 1) = \\ &= \left(-\frac{17}{4}, \frac{15}{4}, \frac{26}{4}, -\frac{17}{4} \right), \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\beta_{12}y_1 + \beta_{22}y_2 + \beta_{32}y_3 &= -\frac{9}{4}(5, -3, 2, 1) + 0(2, 1, 9, -3) + 1(7, -3, 11, -2) = \\ &= \left(-\frac{17}{4}, \frac{15}{4}, \frac{26}{4}, -\frac{17}{4}\right) = z_2.\end{aligned}$$

3.5.1. Укажите, какие из заданных множеств являются подпространствами действительных линейных пространств. Найдите один из базисов и размерность каждого из этих подпространств:

а) все векторы плоскости, каждый из которых параллелен либо оси Ox , либо оси Oy ;

б) все векторы плоскости, одинаково направленные с осью Ox ;

в) все векторы из R^n , сумма координат каждого из которых равна π ;

г) все векторы из R^n , у которых первая и последняя координата равны между собой;

д) все векторы из R^n вида $(\alpha, \beta, \alpha, \beta, \alpha, \beta, \dots)$, где α и β – действительные числа;

е) все симметричные матрицы порядка n ;

ж) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & c \end{pmatrix} \middle| a, b, c \in C \right\}$;

з) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & c \end{pmatrix} \middle| a, b, c \in R \right\}$;

и) все кососимметричные матрицы порядка n (квадратная матрица $A = (a_{ij})$ называется **кососимметричной**, если $a_{ij} = -a_{ji}$ для любых i, j).

3.5.2. Что представляет собой сумма и пересечение следующих подпространств L_1 и L_2 пространства $R_{n,n}$ всех действительных квадратных матриц порядка n :

а) L_1 – пространство симметричных матриц (см. задачу 3.5.1е), L_2 – пространство верхних треугольных матриц;

б) L_1 – пространство симметричных матриц, L_2 – пространство кососимметричных матриц (см. задачу 3.5.1и)?

3.5.3. Найдите какие-либо базисы суммы и пересечения подпространств $L_1 = L(x_1, x_2, x_3)$ и $L_2 = L(y_1, y_2, y_3)$ арифметического векторного пространства строк R_4 :



- а) $x_1 = (1, 1, 2, 1)$, $x_2 = (0, 1, 3, 2)$, $x_3 = (-2, 1, 1, 3)$,
 $y_1 = (3, 1, 4, 0)$, $y_2 = (-6, -2, 0, 1)$, $y_3 = (5, 3, 0, 1)$;
б) $x_1 = (0, 0, -1, -1)$, $x_2 = (0, 2, 2, 0)$, $x_3 = (1, 1, 0, 0)$,
 $y_1 = (0, -2, 0, -2)$, $y_2 = (1, 1, 2, 0)$, $y_3 = (2, 1, 2, 1)$;
в) $x_1 = (1, 1, 1, 1)$, $x_2 = (1, 1, -1, -1)$, $x_3 = (1, -1, 1, -1)$,
 $y_1 = (1, -1, -1, 1)$, $y_2 = (2, -2, 0, 0)$, $y_3 = (3, -1, 1, 1)$.

3.5.4. Докажите, что:

а) сумма S двух линейных подпространств L_1 и L_2 тогда и только тогда будет прямой суммой, когда пересечение этих подпространств состоит только из нулевого вектора;

б) сумма S двух линейных подпространств L_1 и L_2 тогда и только тогда будет прямой суммой, когда $\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2$.

3.5.5. Докажите, что линейные подпространства L_1 и L_2 , натянутые на системы векторов $x_1 = (2, 3, 11, 5)$, $x_2 = (1, 1, 5, 2)$, $x_3 = (0, 1, 1, 1)$ и $y_1 = (2, 1, 3, 2)$, $y_2 = (1, 1, 3, 4)$, $y_3 = (5, 2, 6, 2)$ соответственно, дают в прямой сумме все пространство R^4 , и найдите разложение вектора $z = (2, 0, 0, 3)$ по этим подпространствам.

3.5.6. Докажите, что пространство $R_{n,n}$ всех действительных квадратных матриц порядка n является прямой суммой подпространства L_1 симметричных матриц и подпространства L_2 кососимметричных матриц.

3.5.7. Докажите, что для любого подпространства L_1 линейного пространства L найдется **дополнительное подпространство** L_2 такое, что $L = L_1 \dot{+} L_2$. Единственным ли образом определяется дополнительное подпространство для данного L_1 ?

3.5.8. Для подпространства

$$L_1 = \{ \alpha_1(1, 3, 0, -1) + \alpha_2(3, 5, 1, 2) + \alpha_3(2, 2, 1, 3) \mid \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R \}$$

найдите два различных дополнительных подпространства в R^4 .

ГЛАВА 4

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 4.1. РАНГ МАТРИЦЫ. ОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ СИСТЕМА РЕШЕНИЙ

Рангом матрицы A (обозначается $\text{rg } A$) называется наивысший порядок r отличных от нуля миноров этой матрицы.

Ранг нулевой матрицы полагается равным нулю по определению.

Для любой прямоугольной матрицы ранги ее систем вектор-строк и вектор-столбцов совпадают и равны рангу матрицы.

Система уравнений

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n = 0, \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n = 0, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \dots + \alpha_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (4.1.1)$$

называется **однородной**. Однородная система всегда совместна, так как одним из ее частных решений является нулевое решение.

Для того чтобы однородная система имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был меньше числа неизвестных.

Множество решений однородной системы линейных уравнений (4.1.1) образует линейное пространство размерности $n - r$, где r – ранг матрицы системы. Любой базис пространства решений однородной системы называется **фундаментальной системой решений** этой системы.



Пример 1. Найдите ранг матрицы в зависимости от значения параметра λ :

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & \lambda & 2\lambda & 2\lambda \\ -1+\lambda & 2-2\lambda & -2\lambda & -2\lambda \\ 1-\lambda & \lambda & 2+\lambda & 1+2\lambda \\ -1+\lambda & -\lambda & -2\lambda & 2-3\lambda \end{pmatrix}.$$

Решение. При помощи элементарных преобразований, не изменяющих ранг, приведем матрицу к ступенчатому виду. Прибавив ко второй строке первую, к третьей – первую, умноженную на (-1) , к четвертой – первую, получим

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1-\lambda & \lambda & 2\lambda & 2\lambda \\ -1+\lambda & 2-2\lambda & -2\lambda & -2\lambda \\ 1-\lambda & \lambda & 2+\lambda & 1+2\lambda \\ -1+\lambda & -\lambda & -2\lambda & 2-3\lambda \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1-\lambda & \lambda & 2\lambda & 2\lambda \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}.$$

Если $\lambda = 1$, то

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3.$$

Рассмотрим теперь случай, когда $\lambda = 2$:

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Очевидно, что если $\lambda \neq 1, 2$, то $\operatorname{rg} A = 4$.

Пример 2. Найдите размерность пространства решений однородной системы линейных уравнений с матрицей системы из примера 1.



Решение. Размерность пространства решений равна

$$n - \operatorname{rg} A = 4 - \operatorname{rg} A = \begin{cases} 0, & \text{если } \lambda \neq 1, 2; \\ 1, & \text{если } \lambda = 1; \\ 2, & \text{если } \lambda = 2. \end{cases}$$

Пример 3. Найдите общее решение и фундаментальную систему решений однородной системы линейных уравнений из примера 1.

Решение. Если $\lambda \neq 1, 2$, система имеет только нулевое решение.

Пусть $\lambda = 1$. Тогда, как было показано в примере 1,

$$A \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.1.2)$$

Размерность пространства решений равна единице, и фундаментальная система решений состоит из одного вектора. Из (4.1.2) находим:

$$x_4 = 0;$$

$$x_3 + x_4 = 0 \mapsto x_3 = -x_4 = 0;$$

$$x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \mapsto x_2 = -2x_3 - 2x_4 = 0,$$

x_1 – свободная переменная.

Общее решение имеет вид $(x_1, 0, 0, 0)^T$. Фундаментальная система решений: $y_1 = (1, 0, 0, 0)^T$.

Пусть теперь $\lambda = 2$. В этом случае

$$A \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.1.3)$$

пространство решений двумерное и фундаментальная система решений состоит из двух векторов. Из (4.1.3) получаем: $-x_4 = 0 \mapsto x_4 = 0$; x_2, x_3 – свободные переменные; $-x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 0 \mapsto x_1 = 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 2x_2 + 4x_3$.



Общее решение имеет вид $(2x_2 + 4x_3, x_2, x_3, 0)^T$.

Выберем значения свободных переменных в соответствии с таблицей

i	x_2^i	x_3^i
1	1	0
2	0	1

и запишем фундаментальную систему решений: $y_1 = (2, 1, 0, 0)^T$ и $y_2 = (4, 0, 1, 0)^T$.

4.1.1. Укажите всевозможные значения ранга матриц вида:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{31} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

4.1.2. Как может измениться ранг матрицы, если изменить значение одного ее элемента?

4.1.3. Как может измениться ранг матрицы при изменении элементов лишь одной строки? k строк?

4.1.4. Докажите, что ранг квазидиагональной матрицы $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ равен сумме рангов матриц A_1 и A_2 .

4.1.5. Верно ли следующее утверждение: ранг квазигреугольной матрицы $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}$ всегда равен сумме рангов матриц A_1 и A_3 ?

4.1.6. Докажите, что ранг суммы двух матриц не больше суммы их рангов.

4.1.7. Вычислите ранг матриц:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & -7 & 9 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 9 & -11 & 16 \\ 8 & 4 & 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 & -6 \\ 1 & 5 & -2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & -1 & 5 & 7 \\ 3 & -7 & 4 & 1 & -7 \\ 0 & 11 & -5 & 4 & -4 \end{pmatrix}.$$



4.1.8. Найдите ранг матриц в зависимости от значений параметров:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 2 & 1 & \lambda & 3 \\ 5 & -\lambda & -1 & 7 \\ 1 & 6 & 10 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & \lambda^2 & 4 \\ -3 & -6 & -6 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & 4 & 4 \\ 1-\lambda & 1 & 5 & 6 \\ -4 & \lambda & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

4.1.9. Найдите общее решение и фундаментальную систему решений для систем уравнений:

$$\begin{aligned} \text{а) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0, \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0, \\ x_2 - x_3 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0; \end{cases} \\ \text{в) } \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 0, \\ 7x_1 + 10x_2 + x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 0; \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} 3x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 4x_4 - 2x_5 = 0, \\ 6x_1 + 10x_2 + 17x_3 + 7x_4 - 3x_5 = 0, \\ 9x_1 + 3x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 12x_1 - 2x_2 + x_3 + 8x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

4.1.10. Образуют ли строки каждой из матриц

$$A = \begin{pmatrix} 30 & -24 & 43 & -50 & -5 \\ 9 & -15 & 8 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 9 & -20 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 9 & -20 & -3 \\ 1 & -11 & 2 & 13 & 4 \\ 9 & -15 & 8 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

фундаментальную систему решений для системы уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 + 6x_5 = 0, \\ 5x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 + 11x_5 = 0, \\ x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 5x_4 - 4x_5 = 0? \end{cases}$$



Согласно теореме Кронекера–Капелли неоднородная система линейных уравнений

[illegible]

совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы этой системы

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \quad (4.2.2)$$

равен рангу ее расширенной матрицы

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} & \beta_m \end{pmatrix}, \quad (4.2.3)$$

т. е. когда

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} \tilde{A}. \quad (4.2.4)$$

Общее решение $x_{\text{общ}}^{\text{H}}$ неоднородной системы представимо в виде суммы общего решения $x_{\text{общ}}^{\text{O}}$ соответствующей однородной системы и какого-либо частного решения $x_{\text{част}}^{\text{H}}$ неоднородной системы.

Пример 1. Исследуйте совместность и запишите общее решение неоднородной системы уравнений



$$\begin{cases} 8x_1 + 12x_2 = 20, \\ 14x_1 + 21x_2 = 35, \\ 9x_3 + 11x_4 = 0, \\ 16x_3 + 20x_4 = 0, \\ 10x_5 + 12x_6 = 22, \\ 15x_5 + 18x_6 = 33 \end{cases}$$

в виде суммы частного решения этой системы и линейной комбинации базисных решений соответствующей однородной системы.

Решение. Запишем систему уравнений в матричном виде. Используя элементарные преобразования над строками полученной матрицы, приведем ее к ступенчатому виду и проверим выполнимость условия (4.2.4):

$$\begin{pmatrix} 8 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 20 \\ 14 & 21 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 35 \\ 0 & 0 & 9 & 11 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 20 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 12 & | & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15 & 18 & | & 33 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 5 \\ 0 & 0 & 9 & 11 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 6 & | & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 6 & | & 11 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 6 & | & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 6 & | & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix};$$

$\text{rg } A = \text{rg } \tilde{A} = 4$, т. е. по теореме Кронекера–Капелли система уравнений совместна. Запишем ее общее решение. Поскольку $n - \text{rg } A = 6 - 4 = 2$, будем иметь две свободные переменные. x_6 – свободная переменная, $x_5 = \frac{11 - 6x_6}{5}$,

$x_4 = 0$, $x_3 = -x_4 = 0$, x_2 – свободная переменная, $x_1 = \frac{5 - 3x_2}{2}$.



Таким образом, $x_{\text{общ}}^{\text{H}} = \left(\frac{5-3x_2}{2}, x_2, 0, 0, \frac{11-6x_6}{5}, x_6 \right)^T$ и, вспоминая, что $x_{\text{общ}}^{\text{H}} = x_{\text{част}}^{\text{H}} + x_{\text{общ}}^{\text{O}}$, в нашем случае имеем $x_{\text{общ}}^{\text{H}} = \left(\frac{5}{2}, 0, 0, 0, \frac{11}{5}, 0 \right)^T + \left(-\frac{3}{2}x_2, x_2, 0, 0, -\frac{6}{5}x_6, x_6 \right)^T = \left(\frac{5}{2}, 0, 0, 0, \frac{11}{5}, 0 \right)^T + x_2 \left(-\frac{3}{2}, 1, 0, 0, 0, 0 \right)^T + x_6 \left(0, 0, 0, 0, -\frac{6}{5}, 1 \right)^T$. Заметим, что $x_{\text{част}}^{\text{H}} = \left(\frac{5}{2}, 0, 0, 0, \frac{11}{5}, 0 \right)^T$, а векторы $y_1 = \left(-\frac{3}{2}, 1, 0, 0, 0, 0 \right)^T$ и $y_2 = \left(0, 0, 0, 0, -\frac{6}{5}, 1 \right)^T$ образуют фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

Пример 2. Подберите λ так, чтобы система уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2, \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = \lambda \end{cases}$$

имела решение.

Решение. Нужно найти такое значение параметра λ , при котором выполняется условие (4.2.4).

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & -4 & 11 & \lambda \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & -4 & 11 & \lambda \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -7 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -7 & 2-\lambda \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5-\lambda \end{array} \right). \\ & \text{rg } A = 2, \text{ rg } \tilde{A} = \begin{cases} 2, & \text{если } = 5; \\ 3, & \text{если } \neq 5. \end{cases} \end{aligned}$$

По теореме Кронекера–Капелли система уравнений совместна при $\lambda = 5$.



4.2.1. Исследуйте совместность и найдите общее решение систем уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1, \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 2, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 - 7x_5 = 3, \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 3; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 3, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = -1; \end{cases}$$

$$\text{д) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

4.2.2. Исследуйте систему на совместность и найдите общее решение в зависимости от значения параметра λ :

$$\text{а) } \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -1, \\ 7x_1 + 6x_2 + 5x_3 = \lambda, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 2; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 = 2, \\ -2x_1 - 2x_2 + x_3 = -3; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 24x_1 - 38x_2 + 46x_3 = 26, \\ 60x_1 + \lambda x_2 + 115x_3 = 65, \\ 84x_1 - 133x_2 + 161x_3 = 91; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1, \\ \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1; \end{cases}$$



$$\text{д) } \begin{cases} (3-2\lambda)x_1 + (2-\lambda)x_2 + x_3 = \lambda, \\ (2-\lambda)x_1 + (2-\lambda)x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + (2-\lambda)x_3 = 1. \end{cases}$$

4.2.3. Исследуйте совместность и запишите общее решение неоднородной системы уравнений в виде суммы одного решения этой системы и линейной комбинации базисных решений соответствующей однородной системы:

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -4, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 8, \\ 4x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 2x_4 = 20, \\ 4x_1 - x_2 + 6x_3 - 2x_4 = -4; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 0, \\ 10x_1 + 16x_2 + 19x_3 + 5x_4 = -2, \\ 5x_1 + 6x_2 + 13x_3 + 3x_4 = 5; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 2, \\ 2x_1 - 8x_2 - 7x_3 - 7x_4 + 7x_5 = 3, \\ 3x_1 - 6x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 2x_5 = 7; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} x_1 - x_2 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \\ -x_2 + 2x_3 + x_4 = -3, \\ 2x_3 + x_4 + x_5 = 2, \\ x_4 + x_5 = -1. \end{cases}$$

ГЛАВА 5

ЕВКЛИДОВЫ И УНИТАРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 5.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

Говорят, что в действительном линейном пространстве L определено **скалярное произведение**, если каждой паре векторов $x, y \in L$ поставлено в соответствие действительное число, обозначаемое (x, y) , причем это соответствие удовлетворяет следующим аксиомам:

$$1^0. (x, y) = (y, x) \quad \forall x, y \in L;$$

$$2^0. (\lambda x, y) = \lambda(x, y) \quad \forall x, y \in L, \quad \forall \lambda \in R;$$

$$3^0. (x + y, z) = (x, z) + (y, z) \quad \forall x, y, z \in L;$$

$$4^0. (x, x) > 0 \text{ при } x \neq \Theta \text{ и } (x, x) = 0 \text{ при } x = \Theta.$$

Действительное линейное пространство, в котором определено скалярное произведение векторов, называется **евклидовым пространством**.

Для любых двух векторов x и y евклидова пространства справедливо **неравенство Коши–Буняковского**

$$(x, y)^2 \leq (x, x)(y, y). \quad (5.1.1)$$

Знак равенства в (5.1.1) имеет место тогда и только тогда, когда векторы x и y коллинеарны.

Пример. Докажите, что скалярное произведение в арифметическом пространстве R^3 можно ввести по формуле: если $x = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $y = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, то

$$(x, y) = 10\alpha_1\beta_1 + 3\alpha_1\beta_2 + 3\alpha_2\beta_1 + 2\alpha_2\beta_2 + \alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2 + \alpha_3\beta_3.$$



Доказательство. Покажем, что аксиомы скалярного произведения выполняются:

$$1) (x, y) = 10\alpha_1\beta_1 + 3\alpha_1\beta_2 + 3\alpha_2\beta_1 + 2\alpha_2\beta_2 + \alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 10\beta_1\alpha_1 +$$

$$+ 3\beta_1\alpha_2 + 3\beta_2\alpha_1 + 2\beta_2\alpha_2 + \beta_2\alpha_3 + \beta_3\alpha_2 + \beta_3\alpha_3 = (y, x) \quad \forall x, y \in R^3;$$

$$2) (\lambda x, y) = 10(\lambda\alpha_1)\beta_1 + 3(\lambda\alpha_1)\beta_2 + 3(\lambda\alpha_2)\beta_1 + 2(\lambda\alpha_2)\beta_2 + (\lambda\alpha_2)\beta_3 +$$

$$+ (\lambda\alpha_3)\beta_2 + (\lambda\alpha_3)\beta_3 = \lambda(10\alpha_1\beta_1 + 3\alpha_1\beta_2 + 3\alpha_2\beta_1 + 2\alpha_2\beta_2 + \alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2 +$$

$$+ \alpha_3\beta_3) = \lambda(x, y) \quad \forall x, y \in R^3, \quad \forall \lambda \in R.$$

Пусть $z = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$. Тогда

$$3) (x + y, z) = 10(\alpha_1 + \beta_1)\gamma_1 + 3(\alpha_1 + \beta_1)\gamma_2 + 3(\alpha_2 + \beta_2)\gamma_1 + 2(\alpha_2 + \beta_2)\gamma_2 +$$

$$+ (\alpha_2 + \beta_2)\gamma_3 + (\alpha_3 + \beta_3)\gamma_2 + (\alpha_3 + \beta_3)\gamma_3 =$$

$$= (10\alpha_1\gamma_1 + 3\alpha_1\gamma_2 + 3\alpha_2\gamma_1 + 2\alpha_2\gamma_2 + \alpha_2\gamma_3 + \alpha_3\gamma_2 + \alpha_3\gamma_3) +$$

$$+ (10\beta_1\gamma_1 + 3\beta_1\gamma_2 + 3\beta_2\gamma_1 + 2\beta_2\gamma_2 + \beta_2\gamma_3 + \beta_3\gamma_2 + \beta_3\gamma_3) =$$

$$= (x, z) + (y, z) \quad \forall x, y, z \in R^3;$$

$$4) (x, x) = 10\alpha_1^2 + 3\alpha_1\alpha_2 + 3\alpha_2\alpha_1 + 2\alpha_2^2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_2 + \alpha_3^2 =$$

$$= 10\alpha_1^2 + 6\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_2^2 + 2\alpha_2\alpha_3 + \alpha_3^2 = 10\left(\alpha_1^2 + 2\frac{3}{10}\alpha_1\alpha_2\right) + 2\alpha_2^2 + 2\alpha_2\alpha_3 +$$

$$+ \alpha_3^2 = 10\left(\alpha_1 + \frac{3}{10}\alpha_2\right)^2 - 10\frac{9}{100}\alpha_2^2 + 2\alpha_2^2 + 2\alpha_2\alpha_3 + \alpha_3^2 =$$

$$= 10\left(\alpha_1 + \frac{3}{10}\alpha_2\right)^2 + \left(\frac{11}{10}\alpha_2^2 + 2\alpha_2\alpha_3\right) + \alpha_3^2 =$$

$$= 10\left(\alpha_1 + \frac{3}{10}\alpha_2\right)^2 + \frac{11}{10}\left(\alpha_2^2 + 2\frac{10}{11}\alpha_2\alpha_3\right) + \alpha_3^2 =$$



$$\begin{aligned}
 &= 10 \left(\alpha_1 + \frac{3}{10} \alpha_2 \right)^2 + \frac{11}{10} \left(\alpha_2 + \frac{10}{11} \alpha_3 \right)^2 - \frac{11}{10} \frac{100}{121} \alpha_3^2 + \alpha_3^2 = \\
 &= 10 \left(\alpha_1 + \frac{3}{10} \alpha_2 \right)^2 + \frac{11}{10} \left(\alpha_2 + \frac{10}{11} \alpha_3 \right)^2 + \frac{1}{11} \alpha_3^2 \geq 0,
 \end{aligned}$$

причем равенство нулю возможно, если $\alpha_3 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_1 = 0$, т. е. $x = \Theta$.

5.1.1. Докажите, что из аксиом скалярного произведения вытекают следующие свойства:

а) $(x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2)$ для любых векторов евклидова пространства;

б) $(x, \lambda y) = \lambda(x, y)$ для любых векторов x, y евклидова пространства и любого действительного числа λ ;

в) $(x_1 - x_2, y) = (x_1, y) - (x_2, y)$;

г) $(\Theta, x) = 0$;

д) $\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i, \sum_{j=1}^e \beta_j y_j \right) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^e \alpha_i \beta_j (x_i, y_j)$.

5.1.2. Докажите, что в любом действительном линейном пространстве можно определить скалярное произведение.

5.1.3. Введите скалярное произведение в n -мерное арифметическое пространство R^n .

5.1.4. Введите скалярное произведение в пространство $M_n(R)$ многочленов с действительными коэффициентами степени $\leq n$.

5.1.5. Пусть $A = (\alpha_{ij})$, $B = (\beta_{ij})$ – квадратные матрицы порядка n над полем R . Покажите, что формула $(A, B) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \beta_{ij}$ определяет скалярное произведение в линейном пространстве матриц $R_{n,n}$.



5.1.6. Пусть $x = (\alpha_1, \alpha_2)$ и $y = (\beta_1, \beta_2)$ – произвольные векторы арифметического пространства R^2 . Какая из следующих формул определяет скалярное произведение:

- а) $(x, y) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2$;
- б) $(x, y) = a\alpha_1\beta_1 + b\alpha_2\beta_2$, $a \neq 0$, $b \neq 0$;
- в) $(x, y) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + 2\alpha_2\beta_1$;
- г) $(x, y) = 2\alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_2\beta_2$?

5.1.7. Докажите, что скалярное произведение в R^2 можно задать формулой $(x, y) = a\alpha_1\beta_1 + b\alpha_1\beta_2 + b\alpha_2\beta_1 + c\alpha_2\beta_2$ в том и только том случае, если одновременно $a > 0$ и $ac > b^2$.

5.1.8. Пусть a – фиксированный вектор евклидова пространства L , α – фиксированное действительное число. Будет ли множество всех векторов x , для которых $(x, a) = \alpha$, линейным подпространством пространства L ?

5.1.9. Линейное пространство L разлагается в прямую сумму подпространств $L_1, \dots, L_p$. На каждом из подпространств L_i определено скалярное произведение. Докажите, что можно ввести скалярное произведение во всем пространстве L , положив: если x и y – произвольные векторы из L с разложениями по подпространствам $L_1, \dots, L_p$ соответственно $x = x_1 + \dots + x_p$ и $y = y_1 + \dots + y_p$, то $(x, y) = (x_1, y_1)_1 + \dots + (x_p, y_p)_p$, где скалярное произведение $(x_i, y_i)_i$ вычисляется по правилу, заданному в L_i .

5.1.10. В арифметическом пространстве R^4 для векторов $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ вида $\tilde{x} = (\alpha_1, \alpha_2, 0, 0)$, $\tilde{y} = (\beta_1, \beta_2, 0, 0)$ определено скалярное произведение $(\tilde{x}, \tilde{y})_1 = \alpha_1\beta_1 + 2\alpha_2\beta_2$, а для векторов $\tilde{\tilde{x}}$ и $\tilde{\tilde{y}}$ – вида $\tilde{\tilde{x}} = (0, 0, \alpha_3, \alpha_4)$, $\tilde{\tilde{y}} = (0, 0, \beta_3, \beta_4)$ – скалярное произведение $(\tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{y}})_2 = \alpha_3\beta_3 + \alpha_3\beta_4 + \alpha_4\beta_3 + 2\alpha_4\beta_4$. Введите (по способу, описанному в задаче 5.1.9) скалярное произведение во всем пространстве R^4 . Вычислите по полученному правилу скалярное произведение векторов $x = (1, 2, 3, 4)$ и $y = (-3, 1, -3, 2)$.



§ 5.2. ДЛИНЫ И УГЛЫ. ОРТОГОНАЛЬНОСТЬ

ПРОЦЕСС ОРТОГОНАЛИЗАЦИИ ГРАМА–ШМИДА ОРТОНОРМИРОВАННЫЙ БАЗИС

Вещественное или комплексное линейное пространство L называется **нормированным пространством**, если каждому вектору $x \in L$ поставлено в соответствие вещественное число $\|x\|$, называемое **нормой** (или **длиной**) **вектора** x , причем выполнены следующие аксиомы:

$$1^0. \|x\| > 0, \text{ если } x \neq \Theta, \quad \|\Theta\| = 0;$$

$$2^0. \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall x \in L, \quad \forall \lambda \in R \text{ или } C;$$

$$3^0. \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in L.$$

Третья аксиома называется **неравенством треугольника** или **неравенством Минковского**.

Всякое евклидово пространство является нормированным, если в нем норму любого вектора x можно определить равенством

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}. \quad (5.2.1)$$

Углом φ **между** ненулевыми **векторами** x, y евклидова пространства называется угол, косинус которого определяется соотношением

$$\cos \varphi = \frac{(x, y)}{\|x\| \|y\|} = \frac{(x, y)}{\sqrt{(x, x)} \sqrt{(y, y)}}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi. \quad (5.2.2)$$

Если среди векторов x, y есть хоть бы один нулевой, то угол между такими векторами считается неопределенным.

Два ненулевых вектора x и y называются **ортогональными**, если угол φ между ними равен $\frac{\pi}{2}$, т. е. если $(x, y) = 0$.

Система векторов называется **ортогональной**, если в ней все векторы попарно ортогональны.

Во всяком евклидовом пространстве справедлива **теорема Пифагора**: если векторы x и y ортогональны, то $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Вектор x называется **нормированным**, если $\|x\| = 1$.

Система векторов называется **нормированной**, если нормированы все ее векторы.



Нормированная ортогональная система векторов называется **ортонормированной**.

Во всяком n -мерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.

Любую ортонормированную систему векторов можно дополнить до ортонормированного базиса.

От любой линейно независимой системы векторов $x_1, x_2, \dots, x_m$ евклидова пространства можно перейти к ортогональной системе $y_1, y_2, \dots, y_m$, состоящей из ненулевых векторов. Такой переход совершается с помощью **процесса ортогонализации Грама–Шмидта** по следующим формулам:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1; \\ y_2 &= x_2 + \alpha_{21}y_1, \quad \alpha_{21} = -\frac{(x_2, y_1)}{(y_1, y_1)}; \\ y_3 &= x_3 + \alpha_{31}y_1 + \alpha_{32}y_2, \quad \alpha_{31} = -\frac{(x_3, y_1)}{(y_1, y_1)}, \quad \alpha_{32} = -\frac{(x_3, y_2)}{(y_2, y_2)}; \\ &\dots\dots\dots \\ y_m &= x_m + \alpha_{m1}y_1 + \alpha_{m2}y_2 + \dots + \alpha_{m,m-1}y_{m-1}, \\ \alpha_{mi} &= -\frac{(x_m, y_i)}{(y_i, y_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, m-1. \end{aligned} \tag{5.2.3}$$

Если процесс ортогонализации применять к линейно зависимой системе векторов, то на некотором шаге обязательно получится нулевой вектор.

Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ – ортонормированный базис n -мерного евклидова пространства L и для векторов $x, y \in L$ имеют место разложения

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n, \quad y = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_n e_n.$$

В этом случае справедливы равенства:

$$\begin{aligned}(x, y) &= \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \dots + \alpha_n \beta_n; \\(x, x) &= \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2; \\ \alpha_i &= (x, e_i), \quad \beta_i = (y, e_i), \quad i = 1, 2, \dots, n.\end{aligned}$$



Пример 1. Применяя процесс ортогонализации Грама–Шмидта и нормирование векторов, постройте ортонормированный базис подпространства, натянутого на заданную систему векторов

$$x_1 = (1, 1, 0, 0), \quad x_2 = (1, 0, 1, 0), \quad x_3 = (1, 0, 0, 1).$$

Считайте, что в R^4 скалярное произведение векторов $x = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ и $y = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$ задано формулой

$$(x, y) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 + \alpha_4\beta_4. \quad (5.2.4)$$

Решение. Прежде всего найдем размерность линейной оболочки $L(x_1, x_2, x_3)$, которая будет совпадать с рангом системы векторов x_1, x_2, x_3 :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

т. е. $\dim L(x_1, x_2, x_3) = 3$.

По формулам (5.2.3) получим ортогональную систему векторов y_1, y_2, y_3 :

$$y_1 = x_1 = (1, 1, 0, 0);$$

$$\alpha_{21} = -\frac{(x_2, y_1)}{(y_1, y_1)} = -\frac{1+0+0+0}{1+1+0+0} = -\frac{1}{2} \mapsto y_2 = x_2 + \alpha_{21}y_1 =$$

$$= (1, 0, 1, 0) - \frac{1}{2}(1, 1, 0, 0) = \left(1 - \frac{1}{2}, 0 - \frac{1}{2}, 1 - 0, 0 - 0\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0\right) \mapsto y_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0\right);$$

$$\alpha_{31} = -\frac{(x_3, y_1)}{(y_1, y_1)} = -\frac{1+0+0+0}{2} = -\frac{1}{2},$$

$$\alpha_{32} = -\frac{(x_3, y_2)}{(y_2, y_2)} = -\frac{\frac{1}{2} + 0 + 0 + 0}{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1 + 0} = -\frac{1}{3} \mapsto$$



$$\begin{aligned}
y_3 &= x_3 + \alpha_{31}y_1 + \alpha_{32}y_2 = (1, 0, 0, 1) - \frac{1}{2}(1, 1, 0, 0) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0\right) = \\
&= \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6}, 0 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}, 0 - 0 - \frac{1}{3}, 1 - 0 - 0\right) = \\
&= \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right) \mapsto y_3 = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right).
\end{aligned}$$

Нормируя векторы y_1, y_2, y_3 , придем к ортонормированной системе векторов:

$$\begin{aligned}
z_1 &= \frac{1}{\|y_1\|} y_1 = \frac{1}{\sqrt{(y_1, y_1)}} y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0, 0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right); \\
z_2 &= \frac{1}{\|y_2\|} y_2 = \frac{1}{\sqrt{(y_2, y_2)}} y_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, 0\right); \\
z_3 &= \frac{1}{\|y_3\|} y_3 = \frac{1}{\sqrt{(y_3, y_3)}} y_3 = \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{3}}}\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right) = \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).
\end{aligned}$$

Система векторов z_1, z_2, z_3 является искомым ортонормированным базисом подпространства $L(x_1, x_2, x_3)$.

Пример 2. Дополните ортонормированную в смысле скалярного произведения (5.2.4) систему векторов $x_1 = \frac{1}{6}(1, 1, 1, 1)$, $x_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}(-1, 3, -1, -1)$ до ортонормированного базиса пространства R^4 .

Решение. Поскольку $\dim R^4 = 4$, систему векторов x_1, x_2 необходимо дополнить до ортонормированного базиса еще двумя векторами x_3, x_4 . Решение задачи проведем в два этапа. Сначала систему векторов $y_1 = (1, 1, 1, 1)$, $y_2 = (-1, 3, -1, -1)$ дополним до ортогонального базиса y_1, y_2, y_3, y_4 , а затем векторы y_3 и y_4 пронормируем.



Пусть $y_3 = (\beta_1^{(3)}, \beta_2^{(3)}, \beta_3^{(3)}, \beta_4^{(3)})$. В силу того что $(y_1, y_3) = 0$ и $(y_2, y_3) = 0$, записываем в матричном виде однородную систему линейных уравнений, решая которую получаем:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$\beta_3^{(3)}, \beta_4^{(3)}$ – свободные переменные;

$$4\beta_2^{(3)} = 0 \mapsto \beta_2^{(3)} = 0;$$

$$\beta_1^{(3)} = -\beta_2^{(3)} - \beta_3^{(3)} - \beta_4^{(3)} = -\beta_3^{(3)} - \beta_4^{(3)}.$$

Выбрав $\beta_3^{(3)} = 1, \beta_4^{(3)} = 0$, фиксируем $y_3 : y_3 = (-1, 0, 1, 0)$.

Аналогично найдем $y_4 = (\beta_1^{(4)}, \beta_2^{(4)}, \beta_3^{(4)}, \beta_4^{(4)})$. Единственное отличие состоит в том, что теперь решать придется однородную систему не из двух, а из трех уравнений: $(y_1, y_4) = 0, (y_2, y_4) = 0$ и $(y_3, y_4) = 0$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\beta_4^{(4)}$ – свободная переменная;

$$\beta_3^{(4)} = -\frac{1}{2}\beta_4^{(4)};$$

$$\beta_2^{(4)} = -2\beta_3^{(4)} - \beta_4^{(4)} = \beta_4^{(4)} - \beta_4^{(4)} = 0;$$

$$\beta_1^{(4)} = -\beta_2^{(4)} - \beta_3^{(4)} - \beta_4^{(4)} = \frac{1}{2}\beta_4^{(4)} - \beta_4^{(4)} = -\frac{1}{2}\beta_4^{(4)}.$$

Положим $\beta_4^{(4)} = 2$. Тогда $y_4 = (-1, 0, -1, 2)$.

$$x_3 = \frac{1}{\|y_3\|} y_3 = \frac{1}{\sqrt{(y_3, y_3)}} y_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} (-1, 0, 1, 0),$$

$$x_4 = \frac{1}{\|y_4\|} y_4 = \frac{1}{\sqrt{(y_4, y_4)}} y_4 = \frac{1}{\sqrt{6}} (-1, 0, -1, 2).$$

Построен ортонормированный базис x_1, x_2, x_3, x_4 пространства R^4 .



Подчеркнем, что данная задача имела не единственное решение. Выбирая другие значения свободных переменных (кроме $\beta_3^{(3)} = 0$, $\beta_4^{(3)} = 0$, $\beta_4^{(4)} = 0$), мы получили бы иные векторы x_3 и x_4 .

5.2.1. Как изменится угол между ненулевыми векторами x и y , если:

- а) умножить вектор x на положительное число;
- б) умножить вектор x на отрицательное число;
- в) умножить оба вектора на отрицательные числа?

В последующих задачах по аналогии с трехмерным евклидовым пространством упорядоченная тройка векторов x , y и $x - y$ произвольного евклидова пространства рассматривается как треугольник, о котором говорят, что он «натянут на векторы x и y ». Точно так же считается, что параллелограмм, натянутый на векторы x и y , имеет в качестве диагоналей векторы $x + y$ и $x - y$.

5.2.2. В треугольнике, натянутом на векторы $x = (2, -1, 3, -2)$ и $y = (3, 1, 5, 1)$ пространства R^4 , найдите длины сторон. Определите углы между сторонами треугольника – векторами x , y и $x - y$. Какие из этих углов естественно считать внутренними углами треугольника, какие – внешними? Скалярное произведение определено формулой (5.2.4).

5.2.3. Сформулируйте и докажите теорему косинусов для треугольника, натянутого на векторы x и y произвольного евклидова пространства.

5.2.4. Докажите, что в произвольном треугольнике евклидова пространства:

- а) длина каждой стороны не превосходит суммы длин двух других сторон;
- б) длина каждой стороны не меньше, чем абсолютная величина разности длин двух других сторон.

5.2.5. Докажите, что в параллелограмме, натянутом на векторы x и y , сумма квадратов длин диагоналей равна сумме квадратов длин сторон.

5.2.6. Докажите, что в евклидовом пространстве L :

- а) нулевой вектор – единственный, который обладает тем свойством, что он ортогонален ко всем векторам пространства;
- б) если равенство $(a, x) = (b, x)$ справедливо для любого вектора $x \in L$, то $a = b$.



5.2.7. Докажите, что если $x, y, \dots, z$ – ортогональная система векторов, то для любых чисел $\lambda, \mu, \dots, \nu$ система векторов $\lambda x, \mu y, \dots, \nu z$ также будет ортогональна.

5.2.8. Докажите, что если вектор x ортогонален к каждому из векторов $y_1, y_2, \dots, y_m$, то он ортогонален и к любой линейной комбинации этих векторов.

5.2.9. Докажите, что ортогональная система ненулевых векторов линейно независима.

5.2.10. Применив процесс ортогонализации, найдите ортонормированный базис в пространстве $M_2(R)$ многочленов степени не более двух, взяв за исходный базис многочлен $1, t, t^2$, если скалярное произведение многочленов задано формулой:

$$\text{а) } (f, g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt;$$

$$\text{б) } (f, g) = \alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2, \text{ если } f(t) = \alpha_0 + \alpha_1t + \alpha_2t^2, \\ g(t) = \beta_0 + \beta_1t + \beta_2t^2.$$

5.2.11. В пространстве $M_n(R)$ многочленов степени не более n задайте скалярное произведение так, чтобы базис $1, t, \frac{t^2}{2!}, \dots, \frac{t^n}{n!}$ стал ортонормированным.

5.2.12. Пусть R^4 – арифметическое пространство, в котором скалярное произведение определено формулой

$$(x, y) = \alpha_1\beta_1 - \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 + 2\alpha_2\beta_2 - \alpha_2\beta_3 - \\ - \alpha_3\beta_2 + 2\alpha_3\beta_3 - \alpha_3\beta_4 - \alpha_4\beta_3 + 2\alpha_4\beta_4,$$

где $x = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, $y = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$ – произвольные векторы из R^4 .

Применив процесс ортогонализации, найдите ортонормированный базис пространства R^4 , взяв за исходный базис:

$$\text{а) } e_1 = (1, 0, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0, 0), e_3 = (0, 0, 1, 0), e_4 = (0, 0, 0, 1);$$



б) $e_1 = (1, -1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, -1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1, -1)$, $e_4 = (1, 0, 0, 1)$.

В дальнейшем предполагается, что в арифметическом пространстве скалярное произведение векторов $x = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ и $y = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ задано формулой

$$(x, y) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \dots + \alpha_n\beta_n. \quad (5.2.5)$$

5.2.13. Убедитесь, что векторы x_1, x_2 ортогональны, и дополните систему x_1, x_2 до ортогонального базиса, если:

а) $x_1 = (1, -2, 2, -3)$, $x_2 = (2, -3, 2, 4)$;

б) $x_1 = (1, 1, 1, 2)$, $x_2 = (1, 2, 3, -3)$;

в) $x_1 = (1, -2, 1, 3)$, $x_2 = (2, 1, -3, 1)$;

г) $x_1 = (1, -1, 1, -3)$, $x_2 = (-4, 1, 5, 0)$.

5.2.14. Дополните систему x_1, x_2 до ортонормированного базиса, если:

а) $x_1 = \left(-\frac{11}{15}, -\frac{2}{15}, \frac{2}{3}\right)$, $x_2 = \left(-\frac{2}{15}, -\frac{14}{15}, -\frac{1}{3}\right)$;

б) $x_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $x_2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$;

в) $x_1 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $x_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

5.2.15. Применяя процесс ортогонализации, постройте ортогональный базис линейной оболочки $x_1, x_2, \dots, x_k$, если:

а) $x_1 = (2, 3, -4, -6)$, $x_2 = (1, 8, -2, -16)$, $x_3 = (12, 5, -14, 5)$, $x_4 = (3, 11, 4, -7)$;

б) $x_1 = (1, 1, -1, -2)$, $x_2 = (5, 8, -2, -3)$, $x_3 = (3, 9, 3, 8)$;

в) $x_1 = (2, 1, 3, -1)$, $x_2 = (7, 4, 3, -3)$, $x_3 = (1, 1, -6, 0)$, $x_4 = (5, 7, 7, 8)$;

г) $x_1 = (1, 1, -1, -2)$, $x_2 = (-2, 1, 5, 11)$, $x_3 = (0, 3, 3, 7)$, $x_4 = (3, -3, -3, -9)$.

§ 5.3. ОРТОГОНАЛЬНОЕ ДОПОЛНЕНИЕ ОРТОГОНАЛЬНЫЕ СУММЫ ПОДПРОСТРАНСТВ

Два подпространства называются **ортогональными**, если каждый вектор одного подпространства ортогонален к каждому вектору другого подпространства. Ортогональность подпространств L_1 и L_2 обозначается $L_1 \perp L_2$.



Для того чтобы вектор x был ортогонален к подпространству L_1 , необходимо и достаточно, чтобы он был ортогонален ко всем векторам какого-либо базиса подпространства L_1 .

Для того чтобы два подпространства были ортогональными, необходимо и достаточно, чтобы каждый вектор какого-либо базиса одного подпространства был ортогонален ко всем векторам какого-либо базиса другого подпространства.

Сумма S подпространств $L_1, L_2, \dots, L_m$ называется **ортогональной** и обозначается $S = L_1 \oplus L_2 \oplus \dots \oplus L_m$, если подпространства попарно ортогональны.

Ортогональная сумма ненулевых подпространств всегда является прямой суммой.

Совокупность всех векторов, ортогональных к линейному подпространству L_1 евклидова пространства L , называется **ортогональным дополнением** подпространства L_1 и обозначается $L_1^\perp$.

Евклидово пространство L есть ортогональная сумма любого своего линейного подпространства L_1 и его ортогонального дополнения $L_1^\perp$, т. е.

$$L = L_1 \oplus L_1^\perp. \quad (5.3.1)$$

Любой вектор x из евклидова пространства L всегда можно представить, причем единственным образом, в виде

$$x = g + h, \quad (5.3.2)$$

где g принадлежит некоторому подпространству L_1 , h ортогонален к L_1 . Вектор g называется **ортогональной проекцией вектора x на подпространство L_1** , а h — **перпендикуляром**, опущенным из x на L_1 .

Пример 1. Докажите, что $(L_1 + L_2)^\perp = L_1^\perp \cap L_2^\perp$.

Доказательство. Пусть $x \in (L_1 + L_2)^\perp$. Тогда $\forall y \in (L_1 + L_2) (x, y) = 0$. В силу того что $y \in (L_1 + L_2)$, $y = y_1 + y_2$, где $y_1 \in L_1$, а $y_2 \in L_2$. Следовательно, $(x, y) = (x, y_1) + (x, y_2) = 0$. Если в последнем равенстве выбрать $y_2 = \Theta$, то из условия $(x, y_1) = 0$ заключим, что $x \in L_1^\perp$. Полагая $y_1 = \Theta$,



получаем, что $(x, y_2) = 0$ или $x \in L_2^\perp$. Другими словами, из условия $x \in (L_1 + L_2)^\perp$ вытекает, что $x \in (L_1^\perp \cap L_2^\perp)$. Пусть теперь $x \in (L_1^\perp \cap L_2^\perp)$. Тогда $(x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2) = 0$, так как $x \in L_1^\perp$ и $x \in L_2^\perp$. Значит, $x \in (L_1 + L_2)^\perp$. Таким образом, мы получили, что если $x \in (L_1 + L_2)^\perp$, то $x \in (L_1^\perp \cap L_2^\perp)$. И, наоборот, если $x \in (L_1^\perp \cap L_2^\perp)$, то $x \in (L_1 + L_2)^\perp$. Сказанное равносильно равенству $(L_1 + L_2)^\perp = L_1^\perp \cap L_2^\perp$.

Пример 2. Линейное подпространство L_1 задано системой уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Найдите базис ортогонального дополнения $L_1^\perp$.

Решение. Найдем базис L_1 . Для этого решим однородную систему уравнений

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 9 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 9 & -1 \end{pmatrix} \sim \\ & \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 9 & 1 \\ 0 & -2 & 18 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -9 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

$\dim L_1 = n - r = 4 - 2 = 2$; x_3, x_4 — свободные переменные;

$$x_2 = 9x_3 + x_4;$$

$$-x_1 = x_2 - 3x_3 - x_4 = (9x_3 + x_4) - 3x_3 - x_4 = 6x_3 \mapsto x_1 = -6x_3.$$

Таким образом, общее решение имеет вид $x_{\text{общ}}^0 = (-6x_3, 9x_3 + x_4, x_3, x_4)^T$. Выбирая значения свободных переменных в соответствии с таблицей



i	x_3^i	x_4^i
1	1	0
2	0	1

получаем базисные векторы подпространства L_1 :

$$e_1 = (-6, 9, 1, 0)^T, \quad e_2 = (0, 1, 0, 1)^T.$$

Поскольку $R^4 = L_1 \oplus L_1^\perp$, а ортогональная сумма есть прямая сумма,

$$\dim L_1^\perp = \dim R^4 - \dim L_1 = 4 - 2 = 2.$$

$$L_1^\perp = \{y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \mid (y, e_i) = 0, \quad i = 1, 2\}.$$

Таким образом, $L_1^\perp$ определяется системой уравнений

$$\begin{cases} -6y_1 + 9y_2 + y_3 = 0, \\ y_2 + y_4 = 0. \end{cases}$$

Найдя фундаментальную систему решений этой однородной системы уравнений, получим базис $L_1^\perp$.

$$\begin{pmatrix} -6 & 9 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 6 & -9 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть y_3, y_4 – свободные переменные; $y_2 = -y_4$; $y_1 = \frac{1}{6}(9y_2 + y_3) = \frac{1}{6}(y_3 - 9y_4)$.

Общее решение имеет вид $\left(\frac{1}{6}y_3 - \frac{3}{2}y_4, -y_4, y_3, y_4\right)^T$.

Выбирая значения свободных переменных в соответствии с таблицей

i	y_3^i	y_4^i
1	6	0
2	0	2



получаем базис ортогонального дополнения $L_1^\perp$:

$$f_1 = (1, 0, 6, 0)^T, \quad f_2 = (-3, -2, 0, 2)^T.$$

Пример 3. Найдите ортогональную проекцию g и перпендикуляр h , опущенный из вектора $x = (7, -4, -1, 2)$ на подпространство L_1 , порожденное векторами $y_1 = (0, -1, 1, 0)$ и $y_2 = (-5, 7, 0, 1)$.

Решение. Система векторов y_1, y_2 образует базис подпространства L_1 . Так как $g \in L_1$, $\exists \alpha_1, \alpha_2$ такие, что $g = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$. Кроме того, справедливо (причем единственное) представление $x = g + h$, в котором $h \in L_1^\perp$. Последнее означает, что $(h, y_i) = 0$, $i = 1, 2$. Отсюда

$$\begin{aligned} (x - g, y_i) &= (x - \alpha_1 y_1 - \alpha_2 y_2, y_i) = \\ &= (x, y_i) - \alpha_1 (y_1, y_i) - \alpha_2 (y_2, y_i) = 0, \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

т. е. получили неоднородную систему уравнений относительно α_1 и α_2 , которая в матричном виде выглядит так:

$$\begin{pmatrix} (y_1, y_1) & (y_1, y_2) \\ (y_1, y_2) & (y_2, y_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x, y_1) \\ (x, y_2) \end{pmatrix}. \quad (5.3.3)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} (y_1, y_1) &= 0 + 1 + 1 + 0 = 2; \\ (y_1, y_2) &= 0 - 7 + 0 + 0 = -7; \\ (x, y_1) &= 0 + 4 - 1 + 0 = 3; \\ (y_2, y_2) &= 25 + 49 + 0 + 1 = 75; \\ (x, y_2) &= -35 - 28 + 0 + 2 = -61, \end{aligned}$$

система (5.3.3) эквивалентна следующей:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -7 & 3 \\ -7 & 75 & -61 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -7 & 3 \\ 0 & 101 & -101 \end{array} \right).$$



Отсюда

$$\alpha_2 = -\frac{101}{101} = -1;$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(3 + 7\alpha_2) = \frac{3-7}{2} = -2.$$

Следовательно,

$$g = -2y_1 - y_2 = -2(0, -1, 1, 0) - (-5, 7, 0, 1) =$$

$$= (0 + 5, 2 - 7, -2 - 0, 0 - 1) = (5, -5, -2, -1);$$

$$h = x - g = (7, -4, -1, 2) - (5, -5, -2, -1) = (2, 1, 1, 3).$$

5.3.1. Докажите, что ортогональное дополнение к линейному подпространству евклидова пространства L обладает свойствами:

- а) $(L_1^\perp)^\perp = L_1$; б) если $L_1 \subset L_2$, то $L_2^\perp \subset L_1^\perp$;
- в) $(L_1 \cap L_2)^\perp = L_1^\perp + L_2^\perp$; г) $L^\perp = 0$, $0^\perp = L$.

Здесь 0 – нулевое подпространство, содержащее лишь нулевой вектор.

5.3.2. Найдите базис ортогонального дополнения $L^\perp$ линейной оболочки L следующей системы векторов пространства R^4 :

$$x_1 = (1, 3, 0, 2), \quad x_2 = (3, 7, -1, 2), \quad x_3 = (2, 4, -1, 0).$$

5.3.3. Найдите ортогональный базис ортогонального дополнения $L^\perp$, если $L = L(x_1, x_2, x_3)$ и $x_1 = (1, 0, 2, 1)$, $x_2 = (2, 1, 2, 3)$, $x_3 = (0, 1, -2, 1)$.

5.3.4. В пространстве $M_n(R)$ многочленов степени $\leq n$ с действительными коэффициентами скалярное произведение многочленов $f(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_n t^n$ и $g(t) = \beta_0 + \beta_1 t + \dots + \beta_n t^n$ определяется формулой

$$(f, g) = \alpha_0 \beta_0 + \alpha_1 \beta_1 + \dots + \alpha_n \beta_n. \quad (5.3.4)$$

Найдите ортогональное дополнение подпространства всех многочленов, удовлетворяющих условию $f(1) = 0$.



5.3.5. Найдите ортогональную проекцию и перпендикуляр, опущенный из вектора x на подпространство L :

а) $x = (14, -3, -6, -7)$, L натянуто на векторы $y_1 = (-3, 0, 7, 6)$, $y_2 = (1, 4, 3, 2)$, $y_3 = (2, 2, -2, -2)$;

б) $x = (2, -5, 3, 4)$, L натянуто на векторы $y_1 = (1, 3, 3, 5)$, $y_2 = (1, 3, -5, -3)$, $y_3 = (1, -5, 3, -3)$;

в) $x = (-3, 0, -5, 9)$, L задано системой уравнений

$$\begin{cases} 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 - 2\alpha_4 = 0, \\ 5\alpha_1 + 4\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4 = 0, \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 10\alpha_4 = 0; \end{cases}$$

г) $x = (5, 2, -2, 2)$, L натянуто на векторы $y_1 = (2, 1, 1, -1)$, $y_2 = (1, 1, 3, 0)$, $y_3 = (1, 2, 8, 1)$.

§ 5.4. УНИТАРНОЕ ПРОСТРАНСТВО

Говорят, что в комплексном линейном пространстве L определено **скалярное произведение**, если каждой паре векторов $x, y \in L$ поставлено в соответствие комплексное число, обозначаемое (x, y) , причем это соответствие удовлетворяет следующим аксиомам:

$$1^0. (x, y) = \overline{(y, x)} \quad \forall x, y \in L;$$

$$2^0. (\lambda x, y) = \lambda(x, y) \quad \forall x, y \in L, \quad \forall \lambda \in C;$$

$$3^0. (x + y, z) = (x, z) + (y, z) \quad \forall x, y, z \in L;$$

$$4^0. (x, x) > 0 \text{ при } x \neq \Theta \text{ и } (x, x) = 0 \text{ при } x = \Theta.$$

Черта в первой аксиоме означает комплексное сопряжение.

Комплексное линейное пространство, в котором определено скалярное произведение векторов, называется **унитарным пространством**.

Для любых двух векторов x и y унитарного пространства справедливо **неравенство Коши–Буняковского**:

$$|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y). \quad (5.4.1)$$



В унитарном пространстве, как и в евклидовом, длину вектора определяют формулой

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}. \quad (5.4.2)$$

Понятие угла между векторами в унитарном пространстве не вводят. Рассматривают лишь случай ортогональности векторов. При этом, как и в евклидовом пространстве, ортогональными считают векторы x и y , удовлетворяющие условию $(x, y) = 0$.

Процесс ортогонализации системы векторов, понятие ортогонального и ортонормированного базиса, ортогонального дополнения, ортогональной проекции вектора на подпространство и вообще вся теория евклидова пространства распространяются на унитарное пространство без изменения определений и общих схем рассуждений. Тем не менее каждый раз следует быть внимательным при применении скалярного произведения, поскольку в унитарном пространстве скалярное произведение существенно отличается от скалярного произведения в евклидовом пространстве.

Если $e_1, e_2, \dots, e_n$ – ортонормированный базис n -мерного унитарного пространства L и для векторов $x, y \in L$ имеют место разложения

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n, \quad y = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_n e_n,$$

то справедливы равенства:

$$(x, y) = \alpha_1 \overline{\beta_1} + \alpha_2 \overline{\beta_2} + \dots + \alpha_n \overline{\beta_n};$$

$$(x, x) = |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + \dots + |\alpha_n|^2;$$

$$\alpha_i = (x, e_i), \quad \beta_i = (y, e_i), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Пример 1. Ортонормируйте систему векторов

$$x_1 = (1, i, i), \quad x_2 = (i, i, i), \quad x_3 = (i, 0, i),$$

считая, что векторы заданы координатами в ортонормированном базисе.

Решение. Сначала проведем процесс ортогонализации данной системы векторов. Положим $y_1 = x_1 = (1, i, i)$, $y_2 = x_2 + \alpha_{21} y_1$ и найдем α_{21} из условия

$$(y_2, y_1) = (x_2 + \alpha_{21} y_1, y_1) = \alpha_{21} (y_1, y_1) + (x_2, y_1) = 0.$$



Получим

$$\alpha_{21} = -\frac{(x_2, y_1)}{(y_1, y_1)} = -\frac{i \cdot \bar{1} + i \cdot \bar{i} + i \cdot \bar{i}}{|1|^2 + |i|^2 + |i|^2} = \frac{-2-i}{3}.$$

Поэтому

$$y_2 = (i, i, i) + \frac{-2-i}{3}(1, i, i) = \left(\frac{-2+2i}{3}, \frac{1+i}{3}, \frac{1+i}{3} \right).$$

Теперь положим $y_3 = x_3 + \alpha_{31}y_1 + \alpha_{32}y_2$ и α_{31}, α_{32} будем искать из условий:

$$(y_3, y_1) = \alpha_{31}(y_1, y_1) + (x_3, y_1) = 0;$$

$$(y_3, y_2) = \alpha_{32}(y_2, y_2) + (x_3, y_2) = 0.$$

Отсюда получаем:

$$\alpha_{31} = -\frac{(x_3, y_1)}{(y_1, y_1)} = -\frac{i \cdot \bar{1} + 0\bar{i} + i \cdot \bar{i}}{3} = \frac{-1-i}{3};$$

$$\alpha_{32} = -\frac{(x_3, y_2)}{(y_2, y_2)} = -\frac{i \frac{-2-2i}{3} + i \frac{1-i}{3}}{\left| \frac{-2+2i}{3} \right|^2 + \left| \frac{1+i}{3} \right|^2 + \left| \frac{1+i}{3} \right|^2} = \frac{-3+i}{4}.$$

Поэтому

$$y_3 = (i, 0, i) + \frac{-1-i}{3}(1, i, i) + \frac{-3+i}{4}\left(\frac{-2+2i}{3}, \frac{1+i}{3}, \frac{1+i}{3} \right) = \left(0, -\frac{i}{2}, \frac{i}{2} \right).$$

Система векторов y_1, y_2, y_3 ортогональная. Нормируем каждый вектор этой системы:

$$z_1 = \frac{1}{\|y_1\|} y_1 = \frac{y_1}{\sqrt{(y_1, y_1)}} = \frac{y_1}{\sqrt{|1|^2 + |i|^2 + |i|^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} y_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, i, i);$$

$$\begin{aligned} z_2 &= \frac{1}{\|y_2\|} y_2 = \frac{y_2}{\sqrt{(y_2, y_2)}} = \frac{y_2}{\sqrt{\left| \frac{-2+2i}{3} \right|^2 + \left| \frac{1+i}{3} \right|^2 + \left| \frac{1+i}{3} \right|^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} y_2 = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}}(-2+2i, 1+i, 1+i); \end{aligned}$$



$$z_3 = \frac{1}{\|y_3\|} y_3 = \frac{y_3}{\sqrt{(y_3, y_3)}} = \frac{y_3}{\sqrt{\left|\frac{-i}{2}\right|^2 + \left|\frac{i}{2}\right|^2}} = \sqrt{2} \cdot y_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -i, i).$$

Пример 2. Докажите, что векторы x и y унитарного пространства ортогональны тогда и только тогда, когда $\|\alpha x + \beta y\|^2 = \|\alpha x\|^2 + \|\beta y\|^2$ для любых чисел α и β .

Доказательство. Необходимость. Пусть $(x, y) = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \|\alpha x + \beta y\|^2 &= (\alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y) = (\alpha x, \alpha x) + (\alpha x, \beta y) + (\beta y, \alpha x) + (\beta y, \beta y) = \\ &= \|\alpha x\|^2 + \alpha \bar{\beta}(x, y) + \beta \bar{\alpha}(y, x) + \|\beta y\|^2 = \\ &= \|\alpha x\|^2 + \alpha \bar{\beta} \cdot 0 + \beta \bar{\alpha} \cdot 0 + \|\beta y\|^2 = \|\alpha x\|^2 + \|\beta y\|^2. \end{aligned}$$

Достаточность. Пусть $\|\alpha x + \beta y\|^2 = \|\alpha x\|^2 + \|\beta y\|^2$. Тогда из записанного выше следует, что $\alpha \bar{\beta}(x, y) + \beta \bar{\alpha}(y, x) = \alpha \bar{\beta}(x, y) + \overline{\alpha \bar{\beta}(x, y)} = 2 \operatorname{Re}[\alpha \bar{\beta}(x, y)] = 0$ или $\operatorname{Re}[\alpha \bar{\beta}(x, y)] = 0 \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Положим в последнем равенстве $\alpha = \beta = 1$. Тогда $\operatorname{Re}[\alpha \bar{\beta}(x, y)] = \operatorname{Re}(x, y) = 0$. Пусть теперь $\alpha = 1, \beta = i$. Тогда $\operatorname{Re}[\alpha \bar{\beta}(x, y)] = \operatorname{Re}[-i(x, y)] = \operatorname{Im}(x, y) = 0$. Следовательно, $(x, y) = 0$.

5.4.1. Докажите, что из аксиом скалярного произведения в унитарном пространстве вытекают следующие свойства:

а) $(x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2)$ для любых векторов унитарного пространства;

б) $(x, \lambda y) = \bar{\lambda}(x, y)$ для любых векторов x, y унитарного пространства и любого комплексного числа λ ;

в) $(\Theta, x) = (x, \Theta) = 0$;

$$\text{г) } \left(\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i, \sum_{j=1}^l \beta_j y_j \right) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \alpha_i \bar{\beta}_j (x_i, y_j).$$



5.4.2. Докажите, что в любом комплексном линейном пространстве можно определить скалярное произведение.

5.4.3. Введите скалярное произведение в n -мерном комплексном арифметическом пространстве C^n .

5.4.4. Введите скалярное произведение в пространстве $M_n(C)$ многочленов с комплексными коэффициентами степени $\leq n$.

5.4.5. Докажите, что в произвольном унитарном пространстве остается справедливой теорема Пифагора: если векторы x и y ортогональны, то $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$. Покажите вместе с тем, что обратное к теореме Пифагора утверждение неверно.

5.4.6. Докажите, что утверждение задачи 5.2.5 $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ справедливо и в унитарном пространстве.

5.4.7. Докажите равенство

$$4(x, y) = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2.$$

5.4.8. Пусть $a = (1, 0, i)$, $b = (1, 1 - i, 1 + i)$, $c = (2 - i, 1, 3 + 4i)$. Найдите длины этих векторов и скалярные произведения (a, b) , (b, c) и (c, b) , считая, что векторы a, b, c заданы координатами в ортонормированном базисе.

5.4.9. Убедитесь, что система векторов $x_1 = (4 + 3i, 4 + 3i, 2)$, $x_2 = (-4 + 3i, 4 - 3i, 0)$ ортогональная, и дополните ее до ортогонального базиса трехмерного унитарного пространства, считая, что векторы x_1, x_2 заданы координатами в ортонормированном базисе.

ГЛАВА 6

КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

§ 6.1. БИЛИНЕЙНЫЕ ФОРМЫ ПРИВЕДЕНИЕ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ МЕТОДОМ ЛАГРАНЖА

Билинейной формой в действительном линейном пространстве L называется числовая функция $A(x; y)$, удовлетворяющая следующим двум условиям:

$$1^0. A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2; y) = \lambda_1 A(x_1; y) + \lambda_2 A(x_2; y) \quad \forall x_1, x_2, y \in L, \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in R;$$

$$2^0. A(x; \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2) = \mu_1 A(x; y_1) + \mu_2 A(x; y_2) \quad \forall x, y_1, y_2 \in L, \quad \forall \mu_1, \mu_2 \in R.$$

Билинейная форма $A(x; y)$ называется **симметричной**, если для любых векторов $x, y \in L$ выполняется равенство

$$A(x; y) = A(y; x). \quad (6.1.1)$$

Скалярное произведение (x, y) в евклидовом пространстве является примером симметричной билинейной формы.

При заданном базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ всякая билинейная форма в n -мерном действительном линейном пространстве L может быть записана в виде

$$A(x; y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \alpha_i \beta_j, \quad (6.1.2)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ — координаты вектора x , а $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ — координаты вектора y в данном базисе. Числа a_{ij} зависят от выбора базиса и вычисляются по формулам

$$a_{ij} = A(e_i; e_j), \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (6.1.3)$$



Билинейная форма является симметричной тогда и только тогда, когда ее матрица симметричная.

$$B = P^T A P, \quad (6.1.4)$$

Для того чтобы получить матрицу P , нужно разложить векторы $f_1, f_2, \dots, f_n$ по базису $e_1, e_2, \dots, e_n$:

[illegible]

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}.$$

При заданном базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ всякая квадратичная форма в действительном линейном пространстве L выражается формулой

$$A(x; x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \alpha_i \alpha_j, \quad (6.1.6)$$



где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – координаты вектора x в данном базисе и $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Пусть в n -мерном действительном линейном пространстве L задана произвольная квадратичная форма $A(x; x)$. Тогда в L будет существовать базис $f_1, f_2, \dots, f_n$, в котором эта квадратичная форма имеет вид

$$A(x; x) = \lambda_1 \xi_1^2 + \lambda_2 \xi_2^2 + \dots + \lambda_n \xi_n^2, \quad (6.1.7)$$

где $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ – координаты вектора x в базисе $f_1, f_2, \dots, f_n$. При этом квадратичную форму (6.1.7) называют **каноническим видом квадратичной формы** $A(x; x)$. Матрицей формы (6.1.7) является диагональная матрица

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Базис пространства L , в котором квадратичная форма имеет канонический вид, называют **каноническим базисом** этой **квадратичной формы**.

Пример 1. Покажите, что отображение $A : R_{n,n} \times R_{n,n} \rightarrow R$, $A(X; Y) = \text{Sp}(XY)$ является симметричной билинейной формой в пространстве $R_{n,n}$. Найдите матрицу билинейной формы $A(X; Y)$ для случая $n = 2$ в базисе

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Покажем, что отображение $A(X; Y)$ является билинейной формой. Сумма диагональных элементов квадратной матрицы X называется **следом матрицы** X и обозначается $\text{Sp } X$. Известно, что:

$$\begin{aligned} \text{а) } \text{Sp}(X + Y) &= \text{Sp } X + \text{Sp } Y; \\ \text{б) } \text{Sp}(\lambda X) &= \lambda \text{Sp } X; \\ \text{в) } \text{Sp}(XY) &= \text{Sp}(YX). \end{aligned} \quad (6.1.8)$$



Поэтому

$$\begin{aligned} A(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2; Y) &= \text{Sp}(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2)Y = \text{Sp}(\lambda_1 X_1 Y + \lambda_2 X_2 Y) = \\ &= \text{Sp}(\lambda_1 X_1 Y) + \text{Sp}(\lambda_2 X_2 Y) = \lambda_1 \text{Sp}(X_1 Y) + \lambda_2 \text{Sp}(X_2 Y) = \lambda_1 A(X_1; Y) + \lambda_2 A(X_2; Y); \\ A(X; \mu_1 Y_1 + \mu_2 Y_2) &= \text{Sp} X(\mu_1 Y_1 + \mu_2 Y_2) = \text{Sp}(\mu_1 X Y_1 + \mu_2 X Y_2) = \\ &= \text{Sp}(\mu_1 X Y_1) + \text{Sp}(\mu_2 X Y_2) = \mu_1 \text{Sp}(X Y_1) + \mu_2 \text{Sp}(X Y_2) = \mu_1 A(X; Y_1) + \mu_2 A(X; Y_2). \end{aligned}$$

Следовательно, по определению $A(X; Y)$ является билинейной формой.

В силу того что

$$A(X; Y) = \text{Sp}(XY) = \text{Sp}(YX) = A(Y; X),$$

отображение $A(X; Y)$ является симметричной билинейной формой.

Построим матрицу билинейной формы в базисе e_1, e_2, e_3, e_4 . По формулам (6.1.3) находим:

$$a_{11} = A(e_1; e_1) = \text{Sp} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{Sp} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 + 0 = 1;$$

$$a_{12} = A(e_1; e_2) = \text{Sp} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{Sp} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 + 0 = 0;$$

$$a_{13} = A(e_1; e_3) = \text{Sp} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \text{Sp} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 + 0 = 0;$$

$$a_{14} = A(e_1; e_4) = \text{Sp} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{Sp} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 + 0 = 0;$$

$$a_{22} = A(e_2; e_2) = \text{Sp} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{Sp} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 + 0 = 0;$$

$$a_{23} = A(e_2; e_3) = \text{Sp} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \text{Sp} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 + 0 = 1;$$



$$a_{24} = A(e_2; e_4) = \text{Sp} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{Sp} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 + 0 = 0;$$

$$a_{33} = A(e_3; e_3) = \text{Sp} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \text{Sp} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 + 0 = 0;$$

$$a_{34} = A(e_3; e_4) = \text{Sp} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{Sp} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 + 0 = 0;$$

$$a_{44} = A(e_4; e_4) = \text{Sp} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{Sp} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 + 1 = 1.$$

Учитывая, что $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1, 2, 3, 4$, окончательно получаем

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Приведите методом Лагранжа к каноническому виду квадратичную форму $A(x; x) = -12\alpha_1^2 - 3\alpha_2^2 - 12\alpha_3^2 + 12\alpha_1\alpha_2 - 24\alpha_1\alpha_3 + 8\alpha_2\alpha_3$ и постройте канонический базис этой квадратичной формы.

Решение. Основная идея метода Лагранжа заключается в последовательном выделении в квадратичной форме полных квадратов по каждой переменной. Соберем в квадратичной форме $A(x; x)$ все члены, содержащие α_1 , и дополним их сумму до полного квадрата:

$$\begin{aligned} A(x; x) &= -12\alpha_1^2 - 3\alpha_2^2 - 12\alpha_3^2 + 12\alpha_1\alpha_2 - 24\alpha_1\alpha_3 + 8\alpha_2\alpha_3 = \\ &= (-12\alpha_1^2 + 12\alpha_1\alpha_2 - 24\alpha_1\alpha_3) - 3\alpha_2^2 + 8\alpha_2\alpha_3 - 12\alpha_3^2 = \\ &= -\frac{1}{12}(144\alpha_1^2 - 144\alpha_1\alpha_2 + 288\alpha_1\alpha_3) - 3\alpha_2^2 + 8\alpha_2\alpha_3 - 12\alpha_3^2 = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \left| \begin{array}{l} (a\alpha_1 + b\alpha_2 + c\alpha_3)^2 = \underline{a^2\alpha_1^2} + \underline{2ab\alpha_1\alpha_2} + b^2\alpha_2^2 + \underline{2ac\alpha_1\alpha_3} + 2bc\alpha_2\alpha_3 + c^2\alpha_3^2; \\ a = 12; \\ 2ab = -144 \mapsto b = -\frac{144}{2a} = -\frac{144}{2 \cdot 12} = -6; \\ 2ac = 288 \mapsto c = \frac{288}{2a} = \frac{288}{2 \cdot 12} = 12 \end{array} \right| = \\
& = -\frac{1}{12} \left[(12\alpha_1 - 6\alpha_2 + 12\alpha_3)^2 - 36\alpha_2^2 - 2(-6)12\alpha_2\alpha_3 - 144\alpha_3^2 \right] - 3\alpha_2^2 + 8\alpha_2\alpha_3 - \\
& - 12\alpha_3^2 = -\frac{1}{12} (12\alpha_1 - 6\alpha_2 + 12\alpha_3)^2 + (3 - 3)\alpha_2^2 + (-12 + 8)\alpha_2\alpha_3 + (12 - 12)\alpha_3^2 = \\
& = -\frac{1}{12} (12\alpha_1 - 6\alpha_2 + 12\alpha_3)^2 - 4\alpha_2\alpha_3.
\end{aligned}$$

Далее нужно в квадратичной форме от переменных α_2, α_3 группировать все слагаемые, содержащие α_2 , и дополнять их сумму до полного квадрата. Поскольку в нашем случае коэффициент при α_2^2 равен нулю, сделаем замену:

$$\alpha_1 = \beta_1, \quad \alpha_2 = \beta_2 + \beta_3, \quad \alpha_3 = \beta_2 - \beta_3.$$

В результате получим

$$\begin{aligned}
A(x, x) &= -\frac{1}{12} (12\beta_1 - 6(\beta_2 + \beta_3) + 12(\beta_2 - \beta_3))^2 - 4(\beta_2 + \beta_3)(\beta_2 - \beta_3) = \\
&= -\frac{1}{12} (12\beta_1 + (-6 + 12)\beta_2 + (-6 - 12)\beta_3)^2 - 4(\beta_2^2 - \beta_3^2) = \\
&= -\frac{1}{12} (12\beta_1 + 6\beta_2 - 18\beta_3)^2 - 4\beta_2^2 + 4\beta_3^2.
\end{aligned}$$

Положив в последнем выражении

$$\xi_1 = 12\beta_1 + 6\beta_2 - 18\beta_3, \quad \xi_2 = \beta_2, \quad \xi_3 = \beta_3,$$



записываем канонический вид квадратичной формы

$$A(x; x) = -\frac{1}{12}\xi_1^2 - 4\xi_2^2 + 4\xi_3^2$$

и переходим к построению канонического базиса. Известно, что координаты вектора x в старом и новом базисе связаны посредством матрицы перехода соотношением

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}.$$

В нашем случае

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 12 & 6 & -18 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 6 & -18 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 12 & -6 & 12 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$P = \begin{pmatrix} 12 & -6 & 12 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 3 & -6 & -6 \\ -9 & -6 & 6 \end{pmatrix}^T =$$



$$= -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 3 & -9 \\ 0 & -6 & -6 \\ 0 & -6 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 1 & -6 & 18 \\ 0 & 12 & 12 \\ 0 & 12 & -12 \end{pmatrix}.$$

Столбцы матрицы P составляют канонический базис квадратичной формы

$$A(x; x). \text{ Нетрудно проверить, что } P^T A P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{12} & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

6.1.1. Является ли билинейной формой в n -мерном действительном линейном пространстве L функция $A(x; y) = \alpha_1 \beta_1^2$, где α_1, β_1 – первые координаты векторов x и y в некотором базисе?

6.1.2. Запишите матрицу билинейной формы $A(x; y)$ в заданном базисе действительного линейного пространства L , если:

$$1) L = M_2(R), \quad A(x(t); y(t)) = \int_0^1 x(t)y(t) dt,$$

базис: а) $1, t, t^2$; б) $1, t-1, (t-1)^2$;

$$2) L = C, A(x; y) = A(\alpha_1 + \beta_1 i; \alpha_2 + \beta_2 i) = \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2,$$

базис: а) $1, i$; б) $1+i, 1-i$.

6.1.3. Билинейная форма $A(x; y)$ называется **кососимметричной**, если для любых векторов $x, y \in L$ выполняется равенство

$$A(x; y) = -A(y; x). \quad (6.1.9)$$

Убедитесь, что отображение $A : R^2 \times R^2 \rightarrow R$, определяемое равенством

$$A(x; y) = A((\alpha_1, \alpha_2); (\beta_1, \beta_2)) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix},$$

является кососимметричной билинейной формой в пространстве R^2 . Найдите ее матрицу в базисе $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$.



6.1.4. Запишите матрицу билинейной формы:

а) $A(x; y) = 2\alpha_1\beta_1 + 3\alpha_1\beta_2 + 5\alpha_1\beta_3 - 4\alpha_2\beta_2 + \alpha_2\beta_3 + 5\alpha_3\beta_1 + 3\alpha_2\beta_1 + \alpha_3\beta_2;$

б) $A(x; y) = 5\alpha_1\beta_2 + 7\alpha_1\beta_3 - 2\alpha_2\beta_2 + \alpha_2\beta_3 + 5\alpha_2\beta_1 + 7\alpha_3\beta_1 + \alpha_3\beta_2 - 5\alpha_3\beta_3.$

6.1.5. Найдите билинейную форму, если известна ее матрица:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 5 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix};$ б) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 7 \\ 3 & 7 & 0 \end{pmatrix}.$

6.1.6. Методом Лагранжа приведите следующие квадратичные формы к каноническому виду и укажите невырожденное линейное преобразование переменных, приводящее к этому виду (ввиду неоднозначности искомого линейного преобразования ответ может получиться отличным от приведенного):

а) $2\alpha_1^2 + 2\alpha_2^2 - 5\alpha_3^2 + 2\alpha_1\alpha_2;$

б) $\alpha_1^2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_4;$

в) $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 5\alpha_3^2 - 6\alpha_1\alpha_2 - 2\alpha_1\alpha_3 + 2\alpha_2\alpha_3;$

г) $-\alpha_1^2 - 2\alpha_2^2 - 3\alpha_3^2 + 2\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1\alpha_3 - 2\alpha_2\alpha_3;$

д) $4\alpha_1^2 + 5\alpha_2^2 + 6\alpha_3^2 - 4\alpha_1\alpha_2 + 4\alpha_2\alpha_3;$

е) $5\alpha_1^2 + 8\alpha_2^2 + 5\alpha_3^2 + 4\alpha_1\alpha_2 - 8\alpha_1\alpha_3 + 4\alpha_2\alpha_3;$

ж) $\alpha_1^2 + 5\alpha_2^2 - \alpha_3^2 + 6\alpha_1\alpha_2 + 4\alpha_2\alpha_3.$

§ 6.2. ПРИВЕДЕНИЕ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ МЕТОДОМ ЯКОБИ ЗНАКООПРЕДЕЛЕННЫЕ КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

В отличие от рассмотренного в § 6.1 метода Лагранжа, где канонический базис $f_1, f_2, \dots, f_n$ квадратичной формы $A(x; x)$ вычислялся за несколько шагов, в методе Якоби векторы f_i , $i = 1, 2, \dots, n$, непосредственно выражаются через исходный базис. Суть метода Якоби заключается в следующем.



Пусть в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ n -мерного действительного линейного пространства L квадратичная форма имеет вид

$$A(x; x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \alpha_i \alpha_j, \quad (6.2.1)$$

где $a_{ij} = A(e_i; e_j)$, и определители

$$\Delta_1 = a_{11}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (6.2.2)$$

отличны от нуля. Тогда в базисе

$$\begin{aligned} f_1 &= \alpha_{11} e_1, \\ f_2 &= \alpha_{21} e_1 + \alpha_{22} e_2, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (6.2.3)$$

$$f_n = \alpha_{n1} e_1 + \alpha_{n2} e_2 + \dots + \alpha_{nn} e_n$$

квадратичная форма $A(x; x)$ записывается в виде суммы квадратов:

$$A(x; x) = \frac{1}{\Delta_1} \xi_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \xi_2^2 + \dots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} \xi_n^2, \quad (6.2.4)$$

где $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ – координаты вектора x в базисе $f_1, f_2, \dots, f_n$.

Для того чтобы найти коэффициенты $\alpha_{k1}, \alpha_{k2}, \dots, \alpha_{kk}$ в выражении (6.2.3) для e_k , $k = 1, 2, \dots, n$, необходимо решить неоднородную систему линейных уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_{k1} + a_{12}\alpha_{k2} + \dots + a_{1k}\alpha_{kk} = 0, \\ a_{21}\alpha_{k1} + a_{22}\alpha_{k2} + \dots + a_{21}\alpha_{kk} = 0, \\ \dots \dots \dots \\ a_{k-1,1}\alpha_{k1} + a_{k-1,2}\alpha_{k2} + \dots + a_{k-1,k}\alpha_{kk} = 0, \\ a_{k1}\alpha_{k1} + a_{k2}\alpha_{k2} + \dots + a_{kk}\alpha_{kk} = 1. \end{cases} \quad (6.2.5)$$



Известно, что задача нахождения канонического базиса квадратичной формы решается неоднозначно. Тем не менее можно утверждать, что число положительных, отрицательных и нулевых коэффициентов в любом каноническом представлении данной квадратичной формы всегда одно и то же (в этом состоит **закон инерции** квадратичных форм).

Квадратичную форму $A(x; x)$ называют **положительно (отрицательно) определенной**, если для любого вектора $x \neq \Theta$

$$A(x; x) > 0 \quad (A(x; x) < 0).$$

Скалярное произведение есть билинейная форма, соответствующая положительно определенной квадратичной форме, и любая такая форма может быть принята за скалярное произведение.

Справедлив следующий признак положительной определенности квадратичной формы (**критерий Сильвестра**): для того чтобы квадратичная форма $A(x; x)$ была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все последовательные угловые миноры $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$, определенные соотношением (6.2.2), были положительными.

Квадратичную форму, принимающую как положительные, так и отрицательные значения, называют **знакопеременной**.

Пример 1. Методом Якоби приведите к каноническому виду квадратичную форму $A(x; x) = \alpha_1^2 + 2\alpha_2^2 - \alpha_3^2 + 2\alpha_1\alpha_2$ и укажите канонический базис этой квадратичной формы.

Решение. Запишем матрицу квадратичной формы $A(x; x)$ и вычислим угловые миноры $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ по формуле (6.2.2):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \Delta_1 = 1 \neq 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 1 = -1 \neq 0.$$

В базисе $f_1 = \alpha_{11}e_1 = (\alpha_{11}, 0, 0)$, $f_2 = \alpha_{21}e_1 + \alpha_{22}e_2 = (\alpha_{21}, \alpha_{22}, 0)$, $f_3 = \alpha_{31}e_1 + \alpha_{32}e_2 + \alpha_{33}e_3 = (\alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33})$ квадратичная форма имеет канонический вид



$$A(x; x) = \frac{1}{\Delta_1} \xi_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \xi_2^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3} \xi_3^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_3^2.$$

Найдем канонический базис f_1, f_2, f_3 , последовательно применяя соотношение (6.2.5) для $k = 1, 2, 3$:

$$a_{11} \cdot \alpha_{11} = \alpha_{11} = 1 \mapsto f_1 = (1, 0, 0);$$

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_{21} + a_{12}\alpha_{22} = 0, \\ a_{21}\alpha_{21} + a_{22}\alpha_{22} = 1 \end{cases} \mapsto \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \mapsto \alpha_{22} = 1,$$

$$\alpha_{21} = -1 \mapsto f_2 = (-1, 1, 0);$$

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_{31} + a_{12}\alpha_{32} + a_{13}\alpha_{33} = 0, \\ a_{21}\alpha_{31} + a_{22}\alpha_{32} + a_{23}\alpha_{33} = 0, \\ a_{31}\alpha_{31} + a_{32}\alpha_{32} + a_{33}\alpha_{33} = 1 \end{cases} \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \mapsto$$

$$\alpha_{33} = -1, \quad \alpha_{32} = 0, \quad \alpha_{31} = 0 \mapsto f_3 = (0, 0, -1).$$

Составив матрицу перехода P от базиса e_1, e_2, e_3 к базису f_1, f_2, f_3 ,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

нетрудно убедиться в том, что $P^T A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

Пример 2. Найдите все значения λ , при которых положительно определена квадратичная форма $A(x; x) = 2\alpha_1^2 - \alpha_2^2 + 4\alpha_3^2 + (2\lambda - 1)\alpha_1\alpha_2 + \lambda^2\alpha_2\alpha_3$.

Решение. Воспользуемся критерием Сильвестра. Запишем матрицу квадратичной формы



$$A = \begin{pmatrix} 2 & \lambda - \frac{1}{2} & 0 \\ \lambda - \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2}\lambda^2 \\ 0 & \frac{1}{2}\lambda^2 & 4 \end{pmatrix}$$

и проверим, при каких λ все угловые миноры этой матрицы будут положительными:

$$\Delta_1 = 2 > 0;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & \lambda - \frac{1}{2} \\ \lambda - \frac{1}{2} & -1 \end{vmatrix} = -2 - \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 = -\lambda^2 + \lambda - \frac{9}{4} < 0 \quad \forall \lambda \in R.$$

Следовательно, не существуют значений λ , при которых данная квадратичная форма положительно определена.

6.2.1. Методом Якоби приведите следующие квадратичные формы к каноническому виду и укажите канонические базисы квадратичных форм:

- а) $2\alpha_1^2 + 3\alpha_1\alpha_2 + 4\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2$;
- б) $\alpha_1^2 + 2\alpha_2^2 + 3\alpha_3^2 + 2\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1\alpha_3 + 4\alpha_2\alpha_3$;
- в) $2\alpha_1^2 + 2\alpha_2^2 - 5\alpha_3^2 + 2\alpha_1\alpha_2$;
- г) $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 5\alpha_3^2 - 6\alpha_1\alpha_2 - 2\alpha_1\alpha_3 + 2\alpha_2\alpha_3$;
- д) $-\alpha_1^2 - 2\alpha_2^2 - 3\alpha_3^2 + 2\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1\alpha_3 - 2\alpha_2\alpha_3$;
- е) $4\alpha_1^2 + 5\alpha_2^2 + 6\alpha_3^2 - 4\alpha_1\alpha_2 + 4\alpha_2\alpha_3$.

6.2.2. Найдите все значения λ , при которых положительно определены квадратичные формы:

- а) $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + 2\lambda\alpha_1\alpha_2 + 2\lambda\alpha_1\alpha_3 + 2\lambda\alpha_2\alpha_3$;
- б) $\alpha_1^2 + 5\alpha_2^2 + (\lambda^2 + 1)\alpha_3^2 + 4\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1\alpha_3 + 4\alpha_2\alpha_3$;



в) $\alpha_2^2 + \alpha_3^2 + 4\lambda\alpha_1\alpha_2 + \lambda^2\alpha_1\alpha_3$;

г) $2\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2\alpha_3^2 + 2\alpha_1\alpha_2 + \lambda\alpha_1\alpha_3 + 2\alpha_2\alpha_3$.

6.2.3. Докажите, что если квадратичная форма с матрицей A положительно определена, то и квадратичная форма с матрицей A^{-1} положительно определена.

6.2.4. Докажите, что квадратичная форма $A(x; x)$ отрицательно определена тогда и только тогда, когда форма $-A(x; x)$ положительно определена.

6.2.5. Найдите все значения λ , при которых отрицательно определены квадратичные формы:

а) $\lambda\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 3\alpha_3^2 + 2\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1\alpha_3 + 4\alpha_2\alpha_3$;

б) $\lambda\alpha_1^2 + \lambda\alpha_2^2 + (\lambda - 3)\alpha_3^2 + 2\alpha_1\alpha_2 + 2\lambda\alpha_1\alpha_3 + 2\alpha_2\alpha_3$;

в) $-2\alpha_1^2 - 8\alpha_2^2 - 3\alpha_3^2 + 2\lambda\alpha_1\alpha_2 + 4\alpha_1\alpha_3 - 2\lambda\alpha_2\alpha_3$.

ГЛАВА 7

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

§ 7.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА МАТРИЦА ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

Пусть X и Y – линейные пространства над одним и тем же полем F . Будем говорить, что *из пространства X в пространство Y действует оператор A* или, что то же самое, *отображение A или преобразование A* , если каждому вектору $x \in X$ по какому-либо правилу поставлен в соответствие определенный вектор $y = A(x) = Ax$ из Y .

Наиболее простыми являются линейные операторы. Отображение $A: X \rightarrow Y$ называется **линейным оператором (линейным преобразованием)**, действующим из X в Y , если оно удовлетворяет следующим двум условиям:

$$1^0 \quad A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in X;$$

$$2^0 \quad A(\alpha x) = \alpha A(x) \quad \forall x \in X, \forall \alpha \in F.$$

Совокупность этих условий равносильна следующему условию:

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2 \quad \forall x_1, x_2 \in X, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in F. \quad (7.1.1)$$

Обозначим через w_{XY} множество всех линейных операторов, действующих из линейного пространства X в линейное пространство Y . Два линейных оператора A и B из w_{XY} называются **равными**, если

$$Ax = Bx \quad \forall x \in X. \quad (7.1.2)$$

Множество w_{XY} будет линейным пространством над полем F , если определить **сумму $A+B$ операторов $A, B \in w_{XY}$ и умножение λA оператора $A \in w_{XY}$ на число $\lambda \in F$** соотношениями:

$$(A+B)x = Ax + Bx \quad \forall x \in X; \quad (7.1.3)$$



Нулевым вектором пространства w_{XY} будет **нулевой оператор** O из X в Y , т. е. оператор, переводящий любой вектор x линейного пространства X в нулевой вектор линейного пространства Y .

В случае, когда $X=Y$, линейный оператор $A \in W_{XX}$ называется линейным преобразованием пространства X .

Пусть A – оператор из w_{XY} , и пусть $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ и $g = \{g_1, g_2, \dots, g_m\}$ – фиксированные базисы линейных пространств X и Y соответственно. Разложим векторы $Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_n$ по базису g :

Из коэффициентов этих разложений составим $(m \times n)$ -матрицу

Матрица A_{ge} называется **матрицей линейного оператора** A в паре базисов e и g . Заметим, что столбцами матрицы A_{ge} служат столбцы координат векторов $Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_n$ в базисе g , т. е. строки коэффициентов из разложений (7.1.5).

Если $A \in w_{XY}$, то при нахождении матрицы линейного оператора фиксируются векторы одного базиса $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, по которому раскладываются $Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_n$. Записанные столбцами коэффициенты разложений образуют квадратную матрицу A_e порядка n .

Равные линейные операторы в одном и том же базисе имеют одинаковые матрицы.

Если X и Y соответственно n - и m -мерные линейные пространства над одним полем F , то линейное пространство $\mathcal{W}_{XY}$ изоморфно линейному пространству $(m \times n)$ -матриц с элементами из F с операциями сложения матриц и умножения их на числа из поля F .

$$Ix=x \quad \forall x \in X. \quad (7.1.7)$$

Решение. В силу того что $\forall x_1, x_2 \in X, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in F$

$$\begin{aligned} I_1 &= e_1 = 1e_1 + 0e_2 + \dots + 0e_n, \\ I_2 &= e_2 = 0e_1 + 1e_2 + \dots + 0e_n, \\ &\dots\dots\dots \\ I_n &= e_n = 0e_1 + 0e_2 + \dots + 1e_n, \end{aligned}$$

$$I_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

119



Пример 2. Докажите, что преобразование

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ 2x_1 + x_3 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

пространства $R_{3,1}$ линейно, и найдите его матрицу в каноническом базисе.

Решение.

Пусть $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ и $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ – произвольные векторы из $R_{3,1}$. Тогда

$\forall \alpha, \beta \in R$

$$\begin{aligned} A(\alpha x + \beta y) &= A \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 \\ \alpha x_2 + \beta y_2 \\ \alpha x_3 + \beta y_3 \end{pmatrix} \stackrel{df}{=} \begin{pmatrix} (\alpha x_2 + \beta y_2) + (\alpha x_3 + \beta y_3) \\ 2(\alpha x_1 + \beta y_1) + (\alpha x_3 + \beta y_3) \\ 3(\alpha x_1 + \beta y_1) - (\alpha x_2 + \beta y_2) + (\alpha x_3 + \beta y_3) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (\alpha x_2 + \alpha x_3) + (\beta y_2 + \beta y_3) \\ (2\alpha x_1 + \alpha x_3) + (2\beta y_1 + \beta y_3) \\ (3\alpha x_1 - \alpha x_2 + \alpha x_3) + (3\beta y_1 - \beta y_2 + \beta y_3) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \alpha x_2 + \alpha x_3 \\ 2\alpha x_1 + \alpha x_3 \\ 3\alpha x_1 - \alpha x_2 + \alpha x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta y_2 + \beta y_3 \\ 2\beta y_1 + \beta y_3 \\ 3\beta y_1 - \beta y_2 + \beta y_3 \end{pmatrix} = \\ &= \alpha \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ 2x_1 + x_3 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} y_2 + y_3 \\ 2y_1 + y_3 \\ 3y_1 - y_2 + y_3 \end{pmatrix} \stackrel{df}{=} \alpha Ax + \beta Ay, \end{aligned}$$

т. е. преобразование A пространства $R_{3,1}$ линейно. Канонический базис линейного пространства $R_{3,1}$ составляют векторы $e_1 = (1, 0, 0)^T$, $e_2 = (0, 1, 0)^T$, $e_3 = (0, 0, 1)^T$. Из определения оператора A вытекает, что



$$Ae_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0e_1 + 2e_2 + 3e_3;$$

$$Ae_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 1e_1 + 0e_2 + (-1)e_3;$$

$$Ae_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1e_1 + 1e_2 + 1e_3.$$

Таким образом,

$$A_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 3. Покажите, что умножение квадратных матриц второго порядка слева на данную матрицу $U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ является линейным преобразованием пространства $R_{2,2}$, и найдите матрицу этого преобразования в базисе, состоящем из матриц:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. По определению преобразования A для любых матриц $X, Y \in R_{2,2}$ и любых чисел $\alpha, \beta \in R$ имеем

$$A(\alpha X + \beta Y) = U(\alpha X + \beta Y) = \alpha UX + \beta UY = \alpha A(X) + \beta A(Y).$$

Перейдем к построению матрицы оператора A в данном базисе. В силу того что



$$Ae_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = ae_1 + ce_2 + 0e_3 + 0e_4;$$

$$Ae_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} = be_1 + de_2 + 0e_3 + 0e_4;$$

$$Ae_3 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} = 0e_1 + 0e_2 + ae_3 + ce_4;$$

$$Ae_4 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = 0e_1 + 0e_2 + be_3 + de_4,$$

получаем

$$A_e = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix}.$$

7.1.1. Какую матрицу имеет нулевой оператор в любых базисах пространств X и Y ?

7.1.2. Линейное пространство X является прямой суммой подпространств L_1 и L_2 . Докажите, что оператор P пространства X , который каждому вектору $x \in X$ с разложением $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$, ставит в соответствие вектор x_1 этого разложения, является линейным. Оператор P называется **оператором проектирования** пространства X на L_1 параллельно L_2 .

Найдите матрицу этого оператора в базисе, полученном объединением базисов подпространств L_1 и L_2 .

7.1.3. Линейное пространство X является прямой суммой подпространств L_1 и L_2 . Докажите, что оператор S , который каждому вектору $x \in X$ с разложением $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$, ставит в соответствие вектор $Sx = x_1 - x_2$, является линейным. Оператор S называется **отражением** пространства X в L_1 параллельно L_2 .



Найдите матрицу этого оператора в базисе, полученном объединением базисов подпространств L_1 и L_2 .

7.1.4. Докажите, что всякий линейный оператор, действующий в одномерном пространстве, сводится к умножению всех векторов пространства на фиксированное (для данного оператора) число.

7.1.5. Верно ли, что линейный оператор переводит:

- а) линейно зависимую систему векторов в линейно зависимую;
- б) линейно независимую систему векторов в линейно независимую?

7.1.6. Выясните, какие из следующих преобразований пространства $R_{3,1}$ линейны, и в случае линейности найдите их матрицы в каноническом базисе:

$$\begin{aligned} \text{а) } A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \\ 2x_1 - x_3 \end{pmatrix}; & \text{б) } A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 + 1 \\ x_3 + 2 \end{pmatrix}; \\ \text{в) } A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 + x_3 \\ x_3^2 \end{pmatrix}; & \text{г) } A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ x_3 \\ x_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

7.1.7. Укажите, какие из приведенных преобразований пространства $M_n(R) = \{ \alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_n t^n \mid \alpha_i \in R \}$ являются линейными операторами, и найдите их матрицы в базисе $1, t, t^2, \dots, t^n$. Каждое преобразование описывается своим действием на произвольный многочлен $f(t) \in M_n(R)$:

- а) $Af(t) = f(-t)$;
- б) $Af(t) = f(t+1)$;
- в) $Af(t) = f(at+b)$, где a и b – фиксированные числа, причем $a \neq 0$;
- г) $Af(t) = f'(t)$. Этот оператор в дальнейшем называется **оператором дифференцирования**.

7.1.8. Какова матрица оператора дифференцирования, действующего в линейном пространстве $M_n(R)$, в базисе $1, t-a, \frac{(t-a)^2}{2!}, \dots, \frac{(t-a)^n}{n!}$, где a – действительное число?



7.1.9. Покажите, что умножение квадратных матриц второго порядка справа на данную матрицу $U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ является линейным преобразованием пространства $R_{2,2}$, и найдите матрицу этого преобразования в базисе, состоящем из матриц:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7.1.10. Проверьте линейность оператора $A: R_{2,3} \rightarrow R_{2,2}$, заданного формулой $AX = XU + VX^T$, где $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, и постройте матрицу этого оператора в базисах:

$$\begin{aligned} e_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ e_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{и } g_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad g_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

7.1.11. В пространстве $R_{2,2}$ фиксирован базис, состоящий из матриц

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(в указанном порядке). Запишите в этом базисе матрицу оператора транспонирования, т. е. оператора, который каждой матрице $X \in R_{2,2}$ ставит в соответствие транспонированную матрицу.

Как изменится эта матрица, если в базисе поменять местами векторы e_2 и e_3 ?



§ 7.2. СВЯЗЬ МЕЖДУ КООРДИНАТАМИ ВЕКТОР-ОБРАЗА И ВЕКТОР-ПРООБРАЗА ЯДРО И ОБРАЗ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

Линейный оператор A , действующий из пространства X в пространство Y , ставит в соответствие каждому вектору $x \in X$ определенный вектор $y = Ax$ из Y . При этом вектор y называется **образом вектора** x , а вектор x – **прообразом вектора** y при отображении A .

Пусть $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ и $g = \{g_1, g_2, \dots, g_m\}$ – некоторые базисы линейных пространств X и Y соответственно. Тогда $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$, $y = \sum_{j=1}^m \beta_j g_j$ и координаты вектор-образа y связаны с координатами вектор-прообраза x соотношением

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}_g = A_{ge} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}_e, \quad (7.2.1)$$

в котором A_{ge} – матрица линейного оператора A в паре базисов e и g .

В случае, когда пространства X и Y совпадают, базисы e и g также совпадают и формула (7.2.1) принимает вид

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}_e = A_e \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}_e. \quad (7.2.2)$$

Образом (областью значений) линейного оператора $A \in w_{XY}$ называется множество всех элементов $y \in Y$ вида $y = Ax$. Образ линейного оператора является подпространством пространства Y и обозначается $R(A)$. Размерность образа называется **рангом оператора** и обозначается $\text{rg } A$.



Ядром линейного оператора $A \in \mathcal{W}_{XY}$ называется множество всех векторов пространства X , которые переводятся оператором A в нулевой вектор пространства Y . Ядро линейного оператора является подпространством пространства X и обозначается $N(A)$. Размерность ядра называется **дефектом оператора** и обозначается n_A .

Сумма ранга и дефекта оператора $A \in \mathcal{W}_{XY}$ равна размерности пространства X .

Ранг линейного оператора равен рангу матрицы этого оператора.

Базис системы векторов-столбцов матрицы линейного оператора A образует систему координатных столбцов базиса образа $R(A)$. Базис подпространства решений однородной системы линейных алгебраических уравнений с матрицей оператора A образует базис ядра $N(A)$.

Пример 1. Из пространства X с базисом $e = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ в пространство Y с базисом $g = \{g_1, g_2, g_3\}$ действует линейный оператор A , имеющий в

данной паре базисов матрицу $A_{ge} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Найдите столбец координат

в базисе g образа вектора $x = (1, 1, 1, 1)_e^T$ и столбец координат в базисе e прообраза вектора $y = (3, 2, 1)_g^T$.

Решение. Столбец координат образа вектора x в базисе g находим непосредственно по формуле (7.2.1):

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}_g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_e = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}_g.$$

Для определения прообраза вектора $y = (3, 2, 1)_g^T$ по той же формуле (7.2.1) имеем



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}_e = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

или, что то же самое,

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3, \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ x_3 + 2x_4 = 1. \end{cases}$$

Отсюда находим все прообразы $x = (0, x_4, 1 - 2x_4, x_4)_e^T$ вектора $y = (3, 2, 1)_g^T$, где x_4 – свободная переменная, принимающая произвольные значения.

Пример 2. В пространстве X с базисом $e = \{e_1, e_2\}$ линейный оператор A переводит векторы $a_1 = (1, 1)_e^T$, $a_2 = (1, 0)_e^T$ в векторы $b_1 = (2, 1)_e^T$, $b_2 = (1, 2)_e^T$ соответственно. Найдите матрицу оператора A в базисе e .

Решение. Пусть $A_e = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix}$ – матрица оператора A в базисе e . Тогда

из условий $Aa_1 = b_1$, $Aa_2 = b_2$ по формуле (7.2.2) имеем $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_e = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_e$,

$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_e = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_e$, или в подробной записи

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 2; \\ \alpha_3 + \alpha_4 = 1; \\ \alpha_1 = 1; \\ \alpha_3 = 2. \end{cases}$$

Отсюда получаем $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 2$, $\alpha_4 = -1$. Следовательно, $A_e = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.



Пример 3. Найдите базис ядра и базис образа линейного оператора пространства $R_{3,1}$, если этот оператор задан матрицей $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. При помощи элементарных преобразований над строками матрицы A приведем ее к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что $\text{rg } A = \dim R(A) = 2$. Базис $R(A)$ составляют, например, векторы $(3, 5, 4)^T$ и $(2, 4, 3)^T$.

Дефект оператора найдем по формуле

$$n = \dim R_{3,1} - \text{rg } A = 3 - 2 = 1,$$

т. е. фундаментальная система решений однородной системы линейных алгебраических уравнений с матрицей A будет состоять из одного вектора. Общее решение однородной системы можно записать в виде $(\alpha, -2\alpha, \alpha)^T$. Полагая $\alpha = 1$, получаем базисный вектор $N(A) : (1, -2, 1)^T$.

7.2.1. Линейный оператор A переводит вектор $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ в вектор Ax . Найдите образ вектора a и прообраз вектора y , если:

а) $Ax = (x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 + 2x_2 + 2x_3, x_1 + x_3)^T$,

$a = (1, 1, 1)^T$, $y = (1, 2, 3)^T$;

б) $Ax = (2x_1, 3x_1 + x_2, x_1 + 2x_2 + x_3)^T$,

$a = (2, 1, 1)^T$, $y = (1, 1, 0)^T$;

в) $Ax = (x_1 + x_2, 4x_1 + 2x_2, x_1 + 3x_3)^T$,

$a = (1, 2, 1)^T$, $y = (1, 3, 1)^T$.



7.2.2. Линейный оператор A в паре базисов $e = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ и $g = \{g_1, g_2, g_3\}$ имеет матрицу A_{ge} . Найдите прообраз вектора y , если:

а) $A_{ge} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $y = (2, -3, 1)_g^T$;

б) $A_{ge} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $y = (3, 1, -2)_g^T$;

в) $A_{ge} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $y = (1, 1, -2)_g^T$.

7.2.3. Выясните, существует ли линейный оператор двумерного пространства, переводящий векторы a_1, a_2 соответственно в векторы b_1, b_2 , и найдите матрицу этого оператора в базисе e_1, e_2 :

а) $a_1 = e_1 + 2e_2, a_2 = 3e_1 - e_2, b_1 = 6e_1 + 9e_2, b_2 = 11e_1 - 8e_2$;

б) $a_1 = e_1 + 2e_2, a_2 = 2e_1 + 4e_2, b_1 = 2e_1 - e_2, b_2 = e_1 + e_2$;

в) $a_1 = e_1 + 2e_2, a_2 = 2e_1 + 4e_2, b_1 = 2e_1 - e_2, b_2 = 4e_1 - 2e_2$.

7.2.4. Выясните, существует ли линейный оператор трехмерного пространства, переводящий векторы a_1, a_2, a_3 соответственно в векторы b_1, b_2, b_3 , и найдите матрицу этого оператора в том же базисе, в котором даны координаты всех векторов:

а) $a_1 = (2, 3, 5), a_2 = (0, 1, 2), a_3 = (1, 0, 0),$

$b_1 = (1, 1, 1), b_2 = (1, 1, -1), b_3 = (2, 1, 2);$

б) $a_1 = (1, 2, 0), a_2 = (1, 1, 1), a_3 = (2, 3, 1),$

$b_1 = (1, 1, 1), b_2 = (1, 1, 0), b_3 = (1, 0, 0).$



7.2.5. Для указанных линейных операторов пространства R^3 найдите дефект и ранг, а также постройте базисы ядра и образа. Каждый оператор описывается своим действием на произвольный вектор $x = (x_1, x_2, x_3)$:

а) $Ax = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3)$;

б) $Ax = (2x_1 - x_2 - x_3, x_1 - 2x_2 + x_3, x_1 + x_2 - 2x_3)$;

в) $Ax = (-x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2 + x_3, x_1 + x_2 - x_3)$.

7.2.6. Найдите образ и ядро оператора дифференцирования в пространстве $M_n(R)$.

7.2.7. В пространстве $M_n(R)$ рассмотрите **разностный оператор** A_h :

$$A_h f(t) = \frac{f(t+h) - f(t)}{h},$$

где h – фиксированное число, отличное от нуля. Найдите его образ и ядро.

7.2.8. Найдите образ и ядро оператора проектирования (см. задачу 7.1.2) на L_1 параллельно L_2 и оператора отражения (см. задачу 7.1.3) в L_1 параллельно L_2 .

7.2.9. Найдите базис ядра и базис образа линейного оператора из w_{XX} , заданного в некотором базисе матрицей A :

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$; в) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

7.2.10. Найдите размерность линейного пространства w_{XX} всех линейных операторов, действующих в n -мерном линейном пространстве X , и постройте базис пространства w_{XX} .



§ 7.3. СВЯЗЬ МЕЖДУ МАТРИЦАМИ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА В РАЗНЫХ БАЗИСАХ ДЕЙСТВИЯ С ЛИНЕЙНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Пусть из n -мерного пространства X в m -мерное пространство Y действует линейный оператор A и пусть он имеет матрицу A_{ge} в паре базисов $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ и $g = \{g_1, g_2, \dots, g_m\}$ линейных пространств X и Y и матрицу A_{hf} – в паре базисов $f = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ и $h = \{h_1, h_2, \dots, h_m\}$ пространств X и Y . Тогда матрицы A_{ge} и A_{hf} оператора A будут связаны соотношением

$$A_{hf} = Q^{-1} A_{ge} P, \quad (7.3.1)$$

где P – матрица перехода от базиса e к базису f пространства X ; Q – матрица перехода от базиса g к базису h пространства Y .

В частности, если пространства X и Y совпадают, то базисы e и g также совпадают и формула (7.3.1) принимает вид

$$A_f = P^{-1} A_e P. \quad (7.3.2)$$

Матрицы A_{hf} и A_{ge} , связанные соотношением (7.3.1), называют **эквивалентными**, а матрицы A_f и A_e , связанные соотношением (7.3.2), – **подобными**, причем говорят, что матрица A_f получается из матрицы A_e трансформированием матрицей P .

В § 7.1 мы уже ввели операции сложения операторов и умножения их на числа. Напомним, что сумма $A+B$ линейных операторов $A, B \in w_{XY}$ и произведение λA линейного оператора $A \in w_{XY}$ на число $\lambda \in F$ являются линейными операторами.

Пусть теперь $A \in w_{XY}$, $B \in w_{YZ}$. **Произведением оператора B на оператор A** называется оператор BA , действующий из X в Z и определяемый соотношением

$$(BA)x = B(Ax) \quad \forall x \in X. \quad (7.3.3)$$



Для того чтобы произведение операторов BA имело смысл, необходимо и достаточно, чтобы образ оператора A содержался в области определения оператора B . Это условие заведомо выполнено, если рассматриваются операторы из W_{XX} . Произведение линейных операторов является линейным оператором.

Выберем в линейных пространствах X, Y, Z базисы $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, $g = \{g_1, g_2, \dots, g_m\}$ и $f = \{f_1, f_2, \dots, f_k\}$ соответственно и обозначим матрицу оператора A в паре базисов e и g через A_{ge} , матрицу оператора B в паре базисов g и f — через B_{fg} . Тогда оператор BA в паре базисов e и f имеет матрицу $B_{fg}A_{ge}$ (матрица оператора, действующего первым, пишется в произведении справа).

Линейный оператор A , действующий в n -мерном пространстве X , называют **невырожденным**, если дефект этого оператора равен нулю или, что то же самое, если ранг равен n . Для вырожденного оператора A существует, причем единственный, линейный оператор B такой, что

$$AB = BA = I, \quad (7.3.4)$$

где I — единичный оператор. Оператор B называют оператором, **обратным** к оператору A , и обозначают A^{-1} . Если в некотором базисе невырожденному оператору отвечает невырожденная матрица A , то в этом же базисе обратному к данному оператору соответствует матрица A^{-1} .

Пример 1. Линейный оператор A в базисе $a_1 = (1, 2)$, $a_2 = (1, 1)$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Найдите его матрицу в базисе $b_1 = (2, 3)$, $b_2 = (0, 1)$.

Решение. Матрица A_b оператора A в базисе $b = \{b_1, b_2\}$ связана с матрицей A_a этого же оператора в базисе $a = \{a_1, a_2\}$ соотношением

$$A_b = P^{-1}A_aP.$$

Найдем матрицу перехода $P = (p_{ij})$ от базиса a к базису b . Для этого разложим векторы базиса b по векторам базиса a :

$$b_1 = p_{11}a_1 + p_{21}a_2; \quad b_2 = p_{12}a_1 + p_{22}a_2$$

и решим записанные системы линейных алгебраических уравнений относительно p_{ij} :



$$\left(\begin{array}{cc|cc} a_1 & a_2 & b_1 & b_2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right).$$

Следовательно, $p_{21}=1$, $p_{11}=1$, $p_{22}=-1$, $p_{12}=1$ и матрица $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. В силу

того что $P^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ и $A_a = A$, окончательно получаем

$$A_b = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Линейный оператор, действующий из пространства R^2 в пространство R^3 , задан в стандартных базисах матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Вычислите

матрицу этого оператора в базисах $f_1 = (9, -5)$, $f_2 = (-5, 3)$ и $h_1 = (1, 1, 2)$, $h_2 = (1, 2, 3)$, $h_3 = (1, 2, 4)$.

Решение. Запишем стандартные базисы $e = \{e_1, e_2\}$ и $g = \{g_1, g_2, g_3\}$ линейных пространств R^2 и R^3 соответственно: $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$; $g_1 = (1, 0, 0)$, $g_2 = (0, 1, 0)$, $g_3 = (0, 0, 1)$. Матрица A_{hf} оператора в паре базисов $f = \{f_1, f_2\}$ и $h = \{h_1, h_2, h_3\}$ связана с матрицей $A = A_{ge}$ оператора в паре базисов e и g соотношением

$$A_{hf} = Q^{-1}AP.$$

Матрицы перехода Q и P соответственно от базиса g к базису h и от базиса e к базису f в данном случае находятся элементарно. Поскольку

$$h_1 = 1g_1 + 1g_2 + 2g_3, \quad h_2 = 1g_1 + 2g_2 + 3g_3, \quad h_3 = 1g_1 + 2g_2 + 4g_3$$

и

$$f_1 = 9e_1 + (-5)e_2, \quad f_2 = (-5)e_1 + 3e_2,$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}.$$



Учитывая, что $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, имеем

$$A_{hf} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -1 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

Пример 3. Пусть линейный оператор A пространства $M_2(R)$ имеет в базисе $e = \{1, t, t^2\}$ матрицу $A_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, а оператор B в базисе $f = \{1, t-1, (t-1)^2\}$ — матрицу $B_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Найдите матрицы линейных операторов AB , $A+B$, $5A$ в базисе f .

Решение. В силу того что

$$(AB)_f = A_f B_f, (A+B)_f = A_f + B_f, (5A)_f = 5A_f,$$

начнем с нахождения матрицы A_f оператора A в базисе f . Матрица A_f связана с матрицей A_e соотношением

$$A_f = P^{-1} A_e P.$$

Учитывая, что

$$f_1 = 1 = 1 \cdot 1 + 0t + 0t^2 = 1e_1 + 0e_2 + 0e_3;$$

$$f_2 = t - 1 = (-1)1 + 1t + 0t^2 = (-1)e_1 + 1e_2 + 0e_3;$$

$$f_3 = (t-1)^2 = 1 \cdot 1 + (-2)t + 1t^2 = 1 \cdot e_1 + (-2)e_2 + 1e_3,$$

можем записать, что матрица перехода от базиса e к базису f $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.



Поскольку

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$(AB)_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$(A+B)_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$(5A)_f = 5 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 10 & 5 & -5 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

7.3.1. Линейный оператор A в базисе e_1, e_2 имеет матрицу $A_e = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Найдите его матрицу в базисе $f_1 = 2e_1 - e_2$, $f_2 = e_1 + 2e_2$.

7.3.2. Линейный оператор A в базисе e_1, e_2, e_3 имеет матрицу $A_e = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$. Найдите его матрицу в базисе $f_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3$, $f_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3$, $f_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$.

7.3.3. Линейный оператор A в базисе $a_1 = (8, -6, 7)$, $a_2 = (-16, 7, -13)$, $a_3 = (9, -3, 7)$ имеет матрицу $A_a = \begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix}$. Найдите его матрицу в базисе $b_1 = (1, -2, 1)$, $b_2 = (3, -1, 2)$, $b_3 = (2, 1, 2)$.



7.3.4. Докажите, что преобразование трехмерного пространства $Ax = (x, a)a$, где $a = (1, 2, 3)$ является линейным преобразованием, и найдите его матрицы в ортонормированном базисе $e = \{e_1, e_2, e_3\}$, в котором даны координаты всех векторов, и в базисе $b_1 = (1, 0, 1)$, $b_2 = (2, 0, -1)$, $b_3 = (1, 1, 0)$.

7.3.5. Как изменится матрица линейного преобразования, если в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ поменять местами два вектора: e_i, e_j ?

7.3.6. Линейный оператор A в базисе e_1, e_2, e_3, e_4 имеет матрицу $A_e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу этого же оператора в базисе:

а) e_1, e_3, e_2, e_4 ;

б) $e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_3 + e_4$.

7.3.7. Линейный оператор, действующий из пространства R^n в пространство R^m , задан в стандартных базисах матрицей A . Вычислите матрицу этого оператора в базисах $f = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ и $h = \{h_1, h_2, \dots, h_m\}$:

а) $n=3, m=2$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $f_1 = (5, 2, -3)$, $f_2 = (4, 6, -5)$, $f_3 = (4, 4, -3)$,
 $h_1 = (5, 2)$, $h_2 = (-8, -3)$;

б) $n=4, m=2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $f_1 = (1, 0, -1, 1)$, $f_2 = (1, 1, 0, -1)$,
 $f_3 = (1, 1, -1, 0)$, $f_4 = (0, 1, 1, -1)$, $h_1 = (2, 1)$, $h_2 = (5, 3)$;

в) $n=3, m=4$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 7 & 5 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 5 & 13 \end{pmatrix}$, $f_1 = (2, -1, 0)$, $f_2 = (-1, 2, -1)$, $f_3 = (0, -1, 1)$,

$h_1 = (1, -1, 0, 0)$, $h_2 = (1, 0, -1, 0)$, $h_3 = (1, 0, 0, -1)$, $h_4 = (1, 1, 1, 1)$.



7.3.8. В базисе $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ пространства $R_{2,2}$ линейный оператор задан матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу этого оператора в базисе $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$.

7.3.9. Линейный оператор A в базисе $a_1 = (-3, 7)$, $a_2 = (1, -2)$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$, а линейный оператор B в базисе $b_1 = (6, -7)$, $b_2 = (-5, -6)$ – матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу линейного оператора AB в том базисе, в котором даны координаты всех векторов.

7.3.10. Линейный оператор A переводит векторы $a_1 = (-2, -1, -2)^T$, $a_2 = (1, 0, 0)^T$, $a_3 = (2, 2, 3)^T$ в $b_1 = (2, 0, -1)^T$, $b_2 = (-1, 2, -1)^T$, $b_3 = (0, -1, 1)^T$, а линейный оператор B переводит b_1 , b_2 , b_3 в $c_1 = (2, -1, 0)^T$, $c_2 = (-1, 2, -1)^T$, $c_3 = (0, -1, 1)^T$ соответственно. Найдите матрицу оператора BA :

- а) в исходном базисе;
- б) в базисе a_1, a_2, a_3 ;
- в) в базисе b_1, b_2, b_3 .

7.3.11. Пусть A, B – линейные преобразования пространства $R_{2,1}$, A имеет матрицу $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ в стандартном базисе, а B – матрицу $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ в базисе $f_1 = (1, 3)^T$, $f_2 = (-1, -2)^T$. Вычислите матрицу оператора:

- а) $A^2 - B^2$ в стандартном базисе;
- б) $4AB^{-1}$ в базисе f_1, f_2 ;
- в) $(A+B)^4$ в базисе $g_1 = (1, 2)^T$, $g_2 = (0, -1)^T$.



Многочлен, стоящий в левой части уравнения (7.4.3), называется **характеристическим многочленом матрицы A_e и оператора A** , а само уравнение (7.4.3) – **характеристическим или вековым уравнением матрицы A_e (оператора A)**.

Собственные значения оператора A , и только они, являются корнями характеристического многочлена (принадлежащими данному полю F) матрицы A_e оператора A . Учитывая, что подобные матрицы A_f и A_e определяют один и тот же линейный оператор A , действующий в линейном пространстве X , и что они имеют один и тот же характеристический многочлен, будем отождествлять характеристический многочлен подобных матриц с характеристическим многочленом линейного оператора, определяемого этими матрицами, а его корни – с собственными значениями этого оператора.

Множество всех собственных значений линейного оператора (каждое собственное значение берется в количестве, равном его **алгебраической кратности**, т. е. кратности соответствующего корня характеристического многочлена) называется **спектром линейного оператора**.

Собственные векторы линейного оператора A , относящиеся к одному и тому же собственному значению λ , вместе с нулевым вектором образуют подпространство, которое называется **собственным подпространством оператора**, соответствующим собственному значению λ .

Собственные векторы линейного оператора A , относящиеся к различным собственным значениям, линейно независимы.

Для отыскания всех собственных значений оператора A с матрицей A_e нужно найти все корни характеристического многочлена матрицы A_e и из них выбрать лишь те, которые принадлежат данному полю F , а для отыскания всех собственных векторов оператора A с матрицей A_e нужно найти все ненулевые решения системы (7.4.2) при каждом собственном значении λ .

В силу того что на практике обычно отождествляют оператор с его матрицей, введенные в этом параграфе понятия собственного вектора, собственного значения, спектра, собственного подпространства для линейных операторов из W_{XX} определены также и для квадратных матриц.

Пример 1. Докажите, что если матрицы A и B подобны, то всякое собственное значение A является собственным значением и для B , и обратно. Найдите связь между собственными векторами матриц A и B .



Доказательство. Поскольку квадратные матрицы A и B подобны, существует невырожденная матрица P , такая, что $B = P^{-1}AP$. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}\det(B - \lambda I) &= \det(P^{-1}AP - \lambda I) = \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}IP) = \det P^{-1}(A - \lambda I)P = \\ &= \det P^{-1} \det(A - \lambda I) \det P = \det(A - \lambda I),\end{aligned}$$

т. е. спектры матриц A и B совпадают. Подчеркнем, что матрицы с одинаковыми собственными значениями не обязательно подобны. Действительно, матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ не подобна матрице $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, но обе эти матрицы имеют собственное значение нуль с алгебраической кратностью 2.

Пусть x – собственный вектор матрицы A , а λ – соответствующее x собственное значение. Тогда

$$Ax = PBP^{-1}x = \lambda x.$$

Домножая левую и правую часть последнего равенства на P^{-1} , получаем

$$BP^{-1}x = \lambda P^{-1}x \text{ или } By = \lambda y,$$

где $y = P^{-1}x$ – собственный вектор матрицы B , отвечающий тому же собственному значению λ .

Пример 2. Для оператора с матрицей $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, действующего в

действительном пространстве, найдите собственные значения и собственные векторы.

Решение. Характеристический многочлен

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & -3 \\ 3 & 1-\lambda & -1 \\ 2 & -2 & -\lambda \end{pmatrix} = \\ &= (\lambda^2 - \lambda)(3 - \lambda) - 2 + 18 + 6(1 - \lambda) - 2(3 - \lambda) + 3\lambda = \\ &= -\lambda^3 + (3 + 1)\lambda^2 + (-3 - 6 + 2 + 3)\lambda + (16 + 6 - 6) = \\ &= -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 4\lambda + 16 = (4 - \lambda)(\lambda^2 + 4)\end{aligned}$$



матрицы A имеет корни $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 2i$, $\lambda_3 = -2i$. Поскольку рассматриваемый оператор действует в действительном линейном пространстве, его собственным значением будет лишь $\lambda_1 = 4$.

Для нахождения координат $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ собственного вектора x , отвечающего этому собственному значению, решим однородную систему линейных уравнений с матрицей $A - 4I$:

$$A - 4I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 3 & -3 & -1 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Общим решением этой системы является $x = (\alpha_2, \alpha_2, 0)^T$. При α_2 , пробегающем все действительные значения, оно дает общий вид собственных векторов оператора с матрицей A , отвечающих собственному значению $\lambda_1 = 4$. Других действительных векторов оператор с матрицей A не имеет, так как у него нет других собственных значений.

Рассмотренный в данном примере линейный оператор имеет единственное собственное подпространство, базис которого составляет вектор $e_1 = (1, 1, 0)^T$.

7.4.1. Пусть x – собственный вектор матрицы A , отвечающий собственному значению λ . Покажите, что любой вектор вида αx , где $\alpha \neq 0$, также представляет собой собственный вектор.

7.4.2. Докажите, что собственные значения диагональной матрицы совпадают с ее диагональными элементами.

7.4.3. Найдите характеристический многочлен и собственные значения

верхней треугольной матрицы
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

7.4.4. Докажите, что характеристический многочлен транспонированной матрицы A^T совпадает с характеристическим многочленом матрицы A .

7.4.5. Докажите, что характеристический многочлен квазиреугольной (квазидиагональной) матрицы равен произведению характеристических многочленов диагональных клеток.



7.4.6. Покажите, что характеристический многочлен матрицы A имеет вид

$$\det(A - \lambda I) = (-1)^n (\lambda^n - a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} - \dots \pm a_n),$$

где a_1 есть след матрицы A ; a_2 – сумма главных миноров второго порядка и т. д.; наконец, a_n есть определитель матрицы A (напоминаем, что минор называется главным, если он расположен в столбцах и строках с одинаковыми номерами).

7.4.7. Докажите, что характеристический многочлен матрицы

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

равен $(-1)^n (\lambda^n - a_1 \lambda^{n-1} - a_2 \lambda^{n-2} - \dots - a_n)$.

7.4.8. Пользуясь задачей 7.4.7, покажите, что всякий многочлен степени n со старшим коэффициентом $(-1)^n$ может быть характеристическим многочленом некоторой квадратной матрицы порядка n .

7.4.9. Докажите, что для невырожденности оператора A необходимо и достаточно, чтобы он не имел собственного значения нуль.

7.4.10. Докажите, что:

- а) собственные векторы линейного оператора A , относящиеся к собственному значению нуль, и только они, лежат в ядре этого оператора;
- б) собственные векторы, относящиеся к ненулевым собственным значениям, лежат в образе оператора.

7.4.11. Покажите, что при умножении оператора на ненулевое число собственные векторы не меняются, а собственные значения умножаются на это число.

7.4.12. Докажите, что оператор $A - \lambda_0 I$ при любом числе λ_0 имеет те же собственные векторы, что и оператор A . Найдите связь между собственными значениями этих операторов.

7.4.13. Докажите, что если x – собственный вектор оператора A , относящийся к собственному значению λ , то x будет собственным вектором и для оператора:

- а) A^2 ;



- б) A^k при любом натуральном k ;
- в) $f(A)$, где $f(t)$ – любой многочлен.

Найдите соответствующие собственные значения этих операторов.

7.4.14. Докажите, что если оператор A невырожден, то A и A^{-1} имеют одни и те же собственные векторы. Найдите связь между собственными значениями этих операторов.

7.4.15. Найдите собственные значения и собственные векторы оператора дифференцирования в пространстве многочленов $M_n(R)$.

7.4.16. Пусть x, y – собственные векторы линейного преобразования, отвечающие различным собственным значениям, а числа α, β отличны от нуля. Докажите, что вектор $\alpha x + \beta y$ не является собственным.

7.4.17. Квадратная матрица A с неотрицательными элементами называется **стохастической**, если в каждой строке этой матрицы сумма элементов равна единице. Докажите, что стохастическая матрица имеет собственное значение единица. Найдите соответствующий собственный вектор.

7.4.18. Покажите, что оператор A , действующий в n -мерном пространстве X , не может иметь более n различных собственных значений. Если различных значений ровно n , то существует базис пространства X , состоящий из собственных векторов оператора A .

7.4.19. Пространство X является прямой суммой подпространств L_1 и L_2 . Найдите собственные значения и собственные подпространства:

- а) оператора проектирования на L_1 параллельно L_2 ;
- б) оператора отражения в L_1 параллельно L_2 .

7.4.20. Размерность собственного подпространства оператора A , соответствующего собственному значению λ_0 , называется **геометрической кратностью** собственного значения λ_0 . Покажите, что геометрическая кратность λ_0 равна дефекту оператора $A - \lambda_0 I$.

7.4.21. Какой вид имеет матрица линейного преобразования, если первые k базисных векторов являются его собственными векторами?

7.4.22. Докажите, что для произвольного оператора A геометрическая кратность любого собственного значения λ не превосходит его алгебраической кратности.



7.4.23. Докажите, что сумма собственных подпространств оператора A является прямой суммой.

7.4.24. Докажите, что матрица линейного преобразования в некотором базисе тогда и только тогда диагональна, когда все векторы базиса собственные.

7.4.25. Найдите собственные значения и собственные векторы линейных операторов, заданных в некотором базисе линейного пространства: 1) над полем действительных чисел R ; 2) над полем комплексных чисел C матрицами:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{г) } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{д) } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{е) } \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{ж) } \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\text{з) } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{и) } \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 3 & -4 & -3 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{к) } \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\text{л) } \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{м) } \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

§ 7.5. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ПРОСТОЙ СТРУКТУРЫ

Линейный оператор A , действующий в n -мерном линейном пространстве X , называется **оператором простой структуры**, если в пространстве X существует базис, состоящий из собственных векторов этого оператора. Известно (см. § 7.1), что в базисе из собственных векторов матрица оператора простой структуры имеет вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad (7.5.1)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – собственные значения оператора.



Если в исходном базисе $f = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ оператор простой структуры имеет матрицу A_f , а в базисе $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ из собственных векторов – матрицу Λ , то в силу соотношения (7.3.2) из § 7.3 имеем

$$\Lambda = P^{-1}A_fP, \quad (7.5.2)$$

где P – матрица перехода от базиса f к базису e . Она состоит из столбцов координат базиса e в базисе f ; Λ – матрица вида (7.5.1). На матричном языке соотношение (7.5.2) означает, что матрица A_f приводится матрицей P к диагональному виду.

Разрешив соотношение (7.5.2) относительно матрицы A_f , получим соотношение

$$A_f = P\Lambda P^{-1}, \quad (7.5.3)$$

которое называется **каноническим разложением матрицы A_f** .

При построении матрицы P для соотношений (7.5.2) и (7.5.3) нужно найти все собственные значения матрицы A_f и при каждом собственном значении λ_i построить фундаментальную систему решений однородной системы уравнений $(A_f - \lambda_i I)x = 0$; из векторов всех построенных фундаментальных систем решений, как из столбцов, составить матрицу P . Причем в матрице P столбцами записываются решения по каждому λ_i в порядке нумерации собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (одинаковые λ_i берутся в количестве, равном их алгебраическим кратностям). Если матрица P окажется квадратной, то она будет удовлетворять соотношениям (7.5.2) и (7.5.3). Если же матрица P окажется неквадратной, то соотношения (7.5.2) и (7.5.3) для матрицы A_f будут невозможны, т. е. матрица A_f не приводится к диагональному виду и, следовательно, не имеет канонического разложения.

Матрица P будет квадратной лишь в случае, когда оператор A с матрицей A_f является оператором простой структуры. В соответствии с **критерием простоты структуры линейного оператора**, для того чтобы оператор A имел простую структуру, необходимо и достаточно, чтобы для каждого его собственного значения λ_i алгебраическая кратность p_i совпадала с геометрической кратностью, т. е. с максимальным числом линейно независимых соб-



ственных векторов матрицы A_f по λ_i , равным $n - r_i$, где r_i – ранг матрицы $A_f - \lambda_i I$. Справедлив следующий достаточный **признак простой структуры линейного оператора**: если все собственные значения линейного оператора попарно различны, то он имеет простую структуру.

Пример. Выясните, является ли оператор, действующий в действительном трехмерном линейном пространстве, с матрицей $A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$ оператором простой структуры. Если да, то найдите матрицу P , трансформирующую матрицу A к диагональному виду, и запишите этот вид.

Решение. Составим характеристический многочлен матрицы A :

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 7 - \lambda & -12 & 6 \\ 10 & -19 - \lambda & 10 \\ 12 & -24 & 13 - \lambda \end{pmatrix} = -(7 - \lambda)(19 + \lambda)(13 - \lambda) - 1440 - 1440 +$$

$$+ 72(19 + \lambda) + 120(13 - \lambda) + 240(7 - \lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1.$$

Решив характеристическое уравнение $-\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 = 0$, получим собственные значения $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ и соответствующие им алгебраические кратности $p_1 = 2$, $p_2 = 1$. Найдем базисы собственных подпространств линейного оператора, попутно проверив, выполняется ли критерий простоты структуры оператора.

$$A - \lambda_1 I = A - I = \begin{pmatrix} 6 & -12 & 6 \\ 10 & -20 & 10 \\ 12 & -24 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Геометрическая кратность первого собственного значения λ_1 равна $n - r_1 = 3 - \text{rg}(A - \lambda_1 I) = 2$ и совпадает с алгебраической кратностью p_1 . Общий вид собственных векторов, отвечающих λ_1 , таков: $x = (2\alpha_2 - \alpha_3, \alpha_2, \alpha_3)^T$. Полагая последовательно $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 0$ и $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 1$, получаем базис первого собственного подпространства: $e_1 = (2, 1, 0)^T$; $e_2 = (-1, 0, 1)^T$.

$$A - \lambda_2 I = A + I = \begin{pmatrix} 8 & -12 & 6 \\ 10 & -18 & 10 \\ 12 & -24 & 14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 5 & -9 & 5 \\ 6 & -12 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 6 & -5 \\ 0 & 6 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$



Геометрическая кратность второго собственного значения λ_2 равна $n - r_2 = 3 - \text{rg}(A - \lambda_2 I) = 1$ и совпадает с алгебраической кратностью p_2 . Таким образом, критерий простоты структуры линейного оператора выполняется. Общий вид собственных векторов, отвечающих λ_2 , таков: $y = \left(\frac{\beta_3}{2}, \frac{5\beta_3}{6}, \beta_3 \right)^T$. Выбирая $\beta_3 = 6$, получаем базис второго собственного подпространства: $e_3 = (3, 5, 6)^T$. В базисе $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ линейный оператор имеет матрицу $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ и трансформирующую матрицу $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$. Проверим это:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & -9 & 5 \\ 6 & -12 & 7 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 5 & -9 & 5 \\ 6 & -12 & 7 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \Lambda.$$

7.5.1. Квадратная матрица называется **матрицей простой структуры**, если она подобна некоторой диагональной матрице. Докажите, что оператор A из $\mathcal{W}_{XX}$ тогда и только тогда будет оператором простой структуры, когда его матрица в произвольном базисе пространства является матрицей простой структуры.

7.5.2. Покажите, что операторы проектирования и отражения имеют простую структуру.

7.5.3. Докажите, что если матрица A имеет простую структуру, то это же верно в отношении транспонированной матрицы A^T .

7.5.4. Пусть A – линейный оператор, действующий в конечномерном линейном пространстве X . Докажите, что следующие высказывания равносильны:

- а) A – оператор простой структуры;
- б) объединение базисов собственных подпространств является базисом в X ;



в) алгебраическая кратность каждого корня характеристического уравнения равна размерности соответствующего собственного подпространства;

г) X является прямой суммой собственных подпространств.

7.5.5. Докажите, что у оператора простой структуры:

а) образ есть линейная оболочка собственных векторов, относящихся к ненулевым собственным значениям;

б) пересечение ядра и образа состоит только из нулевого вектора.

7.5.6. Выясните, какие из матриц линейных операторов в пространстве X над R можно привести к диагональному виду путем перехода к новому базису. Найдите этот базис и соответствующую ему матрицу:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}; & \text{б)} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; & \text{в)} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}; \\ \text{г)} \begin{pmatrix} 3 & 12 & -4 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & -12 & 6 \end{pmatrix}; & \text{д)} \begin{pmatrix} 10 & -3 & -9 \\ -18 & 7 & 18 \\ 18 & -6 & -17 \end{pmatrix}; & \text{е)} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -4 \\ -12 & 5 & 12 \\ 10 & -3 & -9 \end{pmatrix}. \end{array}$$

7.5.7. Подобна ли матрица

$$\text{а)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{б)} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{в)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

диагональной матрице?

7.5.8. Для каждой из приведенных ниже матриц над полем C выясните, является ли оператор с данной матрицей оператором простой структуры:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \begin{pmatrix} 7 & -12 & -2 \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}; & \text{б)} \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}; & \text{в)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}; \\ \text{г)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; & \text{д)} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Если да, то найдите матрицу P , трансформирующую эту матрицу к диагональному виду, и укажите этот вид.



§ 7.6. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В УНИТАРНЫХ И ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Линейный оператор A^* , действующий в n -мерном унитарном (евклидовом) пространстве X , называется **сопряженным с линейным оператором A** , если для любых векторов x и y из X выполняется равенство

$$(Ax, y) = (x, A^*y). \quad (7.6.1)$$

В унитарном (евклидовом) пространстве каждому линейному оператору отвечает сопряженный оператор и притом только один.

Пусть $A = (a_{ij})$ – комплексная квадратная матрица порядка n . Квадратная матрица $A^* = (a_{ij}^*)$ порядка n называется **сопряженной к матрице A** , если для всех $i = 1, 2, \dots, n$ и $j = 1, 2, \dots, n$

$$a_{ij}^* = \bar{a}_{ji}. \quad (7.6.2)$$

В ортонормированном базисе $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ унитарного пространства X матрица A_e^* сопряженного оператора A^* получается из матрицы A_e оператора A переходом к транспонированной и комплексно-сопряженной матрице:

$$A_e^* = \bar{A}_e^T. \quad (7.6.3)$$

В ортонормированном базисе унитарного пространства сопряженному оператору соответствует сопряженная матрица, и обратно. В случае евклидова пространства таким же образом устанавливается соответствие между сопряженными операторами и транспонированными матрицами.

Линейный оператор A , действующий в унитарном пространстве X , называется **самосопряженным** или **эрмитовым**, если он совпадает со своим сопряженным оператором, т. е. если $A = A^*$, или, что то же самое, для любых векторов x и y из X

$$(Ax, y) = (x, Ay). \quad (7.6.4)$$

Матрицей самосопряженного оператора в ортонормированном базисе является **эрмитова матрица A** , для которой $A = A^*$. Все собственные значения самосопряженного оператора являются действительными числами. Собственные векторы самосопряженного оператора, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.



Основным свойством самосопряженного оператора является то, что в унитарном пространстве существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов этого оператора. Это означает, что самосопряженный оператор – это оператор простой структуры, а среди матриц P , приводящих эрмитову матрицу A к действительной диагональной матрице Λ , имеется унитарная матрица, для которой $P^*P = PP^* = I$. Таким образом, эрмитова матрица A обладает каноническим разложением $A = P\Lambda P^{-1}$ с унитарной трансформирующей матрицей P .

Эрмитов оператор A называется **неотрицательным** (положительно определенным), если для любого ненулевого вектора $x \neq \Theta$ выполняется неравенство $(Ax, x) \geq 0$ ($(Ax, x) > 0$). Неотрицательный и положительно определенный операторы обозначаются соответственно через $A \geq 0$ и $A > 0$. Аналогично определяются и обозначаются **неотрицательные** и **положительно определенные матрицы**.

Линейный оператор U , действующий в унитарном пространстве X , называется **унитарным**, если $U^*U = UU^* = I$. Другими словами, для унитарного оператора $U^* = U^{-1}$.

Унитарный оператор сохраняет скалярное произведение и длины векторов, т. е.

$$(Ux, Uy) = (x, y) \quad \forall x, y \in X; \quad (7.6.5)$$

$$\|Ux\| = \|x\| \quad \forall x \in X. \quad (7.6.6)$$

Унитарный оператор любую ортонормированную систему векторов переводит в ортонормированную систему векторов, ортонормированный базис – в ортонормированный базис. Собственные значения унитарного оператора по модулю равны единице. В ортонормированном базисе пространства матрицей унитарного оператора является унитарная матрица, и обратно, если в ортонормированном базисе оператор имеет унитарную матрицу, то этот оператор унитарный. Столбцы (строки) унитарной матрицы, рассматриваемые как векторы унитарного арифметического пространства, образуют ортонормированную систему.

Основное свойство унитарного оператора в том, что в унитарном пространстве, в котором он действует, существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов этого оператора. Это означает, что унитарный оператор является оператором простой структуры, а среди матриц P , приводящих унитарную матрицу U к диагональной матрице



Λ с диагональными элементами, равными по модулю единице, имеется унитарная матрица, для которой $P^*P = PP^* = I$. Таким образом, унитарная матрица U обладает каноническим разложением $U = P\Lambda P^{-1}$ с унитарной трансформирующей матрицей P и диагональной матрицей Λ с диагональными элементами, равными по модулю единице.

Линейный оператор A , действующий в унитарном (евклидовом) пространстве X , называется **нормальным**, если он перестановочен со своим сопряженным оператором, т. е. если $AA^* = A^*A$.

В ортонормированном базисе матрицей нормального оператора является матрица A , перестановочная со своей сопряженной матрицей, т. е. удовлетворяющая условию $AA^* = A^*A$. Такие матрицы называются **нормальными**.

Основным свойством нормального оператора, действующего в унитарном пространстве, является то, что в этом пространстве существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов этого оператора. Верно и обратное утверждение, т. е. если в унитарном пространстве существует базис, состоящий из собственных векторов оператора, то этот оператор нормальный.

Если оператор A – нормальный, то собственные значения операторов A и A^* , соответствующие общему собственному вектору, комплексно сопряжены.

Примерами нормальных операторов являются эрмитовы и унитарные операторы. Нормальный оператор является оператором простой структуры. На матричном языке это означает, что нормальная матрица приводится к диагональному виду. Нормальная матрица обладает каноническим разложением с унитарной трансформирующей матрицей.

У всякого линейного оператора A в действительном линейном пространстве X существует одномерное или двумерное инвариантное подпространство.

Линейный оператор A , действующий в евклидовом пространстве X , называется **симметричным** или **самосопряженным**, если для любых векторов x и y из X выполняется равенство (7.6.4).

Матрицей симметричного оператора в ортонормированном базисе является **симметричная матрица** A , для которой $A = A^T$. Все собственные значения симметричного оператора являются действительными числами. Собственные векторы симметричного оператора, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.

Основным свойством симметричного оператора является то, что в евклидовом пространстве существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов этого оператора. Это означает, что симметричный оператор



является оператором простой структуры, а среди матриц P , приводящих симметричную матрицу A к диагональной матрице Λ , имеется **ортогональная матрица**, для которой $P^T P = P P^T = I$. Таким образом, симметричная матрица A обладает каноническим разложением $A = P \Lambda P^{-1}$ с ортогональной трансформирующей матрицей P . Правило построения этой ортогональной матрицы P отличается от рассмотренного в § 7.5 лишь тем, что здесь необходимо ортонормировать найденный базис из собственных векторов матрицы A .

Симметричный оператор A называется **неотрицательным (положительно определенным)**, если для любого ненулевого вектора $x \neq \Theta$ выполняется неравенство $(Ax, x) \geq 0$ ($(Ax, x) > 0$). Так же определяются одноименные классы действительных матриц.

Линейный оператор A , действующий в евклидовом пространстве X , называется **ортогональным**, если он сохраняет скалярное произведение любых векторов x и y из X , т. е. если выполняется равенство

$$(Ax, Ay) = (x, y). \quad (7.6.7)$$

Ортогональный оператор сохраняет длины векторов и углы между векторами. Ортогональный оператор любую ортонормированную систему векторов переводит в ортонормированную систему векторов, а ортонормированный базис — в ортонормированный базис. Ортогональный оператор в любом ортонормированном базисе евклидова пространства X имеет ортогональную матрицу. Определитель матрицы ортогонального оператора равен ± 1 .

Для любого ортогонального оператора A , действующего в n -мерном евклидовом пространстве X , существует в X ортонормированный базис $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, в котором матрица A_e оператора A имеет следующий вид:

$$A_e = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 & \\ & & & & & & \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & \cos \varphi_k & -\sin \varphi_k \\ & & & & & & & & \sin \varphi_k & \cos \varphi_k \end{pmatrix}, \quad (7.6.8)$$

где все невыписанные элементы равны нулю.



Пример 1. Линейный оператор A в базисе $f_1 = (1, 1, 1)^T$, $f_2 = (0, 1, 1)^T$, $f_3 = (0, 0, 1)^T$ имеет матрицу $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу A_f^* сопряженного оператора A^* в этом же базисе, если векторы f_1, f_2, f_3 заданы координатами в ортонормированном базисе e_1, e_2, e_3 .

Решение. Матрица A_f^* сопряженного оператора A^* в базисе $f = \{f_1, f_2, f_3\}$ связана с матрицей A_e^* этого же оператора в базисе $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ соотношением $A_f^* = P^{-1} A_e^* P$, где P – матрица перехода от базиса e к базису f . Так как для евклидова пространства в ортонормированном базисе матрицей сопряженного оператора A^* является транспонированная матрица к матрице оператора A , то $A_e^* = A_e^T$. Матрицу A_e оператора A в базисе e найдем через матрицу A_f этого же оператора в базисе f по формуле $A_e = T^{-1} A_f T$, где T – матрица перехода от базиса f к базису e . Очевидно, что

$$T = P^{-1}. \text{ В силу того что } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ а } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

получаем:

$$\begin{aligned} A_e &= P A_f P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \\ A_f^* &= P^{-1} A_e^T P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$



Пример 2. В базисе $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ скалярное произведение задано формулой

$$(x, y) = 3x_1y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 - 2x_1y_3 - 2x_3y_1 - x_2y_3 - x_3y_2, \quad (7.6.9)$$

а линейный оператор A – матрицей $A_e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу A_e^* сопряженного оператора A^* в том же базисе e .

Решение. Начнем с построения ортонормированного базиса $f = \{f_1, f_2, f_3\}$. Зная f , можно по формуле $A_f = P^{-1}A_eP$ вычислить матрицу A_f оператора A в этом базисе (здесь P – матрица перехода от базиса e к базису f) и найти матрицу $A_f^* = A_f^T$ сопряженного оператора A^* в базисе f . Матрицу A_e^* сопряженного оператора A^* в базисе e найдем при помощи соотношения $A_e^* = T^{-1}A_f^*T$, где T – матрица перехода от базиса f к базису e . В силу того что $T = P^{-1}$, имеем $A_e^* = PA_f^*P^{-1}$.

Построение ортонормированного базиса осуществим, применяя процесс ортогонализации Грама–Шмидта и нормирование векторов

$$g_1 = e_1;$$

$$g_2 = e_2 - \frac{(e_2, g_1)}{(g_1, g_1)}g_1 = e_2 - \frac{1}{3}e_1;$$

$$g_3 = e_3 - \frac{(e_3, g_1)}{(g_1, g_1)}g_1 - \frac{(e_3, g_2)}{(g_2, g_2)}g_2 = e_3 - \frac{(-2)}{3}e_1 - \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)}{\frac{2}{3}}\left(e_2 - \frac{1}{3}e_1\right) = e_3 + \frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{2}e_1.$$

Векторы g_1, g_2, g_3 ортогональны в смысле скалярного произведения (7.6.9).

Учитывая, что $\|g_1\| = \sqrt{(g_1, g_1)} = \sqrt{3}$, $\|g_2\| = \sqrt{(g_2, g_2)} = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $\|g_3\| = \sqrt{(g_3, g_3)} = \sqrt{\frac{1}{2}}$, получаем:

$$f_1 = \frac{1}{\|g_1\|}g_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}e_1;$$



$$f_2 = \frac{1}{\|g_2\|} g_2 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{3} e_1 + e_2 \right) = -\frac{1}{\sqrt{6}} e_1 + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} e_2;$$

$$f_3 = \frac{1}{\|g_3\|} g_3 = \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} e_1 + \frac{1}{2} e_2 + e_3 \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} e_2 + \sqrt{2} \cdot e_3.$$

Таким образом, матрица перехода от базиса e к ортонормированному базису f

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 & \sqrt{3} \\ 0 & 3 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 2\sqrt{3} \end{pmatrix},$$

а обратная к ней матрица

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & \sqrt{2} & -2\sqrt{2} \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} A_f &= \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & \sqrt{2} & -2\sqrt{2} \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} P = \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5\sqrt{2} & 4\sqrt{2} & -3\sqrt{2} \\ 4 & -1 & 3 \\ 0 & \sqrt{3} & 3\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 & \sqrt{3} \\ 0 & 3 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 2\sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 10 & 7\sqrt{2} & 3\sqrt{6} \\ 4\sqrt{2} & -7 & 9\sqrt{3} \\ 0 & 3\sqrt{3} & 21 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
A_f^* &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 10 & 4\sqrt{2} & 0 \\ 7\sqrt{2} & -7 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{6} & 9\sqrt{3} & 21 \end{pmatrix}; \\
A_e^* &= \frac{1}{6\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 & \sqrt{3} \\ 0 & 3 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 2\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 4\sqrt{2} & 0 \\ 7\sqrt{2} & -7 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{6} & 9\sqrt{3} & 21 \end{pmatrix} P^{-1} = \\
&= \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 12\sqrt{2} & 42 & 18\sqrt{3} \\ 30\sqrt{2} & 6 & 30\sqrt{3} \\ 18\sqrt{2} & 54 & 42\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & \sqrt{2} & -2\sqrt{2} \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 7 & 3\sqrt{3} \\ 5\sqrt{2} & 1 & 5\sqrt{3} \\ 3\sqrt{2} & 9 & 7\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & \sqrt{2} & -2\sqrt{2} \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Пример 3. Для симметричной матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$ постройте каноническое разложение с ортогональной трансформирующей матрицей и, пользуясь им, найдите A^{28} .

Решение. Характеристический многочлен

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2$$

имеет корни $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$. Поэтому матрицей Λ в каноническом разложении является $\Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Перейдем к построению ортогональной матрицы P в каноническом разложении. Найдем собственные векторы e_1, e_2 , отвечающие собственным значениям λ_1, λ_2 :

$$A - \lambda_1 I = A + I = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$



Общим решением однородной системы $(A - \lambda_1 I)x = 0$ является вектор $x = (-\sqrt{2}\alpha, \alpha)^T$. Выбирая $\alpha = -\sqrt{2}$, получаем $e_1 = (2, -\sqrt{2})^T$.

$$A - \lambda_2 I = A - 2I = \begin{pmatrix} -2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Общим решением однородной системы $(A - \lambda_2 I)y = 0$ будет вектор $y = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\beta, \beta\right)^T$. Выбирая $\beta = 2$, получаем $e_2 = (\sqrt{2}, 2)^T$. Подчеркнем, что e_1 и e_2

сразу ортогональны как собственные векторы симметричного оператора, отвечающие различным собственным значениям. Поскольку $\|e_1\| = \sqrt{6}$, $\|e_2\| = \sqrt{6}$, получаем ортонормированную систему собственных векторов $f_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2, -\sqrt{2})^T$, $f_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(\sqrt{2}, 2)^T$ матрицы A , являющуюся столбцами иско-

мой трансформирующей матрицы, т. е. $P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$.

Проверим правильность построения канонического разложения $A = P\Lambda P^{-1}$. Учитывая, что $P^{-1} = P^T$, имеем

$$P\Lambda P^T = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^T = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2 & 2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} = A.$$

Полученное каноническое разложение позволяет вычислить A^{28} по формуле $A^{28} = P\Lambda^{28}P^T$, где $\Lambda^{28} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{28} \end{pmatrix}$.

Пример 4. Линейный оператор A пространства $R_{1,3}$ в базисе $f_1 = (1, 0, 0)$,

$f_2 = (1, 1, 0)$, $f_3 = (1, 1, 1)$ задан матрицей $A_f = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2\sqrt{6} \\ 1-\sqrt{6} & 4 & 2+\sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Является

ли A ортогональным оператором?



Решение. Найдем матрицу A_e оператора A в ортонормированном базисе $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ и проверим, будет ли полученная матрица ортогональной.

$$A_e = P^{-1} A_f P,$$

где P – матрица перехода от базиса $f = \{f_1, f_2, f_3\}$ к базису $e = \{e_1, e_2, e_3\}$. Поскольку $f_1 = e_1$, $f_2 = e_1 + e_2$, $f_3 = e_1 + e_2 + e_3$, матрица перехода от базиса e к базису f

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

и

$$\begin{aligned} A_e &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2\sqrt{6} \\ 1-\sqrt{6} & 4 & 2+\sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 0 & 2 \end{pmatrix} P = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4-\sqrt{6} \\ 1 & 4 & 4+\sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -\sqrt{6} \\ 1 & 3 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -\sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

В силу того что

$$A_e^T A_e = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -\sqrt{6} \\ 1 & 3 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -\sqrt{6} & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$



$$A_e A_e^T = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -\sqrt{6} \\ 1 & 3 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -\sqrt{6} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

заключаем, что A является ортогональным оператором.

Пример 5. Ортогональный оператор A в ортонормированном базисе

$f = \{f_1, f_2, f_3\}$ имеет ортогональную матрицу $A_f = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$. Постройте

базис $e = \{e_1, e_2, e_3\}$, в котором оператор A имеет матрицу A_e канонического вида (7.6.8), и найдите матрицу A_e .

Решение. Характеристический многочлен

$$\begin{aligned} \det(A_f - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} \frac{2}{3} - \lambda & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} - \lambda & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} - \lambda \end{pmatrix} = \left(\frac{2}{3} - \lambda\right)^3 - \frac{1}{27} + \frac{8}{27} + \frac{2}{9} \left(\frac{2}{3} - \lambda\right) + \\ &+ \frac{2}{9} \left(\frac{2}{3} - \lambda\right) + \frac{2}{9} \left(\frac{2}{3} - \lambda\right) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - 2\lambda + 1 \end{aligned}$$

оператора A имеет корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2} = \mu \pm i\nu$.

В силу того что

$$A - \lambda_1 I = A - I = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$



$$\begin{aligned}
A - \lambda_2 I &= A - \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) I = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} - i \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{6} - i \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \sim \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 - i3\sqrt{3} & -2 & 4 \\ 4 & 1 - i3\sqrt{3} & -2 \\ -2 & 4 & 1 - i3\sqrt{3} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -\frac{1}{2} + i \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ 4 & 1 - i3\sqrt{3} & -2 \\ 1 - i3\sqrt{3} & -2 & 4 \end{pmatrix} \sim \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -\frac{1}{2} + i \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 9 - i3\sqrt{3} & -i6\sqrt{3} \\ 0 & -i6\sqrt{3} & -9 - i3\sqrt{3} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -\frac{1}{2} + i \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -\frac{1}{2} + i \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

однородная система $(A - \lambda_1 I)x = 0$ имеет общее решение $x = (\alpha, \alpha, \alpha)^T$, а одно-

родная система $(A - \lambda_2 I)y = 0$ имеет общее решение $y = \left(\left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \beta, \right.$

$\left. \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \beta, \beta \right)^T$. Выбирая $\alpha = 1$ и $\beta = -1 + i\sqrt{3}$, получаем векторы $g_1 = (1, 1, 1)^T$

и $h = (2, -1 - i\sqrt{3}, -1 + i\sqrt{3})^T = g_2 + ig_3 = (2, -1, -1)^T + i(0, -\sqrt{3}, \sqrt{3})^T$. Заметим, что векторы g_1, g_2, g_3 ортогональны (см. задачи 7.6.40 и 7.6.46). Нормируя их, придем к искомому базису e :

$$e_1 = \frac{1}{\|g_1\|} g_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} (1, 1, 1)^T;$$



$$e_2 = \frac{1}{\|g_2\|} g_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} (2, -1, -1)^T;$$

$$e_3 = \frac{1}{\|g_3\|} g_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} (0, -\sqrt{3}, \sqrt{3})^T,$$

в котором оператор A имеет каноническую матрицу

$$A_e = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & \nu \\ 0 & -\nu & \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Проверим правильность вычислений:

$$\begin{aligned} P^{-1} A_f P &= P^T A_f P = \frac{1}{3\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -\sqrt{3} & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} P = \\ &= \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 3 & -6 & 3 \\ -3\sqrt{3} & 0 & 3\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2 & 0 \\ \sqrt{2} & -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{2} & -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = A_e, \end{aligned}$$

где $P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2 & 0 \\ \sqrt{2} & -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{2} & -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$

7.6.1. Из определения сопряженного оператора выведите следующие свойства:

а) $(A^*)^* = A;$

б) $(A+B)^* = A^* + B^*;$



в) $O^* = O$;

г) $(\alpha A)^* = \bar{\alpha} A^*$;

д) $(AB)^* = B^* A^*$;

е) $I^* = I$;

ж) если оператор A невырожден, то $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$;

з) $(A^m)^* = (A^*)^m$ для всякого целого неотрицательного m ;

и) если оператор A невырожден, то свойство з) имеет место для любого целого числа m ;

к) если $f(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_m t^m$ — произвольный многочлен, то $[f(A)]^* = \bar{f}(A^*)$, где $\bar{f}(t) = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 t + \dots + \bar{a}_m t^m$.

7.6.2. Докажите, что свойства, перечисленные в предыдущей задаче, выполняются и для сопряженных матриц.

7.6.3. Покажите, что если операторы A и B перестановочны, то перестановочны и сопряженные им операторы A^* и B^* (операторы A и B из w_{XX} называются **перестановочными**, если $AB = BA$).

7.6.4. Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ — ортогональный (но не ортонормированный!) базис пространства X . Найдите связь между матрицами в этом базисе оператора A из w_{XX} и сопряженного оператора A^* .

7.6.5. Пусть оператор A действует в одномерном унитарном (евклидовом) пространстве. В чем состоит преобразование A^* , сопряженное по отношению к A ?

7.6.6. Пусть e_1, e_2 — ортонормированный базис евклидова пространства, $A_a = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ — матрица линейного оператора A в базисе $a_1 = e_1$, $a_2 = e_1 + e_2$.

Найдите матрицу оператора A^* в базисе a_1, a_2 .



7.6.7. Линейный оператор A евклидова пространства в базисе $a_1 = (1, 2, 1)$,

$a_2 = (1, 1, 2)$, $a_3 = (1, 1, 0)$ задан матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу оператора A^* в том же базисе, считая, что координаты векторов базиса даны в некотором ортонормированном базисе.

7.6.8. Найдите матрицу линейного оператора A^* в ортонормированном базисе e_1, e_2, e_3 , если A переводит векторы $a_1 = (0, 0, 1)$, $a_2 = (0, 1, 1)$, $a_3 = (1, 1, 1)$ в векторы $b_1 = (1, 2, 1)$, $b_2 = (3, 1, 2)$, $b_3 = (7, -1, 4)$ соответственно, считая, что координаты всех векторов даны в базисе e_1, e_2, e_3 .

Пусть в некотором базисе скалярное произведение задано билинейной формой $A(x; y)$, а линейный оператор – матрицей A . Найдите матрицу A^* сопряженного оператора в том же базисе:

7.6.9. $A(x; y) = x_1y_1 + 5x_2y_2 + 6x_3y_3 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 + 3x_2y_3 + 3x_3y_2$;

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

7.6.10. $A(x; y) = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2$;

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

7.6.11. В пространстве многочленов $M_2(R)$ задано скалярное произведение

$$(f, g) = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2, \quad (7.6.10)$$

где $f(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2$, $g(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2$. Найдите матрицы оператора дифференцирования A и сопряженного оператора A^* в базисе:

а) $1, t, t^2$;



$$\text{б) } \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t, \quad t^2 - 1, \quad \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t;$$

$$\text{в) } 1, \quad t, \quad \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}.$$

7.6.12. В пространстве $M_2(R)$ введено скалярное произведение

$$(f, g) = f(-1)g(-1) + f(0)g(0) + f(1)g(1). \quad (7.6.11)$$

Найдите матрицу оператора, сопряженного с оператором дифференцирования, в каждом из базисов, указанных в задаче 7.6.11. Сравните полученные матрицы с соответствующими матрицами задачи 7.6.11.

7.6.13. В пространстве $M_2(R)$ введено скалярное произведение

$$(f, g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt. \quad (7.6.12)$$

Найдите матрицу оператора, сопряженного с оператором дифференцирования, в каждом из базисов, указанных в задаче 7.6.11.

7.6.14. Покажите, что ранг сопряженного оператора A^* равен рангу оператора A .

7.6.15. Докажите, что ядро оператора A^* совпадает с ортогональным дополнением к образу оператора A .

7.6.16. Найдите ядро и образ оператора пространства $M_2(R)$, сопряженного с оператором дифференцирования, если скалярное произведение в $M_2(R)$ введено формулой:

а) (7.6.10);

б) (7.6.11);

в) (7.6.12).

7.6.17. Докажите, что ядро оператора A^*A совпадает с ядром оператора A .

7.6.18. Докажите, что образ оператора A^*A совпадает с образом оператора A^* .



7.6.19. Докажите, что для всякого оператора A из w_{XX} справедливо представление

$$A = A_1 + iA_2, \quad (7.6.13)$$

где A_1 и A_2 – эрмитовы операторы, называемое **эрмитовым разложением оператора A** .

7.6.20. Докажите, что линейная комбинация с действительными коэффициентами самосопряженных преобразований есть самосопряженное преобразование.

7.6.21. Докажите, что произведение AB двух самосопряженных операторов A и B тогда и только тогда будет самосопряженным, когда A и B перестановочны.

7.6.22. Докажите, что если A и B – самосопряженные преобразования, то самосопряженными будут также преобразования $AB + BA$ и $i(AB - BA)$.

7.6.23. Докажите, что произведение двух ортогональных (соответственно унитарных) преобразований само ортогонально (унитарно).

7.6.24. Покажите, что если U – унитарное преобразование, а A – самосопряженное преобразование, то $U^{-1}AU$ – также самосопряженное.

7.6.25. Докажите, что если A – самосопряженное преобразование унитарного пространства, то преобразование $B = (A - iI)^{-1}(A + iI)$ существует и является унитарным.

7.6.26. Пусть U – унитарное преобразование. Докажите, что если преобразование $U - I$ обратимо, то преобразование $A = i(U - I)^{-1}(U + I)$ самосопряженное.

7.6.27. Постройте каноническое разложение симметричной матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ с ортогональной трансформирующей матрицей.



7.6.28. В евклидовом пространстве R^3 линейный оператор A переводит систему векторов $a = \{a_1, a_2, a_3\}$ в систему $b = \{b_1, b_2, b_3\}$. Будет ли A самосопряженным, если:

а) $a_1 = (0, 1, 1)$, $a_2 = (1, 0, 1)$, $a_3 = (1, 1, 0)$,

$b_1 = (2, 3, 1)$, $b_2 = (-1, 0, 3)$, $b_3 = (-5, 1, 4)$;

б) $a_1 = (-2, 3, 1)$, $a_2 = (3, 6, 2)$, $a_3 = (1, 2, 1)$,

$b_1 = (-6, 9, 3)$, $b_2 = (2, 11, 33)$, $b_3 = (1, 4, 5)$;

в) $a_1 = (-2, 3, 1)$, $a_2 = (3, 6, 2)$, $a_3 = (1, 2, 1)$,

$b_1 = (-5, 10, 6)$, $b_2 = (4, 20, 5)$, $b_3 = (1, 7, 2)$;

г) $a_1 = (2, 2, -1)$, $a_2 = (2, -1, 2)$, $a_3 = (7, 1, -1)$,

$b_1 = (0, -3, -1)$, $b_2 = (2, -2, -1)$, $b_3 = (2, -1, 4)$?

7.6.29. Линейный оператор A евклидова арифметического пространства R^4 переводит систему векторов $a = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ в систему $b = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$. Будет ли A ортогональным, если:

а) $a_1 = (2, 2, 2, 2)$, $a_2 = (2, 0, 2, 2)$, $a_3 = (2, 2, 2, 0)$, $a_4 = (2, 2, 0, 2)$,

$b_1 = (4, 0, 0, 0)$, $b_2 = (3, -1, 1, 1)$, $b_3 = (3, 1, 1, -1)$, $b_4 = (3, 1, -1, 1)$;

б) $a_1 = (1, 1, 0, 0)$, $a_2 = (0, 1, 1, 0)$, $a_3 = (0, 0, 1, 1)$, $a_4 = (0, 0, 0, 1)$,

$b_1 = (1, 1, 0, 0)$, $b_2 = (0, -1, 1, 0)$, $b_3 = (0, 0, 1, -1)$, $b_4 = (0, 0, 0, -1)$?

7.6.30. Покажите, что матрица A ортогональна:

а) $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; б) $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; в) $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

7.6.31. Покажите, что матрица

$$\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4i & -4+3i & 2+6i \\ 4+3i & 4i & -6-2i \\ 6+2i & -2-6i & 1 \end{pmatrix}$$

унитарна.



7.6.32. Линейный оператор A евклидова пространства R^3 в базисе $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right), \left(0, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right), \left(0, 0, \frac{1}{3}\right)$ задан матрицей:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} -4 & -5 & 2 \\ 16 & 14 & -5 \\ 23 & 16 & -4 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Является ли A ортогональным оператором?

7.6.33. Докажите, что если $A = HU$, где H и U перестановочны, H – эрмитово, U – унитарно, то A – нормальное преобразование.

7.6.34. Докажите, что если A – нормальный оператор, то $\|Ax\| = \|A^*x\| \quad \forall x$.

7.6.35. Убедитесь, что линейный оператор унитарного пространства, заданный матрицей A в ортонормированном базисе, является нормальным. Найдите ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора, и матрицу Λ оператора в этом базисе, если:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

7.6.36. Докажите, что нормальный оператор является самосопряженным тогда и только тогда, когда все корни характеристического многочлена действительны.

7.6.37. Докажите, что нормальный оператор евклидова (унитарного) пространства является ортогональным (унитарным) тогда и только тогда, когда все корни его характеристического многочлена по модулю равны единице.

7.6.38. Покажите, что если A – нормальный оператор, то нормальными будут также операторы:

- а) αA для любого числа α ;
- б) A^k при любом натуральном k ;



в) $f(A)$ для любого многочлена $f(t)$;

г) A^{-1} , если A невырожден;

д) A^* .

7.6.39. Докажите, что ядро нормального оператора является ортогональным дополнением к его образу.

7.6.40. Покажите, что собственные подпространства нормального оператора попарно ортогональны.

7.6.41. Может ли нормальный оператор иметь неортогональный базис, составленный из собственных векторов?

7.6.42. Для унитарной матрицы

$$A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4+3i & 4i & -6-2i \\ -4i & 4-3i & -2-6i \\ 6+2i & -2-6i & 1 \end{pmatrix}$$

найдите диагональную матрицу Λ и унитарную матрицу P такие, что $\Lambda = P^{-1}AP$.

7.6.43. Найдите ортонормированный базис из собственных векторов и матрицу Λ в этом базисе для линейного оператора, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей A (искомый базис определен неоднозначно), если:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } A = \begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}; \quad \text{г) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

7.6.44. Для матрицы A найдите диагональную матрицу Λ и унитарную матрицу P такие, что $\Lambda = P^{-1}AP$, если:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 3 & 2+2i \\ 2-2i & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 3 & 2-i \\ 2+i & 7 \end{pmatrix}.$$

7.6.45. Найдите ортогональное преобразование, приводящее квадратичные формы к каноническому виду, и запишите этот канонический вид (искомое преобразование определено неоднозначно):

$$\text{а) } 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_2^2;$$



б) $4x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2$;

в) $2x_1x_2$;

г) $6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$;

д) $x_1^2 + 2x_2x_3$;

е) $x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$;

ж) $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3$;

з) $2x_1x_2 - 2x_3x_4$.

7.6.46. Пусть X – n - мерное унитарное пространство и A – линейное преобразование этого пространства. Покажите, что если матрица преобразования A в некотором базисе действительна и собственный вектор, соответствующий собственному значению $\mu + \nu i$ ($\nu \neq 0$), представлен в виде $x + yi$, где x и y имеют действительные координаты, то x и y ортогональны, имеют одинаковую длину, причем $Ax = \mu x - \nu y$, $Ay = \nu x + \mu y$.

7.6.47. Для ортогонального оператора, заданного в ортонормированном базисе матрицей A , найдите ортонормированный базис, в котором матрица B этого оператора имеет канонический вид (7.6.8). (Искомый базис определен неоднозначно.) Найдите этот канонический вид:

а) $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; б) $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$.

7.6.48. Найдите канонический вид B ортогональной матрицы A и ортогональную матрицу P такую, что $B = P^{-1}AP$, если:

а) $A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -\sqrt{6} \\ 1 & 3 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -\sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$; б) $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.



7.6.49. Докажите, что самосопряженное преобразование A тогда и только тогда положительно определено (или неотрицательно), когда все его собственные значения положительны (соответственно неотрицательны). Покажите, что для любого (а не только для самосопряженного) линейного преобразования A из $(Ax, x) > 0$ (или ≥ 0) следует, что все собственные значения A положительны (соответственно неотрицательны). Приведите пример, показывающий, что для несамосопряженного линейного преобразования обратное утверждение может быть неверно.

7.6.50. Покажите, что определитель положительно определенного оператора положителен. Выведите отсюда, что в положительно определенной матрице все главные миноры положительны.

ГЛАВА 8

ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

§ 8.1. ПРЯМЫЕ В АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть дано множество Ω элементов $A, B, C, \dots$, называемых точками, и линейное пространство X над полем F с элементами $x, y, z, \dots$, называемыми векторами. Пусть далее каждой упорядоченной паре точек A и B из Ω поставлен в соответствие единственный вектор $x = \overrightarrow{AB}$ из линейного пространства X , причем для этого соответствия выполняются следующие две аксиомы:

1^0 для любой точки A из Ω и любого вектора x из X существует в Ω единственная точка B такая, что $x = \overrightarrow{AB}$;

2^0 для любых точек A, B, C из Ω выполняется «правило треугольника»

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Множество Ω вместе с таким соответствием называется **аффинным пространством**, связанным с линейным пространством X . Если линейное пространство X n -мерное, то и аффинное пространство Ω называется n -мерным аффинным пространством и обозначается через Ω^n .

Системой координат или **репером** в аффинном пространстве Ω^n называется упорядоченный набор

$$(O, e_1, e_2, \dots, e_n), \tag{8.1.1}$$

состоящий из некоторой точки O из Ω^n , называемой **началом координат**, и некоторого базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$ линейного пространства X . Система координат называется **прямоугольной**, если базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ ортонормированный.



Координатами точки $M \in \Omega^n$ **в системе координат** (8.1.1) называются координаты $x_1, x_2, \dots, x_n$ ее радиуса-вектора $\vec{OM}$ в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$, т. е. коэффициенты из разложения

$$\vec{OM} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n.$$

Точку M с координатами $x_1, x_2, \dots, x_n$ будем обозначать через $M = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, а вектор x с координатами $x_1, x_2, \dots, x_n$ — соответственно через $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Если в аффинном пространстве Ω^n даны координатами в системе (8.1.1) две точки $M = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $N = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, то $\vec{MN} = \{y_1 - x_1, y_2 - x_2, \dots, y_n - x_n\}$, т. е. координаты вектора $\vec{MN}$ равны разностям соответствующих координат конца и начала вектора.

Пусть в аффинном пространстве Ω^n зафиксирована система координат (8.1.1), заданы точка $M_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$ и направляющий вектор $a = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Тогда множество точек аффинного пространства Ω^n , радиусы-векторы x которых удовлетворяют уравнению

$$x = x_0 + at, \quad (8.1.2)$$

где $x_0 = \{x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}\}$ и параметр t принимает любые значения из поля F , называется **прямой**, проходящей через точку M_0 параллельно вектору a . Соотношение (8.1.2) называется **параметрическим уравнением прямой в векторной форме**.

Векторное уравнение (8.1.2) равносильно n координатным уравнениям

$$\begin{cases} x_1 = x_{01} + a_1 t; \\ x_2 = x_{02} + a_2 t; \\ \dots \dots \dots \\ x_n = x_{0n} + a_n t, \end{cases} \quad (8.1.3)$$

которые называются **параметрическими уравнениями прямой в координатной форме**.



Исключая параметр t в уравнениях (8.1.3), получаем **каноническое уравнение прямой** в аффинном пространстве Ω^n

$$\frac{x_1 - x_{01}}{a_1} = \frac{x_2 - x_{02}}{a_2} = \dots = \frac{x_n - x_{0n}}{a_n}. \quad (8.1.4)$$

Если на прямой известны две различные точки $M_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$ и $M_1 = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n})$, то уравнение этой прямой в векторной форме

$$x = x_0 + (x_1 - x_0)t \quad (8.1.5)$$

и в канонической форме

$$\frac{x_1 - x_{01}}{x_{11} - x_{01}} = \frac{x_2 - x_{02}}{x_{12} - x_{02}} = \dots = \frac{x_n - x_{0n}}{x_{1n} - x_{0n}}. \quad (8.1.6)$$

Угол φ между двумя прямыми с направляющими векторами a и b определяется как угол между векторами a, b , не превышающий π , и вычисляется по формуле

$$\cos \varphi = \frac{|(a, b)|}{\|a\| \cdot \|b\|}. \quad (8.1.7)$$

Необходимым и достаточным условием того, чтобы две прямые в аффинном пространстве Ω^n , заданные векторными уравнениями $x = x_1 + at$ и $x = x_2 + bu$, пересекались или были параллельны, является линейная зависимость тройки векторов $x_1 - x_2, a, b$. В случае скрещивающихся прямых векторы $x_1 - x_2, a, b$ линейно независимы. Направляющие векторы параллельных прямых коллинеарны, т. е. $b = a\tau, \tau \in F$.

Расстояние ω от точки M с радиусом-вектором $\tilde{x}$ до прямой, заданной уравнением (8.1.2), определяется как минимальное расстояние от точки M до точек прямой и вычисляется по формуле

$$\omega^2 = \frac{\begin{vmatrix} (\tilde{x} - x_0, \tilde{x} - x_0) & (a, \tilde{x} - x_0) \\ (a, \tilde{x} - x_0) & (a, a) \end{vmatrix}}{(a, a)}. \quad (8.1.8)$$



Основание N перпендикуляра, опущенного из данной точки M на прямую, совпадает с той точкой прямой, которая находится на минимальном расстоянии от данной точки.

Расстояние ω между двумя скрещивающимися прямыми с уравнениями $x = x_1 + at$ и $x = x_2 + bu$ определяется как кратчайшее расстояние между точками этих прямых и вычисляется по формуле

$$\omega^2 = \frac{\begin{vmatrix} (x_1 - x_2, x_1 - x_2) & (a, x_1 - x_2) & (b, x_1 - x_2) \\ (a, x_1 - x_2) & (a, a) & (a, b) \\ (b, x_1 - x_2) & (a, b) & (b, b) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (a, a) & (a, b) \\ (a, b) & (b, b) \end{vmatrix}}. \quad (8.1.9)$$

Основания общего перпендикуляра двух прямых совпадают с теми точками этих прямых, расстояние между которыми минимально.

Пример 1. Найдите условия, необходимые и достаточные для того, чтобы через точку, заданную вектором c , можно было провести единственную прямую, пересекающую две прямые $x = a_0 + a_1t$ и $x = b_0 + b_1t$. Укажите метод построения такой прямой и точек пересечения ее с данными прямыми.

Решение. Пусть $x = c + dt$ – уравнение искомой прямой. Тогда необходимые и достаточные условия для того, чтобы прямая $x = c + dt$ пересекала прямые $x = a_0 + a_1t$ и $x = b_0 + b_1t$, состоят в том, что системы векторов $\{d, a_1\}$ и $\{d, b_1\}$ линейно независимы, вектор $a_0 - c$ линейно выражается через $\{d, a_1\}$ и вектор $b_0 - c$ линейно выражается через $\{d, b_1\}$. Формально это означает, что существуют действительные значения t_1, t_2, τ_1, τ_2 такие, что

$$a_0 + a_1t_1 = c + d\tau_1; \quad (8.1.10)$$

$$b_0 + b_1t_2 = c + d\tau_2, \quad (8.1.11)$$

причем $\tau_1 \neq 0$ и $\tau_2 \neq 0$. Выразив d из соотношений (8.1.10), (8.1.11), получим соответственно формулы



$$d = \frac{1}{\tau_1}(a_0 - c) + \frac{t_1}{\tau_1}a_1; \quad (8.1.12)$$

$$d = \frac{1}{\tau_2}(b_0 - c) + \frac{t_2}{\tau_2}b_1. \quad (8.1.13)$$

Вычитая равенство (8.1.13) из (8.1.12), приходим к нулевой линейной комбинации системы векторов $\{a_0 - c, b_0 - c, a_1, b_1\}$:

$$\frac{1}{\tau_1}(a_0 - c) + \left(-\frac{1}{\tau_2}\right)(b_0 - c) + \frac{t_1}{\tau_1}a_1 + \left(-\frac{t_2}{\tau_2}\right)b_1 = \Theta,$$

в которой коэффициенты $\frac{1}{\tau_1}$ и $\left(-\frac{1}{\tau_2}\right)$ отличны от нуля, что говорит о линейной зависимости указанной четверки векторов.

Подставив формулу (8.1.13) в (8.1.10), а формулу (8.1.12) в (8.1.11), получим две системы линейных алгебраических уравнений:

$$a_1 t_1 + (b_0 - c) \left(-\frac{\tau_1}{\tau_2}\right) + b_1 \left(-\frac{\tau_1}{\tau_2} t_2\right) = c - a_0; \quad (8.1.14)$$

$$b_1 t_2 + (a_0 - c) \left(-\frac{\tau_2}{\tau_1}\right) + a_1 \left(-\frac{\tau_2}{\tau_1} t_1\right) = c - b_0 \quad (8.1.15)$$

относительно переменных $t_1, \left(-\frac{\tau_1}{\tau_2}\right), \left(-\frac{\tau_1}{\tau_2} t_2\right)$ и $t_2, \left(-\frac{\tau_2}{\tau_1}\right), \left(-\frac{\tau_2}{\tau_1} t_1\right)$ соответственно, которые будут иметь единственное решение в случае линейной независимости троек векторов $\{a_1, b_0 - c, b_1\}$ и $\{b_1, a_0 - c, a_1\}$.

Таким образом, для того чтобы через точку, заданную вектором c , можно было провести единственную прямую, пересекающую две прямые $x = a_0 + a_1 t$ и $x = b_0 + b_1 t$, необходимо и достаточно, чтобы четверка векторов $\{a_0 - c, b_0 - c, a_1, b_1\}$ была линейно зависима, а каждая из двух троек $\{a_1, b_0 - c, b_1\}$ и $\{a_1, a_0 - c, b_1\}$ оказалась линейно независима.



Полагая, например, $\tau_2 = 1$, находим путем решения системы (8.1.14) значения t_1, τ_1, t_2 и вычисляем по формулам (8.1.10), (8.1.11) точки пересечения, а по формуле (8.1.13) – направляющий вектор искомой прямой.

Пример 2. Найдите прямую, проходящую через точку, заданную вектором c и пересекающую прямые $x = a_0 + a_1 t$ и $x = b_0 + b_1 t$, и найдите точки пересечения искомой прямой с двумя данными прямыми, если $c = \{8, 9, -11, -15\}$; $a_0 = \{1, 0, -2, 1\}$, $a_1 = \{1, 2, -1, -5\}$; $b_0 = \{0, 1, 1, -1\}$, $b_1 = \{2, 3, -2, -4\}$.

Решение. Поскольку

$$\begin{pmatrix} a_0 - c \\ b_0 - c \\ a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -9 & 9 & 16 \\ -8 & -8 & 12 & 14 \\ 1 & 2 & -1 & -5 \\ 2 & 3 & -2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 5 & 2 & -19 \\ 0 & 8 & 4 & -26 \\ 0 & -1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & 4 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_0 - c \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -5 \\ -8 & -8 & 12 & 14 \\ 2 & 3 & -2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 8 & 4 & -26 \\ 0 & -1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 22 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 - c \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -5 \\ -7 & -9 & 9 & 16 \\ 2 & 3 & -2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 5 & 2 & -19 \\ 0 & -1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 11 \end{pmatrix},$$

условия, необходимые и достаточные для того, чтобы через точку, заданную вектором c , можно было провести прямую, пересекающую две прямые $x = a_0 + a_1 t$ и $x = b_0 + b_1 t$, выполнены. Составим и решим систему (8.1.14):



$$\begin{pmatrix} a_1 & b_0 - c & b_1 & c - a_0 \\ 1 & -8 & 2 & 7 \\ 2 & -8 & 3 & 9 \\ -1 & 12 & -2 & -9 \\ -5 & 14 & -4 & -16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -8 & 2 & 7 \\ 0 & 8 & -1 & -5 \\ 0 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & -26 & 6 & 19 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -8 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -8 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

т. е. $\left(-\frac{\tau_1}{\tau_2} t_2\right) = 1$, $\left(-\frac{\tau_1}{\tau_2}\right) = -\frac{1}{2}$, $t_1 = 1$. Положим $\tau_2 = 2$. Тогда $\tau_1 = 1$, $t_2 = -2$.

Следовательно, координаты направляющего вектора искомой прямой $x = c + dt$

$$d = (a_0 - c) + a_1 = \{-7, -9, 9, 16\} + \{1, 2, -1, -5\} = \{-6, -7, 8, 11\};$$

координаты точек пересечения

$$M_1 = a_0 + a_1 = (1, 0, -2, 1) + (1, 2, -1, -5) = (2, 2, -3, -4);$$

$$M_2 = b_0 - 2b_1 = (0, 1, 1, -1) - 2(2, 3, -2, -4) = (-4, -5, 5, 7).$$

Проверка:

$$\frac{1}{2}(b_0 - c) - b_1 = \frac{1}{2}\{-8, -8, 12, 14\} - \{2, 3, -2, -4\} = \{-6, -7, 8, 11\} = d;$$

$$c + d = (8, 9, -11, -15) + (-6, -7, 8, 11) = (2, 2, -3, -4) = M_1;$$

$$c + 2d = (8, 9, -11, -15) + (-12, -14, 16, 22) = (-4, -5, 5, 7) = M_2.$$

Пример 3. Составьте уравнение прямых, проходящих через точку $A = (3, 1)$ и образующих с прямой $3x = y + 2$ углы в 45° .

Решение. Выберем две точки M_1 и M_2 на прямой $3x = y + 2$. Пусть $M_1 = (0, -2)$, $M_2 = (1, 1)$. Тогда направляющий вектор прямой



$a = \overrightarrow{M_1M_2} = \{1, 1\} - \{0, -2\} = \{1, 3\}$. Пусть $b = \{b_1, b_2\}$ – направляющий вектор искомой прямой. Тогда в соответствии с соотношением (8.1.7)

$$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|(a, b)|}{\|a\| \cdot \|b\|}.$$

Считая систему координат прямоугольной, отсюда имеем:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|b_1 + 3b_2|}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}},$$

или

$$\frac{1}{2} = \frac{b_1^2 + 6b_1b_2 + 9b_2^2}{10b_1^2 + 10b_2^2},$$

или

$$\begin{aligned} 8b_1^2 - 12b_1b_2 - 8b_2^2 &= 8\left(b_1^2 - \frac{3}{2}b_1b_2\right) - 8b_2^2 = 8\left(b_1 - \frac{3}{4}b_2\right)^2 - \frac{9}{2}b_2^2 - 8b_2^2 = \\ &= 8\left(b_1 - \frac{3}{4}b_2\right)^2 - \frac{25}{2}b_2^2 = \\ &= \left(2\sqrt{2}b_1 - \frac{3\sqrt{2}}{2}b_2 - \frac{5\sqrt{2}}{2}b_2\right)\left(2\sqrt{2}b_1 - \frac{3\sqrt{2}}{2}b_2 + \frac{5\sqrt{2}}{2}b_2\right) = \\ &= 4(b_1 - 2b_2)(b_1 + 2b_2) = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $b_1 = 2b_2$ либо $b_1 = -\frac{1}{2}b_2$. Полагая $b_2 = 2$, получаем два направляющих вектора $\{4, 2\}$, $\{-1, 2\}$, что позволяет записать два канонических уравнения: $\frac{x-3}{4} = \frac{y-1}{2}$ и $\frac{x-3}{-1} = \frac{y-1}{2}$.

В задачах, требующих вычисления скалярных произведений, предполагается, что система координат прямоугольная.



8.1.1. Составьте параметрическое уравнение прямой, проходящей через две данные точки:

а) $A = (3, -1)$ и $B = (2, 1)$;

б) $A = (-1, 2)$ и $B = (1, 2)$.

8.1.2. Составьте каноническое и параметрическое уравнения прямой, проходящей через точку $A = (1, 3)$ и параллельной прямой $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{4}$.

8.1.3. Определите, какой угол с осью Ox образуют следующие прямые:

а) $x + y + 3 = 0$;

б) $\sqrt{3}x - y = 0$.

8.1.4. Найдите, на каком расстоянии от начала координат находятся прямые:

а) $3x - 4y - 10 = 0$;

б) $6x + 8y - 25 = 0$.

8.1.5. Прямая проходит через точку $A = (-1, -3)$ и образует с осью Oy угол 45° . Найдите на этой прямой точку, ордината которой равна 2.

8.1.6. Прямая, параллельная прямой $\frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{-4}$, образует с осью Oy острый угол. Найдите координаты направляющего вектора этой прямой, если его длина равна 25.

8.1.7. На оси ординат найдите точку, находящуюся от точки $A = (4, -6)$ на расстоянии 5.

8.1.8. Найдите углы треугольника, стороны которого заданы уравнениями $5x - 2y - 11 = 0$, $x + 2y + 5 = 0$ и $x - 2y + 1 = 0$.

8.1.9. Составьте уравнения сторон треугольника, для которого точки $A = (-1, 2)$, $B = (3, -1)$ и $C = (0, 4)$ являются серединами сторон.

8.1.10. Найдите параметрическое уравнение прямой, отсекающей на оси Oy отрезок, длина которого равна 2, и образующей с прямой $x - 2y + 3 = 0$ угол 45° .



8.1.11. Определите, при каких значениях параметров α и β прямая $(\alpha - 3\beta - 2)x + (2\alpha + 4\beta - 1)y - 3\alpha + \beta - 2 = 0$ отсекает на оси Ox отрезок, равный 3, а на оси $Oy - 2$.

8.1.12. Точка $M = (-4, 5)$ является вершиной квадрата, диагональ которого лежит на прямой $7x - y + 8 = 0$. Составьте уравнения сторон и второй диагонали квадрата.

8.1.13. Заданы две смежные вершины параллелограмма $A = (2, 5)$ и $B = (5, 3)$ и точка $M = (-2, 0)$ пересечения его диагоналей. Составьте уравнения сторон этого параллелограмма.

8.1.14. Найдите проекцию точки $M = (-8, 12)$ на прямую, проходящую через точки $A = (2, -3)$ и $B = (-5, 1)$.

8.1.15. Через точку $M = (-1, 1)$ проведите прямую так, чтобы середина отрезка ее между параллельными прямыми $x + 2y - 1 = 0$ и $x + 2y - 3 = 0$ лежала на прямой $x - y - 1 = 0$.

8.1.16. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $M = (4, -1)$ и точку пересечения прямых $x - 2y + 1 = 0$ и $y - 1 = 0$.

8.1.17. Найдите ординату точки M , лежащей на одной прямой с точками $A = (-8, -6)$ и $B = (-3, -1)$ и имеющей абсциссу, равную 5.

8.1.18. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $3x - y + 5 = 0$ и $2x + 3y + 1 = 0$ и параллельной прямой $7x - 3y + 5 = 0$.

8.1.19. Через точку пересечения прямых $3x - y = 0$ и $x + 4y - 2 = 0$ проведите прямую, перпендикулярную прямой $2x + 7y = 0$.

8.1.20. На прямой $x - 2y + 2 = 0$ найдите точку P , сумма расстояний от которой до точек $A = (11, 4)$ и $B = (-1, 10)$ минимальна.

8.1.21. На прямой $5x - y - 4 = 0$ найдите точку, равноудаленную от точек $A = (1, 0)$ и $B = (-2, 1)$.

8.1.22. На прямой $x + y - 8 = 0$ найдите точки, равноудаленные от точки $A = (2, 8)$ и от прямой $x - 3y + 2 = 0$.



8.1.23. Составьте уравнения прямых, перпендикулярных к прямой $2x + 6y - 3 = 0$ и отстоящих от точки $A = (5, 4)$ на расстояние $\sqrt{10}$.

8.1.24. Запишите уравнения биссектрисы углов между прямыми $3x + 4y - 1 = 0$ и $4x - 3y + 5 = 0$.

8.1.25. Заданы вершины треугольника $A = (2, -2)$, $B = (3, -5)$ и $C = (5, 1)$. Составьте уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины C на биссектрису внутреннего угла при вершине B .

8.1.26. Запишите уравнение геометрического места точек, равноудаленных от оси OX и точки $A = (0, 3)$.

8.1.27. Составьте уравнение геометрического места точек, равноудаленных от оси OY и точки $A = (4, 0)$.

8.1.28. Определите уравнение геометрического места точек, одинаково удаленных от начала координат и от точки $A = (-5, 3)$.

8.1.29. Найдите уравнение геометрического места точек, отклонение которых от прямой $6x - 8y + 5 = 0$ равно 5.

8.1.30. Составьте канонические и параметрические уравнения прямых, проходящих через точку:

а) $A = (1, 3, 1)$ параллельно прямой $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z+2}{21}$;

б) $A = (0, 1, -3)$ параллельно вектору $a = \{3, -2, 1\}$;

в) $A = (1, 3, 1)$ параллельно прямой $x = 2, y = 3, z = t$;

г) $A = (1, 2, 3)$ параллельно ее радиусу-вектору.

8.1.31. Даны две прямые. Установите, пересекаются они, скрещиваются, параллельны или совпадают. Если прямые пересекаются, найдите координаты точки их пересечения. Прямые заданы уравнениями:

а) $x = 2 + 4t, y = -6t, z = -1 - 8t$ и $x = 7 - 6t, y = 2 + 9t, z = 12t$;

б) $x = 1 + 2t, y = 7 + t, z = 3 + 4t$ и $x = 6 + 3t, y = -1 - 2t, z = -2 + t$.

8.1.32. При каких a прямые $\frac{x-1}{a} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-(a-2)^2}{a}$ и $\frac{x}{1} = \frac{y}{a} = \frac{z}{1}$:

а) пересекаются;

б) скрещиваются;



в) параллельны;

г) совпадают?

8.1.33. Составьте параметрические уравнения прямой, проходящей через точку M и пересекающей две данные прямые:

а) $M = (0, 0, 0)$; $x = 1 + 2t$, $y = 2 + 3t$, $z = -t$ и $x = 4t$, $y = 5 - 5t$, $z = 3 + 2t$;

б) $M = (-1, 1, -1)$; $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{-1}$ и $\frac{x}{4} = \frac{y+5}{-5} = \frac{z-3}{2}$;

в) $M = (-3, 3, 3)$; $\frac{x-9}{8} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{2}$ и $\frac{x-4}{-5} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{2}$.

8.1.34. Найдите прямую, проходящую через точку, заданную вектором c и пересекающую прямые $x = a_0 + a_1t$ и $x = b_0 + b_1t$, и найдите точки пересечения искомой прямой с двумя данными прямыми, если $c = \{4, 5, 2, 7\}$; $a_0 = \{1, 1, 1, 1\}$, $a_1 = \{1, 2, 1, 0\}$; $b_0 = \{2, 2, 3, 1\}$, $b_1 = \{1, 0, 1, 3\}$.

8.1.35. Найдите точку пересечения двух прямых $a_0 + a_1t$ и $b_0 + b_1t$:

а) $a_0 = \{2, 1, 1, 3, -3\}$, $a_1 = \{2, 3, 1, 1, -1\}$, $b_0 = \{1, 1, 2, 1, 2\}$, $b_1 = \{1, 2, 1, 0, 1\}$;

б) $a_0 = \{3, 1, 2, 1, 3\}$, $a_1 = \{1, 0, 1, 1, 2\}$, $b_0 = \{2, 2, -1, -1, -2\}$, $b_1 = \{2, 1, 0, 1, 1\}$.

8.1.36. Точка A лежит на прямой $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{-1}$, причем A равноудалена от точек $B = (3, 0, -2)$ и $C = (-1, 1, 5)$. Найдите координаты точки A .

8.1.37. Составьте уравнение прямой, пересекающей две прямые $\frac{x+3}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z}{1}$ и $\frac{x-10}{5} = \frac{y+7}{4} = \frac{z}{1}$ и параллельной прямой $\frac{x+2}{8} = \frac{y-1}{7} = \frac{z-3}{1}$.

8.1.38. Найдите угол между прямыми:

а) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+3}{-1}$ и $\frac{x+1}{-3} = \frac{y}{4} = \frac{z-10}{6}$;

б) $x = 5 - 2t$, $y = 6 + 4t$, $z = 8t$ и $x = 1 + t$, $y = -2t$, $z = 3 - 4t$.

8.1.39. Даны точка $A = (2, -1, 0)$ и прямая l . Вычислите расстояние от точки A до прямой l ; найдите координаты проекции точки A на l и координаты



наты точки B , симметричной A относительно l ; составьте уравнение прямой, проходящей через точку A и пересекающей данную прямую под прямым углом («опустите перпендикуляр» из точки A на l). Прямая l задана уравнениями:

а) $\frac{x-7}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{2}$;

б) $x = 1 + 2t$, $y = 2 - 2t$, $z = -3 + t$.

8.1.40. Найдите точку, симметричную точке $A = (1, 3, 2)$ относительно прямой $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-1}{1}$.

8.1.41. На прямой $\frac{x-5}{1} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-7}{2}$ найдите точку, ближайшую к точке $A = (5, 3, 4)$.

8.1.42. Найдите расстояние между прямыми:

а) $\frac{x-4}{3} = \frac{y+1}{6} = \frac{z-1}{-2}$ и $\frac{x-5}{-6} = \frac{y}{-12} = \frac{z}{4}$;

б) $x = 3 + 2t$, $y = 10 - 3t$, $z = 3 + 4t$ и $x = 1 + 3t$, $y = 1 - 2t$, $z = 1 + 3t$.

8.1.43. Даны прямые l_1 и l_2 . Составьте уравнения их общего перпендикуляра (т. е. прямой, пересекающей l_1 и l_2 под прямым углом); найдите точки пересечения общего перпендикуляра с данными прямыми; вычислите расстояние между l_1 и l_2 . Прямые заданы уравнениями:

а) $x = 5 + t$, $y = 3 - t$, $z = 13 + t$ и $x = 6 + t$, $y = 1 + 2t$, $z = 10 - t$;

б) $\frac{x-6}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-10}{-1}$ и $\frac{x+4}{-7} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{3}$.

8.1.44. Убедитесь, что прямые $\frac{x-2}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-1}{1}$, $\frac{x-2}{2} = \frac{y-9}{4} = \frac{z-1}{2}$ параллельны, вычислите расстояние между ними.

8.1.45. Найдите расстояние между скрещивающимися прямыми $\frac{x-3}{1} = \frac{y-7}{2} = \frac{z}{-1}$ и $\frac{x-1}{5} = \frac{y-7}{2} = \frac{z+2}{1}$.

[illegible]
$$(u, x) + v = 0, \quad (8.2.4)$$
$$\sum_{i=1}^n u_i(x_i - x_{0i}) = 0, \quad (8.2.5)$$

Гиперплоскость, проходящая через точку $M_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$ параллельно подпространству L , порожденному линейно независимыми векторами $a_1 = \{a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}\}$, $a_2 = \{a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}\}, \dots$, $a_{n-1} = \{a_{n-1,1}, a_{n-1,2}, \dots, a_{n-1,n}\}$, задается уравнением

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_{01} & a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n-1,1} \\ x_2 - x_{02} & a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n-1,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n - x_{0n} & a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} = 0. \quad (8.2.6)$$



Гиперплоскость, проходящая через n точек $M_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$, $M_1 = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n})$, ..., $M_{n-1} = (x_{n-1,1}, x_{n-1,2}, \dots, x_{n-1,n})$, определяющих систему линейно независимых векторов $\left\{ \overrightarrow{M_0 M_i}, i = 1, 2, \dots, n-1 \right\}$, задается уравнением

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_{01} & x_{11} - x_{01} & \dots & x_{n-1,1} - x_{01} \\ x_2 - x_{02} & x_{12} - x_{02} & \dots & x_{n-1,2} - x_{02} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n - x_{0n} & x_{1n} - x_{0n} & \dots & x_{n-1,n} - x_{0n} \end{vmatrix} = 0. \quad (8.2.7)$$

Необходимым и достаточным условием того, что $n+1$ точка $M_0, M_1, \dots, M_n$ аффинного пространства Ω^n лежит на одной гиперплоскости, является линейная зависимость векторов $\overrightarrow{M_0 M_i}, i = 1, 2, \dots, n$.

Угол φ между двумя плоскостями с векторами нормалей u_1 и u_2 определяется как угол между двумя векторами u_1, u_2 , не превышающий $\frac{\pi}{2}$, и вычисляется по формуле

$$\cos \varphi = \frac{|(u_1, u_2)|}{\|u_1\| \cdot \|u_2\|}. \quad (8.2.8)$$

Расстояние ω от точки M с радиусом-вектором $\tilde{x}$ до плоскости, заданной уравнением (8.2.4), определяется как минимальное расстояние от точки M до точек плоскости и вычисляется по формуле

$$\omega = \frac{|(u, \tilde{x}) + v|}{\|u\|}. \quad (8.2.9)$$

Расстояние от точки M до плоскости равно расстоянию от этой точки до основания перпендикуляра, опущенного из нее на плоскость.

Расстояние ω между двумя параллельными плоскостями с уравнениями

$$(u, x) + v_1 = 0, \quad (u, x) + v_2 = 0$$



равно расстоянию от некоторой точки M , лежащей на второй плоскости, до первой плоскости и вычисляется по формуле

$$\omega = \frac{|v_1 - v_2|}{\|u\|}. \quad (8.2.10)$$

Пример 1. Составьте общее уравнение плоскости, параллельной плоскости $2x + y - 4z + 5 = 0$ и отстоящей от точки $M = (1, 2, 0)$ на расстояние $\sqrt{21}$.

Решение. В силу того что векторы нормалей у параллельных плоскостей коллинеарны, можно записать общее уравнение искомой плоскости: $2x + y - 4z + v = 0$. Для нахождения v воспользуемся соотношением (8.2.9), в котором $\omega = \sqrt{21}$, $u = \{2, 1, -4\}$, $\tilde{x} = \{1, 2, 0\}$. Получим

$$\frac{|4 + v|}{\sqrt{21}} = \sqrt{21},$$

откуда $|4 + v| = 21$ и $v = 17$ либо $v = -25$. Следовательно, существуют две плоскости с общими уравнениями $2x + y - 4z + 17 = 0$ и $2x + y - 4z - 25 = 0$, удовлетворяющие условию данной задачи.

Пример 2. Составьте параметрическое уравнение плоскости, проходящей через точку $M = (2, 1, 3)$ параллельно плоскости $x + 2y - 3z + 1 = 0$.

Решение. Считая систему координат ортогональной, найдем направляющие векторы a_1, a_2 искомой плоскости из условия $(u, a_i) = 0$, $i = 1, 2$, где $u = \{1, 2, -3\}$. Пусть $a_i = \{a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}\}$. Тогда $(u, a_i) = a_{i1} + 2a_{i2} - 3a_{i3} = 0$. Отсюда $a_i = \{3a_{i3} - 2a_{i2}, a_{i2}, a_{i3}\}$. Выбирая последовательно для $i=1$ $a_{i2}=1, a_{i3}=0$, а для $i=2$ $a_{i2}=0, a_{i3}=1$, получаем $a_1 = \{-2, 1, 0\}$, $a_2 = \{3, 0, 1\}$, что позволяет записать на основании равенств (8.2.2) следующее параметрическое уравнение искомой плоскости:

$$\begin{cases} x = 2 - 2t_1 + 3t_2, \\ y = 1 + t_1, \\ z = 3 + t_2. \end{cases}$$

Пример 3. Вычислите расстояние от точки $P = (1, 3, 0)$ до плоскости, проходящей через точки $A = (3, 1, 3)$, $B = (0, 3, 5)$, $C = (6, -3, 0)$.



Решение. Считая, что координаты всех точек заданы в прямоугольной системе координат, запишем общее уравнение плоскости ABC , для чего воспользуемся соотношением (8.2.7)

$$\begin{vmatrix} x-3 & -3 & 3 \\ y-1 & 2 & -4 \\ z-3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -6(x-3) + 12(z-3) + 6(y-1) - 6(z-3) + 8(x-3) - 9(y-1) =$$

$$= 2x - 3y + 6z - 21 = 0.$$

Искомое расстояние вычислим по формуле (8.2.9), в которой $u = \{2, -3, 6\}$, $\tilde{x} = \{1, 3, 0\}$ и $v = -21$. Получим

$$\omega = \frac{|2 - 9 - 21|}{\sqrt{4 + 9 + 36}} = \frac{28}{7} = 4.$$

Пример 4. Найдите параметрическое уравнение плоскости, заданной системой линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 3; \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 5x_4 = -3. \end{cases}$$

Решение. Запишем систему уравнений в матричном виде и найдем ее общее решение $x_{\text{общ}}^H$ методом Гаусса.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -4 & 5 & -3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & -4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Выберем в качестве свободных переменных переменные x_3 и x_4 . Тогда

$$x_2 = 2 - x_3 + x_4,$$

$$x_1 = 1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1 - (2 - x_3 + x_4) + 2x_3 - 3x_4 = -1 + 3x_3 - 4x_4$$

и

$$x_{\text{общ}}^H = (-1 + 3x_3 - 4x_4, 2 - x_3 + x_4, x_3, x_4)^T.$$



Представляя общее решение $x_{\text{общ}}^H$ неоднородной системы в виде суммы частного решения этой системы и общего решения соответствующей однородной системы, получаем разложение

$$\begin{aligned} x_{\text{общ}}^H &= (-1, 2, 0, 0)^T + (3x_3 - 4x_4, -x_3 + x_4, x_3, x_4)^T = \\ &= (-1, 2, 0, 0)^T + (3, -1, 1, 0)^T x_3 + (-4, 1, 0, 1)^T x_4, \end{aligned}$$

представляющее искомое параметрическое уравнение плоскости $x = x_0 + a_1 t_1 + a_2 t_2$, в котором $x_0 = \{-1, 2, 0, 0\}$, $a_1 = \{3, -1, 1, 0\}$ и $a_2 = \{-4, 1, 0, 1\}$.

Таким образом, множество решений неоднородной системы линейных уравнений можно рассматривать как m -плоскость в аффинном пространстве Ω^n .

В задачах, требующих вычисления скалярных произведений, предполагается, что система координат прямоугольная.

8.2.1. Составьте общее уравнение плоскости, проходящей через точку $A = (3, 2, -1)$ перпендикулярно вектору $u = \{-1, 2, 1\}$.

8.2.2. Составьте общее уравнение плоскости, проходящей через точку $M = (9, -3, 2)$ параллельно двум векторам $a = \{2, 1, -2\}$ и $b = \{3, 1, 0\}$.

8.2.3. Составьте общее уравнение плоскости, проходящей через точки $M = (2, 3, 1)$ и $P = (1, 1, 3)$ параллельно вектору $a = \{1, 2, 1\}$.

8.2.4. Составьте общее уравнение плоскости, проходящей через три точки: $A = (3, 1, 1)$, $B = (2, 2, 2)$, $C = (-1, -2, 0)$.

8.2.5. Составьте параметрическое уравнение плоскости:

а) проходящей через точку $A = (1, 1, 2)$ параллельно векторам $a = \{2, 3, 1\}$ и $b = \{-1, 1, 0\}$;

б) проходящей через точки $A = (1, 1, 1)$, $B = (-1, 2, -3)$ параллельно вектору $a = \{5, -3, 2\}$;

в) заданной общим уравнением $x + 2y - 3z - 1 = 0$.

8.2.6. Определите взаимное расположение плоскостей:

а) $x + 2y - z + 2 = 0$, $2x + 4y - 2z + 2 = 0$;

б) $x + 2y + 3z + 1 = 0$, $2x + 4y + 6z + 2 = 0$;

в) $2x + 3y + 2z - 5 = 0$, $x + y + 5z - 7 = 0$.



8.2.7. Найдите координаты точек пересечения плоскости

$$\begin{cases} x = 2 + t - v, \\ y = -3 - t - 2v, \\ z = 2t + v \end{cases}$$

с осями координат.

8.2.8. Напишите общее уравнение плоскости

$$\begin{cases} x = 1 + t + v, \\ y = 2 - 2t + 3v, \\ z = -1 - t - 2v. \end{cases}$$

8.2.9. Докажите, что точки $A = (3, 5, 1)$, $B = (2, 4, 7)$, $C = (1, 5, 3)$ и $D = (4, 4, 5)$ лежат в одной плоскости.

8.2.10. Проверьте, являются ли точки $A = (-1, 2, 3)$, $B = (2, -1, 1)$, $C = (1, -3, -1)$ и $D = (-5, 3, 3)$ вершинами трапеции.

8.2.11. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $A = (1, 1, 1)$ перпендикулярно двум плоскостям $x + y + z + 5 = 0$ и $x - y + z - 2 = 0$.

8.2.12. Найдите точку, симметричную точке $A = (2, 4, 2)$ относительно плоскости $x + y + z - 5 = 0$.

8.2.13. Составьте уравнения плоскостей, проходящих через точку $A = (2, 3, 5)$ параллельно координатным плоскостям.

8.2.14. Запишите уравнение плоскости:

а) параллельной плоскости Oxy и проходящей через точку $A = (3, -5, 4)$;

б) проходящей через ось Oz и через точку $A = (2, -3, -2)$;

в) параллельной оси Oy и проходящей через точки $A = (1, 3, 4)$ и $B = (2, 5, -6)$.

8.2.15. Напишите параметрическое уравнение плоскости $13x + 3y - 14z - 1 = 0$.



8.2.16. Найдите параметрическое уравнение плоскости, заданной системой линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2; \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3; \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9; \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1. \end{cases}$$

8.2.17. В аффинном пространстве Ω^5 дана плоскость $x = x_0 + p_1 t_1 + p_2 t_2$, где $x_0 = \{2, 3, -1, 1, 1\}$, $p_1 = \{3, -1, 1, -1, 1\}$, $p_2 = \{-1, 1, 1, 1, -1\}$. Установите, принадлежат ли этой плоскости векторы $z = \{1, 6, 4, 4, -2\}$ и $v = \{1, 6, 5, 4, -2\}$.

8.2.18. При каких a плоскости $x + ay + z - 1 = 0$ и $ax + 9y + \frac{a^3}{9}z + 3 = 0$:

- а) пересекаются;
- б) параллельны;
- в) совпадают?

8.2.19. Найдите расстояние от точки $A = (3, 1, -1)$ до плоскости:

- а) $x - y - 5z + 2 = 0$; в) $x - 2y + 2z = 0$;
- б) $x - 2y + 2z - 2 = 0$; г) $z = 0$.

8.2.20. Найдите расстояние между параллельными плоскостями:

- а) $6x - 3y + 2z + 5 = 0$ и $6x - 3y + 2z - 9 = 0$;
- б) $2x + 2y - z + 3 = 0$ и $2x + 2y - z + 18 = 0$;
- в) $3x + 4z + 1 = 0$ и $6x + 8z - 1 = 0$.

8.2.21. а) Составьте уравнения плоскостей, параллельных плоскости $6x - 3y + 2z + 5 = 0$ и отстоящих от нее на расстояние 3.

б) Составьте уравнения плоскостей, параллельных плоскости $x + 3y - z + \sqrt{11} = 0$ и отстоящих от нее на расстояние 3.

в) Составьте уравнения плоскостей, параллельных плоскости $2x + 2y - z + 3 = 0$ и отстоящих от точки $A = (1, 2, -1)$ на расстояние 3.

г) Составьте уравнения плоскостей, параллельных плоскости $3x + 4z + 1 = 0$ и отстоящих от начала координат на расстояние 3.



8.2.22. Запишите уравнение плоскости, проходящей через точку $A = (0, 5, 2)$ и удаленной от точки $B = (-1, 6, 1)$ на расстояние 1 и от точки $C = (4, 0, 5)$ на расстояние 3.

8.2.23. Найдите угол между плоскостями:

а) $x + 4y - z + 1 = 0$ и $x + y - z - 3 = 0$;

б) $x + 2y - 2z = 0$ и $z = 5$;

в) $x + 3y - z + 1 = 0$ и $x = 1 - u, \quad y = 2 - 3u - v, \quad z = 7 + u + v$.

8.2.24. Запишите уравнение плоскости, проходящей через точки $A = (1, 1, -2)$ и $B = (-2, 4, 1)$ и образующей с плоскостью $x - z = 1$ угол 60° .

§ 8.3. ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ В АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Пример 1. Найдите проекцию прямой

$$\begin{cases} x + y - 16 = 0, \\ x + y + z - 15 = 0 \end{cases}$$

на плоскость $3x - 2y + z - 1 = 0$.

Решение. Прямая задана пересечением двух плоскостей. Найдём её параметрическое уравнение, для чего решим систему уравнений.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 16 \\ 1 & 1 & 1 & 15 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right).$$

Отсюда $z = -1$, y – свободная переменная, $x = 16 - y$ и параметрическое уравнение данной прямой $x = 16 - t, \quad y = t, \quad z = -1$.

Отыщем точку пересечения A прямой с плоскостью:

$$3(16 - t) - 2t - 1 - 1 = -5t + 46 = 0 \mapsto t = \frac{46}{5} \mapsto A = \left(\frac{34}{5}, \frac{46}{5}, -1 \right).$$

Выберем на прямой $x = 16 - t, \quad y = t, \quad z = -1$ точку $(0, 16, -1)$ и через неё проведем прямую $x = 3t, \quad y = 16 - 2t, \quad z = -1 + t$, ортогональную плоскости $3x - 2y + z - 1 = 0$. Получим точку пересечения B этой прямой с плоскостью:



$$3 \cdot 3t - 2(16 - 2t) + (-1 + t) - 1 = 14t - 34 = 0 \rightarrow$$

$$t = \frac{34}{14} = \frac{17}{7} \mapsto B = \left(\frac{51}{7}, \frac{78}{7}, \frac{10}{7} \right).$$

Проведем через точки A и B прямую. Поскольку $\vec{AB} = \left\{ \frac{51}{7}, \frac{78}{7}, \frac{10}{7} \right\} - \left\{ \frac{34}{5}, \frac{46}{5}, -1 \right\} = \left\{ \frac{17}{35}, \frac{68}{35}, \frac{17}{7} \right\} = \frac{17}{35} \{1, 4, 5\}$, каноническое уравнение искомой прямой $\frac{x - \frac{34}{5}}{1} = \frac{y - \frac{46}{5}}{4} = \frac{z + 1}{5}$, или $\frac{x - 7}{1} = \frac{y - 10}{4} = \frac{z}{5}$.

Пример 2. Найдите точку, симметричную точке $A = (0, 5, -3)$ относительно прямой $\begin{cases} x + y + z - 6 = 0, \\ 3x + y - z - 12 = 0. \end{cases}$

Решение. Как и в предыдущем примере, прямая задана пересечением двух плоскостей. Найдём её параметрическое уравнение.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -1 & 12 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right).$$

Отсюда z — свободная переменная, $y = 3 - 2z$, $x = 6 - y - z = z + 3$ и параметрическое уравнение данной прямой $x = 3 + t$, $y = 3 - 2t$, $z = t$.

Определим основание B перпендикуляра, опущенного из точки A на эту прямую. Предположим, что система координат прямоугольная. Поскольку $\vec{AB} = \{t + 3, -2t - 2, t + 3\}$ и точка B находится на минимальном расстоянии от

точки A , найдём значение переменной t , при котором $\|\vec{AB}\|^2 = 6t^2 + 20t + 22$ принимает своё наименьшее значение. В силу того что $\frac{d\|\vec{AB}\|^2}{dt} = 12t + 20$ и

$$\frac{d^2\|\vec{AB}\|^2}{dt^2} = 12 > 0, \text{ имеем } t = -\frac{5}{3}. \text{ Следовательно, } B = \left(3 - \frac{5}{3}, 3 + \frac{10}{3}, -\frac{5}{3} \right) =$$



$= \left(\frac{4}{3}, \frac{19}{3}, -\frac{5}{3} \right)$; $\overrightarrow{AB} = \left\{ \frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3} \right\} \sim \{1, 1, 1\}$; $\|\overrightarrow{AB}\| = \frac{4}{\sqrt{3}}$ и параметрическое уравнение прямой AB $x = t$, $y = 5 + t$, $z = -3 + t$.

Искомая точка C принадлежит прямой AB и отстоит от прямой $x = 3 + t$, $y = 3 - 2t$, $z = t$ на расстояние $\frac{4}{\sqrt{3}}$. Найдем координаты точки C

при помощи соотношения (8.1.8), в котором $\omega^2 = \frac{16}{3}$, $\tilde{x} = \{t, 5 + t, -3 + t\}$,

$$x_0 = \{3, 3, 0\}, \quad a = \{1, -2, 1\}. \quad \text{Получим} \quad \frac{\begin{vmatrix} 3t^2 - 8t + 22 & -10 \\ -10 & 6 \end{vmatrix}}{6} = \frac{16}{3}, \quad \text{или}$$

$$18t^2 - 48t = 0.$$

Данное уравнение имеет два корня: $t_1 = 0$ соответствует точке A , $t_2 = \frac{8}{3}$ — точке C . Таким образом, $C = \left(\frac{8}{3}, 5 + \frac{8}{3}, -3 + \frac{8}{3} \right) = \left(\frac{8}{3}, \frac{23}{3}, -\frac{1}{3} \right)$.

Пример 3. Составьте уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{1}$ параллельно прямой $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{2}$.

Решение. Воспользуемся формулой (8.2.6). Выбрав в качестве $M_0 = (2, -1, 1)$, $a_1 = \{2, 3, 1\}$, $a_2 = \{1, -1, 2\}$, получим

$$\begin{vmatrix} x-2 & 2 & 1 \\ y+1 & 3 & -1 \\ z-1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6(x-2) - 2(z-1) + (y+1) - 3(z-1) + (x-2) - 4(y+1) =$$

$$= 7x - 3y - 5z - 12 = 0.$$

В задачах, требующих вычисления скалярных произведений, предполагается, что система координат прямоугольная.

8.3.1. Проверьте, лежит ли данная прямая в плоскости $x - 3y + z + 1 = 0$, параллельна этой плоскости или пересекает ее в единственной точке; в последнем случае найдите координаты точки пересечения. Прямая задана уравнениями:



а) $\frac{x-1}{5} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-1}{7};$

б) $\begin{cases} x - y + 2z = 0; \\ x + y - 3z + 2 = 0; \end{cases}$

в) $x = 2, \quad y = 5 + t, \quad z = 4 + 3t.$

8.3.2. При каких a прямая $\frac{x}{1} = \frac{y}{a} = \frac{z-2}{-1};$

а) пересекает плоскость $3a^2x + ay + z - 4a = 0;$

б) параллельна этой плоскости;

в) лежит в этой плоскости.

8.3.3. Составьте уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\begin{cases} 104x - 17y + 11z - 19 = 0, \\ 5x + y + z + 4 = 0 \end{cases}$$

параллельно вектору $a = \{2, 3, -1\}.$

8.3.4. Найдите уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые $\frac{x-3}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{2}$ и $\frac{x-4}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-5}{-2}.$

8.3.5. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $A = (1, 3, 0)$ и параллельной прямым

$$\begin{cases} x + y - z + 3 = 0, \\ 2x - y + 5z + 1 = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} -x + y = 1, \\ 5x + y - z + 2 = 0. \end{cases}$$

8.3.6. Составьте уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{2}$ и параллельной прямой $\frac{x}{5} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+1}{3}.$

8.3.7. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $A = (-1, 1, 2)$ и прямую, заданную уравнениями:

а) $x = 1 + 5t, \quad y = -1 + t, \quad z = 2t;$

б) $\begin{cases} x + 5y - 7z + 1 = 0, \\ 3x - y + 2z + 3 = 0. \end{cases}$



8.3.8. Найдите проекцию точки $Q = (1, 3, 1)$ на прямую

$$\begin{cases} 2x + y - z - 10 = 0, \\ x + 2y + z - 11 = 0. \end{cases}$$

8.3.9. Составьте параметрическое уравнение прямой, проходящей через точку $P = (2, 1, -3)$ перпендикулярно плоскости $2x - 5y + 3z = 0$.

8.3.10. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A = (1, -1, 2)$ и перпендикулярной плоскости $x = 4 - u + v$, $y = 2 + u + 2v$, $z = -1 + 7u + 3v$.

8.3.11. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $A = (1, 3, 1)$ и перпендикулярной прямой:

а) $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z+2}{21}$;

б) $\begin{cases} x + y - z + 2 = 0; \\ 2x + 3y + z - 1 = 0. \end{cases}$

8.3.12. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $A = (2, 1, -1)$ и перпендикулярной двум плоскостям $x - y + 5z + 1 = 0$ и $2x + y = 3$.

8.3.13. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $M = (5, 1, 1)$ перпендикулярно к вектору $u = \{1, 2, 2\}$ и пересекающей прямую

$$\begin{cases} 3x + 5y + 5z - 27 = 0; \\ x - 5y + 5z - 9 = 0. \end{cases}$$

8.3.14. Найдите уравнение прямой, проходящей через точку $A = (3, -1, 2)$ и пересекающей две прямые

$$\begin{cases} x - 2z + 1 = 0, \\ y + 3z - 4 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 4x + y - 1 = 0, \\ x - z - 2 = 0. \end{cases}$$

8.3.15. Точка A лежит на прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{1}$. Расстояние от точки A до плоскости $x + y + z + 3 = 0$ равно $\sqrt{3}$. Найдите координаты точки A .



8.3.16. Составьте уравнение прямой, симметричной прямой $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{4}$ относительно плоскости $5x - y + z - 4 = 0$.

8.3.17. Составьте уравнения проекций на плоскость $x + 5y - z - 25 = 0$ следующих прямых:

а) $\frac{x+1}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{3}$;

б) $\begin{cases} x - y + 2z - 1 = 0, \\ 3x - y + 2z + 2 = 0; \end{cases}$

в) $\frac{x+1}{1} = \frac{y}{5} = \frac{z-1}{-1}$.

8.3.18. Найдите угол между плоскостью $4x + 4y - 7z + 1 = 0$ и прямой:

а) $\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+3}{-7}$;

б) $\frac{x-1}{11} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z+3}{4}$.

8.3.19. Найдите точку, симметричную точке $Q = (4, -5, 4)$ относительно плоскости, проходящей через прямые:

$$\begin{cases} x + y + z - 3 = 0, \\ x - y + z - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x + z = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

8.3.20. Точка A лежит на прямой

$$\begin{cases} x - y - 3 = 0, \\ 2y + z = 0. \end{cases}$$

Расстояние от точки A до прямой $x = y = z$ равно $\sqrt{6}$. Найдите координаты точки A .

8.3.21. На линии пересечения двух плоскостей $2x + y + z + 8 = 0$, $x - 4y - 2z - 5 = 0$ найдите точки, отстоящие от плоскости $3x - 6y + 2z - 10 = 0$ на расстояние 5.



8.3.22. На оси Ox найдите точку, равноудаленную от точки $M = (0, 1, -2)$ и от плоскости $6x + 3y - 2z - 9 = 0$.

8.3.23. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку пересечения трех плоскостей $2x - y - z - 1 = 0$, $x + 2z - 4 = 0$, $x - y = 0$, через начало координат и через точку $M = (7, 1, 2)$.

8.3.24. Запишите уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\begin{cases} x - y + 3 = 0, \\ 6y + 1 = 0 \end{cases}$$

и пересекающей другую прямую $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{4}$ под углом 45° .

8.3.25. Составьте каноническое уравнение прямой, лежащей в плоскости Oxz , проходящей через начало координат и перпендикулярной к прямой $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-5}{1}$.

8.3.26. Через точку пересечения плоскости $3x - y - 2z - 5 = 0$ с прямой $\frac{x-7}{5} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{4}$ проведите прямую, лежащую в этой плоскости и перпендикулярную данной прямой.

§ 8.4. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Установим на плоскости прямоугольную систему координат и рассмотрим общее уравнение второй степени

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0, \quad (8.4.1)$$

в котором $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$.

Множество всех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению (8.4.1), называется **кривой (линией) второго порядка**.

Для всякой кривой второго порядка существует прямоугольная система координат, называемая канонической, в которой уравнение этой кривой имеет один из следующих видов:

$$1) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \geq b > 0 \text{ (эллипс);}$$



- 2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$, $a \geq b > 0$ (мнимый эллипс);
- 3) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ (пара мнимых пересекающихся прямых);
- 4) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (гипербола);
- 5) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ (пара пересекающихся прямых);
- 6) $y^2 = 2px$, $p > 0$ (парабола);
- 7) $y^2 - a^2 = 0$, $a \neq 0$ (пара параллельных прямых);
- 8) $y^2 + a^2 = 0$, $a \neq 0$ (пара мнимых параллельных прямых);
- 9) $y^2 = 0$ (пара совпадающих прямых).

Уравнения 1–9 называются **каноническими уравнениями кривых второго порядка**.

Решение задачи приведения уравнения кривой второго порядка к каноническому виду включает нахождение канонического уравнения кривой и канонической системы координат. Приведение к каноническому виду позволяет вычислить параметры кривой и определить ее расположение относительно исходной системы координат. Переход от исходной прямоугольной системы координат (O, e_1, e_2) к канонической $(\tilde{O}, \tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$ осуществляется путем поворота осей исходной системы координат вокруг точки O на некоторый угол φ и последующего параллельного переноса системы координат.

Инвариантами кривой второго порядка (8.4.1) называются такие функции от коэффициентов ее уравнения, значения которых не меняются при переходе от одной прямоугольной системы координат к другой такой же системе.

Для кривой второго порядка (8.4.1) **сумма коэффициентов при квадратах координат**

$$s = a_{11} + a_{22},$$

определитель, составленный из коэффициентов при старших членах,

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix},$$



и определитель третьего порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{vmatrix}$$

являются инвариантами.

Значения инвариантов s , δ , Δ можно использовать для определения типа и составления канонического уравнения кривой второго порядка (см. таблицу).

Классификация кривых второго порядка, основанная на инвариантах

$\delta > 0$ Кривая эллиптического типа	$\Delta \neq 0$	$s\Delta < 0$. Эллипс
		$s\Delta > 0$. Мнимый эллипс
$\delta < 0$ Кривая гиперболического типа	$\Delta = 0$	Пара мнимых прямых, пересекающихся в действительной точке
$\delta = 0$ Кривая параболического типа	$\Delta \neq 0$	Гипербола
	$\Delta = 0$	Пара пересекающихся прямых
	$\Delta \neq 0$	Парабола
	$\Delta = 0$	Пара параллельных прямых (различных, мнимых или совпадающих)

Рассмотрим подробнее эллипс, гиперболу и параболу.

Эллипсом (рис. 8.1) называется геометрическое место точек плоскости, для которых сумма расстояний до двух фиксированных точек F_1 и F_2 этой плоскости, называемых **фокусами эллипса**, есть величина постоянная (бóльшая, чем расстояние между фокусами). При этом не исключается совпадение фокусов эллипса. Если фокусы совпадают, то эллипс представляет собой окружность.

Полусумму расстояний от точки эллипса до его фокусов обозначают через a , половину расстояний между фокусами – c . Если прямоугольная система координат на плоскости выбрана так, что фокусы эллипса располагаются на оси Ox симметрично относительно начала координат, то в этой системе координат эллипс задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (8.4.2)$$

называемым **каноническим уравнением эллипса**, где $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

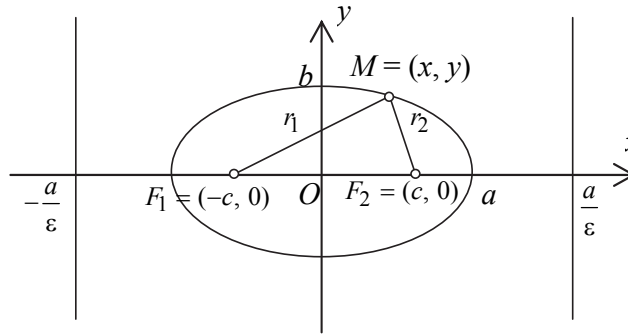


Рис. 8.1

При указанном выборе прямоугольной системы координат эллипс симметричен относительно осей координат и начала координат. Оси симметрии эллипса называют его **осями**, а центр его симметрии – **центром эллипса**. Вместе с тем часто осями эллипса называют числа $2a$ и $2b$, а числа a и b – **большой и малой полуосью** соответственно.

Точки пересечения эллипса с его осями называются **вершинами эллипса**. Вершины эллипса имеют координаты $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$, $(0, -b)$.

Эксцентриситетом эллипса называется число

$$\varepsilon = \frac{c}{a}. \quad (8.4.3)$$

Поскольку $0 \leq c < a$, эксцентриситет эллипса $0 \leq \varepsilon < 1$, причем у окружности $\varepsilon = 0$. Перепишем равенство (8.4.3) в виде

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}.$$

Отсюда видно, что эксцентриситет характеризует форму эллипса: чем ближе ε к нулю, тем больше эллипс похож на окружность; при увеличении ε эллипс становится более вытянутым.



Пусть $M = (x, y)$ – произвольная точка эллипса, $r_1 = \rho(F_1, M)$ и $r_2 = \rho(F_2, M)$ – расстояния от точки M до фокусов F_1 и F_2 соответственно. Числа r_1 и r_2 называются **фокальными радиусами точки M эллипса** и вычисляются по формулам

$$r_1 = a + \varepsilon x, \quad r_2 = a - \varepsilon x.$$

Директрисами отличного от окружности эллипса с каноническим уравнением (8.4.2) называются две прямые

$$x = -\frac{a}{\varepsilon}, \quad x = \frac{a}{\varepsilon}.$$

Директрисы эллипса расположены вне эллипса (рис. 8.1).

Отношение фокального радиуса r_i точки M эллипса к расстоянию d_i от этой точки до отвечающей фокусу F_i директрисы равно эксцентриситету ε этого эллипса (фокус и директриса считаются соответствующими, если они расположены по одну сторону от центра эллипса).

Гиперболой (рис. 8.2) называется геометрическое место точек плоскости, для которых модуль разности расстояний до двух фиксированных точек F_1 и F_2 этой плоскости, называемых **фокусами гиперболы**, есть величина постоянная (не равная нулю и меньшая, чем расстояние между фокусами).

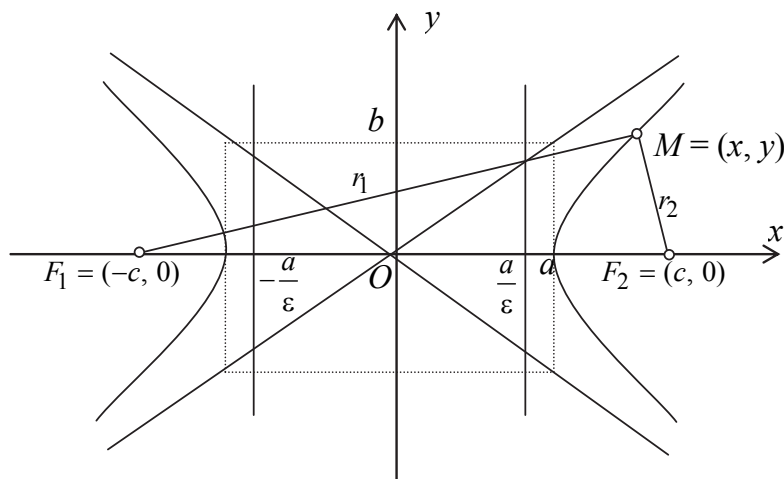


Рис. 8.2



Пусть расстояние между фокусами равно $2c$, а указанный модуль разности расстояний равен $2a$. Выберем прямоугольную систему координат так же, как и для эллипса. В этой системе координат гипербола задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (8.4.4)$$

называемым **каноническим уравнением гиперболы**, где $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

При данном выборе прямоугольной системы координат оси координат являются осями симметрии гиперболы, а начало координат – ее центром симметрии. Оси симметрии гиперболы называют ее **осями**, а центр симметрии – **центром гиперболы**. Прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$, расположенный, как показано на рис. 8.2, называется **основным прямоугольником гиперболы**. Числа $2a$ и $2b$ – оси гиперболы, а числа a и b – ее **полуоси**. Прямые, являющиеся продолжением диагоналей основного прямоугольника, образуют **асимптоты гиперболы**

$$y = \pm \frac{b}{a} x.$$

Точки пересечения гиперболы с осью Ox называются **вершинами гиперболы**. Вершины гиперболы имеют координаты $(a, 0)$, $(-a, 0)$.

Эксцентриситетом гиперболы называется число

$$\varepsilon = \frac{c}{a}. \quad (8.4.5)$$

Поскольку $c > a$, эксцентриситет гиперболы $\varepsilon > 1$. Перепишем равенство (8.4.5) в виде

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}.$$

Отсюда видно, что эксцентриситет характеризует форму основного прямоугольника и, следовательно, форму самой гиперболы: чем меньше ε , тем больше вытягивается основной прямоугольник, а вслед за ним и сама гипербола вдоль оси Ox .



Пусть $M = (x, y)$ – произвольная точка гиперболы, $r_1 = \rho(F_1, M)$ и $r_2 = \rho(F_2, M)$ – расстояния от точки M до фокусов F_1 и F_2 соответственно. Числа r_1 и r_2 называются **фокальными радиусами точки M гиперболы** и вычисляются по формулам

$$r_1 = \begin{cases} -a - \varepsilon x, & \text{если } x \leq -a; \\ a + \varepsilon x, & \text{если } x \geq a, \end{cases}$$

$$r_2 = \begin{cases} a - \varepsilon x, & \text{если } x \leq -a; \\ -a + \varepsilon x, & \text{если } x \geq a. \end{cases}$$

Директрисами гиперболы с каноническим уравнением (8.4.4) называются две прямые

$$x = -\frac{a}{\varepsilon}, \quad x = \frac{a}{\varepsilon}.$$

Директрисы гиперболы пересекают основной прямоугольник и проходят между центром и соответствующей вершиной гиперболы (рис. 8.2).

Отношение фокального радиуса r_i точки M гиперболы к расстоянию d_i от этой точки до отвечающей фокусу F_i директрисы равно эксцентриситету ε этой гиперболы (фокус и директриса считаются соответствующими, если они расположены по одну сторону от центра гиперболы).

Параболой (рис. 8.3) называется геометрическое место точек плоскости, для которых расстояние до некоторой фиксированной точки F (**фокуса параболы**) этой плоскости равно расстоянию до некоторой фиксированной прямой (**директрисы параболы**), также расположенной в рассматриваемой плоскости.

Выберем начало O прямоугольной системы координат в середине отрезка $[FD]$, представляющего собой перпендикуляр, опущенный из фокуса F на директрису (предполагается, что фокус не принадлежит директрисе), а оси Ox и Oy направим так, как показано на рис. 8.3. Пусть длина отрезка $[FD]$ равна p .

Тогда в выбранной системе координат $F = \left(\frac{p}{2}, 0\right)$ и **каноническое уравнение параболы** имеет вид



$$y^2 = 2px. \quad (8.4.6)$$

Величина p называется **параметром параболы**.

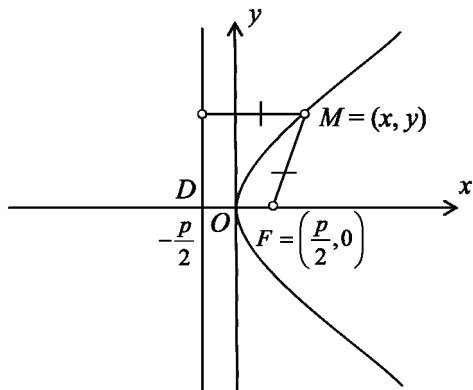


Рис. 8.3

Парабола имеет ось симметрии, которая называется **осью параболы**. Точка пересечения параболы с ее осью называется **вершиной параболы**. Если парабола задана своим каноническим уравнением (8.4.6), то осью параболы является ось Ox . Очевидно, вершиной параболы является начало координат.

Пример 1. Точка $A = (2, -1)$ принадлежит эллипсу, точка $F = (1, 0)$ является его фокусом, соответствующая F директриса задана уравнением $2x - y - 10 = 0$. Составьте уравнение этого эллипса.

Решение. Будем считать систему координат прямоугольной. Тогда расстояние d_A от точки A до директрисы $2x - y - 10 = 0$ в соответствии с соотношением (8.1.8), в котором $\tilde{x} = \{2, -1\}$, $x_0 = \{5, 0\}$, $a = \{1, 2\}$, равно

$$\sqrt{\frac{\begin{vmatrix} 10 & -5 \\ -5 & 5 \end{vmatrix}}{5}} = \sqrt{\frac{50 - 25}{5}} = \sqrt{5}.$$

Расстояние r_A от точки A до фокуса F равно

$$\sqrt{(1-2)^2 + (0-(-1))^2} = \sqrt{2},$$

что позволяет определить эксцентриситет эллипса

$$\varepsilon = \frac{r_A}{d_A} = \sqrt{\frac{2}{5}}.$$



Пусть $M = (x, y)$ – произвольная точка эллипса. Тогда расстояние d_M от точки M до директрисы $2x - y - 10 = 0$ по формуле (8.1.8) равно

$$\sqrt{\frac{(x-5)^2 + y^2}{5} \cdot \frac{x-5+2y}{5}} = \sqrt{\frac{4x^2 - 4xy + y^2 - 40x + 20y + 100}{5}},$$

а расстояние r_M от точки M до фокуса F равно

$$\sqrt{(1-x)^2 + y^2}.$$

Поскольку для любой точки эллипса отношение $\frac{r_M}{d_M}$ есть величина постоянная, равная эксцентриситету эллипса, отсюда имеем

$$\sqrt{\frac{5((1-x)^2 + y^2)}{4x^2 - 4xy + y^2 - 40x + 20y + 100}} = \sqrt{\frac{2}{5}},$$

или

$$25((1-x)^2 + y^2) = 2(4x^2 - 4xy + y^2 - 40x + 20y + 100),$$

или

$$17x^2 + 8xy + 23y^2 + 30x - 40y - 175 = 0.$$

Пример 2. Кривая задана уравнением

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$$

в прямоугольной системе координат. Найдите каноническую систему координат и каноническое уравнение этой кривой. Определите тип кривой.

Решение. Квадратичная форма $5x^2 + 4xy + 8y^2$ имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}.$$



Ее характеристический многочлен

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5 - \lambda & 2 \\ 2 & 8 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 13\lambda + 36$$

имеет корни $\lambda_1 = 4$ и $\lambda_2 = 9$. Следовательно, в ортонормированном базисе из собственных векторов матрицы A рассматриваемая квадратичная форма имеет канонический вид

$$4\tilde{x}^2 + 9\tilde{y}^2.$$

Перейдем к построению матрицы ортогонального преобразования переменных, приводящего рассматриваемую квадратичную форму к указанному каноническому виду. Для этого будем строить фундаментальные системы решений однородных систем уравнений $(A - \lambda_i I)\xi = 0$ и ортонормировать их.

При $\lambda_i = 4$ эта система имеет вид

$$\begin{cases} \xi_1 + 2\xi_2 = 0, \\ 2\xi_1 + 4\xi_2 = 0. \end{cases}$$

Ее общим решением является $\xi = \{-2\xi_2, \xi_2\}^T$. Здесь одна свободная переменная. Поэтому фундаментальная система решений состоит из одного вектора, например, из вектора $\tilde{e}'_1 = \{-2, 1\}^T$. Нормируя его, получим вектор $\tilde{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\{-2, 1\}^T$.

При $\lambda_i = 9$ также построим вектор $\tilde{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\{1, 2\}^T$. Векторы $\tilde{e}_1$ и $\tilde{e}_2$ уже ортогональны, так как относятся к различным собственным значениям симметричной матрицы A . Они составляют канонический ортонормированный базис данной квадратичной формы. Из столбцов их координат строится искомая ортогональная матрица (матрица поворота)

$$P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Проверим правильность нахождения матрицы P по формуле $P^T A P = D$, где $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ – матрица квадратичной формы в базисе $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2\}$:



$$P^T A P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} P = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 9 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \text{diag}(4, 9).$$

Матрица P найдена верно.

Выполним преобразование переменных

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$$

и запишем уравнение данной кривой в новой прямоугольной системе координат со старым центром и направляющими векторами $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2\}$:

$$\begin{aligned} 4\tilde{x}^2 + 9\tilde{y}^2 + \frac{1}{\sqrt{5}}(-32, -56) \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} + 80 &= \\ &= 4\tilde{x}^2 + 9\tilde{y}^2 + \frac{8}{\sqrt{5}}\tilde{x} - \frac{144}{\sqrt{5}}\tilde{y} + 80 = \\ &= 4\left(\tilde{x}^2 + \frac{2}{\sqrt{5}}\tilde{x}\right) + 9\left(\tilde{y}^2 - \frac{16}{\sqrt{5}}\tilde{y}\right) + 80 = \\ &= 4\left[\left(\tilde{x} + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{1}{5}\right] + 9\left[\left(\tilde{y} - \frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{64}{5}\right] + 80 = \\ &= 4\left(\tilde{x} + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + 9\left(\tilde{y} - \frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2 - 36 = 4\tilde{x}^2 + 9\tilde{y}^2 - 36 = 0, \end{aligned}$$

где $\tilde{\tilde{x}} = \tilde{x} + \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\tilde{\tilde{y}} = \tilde{y} - \frac{8}{\sqrt{5}}$.

Получили каноническое уравнение эллипса

$$\frac{\tilde{\tilde{x}}^2}{9} + \frac{\tilde{\tilde{y}}^2}{4} = 1.$$

В силу того что результирующее преобразование прямоугольных координат определяется формулами

$$x = \frac{-2\tilde{x} + \tilde{y}}{\sqrt{5}} = \frac{-2\left(\tilde{\tilde{x}} - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \left(\tilde{\tilde{y}} + \frac{8}{\sqrt{5}}\right)}{\sqrt{5}} = \frac{-2\tilde{\tilde{x}} + \tilde{\tilde{y}}}{\sqrt{5}} + 2,$$



$$y = \frac{\tilde{x} + 2\tilde{y}}{\sqrt{5}} = \frac{\left(\tilde{x} - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2\left(\tilde{y} + \frac{8}{\sqrt{5}}\right)}{\sqrt{5}} = \frac{\tilde{x} + 2\tilde{y}}{\sqrt{5}} + 3,$$

каноническая система координат $(\tilde{O}, \tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$ имеет начало $\tilde{O} = (2, 3)$ и направляющие векторы $\tilde{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\{-2, 1\}^T$, $\tilde{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\{1, 2\}^T$.

Пример 3. Применяя теорию инвариантов, определите тип и составьте каноническое уравнение кривой

$$x^2 + 2xy - y^2 - 6x + 4y - 3 = 0.$$

Решение. Поскольку

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 < 0$$

и

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

в соответствии с таблицей заключаем, что это – гипербола.

Так как $s = 0$, характеристический многочлен матрицы квадратичной формы $x^2 + 2xy - y^2$

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - s\lambda + \delta = \lambda^2 - 2.$$

Его корни $\lambda_1 = -\sqrt{2}$ и $\lambda_2 = \sqrt{2}$ позволяют записать каноническое уравнение кривой

$$\lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2 + C = -\sqrt{2} \cdot \tilde{x}^2 + \sqrt{2} \cdot \tilde{y}^2 + C = 0,$$

где C находится из условия

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & C \end{vmatrix} = \Delta,$$



или

$$C = \frac{\Delta}{\lambda_1 \lambda_2} = \frac{\Delta}{\delta} = \frac{1}{2}.$$

Искомое каноническое уравнение кривой

$$2\sqrt{2} \cdot \tilde{x}^2 - 2\sqrt{2} \cdot \tilde{y}^2 = 1.$$

В задачах этого параграфа координаты x, y предполагаются прямоугольными.

8.4.1. Определите, проходит ли окружность $2x^2 + 2y^2 + x + 2y = 0$ через начало координат.

8.4.2. Выясните, на какой из координатных осей расположены центры окружностей:

а) $x^2 + y^2 + 2x - 8 = 0$;

б) $x^2 + y^2 - 3y + 2 = 0$.

8.4.3. Выясните, имеет ли прямая $x = 3$ и окружность $x^2 + y^2 + 2x - 15 = 0$ общую точку.

8.4.4. Для эллипсов $25x^2 + 9y^2 = 225$ и $9x^2 + 25y^2 = 225$ найдите:

а) полуоси;

б) фокусы;

в) эксцентриситет;

г) уравнения директрис.

8.4.5. Составьте уравнения эллипса, зная его фокус $F_1 = (2, 0)$, соответствующую директрису $x = 8$ и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Найдите второй фокус и вторую директрису эллипса.

8.4.6. Составьте уравнение эллипса, фокусы которого имеют координаты $(1, 0)$ и $(0, 1)$, а большая ось равна двум.

8.4.7. Эллипс касается оси Oy в точке $A(0, 5)$ и пересекает ось Ox в точках $B = (5, 0)$ и $C = (11, 0)$. Зная, что оси эллипса параллельны координатным осям, составьте уравнение этого эллипса.



8.4.8. На эллипсе $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{11} = 1$ найдите точки, расстояния которых от левого фокуса больше расстояний от правого фокуса в три раза.

8.4.9. Запишите уравнение окружности, проходящей через точки $A = (-1, 1)$ и $B = (1, -3)$, если центр ее лежит на прямой $2x - y + 1 = 0$.

8.4.10. Определите траекторию точки M , которая движется так, что ее расстояние от точки $A = (4, 0)$ остается вдвое меньше расстояния от точки $B = (-8, 0)$.

8.4.11. Дана гипербола $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1$. Найдите:

- а) полуоси a и b ;
- б) фокусы;
- в) эксцентриситет;
- г) уравнения асимптот;
- д) уравнения директрис.

8.4.12. Дана гипербола $\frac{x^2}{225} - \frac{y^2}{64} = -1$. Найдите:

- а) полуоси a и b ;
- б) фокусы;
- в) эксцентриситет;
- г) уравнения асимптот;
- д) уравнения директрис.

8.4.13. Определите, на какой из координатных осей находятся фокусы гиперболы:

- а) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$;
- б) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = -1$.

8.4.14. Точка $M = (1, -2)$ принадлежит гиперболе, фокус которой $F = (-2, 2)$, а соответствующая директриса задана уравнением $2x - y - 1 = 0$. Составьте уравнение этой гиперболы.



8.4.15. Вычислите площадь треугольника, образованного асимптотами гиперболы $x^2 - y^2 = 1$ и прямой $x = 1$.

8.4.16. Составьте уравнение параболы, если даны ее фокус $F = (-2, 1)$ и директриса $x + y - 1 = 0$.

8.4.17. Даны вершина параболы $A = (2, 1)$ и уравнение директрисы $2x - y + 2 = 0$. Составьте уравнение этой параболы.

8.4.18. Запишите уравнение параболы и ее директрисы, если парабола проходит через точки пересечения прямой $x + y = 0$ и окружности $x^2 + y^2 - 4x = 0$ и симметрична относительно оси Oy .

8.4.19. Составьте уравнение параболы, фокус которой находится в точке $F = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ и директриса задана уравнением $3x - 3y + 8 = 0$.

8.4.20. Составьте уравнение кривой второго порядка, зная ее эксцентриситет $\varepsilon = \sqrt{5}$, фокус $F = (1, 1)$ и соответствующую директрису $x + 2y - 1 = 0$.

8.4.21. Определите тип кривой второго порядка, составьте ее каноническое уравнение и найдите каноническую систему координат:

- а) $2x^2 - 4xy + 5y^2 + 8x - 2y + 9 = 0$;
- б) $4xy - 3y^2 - 4x + 10y - 6 = 0$;
- в) $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 8x + 19y + 4 = 0$;
- г) $x^2 - xy + y^2 + x + y = 0$;
- д) $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$;
- е) $5x^2 + 12xy + 10y^2 - 6x + 4y - 1 = 0$;
- ж) $8x^2 + 34xy + 8y^2 + 18x - 18y - 17 = 0$;
- з) $25x^2 - 30xy + 9y^2 + 68x + 19 = 0$;
- и) $4x^2 + 12xy + 9y^2 - 8x - 12y - 5 = 0$;
- к) $15x^2 + 24xy + 15y^2 + 30x + 24y + 20 = 0$;
- л) $15x^2 - 16xy - 15y^2 - 62x - 44y - 13 = 0$.



8.4.22. Докажите, что кривая второго порядка, заданная уравнением $34x^2 + 24xy + 41y^2 - 44x + 58y + 1 = 0$, является эллипсом. Найдите длины полуосей и эксцентриситет этого эллипса, координаты центра и фокусов, составьте уравнения осей и директрис.

8.4.23. Докажите, что кривая второго порядка, заданная уравнением $7x^2 + 48xy - 7y^2 - 62x - 34y + 98 = 0$, является гиперболой. Найдите длины полуосей и эксцентриситет этой гиперболы, координаты центра и фокусов, составьте уравнения осей, директрис и асимптот.

8.4.24. Докажите, что кривая второго порядка, заданная уравнением $x^2 + 2xy + y^2 + x = 0$, является параболой. Найдите параметр этой параболы, координаты вершин и фокуса, составьте уравнения оси и директрисы.

8.4.25. Каждое из следующих уравнений приведите к каноническому виду. Изобразите на чертеже соответствующую кривую второго порядка относительно исходной прямоугольной системы координат:

- а) $9x^2 + 4y^2 + 36x - 40y + 100 = 0$;
- б) $16x^2 - 25y^2 + 32x - 100y - 84 = 0$;
- в) $5x^2 + 5y^2 + 6xy + 2\sqrt{2} \cdot x - 2\sqrt{2} \cdot y - 30 = 0$;
- г) $x^2 + y^2 - 2xy + 12\sqrt{2} \cdot y + 18 = 0$;
- д) $7x^2 - 50xy + 7y^2 + 32\sqrt{2} \cdot x - 32\sqrt{2} \cdot y + 320 = 0$;
- е) $x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 3y - 7 = 0$;
- ж) $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 400 = 0$;
- з) $17x^2 - 30xy + 17y^2 - 6\sqrt{2} \cdot x - 6\sqrt{2} \cdot y - 14 = 0$;
- и) $3x^2 - 10xy + 3y^2 - 2\sqrt{2} \cdot x - 2\sqrt{2} \cdot y + 30 = 0$.

8.4.26. Применяя теорию инвариантов, определите тип и составьте каноническое уравнение кривой:

- а) $x^2 + 3xy - 3y^2 + 5x - 7y + 1 = 0$;
- б) $5x^2 + 2xy + 5y^2 - 12x + 20y + 32 = 0$;
- в) $x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x + 13 = 0$;



г) $5x^2 + 4xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$;

д) $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$;

е) $9x^2 + 12xy + 4y^2 - 24x + 16y + 3 = 0$.

§ 8.5. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Геометрическое место точек трехмерного пространства, координаты которых в некоторой прямоугольной системе координат (O, e_1, e_2, e_3) удовлетворяют уравнению

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a = 0, \quad (8.5.1)$$

где хотя бы один из коэффициентов a_{ij} не равен нулю, называется **поверхностью второго порядка**.

Для любой поверхности второго порядка существует прямоугольная система координат $(\tilde{O}, \tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$, в которой уравнение этой поверхности имеет один из следующих 17 видов:

1) эллипсоид $\frac{\tilde{x}^2}{a^2} + \frac{\tilde{y}^2}{b^2} + \frac{\tilde{z}^2}{c^2} = 1$ (рис. 8.4);

2) мнимый эллипсоид $\frac{\tilde{x}^2}{a^2} + \frac{\tilde{y}^2}{b^2} + \frac{\tilde{z}^2}{c^2} = -1$;

3) однополостный гиперболоид $\frac{\tilde{x}^2}{a^2} + \frac{\tilde{y}^2}{b^2} - \frac{\tilde{z}^2}{c^2} = 1$ (рис. 8.5);

4) двуполостный гиперболоид $\frac{\tilde{x}^2}{a^2} + \frac{\tilde{y}^2}{b^2} - \frac{\tilde{z}^2}{c^2} = -1$ (рис. 8.6);

5) конус $\frac{\tilde{x}^2}{a^2} + \frac{\tilde{y}^2}{b^2} - \frac{\tilde{z}^2}{c^2} = 0$ (рис. 8.7);

6) мнимый конус $\frac{\tilde{x}^2}{a^2} + \frac{\tilde{y}^2}{b^2} + \frac{\tilde{z}^2}{c^2} = 0$;

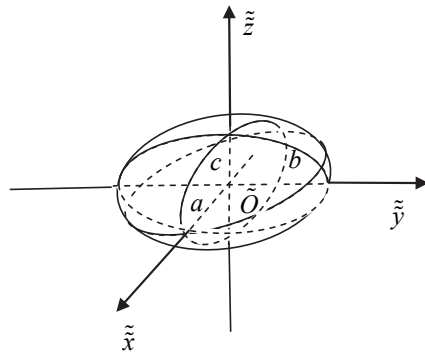


Рис. 8.4

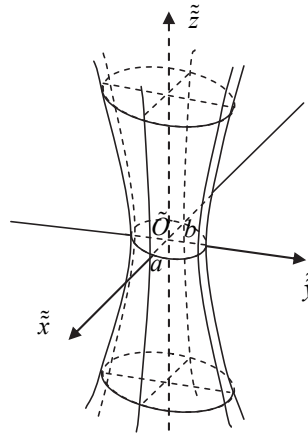


Рис. 8.5

7) эллиптический параболоид $\frac{\tilde{x}^2}{a^2} + \frac{\tilde{y}^2}{b^2} = 2\tilde{z}$ (рис. 8.8);

8) гиперболический параболоид $\frac{\tilde{x}^2}{a^2} - \frac{\tilde{y}^2}{b^2} = 2\tilde{z}$ (рис. 8.9);

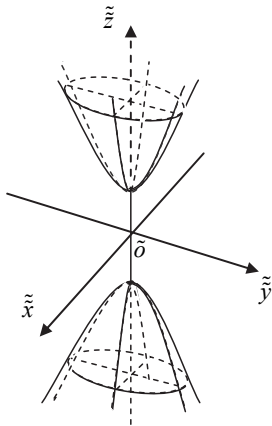


Рис. 8.6

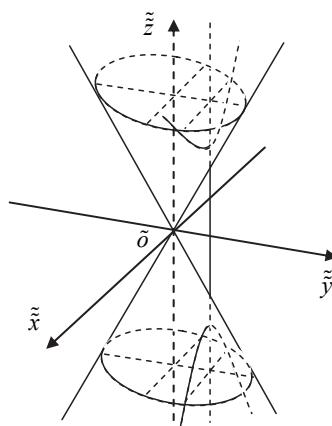


Рис. 8.7

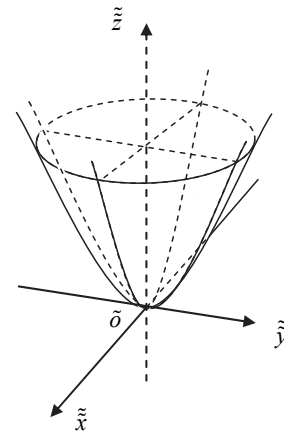


Рис. 8.8

9) эллиптический цилиндр $\frac{\tilde{x}^2}{a^2} + \frac{\tilde{y}^2}{b^2} = 1$ (рис. 8.10);

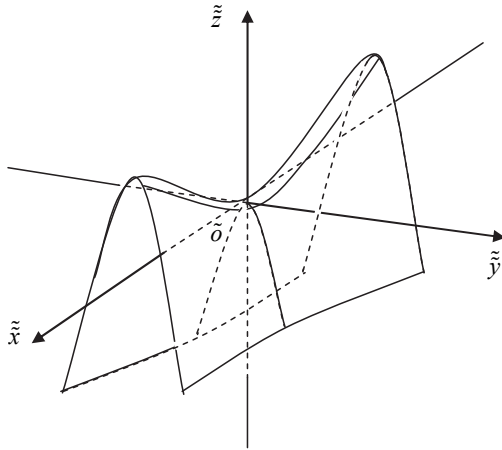


Рис. 8.9

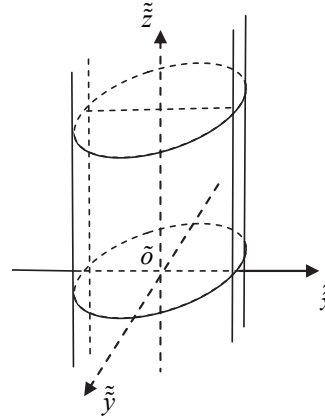


Рис. 8.10

10) мнимый эллиптический цилиндр $\frac{\tilde{x}^2}{a^2} + \frac{\tilde{y}^2}{b^2} = -1$;

11) гиперболический цилиндр $\frac{\tilde{x}^2}{a^2} - \frac{\tilde{y}^2}{b^2} = 1$ (рис. 8.11);

12) параболический цилиндр $\tilde{y}^2 = 2p\tilde{x}$, $p > 0$ (рис. 8.12);

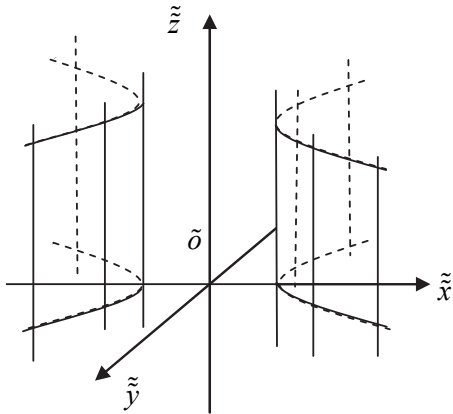


Рис. 8.11

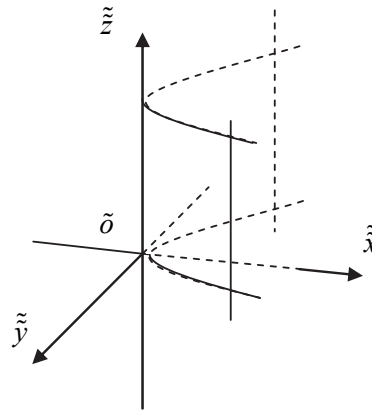


Рис. 8.12

13) пара пересекающихся плоскостей $\frac{\tilde{x}^2}{a^2} - \frac{\tilde{y}^2}{b^2} = 0$;



14) пара мнимых пересекающихся плоскостей $\frac{\tilde{x}^2}{a^2} + \frac{\tilde{y}^2}{b^2} = 0$;

15) пара параллельных плоскостей $\tilde{y}^2 = a^2 \quad (a \neq 0)$;

16) пара мнимых параллельных плоскостей $\tilde{y}^2 + a^2 = 0 \quad (a \neq 0)$;

17) пара совпадающих плоскостей $\tilde{y}^2 = 0$.

Уравнения 1–17 называются **каноническими уравнениями поверхностей второго порядка**.

При преобразовании уравнения поверхности второго порядка (8.5.1) можно, как и в случае кривой второго порядка, использовать инварианты. **Инвариантами поверхностей второго порядка** являются

$$s_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33},$$

$$s_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a \end{vmatrix}.$$

Их значения не меняются при повороте и параллельном переносе осей координат.

Пример 1. Поверхность задана уравнением в прямоугольной системе координат

$$x^2 + 5y^2 + z^2 - 2xy + 6xz - 2yz - 2x - 6y + 2z = 0.$$

Найдите каноническую систему координат и каноническое уравнение этой поверхности. Определите тип поверхности.



Решение. Найдем сначала ортогональное преобразование переменных, приводящее матрицу A квадратичной формы $x^2 + 5y^2 + z^2 - 2xy + 6xz - 2yz$ к диагональному виду:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ее характеристический многочлен

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 3 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 3 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 36 = -(\lambda + 2)(\lambda - 3)(\lambda - 6).$$

Следовательно, матрица A имеет собственные значения $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$.

Для нахождения собственных векторов матрицы A решаем однородные системы линейных уравнений с матрицами $A + 2I$, $A - 3I$, $A - 6I$ соответственно и выделяем по одному ненулевому решению:

$$A + 2I = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 7 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -7 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -7 & 1 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -7 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{e}'_1 = \{1, 0, -1\}^T;$$

$$A - 3I = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 5 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{e}'_2 = \{1, 1, 1\}^T;$$

$$A - 6I = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & -4 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{e}'_3 = \{1, -2, 1\}^T.$$



Векторы $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3$ ортогональны друг другу как собственные векторы симметричной матрицы, соответствующие различным собственным значениям. Нормируя их, получаем

$$\tilde{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \{1, 0, -1\}^T,$$

$$\tilde{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \{1, 1, 1\}^T,$$

$$\tilde{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \{1, -2, 1\}^T$$

и матрицу перехода P к новому ортонормированному базису

$$P = (\tilde{e}_1 | \tilde{e}_2 | \tilde{e}_3) = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -2 \\ -\sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Проверим правильность нахождения матрицы P :

$$\begin{aligned} P^T A P &= \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} P = \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} & 0 & 2\sqrt{3} \\ 3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 6 & -12 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -2 \\ -\sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}. \end{aligned}$$

Матрица P найдена верно.

Применяя к исходному уравнению ортогональное преобразование координат

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix},$$



получаем новое уравнение поверхности в прямоугольной системе координат со старым центром O и направляющими векторами $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3\}$:

$$\begin{aligned}
 & -2\tilde{x}^2 + 3\tilde{y}^2 + 6\tilde{z}^2 + \frac{1}{\sqrt{6}}(-2, -6, 2) \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -2 \\ -\sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = \\
 & = -2\tilde{x}^2 + 3\tilde{y}^2 + 6\tilde{z}^2 - 2\sqrt{2} \cdot \tilde{x} - 2\sqrt{3} \cdot \tilde{y} + 2\sqrt{6} \cdot \tilde{z} = \\
 & = -2\left(\tilde{x}^2 + \sqrt{2}\tilde{x}\right) + 3\left(\tilde{y}^2 - 2\frac{\sqrt{3}}{3}\tilde{y}\right) + 6\left(\tilde{z}^2 + 2\frac{\sqrt{6}}{6}\tilde{z}\right) = \\
 & = -2\left[\left(\tilde{x} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\right] + 3\left[\left(\tilde{y} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \frac{1}{3}\right] + 6\left[\left(\tilde{z} + \frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2 - \frac{1}{6}\right] = \\
 & = -2\left(\tilde{x} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 3\left(\tilde{y} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 6\left(\tilde{z} + \frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2 + 1 - 1 - 1 = \\
 & = -2\left(\tilde{x} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 3\left(\tilde{y} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 6\left(\tilde{z} + \frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2 - 1 = 0.
 \end{aligned}$$

Выполняя параллельный перенос системы координат $(O, \tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$ по формулам

$$\tilde{\tilde{x}} = \tilde{x} + \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \tilde{\tilde{y}} = \tilde{y} - \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \tilde{\tilde{z}} = \tilde{z} + \frac{\sqrt{6}}{6},$$

приходим к уравнению

$$-2\tilde{\tilde{x}}^2 + 3\tilde{\tilde{y}}^2 + 6\tilde{\tilde{z}}^2 = 1,$$

или

$$-\frac{\tilde{\tilde{x}}^2}{(1/\sqrt{2})^2} + \frac{\tilde{\tilde{y}}^2}{(1/\sqrt{3})^2} + \frac{\tilde{\tilde{z}}^2}{(1/\sqrt{6})^2} = 1.$$



Это – каноническое уравнение двуполостного гиперboloида в прямоугольной системе координат $(\tilde{O}, \tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$.

Вычислим координаты начала $\tilde{O}$ канонической системы координат в старой прямоугольной системе координат. Поскольку

$$P \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix} = \frac{1}{6\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -2 \\ -\sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3\sqrt{2} \\ 2\sqrt{3} \\ -\sqrt{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{O} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right).$$

Пример 2. Исследуйте поверхность второго порядка, заданную в прямоугольной системе координат уравнением

$$9y^2 + 16z^2 + 24yz + 5x + 10y + 5z + 11 = 0.$$

Решение. Начнем с приведения квадратичной формы $9y^2 + 16z^2 + 24yz$ к каноническому виду. Матрицей этой квадратичной формы является матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 12 \\ 0 & 12 & 16 \end{pmatrix}.$$

Ее характеристический многочлен

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 9 - \lambda & 12 \\ 0 & 12 & 16 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^2(\lambda - 25)$$

имеет корни $\lambda_1 = 25$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. При каждом λ_i будем строить фундаментальную систему решений систем уравнений $(A - \lambda_i I)\xi = 0$ и ортонормировать их.



При $\lambda_i = 25$ эта система имеет вид

$$\begin{cases} -25\xi_1 = 0, \\ -16\xi_2 + 12\xi_3 = 0, \\ 12\xi_2 - 9\xi_3 = 0. \end{cases}$$

Ее общее решение $\xi = \left\{0, \frac{3}{4}\xi_3, \xi_3\right\}^T$ имеет одну свободную переменную. Поэтому фундаментальная система решений состоит из одного решения, например, из решения $\tilde{e}'_1 = \{0, 3, 4\}^T$. Нормируя его, получим $\tilde{e}_1 = \frac{1}{5}\{0, 3, 4\}^T$.

При $\lambda_i = 0$ рассматриваемая система имеет вид

$$\begin{cases} 9\xi_2 + 12\xi_3 = 0; \\ 12\xi_2 + 16\xi_3 = 0. \end{cases}$$

Ее общее решение $\xi = \left\{\xi_1, -\frac{4}{3}\xi_3, \xi_3\right\}^T$ имеет две свободные переменные. Поэтому фундаментальная система решений состоит из двух решений, например, из решений $\tilde{e}'_2 = \{1, 0, 0\}^T$ и $\tilde{e}'_3 = \{0, -4, 3\}^T$. Поскольку $\tilde{e}'_2$ и $\tilde{e}'_3$ выбраны ортогональными друг к другу (в противном случае требовалось применение процедуры ортогонализации Грама–Шмидта), остается их лишь нормировать. После нормировки получим $\tilde{e}_2 = \{1, 0, 0\}^T$, $\tilde{e}_3 = \frac{1}{5}\{0, -4, 3\}^T$.

Из столбцов координат векторов $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3$ составим матрицу перехода P к новому ортонормированному базису

$$P = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$



и сделаем проверку:

$$\begin{aligned}
 P^T A P &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 12 \\ 0 & 12 & 16 \end{pmatrix} P = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 0 & 75 & 100 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}.
 \end{aligned}$$

Выполним преобразование координат

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix}$$

и запишем уравнение данной поверхности в новой прямоугольной системе координат со старым центром O и направляющими векторами $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3\}$:

$$\begin{aligned}
 25x^2 + \frac{1}{5}(5, 10, 5) \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} + 11 &= 25\tilde{x}^2 + 10\tilde{x} + 5\tilde{y} - 5\tilde{z} + 11 = \\
 &= 25\left(\tilde{x}^2 + \frac{2}{5}\tilde{x}\right) + 5\tilde{y} - 5\tilde{z} + 11 = 25\left[\left(\tilde{x} + \frac{1}{5}\right)^2 - \frac{1}{25}\right] + 5\tilde{y} - 5\tilde{z} + 11 = \\
 &= 25\left(\tilde{x} + \frac{1}{5}\right)^2 + 5\tilde{y} - 5\tilde{z} + 10 = 25\left(\tilde{x} + \frac{1}{5}\right)^2 - 2\left(-\frac{5}{2}\tilde{y} + \frac{5}{2}\tilde{z} - 5\right) = 0.
 \end{aligned}$$

Теперь совершим преобразование координат, полагая

$$\tilde{\tilde{x}} = \tilde{x} + \frac{1}{5},$$



$$\tilde{y} = \frac{-\frac{5}{2}\tilde{y} + \frac{5}{2}\tilde{z} - 5}{\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2}} = \frac{-\tilde{y} + \tilde{z} - 2}{\sqrt{2}},$$

$$\tilde{z} = \alpha\tilde{x} + \beta\tilde{y} + \gamma\tilde{z}.$$

При этом коэффициенты α , β , γ выберем так, чтобы матрица формул рассматриваемого преобразования координат была ортогональной, т. е. чтобы вектор-строки

$$a_1 = (1, 0, 0), \quad a_2 = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad a_3 = (\alpha, \beta, \gamma)$$

составляли ортонормированную систему векторов. Так как система векторов a_1 , a_2 ортонормированная, то координаты вектора a_3 следует искать из условий

$$\begin{cases} (a_1, a_3) = \alpha = 0; \\ (a_2, a_3) = -\frac{\beta}{\sqrt{2}} + \frac{\gamma}{\sqrt{2}} = 0. \end{cases}$$

Затем найденный вектор a_3 нужно еще нормировать.

$$\text{Проделав это, получим } \alpha = 0, \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно, формулы рассматриваемого преобразования координат имеют вид

$$\tilde{x} = \tilde{x} + \frac{1}{5},$$

$$\tilde{y} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{y} + \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{z} - \sqrt{2},$$

$$\tilde{z} = \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{y} + \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{z},$$



или

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= \tilde{\tilde{x}} - \frac{1}{5}, \\ \tilde{y} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{\tilde{y}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{\tilde{z}} - 1, \\ \tilde{z} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{\tilde{y}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{\tilde{z}} + 1.\end{aligned}$$

В новых координатах рассматриваемая поверхность имеет уравнение

$$\begin{aligned}25\tilde{\tilde{x}}^2 - 2\left[-\frac{5}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{\tilde{y}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{\tilde{z}} - 1\right) + \frac{5}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{\tilde{y}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{\tilde{z}} + 1\right) - 5\right] = \\ = 25\tilde{\tilde{x}}^2 - 2\left[\left(\frac{5}{2}\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{5}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\tilde{\tilde{y}} + \left(-\frac{5}{2}\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{5}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\tilde{\tilde{z}} + \left(\frac{5}{2} + \frac{5}{2} - 5\right)\right] = \\ = 25\tilde{\tilde{x}}^2 - 5\sqrt{2} \cdot \tilde{\tilde{y}} = 0,\end{aligned}$$

или

$$25\tilde{\tilde{x}}^2 = 5\sqrt{2} \cdot \tilde{\tilde{y}}.$$

Это – каноническое уравнение параболического цилиндра в прямоугольной системе координат $(\tilde{O}, \tilde{\tilde{e}}_1, \tilde{\tilde{e}}_2, \tilde{\tilde{e}}_3)$.

Поскольку

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3/5 & 0 & -4/5 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\tilde{x}} \\ \tilde{\tilde{y}} \\ \tilde{\tilde{z}} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3/5 & 0 & -4/5 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\tilde{x}} \\ \tilde{\tilde{y}} \\ \tilde{\tilde{z}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right] =\end{aligned}$$



$$= \begin{pmatrix} 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 3/5 & -4/(5\sqrt{2}) & -4/(5\sqrt{2}) \\ 4/5 & 3/(5\sqrt{2}) & 3/(5\sqrt{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -23/25 \\ 11/25 \end{pmatrix},$$

каноническая система координат $(\tilde{O}, \tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$ имеет начало $\tilde{O} = \left(-1, -\frac{23}{25}, \frac{11}{25}\right)$

и направляющие векторы $\tilde{e}_1 = \left\{0, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right\}^T$, $\tilde{e}_2 = \left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{4}{5\sqrt{2}}, \frac{3}{5\sqrt{2}}\right\}^T$,

$$\tilde{e}_3 = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{4}{5\sqrt{2}}, \frac{3}{5\sqrt{2}}\right\}^T.$$

В задачах этого параграфа рассматриваются только прямоугольные системы координат.

8.5.1. Семейство поверхностей задано уравнением, содержащим произвольный параметр λ . Определите тип поверхности при всевозможных λ :

- | | |
|---|--|
| а) $x^2 + y^2 + z^2 = \lambda$; | з) $x^2 + y^2 = \lambda z$; |
| б) $\lambda x^2 + y^2 + z^2 = 1$; | и) $\lambda x^2 + y^2 = z$; |
| в) $\lambda x^2 + y^2 + z^2 = \lambda$; | к) $\lambda(x^2 + y^2) = z$; |
| г) $x^2 + y^2 - z^2 = \lambda$; | л) $x^2 + \lambda y^2 = \lambda z$; |
| д) $x^2 - y^2 - z^2 = \lambda$; | м) $x^2 + \lambda y^2 = \lambda z + 1$; |
| е) $x^2 + \lambda(y^2 + z^2) = 1$; | н) $x^2 + y^2 = \lambda$; |
| ж) $x^2 + \lambda(y^2 + z^2) = \lambda$; | о) $x^2 - y^2 = \lambda$. |

8.5.2. а) Сечения поверхности $x^2 + 2y^2 - 3z^2 - 1 = 0$ плоскостями $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ спроектированы на плоскость Oyz . Изобразите проекции.

б) Сечения поверхности $x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 0$ плоскостями $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ спроектированы на плоскость Oyz . Изобразите проекции.

в) Сечения поверхности $2x^2 - y^2 = 2z$ плоскостями $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ спроектированы на плоскость Oyz . Изобразите проекции.



г) Сечения поверхности $2x^2 - y^2 = 2z$ плоскостями $y = -1$, $y = 0$, $y = 1$ спроектированы на плоскость Oxz . Изобразите проекции.

д) Сечения поверхности $2x^2 - y^2 = 2z$ плоскостями $z = -1$, $z = 0$, $z = 1$ спроектированы на плоскость Oxy . Изобразите проекции.

8.5.3. а) Сечения поверхностей $x^2 + 2y^2 - 3z^2 - 1 = 0$, $x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 0$, $x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 1 = 0$ плоскостью $x = 0$ спроектированы на плоскость Oyz . Изобразите проекции.

б) Сечения тех же поверхностей плоскостью $z = 1$ спроектированы на плоскость Oxy . Изобразите проекции.

8.5.4. По какой линии плоскость $x + y - z + 3 = 0$ пересекает следующую поверхность:

а) $z = -4y^2 - 6x + 15$;

г) $x^2 + y^2 - 2z^2 - 2xy + 2z = 0$;

б) $z = x^2 + 3y^2 + 1$;

д) $4x^2 - y^2 - 2xz - 6z + 1 = 0$?

в) $2xy + 15x - 30 = 0$;

8.5.5. Установите, что плоскость $x + 4 = 0$ пересекает эллипсоид $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} + \frac{z^2}{16} = 1$ по эллипсу, и найдите его вершины и полуоси.

8.5.6. Найдите параметр и вершину параболы, получающейся в пересечении плоскости $y - 12 = 0$ и гиперболического параболоида $\frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{8} = 6z$.

8.5.7. Покажите, что плоскость $y = 3$ пересекает однополостный гиперболоид $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{18} - \frac{z^2}{4} = 1$ по гиперболе. Найдите полуоси и вершины этой гиперболы.

8.5.8. Определите, лежит ли точка $A = (1, 1, 1)$ внутри или вне эллипсоида $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 4$.

8.5.9. Направляющая конуса задана уравнениями $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$, $z = 0$, а вершина находится в точке $A = (0, -3, 4)$. Составьте уравнение конуса.



8.5.10. Найдите точки пересечения сферы $(x-4)^2 + (y+5)^2 + (z-6)^2 = 81$ и прямой $\frac{x-3}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-4}{-2}$.

8.5.11. Определите тип поверхности в зависимости от параметра λ :

$$x^2 - 2y^2 - 3z^2 - 4xy - 6xz - 2x + 4y + 6z + \lambda = 0.$$

8.5.12. Приведите уравнения к каноническому виду при помощи перехода к новой прямоугольной системе координат и выясните расположение относительно исходной прямоугольной системы координат следующих поверхностей второго порядка:

- а) $2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 2xz + 2yz - 2x - 2y - 16z + 53 = 0$;
- б) $xy + xz + yz + 2\sqrt{2} \cdot x + 2\sqrt{2} \cdot y - 2\sqrt{2} \cdot z - 100 = 0$;
- в) $x^2 + 4y^2 + z^2 + 4xy - 2xz - 4yz - 2x - 6y + 6z = 0$;
- г) $4x^2 - 6y^2 + 4z^2 - 4xz - 8y - 4z - 3 = 0$;
- д) $5x^2 + 7y^2 + 6z^2 + 4xz + 4yz + 10x + 14y + 8z - 6 = 0$;
- е) $x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz - 2x = 0$;
- ж) $-8x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4xy + 4xz - 10yz + 12x + 24y + 24z - 9 = 0$;
- з) $-18x^2 - 32z^2 + 40xy - 48xz - 30yz + 20x - 100y - 140z - 250 = 0$;
- и) $2x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz + x - 4y - 3z + 2 = 0$;
- к) $\frac{7}{2}x^2 + \frac{7}{2}y^2 + 8z^2 - 5xy - 4xz - 4yz - 8x - 8y - 4z + 36 = 0$;
- л) $17x^2 + 17y^2 + 11z^2 - 16xy + 8xz - 8yz - 2x + 34y - 44z + 57 = 0$;
- м) $11x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 4xy - 16xz + 20yz + 22x - 68y - 34z + 62 = 0$;
- н) $4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4xy - 8xz + 4yz - 14x + y + 8z + 30 = 0$;
- о) $-xy + xz + yz + 2x + 2y - 2z = 0$;
- п) $y^2 + 2xy + 4xz + 2yz - 4x - 2y = 0$;
- р) $3x^2 + 12y^2 + 27z^2 - 12xy + 18xz - 36yz - 3x + 6y - 9z + 18 = 0$.

ГЛАВА 9

КАНОНИЧЕСКИЙ ВИД ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

§ 9.1. ЖОРДАНОВА НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА МАТРИЦ

Известно, что матрица оператора простой структуры приводится к диагональному виду. В общем случае комплексная квадратная матрица приводится к квазидиагональной, так называемой жордановой форме.

Пусть линейный оператор A , действующий в n -мерном комплексном пространстве X , в некотором базисе этого пространства имеет матрицу A , характеристический многочлен которой представлен в виде канонического разложения

$$\det(A - \lambda I) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{p_1} (\lambda - \lambda_2)^{p_2} \dots (\lambda - \lambda_k)^{p_k}, \quad (9.1.1)$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ – попарно различные собственные значения, $p_1, \dots, p_k$ – соответствующие им алгебраические кратности и $p_1 + \dots + p_k = n$.

Корневым подпространством $N_{\lambda_i}^{(p_i)}$ оператора A , отвечающим собственному значению λ_i с алгебраической кратностью p_i , называется ядро оператора $(A - \lambda_i I)^{p_i}$, т. е.

$$N_{\lambda_i}^{(p_i)} = \{x \in X \mid (A - \lambda_i I)^{p_i} x = 0\}. \quad (9.1.2)$$

Векторы корневых подпространств называются **корневыми векторами**.

Размерность корневого подпространства $N_{\lambda_i}^{(p_i)}$ равна p_i . Каждое корневое подпространство $N_{\lambda_1}^{(p_1)}, \dots, N_{\lambda_k}^{(p_k)}$ инвариантно относительно оператора A , и пространство X разлагается в прямую сумму корневых подпространств

$$X = N_{\lambda_1}^{(p_1)} \dot{+} N_{\lambda_2}^{(p_2)} \dot{+} \dots \dot{+} N_{\lambda_k}^{(p_k)}. \quad (9.1.3)$$



Базис пространства X , составленный как последовательное объединение базисов всех корневых подпространств $N_{\lambda_i}^{(p_i)}$, называется **корневым базисом**.

Пусть $N_{\lambda_i}^{(p_i)}$ – одно из корневых подпространств. Тогда в нем существует собственный вектор x_1 и векторы $x_2, \dots, x_h$, удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned}(A - \lambda_i I)x_1 &= 0, \\(A - \lambda_i I)x_2 &= x_1, \\(A - \lambda_i I)x_3 &= x_2, \\&\dots \dots \dots \\(A - \lambda_i I)x_h &= x_{h-1}.\end{aligned}\tag{9.1.4}$$

Векторы $x_2, x_3, \dots, x_h$ называются **присоединенными к x_1 векторами первого, второго и более высоких порядков** соответственно. Вместе с вектором x_1 они образуют в $N_{\lambda_i}^{(p_i)}$ **жорданову цепочку длиной h с началом в x_1** . Линейная оболочка $L(x_1, x_2, \dots, x_h)$ корневых векторов $x_1, x_2, \dots, x_h$ образует h -мерное **циклическое подпространство**, порожденное собственным вектором x_1 .

Корневое подпространство $N_{\lambda_i}^{(p_i)}$ распадается в прямую сумму $n - \text{rg}(A - \lambda_i I)$ инвариантных относительно оператора A циклических подпространств.

Корневой базис, составленный как последовательное объединение базисов циклических подпространств, называется **корневым базисом Жордана (жордановым базисом)**.

Клеткой Жордана $J_k(\lambda)$ называется верхняя треугольная матрица размера $k \times k$, имеющая вид

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.\tag{9.1.5}$$

По определению $J_1(\lambda) = \lambda$.



В жордановом базисе матрица оператора A имеет **жорданову нормальную форму**, т. е. является квазидиагональной матрицей J , состоящей из жордановых клеток, расположенных по главной диагонали. Первыми располагаются жордановы клетки, соответствующие собственному значению λ_1 , затем жордановы клетки, соответствующие собственному значению λ_2 , и т. д. При этом жордановы клетки располагаются в матрице J по главной диагонали в том же порядке, в каком расположены в жордановом базисе соответствующие им жордановы цепочки.

Таким образом, матрица J имеет вид

$$J = \left(\begin{array}{c} \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_1 \end{matrix}} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \boxed{\lambda_1} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \boxed{\begin{matrix} \lambda_k & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_k \end{matrix}} & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \boxed{\lambda_k} \end{array} \right) \quad (9.1.6)$$

В жордановой матрице J по каждому λ_i жордановы клетки располагаются по убыванию их порядков. Некоторые из жордановых клеток могут повторяться, а некоторые из жордановых клеток низших порядков могут отсутствовать. Частным случаем жордановой матрицы является диагональная матрица.

Заметим, что если в построенном жордановом базисе изменить нумерацию жордановых цепочек, то в жордановой матрице на главной диагонали соответственно изменят положения соответствующие жордановы клетки.

Всякая комплексная матрица A подобна жордановой матрице J , которая определена с точностью до порядка расположения клеток Жордана на главной диагонали:



$$J = P^{-1}AP, \quad (9.1.7)$$

где P – матрица перехода от исходного базиса пространства X к его жорданову базису.

Матрица P состоит из столбцов координат векторов жорданова базиса в исходном базисе. Причем эти столбцы располагаются в матрице P в том же порядке, в каком располагаются соответствующие им векторы в жордановом базисе пространства X . Матрица P называется **трансформирующей**, или **приводящей** матрицу A к ее жордановой форме J .

Пример. Постройте жорданов базис оператора с матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

жорданову форму J этой матрицы и трансформирующую матрицу P .

Решение. В настоящее время в учебной литературе по линейной алгебре описано достаточно много способов решения задач данного типа (см., например, [3, 11, 16, 17, 21]). Воспользуемся одним из двух подходов, указанных в книге [3].

Начнем с нахождения собственных значений матрицы A . Поскольку

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -4 & 4 - \lambda & 0 \\ -2 & 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 2)^3,$$

матрица A имеет только одно собственное значение $\lambda_1 = 2$. Его алгебраическая кратность $p_1 = 3$.

Выясним, какова геометрическая кратность λ_1 .

$$A - \lambda_1 I = A - 2I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (9.1.8)$$

Геометрическая кратность собственного значения λ_1 равна

$$n - \text{rg}(A - \lambda_1 I) = 3 - 1 = 2.$$

Поскольку геометрическая кратность λ_1 меньше алгебраической, матрица A не является матрицей простой структуры (A – **дефектная матрица**).

В силу того что A имеет только одно собственное значение, трехмерное пространство X , в котором действует линейный оператор, совпадает с корневым подпространством $N_2^{(3)}$. Это подпространство разложимо в прямую сумму двух циклических подпространств размерности 2 и 1. Таким образом, искомый жорданов базис состоит из двух собственных векторов и одного присоединенного вектора первого порядка.

Определим общий вид собственных векторов $x_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T$, для чего решим однородную систему уравнений $(A - \lambda_1 I) x_1 = 0$. Из (9.1.8) видно, что в качестве свободных переменных можно выбрать α_2 и α_3 . Тогда $\alpha_1 = \frac{1}{2}\alpha_2$

$$\text{и } x_1 = \left(\frac{1}{2}\alpha_2, \alpha_2, \alpha_3 \right)^T.$$

Для построения жорданова базиса осталось найти присоединенный вектор первого порядка $x_2 = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^T$. Решим неоднородную систему уравнений $(A - \lambda_1 I) x_2 = x_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & \frac{1}{2}\alpha_2 \\ -4 & 2 & 0 & \alpha_2 \\ -2 & 1 & 0 & \alpha_3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & \frac{1}{2}\alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_3 - \frac{1}{2}\alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \quad (9.1.10)$$

В соответствии с теоремой Кронекера–Капели система (9.1.10) совместна тогда и только тогда, когда $\alpha_3 = \frac{1}{2}\alpha_2$. Подставляя это условие в выражение (9.1.9), получим общий вид собственных векторов, имеющих присоединенные векторы первого порядка: $x_1 = \left(\frac{1}{2}\alpha_2, \alpha_2, \frac{1}{2}\alpha_2 \right)^T$. Найдем общий вид присоединенных векторов в зависимости от значения α_2 , для чего продолжим решение системы (9.1.10)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & \frac{1}{2}\alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$



Выбирая в качестве свободных переменных β_2 и β_3 , получаем, что $\beta_1 = -\frac{1}{4}\alpha_2 + \frac{1}{2}\beta_2$ и $x_2 = \left(-\frac{1}{4}\alpha_2 + \frac{1}{2}\beta_2, \beta_2, \beta_3\right)^T$.

Полагая значения свободных переменных $\beta_2 = 1$, $\beta_3 = 0$, $\alpha_2 = 2$, найдем собственный вектор $e_1 = (1, 2, 1)^T$ и присоединенный к нему вектор первого порядка $e_2 = (0, 1, 0)^T$. Оставшийся вектор жорданова базиса определим, выбирая в выражении (9.1.9) $\alpha_2 = 0$ и $\alpha_3 = 1$. Получим вектор $f_1 = (0, 0, 1)^T$. Векторы $\{e_1, e_2, f_1\}$ образуют искомый жорданов базис, в котором матрица

линейного оператора имеет вид $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Запишем трансформирующую матрицу:

$$P = (e_1 | e_2 | f_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и проверим правильность полученных результатов:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = J.$$

9.1.1. Постройте жорданов базис оператора с матрицей A , жорданову форму J матрицы A и трансформирующую матрицу P для следующих матриц A :

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}; & \text{б)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; & \text{в)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \\ \text{г)} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}; & \text{д)} \begin{pmatrix} 5 & -9 & -4 \\ 6 & -11 & -5 \\ -7 & 13 & 6 \end{pmatrix}; & \text{е)} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \end{array}$$



$$\begin{aligned}
 &\text{ж)} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}; & \text{з)} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}; & \text{и)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}; \\
 &\text{к)} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}; & \text{л)} \begin{pmatrix} 99 & 0 & 0 & 101 \\ 0 & 99 & 0 & 0 \\ 0 & 101 & 99 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 99 \end{pmatrix}; & \text{м)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \\
 &\text{н)} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}; & \text{о)} \begin{pmatrix} -3 & 1 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \\
 &\text{п)} \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & -2 \\ -4 & -2 & -1 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

9.1.2. Найдите квадрат жордановой клетки $J_k(\lambda)$.

9.1.3. Найдите жорданову форму квадрата жордановой клетки $J_k(\lambda)$ при $\lambda \neq 0$.

9.1.4. Найдите жорданову форму квадрата жордановой клетки $J_k(0)$, если:

а) $k = 4$;

б) $k = 5$.

9.1.5. Постройте корневое подпространство для следующих матриц:

$$\text{а)} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{б)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$



9.1.6. Найдите канонический базис и жорданову форму оператора дифференцирования в пространстве $M_3(R)$.

9.1.7. В пространстве многочленов $M_n(R)$ найдите жорданову форму оператора

$$Af(t) = f(t+1) - f(t).$$

§ 9.2. λ -МАТРИЦЫ

Квадратная матрица, элементами которой являются многочлены от λ , называется λ -матрицей (полиномиальной матрицей). Степенью λ -матрицы называется максимальная из степеней многочленов, образующих элементы матрицы.

Элементарными преобразованиями λ -матриц называются преобразования следующих типов:

- 1) перестановка между собой двух каких-либо строк или столбцов матрицы;
- 2) прибавление к строке какой-либо другой строки, умноженной на некоторый многочлен $\varphi(\lambda)$, и аналогично прибавление к столбцу другого столбца, умноженного на некоторый многочлен;
- 3) умножение строки или столбца на некоторое число, отличное от нуля.

Две λ -матрицы $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ называются эквивалентными, если одна может быть получена из другой при помощи конечного числа элементарных преобразований. Эквивалентность λ -матриц записывается следующим образом: $A(\lambda) \sim B(\lambda)$.

Всякая λ -матрица может быть элементарными преобразованиями приведена к виду

$$\begin{pmatrix} E_1(\lambda) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & E_2(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & E_3(\lambda) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & E_n(\lambda) \end{pmatrix}, \quad (9.2.1)$$

где многочлены $E_k(\lambda)$, стоящие по диагонали, имеют старшие коэффициенты, равные единице, многочлен $E_2(\lambda)$ делится на $E_1(\lambda)$, $E_3(\lambda)$ делится на $E_2(\lambda)$

$$E_{r+1}(\lambda) = E_{r+2}(\lambda) = \dots = E_n(\lambda) = 0.$$

Пусть матрица A имеет жорданову нормальную форму J , в которой имеется p клеток порядков $n_1, n_2, \dots, n_p$ ($n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_p$), отвечающих собственному значению λ_1 , q клеток порядков $m_1, m_2, \dots, m_q$ ($m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_q$), отвечающих собственному значению λ_2 , и т. д.; тогда инвариантные множители $E_k(\lambda)$ матрицы $A - \lambda I$ имеют вид

$$E_{n-1}(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_2} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \dots,$$



$$E_{n-2}(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_3} (\lambda - \lambda_2)^{m_3} \dots,$$

.....

Таким образом, задание последовательности инвариантных множителей $E_n(\lambda)$, $E_{n-1}(\lambda)$, ... полностью определяет жорданову нормальную форму матрицы A ; собственные значения λ_i получаются как корни уравнения $E_n(\lambda) = 0$. Размеры же $n_1, n_2, \dots, n_p$ клеток, отвечающих данному собственному значению λ_1 , равны степеням, с которыми $\lambda - \lambda_1$ содержится соответственно в $E_n(\lambda)$, $E_{n-1}(\lambda)$, ...

Матрица A имеет простую структуру тогда и только тогда, когда все инвариантные множители λ -матрицы $A - \lambda I$ имеют только простые корни.

Скалярный многочлен $\varphi(\lambda)$ называется **аннулирующим многочленом** квадратной матрицы A , если $\varphi(A) = 0$. В частности, одним из аннулирующих многочленов матрицы является ее характеристический многочлен. Многочлен наименьшей степени среди ненулевых аннулирующих многочленов матрицы A со старшим коэффициентом 1 называется **минимальным многочленом** матрицы A . Любой аннулирующий многочлен матрицы делится на ее минимальный многочлен.

Минимальный многочлен $\psi(\lambda)$ матрицы A равен последнему инвариантному множителю $E_n(\lambda)$ λ -матрицы $A - \lambda I$.

Пример 1. При помощи инвариантных множителей найдите жорданову нормальную форму матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -15 \\ 1 & 0 & -5 \\ 1 & 2 & -7 \end{pmatrix}$. Укажите минимальный многочлен этой матрицы.

Решение. Запишем λ -матрицу $A - \lambda I$ и, воспользовавшись методикой, подробно изложенной в книге [7, § 22], приведем ее к нормальной диагональной форме:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 6 & -15 \\ 1 & -\lambda & -5 \\ 1 & 2 & -7-\lambda \end{pmatrix}.$$



Поменяем местами первую и вторую строку:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & -5 \\ 1-\lambda & 6 & -15 \\ 1 & 2 & -7-\lambda \end{pmatrix}.$$

Теперь, прибавляя ко второму и третьему столбцу первый, предварительно умноженный соответственно на λ , 5, получим

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-\lambda & -\lambda^2+\lambda+6 & -5\lambda-10 \\ 1 & \lambda+2 & -\lambda-2 \end{pmatrix}.$$

Прибавляя ко второй и третьей строке первую, предварительно умноженную соответственно на $\lambda-1$, -1 , получим

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda^2+\lambda+6 & -5\lambda-10 \\ 0 & \lambda+2 & -\lambda-2 \end{pmatrix}.$$

Поменяем местами вторую и третью строку:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+2 & -\lambda-2 \\ 0 & -\lambda^2+\lambda+6 & -5\lambda-10 \end{pmatrix}.$$

Прибавляя к третьему столбцу второй, найдем:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+2 & 0 \\ 0 & -\lambda^2+\lambda+6 & -\lambda^2-4\lambda-4 \end{pmatrix}.$$

Прибавляя к третьей строке вторую, умноженную на $\lambda-3$, получим

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+2 & 0 \\ 0 & 0 & -(\lambda+2)^2 \end{pmatrix}.$$



Умножая третий столбец на (-1) , приходим к нормальной диагональной форме λ -матрицы $A - \lambda I$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 2 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda + 2)^2 \end{pmatrix},$$

инвариантные множители которой $E_{3A}(\lambda) = (\lambda + 2)^2$, $E_{2A}(\lambda) = \lambda + 2$, $E_{1A}(\lambda) = 1$ позволяют составить жорданову нормальную форму

$$J = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ и минимальный многочлен } \psi(\lambda) = (\lambda + 2)^2.$$

Пример 2. Выясните, подобны ли между собой матрица A из примера 1 и матрица $B = \begin{pmatrix} 58 & 6 & -15 \\ -100 & -12 & 25 \\ 200 & 20 & -52 \end{pmatrix}$.

Решение. Найдем инвариантные множители λ -матрицы $B - \lambda I$, для чего приведем ее к нормальной диагональной форме

$$B - \lambda I = \begin{pmatrix} 58 - \lambda & 6 & -15 \\ -100 & -12 - \lambda & 25 \\ 200 & 20 & -52 - \lambda \end{pmatrix}.$$

Умножим второй столбец на $\frac{1}{6}$ и поменяем местами его с первым столбцом:

$$\begin{pmatrix} 1 & 58 - \lambda & -15 \\ -2 - \frac{1}{6}\lambda & -100 & 25 \\ \frac{10}{3} & 200 & -52 - \lambda \end{pmatrix}.$$

Прибавляя ко второму и третьему столбцу первый, предварительно умноженный на $\lambda - 58$, 15 , получим



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 - \frac{1}{6}\lambda & -\frac{1}{6}\lambda^2 + \frac{23}{3}\lambda + 16 & -\frac{5}{2}\lambda - 5 \\ \frac{10}{3} & \frac{10}{3}\lambda + \frac{20}{3} & -\lambda - 2 \end{pmatrix}.$$

Теперь, прибавляя ко второй и третьей строке первую, предварительно умноженную на $\frac{1}{6}\lambda + 2$, $-\frac{10}{3}$, найдем

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6}\lambda^2 + \frac{23}{3}\lambda + 16 & -\frac{5}{2}\lambda - 5 \\ 0 & \frac{10}{3}\lambda + \frac{20}{3} & -\lambda - 2 \end{pmatrix}.$$

Третий столбец умножим на (-1) и поменяем местами со вторым столбцом. Имеем

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2}\lambda + 5 & -\frac{1}{6}\lambda^2 + \frac{23}{3}\lambda + 16 \\ 0 & \lambda + 2 & \frac{10}{3}\lambda + \frac{20}{3} \end{pmatrix}.$$

Поменяем местами вторую и третью строку:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 2 & \frac{10}{3}\lambda + \frac{20}{3} \\ 0 & \frac{5}{2}\lambda + 5 & -\frac{1}{6}\lambda^2 + \frac{23}{3}\lambda + 16 \end{pmatrix}.$$

Прибавляя к третьему столбцу второй, предварительно умноженный на $\left(-\frac{10}{3}\right)$, получим



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 2 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2}\lambda + 5 & -\frac{1}{6}\lambda^2 - \frac{2}{3}\lambda - \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Прибавляя к третьей строке вторую, предварительно умноженную на $\left(-\frac{5}{2}\right)$, найдем:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6}(\lambda + 2)^2 \end{pmatrix}.$$

Умножая третий столбец на (-6) , приходим к нормальной диагональной форме λ -матрицы $B - \lambda I$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 2 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda + 2)^2 \end{pmatrix}.$$

Выпишем инвариантные множители этой матрицы: $E_{3B}(\lambda) = (\lambda + 2)^2$, $E_{2B}(\lambda) = \lambda + 2$, $E_{1B}(\lambda) = 1$. Поскольку инвариантные множители λ -матриц $A - \lambda I$ и $B - \lambda I$ между собой совпадают, согласно критерию подобия матриц матрицы A и B подобны.

9.2.1. Путем элементарных преобразований приведите следующие λ -матрицы к нормальной диагональной форме:

а) $\begin{pmatrix} \lambda + 1 & 2 \\ 0 & \lambda + 1 \end{pmatrix};$

б) $\begin{pmatrix} \lambda + 1 & 0 \\ 0 & \lambda - 2 \end{pmatrix};$

в) $\begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda^2 - \lambda \\ \lambda^2 + \lambda & \lambda^2 + \lambda \end{pmatrix};$

г) $\begin{pmatrix} \lambda - 2 & \lambda^2 - 4 & \lambda \\ 5\lambda - 6 & 5\lambda^2 - 12 & \lambda^2 + 4\lambda \\ \lambda + 2 & \lambda^2 + 4 & \lambda^2 \end{pmatrix};$



$$д) \begin{pmatrix} \lambda+3 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda+3 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda+3 \end{pmatrix}; \quad е) \begin{pmatrix} \lambda^2 & -\lambda & \lambda-1 \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ \lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2-1 \end{pmatrix}.$$

9.2.2. При помощи наибольших общих делителей миноров приведите следующие λ -матрицы к нормальной диагональной форме:

$$а) \begin{pmatrix} \lambda(\lambda+1) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda-1) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2-1 \end{pmatrix}; \quad б) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda(\lambda-2) \\ 0 & \lambda(\lambda-1) & 0 \\ \lambda^2 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$в) \begin{pmatrix} 0 & 2 & \lambda-1 \\ 1 & \lambda & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad г) \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 3 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix};$$

$$д) \begin{pmatrix} f(\lambda)g(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & f(\lambda)h(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & g(\lambda)h(\lambda) \end{pmatrix},$$

где $f(\lambda)$, $g(\lambda)$, $h(\lambda)$ – попарно взаимно простые многочлены от λ со старшими коэффициентами, равными единице.

9.2.3. Найдите жорданову нормальную форму J матрицы A , если даны инвариантные множители $E_k(\lambda)$ ($k=1, 2, \dots, n$) λ -матрицы $A - \lambda I$:

$$а) E_1(\lambda) = E_2(\lambda) = 1, E_3(\lambda) = E_4(\lambda) = \lambda - 1, E_5(\lambda) = E_6(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 2);$$

$$б) E_1(\lambda) = E_2(\lambda) = E_3(\lambda) = 1, E_4(\lambda) = \lambda + 1, E_5(\lambda) = (\lambda + 1)^2, E_6(\lambda) = (\lambda + 1)^2(\lambda - 5);$$

$$в) E_1(\lambda) = E_2(\lambda) = 1, E_3(\lambda) = \lambda - 2, E_4(\lambda) = \lambda^2 - 4.$$

9.2.4. При помощи инвариантных множителей постройте жорданову нормальную форму следующих матриц:

$$а) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}; \quad б) \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}; \quad в) \begin{pmatrix} -1 & -3 & 4 \\ 4 & -9 & 8 \\ 6 & -7 & 5 \end{pmatrix};$$



$$\text{г) } \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}; \quad \text{д) } \begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{е) } \begin{pmatrix} 5 & -9 & -4 \\ 6 & -11 & -5 \\ -7 & 13 & 6 \end{pmatrix}.$$

9.2.5. Выясните, являются ли подобными матрицы:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ -25 & -10 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 2 & 6 & -10 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 6 & 20 & -34 \\ 6 & 32 & -51 \\ 4 & 20 & -32 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } A = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -3 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 9 \end{pmatrix};$$

$$\text{г) } A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ -2 & -4 & 13 \\ -1 & -4 & 10 \end{pmatrix}.$$

9.2.6. Приведите пример двух матриц, не являющихся подобными, характеристические и минимальные многочлены которых одни и те же.

9.2.7. Найдите минимальные многочлены следующих матриц:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 3 & 5 & -15 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -7 & -2 & 9 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ -2 & -4 & 13 \\ -1 & -4 & 10 \end{pmatrix}.$$

ГЛАВА 10

ФУНКЦИИ ОТ МАТРИЦ

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИЙ ОТ МАТРИЦ РАЗЛИЧНЫМИ СПОСОБАМИ

Пусть $\psi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \dots (\lambda - \lambda_s)^{m_s}$ – минимальный многочлен матрицы A степени $m = m_1 + m_2 + \dots + m_s$. Здесь m_k – кратность λ_k как корня минимального многочлена $\psi(\lambda)$.

Если для функции $f(\lambda)$ существуют (т. е. имеют смысл) значения

$$f(\lambda_k), \quad f'(\lambda_k), \quad f''(\lambda_k), \dots, f^{(m_k-1)}(\lambda_k) \quad (k=1, 2, \dots, s), \quad (10.1.1)$$

то говорят, что **функция $f(\lambda)$ определена на спектре матрицы A** и совокупность m чисел (10.1.1) называют **значениями функции $f(\lambda)$ на спектре матрицы A** .

Среди всех многочленов, принимающих те же значения на спектре матрицы A , что и $f(\lambda)$, существует один и только один многочлен $r(\lambda)$, имеющий степень, меньшую степени минимального многочлена матрицы A . Этот многочлен однозначно определяется интерполяционными условиями

$$r(\lambda_k) = f(\lambda_k), \quad r'(\lambda_k) = f'(\lambda_k), \dots, r^{(m_k-1)}(\lambda_k) = f^{(m_k-1)}(\lambda_k) \quad (k=1, 2, \dots, s) \quad (10.1.2)$$

и называется **интерполяционным многочленом Лагранжа–Сильвестра** для функции $f(\lambda)$ на спектре матрицы A . Его значение от матрицы A по определению принимается за значение функции $f(\lambda)$ от этой матрицы: $f(A) = r(A)$.

Заметим, что если минимальный многочлен $\psi(\lambda)$ матрицы A не имеет кратных корней ($m_1 = m_2 = \dots = m_s = 1$ и $s = m$), то для того чтобы $f(A)$ имело смысл, достаточно, чтобы функция $f(\lambda)$ была определена в характеристиче-



ских точках $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$. Если же $\psi(\lambda)$ имеет кратные корни, то в некоторых характеристических точках должны быть определены и производные от $f(\lambda)$ до известного порядка [см. соотношение (10.1.2)].

Если $A = J_k(\alpha)$, то минимальным многочленом матрицы A будет $\psi(\lambda) = (\lambda - \alpha)^k$. Интерполяционный многочлен Лагранжа–Сильвестра $r(\lambda)$ для функции $f(\lambda)$ в предположении существования значений $f(\alpha), f'(\alpha), \dots, f^{(k-1)}(\alpha)$ определится равенством

$$r(\lambda) = f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)}{1!}(\lambda - \alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(\lambda - \alpha)^2 + \dots + \frac{f^{(k-1)}(\alpha)}{(k-1)!}(\lambda - \alpha)^{k-1},$$

что позволит найти значение $f(J_k(\alpha))$:

$$\begin{aligned} f(J_k(\alpha)) &= r(J_k(\alpha)) = f(\alpha)I + \frac{f'(\alpha)}{1!}J_k(0) + \\ &+ \frac{f''(\alpha)}{2!}J_k^2(0) + \dots + \frac{f^{(k-1)}(\alpha)}{(k-1)!}J_k^{k-1}(0) = \\ &= \begin{pmatrix} f(\alpha) & \frac{f'(\alpha)}{1!} & \frac{f''(\alpha)}{2!} & \dots & \frac{f^{(k-1)}(\alpha)}{(k-1)!} \\ 0 & f(\alpha) & \frac{f'(\alpha)}{1!} & \dots & \frac{f^{(k-2)}(\alpha)}{(k-2)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f(\alpha) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (10.1.3)$$

Подчеркнем два важных для решения задач свойства функций от матриц.

1⁰ Если две матрицы A и B подобны, причем $B = P^{-1}AP$, и для функции $f(\lambda)$ матрица $f(A)$ существует, то и матрица $f(B)$ существует и подобна $f(A)$, причем $f(B) = P^{-1}f(A)P$.

2⁰. Если $A = \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_l)$ и функция $f(\lambda)$ определена на спектре матрицы A , то $f(A) = \text{diag}(f(A_1), f(A_2), \dots, f(A_l))$.



Свойства $1^0, 2^0$ наряду с результатом (10.1.3) используются для вычисления значений функций от матриц через жорданову нормальную форму.

Пусть функция $f(\lambda)$ определена на спектре матрицы A . Тогда определена матрица $f(A)$ и, следовательно, существует интерполяционный многочлен Лагранжа–Сильвестра $r(\lambda)$. Если $\psi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \dots (\lambda - \lambda_s)^{m_s}$ – минимальный многочлен матрицы A и корни $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ различны между собой, то

$$r(\lambda) = \sum_{k=1}^s \left[\alpha_{k1} + \alpha_{k2}(\lambda - \lambda_k) + \dots + \alpha_{k,m_k}(\lambda - \lambda_k)^{m_k-1} \right] \psi_k(\lambda), \quad (10.1.4)$$

где

$$\psi_k(\lambda) = \frac{\psi(\lambda)}{(\lambda - \lambda_k)^{m_k}}, \quad (10.1.5)$$

а коэффициенты α_{kj} определяются из равенств

$$\alpha_{kj} = \frac{1}{(j-1)!} \left[\frac{f(\lambda)}{\psi_k(\lambda)} \right]_{\lambda=\lambda_k}^{(j-1)} \quad (j=1, 2, \dots, m_k; \quad k=1, 2, \dots, s). \quad (10.1.6)$$

Заметим, что выражение в квадратных скобках в формуле (10.1.4) равно сумме первых m_k членов разложения в ряд Тейлора по степеням разности $\lambda - \lambda_k$ для функции $\frac{f(\lambda)}{\psi_k(\lambda)}$.

Если в формулу (10.1.4) для $r(\lambda)$ подставить выражения (10.1.6) для коэффициентов α_{kj} , раскрыть скобки и объединить члены, содержащие $f^{(j-1)}(\lambda_k)$ ($j=1, 2, \dots, m_k; \quad k=1, 2, \dots, s$), то ее можно записать в виде

$$r(\lambda) = \sum_{k=1}^s \left[f(\lambda_k) \varphi_{k1}(\lambda) + f'(\lambda_k) \varphi_{k2}(\lambda) + \dots + f^{(m_k-1)}(\lambda_k) \varphi_{k,m_k}(\lambda) \right]. \quad (10.1.7)$$

Из равенства (10.1.7) следует **основная формула для $f(A)$** :

$$f(A) = r(A) = \sum_{k=1}^s \left[f(\lambda_k) Z_{k1} + f'(\lambda_k) Z_{k2} + \dots + f^{(m_k-1)}(\lambda_k) Z_{k,m_k} \right], \quad (10.1.8)$$



где

$$Z_{kj} = \Phi_{kj}(A) \quad (j = 1, 2, \dots, m_k; \quad k = 1, 2, \dots, s). \quad (10.1.9)$$

Матрицы Z_{kj} , называемые **компонентами матрицы A** , вполне определяются заданием матрицы A и не зависят от выбора функции $f(\lambda)$. В правой части формулы (10.1.8) функция $f(\lambda)$ представлена только своими значениями на спектре матрицы A .

Формула (10.1.8) для $f(A)$ особенно удобна, когда требуется вычислить несколько функций от одной и той же матрицы. На практике компоненты Z_{kj} матрицы A проще находить не по формуле (10.1.9), а из системы, которая получится в результате последовательной подстановки в (10.1.8) вместо $f(\lambda)$ простейших линейно независимых многочленов столько раз, сколько содержится в (10.1.8) компонент Z_{kj} .

Пример. Вычислите A^{100} при помощи жордановой нормальной формы матрицы A , интерполяционного многочлена Лагранжа–Сильвестра и основной формулы, если $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

Решение. Начнем с построения жордановой нормальной формы J матрицы A и приводящей к ней матрицы P . Поскольку

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5 - \lambda & -4 \\ 4 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2,$$

матрица A имеет одно собственное значение $\lambda_1 = 1$. Его алгебраическая кратность $p_1 = 2$.

$$A - \lambda_1 I = A - I = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10.1.10)$$

Геометрическая кратность λ_1 равна $n - \text{rg}(A - \lambda_1 I) = 2 - 1 = 1$. Следовательно, жорданов базис будут составлять собственный вектор $x_1 = (\alpha_1, \alpha_2)^T$ и присоединенный к нему вектор первого порядка $x_2 = (\beta_1, \beta_2)^T$, удовлетворяющие



системам алгебраических уравнений $(A - \lambda_1 I) x_1 = 0$ и $(A - \lambda_1 I) x_2 = x_1$. Общим решением однородной системы с матрицей (10.1.10) является $x_1 = (\alpha_2, \alpha_2)^T$. Поскольку

$$(A - \lambda_1 I | x_1) = \left(\begin{array}{cc|c} 4 & -4 & \alpha_2 \\ 4 & -4 & \alpha_2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 4 & -4 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \quad (10.1.11)$$

общим решением неоднородной системы уравнений (10.1.11) является $x_2 = \left(\frac{1}{4} \alpha_2 + \beta_2, \beta_2 \right)^T$. Выбирая $\alpha_2 = 4$, $\beta_2 = 0$, получаем жорданов базис, состоящий из векторов $e_1 = (4, 4)^T$, $e_2 = (1, 0)^T$, позволяющий выписать матрицу $P = (e_1 | e_2) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, приводящую матрицу A к матрице $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = J_2(1)$.

Учитывая, что $J = P^{-1} A P$ и, следовательно, $A = P J P^{-1}$, по свойству 1^0 функций от матриц $A^{100} = P J^{100} P^{-1}$. Воспользовавшись соотношением (10.1.3) для $f(\lambda) = \lambda^{100}$ с $\alpha = 1$, окончательно получаем

$$A^{100} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 100 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 401 \\ 4 & 400 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 401 & -400 \\ 400 & -399 \end{pmatrix}.$$

Перейдем к интерполяционному многочлену Лагранжа–Сильвестра. Поскольку жорданова нормальная форма матрицы A равна $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, инвариантные множители λ -матрицы $A - \lambda I$ таковы: $E_1(\lambda) = 1$, $E_2(\lambda) = (\lambda - 1)^2$. Поэтому минимальный многочлен матрицы A

$$\psi(\lambda) = (\lambda - 1)^2,$$

$$\psi_1(\lambda) = \frac{\psi(\lambda)}{(\lambda - 1)^2} = 1$$

и соотношение (10.1.4) принимает вид

$$r(\lambda) = \alpha_{11} + \alpha_{12}(\lambda - 1). \quad (10.1.12)$$



Коэффициенты α_{11} и α_{12} вычислим по формуле (10.1.6):

$$\alpha_{11} = \lambda^{100} \Big|_{\lambda=1} = 1 ;$$

$$\alpha_{12} = (\lambda^{100})' \Big|_{\lambda=1} = 100 \lambda^{99} \Big|_{\lambda=1} = 100 .$$

Подставляя найденные значения α_{11} и α_{12} в равенство (10.1.12), получаем

$$r(\lambda) = 1 + 100(\lambda - 1) = 100\lambda - 99 ,$$

что позволяет определить A^{100} :

$$A^{100} = r(A) = 100A - 99I = \begin{pmatrix} 500 & -400 \\ 400 & -300 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 99 & 0 \\ 0 & 99 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 401 & -400 \\ 400 & -399 \end{pmatrix} .$$

Воспользуемся теперь основной формулой (10.1.8), которая для рассматриваемого случая принимает следующий вид:

$$f(A) = f(1)Z_{11} + f'(1)Z_{12} . \quad (10.1.13)$$

Заменяя в (10.1.13) $f(\lambda)$ на 1, а затем на $\lambda - 1$, находим, что $Z_{11} = I$ и $Z_{12} = A - I$.

Следовательно,

$$f(A) = f(1)I + f'(1)(A - I) .$$

Полагая $f(\lambda) = \lambda^{100}$, найдем

$$A^{100} = I + 100(A - I) = 100A - 99I = \begin{pmatrix} 401 & -400 \\ 400 & -399 \end{pmatrix} .$$

10.1.1. Пусть $\psi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^2(\lambda - \lambda_2)^3$ – минимальный многочлен матрицы A и для функции $f(\lambda)$ существуют значения $f(\lambda_1)$, $f'(\lambda_1)$, $f(\lambda_2)$, $f'(\lambda_2)$, $f''(\lambda_2)$. Запишите выражение для интерполяционного многочлена Лагранжа–Сильвестра $r(\lambda)$ и вычислите коэффициенты α_{kj} , определенные соотношением (10.1.4).

10.1.2. Найдите компоненты матрицы A с минимальным многочленом $\psi(\lambda)$, определенным в задаче 10.1.1.



10.1.3. Вычислите следующие значения функций от матриц, пользуясь жордановой нормальной формой, интерполяционным многочленом Лагранжа–Сильвестра и основной формулой:

а) A^{100} , где $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$; б) A^{50} , где $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$;

в) $\sqrt{A}$, где $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$; г) $\sqrt{A}$, где $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$;

д) e^A , где $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$; е) e^A , где $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

ж) e^A , где $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$; з) $\ln A$, где $A = \begin{pmatrix} 4 & -15 & 6 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$;

и) $\sin A$, где $A = \begin{pmatrix} \pi-1 & 1 \\ -1 & \pi+1 \end{pmatrix}$; к) e^A , где $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$;

л) $\sin \frac{\pi}{2} A$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; м) e^A , где $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

1.1.2. а) 46; б) $x^4 + 4$; в) $\cos 2\varphi - i \sin 2\varphi$; г) 1; д) $\frac{1}{2}$.

1.1.3. а) симметрично относительно действительной оси;
б) симметрично относительно начала координат.

1.1.4. а) $x = -\frac{4}{11}$, $y = \frac{5}{11}$; б) $x = -\frac{2}{3}y$.

1.1.5. $|x| = |y|$.

1.1.6. $z_1 + z_2 \in R$, если $y_1 + y_2 = 0$; $z_1 \cdot z_2 \in R$, если $x_1 y_2 + x_2 y_1 = 0$.

1.1.7. а) -1; б) 1; в) такого a не существует.

1.1.8. а) $8(\cos \pi + i \sin \pi)$; б) $2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$;
в) $2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3}\right)$; г) $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$.

Указание: воспользуйтесь формулой $\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$;

д) $2 \sin \frac{\alpha}{2} \left(\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2}\right)$.

Указание: воспользуйтесь формулами $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$ и $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$;



е) $2 \left(\cos \left(-\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{3\pi}{4} \right) \right)$; ж) $\cos \frac{4\pi}{5} + i \sin \frac{4\pi}{5}$;

з) $3 \left(\cos \frac{4\pi}{5} + i \sin \frac{4\pi}{5} \right)$.

- 1.1.10. а) открытая полуплоскость, расположенная справа от мнимой оси;
 б) полуплоскость, расположенная ниже горизонтальной прямой, проходящей через точку $z = 2i$;
 в) рис. 1;

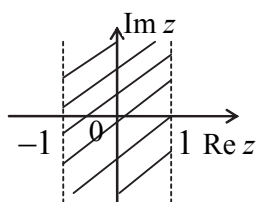


Рис. 1

- г) рис. 2;

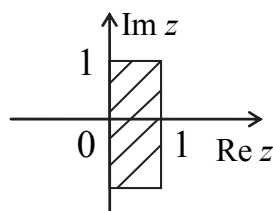


Рис. 2

- д) круг радиуса единица с центром в точке $z = 0$;
 е) внешняя часть круга радиуса единица с центром в точке $z = -3 + 2i$;
 ж) часть плоскости, ограниченная эллипсом $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$;
 з) внешние точки круга $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$.

2.1.1. а) $\begin{pmatrix} -10 & 5 & -15 \\ -20 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 6 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.



$$2.1.2. \text{ a) } A+B=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 5 \\ 7 & -9 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A-B=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -4 & 8 & -1 \end{pmatrix}, \quad AB=\begin{pmatrix} 16 & -35 & 16 \\ -7 & -2 & 7 \\ 9 & -11 & 1 \end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix} -12 & 23 & -1 \\ -6 & 29 & 2 \\ -16 & 35 & -2 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } AB=(13, 8); \text{ в) } AB=19, \quad BA=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 20 \\ -2 & 0 & -10 \\ 3 & 0 & 15 \end{pmatrix};$$

$$\text{г) } A+B=\begin{pmatrix} 2\cos\varphi & 0 \\ 0 & 2\cos\varphi \end{pmatrix}, \quad A-B=\begin{pmatrix} 0 & -2\sin\varphi \\ 2\sin\varphi & 0 \end{pmatrix}, \quad AB=BA=E;$$

$$\text{д) } A+B=\begin{pmatrix} \alpha_1+\beta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2+\beta_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n+\beta_n \end{pmatrix},$$

$$A-B=\begin{pmatrix} \alpha_1-\beta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2-\beta_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n-\beta_n \end{pmatrix},$$

$$AB=BA=\begin{pmatrix} \alpha_1\beta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2\beta_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n\beta_n \end{pmatrix}.$$

$$2.1.3. \text{ a) } AB=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad A^T B^T=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 5 \\ 6 & 0 & 3 \\ -5 & -1 & -5 \end{pmatrix}, \quad B^T A^T=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix};$$



$$\text{б) } AB = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^T B^T = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 & 1 \\ -5 & -5 & -5 & -4 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B^T A^T = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{2.1.4. а) } \begin{pmatrix} \frac{3}{2} + (-1)^{n+1} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} + (-1)^n \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} + (-1)^{n+1} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} + (-1)^n \frac{3}{2} \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} \cos n\varphi & -\sin n\varphi \\ \sin n\varphi & \cos n\varphi \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{г) } \begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\alpha^{n-2} \\ 0 & \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & 0 & \alpha^n \end{pmatrix}.$$

$$\text{2.1.5. а) } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \text{ б) } \begin{pmatrix} 1 & -16 \\ 16 & 1 \end{pmatrix}; \text{ в) } \begin{pmatrix} -1 & i \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \text{ г) } \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.1.6. Нет.

2.2.1. а) не входит; б) входит.

2.2.2. а) со знаком плюс; б) со знаком плюс.

2.2.3. $i=1, k=4$.

$$\text{2.2.4. } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 d_4 - a_1 b_2 c_4 d_3 - a_1 b_3 c_2 d_4 + a_1 b_3 c_4 d_2 + \\ + a_1 b_4 c_2 d_3 - a_1 b_4 c_3 d_2 - a_2 b_1 c_3 d_4 + a_2 b_1 c_4 d_3 + a_2 b_3 c_1 d_4 -$$



$$\begin{aligned} & -a_2b_3c_4d_1 - a_2b_4c_1d_3 + a_2b_4c_3d_1 + a_3b_1c_2d_4 - a_3b_1c_4d_2 - \\ & -a_3b_2c_1d_4 + a_3b_2c_4d_1 + a_3b_4c_1d_1 - a_3b_4c_2d_1 - a_4b_1c_2d_3 + \\ & + a_4b_1c_3d_2 + a_4b_2c_1d_3 - a_4b_2c_3d_1 - a_1b_3c_1d_2 + a_4b_3c_2d_1. \end{aligned}$$

2.2.5. а) 0; б) $abcd$; в) $abcd$.

2.2.6. а) 5; б) 1; в) 0; г) ε ;

д) 1; е) 10; ж) $(b-a)(c-a)(c-b)$; з) $-\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$.

2.2.7. а) 81; б) -10; в) 100; г) 150.

2.3.1. а) -2; б) 99; в) 12320; г) 42.

2.3.3. а) $3a-b+2c+d$; б) $4t-x-y-z$; в) $2a-b-c-d$.

2.3.4. а) C_n^k ; б) $(C_n^k)^2$.

2.3.6. а) -140; б) 8; в) -2.

2.4.1. а) $x=2$, $y=-3$; б) $x=-2$, $y=-1$, $a \neq -2$; в) $x=0$, $y=5$, $z=-2$;
г) систему нельзя решать по формулам Крамера.

2.4.2. а) $\frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, если $ad-bc \neq 0$; б) $\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

г) $\frac{1}{18} \begin{pmatrix} -5 & 1 & 7 \\ 1 & 7 & -5 \\ 7 & -5 & 1 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} & -\frac{1}{\lambda^2} & \frac{1}{\lambda^3} \\ 0 & \frac{1}{\lambda} & -\frac{1}{\lambda^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}$, если $\lambda \neq 0$;

е) $\begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & & O \\ & \frac{1}{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}$.



2.4.3. а) $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -11 & 7 \\ -21 & 13 \end{pmatrix}$; б) $\frac{1}{7} \begin{pmatrix} 14 & 24 \\ -7 & -11 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

2.4.8. а) $-A + 4E$; б) $A^2 + 5A - 3E$.

2.4.9. а) $(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}$, $(5A)^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$;

б) $(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 20 \\ 8 & -6 & -4 \end{pmatrix}$, $(-3A) = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

3.1.1. Да, если прямая проходит через точку O ; нет – в противном случае.

3.1.2. Нет.

3.1.3. а) не является; б) не является; в) является;
г) является; д) не является.

3.1.5. 2^n .

3.1.6. а) да; б) да; в) нет; г) да.

3.1.7. а) да; б) нет; в) нет; г) да.

3.1.8. Да.

3.2.3. Да.

3.2.4. $\alpha(\alpha^2 - 2) = 0$.

3.2.6. $(0, 0, 0, 0)$, система x_1, x_2, x_3 линейно зависима.

3.2.7. $5t^3 - 5t^2 - 4t + 6$ в обоих случаях. Система линейно зависима.

3.2.8. $(5 + \alpha)f_1 + (1 - 2\alpha)f_2 - (4 + \alpha)f_3 + \alpha f_4$.

3.2.11. а) да; б) нет; в) нет; г) нет; д) нет.

3.3.1. а) все векторы вида $(\alpha, 0, \beta, 0, \gamma)$;

б) все многочлены степени ≤ 2 , т. е. $M_2(R)$;



в) все матрицы вида $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma & \beta \\ \beta & \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix}$.

3.3.2. Нет.

3.3.5. а) $x_1, x_2; x_2, x_3;$ б) $x_1, x_3; x_1, x_4; x_2, x_3; x_2, x_4;$

в) любая подсистема длины 3, кроме $x_1, x_2, x_5; x_3, x_4, x_5;$

г) $x_1, x_2; x_1, x_3; x_1, x_4.$

3.3.6. а) x_1, x_2, x_4 и $x_3 = x_1 - 2x_2;$ б) x_1, x_2, x_3 и $x_4 = -5x_1 - x_2 + 5x_3.$

3.3.7. Да.

3.4.1. а) $\dim R^+ = 1$, его базисом является любое число, отличное от 1;

б) $\dim R = 1, e_1 = 1;$

в) $\dim C = 2, e_1 = 1, e_2 = i;$

г) $\dim C = 1, e_1 = 1;$

д) размерность равна трем, $e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$

е) размерность равна двум, $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};$

ж) размерность равна двум, $e_1 = (1, 0, 1, 1, 2, 3, \dots), e_2 = (0, 1, 1, 2, 3, 5, \dots).$

3.4.2. Например, $e_1, f_1 = (0, 1, 1, 0), e_2, f_2 = (0, 0, 0, 1)$ и $e_1, g_1 = (0, 1, 1, 1),$

$e_2, g_2 = (0, 1, 0, 1).$

3.4.3. $(1, -2).$

3.4.4. $A = (3, 4, -2), B = (2, 5, 0).$

3.4.5. а) можно, $\left(\frac{5}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right);$ б) можно, $(1, 0, -1, 0).$

3.4.6. а) да; б) нет.

3.4.7. а) $(1, -1, -1, 1, -1, 1);$ б) $(2, -1, -1, 1, -1, 1);$ в) $(1, -1, -1, 2, -1, 1).$



3.5.1. а) не является подпространством;
 б) не является подпространством;
 в) не является подпространством;
 г) является подпространством размерности $n-1$. Базис образуют, например, векторы $e_1=(1, 0, 0, \dots, 0, 1)$, $e_2=(0, 1, 0, \dots, 0, 0)$, $e_3=(0, 0, 1, \dots, 0, 0)$, ..., $e_{n-1}=(0, 0, 0, \dots, 1, 0)$;

д) является подпространством размерности 2. Базис образуют векторы $e_1=(1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$, $e_2=(0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$;

е) является подпространством размерности $\frac{n(n+1)}{2}$, базис образуют, например, матрицы $F_{ij} (i \leq j; i, j=1, 2, \dots, n)$, где F_{ij} – матрица, у которой элементы $f_{ij}=f_{ji}=1$, а все остальные элементы – нули;

ж) является подпространством размерности 6, базис образуют, например, матрицы $e_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $e_4=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $e_5=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $e_6=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$;

з) не является подпространством.

и) является подпространством размерности $\frac{n(n-1)}{2}$, базис образуют, например, матрицы $G_{ij} (i < j; i, j=1, 2, \dots, n)$, где G_{ij} – матрица, элементы которой $g_{ij}=1$, $g_{ji}=-1$, а все остальные элементы – нули.

3.5.2. а) $L_1+L_2=R_{n,n}$, $L_1 \cap L_2$ – пространство диагональных матриц;

б) $L_1+L_2=R_{n,n}$, $L_1 \cap L_2=\{\Theta\}$.

3.5.3. а) базис L_1+L_2 , например, x_1, x_2, x_3, y_2 , базис $L_1 \cap L_2$, например, $z_1=(3, 1, 4, 0)$ и $z_2=(-1, 1, 0, 2)$;

б) базис L_1+L_2 , например, x_1, x_2, x_3, y_1 , базис $L_1 \cap L_2$, например, состоит из векторов $z_1=(1, 2, 2, 1)$ и $z_2=(2, 2, 2, 2)$;

в) базис L_1+L_2 , например, x_1, x_2, x_3, y_1 , базис $L_1 \cap L_2$, например, $z_1=(1, -1, 1, -1)$ и $z_2=(2, 0, 2, 0)$.



3.5.5. $x = (-1, -2, -6, -3) + (3, 2, 6, 6)$.

3.5.7. Нет.

3.5.8. $\dim L_1 = 2$. В качестве дополнительного подпространства можно взять, например,

$$L'_2 = \{ \lambda_1(1, 0, 0, 0) + \lambda_2(0, 1, 0, 0) \mid \lambda_1, \lambda_2 \in R \}$$

$$\text{и } L''_2 = \{ \mu_1(0, 0, 1, 0) + \mu_2(0, 0, 0, 1) \mid \mu_1, \mu_2 \in R \}.$$

4.1.1. а) 0, 1, 2; б) 0, 1, 2, 3.

4.1.2. Ранг либо не изменится, либо изменится на единицу.

4.1.3. Ранг изменится не более чем на единицу; не более чем на k .

4.1.5. Нет. Контрпример: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4.1.7. а) 3; б) 2; в) 3.

4.1.8. а) $r=2$ при $\lambda=3$, $r=3$ при $\lambda \neq 3$;

б) $r=1$ при $|\lambda|=2$, $r=2$ при $|\lambda| \neq 2$, $r=3$ не может быть ни при каком λ ;

в) $r=3$ при $|\lambda|=3$, $r=4$ при $|\lambda| \neq 3$.

4.1.9. а) общее решение: $(8x_3 - 7x_4, -6x_3 + 5x_4, x_3, x_4)^T$; фундаментальная система решений: $y_1 = (8, -6, 1, 0)^T$ и $y_2 = (-7, 5, 0, 1)^T$;

б) общее решение: $(x_4 - x_5, x_4 - x_6, x_4, x_4, x_5, x_6)^T$; фундаментальная система решений: $y_1 = (1, 1, 1, 1, 0, 0)^T$, $y_2 = (-1, 0, 0, 0, 1, 0)^T$, $y_3 = (0, -1, 0, 0, 0, 1)^T$;

в) общее решение: $(-3x_3 - 5x_5, 2x_3 + 3x_5, x_3, 0, x_5)^T$; фундаментальная система решений: $y_1 = (-3, 2, 1, 0, 0)^T$, $y_2 = (-5, 3, 0, 0, 1)^T$;

г) общее решение: $\left(-\frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_5, -\frac{3}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_5, x_3, 0, x_5 \right)^T$; фундаментальная система решений: $y_1 = (2, 9, -6, 0, 0)^T$, $y_2 = (-2, 3, 0, 0, 6)^T$.

4.1.10. Строки матрицы A не образуют, строки матрицы B образуют.

4.2.1. а) $(-8, 3+x_4, 6+2x_4, x_4)^T$; б) $\left(\frac{1+x_5}{3}, \frac{1+3x_3+3x_4-5x_5}{3}, x_3, x_4, x_5\right)^T$;

в) система решений не имеет; г) $\left(-\frac{x_5}{2}, -1-\frac{x_5}{2}, 0, -1-\frac{x_5}{2}, x_5\right)^T$;

д) $\left(\frac{1+5x_4}{6}, \frac{1-7x_4}{6}, \frac{1+5x_4}{6}, x_4\right)^T$.

4.2.2. а) при $\lambda \neq 5$ система несовместна; при $\lambda = 5$ система совместна и ее общее решение таково: $\left(-4+x_3, \frac{11}{2}-2x_3, x_3\right)^T$;

б) при $\lambda \neq -3$ система имеет единственное решение: $\left(-\frac{1}{\lambda+3}, \frac{4\lambda+11}{3(\lambda+3)}, -\frac{\lambda+11}{3(\lambda+3)}\right)^T$, при $\lambda = -3$ система несовместна;

в) система совместна при любом значении λ , при $\lambda \neq -95$ общее решение имеет вид $\left(\frac{13}{12}-\frac{23}{12}x_3, 0, x_3\right)^T$, при $\lambda = -95$ общее решение таково:

$\left(\frac{13}{12}+\frac{19}{12}x_2-\frac{23}{12}x_3, x_2, x_3\right)^T$;

г) при $\lambda \neq 1, -2$ система имеет единственное решение: $\left(\frac{1}{\lambda+2}, \frac{1}{\lambda+2}\right)^T$, при $\lambda = -2$ система несовместна, при $\lambda = 1$ система совместна и

ее общее решение: $(1-x_2-x_3, x_2, x_3)^T$;

д) при $\lambda \neq 1, 3$ система имеет единственное решение: $\left(-1, \frac{\lambda-4}{\lambda-3}, -\frac{1}{\lambda-3}\right)^T$,

при $\lambda = 1$ общее решение: $(1-x_2-x_3, x_2, x_3)^T$, при $\lambda = 3$ система несовместна.



4.2.3. а) $(2, 0, 0, 6)^T + \left(\frac{1}{2}, -1, 0, \frac{3}{2}\right)^T \alpha + (2, 0, -1, 1)^T \beta;$

б) $(-3, 0, 2, -2)^T + (-2, 1, 1, -3)^T \alpha;$

в) $(5, 0, 2, 0, 1)^T + (0, 0, -1, 1, 0)^T \alpha + (7, 7, -3, 0, 3)^T \beta;$

г) $\left(1, 0, \frac{3}{2}, -6, 5\right)^T + (1, 1, 0, 1, -1)^T \alpha.$

5.1.2. Указание: пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ – базис данного линейного пространства.

Для произвольных векторов $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$ и $y = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_n e_n$ положим $(x, y) = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \dots + \alpha_n \beta_n$. Проверьте, что все аксиомы скалярного произведения выполняются.

5.1.6. а) определяет; б) определяет, если $a > 0, b > 0$;

в) не определяет; г) определяет.

5.1.7. Указание: необходимость условия $ac > b^2$ получите, рассматривая скалярный квадрат (x, x) вектора вида $x = (\alpha_1, 1)$ как квадратный трехчлен от α_1 .

5.1.8. Да, если $\alpha = 0$; нет, при $\alpha \neq 0$.

5.1.10. 2.

5.2.1. а) не изменится;

б) заменится на дополнительный (до π);

в) не изменится.

5.2.2. $\|x\| = 3\sqrt{2}$, $\|y\| = 6$, $\|x - y\| = 3\sqrt{2}$. Таким образом, треугольник равнобедренный. Угол между x и $x - y$ равен $\frac{\pi}{2}$, так что треугольник прямоугольный.

Угол между x и y равен $\frac{\pi}{4}$ и является внутренним углом треугольника. Угол между y и $x - y$ равен $\frac{3\pi}{4}$, поэтому внутренним углом треугольника является угол между y и $y - x$.



5.2.10. а) $\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}t, \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\left(t^2 - \frac{1}{3}\right)$; б) $1, t, t^2$.

5.2.11. Если $f(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_n t^n$, $g(t) = \beta_0 + \beta_1 t + \dots + \beta_n t^n$, то $(f, g) = \alpha_0 \beta_0 + \alpha_1 \beta_1 + (2!)^2 \alpha_2 \beta_2 + \dots + (n!)^2 \alpha_n \beta_n$.

5.2.12. а) $f_1 = (1, 0, 0, 0)$, $f_2 = (1, 1, 0, 0)$, $f_3 = (1, 1, 1, 0)$, $f_4 = (1, 1, 1, 1)$;

б) $f_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, -1, 0, 0)$, $f_2 = \frac{1}{\sqrt{345}}(4, 1, -5, 0)$, $f_3 = \frac{1}{\sqrt{105}}(5, 3, -1, -7)$,
 $f_4 = \frac{1}{\sqrt{30}}(10, 9, 7, 4)$.

5.2.13. а) Например, можно добавить векторы $x_3 = (2, 2, 1, 0)$, $x_4 = (5, -2, -6, -1)$;

б) $x_3 = (1, -2, 1, 0)$, $x_4 = (25, 4, -17, -6)$;

в) $x_3 = (1, 1, 1, 0)$, $x_4 = (-1, 1, 0, 1)$;

г) $x_3 = (2, 3, 1, 0)$, $x_4 = (1, -1, 1, 1)$.

5.2.14. а) Например, вектором $x_3 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$; б) $x_3 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$;

в) например, $x_3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $x_4 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

5.2.15. а) $y_1 = x_1 = (2, 3, -4, -6)$, $y_2 = (-3, 2, 6, -4)$, $y_3 = (4, 6, 2, 3)$;

б) $y_1 = x_1 = (1, 1, -1, -2)$, $y_2 = (2, 5, 1, 3)$;

в) $y_1 = x_1 = (2, 1, 3, -1)$, $y_2 = (3, 2, -3, -1)$, $y_3 = (1, 5, 1, 10)$;

г) $y_1 = x_1 = (1, 1, -1, -2)$, $y_2 = (2, 5, 1, 3)$, $y_3 = (2, -1, 1, 0)$.

5.3.2. Например, $y_1 = (-3, 1, -2, 0)$, $y_2 = (1, -1, -2, 1)$.

5.3.3. Например, $y_1 = (2, -2, -1, 0)$, $y_2 = (1, 1, 0, -1)$.

5.3.4. Одномерное подпространство многочленов, все коэффициенты которых равны.



5.3.5. а) $g=(5, 2, -9, -8), h=(9, -5, 3, 1);$

б) $g=(0, -3, 5, 2), h=(2, -2, -2, 2);$

в) $g=(1, 2, -5, 1), h=(-4, -2, 0, 8);$

г) $g=(3, 1, -1, -2), h=(2, 1, -1, 4).$

5.4.2. Указание: как и в задаче 5.1.2, фиксируем базис $e_1, \dots, e_n$ и для произвольных векторов $x=\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2+\dots+\alpha_n e_n$ и $y=\beta_1 e_1+\beta_2 e_2+\dots+\beta_n e_n$ полагаем $(x, y)=\alpha_1 \bar{\beta}_1+\alpha_2 \bar{\beta}_2+\dots+\alpha_n \bar{\beta}_n$.

5.4.8. $\|a\|=\sqrt{2}, \|b\|=\sqrt{5}, \|c\|=\sqrt{31}, (a, b)=2+i, (b, c)=10-i, (c, b)=10+i$.

6.1.1. Нет.

6.1.2. 1) а) $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix};$ б) $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix};$

2) а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$ б) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$

6.1.3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$

6.1.4. а) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & -4 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix};$ б) $\begin{pmatrix} 0 & 5 & 7 \\ 5 & -2 & 1 \\ 7 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$

6.1.5. а) $A(x; y)=2\alpha_1\beta_1-\alpha_1\beta_2+4\alpha_1\beta_3-\alpha_2\beta_1+5\alpha_2\beta_3+4\alpha_3\beta_1+5\alpha_3\beta_2-\alpha_3\beta_3;$

б) $A(x; y)=-\alpha_1\beta_1+3\alpha_1\beta_3+2\alpha_2\beta_2+7\alpha_2\beta_3+3\alpha_3\beta_1+7\alpha_3\beta_2.$

6.1.6. а) $\frac{1}{2}\xi_1^2+\frac{3}{2}\xi_2^2-5\xi_3^2; \xi_1=2\alpha_1+\alpha_2, \xi_2=\alpha_2, \xi_3=\alpha_3;$

$$\text{б)} \xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_3^2; \quad \xi_1 = \alpha_1, \quad \xi_2 = \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4), \quad \xi_3 = \frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4),$$

$$\xi_4 = \alpha_4;$$

$$\text{в)} \xi_1^2 - \frac{1}{2}\xi_2^2 + \frac{9}{2}\xi_3^2; \quad \xi_1 = \alpha_1 - 3\alpha_2 - \alpha_3, \quad \xi_2 = 4\alpha_2 + \alpha_3, \quad \xi_3 = \alpha_3;$$

$$\text{г)} -\xi_1^2 - \xi_2^2 - 2\xi_3^2; \quad \xi_1 = -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \quad \xi_2 = \alpha_2, \quad \xi_3 = \alpha_3;$$

$$\text{д)} \xi_1^2 + \xi_2^2 + 5\xi_3^2; \quad \xi_1 = 2\alpha_1 - \alpha_2, \quad \xi_2 = 2\alpha_2 + \alpha_3, \quad \xi_3 = \alpha_3;$$

$$\text{е)} \xi_1^2 + \frac{9}{5}\xi_2^2; \quad \xi_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(5\alpha_1 + 2\alpha_2 - 4\alpha_3), \quad \xi_2 = 2\alpha_2 + \alpha_3, \quad \xi_3 = \alpha_3;$$

$$\text{ж)} \xi_1^2 - \xi_2^2; \quad \xi_1 = \alpha_1 + 3\alpha_2, \quad \xi_2 = -2\alpha_2 + \alpha_3, \quad \xi_3 = \alpha_3.$$

$$\text{6.2.1. а)} \frac{1}{2}\xi_1^2 - 8\xi_2^2 + \frac{1}{17}\xi_3^2; \quad f_1 = \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right), \quad f_2 = (6, -8, 0), \quad f_3 = \left(\frac{8}{17}, -\frac{12}{17}, \frac{1}{17}\right);$$

$$\text{б)} \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2; \quad f_1 = (1, 0, 0), \quad f_2 = (-1, 1, 0), \quad f_3 = (0, -1, 1);$$

$$\text{в)} \frac{1}{2}\xi_1^2 + \frac{2}{3}\xi_2^2 - \frac{1}{5}\xi_3^2; \quad f_1 = \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right), \quad f_2 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right), \quad f_3 = \left(0, 0, -\frac{1}{5}\right);$$

$$\text{г)} \xi_1^2 - \frac{1}{8}\xi_2^2 + \frac{2}{9}\xi_3^2; \quad f_1 = (1, 0, 0), \quad f_2 = \left(-\frac{3}{8}, -\frac{1}{8}, 0\right), \quad f_3 = \left(\frac{1}{18}, -\frac{1}{18}, \frac{2}{9}\right);$$

$$\text{д)} -\xi_1^2 - \xi_2^2 - \frac{1}{2}\xi_3^2; \quad f_1 = (-1, 0, 0), \quad f_2 = (-1, -1, 0), \quad f_3 = \left(-\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right);$$

$$\text{е)} \frac{1}{4}\xi_1^2 + \frac{1}{4}\xi_2^2 + \frac{1}{5}\xi_3^2; \quad f_1 = \left(\frac{1}{4}, 0, 0\right), \quad f_2 = \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, 0\right), \quad f_3 = \left(-\frac{1}{20}, -\frac{1}{10}, \frac{1}{5}\right).$$

$$\text{6.2.2. а)} -\frac{1}{2} < \lambda < 1; \quad \text{б)} \forall \lambda \neq 0, \lambda \in R;$$

$$\text{в)} \text{таких } \lambda \text{ не существует; } \text{г)} 0 < \lambda < 4.$$

$$\text{6.2.5. а)} \text{таких } \lambda \text{ не существует; } \text{б)} \lambda < -1; \quad \text{в)} |\lambda| < 4.$$

7.1.1. Нулевую.



$$7.1.2. \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_k & O \\ O & O \end{pmatrix}, \quad k = \dim L_1.$$

$$7.1.3. \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_k & O \\ O & -E_{n-k} \end{pmatrix}, \quad k = \dim L_1.$$

7.1.5. а) да; б) нет.

$$7.1.6. \text{ а) } A \text{ линейно, } A_e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{б), в) } A \text{ не является линейным;}$$

$$\text{г) } A \text{ линейно, } A_e = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$7.1.7. \text{ а) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & (-1)^n \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & C_n^1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & C_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & C_n^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Указание: воспользуйтесь формулой бинома Ньютона.



$$\text{в)} \begin{pmatrix} 1 & b & b^2 & \dots & b^n \\ 0 & a & 2ab & \dots & C_n^1 b^{n-1} a \\ 0 & 0 & a^2 & \dots & C_n^2 b^{n-2} a^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & C_n^{n-1} b a^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a^n \end{pmatrix}; \quad \text{г)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Указание: воспользуйтесь формулой бинома Ньютона.

$$\text{7.1.8.} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{7.1.9.} \begin{pmatrix} a & 0 & c & 0 \\ 0 & a & 0 & c \\ b & 0 & d & 0 \\ 0 & b & 0 & d \end{pmatrix}.$$

$$\text{7.1.10.} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{7.1.11.} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ не изменится.}$$



7.2.1. а) $(4, 5, 2)^T$ – образ a , $(2, -1, 1)^T$ – прообраз y ;

б) $(4, 7, 5)^T$ – образ a , $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T$ – прообраз y ;

в) $(3, 8, 4)^T$ – образ a , $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right)^T$ – прообраз y .

7.2.2. а) $\left(4 - \frac{1}{2}\alpha, -1, -5, \alpha\right)^T$;

б) $\left(-8, \frac{16-2\alpha}{3}, \frac{1+\alpha}{3}, \alpha\right)^T$;

в) $(-5-\alpha, 2, 2, \alpha)^T$.

7.2.3. а) да, $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$;

б) нет, так как система a_1, a_2 линейно зависима, а система b_1, b_2 линейно независима;

в) да, $\left\{ \begin{pmatrix} 2-2\alpha & \alpha \\ -1-2\beta & \beta \end{pmatrix} \middle| \alpha, \beta \in R \right\}$.

7.2.4. а) да, $\begin{pmatrix} 2 & -11 & 6 \\ 1 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$;

б) нет, так как система a_1, a_2, a_3 линейно зависима, а система b_1, b_2, b_3 линейно независима.

7.2.5. а) $n_A=2$, базис $N(A)$: $a_1=(1, -1, 0)$, $a_2=(1, 0, -1)$; $\text{rg } A=1$, базис $R(A)$: $b=(1, 1, 1)$;

б) $n_A=1$, базис $N(A)$: $a=(1, 1, 1)$; $\text{rg } A=2$, базис $R(A)$: $b_1=(2, 1, 1)$, $b_2=(-1, -2, -1)$;

в) $n_A=0$; $\text{rg } A=3$, базис $R(A)$: $b_1=(-1, 1, 1)$, $b_2=(1, -1, 1)$, $b_3=(1, 1, -1)$.



7.2.6. Образ – $M_{n-1}(R)$, ядро – $M_0(R)$.

7.2.7. $R(A_h)=M_{n-1}(R)$, $N(A_h)=M_0(R)$.

7.2.8. $R(P)=L_1$, $N(P)=L_2$; $R(S)=X$, $N(S)=\{\Theta\}$.

7.2.9. а) например, базис $N(A)$ – $a=(-2, 1)$, базис $R(A)$ – $b=(1, 3)$;

б) $N(A)=\{\Theta\}$, $R(A)=X$;

в) например, базис $N(A)$ – $a_1=(-1, 0, 0, 1)$, $a_2=(0, -1, 1, 0)$, базис $R(A)$ – $b_1=(1, 0, 1, 1)$, $b_2=(0, 1, 1, 2)$.

7.2.10. $\dim w_{XX}=n^2$.

7.3.1. $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 8 & -11 \\ 9 & 22 \end{pmatrix}$.

7.3.2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

7.3.3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

7.3.4. $A_e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$, $A_b = \begin{pmatrix} \frac{20}{3} & -\frac{5}{3} & 5 \\ -\frac{16}{3} & \frac{4}{3} & -4 \\ 8 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

7.3.5. В матрице переставляются строки i -я и j -я и столбцы i -й и j -й.

7.3.6. а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -8 & -7 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.



7.3.7. а) $\begin{pmatrix} 36 & -25 & -3 \\ 23 & -16 & -2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -42 & 20 & -20 & 48 \\ 15 & -7 & 7 & -17 \end{pmatrix}$;

в) $\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -3 & -15 & 9 \\ 1 & 5 & 5 \\ 5 & 25 & -31 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

7.3.8. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

7.3.9. $\begin{pmatrix} 109 & 93 \\ 34 & 29 \end{pmatrix}$.

7.3.10. а) $\begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -3 & 8 & -5 \\ 0 & 5 & -4 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2 & 8 & -5 \\ 4 & 5 & -4 \\ 3 & 13 & -8 \end{pmatrix}$.

7.3.11. а) $\begin{pmatrix} 25 & -10 \\ 40 & -15 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ -5 & -6 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7.4.3. Собственными значениями являются диагональные элементы a_{11} , a_{22} , ..., a_{nn} .

7.4.6. Указание: см. § 10 гл. II в [7].

7.4.12. Если λ – собственное значение оператора A , то $\lambda - \lambda_0$ – собственное значение оператора $A - \lambda_0 I$.

7.4.13. Если λ – собственное значение оператора A , то $f(\lambda)$ – собственное значение оператора $f(A)$.

7.4.14. Если λ – собственное значение оператора A , то $\frac{1}{\lambda}$ – собственное значение оператора A^{-1} .

7.4.15. $\lambda=0, \{a_0 \mid 0 \neq a_0 \in R\}$.

7.4.17. $(1, 1, \dots, 1)^T$.

7.4.19. а) оператор проектирования имеет собственные значения 1 и 0; при этом L_1 – собственное подпространство для $\lambda=1$, L_2 – собственное подпространство для $\lambda=0$;

б) оператор отражения имеет собственные значения 1 и -1 ; при этом L_1 – собственное подпространство для $\lambda=1$, L_2 – собственное подпространство для $\lambda=-1$.

7.4.21. $\begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}$, где $A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$, а $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ – собственные значения.

7.4.22. Указание: рассмотрите матрицу оператора в базисе, первые векторы которого образуют базис собственного подпространства, соответствующего λ . С помощью этой матрицы вычислите характеристический многочлен оператора. Подробнее см. гл. 5, § 2, п. 5 книги [3].

7.4.25. а) над R : $\lambda_1 = \lambda_2 = -1, \{\alpha(1, 1)^T \mid 0 \neq \alpha \in R\}$;

над C : $\lambda_1 = \lambda_2 = -1, \{\alpha(1, 1)^T \mid 0 \neq \alpha \in C\}$;

б) над R нет собственных векторов;

над C : $\lambda_1 = 1 + 2i, \{\alpha(1, 1 - i)^T \mid 0 \neq \alpha \in C\}$; $\lambda_2 = 1 - 2i,$
 $\{\alpha(1, 1 + i)^T \mid 0 \neq \alpha \in C\}$;

в) над R : $\lambda_1 = \sqrt{2}, \{\alpha(1, \sqrt{2})^T \mid 0 \neq \alpha \in R\}$; $\lambda_2 = -\sqrt{2},$
 $\{\alpha(1, -\sqrt{2})^T \mid 0 \neq \alpha \in R\}$;

над C : $\lambda_1 = \sqrt{2}, \{\alpha(1, \sqrt{2})^T \mid 0 \neq \alpha \in C\}$; $\lambda_2 = -\sqrt{2},$
 $\{\alpha(1, -\sqrt{2})^T \mid 0 \neq \alpha \in C\}$;



- г) над $R: \lambda_1=1, \{\alpha(1, 1)^T | 0 \neq \alpha \in R\}; \lambda_2=-1, \{\alpha(1, -1)^T | 0 \neq \alpha \in R\};$
над $C: \lambda_1=1, \{\alpha(1, 1)^T | 0 \neq \alpha \in C\}; \lambda_2=-1, \{\alpha(1, 1)^T | 0 \neq \alpha \in C\};$
- д) над $R: \lambda_1=1, \{\alpha(1, 1, 1)^T | 0 \neq \alpha \in R\}; \lambda_2=2, \{\alpha(1, 0, 1)^T | 0 \neq \alpha \in R\};$
 $\lambda_3=-1, \{\alpha(1, -3, -5)^T | 0 \neq \alpha \in R\};$
над $C: \lambda_1=1, \{\alpha(1, 1, 1)^T | 0 \neq \alpha \in C\}; \lambda_2=2, \{\alpha(1, 0, 1)^T | 0 \neq \alpha \in C\};$
 $\lambda_3=-1, \{\alpha(1, -3, -5)^T | 0 \neq \alpha \in C\};$
- е) над $R: \lambda_1=0, \{\alpha(1, 0, 1)^T | 0 \neq \alpha \in R\}; \lambda_2=2, \{\alpha(3, -2, 1)^T | 0 \neq \alpha \in R\};$
 $\lambda_3=-1, \{\alpha(0, 1, 2)^T | 0 \neq \alpha \in R\};$
над $C: \lambda_1=0, \{\alpha(1, 0, 1)^T | 0 \neq \alpha \in C\}; \lambda_2=2, \{\alpha(3, -2, 1)^T | 0 \neq \alpha \in C\};$
 $\lambda_3=-1, \{\alpha(0, 1, 2)^T | 0 \neq \alpha \in C\};$
- ж) над $R: \lambda_1=1, \{\alpha(0, 2, 1)^T | 0 \neq \alpha \in R\};$
над $C: \lambda_1=1, \{\alpha(0, 2, 1)^T | 0 \neq \alpha \in C\}; \lambda_2=i,$
 $\{\alpha(1+i, 1+i, -1)^T | 0 \neq \alpha \in C\};$
 $\lambda_3=-i, \{\alpha(1-i, 1-i, -1)^T | 0 \neq \alpha \in C\};$
- з) над $R: \lambda_1=2, \{\alpha(1, 0, 1)^T | 0 \neq \alpha \in R\};$
над $C: \lambda_1=2, \{\alpha(1, 0, 1)^T | 0 \neq \alpha \in C\}; \lambda_2=3+i,$
 $\{\alpha(1, 1+i, 2-i)^T | 0 \neq \alpha \in C\}; \lambda_3=3-i,$
 $\{\alpha(1, 1-i, 2+i)^T | 0 \neq \alpha \in C\};$
- и) над $R: \lambda_1=\lambda_2=2, \{(2\alpha+\beta, \alpha, \beta)^T | \alpha, \beta \in R, \alpha^2+\beta^2>0\}; \lambda_3=-5,$
 $\{\alpha(1, 3, 2)^T | 0 \neq \alpha \in R\};$



над $C: \lambda_1 = \lambda_2 = 2, \{(2\alpha + \beta, \alpha, \beta)^T \mid \alpha, \beta \in C, \alpha \neq 0 \cup \beta \neq 0\}; \lambda_3 = -5,$
 $\{\alpha(1, 3, 2)^T \mid 0 \neq \alpha \in C\};$

к) над $R: \lambda_1 = \lambda_2 = -1, \{\alpha(-1, 2, 1)^T \mid 0 \neq \alpha \in R\}; \lambda_3 = 1,$
 $\{\alpha(0, 2, 1)^T \mid 0 \neq \alpha \in R\};$

над $C: \lambda_1 = \lambda_2 = -1, \{\alpha(-1, 2, 1)^T \mid 0 \neq \alpha \in C\};$
 $\lambda_3 = 1, \{\alpha(0, 2, 1)^T \mid 0 \neq \alpha \in C\};$

л) над $R: \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2, \{\alpha(1, 2, 1)^T \mid 0 \neq \alpha \in R\};$

над $C: \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2, \{\alpha(1, 2, 1)^T \mid 0 \neq \alpha \in C\};$

м) над $R: \lambda_1 = \lambda_2 = -1, \{\alpha(1, 1, 0, 0)^T \mid 0 \neq \alpha \in R\}; \lambda_3 = \lambda_4 = 1,$
 $\{\alpha(1, 1, 1, 1)^T \mid 0 \neq \alpha \in R\};$

над $C: \lambda_1 = \lambda_2 = -1, \{\alpha(1, 1, 0, 0)^T \mid 0 \neq \alpha \in C\}; \lambda_3 = \lambda_4 = 1,$
 $\{\alpha(1, 1, 1, 1)^T \mid 0 \neq \alpha \in C\}.$

7.5.6. а) $e_1 = (1, 1)^T, e_2 = (1, -4)^T, \text{diag}(0, 5);$

б), в), е) матрицы к диагональному виду не приводятся;

г) $e_1 = (-2, 1, 2)^T, e_2 = (-8, 3, 7)^T, e_3 = (-3, 1, 3)^T, \text{diag}(1, 2, 3);$

д) $e_1 = (1, 3, 0)^T, e_2 = (0, -3, 1)^T, e_3 = (1, -2, 2)^T, \text{diag}(1, 1, -2).$

7.5.7. а) нет; б) $\text{diag}(1, 2, 2);$ в) $\text{diag}(1, 1, -1, -1).$

7.5.8. а) да, $P = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}, \Lambda = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$

б) да, $P = \begin{pmatrix} 1 & 3-3i & 3+3i \\ 2 & 5-3i & 5+3i \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2+3i & 0 \\ 0 & 0 & 2-3i \end{pmatrix};$

в) нет;



$$\text{г) да, } P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sqrt{3} \cdot i & \sqrt{3} \cdot i \\ 6 & -6 & 0 & 0 \\ \sqrt{54} & \sqrt{54} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \sqrt{54} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{54} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \cdot i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{3} \cdot i \end{pmatrix};$$

$$\text{д) да, } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

7.6.4. Если Λ – диагональная матрица такая, что $\lambda_{ii} = (e_i, e_i)$, то $(A^*)_e = \Lambda^{-1}(A_e)^* \Lambda$, где $(A_e)^*$ – матрица, сопряженная к A_e .

7.6.5. Всякий оператор одномерного пространства есть умножение каждого вектора пространства на фиксированное (для данного оператора) число α . Если пространство унитарное, то сопряженный оператор есть умножение на сопряженное число $\bar{\alpha}$. В евклидовом одномерном пространстве всякий оператор совпадает со своим сопряженным.

$$\text{7.6.6. } \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{7.6.7. } \begin{pmatrix} -48 & -47 & -21 \\ 36 & 35 & -17 \\ 38 & 37 & 15 \end{pmatrix}.$$

$$\text{7.6.8. } \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{7.6.9. } A^* = \begin{pmatrix} 128 & 413 & 454 \\ 36 & 117 & 145 \\ -61 & -197 & -245 \end{pmatrix}.$$



$$7.6.10. A^* = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ -5 & -7 & -2 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$7.6.11. \text{ а) } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{ б) } \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{ в) } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{4}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

$$7.6.12. \text{ а) } \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{ б) } \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 4 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{ в) } \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$7.6.13. \text{ а) } \begin{pmatrix} 0 & -\frac{5}{2} & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{15}{2} & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{ б) } \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -\frac{5}{4} & 0 & \frac{5}{4} \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{ в) } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

7.6.14. Указание: используйте соответствие между сопряженными операторами и сопряженными матрицами.

7.6.16. а) базис ядра – многочлен t^2 ; базис образа – многочлен t, t^2 ;

б) базис ядра – многочлен $3t^2 - 2$; базис образа – многочлен $t, 3t^2 - 2$;

в) базис ядра – многочлен $3t^2 - 1$; базис образа – многочлен $t, 3t^2 - 1$.



7.6.19. Указание: выберите $A_1 = \frac{1}{2}(A + A^*)$, $A_2 = \frac{1}{2i}(A - A^*)$.

$$\mathbf{7.6.27.} \quad P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

7.6.28. а) да; б) нет; в) да; г) да.

7.6.29. а) да; б) нет.

7.6.32. а) да; б) нет.

7.6.35. Базис составляют, например, векторы:

$$\text{а) } e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)^T, \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)^T, \quad \Lambda = \text{diag}(1+i, 1-i);$$

$$\text{б) } e_1 = \frac{1}{3}(2, 1, -2)^T, \quad e_2 = \frac{1}{3\sqrt{10}}(4-3i, 2+6i, 5)^T, \quad e_3 = \frac{1}{3\sqrt{10}}(4+3i, 2-6i, 5)^T,$$

$$\Lambda = \text{diag}(0, 3i, -3i);$$

$$\text{в) } e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0, 0)^T, \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, 1, -1)^T, \quad e_3 = \frac{1}{2}(1, -1, i, i)^T,$$

$$e_4 = \frac{1}{2}(1, -1, -i, -i)^T \quad \Lambda = \text{diag}(2, 2, 2i, -2i).$$

7.6.39. Указание: покажите, что $N(A) = N(A^*)$.

7.6.41. Нет, если собственные значения оператора простые; да, если хотя бы одно кратно.

$$\mathbf{7.6.42.} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}, \quad P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -i \\ -2i & i & 2 \\ i & -2i & 2 \end{pmatrix}.$$



7.6.43. а) $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)^T$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)^T$, $\Lambda = \text{diag}(0, 2)$;

б) $e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1)^T$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2)^T$, $\Lambda = \text{diag}(4, 9)$;

в) $e_1 = \frac{1}{3}(2, 2, 1)^T$, $e_2 = \frac{1}{3}(2, -1, -2)^T$, $e_3 = \frac{1}{3}(1, -2, 2)^T$, $\Lambda = \text{diag}(9, 18, -9)$;

г) $e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)^T$, $e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)^T$, $\Lambda = \text{diag}(5, -1, -1)$.

7.6.44. а) $\Lambda = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}(1+i) & 1+i \\ \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix}$;

б) $\Lambda = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$, $P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2-i & 1 \\ -1 & 2+i \end{pmatrix}$.

7.6.45. а) $x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2y_1 + y_2)$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(y_1 + 2y_2)$, $4y_1^2 + 9y_2^2$;

б) $x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(y_1 + 2y_2)$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2y_1 - y_2)$, $5y_2^2$;

в) $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_1 - y_2)$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_1 + y_2)$, $y_1^2 - y_2^2$;

г) $x_1 = \frac{1}{3}(2y_1 - y_2 + 2y_3)$, $x_2 = \frac{1}{3}(2y_1 + 2y_2 - y_3)$, $x_3 = \frac{1}{3}(-y_1 + 2y_2 + 2y_3)$,

$3y_1^2 + 6y_2^2 + 9y_3^2$;

д) $x_1 = y_1$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_2 + y_3)$, $x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_2 - y_3)$, $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$;

е) $x_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}y_3$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}y_3$, $x_3 = \frac{2}{\sqrt{6}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}y_3$,

$6y_1^2$;

ж) $x_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}y_1 + \frac{5}{\sqrt{30}}y_3$, $x_2 = \frac{2}{\sqrt{6}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}y_2 - \frac{2}{\sqrt{30}}y_3$, $x_3 = -\frac{1}{\sqrt{6}}y_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}y_2 +$

$+\frac{1}{\sqrt{30}}y_3$, $6y_1^2$;



$$\begin{aligned} \text{з) } x_1 &= \frac{1}{2}(y_1 + y_2 + y_3 - y_4), \quad x_2 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2 - y_3 + y_4), \quad x_3 = \frac{1}{2}(y_1 - y_2 + y_3 + y_4), \\ x_4 &= \frac{1}{2}(-y_1 + y_2 + y_3 + y_4), \quad y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - y_4^2. \end{aligned}$$

7.6.46. Указание: см. решение задачи № 1569 в [13].

$$\text{7.6.47. а) } e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T, \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)^T, \quad e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)^T, \quad B = \text{diag}(1, 1, -1);$$

$$\text{б) } e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)^T, \quad e_2 = (0, 0, 1)^T, \quad e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)^T, \quad B = \text{diag}\left(1, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

$$\text{7.6.48. а) } B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \\ 0 & -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7.6.49. Указание: см. § 7.2 в [20]. Если, например, линейное преобразование A в ортонормированном базисе задано матрицей $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и вектор $x = (1, 1)^T$ задан координатами в том же базисе, то $(Ax, x) = -1$.

7.6.50. Указание: см. § 7.1 в [20].

$$\text{8.1.1. а) } x = 3 + t, \quad y = -1 - 2t;$$

$$\text{б) } x = -1 - 2t, \quad y = 2.$$

$$\text{8.1.2. } \frac{x-1}{3} = \frac{y-3}{4}; \quad x = 1 + 3t, \quad y = 3 + 4t.$$

$$\text{8.1.3. а) } 45^\circ;$$

$$\text{б) } 60^\circ.$$



8.1.4. а) 2;

б) $\frac{5}{2}$.

8.1.5. (4, 2).

8.1.6. (-15, 20).

8.1.7. $M_1=(0, -9)$, $M_2=(0, -3)$.

8.1.8. $\operatorname{arctg} \frac{8}{9}$, $\operatorname{arctg} \frac{4}{3}$, $\operatorname{arctg} 3$.

8.1.9. $2x-y-7=0$, $5x+3y-1=0$, $3x+4y-16=0$.

8.1.10. $3x-y+2=0$, $-x-3y+2=0$.

8.1.11. $\alpha=1$, $\beta=-1$.

8.1.12. Стороны: $3x-4y+32=0$, $3x-4y+7=0$, $4x+3y-24=0$, $4x+3y+1=0$;
диагональ: $x+7y-31=0$.

8.1.13. $2x+3y-19=0$, $8x-11y-7=0$, $2x+3y+27=0$, $8x-11y+39=0$.

8.1.14. $M_1=(-12, 5)$.

8.1.15. $2x+7y-5=0$.

8.1.16. $2x+3y-5=0$.

8.1.17. $M=(5, 7)$.

8.1.18. $77x-33y+133=0$.

8.1.19. $91x-26y-2=0$.

8.1.20. $P=\left(\frac{17}{2}, \frac{21}{4}\right)$.

8.1.21. (3, 11).

8.1.22. $M_1=(3, 5)$, $M_2=(-37, 45)$.



8.1.23. $3x - y - 1 = 0$, $3x - y - 21 = 0$.

8.1.24. $7x + y + 4 = 0$, $x - 7y + 6 = 0$.

8.1.25. $y - 1 = 0$.

8.1.26. $x^2 - 6y + 9 = 0$.

8.1.27. $y^2 - 8x + 16 = 0$.

8.1.28. $5x - 3y + 17 = 0$.

8.1.29. $6x - 8y - 45 = 0$.

8.1.30. а) $\frac{x-1}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-1}{21}$; $x = 1 + 3t$, $y = 3 + 4t$, $z = 1 + 21t$;

б) $\frac{x}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+3}{1}$; $x = 3t$, $y = 1 - 2t$, $z = -3 + t$;

в) $x = 1$, $y = 3$, $z = 1 + t$;

г) $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$; $x = 1 + t$, $y = 2 + 2t$, $z = 3 + 3t$.

8.1.31. а) параллельны;

б) пересекаются в точке $(-3, 5, -5)$.

8.1.32. а) $a = 3$;

б) $a \neq \pm 1$, $a \neq 3$;

в) $a = -1$;

г) $a = 1$.

8.1.33. а) $x = 8t$, $y = 65t$, $z = 49t$;

б) $x = -1 - 5t$, $y = 1 - 27t$, $z = -1 + 22t$;

в) $x = -3 + 4t$, $y = 3 - t$, $z = 3 - t$.

8.1.34. $x = c + dt$, где $d = \{1, 1, 0, 3\}$, $M_1 = (2, 3, 2, 1)$, $M_2 = (1, 2, 2, -2)$

8.1.35. а) $(-2, -5, -1, 1, -1)$;

б) $(0, 1, -1, -2, -3)$.



8.1.36. $A=(1, -3, 2)$.

8.1.37. $x=72+8t, \quad y=55+7t, \quad z=t$.

8.1.38. а) 90° ; б) 0.

8.1.39. а) 3; $(4, -3, 1)$; $B=(6, -5, 2)$; $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{1}$;

б) $\frac{5\sqrt{2}}{3}$; $\left(\frac{31}{9}, -\frac{4}{9}, -\frac{16}{9}\right)$; $B=\left(\frac{44}{9}, -\frac{1}{9}, -\frac{32}{9}\right)$; $\frac{x-2}{13}=\frac{y+1}{5}=\frac{z}{-16}$.

8.1.40. $\left(\frac{11}{3}, \frac{17}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

8.1.41. $(3, 1, 3)$.

8.1.42. а) $\frac{\sqrt{26}}{7}$; б) $\sqrt{62}$.

8.1.43. а) $x=9-t, \quad y=-5+2t, \quad z=1+3t$; $(5, 3, 13)$ и $(6, 1, 10)$; $\sqrt{14}$;

б) $x=3+2t, \quad y=1+t, \quad z=1+4t$; $(7, 3, 9)$ и $(3, 1, 1)$; $2\sqrt{21}$.

8.1.44. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

8.1.45. $\frac{4\sqrt{29}}{29}$.

8.2.1. $x-2y-z=0$.

8.2.2. $2x-6y-z-34=0$.

8.2.3. $2x-y-1=0$.

8.2.4. $2x-5y+7z-8=0$.

8.2.5. а) $x=1+2u-v, \quad y=1+3u+v, \quad z=2+u$;

б) $x=1-2u+5v, \quad y=1+u-3v, \quad z=1-4u+2v$;

в) $x=1-2u+3v, \quad y=u, \quad z=v$.



8.2.6. а) параллельны;

б) совпадают;

в) пересекаются по прямой.

8.2.7. $(5, 0, 0)$, $(0, -5, 0)$, $(0, 0, -5)$.

8.2.8. $7x + y + 5z - 4 = 0$.

8.2.10. Да, являются.

8.2.11. $x = 1 + u + v$, $y = 1 + u - v$, $z = 1 + u + v$.

8.2.12. $(0, 2, 0)$.

8.2.13. $x - 2 = 0$, $y - 3 = 0$, $z - 5 = 0$.

8.2.14. а) $z - 4 = 0$;

б) $3x + 2y = 0$;

в) $5x + z - 19 = 0$.

8.2.15. $x = 1 + 3u$, $y = -4 - 13u + 14v$, $z = 3v$.

8.2.16. $x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t_1 + \frac{1}{2}t_2$, $x_2 = t_1$, $x_3 = 3 - 4t_2$, $x_4 = 0$, $x_5 = t_2$.

8.2.17. Указанная плоскость содержит вектор z , но не содержит вектор v .

8.2.18. а) $a \neq \pm 3$; б) $a = 3$; в) $a = -3$.

8.2.19. а) $\sqrt{3}$; б) 1; в) $\frac{1}{3}$; г) 1.

8.2.20. а) 2; б) 5; в) $\frac{3}{10}$.

8.2.21. а) $6x - 3y + 2z + 26 = 0$ и $6x - 3y + 2z - 16 = 0$;

б) $x + 3y - z + 4\sqrt{11} = 0$ и $x + 3y - z - 2\sqrt{11} = 0$;

в) $2x + 2y - z + 2 = 0$ и $2x + 2y - z - 16 = 0$;

г) $3x + 4z \pm 15 = 0$.

8.2.22. $2x + y + 2z - 9 = 0$, $z - 2 = 0$.



8.2.23. а) $\arccos \frac{\sqrt{6}}{3}$;

б) $\arccos \frac{2}{3}$;

в) 90° .

8.2.24. $y - z - 3 = 0$.

8.3.1. а) прямая лежит в плоскости;

б) пересечение в точке $\left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$;

в) прямая параллельна плоскости.

8.3.2. а) $a \neq \pm \frac{1}{2}$;

б) $a = -\frac{1}{2}$;

в) $a = \frac{1}{2}$.

8.3.3. $x = -\frac{7}{13} - 4u + 2v$, $y = -\frac{17}{13} + 7u + 3v$, $z = 13 - v$.

8.3.4. $x = 3 - 2u + v$, $y = 1 + u - 2v$, $z = 3 + 2u + 2v$.

8.3.5. $39x + 27y - 11z - 120 = 0$.

8.3.6. $4x + y - 8z + 6 = 0$.

8.3.7. а) $x + 7y - 6z + 6 = 0$;

б) $10x + 2y - z + 10 = 0$.

8.3.8. $(3, 4, 0)$.

8.3.9. $x = 2 + 2t$, $y = 1 - 5t$, $z = -3 + 3t$.

8.3.10. $\frac{x-1}{11} = \frac{y+1}{-10} = \frac{z-2}{3}$.

8.3.11. а) $3x + 4y + 21z - 36 = 0$;

б) $4x - 3y + z + 4 = 0$.



8.3.12. $5x - 10y - 3z - 3 = 0$.

8.3.13. $x = 5 - 4t, \quad y = 1 + t, \quad z = 1 + t$.

8.3.14. $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{-18} = \frac{z-2}{1}$.

8.3.15. $(1, 0, -1)$ или $(-1, -3, -2)$.

8.3.16. $\frac{x+5}{-11} = \frac{y-2}{7} = \frac{z-4}{8}$.

8.3.17. а) $x = 97t, \quad y = 5 - t, \quad z = 92t$;

б) $x = -\frac{1}{3} - t, \quad y = 5 + t, \quad z = -\frac{1}{3} + 4t$;

в) единственная точка $(0, 5, 0)$.

8.3.18. а) 90° ; б) 0 .

8.3.19. $A = (-2, 7, -2)$.

8.3.20. $(3, 0, 0)$ или $(2, -1, 2)$.

8.3.21. $M_1 = (-5, -7, 9), \quad M_2 = \left(-\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, -6\right)$.

8.3.22. $M_1 = (-2, 0, 0), \quad M_2 = \left(-6\frac{4}{13}, 0, 0\right)$.

8.3.23. $x + y - 4z = 0$.

8.3.24. $2x + 4y + 7 = 0$.

8.3.25. $\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{-3}$.

8.3.26. $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-1}{-4}$.

8.4.1. Да.

8.4.2. а) На оси Ox ;

б) на оси Oy .

8.4.3. Да, $(3, 0)$.



8.4.4. а) 3 и 5, 5 и 3;

б) $F_1=(0, -4)$, $F_2=(0, 4)$, $F_1=(-4, 0)$, $F_2=(4, 0)$;

в) $\varepsilon=\frac{4}{5}$;

г) $y=\frac{25}{4}$, $y=-\frac{25}{4}$, $x=\frac{25}{4}$, $x=-\frac{25}{4}$.

8.4.5. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$, $F=(-2, 0)$, $x=-8$.

8.4.6. $3x^2+2xy+3y^2-4x-4y=0$.

8.4.7. $\frac{(x-8)^2}{64}+\frac{(y-5)^2}{320/11}=1$.

8.4.8. $M_1=\left(\frac{18}{5}, \frac{4\sqrt{11}}{5}\right)$, $M_2=\left(\frac{18}{5}, -\frac{4\sqrt{11}}{5}\right)$.

8.4.9. $\left(x+\frac{4}{3}\right)^2+\left(y+\frac{5}{3}\right)^2=\frac{65}{9}$.

8.4.10. $x^2+y^2-16x=0$.

8.4.11. а) $a=5$, $b=12$;

б) $F_1=(13, 0)$, $F_2=(-13, 0)$;

в) $\varepsilon=\frac{13}{5}$;

г) $y=\frac{12}{5}x$ и $y=-\frac{12}{5}x$;

д) $x=\frac{25}{13}$ и $x=-\frac{25}{13}$.

8.4.12. а) $a=15$, $b=8$;

б) $F_1=(0, 17)$, $F_2=(0, -17)$;



в) $\varepsilon = \frac{17}{8}$;

г) $y = \frac{8}{25}x$ и $y = -\frac{8}{25}x$;

д) $y = \frac{64}{17}$ и $y = -\frac{64}{17}$.

8.4.13. а) на оси Ox ;

б) на оси Oy .

8.4.14. $91x^2 - 100xy + 16y^2 - 136x + 86y - 47 = 0$.

8.4.15. 1.

8.4.16. $x^2 + y^2 - 2xy + 10x - 2y + 9 = 0$.

8.4.17. $x^2 + 4y^2 + 4xy - 48x + 4y + 76 = 0$.

8.4.18. $x^2 = -2y$, $2y - 1 = 0$.

8.4.19. $x^2 + y^2 + 2xy - 4x + 8y - 6 = 0$.

8.4.20. $4xy + 3y^2 - 2y - 1 = 0$.

8.4.21. а) эллипс $\frac{\tilde{x}^2}{2} + \frac{\tilde{y}^2}{1/3} = 1$; $\tilde{O} = (-3, -1)$, $\tilde{e}_1 = \left\{ \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right\}^T$, $\tilde{e}_2 = \left\{ -\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right\}^T$;

б) гипербола $\frac{\tilde{x}^2}{1/4} - \tilde{y}^2 = 1$; $\tilde{O} = (-1, -1)$, $\tilde{e}_1 = \left\{ -\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right\}^T$, $\tilde{e}_2 = \left\{ -\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right\}^T$;

в) парабола $\tilde{y}^2 = \frac{1}{5}x$; $\tilde{O} = \left(\frac{6}{25}, -\frac{8}{25} \right)$, $\tilde{e}_1 = \left\{ -\frac{4}{5}, -\frac{3}{5} \right\}^T$, $\tilde{e}_2 = \left\{ \frac{3}{5}, -\frac{4}{5} \right\}^T$;

г) эллипс $\frac{\tilde{x}^2}{2} + \frac{\tilde{y}^2}{2/3} = 1$; $\tilde{O} = (-1, -1)$, $\tilde{e}_1 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}^T$, $\tilde{e}_2 = \left\{ -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}^T$;

д) парабола $\tilde{y}^2 = 4\sqrt{2}\tilde{x}$; $\tilde{O} = (2, 1)$, $\tilde{e}_1 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}^T$, $\tilde{e}_2 = \left\{ -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}^T$;

е) эллипс $\frac{\tilde{x}^2}{14} + \tilde{y}^2 = 1$; $\tilde{O} = (3, -2)$, $\tilde{e}_1 = \left\{ -\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}} \right\}^T$, $\tilde{e}_2 = \left\{ -\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}} \right\}^T$;

ж) гипербола $\frac{\tilde{x}^2}{1/9} - \frac{\tilde{y}^2}{1/25} = 1$; $\tilde{O} = (1, -1)$, $\tilde{e}_1 = \left\{ -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}^T$, $\tilde{e}_2 = \left\{ -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}^T$;

з) парабола $\tilde{y}^2 = \frac{6}{\sqrt{34}} \tilde{x}$; $\tilde{O} = \left(-\frac{11}{17}, \frac{10}{17} \right)$, $\tilde{e}_1 = \left\{ -\frac{3}{\sqrt{34}}, -\frac{5}{\sqrt{34}} \right\}^T$,
 $\tilde{e}_2 = \left\{ \frac{5}{\sqrt{34}}, -\frac{3}{\sqrt{34}} \right\}^T$;

и) пара параллельных прямых $2x + 3y - 5 = 0$, $2x + 3y + 1 = 0$; $\tilde{y}^2 = \frac{9}{13}$;

$\tilde{O} = \left(\frac{4}{13}, \frac{6}{13} \right)$, $\tilde{e}_1 = \left\{ -\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}} \right\}^T$, $\tilde{e}_2 = \left\{ -\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}} \right\}^T$;

к) мнимый эллипс;

л) пара пересекающихся прямых $3x - 5y - 13 = 0$, $5x + 3y + 1 = 0$;

$\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 = 0$; $\tilde{O} = (1, -2)$, $\tilde{e}_1 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{17}}, \frac{4}{\sqrt{17}} \right\}^T$, $\tilde{e}_2 = \left\{ -\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{1}{\sqrt{17}} \right\}^T$.

8.4.22. Длины полуосей равны $\sqrt{2}$ и 1, эксцентриситет равен $\frac{1}{\sqrt{2}}$, центром

является точка $(1, -1)$, уравнение большой оси $3x + 4y + 1 = 0$, уравнение малой

оси $4x - 3y - 7 = 0$. Фокусу $F_1 = \left(\frac{1}{5}, -\frac{2}{5} \right)$ соответствует директриса

$4x - 3y + 3 = 0$, фокусу $F_2 = \left(\frac{9}{5}, -\frac{8}{5} \right)$ соответствует директриса $4x - 3y - 17 = 0$.

8.4.23. Длины обеих полуосей равны $\sqrt{2}$, эксцентриситет равен $\sqrt{2}$, центром

является точка $(1, 1)$, уравнение действительной оси $4x + 3y - 7 = 0$, уравнение

мнимой оси $3x - 4y + 1 = 0$. Фокусу $F_1 = \left(-\frac{1}{5}, \frac{13}{5} \right)$ соответствует директриса



$3x-4y+6=0$, фокусу $F_2=\left(\frac{11}{5}, -\frac{3}{5}\right)$ соответствует директриса $3x-4y-4=0$.

Уравнения асимптот $x+7y-8=0$ и $7x-y-6=0$.

8.4.24. Параметр параболы равен $\frac{\sqrt{2}}{8}$, вершиной является точка $\left(-\frac{1}{16}, -\frac{13}{16}\right)$,

фокусом – точка $F=\left(-\frac{1}{8}, -\frac{1}{8}\right)$. Осью параболы является прямая $4x+4y+1=0$,

директрисой – прямая $4x-4y-1=0$.

8.4.25. а) уравнение эллипса приводится к виду $\frac{\tilde{x}^2}{4}+\frac{\tilde{y}^2}{9}=1$ преобразованием координат $x=\tilde{x}-2$, $y=\tilde{y}+5$;

б) уравнение пары пересекающихся прямых приводится к виду $16\tilde{x}^2-25\tilde{y}^2=0$ преобразованием координат $x=\tilde{x}-1$, $y=\tilde{y}-2$;

в) уравнение эллипса приводится к виду $\frac{\tilde{\tilde{x}}^2}{4}+\frac{\tilde{\tilde{y}}^2}{16}=1$ путем последовательных преобразований координат $x=\frac{\sqrt{2}}{2}\tilde{x}-\frac{\sqrt{2}}{2}\tilde{y}$, $y=\frac{\sqrt{2}}{2}\tilde{x}+\frac{\sqrt{2}}{2}\tilde{y}$ и $\tilde{x}=\tilde{\tilde{x}}$, $\tilde{y}=\tilde{\tilde{y}}+1$;

г) уравнение параболы приводится к виду $\tilde{\tilde{x}}^2=-6\tilde{\tilde{y}}$ последовательным преобразованием координат $x=\frac{\sqrt{2}}{2}\tilde{x}-\frac{\sqrt{2}}{2}\tilde{y}$, $y=\frac{\sqrt{2}}{2}\tilde{x}+\frac{\sqrt{2}}{2}\tilde{y}$ и $\tilde{x}=\tilde{\tilde{x}}-3$, $\tilde{y}=\tilde{\tilde{y}}$;

д) уравнение гиперболы приводится к виду $\frac{\tilde{\tilde{x}}^2}{16}-\frac{\tilde{\tilde{y}}^2}{9}=1$ последовательным преобразованием координат $x=\frac{\sqrt{2}}{2}\tilde{x}-\frac{\sqrt{2}}{2}\tilde{y}$, $y=\frac{\sqrt{2}}{2}\tilde{x}+\frac{\sqrt{2}}{2}\tilde{y}$ и $\tilde{x}=\tilde{\tilde{x}}$, $\tilde{y}=\tilde{\tilde{y}}+1$;



е) уравнение параболы приводится к виду $\tilde{y}^2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}\tilde{x}$ последовательным преобразованием координат $x = \frac{2}{\sqrt{5}}\tilde{x} - \frac{1}{\sqrt{5}}\tilde{y}$, $y = \frac{1}{\sqrt{5}}\tilde{x} + \frac{2}{\sqrt{5}}\tilde{y}$ и $\tilde{x} = \tilde{x} + \frac{8}{\sqrt{5}}$, $\tilde{y} = \tilde{y} + \frac{1}{\sqrt{5}}$;

ж) уравнение пары параллельных прямых приводится к виду $\tilde{x}^2 - 16 = 0$ преобразованием координат $x = \frac{3}{5}\tilde{x} - \frac{4}{5}\tilde{y}$, $y = \frac{4}{5}\tilde{x} + \frac{3}{5}\tilde{y}$;

з) уравнение эллипса приводится к виду $\frac{\tilde{x}^2}{16} + \tilde{y}^2 = 1$ последовательным преобразованием координат $x = \frac{\sqrt{2}}{2}\tilde{x} - \frac{\sqrt{2}}{2}\tilde{y}$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}\tilde{x} + \frac{\sqrt{2}}{2}\tilde{y}$ и $\tilde{x} = \tilde{x} + 3$, $\tilde{y} = \tilde{y}$;

и) уравнение гиперболы приводится к виду $\frac{\tilde{x}^2}{16} - \frac{\tilde{y}^2}{4} = 1$ последовательным преобразованием координат $x = \frac{\sqrt{2}}{2}\tilde{x} - \frac{\sqrt{2}}{2}\tilde{y}$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}\tilde{x} + \frac{\sqrt{2}}{2}\tilde{y}$ и $\tilde{x} = \tilde{x} - 1$, $\tilde{y} = \tilde{y}$.

8.4.26. а) гипербола $\frac{\tilde{x}^2}{200/147} - \frac{\tilde{y}^2}{200/63} = 1$;

б) эллипс $\frac{\tilde{x}^2}{1/13} + \frac{\tilde{y}^2}{2/9} = 1$;

в) параболы $\tilde{y}^2 = \frac{4}{5\sqrt{5}}\tilde{x}$;

г) эллипс $\tilde{x}^2 + \frac{\tilde{y}^2}{9} = 1$;

д) гипербола $\tilde{x}^2 - \frac{\tilde{y}^2}{4} = 1$;

е) параболы $\tilde{x}^2 = \frac{96}{13\sqrt{13}}\tilde{y}$.



8.5.1. а) при $\lambda > 0$ – эллипсоид, при $\lambda = 0$ – точка, при $\lambda < 0$ – пустое множество;

б) при $\lambda > 0$ – эллипсоид, при $\lambda = 0$ – эллиптический цилиндр, при $\lambda < 0$ – однополостный гиперболоид;

в) при $\lambda > 0$ – эллипсоид, при $\lambda = 0$ – прямая, при $\lambda < 0$ – двуполостной гиперболоид;

г) при $\lambda > 0$ – однополостный гиперболоид, при $\lambda = 0$ – конус, при $\lambda < 0$ – двуполостный гиперболоид;

д) при $\lambda > 0$ – двуполостный гиперболоид, при $\lambda = 0$ – конус, при $\lambda < 0$ – однополостный гиперболоид;

е) при $\lambda > 0$ – эллипсоид, при $\lambda = 0$ – пара параллельных плоскостей, при $\lambda < 0$ – двуполостный гиперболоид;

ж) при $\lambda > 0$ – эллипсоид, при $\lambda = 0$ – плоскость, при $\lambda < 0$ – однополостный гиперболоид;

з) при $\lambda \neq 0$ – эллиптический параболоид, при $\lambda = 0$ – прямая;

и) при $\lambda > 0$ – эллиптический параболоид, при $\lambda = 0$ – параболический цилиндр, при $\lambda < 0$ – гиперболический параболоид;

к) при $\lambda \neq 0$ – эллиптический параболоид, при $\lambda = 0$ – плоскость;

л) при $\lambda > 0$ – эллиптический параболоид, при $\lambda = 0$ – плоскость, при $\lambda < 0$ – гиперболический параболоид;

м) при $\lambda > 0$ – эллиптический параболоид, при $\lambda = 0$ – пара параллельных плоскостей, при $\lambda < 0$ – гиперболический параболоид;

н) при $\lambda > 0$ – эллиптический цилиндр, при $\lambda = 0$ – прямая, при $\lambda < 0$ – пустое множество;

о) при $\lambda \neq 0$ – гиперболический цилиндр, при $\lambda = 0$ – пара пересекающихся плоскостей.

8.5.4. а) парабола;

б) эллипс;

в) гипербола;

г) гипербола;

д) гипербола.

8.5.5. $(-4; \pm 6, \pm 2\sqrt{3})$, 6, $2\sqrt{3}$.



8.5.6. $p=30$, $(0, 12, -3)$.

8.5.7. $\sqrt{5}$, $\sqrt{2}$, $(\pm\sqrt{5}, 3, 0)$.

8.5.8. Вне эллипсоида.

8.5.9. $\frac{16x^2}{9} + \frac{(4y-15)^2}{25} - (z-4)^2 = 0$.

8.5.10. $(1, 1, 0)$, $(7, -11, 12)$.

8.5.12. а) мнимый эллиптический цилиндр $\frac{\tilde{x}^2}{6} + \frac{\tilde{y}^2}{15} = -1$, новое начало координат

$\tilde{O} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 3\right)$, направляющие векторы канонической системы координат:

$\tilde{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \{1, 1, -2\}^T$, $\tilde{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \{1, 1, 1\}^T$, $\tilde{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \{1, -1, 0\}^T$;

б) двуполостный гиперболоид $-\frac{\tilde{x}^2}{90} + \frac{\tilde{y}^2}{120} + \frac{\tilde{z}^2}{180} = -1$, новое начало координат

$\tilde{O} = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, -3\sqrt{6})$, направляющие векторы канонической системы координат:

$\tilde{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \{1, 1, 1\}^T$, $\tilde{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \{-1, 1, 0\}^T$, $\tilde{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \{-1, -1, 2\}^T$;

в) параболический цилиндр $\tilde{x}^2 = \frac{2\sqrt{7}}{9\sqrt{3}} \tilde{y}$, новое начало координат

$\tilde{O} = \left(\frac{23}{63}, \frac{64}{63}, \frac{2}{7}\right)$, направляющие векторы канонической системы координат:

$\tilde{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \{1, 2, -1\}^T$, $\tilde{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{21}} \{-2, -1, -4\}^T$, $\tilde{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{14}} \{3, -2, -1\}^T$;

г) эллипсоид $\frac{\tilde{x}^2}{1/2} + \frac{\tilde{y}^2}{1/5} + \frac{\tilde{z}^2}{3/2} = 1$, новое начало координат $\tilde{O} = (0, 0, 1)$,

направляющие векторы канонической системы координат: $\tilde{e}_1 = \{0, 1, 0\}^T$,

$\tilde{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \{1, 0, 1\}^T$, $\tilde{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \{-1, 0, 1\}^T$;



д) эллипсоид $\frac{\tilde{x}^2}{5} + \frac{\tilde{y}^2}{5/2} + \frac{\tilde{z}^2}{5/3} = 1$, новое начало координат $\tilde{O} = (-1, 1, 4)$,

направляющие векторы канонической системы координат: $\tilde{e}_3 = \frac{1}{3} \{-2, -1, 2\}^T$,

$$\tilde{e}_2 = \frac{1}{3} \{2, -2, 1\}^T, \tilde{e}_1 = \frac{1}{3} \{1, 2, 2\}^T;$$

е) двуполостный гиперболоид $-\frac{\tilde{x}^2}{1/18} + \frac{\tilde{y}^2}{1/27} + \frac{\tilde{z}^2}{1/54} = -1$, новое начало

координат $\tilde{O} = \left(-\frac{1}{9}, -\frac{1}{18}, \frac{7}{18}\right)$, направляющие векторы канонической системы

координат: $\tilde{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \{1, 0, -1\}^T$, $\tilde{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \{-1, 1, -1\}^T$, $\tilde{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \{1, 2, 1\}^T$;

ж) гиперболический параболоид $\frac{\tilde{x}^2}{2} - \frac{\tilde{y}^2}{2} = 2\tilde{z}$, новое начало координат

$\tilde{O} = \left(\frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$, направляющие векторы канонической системы координат:

$$\tilde{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \{0, -1, 1\}^T, \tilde{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{18}} \{-4, 1, 1\}^T, \tilde{e}_3 = \frac{1}{3} \{-1, -2, -2\}^T;$$

з) конус $2\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 - \tilde{z}^2 = 0$, новое начало координат $\tilde{O} = (1, -2, -2)$,

направляющие векторы канонической системы координат: $\tilde{e}_1 = \frac{1}{5} \{3, 0, 4\}^T$,

$$\tilde{e}_2 = \frac{1}{5\sqrt{2}} \{4, -5, -3\}^T, \tilde{e}_3 = \frac{1}{5\sqrt{2}} \{-4, -5, 3\}^T;$$

и) эллиптический параболоид $2\tilde{x}^2 + 2\tilde{y}^2 = \frac{10}{\sqrt{6}}\tilde{z}$, новое начало координат

$\tilde{O} = \left(-\frac{47}{90}, \frac{13}{45}, \frac{43}{90}\right)$, направляющие векторы канонической системы координат:

$$\tilde{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \{-1, 1, -1\}^T, \tilde{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \{-1, 0, 1\}^T, \tilde{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \{1, 2, 1\}^T;$$



к) эллиптический параболоид $\frac{\tilde{x}^2}{1/2} + \frac{\tilde{y}^2}{1/3} = 2\tilde{z}$, новое начало координат $\tilde{O} = (2, 2, 1)$, направляющие векторы канонической системы координат: $\tilde{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \{1, -1, 0\}^T$, $\tilde{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{18}} \{1, 1, -4\}^T$, $\tilde{e}_3 = \frac{1}{3} \{2, 2, 1\}^T$;

л) эллипсоид $\frac{\tilde{x}^2}{1/9} + \frac{\tilde{y}^2}{1/9} + \frac{\tilde{z}^2}{1/27} = 1$, новое начало координат $\tilde{O} = (-1, -1, 2)$, направляющие векторы канонической системы координат: $\tilde{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \{1, 1, 0\}^T$, $\tilde{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{18}} \{1, -1, 4\}^T$, $\tilde{e}_3 = \frac{1}{3} \{-2, 2, 1\}^T$;

м) однополостный гиперболоид $\tilde{x}^2 + 2\tilde{y}^2 - \tilde{z}^2 = 1$, новое начало координат $\tilde{O} = (1, 1, 3)$, направляющие векторы канонической системы координат: $\tilde{e}_1 = \frac{1}{3} \{2, 2, 1\}^T$, $\tilde{e}_2 = \frac{1}{3} \{2, -1, -2\}^T$, $\tilde{e}_3 = \frac{1}{3} \{1, -2, 2\}^T$;

н) параболический цилиндр $\tilde{z}^2 = \frac{2}{3}\tilde{x}$, новое начало координат $\tilde{O} = \left(\frac{115}{36}, \frac{85}{36}, \frac{55}{72}\right)$, направляющие векторы канонической системы координат: $\tilde{e}_1 = \frac{1}{3} \{2, 2, 1\}^T$, $\tilde{e}_2 = \frac{1}{3} \{1, -2, 2\}^T$, $\tilde{e}_3 = \frac{1}{3} \{-2, 1, 2\}^T$;

о) однополостный гиперболоид $-\frac{\tilde{x}^2}{3} + \frac{\tilde{y}^2}{6} + \frac{\tilde{z}^2}{6} = -1$, новое начало координат $\tilde{O} = (1, 1, -1)$, направляющие векторы канонической системы координат: $\tilde{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \{-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\}^T$, $\tilde{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}, 0\}^T$, $\tilde{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \{1, 1, 2\}^T$;

п) пара пересекающихся плоскостей $\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)x + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}y + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)z = 0$,
 $\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)x + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}y + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)z = 0$;



р) пара параллельных плоскостей $\tilde{z}^2 = \frac{25}{56}$, новое начало координат

$\tilde{O} = \left(\frac{1}{28}, -\frac{1}{14}, \frac{3}{28} \right)$, направляющие векторы канонической системы координат:

$$\tilde{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \{2, 1, 0\}^T, \tilde{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{70}} \{-3, 6, 5\}^T, \tilde{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{14}} \{1, -2, 3\}^T.$$

9.1.1. а) $J = \text{diag}(3, J_2(-1))$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

б) $J = \text{diag}(J_2(2), 2)$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $J = \text{diag}(J_2(1), 1)$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

г) $J = \text{diag}(J_2(-1), -1)$, $P = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

д) $J = J_3(0)$, $P = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 1 & -5 & 0 \\ -1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$;

е) $J = \text{diag}(J_2(-2), 3)$, $P = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

ж) $J = \text{diag}(J_2(3), 3)$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;



$$з) J=J_3(1), \quad P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$и) J=\text{diag}(J_2(0), 0), \quad P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$к) J=\text{diag}(J_3(1), 1), \quad P=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$л) J=\text{diag}(J_2(99), J_2(99)), \quad P=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 101 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 101 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$м) J=\text{diag}(J_3(1), 1), \quad P=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$н) J=\text{diag}(J_3(-2), J_2(-2)), \quad P=\begin{pmatrix} 24 & 5 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$о) J=\text{diag}(J_3(-1), -1, -1), \quad P=\begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$



$$\text{п) } J = \text{diag}(J_2(2), 2, J_2(-1)), \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{9.1.2. } \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 & 2\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{9.1.3. } J = J_k(\lambda^2).$$

$$\text{9.1.4. а) } J = \text{diag}(J_2(0), J_2(0));$$

$$\text{б) } J = \text{diag}(J_2(0), J_3(0)).$$

$$\text{9.1.5. а) } N_0^{(1)} = L(e_1), \text{ где } e_1 = (0, 1, -1)^T, \quad N_1^{(2)} = L(f_1, f_2), \text{ где } f_1 = (1, 0, 1)^T, \\ f_2 = (0, 1, 0)^T;$$

$$\text{б) } N_1^{(3)} = X.$$

$$\text{9.1.6. } J = J_4(0). \text{ Каноническим является, например, базис } 1, 1+t, 1+t+\frac{1}{2}t^2, \\ 1+t+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{6}t^3.$$

$$\text{9.1.7. } J = J_{n+1}(0).$$

$$\text{9.2.1. а) } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\lambda+1)^2 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2 - \lambda - 2 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^2 + \lambda \end{pmatrix};$$



$$\begin{aligned}
 & \text{г) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{д) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+3)^3 \end{pmatrix}; \quad \text{е) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2+\lambda \end{pmatrix}. \\
 9.2.2. & \text{а) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda^2-1) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda^2-1) \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2(\lambda-1)(\lambda-2) \end{pmatrix}; \\
 & \text{в) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2(\lambda-1) \end{pmatrix}; \quad \text{г) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}; \quad \text{д) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & fgh & 0 \\ 0 & 0 & fgh \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

9.2.3. а) $J = \text{diag}(1, 1, 1, 1, -2, -2)$;

б) $J = \text{diag}(J_2(-1), J_2(-1), -1, 5)$;

в) задача поставлена неверно (таких инвариантных множителей у матрицы $A - \lambda I$ четвертого порядка не может быть).

9.2.4. а) $J = \text{diag}(J_2(2), 2)$;

б) $J = \text{diag}(J_2(0), 1)$;

в) $J = \text{diag}(J_2(-3), 1)$;

г) $J = J_3(-1)$;

д) $J = \text{diag}(J_2(0), 2)$;

е) $J = J_3(0)$.

9.2.5. а) да; б) да;

в) нет; г) нет.

9.2.6. Например, $\text{diag}(J_2(1), 1, 1)$ и $\text{diag}(J_2(1), J_2(1))$.

9.2.7. а) $\lambda^3 + \lambda$;

б) $(\lambda-1)(\lambda-2)^2$;

в) $(\lambda-3)^3$.



$$10.1.1. r(\lambda) = [\alpha_{11} + \alpha_{12}(\lambda - \lambda_1)](\lambda - \lambda_2)^3 +$$

$$+ [\alpha_{21} + \alpha_{22}(\lambda - \lambda_2) + \alpha_{23}(\lambda - \lambda_2)^2](\lambda - \lambda_1)^2,$$

$$\text{где } \alpha_{11} = \frac{f(\lambda_1)}{(\lambda_1 - \lambda_2)^3}, \alpha_{12} = -\frac{3}{(\lambda_1 - \lambda_2)^4} f(\lambda_1) + \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)^3} f'(\lambda_1),$$

$$\alpha_{21} = \frac{f(\lambda_2)}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2}, \alpha_{22} = -\frac{2}{(\lambda_2 - \lambda_1)^3} f(\lambda_2) + \frac{1}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2} f'(\lambda_2),$$

$$\alpha_{23} = \frac{3}{(\lambda_2 - \lambda_1)^4} f(\lambda_2) - \frac{2}{(\lambda_2 - \lambda_1)^3} f'(\lambda_2) + \frac{1}{2} \frac{1}{(\lambda_2 - \lambda_1)^3} f''(\lambda_2).$$

$$10.1.2. Z_{11} = \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)^3} (A - \lambda_2 I)^3 \left[I - \frac{3}{\lambda_1 - \lambda_2} (A - \lambda_1 I) \right],$$

$$Z_{12} = \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)^3} (A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I)^3,$$

$$Z_{21} = \frac{1}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2} (A - \lambda_1 I)^2 \left[I - \frac{2}{\lambda_2 - \lambda_1} (A - \lambda_2 I) + \frac{3}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2} (A - \lambda_2 I)^2 \right],$$

$$Z_{22} = \frac{1}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2} (A - \lambda_1 I)^2 (A - \lambda_2 I) \left[I - \frac{2}{\lambda_2 - \lambda_1} (A - \lambda_2 I) \right],$$

$$Z_{23} = \frac{1}{2(\lambda_2 - \lambda_1)^2} (A - \lambda_1 I)^2 (A - \lambda_2 I)^2.$$

$$10.1.3. \text{ а) } \begin{pmatrix} 3 \cdot 2^{100} - 2 \cdot 3^{100} & 2(3^{100} - 2^{100}) \\ -3(3^{100} - 2^{100}) & 3^{101} - 2^{101} \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } 2^{50} \begin{pmatrix} -24 & 25 \\ -25 & 26 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } \pm \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 9 \end{pmatrix};$$



$$\text{г)} \pm \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 3 & 13 \end{pmatrix} \text{ и } \pm \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{д)} \begin{pmatrix} 4e-3 & 2-2e \\ 6e-6 & 4-3e \end{pmatrix};$$

$$\text{е)} \begin{pmatrix} 2e^2 & -e^2 \\ e^2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{ж)} \begin{pmatrix} 3e-1 & e & -3e+1 \\ 3e & e+3 & -3e-3 \\ 3e-1 & e+1 & -3e \end{pmatrix};$$

$$\text{з)} \begin{pmatrix} 3 & -15 & 6 \\ 1 & -5 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\text{и)} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\text{к)} \begin{pmatrix} 2e^2 & -e^2 & e^2 \\ -e+2e^2 & e-e^2 & e^2 \\ -e+e^2 & e-e^2 & e^2 \end{pmatrix};$$

$$\text{л)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{м)} \begin{pmatrix} 3e^4 & 2e^4 & 2e^4 \\ -2e^4 & -e^4 & -e^4-e^2 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix}.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Александров П. С.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / П. С. Александров. – Санкт-Петербург : Лань, 2009. – 512 с.
2. *Беклемишева Л. А.* Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре / Л. А. Беклемишева, А. Ю. Петрович, И. А. Чубаров. – Москва : Физматлит, 2004. – 496 с.
3. *Блох Э. Л.* Основы линейной алгебры и некоторые ее приложения / Э. Л. Блох, Л. И. Лошинский, В. Я. Турин. – Москва : Высшая школа, 1971. – 256 с.
4. *Воеводин В. В.* Линейная алгебра / В. В. Воеводин. – Санкт-Петербург : Лань, 2006. – 416 с.
5. *Воеводин В. В.* Матрицы и вычисления / В. В. Воеводин, Ю. А. Кузнецов. – Москва : Наука, 1984. – 320 с.
6. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – Москва : Физматлит, 2010. – 560 с.
7. *Гельфанд И. М.* Лекции по линейной алгебре / И. М. Гельфанд. – Москва : Добросвет, 1998. – 320 с.
8. *Головина Л. И.* Линейная алгебра и некоторые ее приложения / Л. И. Головина. – Москва : Альянс, 2007. – 392 с.
9. *Икрамов Х. Д.* Задачник по линейной алгебре / Х. Д. Икрамов. – Санкт-Петербург : Лань, 2006. – 320 с.
10. *Ильин В. А.* Линейная алгебра / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – Москва : Физматлит, 2005. – 280 с.
11. *Козак А. В.* Линейная алгебра / А. В. Козак, В. С. Пилиди. – Москва : Вузовская книга, 2001. – 216 с.
12. *Милованов М. В.* Алгебра и аналитическая геометрия. В 2 ч. / М. В. Милованов, Р. И. Тышкевич, А. С. Феденко. – Минск : Амалфея, 2001. – 2 ч.
13. *Проскуряков И. В.* Сборник задач по линейной алгебре / И. В. Проскуряков. – Санкт-Петербург : Лань, 2010. – 480 с.
14. *Розенфельд Б. А.* Многомерные пространства / Б. А. Розенфельд. – Москва : Наука, 1966. – 648 с.
15. *Рубан П. И.* Руководство к решению задач по аналитической геометрии / П. И. Рубан, Е. Е. Гармаш. – Москва : Высшая школа, 1963. – 314 с.



16. Сборник задач по алгебре и аналитической геометрии / под ред. А. С. Феденко. – Минск : Універсітэцкае, 1999. – 302 с.
17. Сборник задач по геометрии и алгебре / под ред. В. М. Ширяева. – Минск : Універсітэцкае, 1999. – 383 с.
18. *Фадеев Д. К.* Задачи по высшей алгебре / Д. К. Фадеев, И. С. Соминский. – Санкт-Петербург : Лань, 1998. – 288 с.
19. *Федорчук В. В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / В. В. Федорчук. – Москва : НЦ ЭНАС, 2001. – 328 с.
20. *Хорн Р.* Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон. – Москва : Мир, 1989. – 655 с.
21. *Шевцов Г. С.* Линейная алгебра / Г. С. Шевцов. – Москва : Гардарики, 1999. – 360 с.
22. *Шилов Г. Е.* Математический анализ : конечномерные линейные пространства / Г. Е. Шилов. – Москва : Наука, 1969. – 432 с.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Алгебраическое дополнение 31
Аргумент комплексного числа 12
Арифметическое пространство 45
Асимптоты гиперболы 203
Аффинное пространство, связанное
с линейным пространством 171

Б

База системы векторов 52
Базис 56

- жорданов 230
- корневой 230
- Жордана 230

Билинейная форма 103
– симметричная 103
– кососимметричная 110

В

Вектор нормированный 85
– корневой 230
– нормали плоскости 185
– присоединенный первого порядка 230
– присоединенный второго порядка 230
– столбец 17
– строка 17
– образа 125
– прообраза 125

Векторное пространство 41
Векторы 41

– коллинеарные 47

– ортогональные 85

Вершина гиперболы 203

– параболы 205

– эллипса 201

Г

Главное значение аргумента 12

Грама–Шмидта процесс ортогонализа-
ции 86

Гипербола 202

Гиперболоид двуполостный 214

– однополостный 214

Гиперплоскость 184

Д

Действительная часть комплексного
числа 12

Директриса гиперболы 204

– параболы 204

– эллипса 202

Длина вектора 85

Дополнительный минор 31

Е

Евклидово пространство 81

З

Закон инерции 113

И

Инварианты кривой второго порядка 199



– поверхности второго порядка 217
Инверсия 24

К

Квадратичная форма 104
– знакопеременная 113
– отрицательно определенная 113
– положительно определенная 113
Квадратичной формы 104
– канонический базис 105
– вид 105
Клетка Жордана 230
Комплексное число 11
– алгебраическая форма 12
– тригонометрическая форма 12
Комплексно-сопряженные числа 12
Компоненты матрицы 248
Конус 214
– мнимый 214
Координаты вектора 57
Координаты точки в аффинной системе координат 172
Коши-Буняковского неравенство 81, 98
Кривая второго порядка 198
Критерий подобия матриц 237
Критерий простоты структуры оператора 145
Кронекера–Капелли теорема 76
– символ 40

Л

Лагранжа метод 107
Лапласа теорема 31
Линейная комбинация 47
– оболочка 52
Линейное пространство 41
– действительное 42
– комплексное 42
– конечномерное 57
Линейные пространства изоморфные 57

Линия второго порядка 198

М

Матриц произведение 19
– разность 18
– сумма 18
Матрица билинейной формы 104
– верхняя треугольная 25
– действительная 17
– дефектная 232
– диагональная 18
– единичная 18
– квадратная 17
– квазидиагональная 74
– квазитреугольная 74
– комплексная 17
– кососимметричная 69
– невырожденная 36
– неотрицательная 150
– нижняя треугольная 25
– нормальная 151
– нулевая 17
– обратная 36
– ортогональная 39, 152
– перехода 104
– полиномиальная 236
– положительная 150
– приводящая 232
– простой структуры 147
– прямоугольная 17
– симметричная 39, 151
– сопряженная 149
– стохастическая 143
– транспонированная 18
– трансформирующая 232
– унитарная 150
– эрмитова 149
– λ -матрица 236
Матрицы вековое уравнение 139



- главная диагональ 18
- жорданова нормальная форма 231
- каноническое разложение 145
- нормальная диагональная форма 237
- определитель 23
- перестановочные 19
- подобные 131
- равные 17
- след 105
- характеристический многочлен 139
- характеристическое уравнение 139
- эквивалентные 131, 236
- элементарные преобразования 236
- элементы 17

Минковского неравенство 85

Минор 30

Мнимая единица 12

- часть комплексного числа 12

Многочлен аннулирующий матрицы 238

- интерполяционный Лагранжа –
Сильвестра 245
- минимальный матрицы 238

Модуль комплексного числа 12

Н

Направляющее подпространство
 m -плоскости 184

Направляющие векторы гиперплос-
кости 185

Начало аффинной системы координат 171

Норма вектора 85

Нормированное пространство 85

О

Оператор дифференцирования 123

- единичный 119
- линейный 117
- невырожденный 132
- неотрицательный 150
- нормальный 151

– нулевой 118

– обратный 132

– ортогональный 152

– отражения 122

– проектирования 122

– простой структуры 144

– положительно определенный 152

– разностный 130

– самосопряженный 149

– симметричный 151

– сопряженный 149

– тождественный 119

– унитарный 150

– эрмитов 149

Оператора вековое уравнение 139

– дефект 126

– матрица 118

– область значений 125

– образ 125

– ранг 125

– собственное значение 138

– – подпространство 139

– собственный вектор 138

– спектр 139

– характеристический многочлен 139

– характеристическое уравнение 139

– эрмитово разложение 165

– ядро 126

Операторов произведение 131

– сумма 117

Операторы перестановочные 162

– равные 117

Ортогональная проекция вектора
на подпространство 93

Ортогональное дополнение 93

Ортогональные подпространства 92

Основной прямоугольник гиперболы 203

Ось гиперболы 203

– параболы 205

– эллипса 201



П

Парабола 204
Параболоид гиперболический 215
– эллиптический 215
Параметр параболы 205
Пересечение подпространств 64
Перпендикуляр 93
Пифагора теорема 85
Плоскость в n -мерном аффинном пространстве 184
– m -мерная в аффинном пространстве 184
Поверхность второго порядка 214
Подпространство 64
– корневое 229
– циклическое 230
– дополнительное 70
Поле 14
Полуось гиперболы 203
– эллипса большая 201
– эллипса малая 201
Преобразование линейное 117
Признак простой структуры оператора 146
Произведение матрицы на число 18
Произведение оператора на число 117
Прямая в n -мерном аффинном пространстве 172

Р

Разложение определителя по столцу 32
– строке 31
Размерность пространства 57
Ранг матрицы 71
– системы векторов 52
Расстояние между двумя параллельными плоскостями 186
– скрещивающимися прямыми 174
– от точки до плоскости 186
– от точки до прямой 173
Репер в аффинном пространстве 171

С

Сильвестра критерий 113
Система векторов 47
– линейно зависима 47
– независима 47
– нормированная 85
– ортогональная 85
– ортонормированная 86
Система координат в аффинном пространстве 171
– прямоугольная 171
Система линейных алгебраических уравнений крамеровская 36
– неоднородная 76
– однородная 71
Скалярное произведение 81, 98
Собственного значения кратность алгебраическая 139
– геометрическая 143
Сумма подпространств 64
– ортогональная 93
– прямая 64

Т

Треугольника неравенство 85

У

Угол между векторами 85
– между двумя плоскостями 186
– между двумя прямыми 173
Уравнение гиперболы каноническое 203
– параболы каноническое 204
– плоскости векторное по точке и вектору нормали 185
– координатное по точке и вектору нормали 185
– общее 185
– m -плоскости параметрическое в векторной форме 184
– в координатной форме 184



- прямой каноническое 173
- параметрическое в векторной форме 172
- в координатной форме 172
- эллипса каноническое 201
- Унитарное пространство 98
- Уравнения канонические поверхностей второго порядка 214
 - кривых второго порядка 198

Ф

- Фокальные радиусы точек гиперболы 204
 - эллипса 202
- Фокус гиперболы 202
 - параболы 204
 - эллипса 200
- Формулы Крамера 36
 - основная для функции от матрицы 247
- Фундаментальная система решений 71
- Функция от матрицы 245

Ц

- Центр гиперболы 203
 - эллипса 201
- Цепочка жорданова 230
- Цилиндр гиперболический 216
 - параболический 216
 - эллиптический 215
 - мнимый 216

Э

- Эквивалентные системы векторов 52
- Эксцентриситет гиперболы 203
 - эллипса 201
- Элементарные преобразования системы векторов 51
- Эллипс 200
 - мнимый 200
- Эллипсоид 214
 - мнимый 214

Я

- Якоби метод 111

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

**Денисов Владимир Иванович
Чубич Владимир Михайлович
Черникова Оксана Сергеевна**

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

ПРАКТИКУМ

Учебник

Редактор *И.Л. Кескевич*
Выпускающий редактор *И.П. Брованова*
Художественный редактор *А.В. Ладыжская*
Корректор *И.Е. Семенова*
Компьютерная верстка *Н.В. Гаврилова*

Подписано в печать 17.12.2018
Формат 70 × 100 1/16. Бумага офсетная
Уч.-изд. л. 24,83. Печ. л. 19,25
Тираж 3000 экз. (1-й з-д – 1–100 экз.)
Изд. № 97. Заказ № 220

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции
Издание соответствует коду 95 3000 ОК 005-93 (ОКП)

Издательство Новосибирского государственного
технического университета
630073, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20
Тел. (383) 346-31-87
E-mail: office@publish.nstu.ru

Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета
630073, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20