

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В. М. ЧУБИЧ

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

НОВОСИБИРСК
2026

УДК 512.64(075.8)
Ч-813

Рецензенты:

д-р физ.-мат. наук, профессор *С. В. Судоплатов*
канд. техн. наук *В. С. Карманов*

Работа подготовлена на кафедре
теоретической и прикладной информатики

Чубич В. М.

Ч-813 Линейная алгебра : учебное пособие / В. М. Чубич. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2026. – 115 с.

ISBN 978-5-7782-5545-6

Учебное пособие подготовлено по материалам лекций, читающихся автором в первом учебном семестре студентам факультета прикладной математики и информатики Новосибирского государственного технического университета.

Пособие включает в себя пять глав («Поля», «Матрицы и определители», «Линейные пространства», «Системы линейных алгебраических уравнений», «Евклидовы и унитарные пространства») и содержит многочисленные упражнения, выполнение которых призвано способствовать более глубокому восприятию изучаемого материала.

Пособие может быть полезно студентам технических специальностей высших учебных заведений с повышенной математической подготовкой.

УДК 512.64(075.8)

ISBN 978-5-7782-5545-6

© Чубич В. М., 2026
© Новосибирский государственный
технический университет, 2026

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	4
Указатель основных обозначений.....	5
Глава 1. Поля	7
§ 1.1. Определение поля. Свойства полей	7
§ 1.2. Поле комплексных чисел	12
Глава 2. Матрицы и определители	16
§ 2.1. Действия с матрицами.....	16
§ 2.2. Понятие определителя	26
§ 2.3. Основные свойства определителей.....	30
§ 2.4. Алгебраические дополнения и миноры. Теорема Лапласа	34
§ 2.5. Правило Крамера.....	40
§ 2.6. Обратные матрицы	43
Глава 3. Линейные пространства	49
§ 3.1. Определение линейного пространства. Свойства линейных пространств	49
§ 3.2. Линейные комбинации и линейные оболочки	54
§ 3.3. Линейная зависимость векторов	55
§ 3.4. Эквивалентные системы векторов	59
§ 3.5. Базис линейного пространства	63
§ 3.6. Изоморфизм линейных пространств.....	66
§ 3.7. Подпространства линейного пространства	68
Глава 4. Системы линейных алгебраических уравнений	75
§ 4.1. Линейная зависимость и системы линейных уравнений	75
§ 4.2. Ранг матрицы	76
§ 4.3. Нетривиальная совместность однородной системы линейных алгебраических уравнений	80
§ 4.4. Условие совместности неоднородной системы линейных алгебраических уравнений.....	81
§ 4.5. Общие решения однородной и неоднородной систем линейных алгебраических уравнений	83
Глава 5. Евклидовы и унитарные пространства	88
§ 5.1. Определение евклидова пространства.....	88
§ 5.2. Простейшие свойства евклидова пространства	90
§ 5.3. Ортонормированный базис евклидова пространства	94
§ 5.4. Свойства ортонормированного базиса евклидова пространства.....	97
§ 5.5. Разложение евклидова пространства на ортогональную сумму подпространства и его ортогонального дополнения	100
§ 5.6. Наклонная, перпендикуляр, проекция	102
§ 5.7. Изоморфизм евклидовых пространств	104
§ 5.8. Определение унитарного пространства.....	105
§ 5.9. Неравенство Коши – Буняковского. Понятие нормы	106
§ 5.10. Ортонормированный базис унитарного пространства и его свойства.....	108
Библиографический список.....	110
Предметный указатель.....	111

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее учебное пособие подготовлено на основе лекций, которые в течение последних двадцати пяти лет читались автором в первом учебном семестре студентам факультета прикладной математики и информатики Новосибирского государственного технического университета.

Учебное пособие включает в себя: указатель основных обозначений; разбитые на параграфы пять глав («Поля», «Матрицы и определители», «Линейные пространства», «Системы линейных алгебраических уравнений», «Евклидовы и унитарные пространства»); библиографический список и предметный указатель. Нумерация теорем и формул – сквозная в пределах каждого параграфа.

При изложении теоретического материала использованы соответствующие разделы из классических учебников и учебных пособий по линейной алгебре.

Каждая глава содержит множество упражнений, заимствованных из известных задачников. В одних случаях эти упражнения призваны способствовать иллюстрации и определенному развитию основного текста, в других – выработке необходимых технических навыков.

Автор будет признателен за любую информацию о замеченных опечатках и неточностях.

УКАЗАТЕЛЬ ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

F – поле (обычно R или C)

R – поле действительных чисел

C – поле комплексных чисел

$\operatorname{Re} z$ – действительная часть комплексного числа z

$\operatorname{Im} z$ – мнимая часть комплексного числа z

$|z|$ – модуль комплексного числа z

$\arg z$ – главное значение аргумента комплексного числа z

I – единичная матрица

$\det A, |A|$ – определитель матрицы A

$N(i_1, i_2, \dots, i_n)$ – число «беспорядков» в последовательности

$i_1, i_2, \dots, i_n$

A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента α_{ij} в определителе матрицы A

$m_{j_1, j_2, \dots, j_k}^{i_1, i_2, \dots, i_k}$ – минор k -го порядка, образованный строками

и столбцами с номерами $i_1, i_2, \dots, i_k$ и $j_1, j_2, \dots, j_k$ соответственно

$M_{j_1, j_2, \dots, j_k}^{i_1, i_2, \dots, i_k}$ – дополнительный минор к минору $m_{j_1, j_2, \dots, j_k}^{i_1, i_2, \dots, i_k}$

A^T – транспонированная матрица для матрицы A

A^{-1} – матрица, обратная для матрицы A

$A^\#$ – матрица, присоединенная к матрице A

$\bar{A}$ – матрица, комплексно-сопряженная с матрицей A

$\text{rg } A$ – ранг матрицы A

$\text{tr } A$ – след матрицы A

$A \otimes B$ – кронекерово произведение матриц A и B

L – линейное (векторное) пространство над полем F

F_n – линейное пространство над полем F , состоящее из n -членных наборов с компонентами из F

R_n – действительное арифметическое пространство

C_n – комплексное арифметическое пространство

$\dim L$ – размерность линейного пространства L

$L(e_1, e_2, \dots, e_n)$ – линейная оболочка системы векторов $e_1, e_2, \dots, e_n$

L' – подпространство линейного пространства L

$L_1 + L_2$ – сумма подпространств L_1 и L_2

$L_1 \dot{+} L_2$ – прямая сумма подпространств L_1 и L_2

$L_1 \oplus L_2$ – ортогональная сумма подпространств L_1 и L_2

$L_1 \cap L_2$ – пересечение подпространств L_1 и L_2

(x, y) – скалярное произведение векторов x и y

E – евклидово пространство

$\|x\|$ – норма вектора x

$G^\perp$ – ортогональное дополнение множества G

δ_{ij} – символ Кронекера

U – унитарное пространство

Глава 1

ПОЛЯ

§ 1.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛЯ. СВОЙСТВА ПОЛЕЙ

Полем называется множество F элементов, для которых определены две алгебраические операции – сложение и умножение (так что сумма $\alpha + \beta$ и произведение $\alpha\beta$ двух элементов $\alpha, \beta \in F$ снова принадлежат F), причем выполнены следующие аксиомы:

- А. 1°. $\alpha + \beta = \beta + \alpha \quad \forall \alpha, \beta \in F$ (коммутативность сложения);
2°. $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma) \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in F$ (ассоциативность сложения);
3°. Существует нулевой элемент $\theta \in F$ такой, что $\alpha + \theta = \alpha \quad \forall \alpha \in F$;
4°. $\forall \alpha \in F$ существует противоположный элемент $(-\alpha) \in F$ такой, что $\alpha + (-\alpha) = \theta$;
- Б. 5°. $\alpha\beta = \beta\alpha \quad \forall \alpha, \beta \in F$ (коммутативность умножения);
6°. $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma) \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in F$ (ассоциативность умножения);
7°. Существует единичный элемент $1 \in F$ такой, что $1\alpha = \alpha \quad \forall \alpha \in F$;
- 8°. Для любого отличного от нулевого элемента $\alpha \in F$ существует обратный элемент $\alpha^{-1} \in F$ такой, что $\alpha\alpha^{-1} = 1$.
- В. 9°. $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in F$ (умножение дистрибутивно относительно сложения).

Элементы поля называются **числами**.

Из аксиом $1^\circ - 9^\circ$ можно вывести следующие свойства полей.

1. В поле F существует единственный нулевой элемент.

Доказательство. Предположим, что это не так и в F имеются два нулевых элемента θ_1 и θ_2 . Тогда, используя аксиомы 1° и 3° , получаем

$$\theta_1 = \theta_1 + \theta_2 = \theta_2 + \theta_1 = \theta_2. \quad \blacksquare$$

2. В поле F для каждого элемента α существует единственный противоположный элемент $(-\alpha)$.

Доказательство. Предположим, что для элемента α нашлось два противоположных элемента $(-\alpha)_1$ и $(-\alpha)_2$. Тогда по аксиомам $1^\circ - 3^\circ$ имеем

$$\begin{aligned} (-\alpha)_2 &= (-\alpha)_2 + \theta = (-\alpha)_2 + (\alpha + (-\alpha)_1) = ((-\alpha)_2 + \alpha) + (-\alpha)_1 = \\ &= (\alpha + (-\alpha)_2) + (-\alpha)_1 = \theta + (-\alpha)_1 = (-\alpha)_1 + \theta = (-\alpha)_1. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Будем записывать сумму $\alpha + (-\beta)$ в виде $\alpha - \beta$ — и называть ее разностью α и β .

3. Элемент, противоположный сумме, есть сумма элементов, противоположных каждому слагаемому:

$$-(\alpha + \beta) = (-\alpha) + (-\beta).$$

Доказательство. Применяя аксиомы $1^\circ - 4^\circ$, получаем

$$\begin{aligned} ((-\alpha) + (-\beta)) + (\alpha + \beta) &= ((-\beta) + (-\alpha)) + (\alpha + \beta) = \\ &= (-\beta) + ((-\alpha) + (\alpha + \beta)) = (-\beta) + (((-\alpha) + \alpha) + \beta) = \\ &= (-\beta) + ((\alpha + (-\alpha)) + \beta) = (-\beta) + (\theta + \beta) = \\ &= ((-\beta) + \theta) + \beta = (-\beta) + \beta = \beta + (-\beta) = \theta. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

4. Уравнение

$$\alpha + \chi = \beta$$

имеет в F единственное решение, равное $\beta - \alpha$.

Доказательство. Действительно, прибавляя к обеим частям последнего равенства число $(-\alpha)$, находим, используя аксиомы $1^\circ - 4^\circ$:

$$\begin{aligned}(\alpha + \chi) + (-\alpha) &= (\chi + \alpha) + (-\alpha) = \chi + (\alpha + (-\alpha)) = \\ &= \chi + \theta = \chi + \beta + (-\alpha) = \beta - \alpha,\end{aligned}$$

так что если решение существует, то оно равно $\beta - \alpha$. Однако $\beta - \alpha$ есть решение, поскольку

$$\begin{aligned}\alpha + (\beta - \alpha) &= \alpha + (\beta + (-\alpha)) = \alpha + ((-\alpha) + \beta) = (\alpha + (-\alpha)) + \beta = \\ &= \theta + \beta = \beta + \theta = \beta.\end{aligned}$$

■

5. В поле F существует единственный единичный элемент.

Доказательство. Предположим, что в F имеются два единичных элемента 1_1 и 1_2 . Тогда, используя аксиомы 5° и 7° , получаем

$$1_1 = 1_2 1_1 = 1_1 1_2 = 1_2.$$

■

6. В поле F для каждого элемента $\alpha \neq \theta$ существует единственный обратный элемент.

Доказательство. Предположим, что для ненулевого элемента α имеются два обратных элемента $(\alpha^{-1})_1$ и $(\alpha^{-1})_2$, так что $\alpha(\alpha^{-1})_1 = 1$ и $\alpha(\alpha^{-1})_2 = 1$. Тогда по аксиомам $5^\circ - 8^\circ$ имеем

$$\begin{aligned}(\alpha^{-1})_2 &= 1(\alpha^{-1})_2 = (\alpha(\alpha^{-1})_1)(\alpha^{-1})_2 = \alpha((\alpha^{-1})_1(\alpha^{-1})_2) = \\ &= \alpha((\alpha^{-1})_2(\alpha^{-1})_1) = (\alpha(\alpha^{-1})_2)(\alpha^{-1})_1 = 1(\alpha^{-1})_1 = (\alpha^{-1})_1.\end{aligned}$$

■

7. Элемент, обратный к произведению $\alpha\beta$, равен произведению элементов, обратных к α и β :

$$(\alpha\beta)^{-1} = \alpha^{-1}\beta^{-1}.$$

Доказательство. Применяя аксиомы $5^\circ - 8^\circ$, получаем

$$\begin{aligned} (\alpha\beta)\alpha^{-1}\beta^{-1} &= ((\alpha\beta)\alpha^{-1})\beta^{-1} = ((\beta\alpha)\alpha^{-1})\beta^{-1} = \\ &= (\beta(\alpha\alpha^{-1}))\beta^{-1} = (\beta 1)\beta^{-1} = (1\beta)\beta^{-1} = \beta\beta^{-1} = 1. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Произведение $\alpha\beta^{-1}$ записывается в виде $\frac{\alpha}{\beta}$ и называется отношением (частным α и β).

8. Уравнение

$$\alpha\chi = \beta \quad (\alpha \neq \theta)$$

имеет в F единственное решение, равное $\frac{\beta}{\alpha}$.

Доказательство. Действительно, умножая обе части последнего равенства на α^{-1} , находим, используя аксиомы $1^\circ - 4^\circ$:

$$\alpha^{-1}(\alpha\chi) = (\alpha^{-1}\alpha)\chi = (\alpha\alpha^{-1})\chi = 1\chi = \chi = \alpha^{-1}\beta = \frac{\beta}{\alpha},$$

так, что если решение существует, то оно равно $\frac{\beta}{\alpha}$. Однако $\frac{\beta}{\alpha}$ есть решение, поскольку

$$\alpha \frac{\beta}{\alpha} = \alpha(\alpha^{-1}\beta) = (\alpha\alpha^{-1})\beta = 1\beta = \beta. \quad \blacksquare$$

9. Для любого $\alpha \in F$ имеет место равенство

$$\theta\alpha = \theta.$$

Доказательство. Действительно,

$$\theta\alpha + 1\alpha = (\theta + 1)\alpha = (1 + \theta)\alpha = 1\alpha = \alpha,$$

$$\theta\alpha + 1\alpha = \theta\alpha + \alpha,$$

откуда

$$\theta\alpha + \alpha = \alpha;$$

в силу свойства 4

$$\theta\alpha = \alpha - \alpha = \theta.$$

■

Отсюда следует, что θ не имеет обратного элемента, поскольку равенство

$$\theta\alpha = 1$$

невозможно. Это согласуется со школьным правилом, в соответствии с которым на нуль делить нельзя.

10. Для любого $\alpha \in F$

$$-\alpha = (-1)\alpha.$$

Доказательство. В силу свойства 9 имеем

$$(-1)\alpha + \alpha = (-1)\alpha + 1\alpha = ((-1) + 1)\alpha = \theta\alpha = \theta.$$

■

ПРИМЕРЫ ПОЛЕЙ

1. Множество Q рациональных чисел, т. е. отношений $\frac{p}{q}$, где p и $q \neq 0$ — целые числа с обычными арифметическими правилами действий (заметим, что одни только целые числа не образуют поле, так как не выполнена аксиома 8°).

2. Множество R действительных чисел.

3. Множество C комплексных чисел.

§ 1.2. ПОЛЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Комплексным числом называется выражение вида $a + bi$ (или, что то же самое, $a + ib$), где a и b — любые действительные числа, а i — некоторый новый символ. Это — так называемая **алгебраическая форма** записи комплексного числа. По определению $a + bi = c + di$ в том и только в том случае, когда $a = c$ и $b = d$. По определению:

$$a - bi = a + (-bi);$$

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i;$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i.$$

Легко видеть, что так определенные сложение и умножение комплексных чисел коммутативны и ассоциативны (проверьте это!). Комплексное число $0 + 0i$ можно обозначать просто через 0 . Для любого комплексного числа $z = a + bi$ имеем

$$z + 0 = (a + bi) + (0 + 0i) = (a + 0) + (b + 0)i = a + bi = z.$$

Комплексное число $-z = (-a) + (-b)i$ будет **противоположным** z , так как

$$z + (-z) = (a + bi) + [(-a) + (-b)i] = 0.$$

Комплексное число $1 + 0i$ обозначим просто 1 . Для любого комплексного числа $z = a + bi$ произведение $1z$ равно z , так как

$$1z = (1 + 0i)(a + bi) = (1a - 0b) + (1b + 0a)i = z.$$

Для каждого комплексного числа $z = a + bi \neq 0$ существует **обратное** ему число $z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$, умножение которого на z дает 1 :

$$zz^{-1} = (a + bi) \left(\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i \right) = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} + \frac{ba - ab}{a^2 + b^2}i = 1.$$

Наконец, сложение и умножение комплексных чисел связаны дистрибутивным законом – это легко проверяется непосредственно.

Заметим, что

$$(0 + i)(0 + i) = -1 + 0i = -1.$$

Число $0 + i$ можно обозначить просто i . При этом $i^2 = ii = -1$.

Любое комплексное число

$$z = a + bi = (a + 0i) + (0 + bi) = a + b(0 + i)$$

можно рассматривать как сумму вещественного числа a и умножение вещественного числа b на i . При этом числа a и b называются соответственно **вещественной и мнимой частью комплексного числа z** .

Пишут $a = \operatorname{Re} z$ и $b = \operatorname{Im} z$.

Число $\bar{z} = a - bi$ называется **комплексно-сопряженным** к $z = a + bi$. Легко видеть, что

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}; \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2}$$

и что

$$\bar{\bar{z}} = z$$

в том и только в том случае, когда z вещественно (проверьте это!). Заметим, что сумма

$$z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a$$

и произведение

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$$

комплексно-сопряженных чисел действительны.

Вычитание и деление комплексных чисел, записанных в алгебраической форме, выполняется по следующим формулам:

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i;$$

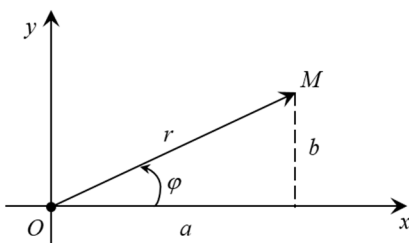
$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i.$$

Комплексные числа удобно изображать векторами на плоскости. Комплексному числу $a + bi$ отвечает вектор $\overrightarrow{OM}$, где M – точка с координатами (a, b) в прямоугольной декартовой системе координат (см. рисунок).

Пусть вектор $\overrightarrow{OM}$ представляет комплексное число $z = a + bi$. Тогда угол $\varphi = \angle xOM$ называют **аргументом** числа z и обозначают $\arg z$ (этот угол определен с точностью до кратного 2π), а $r = |\overrightarrow{OM}|$ – его **модулем** (обозначают $|z|$). Таким образом, r и φ – это просто полярные координаты точки M . Поскольку $a = r \cos \varphi$, $b = r \sin \varphi$,

$$a + bi = r \cos \varphi + r \sin \varphi i = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

– это так называемая **тригонометрическая форма** записи комплексного числа. При этом очевидно, что $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos \varphi = \frac{a}{r}$, $\sin \varphi = \frac{b}{r}$.



Вычислим произведение двух комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме. Пусть

$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2).$$

Тогда

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2)] = \\ &= r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \end{aligned}$$

Таким образом, *при перемножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.*

Аналогично показывается, что *при делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются.*

Если $z = a + bi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, то комплексно-сопряженное число

$$\bar{z} = r(\cos \varphi - i \sin \varphi) = r[\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)]$$

имеет тот же модуль r и противоположный аргумент $(-\varphi)$. Произведение $z\bar{z} = r^2$ и, значит, модуль r комплексного числа z равен $\sqrt{z\bar{z}}$.

Упражнения

1. Укажите на плоскости множества точек, изображающие комплексные числа и удовлетворяющие следующим неравенствам:

а) $|z + i| > 1$;

б) $|z - i| + |z + i| < 4$;

в) $\operatorname{Re} \frac{1}{z} < \frac{1}{2}$.

2. Опишите с помощью неравенства следующие множества точек:

а) полосу, состоящую из точек, находящихся на расстоянии, меньшем единицы от мнимой оси;

б) полукруг радиуса единица с открытой границей с центром в начале координат, расположенный слева от мнимой оси.

Глава 2

МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

§ 2.1. ДЕЙСТВИЯ С МАТРИЦАМИ

Совокупность чисел из поля F , расположенная в виде прямоугольной таблицы, содержащей m строк и n столбцов, называется $m \times n$ -матрицей. Для того чтобы записать матрицу, выписывают в соответствующем порядке обозначения ее элементов и получившуюся таблицу заключают в скобки или ограничивают двойными чертами. Таким образом, общий вид $m \times n$ -матрицы будет

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}, \left\| \begin{array}{cccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{array} \right\|,$$

где α_{ij} — обозначения элементов из F . Часто вместо такой подробной записи употребляют сокращенную: (α_{ij}) , $[\alpha_{ij}]$, $\|\alpha_{ij}\|$ соответственно.

Если число строк матрицы равно числу ее столбцов, то матрица называется **квадратной**, а число ее строк, равное числу столбцов, называется **порядком** квадратной матрицы. В частности, квадратная матрица порядка 1 — это просто элемент из F .

Матрицу, имеющую только одну строку, называют просто **строкой**, а число ее элементов — **длиной строки**. В дальнейшем матрицы будут обозначаться большими буквами латинского алфавита.

Две матрицы называются **равными**, если числа строк и столбцов у них соответственно равны и если равны числа, стоящие на соответствующих местах этих матриц. Таким образом, одно равенство между $m \times n$ -матрицами равносильно системе mn -равенств между их элементами.

Перейдем к определению основных операций над матрицами.

Суммой двух матриц $A = [\alpha_{ij}]$ и $B = [\beta_{ij}]$ ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$) одних и тех же порядков m и n называется матрица $C = [\gamma_{ij}]$ ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$) тех же порядков m и n , элементы γ_{ij} которой равны

$$\gamma_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_{ij}, \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}). \quad (2.1.1)$$

Для обозначения суммы двух матриц используется запись $C = A + B$. Операция составления суммы матриц называется их **сложением**.

Из определения суммы матриц, а точнее из формулы (2.1.1), непосредственно вытекает, что операция сложения матриц обладает теми же свойствами, что и операция сложения чисел из поля F , а именно:

- 1) коммутативностью: $A + B = B + A$;
- 2) ассоциативностью: $(A + B) + C = A + (B + C)$.

Эти свойства позволяют не заботиться о порядке следования слагаемых матриц при сложении двух или большего числа матриц.

Произведением матрицы $A = [\alpha_{ij}]$ ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$) и числа λ из поля F называется матрица $B = [\beta_{ij}]$ ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$), элементы β_{ij} которой равны $\beta_{ij} = \lambda \alpha_{ij}$, ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$).

$$\beta_{ij} = \lambda \alpha_{ij}, \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}). \quad (2.1.2)$$

Для обозначения произведения матрицы и числа используется запись $B = \lambda A$. Операция составления произведения матрицы и числа называется **умножением матрицы на это число**.

Непосредственно из соотношения (2.1.2) вытекает, что операция умножения матрицы на число обладает следующими свойствами:

- 1) $(\lambda \mu)A = \lambda(\mu A)$;

2) дистрибутивностью относительно сложения матриц:

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B;$$

3) дистрибутивностью относительно сложения чисел:

$$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A.$$

Разностью двух матриц A и B одинаковых порядков m и n называется такая матрица C тех же порядков m и n , которая в сумме с матрицей B дает матрицу A . Для обозначения разности двух матриц используется запись $C = A - B$.

Несложно убедиться в том, что разность C двух матриц A и B может быть получена по правилу $C = A + (-I)B$.

Произведением матрицы $A = [\alpha_{ij}]$ ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$), имеющей порядки, равные m и n , и матрицы $B = [\beta_{ij}]$ ($i = \overline{1, n}; j = \overline{1, p}$), имеющей порядки, равные n и p , называется матрица $C = [\gamma_{ij}]$ ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, p}$), имеющая порядки, равные m и p , и элементы γ_{ij} , определяемые формулой

$$\gamma_{ij} = \alpha_{i1}\beta_{1j} + \alpha_{i2}\beta_{2j} + \dots + \alpha_{in}\beta_{nj} = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik}\beta_{kj}, \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, p}). \quad (2.1.3)$$

Для обозначения произведения матрицы A и матрицы B используется запись $C = AB$. Операция составления произведения матрицы A и матрицы B называется **перемножением** этих матриц.

Правило умножения матриц можно сформулировать следующим образом: **для того чтобы получить элемент, стоящий в i -й строке и j -м столбце произведения двух матриц, необходимо элементы i -й строки первой матрицы умножить на соответствующие элементы j -го столбца второй матрицы и сложить полученные произведения.**

Из формулы (2.1.3) вытекают следующие свойства произведения матрицы A и матрицы B :

1) ассоциативность: $(AB)C = A(BC)$;

2) дистрибутивность относительно сложения матриц:

$$(A + B)C = AC + BC \text{ и } A(B + C) = AB + AC.$$

Вопрос о коммутативности произведения матрицы A и матрицы B имеет смысл ставить лишь для квадратных матриц одинакового порядка. Элементарные примеры показывают, что **произведение двух квадратных матриц одинакового порядка не обладает, вообще говоря, ком-**

мутативным свойством. Действительно, если положить $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ то } AB = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}, \text{ а } BA = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Среди квадратных матриц выделим класс так называемых **диагональных** матриц, у которых элементы, расположенные вне главной диагонали, равны нулю. Каждая диагональная матрица порядка n имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}, \quad (2.1.4)$$

где $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{nn}$ — какие угодно числа из поля F .

Сумма и произведение диагональных матриц будут снова диагональными матрицами:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \beta_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11}\beta_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_{22}\beta_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_{nn}\beta_{nn} \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \beta_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11}\beta_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_{22}\beta_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_{nn}\beta_{nn} \end{bmatrix}.$$

Среди всех диагональных матриц (2.1.4) с совпадающими элементами $\alpha_{11} = \alpha_{22} = \dots = \alpha_{nn} = \alpha$ особую важную роль играют две матрицы. Первая из этих матриц получается при $\alpha = 1$, называется **единичной матрицей** n -го порядка и обозначается символом I . Вторая матрица получается при $\alpha = 0$, называется **нулевой матрицей** n -го порядка и обозначается символом O . Таким образом,

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что

$$AI = IA = A, \quad AO = OA = O. \quad (2.1.5)$$

Первая из формул (2.1.5) характеризует особую роль единичной матрицы I , аналогичную той роли, которую играет число 1 при перемножении чисел. Что касается особой роли нулевой матрицы O , то ее выявляет не только вторая из формул (2.1.5), но и элементарно проверяемое равенство

$$A + O = O + A = A.$$

Отметим, что понятие нулевой матрицы можно также ввести и для неквадратных матриц (нулевой называют любую матрицу, все элементы которой равны нулю).

Матрицы A и B называются **перестановочными**, если $AB = BA$.

Рассмотрим произвольную квадратную матрицу A порядка n с элементами из поля F . По определению полагаем

$$A^0 = I, \quad A^1 = A, \quad A^2 = AA, \quad A^3 = AAA, \dots$$

Поскольку в произведениях нескольких матриц скобки можно расставлять произвольно, для любых неотрицательных m и k имеем

$$A^m A^k = A^{m+k} = A^{k+m} = A^k A^m,$$

т. е. степени одной и той же матрицы перестановочны между собой.

Рассмотрим многочлен $\varphi(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1\lambda + \dots + \alpha_m\lambda^m$ с коэффициентами $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ из поля F . Выражение

$$\varphi(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \dots + \alpha_m A^m,$$

где A – произвольная квадратная матрица, называется **многочленом от матрицы A** .

Если $\varphi(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1\lambda + \dots + \alpha_m\lambda^m$ и $\psi(\lambda) = \beta_0 + \beta_1\lambda + \dots + \beta_m\lambda^m$, то

$$f(\lambda) = \varphi(\lambda) + \psi(\lambda) = (\alpha_0 + \beta_0) + (\alpha_1 + \beta_1)\lambda + \dots + (\alpha_m + \beta_m)\lambda^m,$$

$$g(\lambda) = \varphi(\lambda)\psi(\lambda) = (\alpha_0\beta_0) + (\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0)\lambda + \dots + (\alpha_m\beta_m)\lambda^{2m},$$

и

$$f(A) = \varphi(A) + \psi(A), \quad g(A) = \varphi(A)\psi(A).$$

В силу того, что

$$\varphi(\lambda)\psi(\lambda) = \psi(\lambda)\varphi(\lambda),$$

отсюда получаем

$$\varphi(A)\psi(A) = \psi(A)\varphi(A).$$

Таким образом, **многочлены от одной и той же матрицы перестановочны между собой**.

Рассмотрим произвольную матрицу

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}.$$

Матрица

$$A^T = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix},$$

получающаяся из A заменой строк столбцами, называется **транспонированной** по отношению к матрице A .

Для произвольных матриц A, B имеют место следующие соотношения:

$$(\alpha A + \beta B)^T = \alpha A^T + \beta B^T; \quad (AB)^T = B^T A^T; \quad (A^T)^T = A,$$

где α, β – какие-либо числа.

Покажем, например, второе из этих равенств. Элемент, стоящий в i -й строке и j -м столбце матрицы $(AB)^T$, равен элементу, стоящему в j -й строке и i -м столбце матрицы AB , т. е. равен

$$\alpha_{j1}\beta_{1i} + \alpha_{j2}\beta_{2i} + \dots + \alpha_{jn}\beta_{ni},$$

где α_{ij}, β_{ij} – элементы матриц A, B . Однако это выражение есть сумма произведений элементов i -й строки матрицы B^T на соответствующие элементы j -го столбца матрицы A^T , так что $(AB)^T = B^T A^T$.

Если A – произвольная квадратная матрица и

$$A^T = A,$$

то A называется **симметричной**; если же

$$A^T = -A,$$

то – **кососимметричной**. Элементы, расположенные симметрично относительно главной диагонали, у симметричной матрицы равны, а у кососимметричной – противоположны. Все диагональные элементы симметричной матрицы равны нулю.

Из правила транспонирования суммы непосредственно вытекает, что сумма симметричных матриц есть матрица симметричная, а сумма кососимметричных – матрица кососимметричная. Произведение симметричных матриц может не быть симметричной матрицей, например:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}.$$

Однако если две симметричные матрицы A, B перестановочны, то их произведение будет снова симметричной матрицей. Действительно, в этом случае

$$(AB)^T = B^T A^T = BA = AB.$$

Отсюда следует, что степени симметричной матрицы являются симметричными матрицами и многочлены от симметричной матрицы — симметричные матрицы.

Рассмотрим еще одну матричную операцию. Пусть A — произвольная матрица, элементы которой являются комплексными числами. Заменим в A каждый элемент комплексно-сопряженным числом. Полученная таким способом новая матрица называется **комплексно-сопряженной** с A и обозначается $\bar{A}$. Можно показать, что

$$\overline{\alpha A + \beta B} = \bar{\alpha} \bar{A} + \bar{\beta} \bar{B}; \quad \overline{AB} = \bar{A} \bar{B}; \quad \overline{A^T} = (\bar{A})^T.$$

Матрицы A и $\bar{A}^T$ называются **эрмитово-сопряженными**. Если $A = \bar{A}^T$ (пишут $A = A^*$), то A называется **эрмитовой**.

Матрица A , удовлетворяющая соотношению

$$AA^* = A^*A = I,$$

называется **унитарной**.

Произведение унитарных матриц является унитарной матрицей.

Разобьем какую-либо матрицу A системой вертикальных и горизонтальных прямых на части. Эти части можно рассматривать как матрицы низших порядков, из которых сама матрица построена как из элементов. Они называются **клетками** или **блоками** матрицы A , а сама матрица A , разбитая определенным способом на клетки, называется соответственно **клеточной** или **блочной**. Одна и та же матрица может быть разбита на клетки различными способами.

Удобство разбиений на клетки состоит в том, что основные операции над клеточными матрицами совершаются по тем же правилам, как

и над обыкновенными. В самом деле, пусть некоторая матрица определенным способом разбита на клетки:

$$A = \begin{bmatrix} A^{11} & A^{12} & \dots & A^{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A^{m1} & A^{m2} & \dots & A^{mn} \end{bmatrix}.$$

Умножая все клетки на число α , мы умножим на α все элементы матрицы A . Следовательно,

$$\alpha A = \begin{bmatrix} \alpha A^{11} & \alpha A^{12} & \dots & \alpha A^{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha A^{m1} & \alpha A^{m2} & \dots & \alpha A^{mn} \end{bmatrix}.$$

Пусть B – какая-либо матрица, разбитая на такое же число клеток, что и A :

$$B = \begin{bmatrix} B^{11} & B^{12} & \dots & B^{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B^{m1} & B^{m2} & \dots & B^{mn} \end{bmatrix}.$$

Предположим также, что соответствующие клетки матриц A и B имеют равные числа строк и столбцов.

Для того чтобы сложить матрицы A и B , нужно, согласно определению, сложить их соответствующие элементы. То же самое произойдет, если мы сложим соответствующие клетки этих матриц. Поэтому

$$A + B = \begin{bmatrix} A^{11} + B^{11} & A^{12} + B^{12} & \dots & A^{1n} + B^{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A^{m1} + B^{m1} & A^{m2} + B^{m2} & \dots & A^{mn} + B^{mn} \end{bmatrix}.$$

Менее очевидно обстоит дело с умножением. Рассмотрим матрицы

$$A = \begin{bmatrix} A^{11} & A^{12} & \dots & A^{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A^{m1} & A^{m2} & \dots & A^{mn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B^{11} & B^{12} & \dots & B^{1p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B^{n1} & B^{n2} & \dots & B^{np} \end{bmatrix},$$

разбитые на клетки A^{ij} , B^{jk} таким образом, что число столбцов клетки A^{ij} равняется числу строк клетки B^{jk} ($i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n}$; $k = \overline{1, p}$). При этом условии выражения

$$C^{ik} = A^{i1}B^{1k} + A^{i2}B^{2k} + \dots + A^{in}B^{nk}$$

имеют смысл. Можно показать, что

$$AB = \begin{bmatrix} C^{11} & C^{12} & \dots & C^{1p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C^{m1} & C^{m2} & \dots & C^{mp} \end{bmatrix},$$

т. е. матрицы, разбитые надлежащим образом, можно перемножить обычным путем: **клетки произведения равны суммам произведений клеток A и клеток соответствующих столбцов B** .

Клеточная матрица вида

$$A = \begin{bmatrix} A^{11} & O & \dots & O \\ O & A^{22} & \dots & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & \dots & A^{nn} \end{bmatrix},$$

где A^{11} , A^{22} , ..., A^{nn} – квадратные клетки, называется **квазидиагональной** или **клеточно-диагональной**. Говорят также, что A распадается на части A^{11} , A^{22} , ..., A^{nn} .

Операции над распавшимися матрицами сводятся к операциям над их диагональными клетками. Отсюда следует, что если $\varphi(\lambda)$ – некоторый многочлен и A – клеточно-диагональная матрица с диагональными клетками A^{11} , A^{22} , ..., A^{nn} , то

$$\varphi(A) = \begin{bmatrix} \varphi(A^{11}) & O & \dots & O \\ O & \varphi(A^{22}) & \dots & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & \dots & \varphi(A^{nn}) \end{bmatrix}.$$

§ 2.2. ПОНЯТИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ

Пусть дана квадратная матрица A порядка n с элементами α_{ij} из поля F :

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}. \quad (2.2.1)$$

Рассмотрим любое произведение n элементов, расположенных в различных строках и различных столбцах матрицы (2.2.1), взятое по одному в каждой строке и в каждом столбце. Такое произведение можно записать в виде

$$\alpha_{i_1 1} \alpha_{i_2 2} \dots \alpha_{i_n n}. \quad (2.2.2)$$

Действительно, в качестве первого сомножителя мы всегда можем взять элемент, стоящий в первом столбце матрицы (2.2.1); если обозначить через i_1 номер строки, в которой находится этот элемент, то индексы этого элемента будут i_1 и 1. Аналогично в качестве второго сомножителя можно взять элемент, стоящий во втором столбце; его индексы будут i_2 и 2, где i_2 — номер той строки, в которой расположен этот второй элемент, и т.д. Таким образом, индексы $i_1, i_2, \dots, i_n$ являются номерами строк, в которых расположены сомножители произведения (2.2.2) в соответствии с принятым порядком их записи по возрастанию индексов столбцов.

Так как по условию элементы $\alpha_{i_1 1}, \alpha_{i_2 2}, \dots, \alpha_{i_n n}$ расположены в различных строках матрицы (2.2.1) по одному в каждой строке, то все числа $i_1, i_2, \dots, i_n$ различны и представляют собой некоторую перестановку чисел $1, 2, \dots, n$.

Назовем «**беспорядком**» в этой последовательности $i_1, i_2, \dots, i_n$ такое расположение индексов, когда старший индекс стоит раньше младшего. Число всех «беспорядков» обозначим через $N(i_1, i_2, \dots, i_n)$.

Например, в перестановке четырех цифр 2, 1, 4, 3 – два «беспорядка» (2 впереди 1, 4 впереди 3); таким образом, $N(2, 1, 4, 3) = 2$.

В перестановке 4, 3, 1, 2 – пять «беспорядков» (4 впереди 3, 4 впереди 1, 4 впереди 2, 3 впереди 1, 3 впереди 2); поэтому $N(4, 3, 1, 2) = 5$.

Если число «беспорядков» в последовательности $i_1, i_2, \dots, i_n$ четно, поставим перед произведением знак «+»; если это число нечетное, поставим перед этим произведением знак «-». Другими словами, условимся перед каждым произведением вида (2.2.2) писать знак, определяемый выражением

$$(-1)^{N(i_1, i_2, \dots, i_n)}.$$

Число всех произведений вида (2.2.2), которые можно составить из элементов матрицы n -го порядка, равно $n(n-1)(n-2) \dots 2 \cdot 1 = n!$.

Определителем матрицы (2.2.1) называется алгебраическая сумма, состоящая из $n!$ всевозможных произведений вида (2.2.2), перед каждым из которых поставлен знак, определенный по указанному выше правилу:

$$D = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n} (-1)^{N(i_1, i_2, \dots, i_n)} \alpha_{i_1 1} \alpha_{i_2 2} \dots \alpha_{i_n n}. \quad (2.2.3)$$

Определитель матрицы (2.2.1) обозначается одним из следующих способов:

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = |A| = \det A.$$

Например, для определителей второго и третьего порядка получаются следующие выражения:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12};$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} + \alpha_{21}\alpha_{32}\alpha_{13} + \alpha_{31}\alpha_{12}\alpha_{23} - \\ - \alpha_{31}\alpha_{22}\alpha_{13} - \alpha_{21}\alpha_{12}\alpha_{33} - \alpha_{11}\alpha_{32}\alpha_{23}. \quad (2.2.4)$$

Отметим, что хотя выражение (2.2.4) для определителя третьего порядка достаточно громоздкое, закон его составления является весьма простым. Действительно, один из трех членов определителя, входящих в выражение (2.2.4) со знаком «+», будет произведением элементов главной диагонали, каждый из двух других – произведением элементов, лежащих на параллели к этой диагонали, с добавлением третьего множителя из противоположного угла матрицы. Члены, входящие в (2.2.4) со знаком «–», строятся таким же образом, но относительно побочной диагонали. Мы получаем способ вычисления определителей третьего порядка, приводящий весьма быстро к результату. На рисунке слева схематически указано правило вычисления положительных членов определителя третьего порядка, справа – правило вычисления его отрицательных членов.

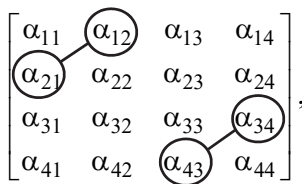


Правило для определения знака данного члена определителя можно сформулировать несколько иначе, в геометрических терминах.

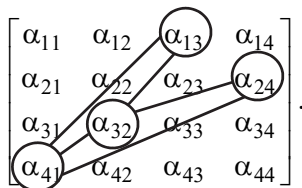
В матрице (2.2.1) в соответствии с нумерацией элементов естественно выделяются положительные направления: слева направо – вдоль строк, сверху вниз – вдоль столбцов. Вместе с этим и наклонные отрезки, соединяющие два каких-либо элемента матрицы, можно снабдить указанием направления: будем говорить, что отрезок, соединяющий элемент α_{ij} с элементом α_{km} , имеет *положительный наклон*, если его правый конец расположен ниже левого, и *отрицательный наклон*, если его правый конец лежит выше, чем левый. Проведем мысленно в матрице (2.2.1) все отрезки, соединяющие попарно элементы

$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_n}$ произведения (2.2.2) и при этом имеющие отрицательный наклон. Будем ставить перед произведением (2.2.2) знак «+», если число всех таких отрезков четно, и знак «-» – в противном случае.

Например, в случае определителя четвертого порядка перед произведением $\alpha_{21}\alpha_{12}\alpha_{43}\alpha_{34}$ должен быть поставлен знак «+», так как в определителе имеются два отрезка отрицательного наклона, соединяющих элементы этого произведения:



а перед произведением $\alpha_{41}\alpha_{32}\alpha_{13}\alpha_{24}$ должен быть поставлен знак «-», так как в определителе имеется пять отрезков с отрицательным наклоном, соединяющих его элементы:



В этих примерах количество отрезков отрицательного наклона, соединяющих элементы данного члена, равно числу «беспорядков» в расположении первых индексов элементов, составляющих в произведении указанный член: в первом примере последовательность первых индексов 2, 1, 4, 3 имеет два «беспорядка», во втором примере последовательность первых индексов 4, 3, 1, 2 имеет пять «беспорядков».

Покажем, что **второе определение знака члена определителя равносильно первому**. Для этого нужно показать, что число «беспорядков» в последовательности первых индексов элементов данного члена равно числу отрезков отрицательного наклона, соединяющих элементы указанного члена в определителе. Но это почти очевидно: наличие

отрезка отрицательного наклона, соединяющего элементы $\alpha_{i_j j}$ и $\alpha_{k_m m}$, означает при $j < m$, что $i_j > k_m$, т. е. наличие «беспорядка» в расположении первых индексов.

Упражнения

1. С каким знаком в определитель шестого порядка входят члены:
 - а) $\alpha_{23}\alpha_{31}\alpha_{42}\alpha_{56}\alpha_{14}\alpha_{65}$;
 - б) $\alpha_{32}\alpha_{43}\alpha_{14}\alpha_{51}\alpha_{66}\alpha_{25}$?
2. Выпишите все члены, входящие в состав определителя четвертого порядка со знаком «-» и содержащие множитель α_{23} .
3. Как изменится определитель с комплексными элементами, если каждый его элемент заменить сопряженным числом?
4. Покажите, что если в определителе n -го порядка более чем $(n^2 - n)$ элементов равны нулю, то сам определитель равен нулю.

§ 2.3. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

1. При транспонировании матрицы определитель не меняется (инвариантность определителя к транспонированию).

Доказательство. Очевидно, что определители

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

и $\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$ состоят из одних и тех же членов; поэтому нам

достаточно показать, что одинаковые члены обладают одинаковыми знаками. Очевидно, что транспонирование матрицы определителя есть результат ее поворота на 180° вокруг диагонали $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{nn}$.

При этом повороте каждый отрезок с отрицательным наклоном переходит снова в отрезок с отрицательным наклоном. Поэтому число отрезков с отрицательным наклоном, соединяющих элементы данного члена, после транспонирования не изменится; следовательно, не изменится и знак этого члена. Поскольку знаки всех членов сохраняются, величина определителя остается неизменной. ■

Доказанное свойство определителя устанавливает равноправие его строк и столбцов. Поэтому дальнейшие свойства определителей мы будем формулировать и доказывать только для столбцов.

2. Антисимметрия столбцов.

При перестановке местами двух любых столбцов определитель меняет знак на противоположный.

Под **антисимметрией столбцов** понимается свойство определителя **менять знак при перестановке двух столбцов.**

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда переставляются два соседних столбца определителя, например, j -й и $(j+1)$ -й. Определитель, полученный после перестановки столбцов, будет состоять, очевидно, из тех же самых членов, что и исходный определитель. Рассмотрим какой-нибудь из членов исходного определителя. Этот член имеет в своем составе элемент из j -го столбца и элемент из $(j+1)$ -го столбца. Если отрезок, соединяющий эти два элемента, имел отрицательный наклон, то после перестановки столбцов его наклон станет положительным и наоборот. Что же касается остальных отрезков, соединяющих попарно элементы выделенного члена, то после перестановки столбцов характер наклона каждого из них останется неизменным. Следовательно, количество отрезков с отрицательным наклоном, соединяющих элементы данного члена, при перестановке столбцов изменяется на единицу; поэтому каждый член определителя, а следовательно, и сам определитель при перестановке столбцов меняет знак.

Пусть теперь переставляются не соседние столбцы, а, например, j -й столбец с k -м столбцом, причем между ними находится t других столбцов и $j < k$. Эту перестановку можно выполнить последовательными перестановками соседних столбцов в следующем порядке: сначала j -й столбец переставляется с $(j+1)$ -м, далее с $(j+2)$ -м, $(j+3)$ -м, ...,

k -м, затем получившийся $(k-1)$ -й столбец (ранее бывший k -м) переставляется с $(k-2)$ -м, $(k-3)$ -м, ..., j -м. Всего понадобится $m+1+m = 2m+1$ перестановок соседних столбцов; после каждой из них, согласно доказанному, определитель изменяет знак и, следовательно, после окончания процесса будет иметь знак, противоположный начальному (поскольку $2m+1$ при любом целом m есть нечетное число). ■

3. Определитель, имеющий два одинаковых столбца, равен нулю.

Доказательство. Переставляя одинаковые столбцы, мы не изменяем определитель; с другой стороны, по свойству 2 он должен изменить свой знак, т. е. $D = -D$, откуда следует, что $D = 0$. ■

4. **Линейное свойство определителя** формулируется следующим образом: если все элементы j -го столбца определителя D представлены в виде «линейной комбинации» двух слагаемых

$$\alpha_{ij} = \lambda \beta_i + \mu \gamma_i \quad (i = \overline{1, n}),$$

где λ и μ – фиксированные числа из поля F , то определитель D равен такой же линейной комбинации двух определителей:

$$D = \lambda D_1 + \mu D_2, \quad (2.3.1)$$

причем у каждого из этих двух определителей все столбцы, кроме j -го, такие же, как у определителя D , а j -й столбец состоит у определителя D_1 из чисел β_i , у определителя D_2 – из чисел γ_i .

Доказательство. Действительно, всякий член определителя D можно представить в виде

$$\begin{aligned} \alpha_{i_1 1} \alpha_{i_2 2} \dots \alpha_{i_j j} \dots \alpha_{i_n n} &= \alpha_{i_1 1} \alpha_{i_2 2} \dots (\lambda \beta_{i_j} + \mu \gamma_{i_j}) \dots \alpha_{i_n n} = \\ &= \lambda \alpha_{i_1 1} \alpha_{i_2 2} \dots \beta_{i_j} \dots \alpha_{i_n n} + \mu \alpha_{i_1 1} \alpha_{i_2 2} \dots \gamma_{i_j} \dots \alpha_{i_n n}. \end{aligned}$$

Собирая вместе первые слагаемые (с теми знаками, которые имели соответствующие члены первого определителя) и вынося за скобки число λ , получаем в скобках определитель D_1 ; аналогично, собирая вторые слагаемые и вынося за скобки число μ , получаем определитель D_2 . Таким образом, формула (2.3.1) доказана. ■

Эту формулу удобнее записать в несколько ином виде. Пусть D – произвольный фиксированный определитель; обозначим через $D_j(\xi_i)$ определитель, который получается при замене элементов j -го столбца определителя D на числа ξ_i ($i = \overline{1, n}$). Исходный определитель можно записать в форме $D_j(\alpha_{ij})$. Тогда доказанное нами равенство (2.3.1) принимает вид

$$D_j(\lambda\beta_i + \mu\gamma_i) = \lambda D_j(\beta_i) + \mu D_j(\gamma_i). \quad (2.3.2)$$

5. Общий множитель всех элементов некоторого столбца определителя можно вынести за знак определителя.

Доказательство. Действительно, если $\alpha_{ij} = \lambda\beta_i$, то по формуле (2.3.2)

$$D_j(\alpha_{ij}) = D_j(\lambda\beta_i) = \lambda D_j(\beta_i),$$

что и требовалось доказать. ■

6. Если некоторый столбец определителя состоит целиком из нулей, то определитель равен нулю.

Доказательство. В самом деле, 0 есть общий множитель элементов данного столбца; вынося его за знак определителя, получаем

$$D_j(0) = D_j(0 \cdot 1) = 0 D_j(1) = 0. \quad \blacksquare$$

7. Определитель не изменится, если к элементам одного из его столбцов прибавить соответствующие элементы любого другого столбца, умноженные на фиксированное число.

Доказательство. Пусть к j -му столбцу прибавляется k -й ($k \neq j$), умноженный на число λ . В полученном определителе j -й столбец будет состоять из элементов вида $\alpha_{ij} + \lambda\alpha_{ik}$ ($i = \overline{1, n}$). В силу формулы (2.3.1)

$$D_j(\alpha_{ij} + \lambda\alpha_{ik}) = D_j(\alpha_{ij}) + \lambda D_j(\alpha_{ik}).$$

Во втором определителе j -й столбец состоит из элементов α_{ik} , т. е. совпадает с k -м столбцом. По свойству 3 $D_j(\alpha_{ik}) = 0$, откуда

$$D_j(\alpha_{ij} + \lambda\alpha_{ik}) = D_j(\alpha_{ij}),$$

что и требовалось доказать. ■

8. Все свойства, доказанные для столбцов определителя, остаются справедливыми и для его строк.

Упражнения

1. Вычислите определитель $\begin{vmatrix} am + bp & an + bq \\ cm + dp & cn + dq \end{vmatrix}$, разложив его на слагаемые.

2. Докажите, что произвольный определитель равен полусумме двух определителей, один из которых получен из исходного путем прибавления ко всем элементам i -й строки числа λ , а другой – путем прибавления ко всем элементам i -й строки числа $(-\lambda)$.

§ 2.4. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДОПОЛНЕНИЯ И МИНОРЫ. ТЕОРЕМА ЛАПЛАСА

Рассмотрим произвольный, например j -й, столбец определителя D . Пусть α_{ij} – некоторый элемент этого столбца. В правой части равенства (2.2.3)

$$D = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n} (-1)^{N(i_1, i_2, \dots, i_n)} \alpha_{i_1 1} \alpha_{i_2 2} \dots \alpha_{i_n n},$$

задающего определитель D , соберем все члены, содержащие элемент α_{ij} , заключим их в скобки и вынесем за эти скобки элемент α_{ij} . Величина, оставшаяся в скобках, обозначается через A_{ij} ; она называется **алгебраическим дополнением элемента α_{ij} в определителе D** .

Поскольку в каждый член определителя D входит элемент из j -го столбца, равенству (2.2.3) можно придать теперь вид

$$D = \alpha_{1j} A_{1j} + \alpha_{2j} A_{2j} + \dots + \alpha_{nj} A_{nj}. \quad (2.4.1)$$

Формула (2.4.1) называется **формулой разложения определителя D по элементам j -го столбца**.

Аналогично выводится формула разложения определителя по элементам i -й строки:

$$D = \alpha_{i1} A_{i1} + \alpha_{i2} A_{i2} + \dots + \alpha_{in} A_{in} . \quad (2.4.2)$$

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 2.4.1. Сумма всех произведений элементов какого-либо столбца (или строки) определителя D и соответствующих алгебраических дополнений равна самому определителю D .

Теорема 2.4.2. Сумма всех произведений элементов какого-либо столбца (или какой-нибудь строки) определителя D и алгебраических дополнений соответствующих элементов другого столбца (строки) равна нулю.

Доказательство. Заменим в левой и правой части равенства (2.4.1) элементы $\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \dots, \alpha_{nj}$ на соответствующие элементы какого-либо другого, например k -го, столбца. Тогда определитель слева в (2.4.1) будет иметь два одинаковых столбца и по свойству 3 определителя будет равен нулю. Мы получаем равенство (при $k \neq j$)

$$\alpha_{1k} A_{1j} + \alpha_{2k} A_{2j} + \dots + \alpha_{nk} A_{nj} = 0 .$$

Аналогично из формулы (2.4.2) при $k \neq i$ получаем

$$\alpha_{k1} A_{i1} + \alpha_{k2} A_{i2} + \dots + \alpha_{kn} A_{in} = 0 . \quad \blacksquare$$

Если зачеркнуть в матрице n -го порядка i -ю строку и j -й столбец, то оставшиеся элементы образуют некоторую матрицу $(n-1)$ -го порядка, определитель которой называется **минором** и обозначается через M_{ij} или $M_{ij}(D)$.

Теорема 2.4.3. Справедлива формула

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} . \quad (2.4.3)$$

Доказательство. Пусть $i=1, j=1$. Соберем в правой части равенства (2.2.3) все члены, содержащие α_{11} . Рассмотрим один из таких членов. Очевидно, что произведение всех его элементов, за исключением α_{11} , дает

некоторый член c минора M_{11} . Так как в определителе D нет отрезков с отрицательным наклоном, соединяющих элемент α_{11} с остальными элементами выделенного члена, то знак, который приписывается члену $\alpha_{11}c$ определителя D , совпадает со знаком, который приписывается члену c в миноре M_{11} . Выбирая должным образом член определителя D , содержащий элемент α_{11} , и зачеркивая α_{11} , можно получить любой член минора M_{11} . Поэтому рассматриваемая алгебраическая сумма всех членов определителя D , содержащих α_{11} , равна произведению $\alpha_{11}M_{11}$. С другой стороны, эта сумма равна произведению $\alpha_{11}A_{11}$. Следовательно, $A_{11} = M_{11}$, что и требуется.

Теперь мы докажем формулу (2.4.3) при любых i и j . То обстоятельство, что при $i = j = 1$ эта формула справедлива, будет нами существенно использовано. Рассмотрим элемент $\alpha_{ij} = \alpha$, расположенный на пересечении i -й строки и j -го столбца определителя D . Переставляя последовательно соседние строки и столбцы, мы можем перевести элемент α в левый верхний угол матрицы; для этого понадобится $i - 1 + j - 1 = i + j - 2$ перестановок. В результате мы получим определитель D_1 с теми же членами, какие будет иметь исходный определитель D , если его умножить на $(-1)^{i+j-2} = (-1)^{i+j}$. Минор $M_{11}(D_1)$ определителя D_1 , очевидно, совпадает с минором $M_{ij}(D)$ определителя D . По доказанному в определителе D_1 члены, содержащие элемент α , составляют в сумме величину $\alpha M_{11}(D_1)$. Поэтому в составе исходного определителя D члены, содержащие элемент $\alpha_{ij} = \alpha$, образуют в сумме величину

$$(-1)^{i+j} \alpha M_{11}(D_1) = (-1)^{i+j} \alpha_{ij} M_{ij}(D).$$

С другой стороны, эта же сумма равна произведению $\alpha_{ij}A_{ij}$; тем самым формула (2.4.3) доказана полностью. ■

Соотношения (2.4.1) и (2.4.2) можно теперь записать соответственно в форме

$$D = (-1)^{1+j} \alpha_{1j} M_{1j} + (-1)^{2+j} \alpha_{2j} M_{2j} + \dots + (-1)^{n+j} \alpha_{nj} M_{nj} ;$$

$$D = (-1)^{i+1} \alpha_{i1} M_{i1} + (-1)^{i+2} \alpha_{i2} M_{i2} + \dots + (-1)^{i+n} \alpha_{in} M_{in} ,$$

в которой они обычно и употребляются.

ПРИМЕРЫ

1. Определитель третьего порядка допускает шесть различных разложений (три по строкам и три по столбцам). В частности, разложение по первой строке имеет вид

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \alpha_{11} \begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} - \alpha_{12} \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + \alpha_{13} \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix} .$$

2. Определитель n -го порядка

$$D_n = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

называется **нижним треугольным**. Раскладывая его по элементам первой строки, получаем, что определитель D_n равен произведению элемента α_{11} и нижнего треугольного определителя $(n-1)$ -го порядка

$$D_{n-1} = \begin{vmatrix} \alpha_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} .$$

Определитель D_{n-1} снова разложим по первой строке, получим

$$D_{n-1} = \alpha_{22} D_{n-2} ,$$

где D_{n-2} – нижний треугольный определитель $(n-2)$ -го порядка. Продолжая таким образом, мы в конце концов получаем

$$D_n = \alpha_{11}\alpha_{22}\dots\alpha_{nn},$$

т. е. нижний треугольный определитель равен произведению элементов, стоящих на его главной диагонали.

Пусть в квадратной матрице n -го порядка выбраны k ($k \leq n$) произвольных строк и столбцов. Элементы, стоящие на пересечении этих строк и столбцов, образуют квадратную матрицу порядка k ; ее определитель называется **минором k -го порядка** и обозначается через

$$m_{j_1, j_2, \dots, j_k}^{i_1, i_2, \dots, i_k},$$

где $i_1, i_2, \dots, i_k$ – номера выделенных строк, а $j_1, j_2, \dots, j_k$ – номера выделенных столбцов.

Если зачеркнуть в исходной матрице выбранные строки и столбцы, то оставшиеся элементы образуют квадратную матрицу порядка $n-k$; ее определитель называется минором, **дополнительным** к минору $m_{j_1, j_2, \dots, j_k}^{i_1, i_2, \dots, i_k}$, и обозначается

$$M_{j_1, j_2, \dots, j_k}^{i_1, i_2, \dots, i_k},$$

где индексы указывают номера вычеркнутых строк и столбцов.

Зафиксируем в определителе D столбцы с номерами $j_1, j_2, \dots, j_k$.

Справедлива следующая

Теорема 2.4.4 (теорема Лапласа)

$$D = \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_k \\ (1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n)}} (-1)^{i+j} m_{j_1, j_2, \dots, j_k}^{i_1, i_2, \dots, i_k} M_{j_1, j_2, \dots, j_k}^{i_1, i_2, \dots, i_k}, \quad (2.4.4)$$

где $i = i_1 + i_2 + \dots + i_k$, $j = j_1 + j_2 + \dots + j_k$.

Доказательство не приводим.

Очевидно, что выражение (2.4.4) является обобщением формулы (2.4.1) разложения определителя по одному столбцу. Аналогичная формула справедлива для разложения определителя D по фиксированной системе строк.

Используя теорему Лапласа, можно доказать так называемое **мультипликативное свойство** определителя, заключающееся в том, что **определитель матрицы, равной произведению квадратной матрицы A и квадратной матрицы B , равен произведению определителей матриц A и B** , т. е.

$$\det(AB) = \det A \det B. \quad (2.4.5)$$

ПРИМЕР

Определитель вида

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1k} & \alpha_{1,k+1} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \dots & \alpha_{2k} & \alpha_{2,k+1} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{k1} & \dots & \alpha_{kk} & \alpha_{k,k+1} & \dots & \alpha_{kn} \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{k+1,k+1} & \dots & \alpha_{k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{n,k+1} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix},$$

все элементы которого, находящиеся в первых k столбцах и последних $n - k$ строках, равны нулю, называется **квазитреугольным**. Для его вычисления разложим определитель по первым k строкам с помощью теоремы Лапласа. В сумме (2.4.4) останется только одно слагаемое, и мы получим

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{k1} & \dots & \alpha_{kk} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_{k+1,k+1} & \dots & \alpha_{k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n,k+1} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}.$$

§ 2.5. ПРАВИЛО КРАМЕРА

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1, \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \dots + \alpha_{nn}x_n = \beta_n \end{cases} \quad (2.5.1)$$

с числом неизвестных, равным числу уравнений. Коэффициенты α_{ij} ($i = \overline{1, n}; j = \overline{1, n}$) образуют **основную матрицу системы**. Будем предполагать, что ее определитель D отличен от нуля. Покажем, что решение такой системы всегда существуют и единственно.

Предположим сначала, что система (2.5.1) имеет некоторое решение $c_1, c_2, \dots, c_n$, т. е. справедлива система равенств

$$\begin{cases} \alpha_{11}c_1 + \alpha_{12}c_2 + \dots + \alpha_{1n}c_n = \beta_1, \\ \alpha_{21}c_1 + \alpha_{22}c_2 + \dots + \alpha_{2n}c_n = \beta_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \alpha_{n1}c_1 + \alpha_{n2}c_2 + \dots + \alpha_{nn}c_n = \beta_n. \end{cases} \quad (2.5.2)$$

Умножим первое из равенств (2.5.2) на алгебраическое дополнение A_{11} к элементу α_{11} в основной матрице системы, далее умножим второе равенство на A_{21} , третье — на A_{31} и т. д., до тех пор, пока не дойдем до последнего равенства; затем все полученные равенства сложим. В результате мы получим следующее соотношение:

$$\begin{aligned} &(\alpha_{11}A_{11} + \alpha_{21}A_{21} + \dots + \alpha_{n1}A_{n1})c_1 + (\alpha_{12}A_{11} + \alpha_{22}A_{21} + \dots + \alpha_{n2}A_{n1})c_2 + \dots + \\ &+ (\alpha_{1n}A_{11} + \alpha_{2n}A_{21} + \dots + \alpha_{nn}A_{n1})c_n = \beta_1A_{11} + \beta_2A_{21} + \dots + \beta_nA_{n1}. \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

В силу теоремы 2.4.1 коэффициент при c_1 в соотношении (2.5.3) равен самому определителю D ; в силу теоремы 2.4.2 коэффициенты при всех остальных c_j ($j \neq 1$) обращаются в нуль. Выражение в правой части есть разложение определителя

$$D_1 = \begin{vmatrix} \beta_1 & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \beta_2 & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_n & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

по первому его столбцу; поэтому равенство (2.5.3) можно теперь записать в виде $Dc_1 = D_1$, откуда

$$c_1 = \frac{D_1}{D}.$$

Аналогично можно получить выражение

$$c_j = \frac{D_j}{D} \quad (j = \overline{1, n}), \quad (2.5.4)$$

где

$$D_j = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1,j-1} & \beta_1 & \alpha_{1,j+1} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2,j-1} & \beta_2 & \alpha_{2,j+1} & \dots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{n,j-1} & \beta_n & \alpha_{n,j+1} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = D_j(\beta_i)$$

есть определитель, полученный из определителя D заменой его j -го столбца на столбец из чисел $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$. Мы получили следующий результат:

Если решение системы (2.5.1) существует, то оно выражается через коэффициенты системы и правые части по формулам (2.5.4). В частности, мы получаем, что решение системы (2.5.1), если оно существует, единственно.

Теперь остается показать, что решение системы (2.5.1) всегда существует. Подставим величины

$$c_j = \frac{D_j}{D} \quad (j = \overline{1, n})$$

в систему (2.5.1) на место неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$. Покажем, что все уравнения системы (2.5.1) при этом обращаются в тождества. Действительно, для i -го уравнения мы получаем

$$\begin{aligned} \alpha_{i1}c_1 + \alpha_{i2}c_2 + \dots + \alpha_{in}c_n &= \alpha_{i1} \frac{D_1}{D} + \alpha_{i2} \frac{D_2}{D} + \dots + \alpha_{in} \frac{D_n}{D} = \\ &= \frac{1}{D} [\alpha_{i1}(\beta_1 A_{11} + \beta_2 A_{21} + \dots + \beta_n A_{n1}) + \alpha_{i2}(\beta_1 A_{12} + \beta_2 A_{22} + \dots + \beta_n A_{n2}) + \dots + \\ &+ \alpha_{in}(\beta_1 A_{1n} + \beta_2 A_{2n} + \dots + \beta_n A_{nn})] = \frac{1}{D} [\beta_1(\alpha_{i1} A_{11} + \alpha_{i2} A_{12} + \dots + \alpha_{in} A_{1n}) + \dots + \\ &+ \beta_i(\alpha_{i1} A_{i1} + \alpha_{i2} A_{i2} + \dots + \alpha_{in} A_{in}) + \dots + \beta_n(\alpha_{i1} A_{n1} + \alpha_{i2} A_{n2} + \dots + \alpha_{in} A_{nn})]. \end{aligned}$$

Из всех скобок, служащих коэффициентами при величинах $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, отлична от нуля в силу теорем 2.4.1 и 2.4.2 только одна, именно та, которая стоит при величине β_i ; она равна самому определителю D . Следовательно, полученное выражение приводится к виду

$$\frac{1}{D} \beta_i D = \beta_i,$$

т. е. совпадает с правой частью i -го уравнения системы.

Итак, величины c_j действительно образуют решение системы (2.5.1). Тем самым мы установили следующее правило (**правило Крамера**) для получения решения системы (2.5.1):

Если определитель системы (2.5.1) отличен от нуля, то она имеет одно и только одно решение: значение неизвестного x_j равно дроби, знаменателем которой является определитель системы (2.5.1), а числителем – определитель, получающийся заменой j -го столбца в определителе системы (2.5.1) на столбец из правых частей системы ($j = \overline{1, n}$).

§ 2.6. ОБРАТНЫЕ МАТРИЦЫ

Квадратная матрица A называется **обратимой**, если существует квадратная матрица X , удовлетворяющая равенствам

$$AX = XA = I. \quad (2.6.1)$$

Каждая матрица X , удовлетворяющая условиям (2.6.1), называется **обратной** по отношению к матрице A . У каждой обратимой матрицы A существует только одна обратная матрица. Действительно, если наряду с матрицей X условиям (2.6.1) удовлетворяет матрица Y , то, умножая обе части равенства

$$AY = I$$

слева на X , получаем

$$XAY = XI,$$

или

$$Y = X.$$

Обратная матрица к матрице A , если она существует, обозначается через A^{-1} . Таким образом, по определению

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I. \quad (2.6.2)$$

Из мультипликативного свойства определителя (2.4.5) следует, что

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

Заметим, что в условиях (2.6.1) матрицы A и X входят симметрично. Это означает, что если X есть обращение A , то A есть обращение X , иными словами,

$$(A^{-1})^{-1} = A. \quad (2.6.3)$$

Если квадратные матрицы A, B, C одного и того же порядка обратимы, то их произведение ABC также обратимо и

$$(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1},$$

т. е. **матрица, обратная к произведению матриц, равна произведению обратных матриц сомножителей, расположенных в обратном порядке.**

Для доказательства этого надо проверить лишь равенства

$$ABCC^{-1}B^{-1}A^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}ABC = I ,$$

являющиеся очевидными следствиями соотношений (2.6.2) и аналогичных соотношений для матриц B , C .

Для каждой обратимой матрицы A наряду с натуральными степенями рассматривают и ее целые отрицательные степени, полагая по определению

$$A^{-2} = A^{-1}A^{-1} , A^{-3} = A^{-1}A^{-1}A^{-1} , \dots \quad (2.6.4)$$

Из соотношений (2.6.2), (2.6.4) следует, что для любой обратимой матрицы A и любых целых (не обязательно положительных) чисел p , q имеют место обычные правила действия со степенями

$$A^p A^q = A^{p+q} , (A^p)^q = A^{pq} .$$

Рассмотрим, как связаны операции транспонирования и обращения. Применяя правило транспонирования произведения матриц к соотношениям (2.6.1), получаем

$$X^T A^T = A^T X^T = I ,$$

т. е. в результате транспонирования обратимой матрицы A получается снова обратимая матрица и

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T . \quad (2.6.5)$$

Квадратная матрица A называется **ортогональной**, если

$$AA^T = A^T A = I , \quad (2.6.6)$$

т. е. если транспонированная матрица обратна к исходной. Отсюда, в частности, следует, что **каждая ортогональная матрица обратима.**

Так как $(A^T)^T = A$, то из (2.6.6) вытекает, что **обращение ортогональной матрицы есть ортогональная матрица.**

Далее, если матрицы A, B ортогональны, то $A^T = A^{-1}$, $B^T = B^{-1}$ и, значит,

$$(AB)^T = B^T A^T = B^{-1} A^{-1} = (AB)^{-1}.$$

Иными словами, **произведение ортогональных матриц есть ортогональная матрица.**

Пусть дана квадратная матрица $A = [\alpha_{ij}]$ ($i = \overline{1, n}$; $j = \overline{1, n}$), определитель которой D не равен нулю (в таких случаях говорят, что матрица A **невырожденная**; если $D = 0$, матрицу A называют **вырожденной**).

Рассмотрим матрицу, составленную из алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы A :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

При ее транспонировании получается матрица $A^\#$, называемая **присоединенной** к матрице A :

$$A^\# = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Перемножая данную матрицу A и матрицу $A^\#$, на основании теорем 2.4.1 и 2.4.2 получаем

$$AA^\# = A^\#A = \begin{bmatrix} D & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & D \end{bmatrix}. \quad (2.6.7)$$

Из соотношения (2.6.7) и мультипликативного свойства определителя (2.4.5) следует равенство

$$\det(AA^\#) = \det A \det A^\# = D \det A^\# = D^n,$$

из которого вытекает, что

$$\det A^\# = D^{n-1}.$$

Соотношение (2.6.7) позволяет записать следующую формулу для вычисления обратной матрицы:

$$A^{-1} = \frac{1}{D} A^\#.$$

Очевидно, что определенная таким образом матрица удовлетворяет равенствам (2.6.2).

Задачи

1. Подберите матрицу B так, чтобы матрица BA получалась из матрицы A :

- а) перестановкой двух первых строк A ;
- б) прибавлением первой строки ко второй;
- в) умножением первой строки A на число $\lambda \neq 0$.

2. Выясните, является ли полем относительно операций сложения и умножения матриц множество квадратных матриц с действительными элементами.

3. Найдите общий вид эрмитовых матриц второго порядка.

4. Сумма диагональных элементов $\alpha_{11} + \alpha_{22} + \dots + \alpha_{nn}$ квадратной матрицы $A = [\alpha_{ij}]$ называется **следом** матрицы A и обозначается $\text{tr} A$.

Докажите, что выполняются следующие свойства:

- а) $\text{tr}(A + B) = \text{tr} A + \text{tr} B$;
- б) $\text{tr}(\lambda A) = \lambda \text{tr} A$;
- в) $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

Последнее равенство справедливо и для прямоугольных матриц A и B , если оба произведения AB и BA имеют смысл.

5. Пусть A и B – прямоугольные матрицы с размерами $m \times n$ и $p \times q$ соответственно. **Кронекеровым произведением** $A \otimes B$ матриц A и B называется $mp \times nr$ матрица C , которую в клеточном виде можно изобразить так:

$$C = \begin{bmatrix} \alpha_{11}B & \alpha_{12}B & \cdots & \alpha_{1n}B \\ \alpha_{21}B & \alpha_{22}B & \cdots & \alpha_{2n}B \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{m1}B & \alpha_{m2}B & \cdots & \alpha_{mn}B \end{bmatrix}.$$

Вычислите $A \otimes B$ и $B \otimes A$, если $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$.

6. Докажите, что для кронекерова произведения матриц справедливы следующие свойства:

а) $(\lambda A) \otimes B = A \otimes (\lambda B) = \lambda(A \otimes B)$;

б) $(A + B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C$;

в) $A \otimes (B + C) = A \otimes B + A \otimes C$;

г) если имеют смысл произведения AB и CD , то

$$(AB) \otimes (CD) = (AC) \otimes (BD).$$

7. Пусть элементы $m \times n$ -матрицы A суть действительные дифференцируемые функции вещественной переменной t . **Производной матрицы** A называется следующая $m \times n$ -матрица $\frac{dA}{dt}$:

$$\frac{dA}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{d\alpha_{11}}{dt} & \frac{d\alpha_{12}}{dt} & \cdots & \frac{d\alpha_{1n}}{dt} \\ \frac{d\alpha_{21}}{dt} & \frac{d\alpha_{22}}{dt} & \cdots & \frac{d\alpha_{2n}}{dt} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d\alpha_{m1}}{dt} & \frac{d\alpha_{m2}}{dt} & \cdots & \frac{d\alpha_{mn}}{dt} \end{bmatrix}.$$

Докажите, что для определенного таким образом дифференцирования матриц справедливы следующие свойства:

$$\text{а) } \frac{d}{dt}(\lambda A) = \lambda \frac{dA}{dt};$$

$$\text{б) } \frac{d}{dt}(A + B) = \frac{dA}{dt} + \frac{dB}{dt};$$

$$\text{в) } \frac{d}{dt}(AB) = \frac{dA}{dt}B + A\frac{dB}{dt};$$

$$\text{г) } \frac{d}{dt}(A^T) = \left(\frac{dA}{dt}\right)^T.$$

Глава 3

ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 3.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА. СВОЙСТВА ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Линейным (векторным) пространством L над полем F называется множество элементов (векторов), удовлетворяющих следующим аксиомам.

А. Каждой паре векторов $x, y \in L$ отвечает вектор $x + y$ этого множества, называемый суммой x и y , причем:

1°. Сложение коммутативно, $x + y = y + x$.

2°. Сложение ассоциативно, $(x + y) + z = x + (y + z)$.

3°. Существует нулевой вектор $0 \in L$ такой, что $x + 0 = x \quad \forall x \in L$.

4°. Для $\forall x \in L$ существует противоположный элемент $(-x) \in L$ такой, что $x + (-x) = 0$.

Б. Каждой паре $\alpha \in F$ и $x \in L$ отвечает вектор $(\alpha x) \in L$, называемый произведением α и x , причем:

5°. Умножение на числа ассоциативно, $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$.

6°. $1x = x \quad \forall x \in L$.

В. Операции сложения и умножения связаны между собой следующими соотношениями:

7°. Умножение на число дистрибутивно относительно сложения векторов, $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

8°. Умножение на вектор дистрибутивно относительно сложения чисел, $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.

Мы будем называть линейное пространство **вещественным** или **комплексным** в зависимости от того, является ли поле F полем вещественных или комплексных чисел.

Из аксиом 1° – 8° можно вывести следующие свойства линейных пространств.

1. В любом линейном пространстве существует единственный нулевой вектор.

Доказательство. Существование хотя бы одного нулевого вектора утверждается в аксиоме 3°. Допустим, что в L имеются два нулевых вектора: 0_1 и 0_2 . Полагая в аксиоме 3° $x = 0_1$, $0 = 0_2$, получаем

$$0_1 + 0_2 = 0_1.$$

Полагая в той же аксиоме $x = 0_2$, $0 = 0_1$, получаем

$$0_2 + 0_1 = 0_2.$$

Сравнивая первое из полученных равенств со вторым и пользуясь аксиомой 1°, находим $0_1 = 0_2$, что и требовалось доказать. ■

2. В любом линейном пространстве для каждого вектора x существует единственный противоположный вектор $(-x)$.

Доказательство. Существование хотя бы одного противоположного вектора утверждается в аксиоме 4°. Предположим, что для некоторого вектора x имеются два противоположных вектора $(-x)_1$ и $(-x)_2$. Прибавим к обеим частям равенства $x + (-x)_1 = 0$ вектор $(-x)_2$. Используя аксиомы 2° и 3°, получаем

$$(-x)_2 + (x + (-x)_1) = ((-x)_2 + x) + (-x)_1 = 0 + (-x)_1 = (-x)_1,$$

$$(-x)_2 + (x + (-x)_1) = (-x)_2 + 0 = (-x)_2.$$

Отсюда следует, что $(-x)_1 = (-x)_2$, что и требовалось доказать. ■

3. Для всякого $x \in L$ имеет место равенство

$$\theta x = 0.$$

Доказательство. Рассмотрим элемент $\theta x + 1x$. Используя аксиомы 7° и 5° , получаем

$$\theta x + 1x = (\theta + 1)x = 1x = x,$$

$$\theta x + 1x = \theta x + x.$$

Отсюда

$$x = \theta x + x.$$

Прибавляя к обеим частям последнего равенства $(-x)$, находим

$$0 = x + (-x) = (\theta x + x) + (-x) = \theta x + (x + (-x)) = \theta x + 0 = \theta x,$$

откуда

$$0 = \theta x,$$

что и требовалось доказать. ■

4. Для всякого вектора x в любом линейном пространстве противоположным элементом служит

$$(-x) = (-1)x.$$

Доказательство. Используя аксиомы линейного пространства и свойство 3, получаем

$$x + (-1)x = 1x + (-1)x = (1 + (-1))x = \theta x = 0,$$

что и требовалось доказать. ■

Наличие противоположного элемента позволяет ввести операцию вычитания. **Разность $x - y$** определяется как сумма x и $(-y)$.

5. $-(\alpha x) = (-\alpha)x = \alpha(-x)$.

Доказательство. Действительно,

$$-(\alpha x) = (-1)(\alpha x) = (-\alpha)x = \alpha((-1)x) = \alpha(-x). \quad \blacksquare$$

6. Дистрибутивность разности.

$$(\alpha - \beta)x = \alpha x - \beta x \quad \forall \alpha \in F, \forall x, y \in L;$$

$$\alpha(x - y) = \alpha x - \alpha y \quad \forall \alpha \in F, \forall x, y \in L.$$

Доказательство.

$$(\alpha - \beta)x = \alpha x + (-\beta)x = \alpha x + (-\beta x) = \alpha x - \beta x;$$

$$\alpha(x - y) = \alpha(x + (-1)y) = \alpha x + (-\alpha)y = \alpha x + (-\alpha y) = \alpha x - \alpha y. \quad \blacksquare$$

Отсюда следует

$$7. \forall \alpha \in F \quad \alpha \cdot 0 = 0.$$

$$\text{Доказательство. } \alpha \cdot 0 = \alpha(x - x) = \alpha x - \alpha x = \alpha x + (-\alpha x) = 0. \quad \blacksquare$$

$$8) \text{ Если } \alpha x = 0, \text{ то либо } \alpha = 0, \text{ либо } x = 0.$$

Доказательство. Действительно, если равенство $\alpha x = 0$ имеет место, то возможны два случая: либо $\alpha = 0$, либо $\alpha \neq 0$. Случай $\alpha = 0$ подтверждает наше утверждение. Пусть теперь $\alpha \neq 0$. Тогда

$$x = 1x = \left(\alpha \left(\frac{1}{\alpha} \right) \right) x = \frac{1}{\alpha} (\alpha x) = \frac{1}{\alpha} 0 = 0. \quad \blacksquare$$

9. В любом линейном пространстве любое равенство формально можно сокращать на общий ненулевой множитель независимо от того, является ли этот множитель числом или вектором.

Доказательство. В самом деле, если $\alpha x = \beta x$ и $x \neq 0$, то $\alpha x - \beta x = (\alpha - \beta)x = 0$, и тогда $\alpha - \beta = 0$, т. е. $\alpha = \beta$. Сократили на $x \neq 0$. Если же $\alpha x = \alpha y$ и $\alpha \neq 0$, то $\alpha x - \alpha y = \alpha(x - y) = 0$, и тогда $x - y = 0$, т. е. $x = y$. $\blacksquare$

Итак, с точки зрения операций умножения, сложения и вычитания формально имеют место все правила эквивалентных преобразований алгебраических выражений.

ПРИМЕРЫ ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВ

1. Пространство V_3 .

Элементы этого пространства – обычные векторы, рассматриваемые в геометрии. Сложение векторов определено по правилу параллелограмма. Умножение вектора на вещественное число α определено обычным образом (длина вектора умножается на $|\alpha|$, направление при $\alpha > 0$ остается неизменным, при $\alpha < 0$ изменяется на противоположное). Легко проверить, что все аксиомы $1^\circ - 8^\circ$ здесь выполнены. Аналогичные множества векторов на плоскости и на прямой, также представляющие собой линейные пространства, обозначим соответственно через V_2 и V_1 . Отметим, что V_1, V_2, V_3 – вещественные линейные пространства.

2. Арифметическое пространство F_n .

Элемент этого пространства – любая совокупность $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ n чисел из поля F . Эти числа $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ будем называть **компонентами** вектора x . Действия сложения и умножения на число $\alpha \in F$ выполняются по следующим правилам:

$$x + y = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) + (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) = (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \dots, \xi_n + \eta_n);$$

$$\alpha x = \alpha(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = (\alpha\xi_1, \alpha\xi_2, \dots, \alpha\xi_n).$$

Несложно проверить, что аксиомы $1^\circ - 8^\circ$ выполнены. В частности, нулевой вектор представляет собой совокупность n нулей:

$$0 = (\theta, \theta, \dots, \theta),$$

а вектор, противоположный для вектора $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, будет таким:

$$-x = (-\xi_1, -\xi_2, \dots, -\xi_n).$$

Если F есть поле R вещественных чисел, обозначение F_n заменяется на R_n . Если F есть поле C комплексных чисел, обозначение F_n заменяем на C_n .

3. Пространство всех многочленов степени $\leq n$, пополненное нулем.

§ 3.2. ЛИНЕЙНЫЕ КОМБИНАЦИИ И ЛИНЕЙНЫЕ ОБОЛОЧКИ

Пусть дано линейное пространство L над полем F . Выберем конечную систему векторов $e_1, e_2, \dots, e_n$ из L , числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ из F . **Линейной комбинацией векторов $e_1, e_2, \dots, e_n$ с коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$** называется сумма произведений вида

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n. \quad (*)$$

В отношении вектора $x \in L$ говорят, что он **линейно выражается** через векторы $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Зафиксируем систему векторов $e_1, e_2, \dots, e_n$ и позволим коэффициентам линейных комбинаций принимать любые значения из поля F . Тогда будет определено некоторое множество векторов из L . Это множество называется **линейной оболочкой** векторов $e_1, e_2, \dots, e_n$ и обозначается $L(e_1, e_2, \dots, e_n)$.

Линейная оболочка любой системы векторов из любого линейного пространства сама является линейным пространством.

Действительно, выполнение всех аксиом линейного пространства почти очевидно. Некоторого пояснения требуют, может быть, лишь аксиомы, относящиеся к нулевому и противоположному векторам. Нулевой вектор заведомо принадлежит линейной оболочке и соответствует нулевым значениям коэффициентов линейной комбинации, т. е.

$$0 = \theta e_1 + \theta e_2 + \dots + \theta e_n.$$

Вектор, противоположный для вектора (*), будет таким:

$$(-x) = (-\alpha_1) e_1 + (-\alpha_2) e_2 + \dots + (-\alpha_n) e_n.$$

ТРАНЗИТИВНОСТЬ ЛИНЕЙНОГО КОМБИНИРОВАНИЯ

Пусть $z = \sum_{j=1}^m \beta_j y_j$ и $y_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ji} e_i$. Тогда

$$z = \sum_{j=1}^m \beta_j y_j = \sum_{j=1}^m \beta_j \sum_{i=1}^n \alpha_{ji} e_i = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \beta_j \alpha_{ji} e_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m \beta_j \alpha_{ji} \right) e_i = \sum_{i=1}^n \gamma_i e_i,$$

где $\gamma_i = \sum_{j=1}^m \beta_j \alpha_{ji}$.

Таким образом, если z есть линейная комбинация векторов y_j , которые, в свою очередь, являются линейными комбинациями векторов e_i , то z – линейная комбинация векторов e_i .

Упражнение

Рассмотрим линейную оболочку чисел $1, \sqrt{2}$ в множестве действительных чисел в R -векторном пространстве с операциями сложения действительных чисел и умножения числа на рациональное число. Принадлежит ли этой оболочке число $\sqrt[4]{2}$?

§ 3.3. ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ВЕКТОРОВ

Рассмотрим произвольное множество (совокупность) векторов $e_1, e_2, \dots, e_n$ в линейном пространстве L . Может оказаться, что один из них линейно выражается через остальные. Пусть, например, это будет e_1 . Каждый вектор из $e_1, e_2, \dots, e_n$ линейно выражается через $e_2, e_3, \dots, e_n$. Поэтому любая линейная комбинация векторов $e_1, e_2, \dots, e_n$ является линейной комбинацией векторов $e_2, e_3, \dots, e_n$. Следовательно, линейные оболочки векторов $e_1, e_2, \dots, e_n$ и $e_2, e_3, \dots, e_n$ совпадают, т. е. $L(e_1, e_2, \dots, e_n) = L(e_2, \dots, e_n)$.

Предположим далее, что среди векторов $e_2, e_3, \dots, e_n$ некоторый вектор, например e_2 , тоже линейно выражается через остальные. Повторяя

наши рассуждения, мы заключаем, что теперь любая линейная комбинация векторов $e_1, e_2, \dots, e_n$ является линейной комбинацией $e_3, e_4, \dots, e_n$, т. е. $L(e_1, e_2, \dots, e_n) = L(e_3, e_4, \dots, e_n)$. Продолжая этот процесс, мы переходим в конце концов от системы $e_1, e_2, \dots, e_n$ к системе векторов, из которой уже нельзя исключить ни одного вектора. Линейная оболочка новой системы векторов будет совпадать с линейной оболочкой векторов $e_1, e_2, \dots, e_n$. Кроме того, можно сказать, что если среди $e_1, e_2, \dots, e_n$ был хотя бы один нулевой вектор, то новая система векторов либо **состоит только из одного ненулевого вектора**, либо **никакой из ее векторов не выражается линейно через остальные**.

Такая система векторов называется **линейно независимой**.

Если система векторов не является линейно независимой, то она называется **линейно зависимой**. В частности, как следует из определения, система, состоящая только из нулевого вектора, будет линейно зависимой.

Лемма 3.3.1. Если не все из векторов $e_1, e_2, \dots, e_n$ — нулевые и эта система линейно зависима, то в ней можно найти линейно независимую подсистему, линейная оболочка которой совпадает с $L(e_1, e_2, \dots, e_n)$.

Доказательство приведено выше.

Теорема 3.3.1. Система векторов $e_1, e_2, \dots, e_n$ линейно независима тогда и только тогда, когда из равенства

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n = 0 \quad (**)$$

следует равенство нулю всех коэффициентов линейной комбинации.

Доказательство. Пусть $n = 1$. Если $e_1 \neq 0$, то, как уже отмечалось ранее, из соотношения $\alpha_1 e_1 = 0$ должно следовать, что $\alpha_1 = 0$. Если же из равенства $\alpha_1 e_1 = 0$ вытекает равенство нулю коэффициента α_1 , то очевидно, что e_1 не может быть нулевым. Рассмотрим теперь случай $n \geq 2$.

Необходимость. Пусть система векторов $e_1, e_2, \dots, e_n$ линейно независима. Предположим, что равенство **(**)** справедливо при некотором

наборе коэффициентов, среди которых есть хотя бы один, отличный от нуля. Пусть, например, $\alpha_1 \neq \theta$. Тогда из (**) получаем

$$e_1 = \left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) e_2 + \left(-\frac{\alpha_3}{\alpha_1} \right) e_3 + \dots + \left(-\frac{\alpha_n}{\alpha_1} \right) e_n ,$$

т. е. вектор e_1 линейно выражается через остальные векторы системы. Это противоречит условию линейной независимости системы $e_1, e_2, \dots, e_n$. Следовательно, $\alpha_i = \theta \quad \forall i = 1, \dots, n$.

Достаточность. Покажем, что если равенство нулю линейной комбинации векторов $e_1, e_2, \dots, e_n$ влечет за собой равенство нулю коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, то система векторов не может быть линейно зависимой. Предположим противное и пусть, например, вектор e_1 линейно выражается через остальные, т. е.

$$e_1 = \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3 + \dots + \beta_n e_n .$$

Тогда равенству (**) заведомо будут удовлетворять коэффициенты $\alpha_1 = -1, \alpha_2 = \beta_2, \dots, \alpha_n = \beta_n$, среди которых, по крайней мере, один не равен нулю. ■

Лемма 3.3.2. Если некоторые из векторов $e_1, e_2, \dots, e_n$ линейно зависимы, то и вся система $e_1, e_2, \dots, e_n$ линейно зависима.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что линейно зависимыми являются первые векторы $e_1, e_2, \dots, e_k$. Следовательно, существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, среди которых есть не равные нулю, что

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_k e_k = 0 .$$

Отсюда вытекает справедливость равенства

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_k e_k + \theta \cdot e_{k+1} + \dots + \theta \cdot e_n = 0 ,$$

что соответствует линейной зависимости векторов $e_1, e_2, \dots, e_n$, так как среди чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \theta, \dots, \theta$ есть не равные нулю. ■

Лемма 3.3.3. Если среди векторов $e_1, e_2, \dots, e_n$ есть хотя бы один нулевой вектор, то вся система $e_1, e_2, \dots, e_n$ линейно зависима.

Доказательство. Действительно, система из одного нулевого вектора линейно зависима. Поэтому из только что доказанной леммы вытекает линейная зависимость и всей системы. ■

Теорема 3.3.2. Система векторов $e_1, e_2, \dots, e_n$ линейно зависима тогда и только тогда, когда либо $e_1 = 0$, либо некоторый вектор e_k , $2 \leq k \leq n$, является линейной комбинацией предшествующих векторов.

Доказательство. Необходимость. Предположим, что векторы $e_1, e_2, \dots, e_n$ линейно зависимы. Тогда в равенстве (**) не все коэффициенты равны нулю. Пусть последний ненулевой коэффициент есть α_k . Если $k = 1$, то это означает, что $e_1 = 0$. Пусть теперь $k > 1$. Тогда из равенства

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_k e_k = 0$$

находим, что

$$e_k = \left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_k} \right) e_1 + \left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_k} \right) e_2 + \dots + \left(-\frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} \right) e_{k-1}.$$

Достаточность очевидна, поскольку и случай, когда $e_1 = 0$, и случай, когда вектор e_k линейно выражается через предшествующие векторы, означает линейную зависимость первых векторов из $e_1, e_2, \dots, e_n$. Отсюда следует линейная зависимость и всей системы векторов. ■

Упражнения

1. Докажите, что если какой-либо вектор линейного пространства единственным образом представляется в виде линейной комбинации векторов $e_1, e_2, \dots, e_n$, то эта система векторов линейно независима.

2. Докажите, что если система векторов $e_1, e_2, \dots, e_n$ линейно независима, то любой вектор линейной оболочки этих векторов единственным образом представляется в виде их линейной комбинации.

3. Докажите, что система векторов $e_1, e_2, \dots, e_n$ линейно зависима тогда и только тогда, когда либо $e_n = 0$, либо некоторый вектор e_k , $1 \leq k \leq n-1$, является линейной комбинацией последующих векторов.

4. Покажите, что любые четыре вектора в линейном пространстве V_3 линейно зависимы; любые три вектора в V_2 линейно зависимы; любые два вектора в V_1 линейно зависимы.

5. Покажите, что система векторов

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

линейно независима.

6. Рассмотрите линейное пространство многочленов степени $\leq n$ с вещественными коэффициентами. Докажите, что система векторов $1, t, t^2, \dots, t^n$ линейно независима.

7. Докажите, что линейная зависимость или линейная независимость системы векторов не нарушается при следующих преобразованиях системы, называемых **элементарными**:

- а) перестановке двух векторов системы;
- б) умножении вектора системы на ненулевое число;
- в) прибавлении к одному вектору системы другого вектора, умноженного на произвольное число.

§ 3.4. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ СИСТЕМЫ ВЕКТОРОВ

Пусть заданы две системы векторов $\{x_i, i = \overline{1, n}\}$ и $\{y_j, j = \overline{1, m}\}$ из линейного пространства L .

Две системы векторов, обладающие тем свойством, что любой вектор одной системы линейно выражается через векторы другой системы, называются **эквивалентными системами векторов**.

Лемма 3.4.1. Для того чтобы линейные оболочки $L(x_1, \dots, x_n)$ и $L(y_1, \dots, y_m)$ двух систем векторов совпадали, необходимо и достаточно, чтобы эти системы были эквивалентными.

Доказательство. Необходимость. Пусть $L(x_1, \dots, x_n) = L(y_1, \dots, y_m)$. Данной линейной оболочке заведомо принадлежит каждый из векторов обеих систем и, кроме этого, всякий вектор из линейной оболочки может быть представлен в виде линейной комбинации как векторов одной системы, так и векторов другой системы. Следовательно, системы $\{x_i, i = \overline{1, n}\}$ и $\{y_j, j = \overline{1, m}\}$ эквивалентны.

Достаточность. Пусть системы $\{x_i, i = \overline{1, n}\}$ и $\{y_j, j = \overline{1, m}\}$ эквивалентны. Тогда в силу транзитивности понятия линейной комбинации всякая линейная комбинация векторов одной системы может быть представлена как линейная комбинация векторов другой системы, т. е. линейные оболочки обеих систем совпадают. ■

ОТНОШЕНИЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

Рассмотрим разбиение по некоторому признаку множества $A = \{a, b, c, \dots\}$ на непересекающиеся классы. Предположим, что признак удовлетворяет следующим условиям (в этом случае он называется **отношением эквивалентности**):

- 1) рефлексивность: $a \sim a \quad \forall a \in A$;
- 2) симметричность: если $a \sim b$, то $b \sim a$;
- 3) транзитивность: если $a \sim b$ и $b \sim c$, то $a \sim c$.

Докажем, что любое отношение эквивалентности позволяет разбить множество на непересекающиеся классы.

Пусть даны два класса $K_a = \{x \in A \mid x \sim a\}$ и $K_b = \{x \in A \mid x \sim b\}$. В первом классе содержатся все элементы из A , эквивалентные фиксированному элементу a , во втором – все элементы из A , эквивалентные фиксированному элементу b . Покажем, что K_a и K_b либо совпадают, либо не имеют общих элементов.

Пусть некоторый элемент c из множества A принадлежит обоим классам K_a и K_b , т. е. $c \sim a$ и $c \sim b$. В силу свойства симметричности $a \sim c$, а в силу свойства транзитивности $a \sim b$ и, естественно, $b \sim a$.

Если теперь $x \in K_a$, то $x \sim a$ и, следовательно, $x \sim b$, т. е. $x \in K_b$. Аналогично, если $x \in K_b$, то отсюда вытекает, что $x \in K_a$. Таким образом, два класса, имеющих хотя бы один общий элемент, полностью совпадают, и мы действительно получили разбиение множества A на непесекающиеся классы.

Заметим, что понятие эквивалентности двух систем векторов является отношением эквивалентности. Рефлексивность очевидна, так как любая система эквивалентна самой себе. Симметричность вытекает из определения эквивалентных систем. Транзитивность следует из транзитивности понятия линейной комбинации. Поэтому **множество всех систем векторов любого линейного пространства можно разбить на классы эквивалентных систем**. При этом всем системам каждого класса соответствует одна и только одна линейная оболочка.

Теорема 3.4. Если каждый из векторов линейно независимой системы $\{e_i, i = \overline{1, n}\}$ линейно выражается через векторы системы $\{y_j, j = \overline{1, m}\}$, то $n \leq m$.

Доказательство. По условию теоремы вектор e_n линейно выражается через векторы $\{y_j, j = \overline{1, m}\}$, следовательно, система

$$e_n, y_1, \dots, y_m \quad (3.4.1)$$

линейно зависима. Вектор e_n не равен нулю, поэтому, согласно теореме 3.3.2, некоторый вектор y_j из (3.4.1) является линейной комбинацией предшествующих векторов. Исключив этот вектор, мы получим такую систему:

$$e_n, y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_m. \quad (3.4.2)$$

Используя транзитивность понятия линейной комбинации, легко показать, что каждый из векторов $e_1, \dots, e_n$ линейно выражается через векторы системы (3.4.2).

Присоединим к векторам (3.4.2) слева вектор e_{n-1} . Снова заключаем, что система

$$e_{n-1}, e_n, y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_m \quad (3.4.3)$$

линейно зависима. Вектор e_{n-1} не равен нулю, поэтому, согласно теореме 3.3.2, один из остальных векторов системы (3.4.3) является линейной комбинацией предшествующих векторов. Этим вектором не может быть e_n , так как тогда была бы линейно зависимой система из двух векторов e_{n-1}, e_n и, следовательно, вся система векторов $e_1, \dots, e_n$. Таким образом, некоторый вектор y_k из (3.4.3) линейно выражается через предшествующие. Если мы исключим его, то опять получим систему, через которую линейно выражается каждый из векторов $e_1, \dots, e_n$.

Продолжая этот процесс, заметим, что векторы $y_1, \dots, y_m$ не могут быть исчерпаны раньше, чем мы присоединим все векторы $e_1, \dots, e_n$. В противном случае окажется, что каждый из векторов $e_1, \dots, e_n$ линейно выражается через часть векторов этой же системы, т. е. вся система должна быть линейно зависима. Так как это противоречит условию теоремы, отсюда следует, что $n \leq m$. ■

Рассмотрим следствия из этой теоремы. Пусть заданы две эквивалентные линейно независимые системы векторов. Согласно теореме 3.4, каждая из этих систем содержит не больше векторов, чем другая. Отсюда вытекает

Следствие 1. Эквивалентные линейно независимые системы состоят из одного и того же числа векторов.

Возьмем далее произвольные n векторов, построим на них линейную оболочку и выберем в ней любые $n+1$ векторов. Поскольку число этих векторов больше, чем число заданных векторов, они не могут быть линейно независимыми. Таким образом, справедливо

Следствие 2. Любые $n+1$ векторов из линейной оболочки системы n векторов линейно зависимы.

Утверждение леммы 3.3.1 в терминах эквивалентных систем означает, что, какова бы ни была система одновременно не равных нулю векторов, в ней существует эквивалентная ей линейно независимая подсистема. Эта подсистема называется **базой** исходной системы.

В общем случае база не единственна. Из первого следствия теоремы 3.4 вытекает, что все базы состоят из одного и того же числа векторов, это число векторов является характеристикой всех эквивалентных систем и называется их **рангом**.

Упражнения

Докажите, что следующие преобразования систем векторов, называемые **элементарными**, приводят к эквивалентной системе.

1. Присоединение к системе векторов любой линейной комбинации этих векторов.
2. Исключение из системы векторов любого вектора, являющегося линейной комбинацией остальных векторов.
3. Умножение любого вектора системы на число, отличное от нуля.
4. Прибавление к любому вектору системы произвольной линейной комбинации остальных векторов.
5. Перестановка двух векторов.

§ 3.5. БАЗИС ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА

Пусть дано произвольное линейное пространство L , состоящее не только из нулевого вектора. В этом случае возможны два варианта: либо существует линейно независимая система, состоящая из сколь угодно большого числа векторов, либо существует линейно независимая система, содержащая максимальное число векторов. В первом случае линейное пространство называется бесконечномерным, а во втором случае – конечномерным. В дальнейшем нас будут интересовать только конечномерные линейные пространства.

Пусть в конечномерном линейном пространстве L векторы $\{e_i, i = \overline{1, n}\}$ составляют линейно независимую систему с максимальным числом векторов. Тогда $\forall x \in L$ система $e_1, e_2, \dots, e_n, x$ будет линейно зависимой. По теореме 3.3.2 вектор x линейно выражается через $e_1, e_2, \dots, e_n$:

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n. \quad (3.5.1)$$

Поскольку вектор x произвольный, а векторы $e_1, e_2, \dots, e_n$ фиксированы, то можно сказать, что любое конечномерное линейное пространство есть линейная оболочка конечного числа своих векторов.

Линейно независимая система векторов, через которые линейно выражается каждый вектор линейного пространства L , называется **базисом пространства**. При этом число векторов базиса называется **размерностью** линейного пространства L и обозначается $\dim L$. Если $\dim L = n$, то пространство L называется n -мерным.

В n -мерном линейном пространстве любая линейно независимая система из n векторов образует базис, а любая система из большего числа векторов линейно зависима.

Соотношение (3.5.1) называется **разложением вектора x по базису** $e_1, e_2, \dots, e_n$, а числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ называются **координатами вектора x** относительно этого базиса. Тот факт, что вектор x задан своими координатами $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$, будем записывать следующим образом:

$$x = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)_e.$$

Теорема 3.5.1. Для любого вектора $x \in L$ разложение по базису единственно.

Доказательство. Предположим, что это не так и существует другое разложение

$$x = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_n e_n. \quad (3.5.2)$$

Вычитая (3.5.2) из (3.5.1), получаем

$$(\alpha_1 - \beta_1)e_1 + (\alpha_2 - \beta_2)e_2 + \dots + (\alpha_n - \beta_n)e_n = 0.$$

В силу того, что векторы $e_1, e_2, \dots, e_n$ линейно независимы, отсюда вытекает равенство нулю всех коэффициентов линейной комбинации и, следовательно, совпадение разложений (3.5.1) и (3.5.2). ■

Таким образом, при фиксированном базисе линейного пространства L каждый вектор из L однозначно определяется совокупностью своих координат относительно этого базиса.

Рассмотрим действия над векторами, заданными своими координатами относительно одного и того же базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$. Пусть $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$ и $y = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_n e_n$. Тогда

$$x + y = (\alpha_1 + \beta_1)e_1 + (\alpha_2 + \beta_2)e_2 + \dots + (\alpha_n + \beta_n)e_n$$

и

$$\lambda x = (\lambda\alpha_1)e_1 + (\lambda\alpha_2)e_2 + \dots + (\lambda\alpha_n)e_n.$$

Отсюда следует, что при сложении двух векторов линейного пространства их координаты относительно любого базиса складываются, а при умножении вектора на число все его координаты умножаются на это число.

Теорема 3.5.2. Произвольную систему из k линейно независимых векторов $f_1, f_2, \dots, f_k$, где $k < n$, можно дополнить до базиса n -мерного пространства L .

Доказательство. Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ – базис L . Если бы каждый из векторов $e_1, e_2, \dots, e_n$ был линейной комбинацией векторов $f_1, f_2, \dots, f_k$, то по теореме 3.4 имело бы место неравенство $n \leq k$. У нас же $k < n$. Значит, среди векторов $\{e_i, i = \overline{1, n}\}$ найдется хотя бы один вектор, не являющийся линейной комбинацией $f_1, f_2, \dots, f_k$. Пусть таким вектором будет e_{i_1} . Добавим его к системе $\{f_j, j = \overline{1, k}\}$. Получим линейно независимую систему $f_1, \dots, f_k, e_{i_1}$, состоящую из $k+1$ вектора. Если $k+1 < n$, то, поступая аналогично, построим линейно независимую систему $f_1, \dots, f_k, e_{i_1}, e_{i_2}$, состоящую из $k+2$ векторов. Этот процесс будем повторять до тех пор, пока не дойдем до n линейно независимых векторов, т. е. до базиса. Этот базис содержит $f_1, f_2, \dots, f_k$. ■

Упражнение

Найдите базис пространства многочленов степени $\leq n$ с вещественными коэффициентами, сумма коэффициентов при степенях которых равна 0.

§ 3.6. ИЗОМОРФИЗМ ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Два линейных пространства, устроенных одинаково по отношению к операциям сложения векторов и умножения вектора на число, будем считать обладающими одинаковыми свойствами. Более точно:

Два линейных пространства L и L' , заданных над одним и тем же полем F , называются **изоморфными**, если между векторами этих пространств можно установить взаимно однозначное соответствие так, что если векторам x и y пространства L отвечают соответственно векторы x' и y' пространства L' , то вектору $x + y$ отвечает вектор $x' + y'$, а вектору λx отвечает вектор $\lambda x'$.

Пусть пространства L и L' изоморфны. Тот факт, что каждому вектору x из L поставлен в соответствие определенный вектор x' из L' , можно понимать как введение некоторой «функции»

$$x' = \varphi(x), \quad (3.6.1)$$

«аргументом» которой является вектор x пространства L , а «значением» – вектор x' пространства L' . Теперь оба ранее указанных свойства этой функции можно записать следующим образом. Для любых $x, y \in L$ и любого числа $\lambda \in F$

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y), \quad \varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x). \quad (3.6.2)$$

Взаимная однозначность соответствия между L и L' означает, что любым разным аргументам функции (3.6.2) отвечают разные значения, т. е. если $x \neq y$, то $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.

Следовательно, из равенства или неравенства значений функции вытекает соответственно равенство или неравенство аргументов.

В изоморфных пространствах есть много общего. В частности, нулевому вектору соответствует нулевой вектор, поскольку

$$\varphi(0) = \varphi(\theta x) = \theta \varphi(x) = \theta x' = 0'.$$

Однако наиболее важным следствием является то, что линейно независимой системе векторов соответствует снова линейно независимая система.

Действительно, пусть линейно независимы n векторов $x_1, x_2, \dots, x_n$. Рассмотрим линейную комбинацию $\alpha_1\varphi(x_1) + \alpha_2\varphi(x_2) + \dots + \alpha_n\varphi(x_n)$ и приравняем ее к нулю. В силу свойств изоморфного соответствия имеем

$$0' = \alpha_1\varphi(x_1) + \alpha_2\varphi(x_2) + \dots + \alpha_n\varphi(x_n) = \varphi(\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \dots + \alpha_nx_n) = \varphi(0),$$

откуда следует, что

$$\alpha_1\varphi(x_1) + \alpha_2\varphi(x_2) + \dots + \alpha_n\varphi(x_n) = 0.$$

Поскольку векторы $x_1, x_2, \dots, x_n$ линейно независимы, все коэффициенты должны быть нулевыми.

Доказанное позволяет утверждать, что если два конечномерных линейных пространства изоморфны, то они имеют одинаковую размерность. Верно и обратное утверждение. Таким образом, справедлива следующая

Теорема 3.6. Любые два конечномерных линейных пространства, заданные над одним и тем же полем, изоморфны, если и только если они имеют одинаковую размерность.

Доказательство. *Необходимость* только что доказана.

Достаточность. Пусть L и L' – два линейных пространства размерности n . Выберем какой-либо базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ в пространстве L и базис $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ в пространстве L' . С помощью этих систем векторов построим следующим образом изоморфизм φ . Каждому вектору

$$x = \alpha_1e_1 + \alpha_2e_2 + \dots + \alpha_ne_n$$

пространства L поставим в соответствие вектор

$$\varphi(x) = \alpha_1e'_1 + \alpha_2e'_2 + \dots + \alpha_ne'_n$$

пространства L' . Установленное соответствие будет взаимно однозначным, так как разложение по базису единственно.

Далее возьмем два любых вектора x и y из L и произвольное число λ из F и предположим, что

$$x = \alpha_1e_1 + \alpha_2e_2 + \dots + \alpha_ne_n, \quad y = \beta_1e_1 + \beta_2e_2 + \dots + \beta_ne_n.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 \varphi(x+y) &= \varphi((\alpha_1 + \beta_1)e_1 + (\alpha_2 + \beta_2)e_2 + \dots + (\alpha_n + \beta_n)e_n) = \\
 &= (\alpha_1 + \beta_1)e'_1 + (\alpha_2 + \beta_2)e'_2 + \dots + (\alpha_n + \beta_n)e'_n = \\
 &= (\alpha_1 e'_1 + \alpha_2 e'_2 + \dots + \alpha_n e'_n) + (\beta_1 e'_1 + \beta_2 e'_2 + \dots + \beta_n e'_n) = \varphi(x) + \varphi(y), \\
 \varphi(\lambda x) &= \varphi((\lambda\alpha_1)e_1 + (\lambda\alpha_2)e_2 + \dots + (\lambda\alpha_n)e_n) = \\
 &= (\lambda\alpha_1)e'_1 + (\lambda\alpha_2)e'_2 + \dots + (\lambda\alpha_n)e'_n = \\
 &= \lambda(\alpha_1 e'_1 + \alpha_2 e'_2 + \dots + \alpha_n e'_n) = \lambda\varphi(x).
 \end{aligned}$$

Полученные равенства и доказывают справедливость утверждения теоремы. ■

Значение этой теоремы весьма велико. Именно она позволяет утверждать, что с точки зрения всех следствий из аксиом любые два линейных пространства, имеющие одинаковую размерность и заданные над одним и тем же полем, неразличимы. Следовательно, можно было бы построить какое-либо одно n -мерное линейное пространство и выяснять закономерности, общие для всех конечномерных пространств, лишь на основе его исследования. Часто в качестве такого пространства выбирают арифметическое пространство F_n .

Следствие. Всякое n -мерное линейное пространство над полем F изоморфно пространству F_n .

§ 3.7. ПОДПРОСТРАНСТВА ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА

Подпространством L' линейного пространства L называется совокупность элементов из L таких, что сами они образуют линейное пространство относительно уже введенных в L операций сложения векторов и умножения вектора на число.

Другими словами, совокупность L' элементов из L образует линейное подпространство пространства L , если из того, что $x \in L'$, $y \in L'$, следует, что $(x+y) \in L'$ и $(\lambda x) \in L'$.

ПРИМЕРЫ ПОДПРОСТРАНСТВ

1. Нулевое подпространство, т. е. подпространство, состоящее лишь из нулевого вектора.

2. Все пространство L .

Эти два подпространства называются **тривиальными**, остальные – **нетривиальными**.

3. Прямые и плоскости, проходящие через начало координат, будут подпространствами в V_3 .

4. В пространстве F_n совокупность всех векторов $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, для которых $\xi_1 = 0$, образует подпространство.

5. В пространстве F_n совокупность всех векторов $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, для которых $\sum_{i=1}^n \xi_i = 0$, образует подпространство.

6. Всякая линейная оболочка $L(y_1, y_2, \dots, y_m)$ векторов $y_1, y_2, \dots, y_m$ линейного пространства L является подпространством.

Очевидно, что во всяком подпространстве L' какого-либо пространства L содержится нулевой элемент пространства L .

Для проверки того, что некоторое множество L' образует подпространство в линейном пространстве L над полем F , достаточно убедиться в том, что $(\alpha x + \beta y) \in L'$, если $x, y \in L'$, а $\alpha, \beta \in F$.

Следствие из теоремы 3.5.2. Если в каком-либо подпространстве L' размерности s выбран некоторый базис $e_1, e_2, \dots, e_s$, то этот базис можно дополнить векторами $e_{s+1}, \dots, e_n$ пространства L так, что совокупность векторов $e_1, \dots, e_s, e_{s+1}, \dots, e_n$ будет составлять базис всего пространства L .

СУММА И ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОДПРОСТРАНСТВ

Суммой $L_1 + L_2$ линейных подпространств L_1 и L_2 называется множество всех векторов вида $z = x + y$, где $x \in L_1$, $y \in L_2$.

Пересечением $L_1 \cap L_2$ линейных подпространств L_1 и L_2 называется множество всех векторов, одновременно принадлежащих как L_1 , так и L_2 .

Заметим, что сумма и пересечение подпространств всегда являются непустыми множествами, так как им заведомо принадлежит нулевой вектор пространства L . Докажем, что эти множества являются подпространствами.

Возьмем два произвольных вектора $z_1, z_2 \in (L_1 + L_2)$. Это означает, что $z_1 = x_1 + y_1, z_2 = x_2 + y_2$, где $x_1, x_2 \in L_1$ и $y_1, y_2 \in L_2$. Рассмотрим теперь произвольную линейную комбинацию $\alpha z_1 + \beta z_2$. Имеем $\alpha z_1 + \beta z_2 = (\alpha x_1 + \beta x_2) + (\alpha y_1 + \beta y_2)$. Так как $\alpha x_1 + \beta x_2 \in L_1$ и $\alpha y_1 + \beta y_2 \in L_2$, то $\alpha z_1 + \beta z_2 \in (L_1 + L_2)$. Следовательно, $L_1 + L_2$ есть подпространство. Пусть теперь $z_1, z_2 \in L_1 \cap L_2$, т. е. $z_1, z_2 \in L_1$ и $z_1, z_2 \in L_2$. Очевидно, что $\alpha z_1 + \beta z_2 \in L_1$ и $\alpha z_1 + \beta z_2 \in L_2$, т. е. $\alpha z_1 + \beta z_2 \in L_1 \cap L_2$. Следовательно, $L_1 \cap L_2$ также является подпространством.

Теорема 3.7.1. Для любых двух подпространств L_1, L_2 конечномерного пространства L имеет место равенство

$$\dim(L_1 \cap L_2) + \dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2.$$

Доказательство. Обозначим размерности подпространств $L_1, L_2, L_1 \cap L_2$ соответственно через r_1, r_2, m . Выберем в пересечении $L_1 \cap L_2$ какой-либо базис $c_1, c_2, \dots, c_m$. Эти векторы линейно независимы и принадлежат L_1 . Согласно теореме 3.5.2 в L_1 найдутся такие векторы $a_1, \dots, a_k$, что система $a_1, \dots, a_k, c_1, \dots, c_m$ будет базисом в L_1 . Аналогично, в подпространстве L_2 найдутся такие векторы $b_1, \dots, b_p$, что система $b_1, \dots, b_p, c_1, \dots, c_m$ будет базисом в L_2 . При этом

$$r_1 = k + m, \quad r_2 = p + m.$$

Если мы докажем, что система векторов

$$a_1, \dots, a_k, c_1, \dots, c_m, b_1, \dots, b_p \quad (3.7.1)$$

является базисом подпространства $L_1 + L_2$, то тогда утверждение теоремы будет иметь место, поскольку

$$m + (k + m + p) = (k + m) + (p + m).$$

Всякий вектор из подпространств L_1, L_2 линейно выражается через векторы своего базиса и тем более линейно выражается через векторы (3.7.1). Поэтому через эти векторы будет линейно выражаться и любой вектор из суммы $L_1 + L_2$. Нам остается показать, что система (3.7.1) линейно независима. Пусть

$$\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k + \gamma_1 c_1 + \dots + \gamma_m c_m + \beta_1 b_1 + \dots + \beta_p b_p = 0. \quad (3.7.2)$$

Обозначим

$$b = \beta_1 b_1 + \dots + \beta_p b_p. \quad (3.7.3)$$

Ясно, что $b \in L_2$. Однако из (3.7.2) вытекает, что $b \in L_1$. Следовательно, $b \in L_1 \cap L_2$, т. е.

$$b = v_1 c_1 + \dots + v_m c_m \quad (3.7.4)$$

для некоторых чисел $v_1, \dots, v_m$. Сравнивая (3.7.3) и (3.7.4), получаем

$$\beta_1 b_1 + \dots + \beta_p b_p + (-v_1) c_1 + \dots + (-v_m) c_m = 0.$$

Система векторов $b_1, \dots, b_p, c_1, \dots, c_m$ линейно независима по построению, поэтому

$$\beta_1 = \dots = \beta_p = v_1 = \dots = v_m = 0.$$

В силу линейной независимости системы векторов $a_1, \dots, a_k, c_1, \dots, c_m$ из (3.7.2) теперь вытекает, что

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_k = \gamma_1 = \dots = \gamma_m = 0. \quad \blacksquare$$

ПРЯМАЯ СУММА ПОДПРОСТРАНСТВ

Пусть имеем такие подпространства $L_1, L_2, \dots, L_m$ некоторого линейного пространства L , что

$$L = L_1 + L_2 + \dots + L_m, \quad (3.7.4)$$

т. е. всякий вектор $x \in L$ можно представить в виде

$$x = x_1 + x_2 + \dots + x_m, \quad (3.7.5)$$

где $x_i \in L_i$, $i = \overline{1, m}$. В общем случае такое представление не единственно. Если каждый вектор из L допускает единственное представление (3.7.5), то сумма (3.7.4) называется **прямой суммой** и обозначается следующим образом:

$$L = L_1 \dot{+} L_2 \dot{+} \dots \dot{+} L_m. \quad (3.7.6)$$

Теорема 3.7.2. Для того чтобы пространство L было прямой суммой своих подпространств $L_1, L_2, \dots, L_m$, необходимо и достаточно, чтобы объединение базисов этих подпространств составляло базис всего пространства.

Доказательство. Необходимость. Пусть L есть прямая сумма подпространств $L_1, \dots, L_m$ и векторы $e_1, \dots, e_{s_1}; \dots; e_{s_{m-1}+1}, \dots, e_{s_m}$ составляют базисы этих подпространств. Тогда $\forall x \in L$ имеет место разложение (3.7.5). Представив каждые из векторов x_i в виде разложения по базису соответствующего подпространства L_i , получим, что

$$x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_{s_1} e_{s_1} + \dots + \alpha_{s_{m-1}+1} e_{s_{m-1}+1} + \dots + \alpha_{s_m} e_{s_m} \quad (3.7.7)$$

для некоторых чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_{s_m}$.

Таким образом, каждый вектор из L можно представить в виде линейной комбинации векторов $e_1, \dots, e_{s_m}$. Для того чтобы утверждать, что эти векторы составляют базис пространства L , остается доказать их линейную независимость. Рассмотрим равенство

$$\beta_1 e_1 + \dots + \beta_{s_1} e_{s_1} + \dots + \beta_{s_{m-1}+1} e_{s_{m-1}+1} + \dots + \beta_{s_m} e_{s_m} = 0 \quad (3.7.8)$$

с числовыми коэффициентами $\beta_1, \dots, \beta_{s_m}$ и обозначим

$$\begin{aligned} \beta_1 e_1 + \dots + \beta_{s_1} e_{s_1} &= y_1, \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \tag{3.7.9}$$

$$\beta_{s_{m-1}+1} e_{s_{m-1}+1} + \dots + \beta_{s_m} e_{s_m} = y_m.$$

Очевидно, что $y_i \in L_i$, а из (3.7.8) следует такое равенство:

$$y_1 + \dots + y_m = 0.$$

Все подпространства содержат нулевой вектор, поэтому заведомо справедливо соотношение

$$0 + \dots + 0 = 0.$$

В силу единственности разложения нулевого вектора из L по подпространствам $L_1, L_2, \dots, L_m$ заключаем, что

$$y_1 = \dots = y_m = 0.$$

Отсюда вытекает равенство нулю всех коэффициентов линейных комбинаций (3.7.9), т. е. линейная независимость векторов $e_1, \dots, e_{s_m}$.

Достаточность. Предположим теперь, что векторы $e_1, \dots, e_{s_1}; \dots; e_{s_{m-1}+1}, \dots, e_{s_m}$, составляющие базисы подпространств $L_1, \dots, L_m$, образуют базис L . Тогда $\forall x \in L$ имеет место единственное разложение (3.7.7).

Обозначив

$$\begin{aligned} \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_{s_1} e_{s_1} &= x_1, \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \tag{3.7.10}$$

$$\alpha_{s_{m-1}+1} e_{s_{m-1}+1} + \dots + \alpha_{s_m} e_{s_m} = x_m,$$

мы получим, что для x существует по крайней мере одно разложение (3.7.5). Каждый вектор x_i из (3.7.10) есть линейная комбинация базисных векторов L_i . В силу единственности разложения (3.7.7) для вектора x можем сделать вывод и о единственности для него разложения (3.7.5). ■

Упражнения

1. Является ли линейным подпространством соответствующего векторного пространства каждое из следующих совокупностей векторов:

а) все векторы плоскости, каждый из которых лежит на одной из осей координат Ox и Oy ?

б) все векторы из R_n , координаты которых удовлетворяют уравнению $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 0$?

в) все векторы из R_n , координаты которых удовлетворяют уравнению $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \pi$?

2. Докажите, что для того чтобы сумма (3.7.4) была прямой, необходимо и достаточно, чтобы разложение (3.7.5) было единственным для нулевого вектора.

3. Докажите, что для того чтобы сумма двух линейных подпространств была прямой суммой, необходимо и достаточно, чтобы пересечение этих подпространств было нулевым.

4. Докажите, что размерность прямой суммы подпространств равна сумме размерностей этих подпространств.

5. Докажите, что если размерность суммы линейных подпространств равна сумме их размерностей, то сумма прямая.

Глава 4

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

§ 4.1. ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ И СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть дана система векторов $a_1, a_2, \dots, a_n$ и вектор b . Требуется установить, является ли вектор b линейной комбинацией этой системы векторов, и найти коэффициенты этой линейной комбинации.

Если вектор b является линейной комбинацией векторов $a_1, a_2, \dots, a_n$, то существуют такие числа $x_1, x_2, \dots, x_n$, что

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n = b. \quad (4.1.1)$$

Следовательно, поставленная задача сводится к исследованию векторного уравнения (4.1.1) относительно чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Предположим, что векторы заданы своими координатами относительно некоторого базиса $e_1, e_2, \dots, e_m$, т. е.

$$a_1 = (\alpha_{11}, \alpha_{21}, \dots, \alpha_{m1}),$$

$$a_2 = (\alpha_{12}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{m2}),$$

$$\dots\dots\dots$$

$$a_n = (\alpha_{1n}, \alpha_{2n}, \dots, \alpha_{mn}),$$

$$b = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m).$$

Приравняв соответствующие координаты векторов левой и правой части уравнения (4.1.1), приходим к **системе линейных алгебраических уравнений**

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1, \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \dots + \alpha_{mn}x_n = \beta_m. \end{cases} \quad (4.1.2)$$

Числа $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ называются **правыми частями**, а $x_1, x_2, \dots, x_n$ — **неизвестными** системы уравнений. Упорядоченная совокупность значений неизвестных, удовлетворяющая каждому из уравнений (4.1.2), называется **решением** системы. Если система линейных алгебраических уравнений имеет хотя бы одно решение, то она называется **совместной**; в противном случае система называется **несовместной**.

Таким образом, ответ на вопрос, является ли вектор b линейной комбинацией векторов $a_1, a_2, \dots, a_n$, определяется совместностью или несовместностью системы (4.1.2). Если система совместна, то любое ее решение дает коэффициенты разложения вектора b по системе векторов $a_1, a_2, \dots, a_n$.

§ 4.2. РАНГ МАТРИЦЫ

Рассмотрим произвольную (не обязательно квадратную) матрицу

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}. \quad (4.2.1)$$

Минором k -го порядка матрицы A будем называть определитель k -го порядка с элементами, расположенными на пересечении любых k строк и любых k столбцов матрицы A (k , очевидно, не превосходит наименьшего из чисел m и n).

Предположим, что хотя бы один из элементов матрицы A отличен от нуля, тогда найдется такое натуральное число r , что будут выполнены следующие два условия:

- 1) у матрицы A имеется минор r -го порядка, отличный от нуля;
- 2) всякий минор $(r+1)$ -го и более высокого порядка (если таковые существуют) равен нулю.

Число r , удовлетворяющее условиям 1 и 2, назовем **рангом матрицы** (ранг матрицы A , все элементы которой – нули, по определению равен нулю). Будем обозначать через $\text{rg} A$ ранг матрицы. Отличный от нуля минор r -го порядка назовем **базисным минором** (у матрицы A может быть несколько миноров r -го порядка, отличных от нуля). Строки и столбцы, на пересечении которых расположен базисный минор, назовем соответственно **базисными строками** и **базисными столбцами**.

Теорема 4.2.1 (о базисном миноре). Любой столбец (любая строка) матрицы A является линейной комбинацией ее базисных столбцов (базисных строк).

Доказательство. Все рассуждения проведем для столбцов. Поскольку при произвольных переменных столбцов (или строк) определитель сохраняет свойство равенства нулю, можно, не ограничивая общности, считать, что базисный минор расположен в левом верхнем углу матрицы (4.2.1), т. е. на первых r строках и первых r столбцах матрицы A . Пусть s – любое целое число от 1 до n , а k – любое целое число от 1 до m . Рассмотрим определитель $(r+1)$ -го порядка:

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1r} & \alpha_{1s} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2r} & \alpha_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{r1} & \alpha_{r2} & \dots & \alpha_{rr} & \alpha_{rs} \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \dots & \alpha_{kr} & \alpha_{ks} \end{vmatrix}.$$

Если $k \leq r$, определитель $D = 0$, так как в нем имеются две одинаковые строки. Аналогично $D = 0$ при $s \leq r$. Если $k > r$ и $s > r$, то $D = 0$ как минор $(r+1)$ -го порядка матрицы A ранга r . Следовательно, $D = 0$ при любых значениях k и s .

Разложив определитель D по последней строке, мы получим равенство

$$\alpha_{k1}A_{k1} + \alpha_{k2}A_{k2} + \dots + \alpha_{kr}A_{kr} + \alpha_{ks}A_{ks} = 0, \quad (4.2.2)$$

где числа $A_{k1}, A_{k2}, \dots, A_{kr}, A_{ks}$ означают алгебраические дополнения элементов $\alpha_{k1}, \alpha_{k2}, \dots, \alpha_{kr}, \alpha_{ks}$ соответственно. Эти алгебраические дополнения не зависят от числа k , так как образуются с помощью элементов α_{ij} с $i \leq r$. Это позволяет ввести обозначения

$$A_{k1} = c_1, A_{k2} = c_2, \dots, A_{kr} = c_r, A_{ks} = c_s.$$

Подставляя в равенство (4.2.2) последовательно значения $k = 1, 2, \dots, m$, получаем систему равенств

$$\begin{cases} \alpha_{11}c_1 + \alpha_{12}c_2 + \dots + \alpha_{1r}c_r + \alpha_{1s}c_s = 0, \\ \alpha_{21}c_1 + \alpha_{22}c_2 + \dots + \alpha_{2r}c_r + \alpha_{2s}c_s = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \alpha_{m1}c_1 + \alpha_{m2}c_2 + \dots + \alpha_{mr}c_r + \alpha_{ms}c_s = 0. \end{cases} \quad (4.2.3)$$

Учитывая, что $c_s \neq 0$, так как c_s — алгебраическое дополнение A_{ks} есть базисный минор матрицы A , мы можем поделить каждое из полученных равенств (4.2.3) на c_s и, перенеся все слагаемые, кроме последнего, в правую часть, с учетом обозначения

$$\lambda_j = -\frac{c_j}{c_s}, \quad j = 1, 2, \dots, r,$$

будем иметь

$$\begin{cases} \alpha_{1s} = \lambda_1\alpha_{11} + \lambda_2\alpha_{12} + \dots + \lambda_r\alpha_{1r}, \\ \alpha_{2s} = \lambda_1\alpha_{21} + \lambda_2\alpha_{22} + \dots + \lambda_r\alpha_{2r}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \alpha_{ms} = \lambda_1\alpha_{m1} + \lambda_2\alpha_{m2} + \dots + \lambda_r\alpha_{mr}, \end{cases}$$

т. е. s -й столбец матрицы A является линейной комбинацией первых r столбцов этой матрицы (с коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$). Поскольку s может быть любым числом от 1 до m , теорема доказана. ■

Теорема 4.2.2. Если один из столбцов определителя D является линейной комбинацией других его столбцов, то $D = 0$.

Доказательство. Пусть, например, q -й столбец определителя D является линейной комбинацией $i, j, \dots, k$ -го столбцов этого определителя с коэффициентами $\lambda_i, \lambda_j, \dots, \lambda_k$ соответственно. Тогда, вычитая из q -го столбца i -й столбец, умноженный на λ_i , затем j -й столбец, умноженный на λ_j , ..., наконец k -й столбец, умноженный на λ_k , мы не изменяем определитель D , но в результате q -й столбец будет состоять из одних нулей, откуда вытекает, что $D = 0$. ■

Теорема 4.2.3. Если определитель $D = 0$, то у него имеется столбец (по крайней мере, один), являющийся линейной комбинацией других столбцов.

Доказательство. Поскольку $D = 0$, базисный минор имеет порядок $r < n$, где n – порядок D . Поэтому после выделения r базисных столбцов мы сможем найти, по меньшей мере, один столбец, не вошедший в число базисных. В силу теоремы о базисном миноре он представляет собой некоторую линейную комбинацию базисных столбцов. ■

Теорема 4.2.4. Определитель $D = 0$ тогда и только тогда, когда между его столбцами (строками) существует линейная зависимость.

Доказательство очевидно.

Теорема 4.2.5. Ранг произвольной матрицы A равен максимальному числу линейно независимых столбцов (или строк) этой матрицы.

Доказательство. Проведем все рассуждения для столбцов (для строк они аналогичны). Рассмотрим линейную оболочку векторов – столбцов матрицы (4.2.1). Предположим, что число базисных столбцов матрицы равно r . Из теоремы о базисном миноре вытекает, что базис указанной линейной оболочки будут составлять базисные столбцы матрицы A . При этом размерность линейной оболочки r будет совпадать с рангом матрицы A . ■

Теорема 4.2.6. Если ранг матрицы A меньше, чем число ее столбцов, то столбцы матрицы A линейно зависимы. Если ранг матрицы A равен числу столбцов, то столбцы матрицы A линейно независимы.

Теорема 4.2.7. Всякие $(r+1)$ столбцов матрицы A ранга r линейно зависимы.

Теорема 4.2.8. Максимальное количество линейно независимых строк любой матрицы совпадает с максимальным количеством ее линейно независимых столбцов.

Упражнения

1. Укажите, какие из выписанных ниже соотношений возможны. Какие из них выполнены для произвольной пары матриц одинаковых размеров?

- а) $\text{rg}(A+B) = \text{rg} A$;
- б) $\text{rg}(A+B) = \max(\text{rg} A, \text{rg} B)$;
- в) $\text{rg}(A+B) = \text{rg} A + \text{rg} B$;
- г) $\text{rg}(A+B) < \min(\text{rg} A, \text{rg} B)$;
- д) $\text{rg}(A+B) < \text{rg} A + \text{rg} B$;
- е) $\text{rg}(A+B) \leq \text{rg} A + \text{rg} B$.

2. Докажите, что $\text{rg} \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} = \text{rg} A_{11} + \text{rg} A_{22}$.

3. Докажите, что $\text{rg} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \geq \text{rg} A_{11} + \text{rg} A_{22}$.

§ 4.3. НЕТРИВИАЛЬНАЯ СОВМЕСТИМОСТЬ ОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Пусть дана однородная система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n = 0, \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \dots + \alpha_{mn}x_n = 0. \end{cases} \quad (4.3.1)$$

Отметим, что эта система всегда совместна, поскольку она обладает так называемым тривиальным (или нулевым) решением

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0.$$

Возникает вопрос о том, при каких условиях однородная система (4.3.1) имеет, кроме указанного тривиального решения, еще и другие решения (т. е. является «нетривиально совместной»).

Этот вопрос решается довольно просто. Заметим, что существование нетривиального решения системы (4.3.1) эквивалентно линейной зависимости столбцов матрицы (4.2.1), так как линейная зависимость столбцов матрицы (4.2.1) означает, что существуют числа $x_1, x_2, \dots, x_n$, не все равные нулю, такие, что справедливы равенства (4.3.1).

В силу теоремы 4.2.1 о базисном миноре линейная зависимость столбцов матрицы (4.2.1) будет иметь место тогда и только тогда, когда не все столбцы этой матрицы являются базисными, т. е. тогда и только тогда, когда порядок r базисного минора матрицы (4.2.1) меньше числа n ее столбцов. Отсюда вытекает следующая

Теорема 4.3.1. Однородная система (4.3.1) имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда ранг r матрицы (4.2.1) меньше числа n ее столбцов. Если ранг матрицы (4.2.1) равен числу n , то система (4.3.1) не имеет ненулевых решений.

§ 4.4. УСЛОВИЕ СОВМЕСТИСТИ НЕОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Установим теперь необходимое и достаточное условие совместности неоднородной системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1, \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \dots + \alpha_{mn}x_n = \beta_m. \end{cases} \quad (4.4.1)$$

С этой системой связаны две матрицы: матрица A , определяемая соотношением

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}, \quad (4.4.2)$$

которая называется **основной матрицей системы** (4.4.1), и матрица

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} & \beta_m \end{pmatrix}, \quad (4.4.3)$$

которая называется **расширенной матрицей системы** (4.4.1).

Теорема 4.4.1 (Кронекера – Капелли). Неоднородная система линейных алгебраических уравнений (4.4.1) совместна тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы этой системы равен рангу основной матрицы.

Доказательство. Необходимость. Пусть система (4.4.1) совместна, т. е. существуют такие числа $c_1, c_2, \dots, c_n$, что справедливы равенства

$$\begin{cases} \alpha_{11}c_1 + \alpha_{12}c_2 + \dots + \alpha_{1n}c_n = \beta_1, \\ \alpha_{21}c_1 + \alpha_{22}c_2 + \dots + \alpha_{2n}c_n = \beta_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \alpha_{m1}c_1 + \alpha_{m2}c_2 + \dots + \alpha_{mn}c_n = \beta_m. \end{cases} \quad (4.4.4)$$

Обозначим через r ранг основной матрицы системы (4.4.1) и рассмотрим линейную оболочку r базисных столбцов этой матрицы. В силу теоремы 4.2.1 о базисном миноре любой столбец основной матрицы принадлежит указанной линейной оболочке L . Иными словами, любой столбец расширенной матрицы (4.4.3), кроме последнего ее столбца, принадлежит указанной линейной оболочке L .

Из соотношения (4.4.4) следует, что и последний столбец расширенной матрицы (4.4.3) принадлежит линейной оболочке L (поскольку этот последний столбец в силу формулы (4.4.4) линейно выражается через все столбцы основной матрицы и поэтому линейно выражается через ее базисные столбцы).

Таким образом, все столбцы расширенной матрицы (4.4.3) принадлежат указанной линейной оболочке L . Ранее (см. теорему 4.2.5) мы установили, что размерность указанной линейной оболочки L равна r . Это означает, что любые $(r + 1)$ столбцов расширенной матрицы (4.4.3) линейно зависимы, т. е. ранг расширенной матрицы (равный максимальному числу линейно независимых столбцов этой матрицы), также равен числу r .

Достаточность. Пусть ранги основной и расширенной матрицы совпадают. Тогда r базисных столбцов основной матрицы будут базисными столбцами и в расширенной матрице (4.4.3). Тогда по теореме 4.2.1 о базисном миноре последний столбец расширенной матрицы (4.4.3) представляет собой некоторую линейную комбинацию r базисных столбцов. Следовательно, последний столбец расширенной матрицы (4.4.3) представляет собой некоторую линейную комбинацию всех столбцов основной матрицы (4.4.2), т. е. существуют числа $c_1, c_2, \dots, c_n$, удовлетворяющие равенству (4.4.4). Это означает, что числа $c_1, c_2, \dots, c_n$ представляют собой решение системы (4.4.1), т. е. эта система является совместной. ■

§ 4.5. ОБЩИЕ РЕШЕНИЯ ОДНОРОДНОЙ И НЕОДНОРОДНОЙ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Снова рассмотрим однородную систему m линейных уравнений с n неизвестными (4.3.1), предполагая, что матрица (4.4.2) имеет ранг, равный r и что базисный минор расположен в левом верхнем углу этой матрицы.

Убедимся, что совокупность всех решений однородной системы (4.3.1) образует линейное пространство.

Пусть $x_1 = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})^T$ и $x_2 = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(2)})^T$ – два произвольных решения однородной системы (4.3.1), а λ – любое число из поля F . В силу того, что каждое решение однородной системы (4.3.1) является элементом арифметического пространства F_n , достаточно показать, что каждый из двух векторов

$$x_1 + x_2 = (x_1^{(1)} + x_1^{(2)}, x_2^{(1)} + x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(1)} + x_n^{(2)})^T$$

и

$$\lambda x_1 = (\lambda x_1^{(1)}, \lambda x_2^{(1)}, \dots, \lambda x_n^{(1)})^T$$

также является решением однородной системы (4.3.1).

Рассмотрим любое уравнение системы (4.3.1), например i -е уравнение, и подставим в это уравнение указанные векторы. Учитывая, что x_1 и x_2 – решения однородной системы, будем иметь

$$\sum_{k=1}^n \alpha_{ik} (x_k^{(1)} + x_k^{(2)}) = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} x_k^{(1)} + \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} x_k^{(2)} = 0 + 0 = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n \alpha_{ik} (\lambda x_k^{(1)}) = \lambda \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} x_k^{(1)} = \lambda \cdot 0 = 0,$$

а это означает, что векторы $x_1 + x_2$ и λx_1 являются решениями однородной системы (4.3.1).

Итак, совокупность всех решений однородной системы (4.3.1) образует линейное пространство. Найдем его размерность и построим в нем базис.

Покажем, что размерность пространства решений однородной системы линейных алгебраических уравнений (4.3.1) с n неизвестными равна $n - r$, где r – ранг системы (4.3.1).

Если $n = r$, то система (4.3.1) имеет единственное нулевое решение и пространство решений имеет размерность 0.

Пусть $n > r$. Не нарушая общности рассуждений, будем считать первые r строк основной матрицы линейно независимыми, ограничившись рассмотрением уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r + a_{1,r+1}x_{r+1} + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2r}x_r + a_{2,r+1}x_{r+1} + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rr}x_r + a_{r,r+1}x_{r+1} + \dots + a_{rn}x_n = 0. \end{cases}$$

Перенеся свободные неизвестные $x_{r+1}, \dots, x_n$ в правые части соответствующих уравнений, получим систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r = -a_{1,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2r}x_r = -a_{2,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{2n}x_n, \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rr}x_r = -a_{r,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{rn}x_n. \end{cases}$$

Полагая последовательно

$$\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix},$$

находим $n-r$ линейно независимых решений

$$x^1 = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ \dots \\ x_r^{(1)} \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, x^2 = \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ \dots \\ x_r^{(2)} \\ 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, x^{n-r} = \begin{pmatrix} x_1^{(n-r)} \\ x_2^{(n-r)} \\ \dots \\ x_r^{(n-r)} \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Покажем, что всякое решение $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r, \xi_{r+1}, \dots, \xi_n)^T$ однородной системы (4.3.1) линейно выражается через $x^1, x^2, \dots, x^{n-r}$. Рассмотрим вектор

$$x^0 = x - \xi_{r+1}x^1 - \xi_{r+2}x^2 - \dots - \xi_n x^{n-r}.$$

Легко видеть, что все последние $n-r$ координат вектора x^0 равны нулю, т. е.

$$x^0 = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r, 0, \dots, 0)^T.$$

Отсюда вытекает равенство нулю $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r$, что равносильно $x^0 = 0$ и, следовательно,

$$x = \xi_{r+1}x^1 + \dots + \xi_n x^{n-r}.$$

Совокупность линейно независимых решений $x^1, x^2, \dots, x^{n-r}$ однородной системы линейных алгебраических уравнений называется **фундаментальной системой решений**, если любое решение этой системы может быть представлено в виде линейной комбинации векторов этой совокупности.

Таким образом, для однородной системы, если $n=r$, то система имеет единственное нулевое решение; если же $n > r$, то множество решений системы образует подпространство в F_n размерности $n-r$ и базисом этого подпространства является фундаментальная система решений.

Установим связь между решениями неоднородной системы линейных алгебраических уравнений $Ax = b$ и соответствующей ей однородной системы $Ax = 0$.

Пусть x^1 и x^2 — два произвольных решения неоднородной системы. Тогда

$$A(x^1 - x^2) = Ax^1 - Ax^2 = b - b = 0,$$

т. е. разность двух произвольных решений неоднородной системы x^1, x^2 является решением соответствующей однородной системы. Выбирая в качестве x^1 общее решение неоднородной системы, а в качестве x^2 – какое-либо ее частное решение, отсюда приходим к следующей теореме.

Теорема 4.5. Общее решение неоднородной системы линейных алгебраических уравнений есть сумма частного решения неоднородной системы и общего решения соответствующей однородной системы.

Глава 5

ЕВКЛИДОВЫ И УНИТАРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 5.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

Будем говорить, что в вещественном пространстве L определено **скалярное произведение**, если каждой паре векторов $x, y \in L$ поставлено в соответствие действительное число, обозначаемое через (x, y) , причем это соответствие удовлетворяет следующим аксиомам:

1°. $(x, y) = (y, x)$ (скалярное произведение симметрично);

2°. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y) \quad \forall \lambda \in R$;

3°. $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$ (дистрибутивность скалярного произведения);

4°. $(x, x) \geq 0$ и $(x, x) = 0$ только при $x = 0$.

Вещественное линейное пространство L со скалярным произведением называется **евклидовым пространством** и обозначается E .

ПРИМЕРЫ ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

1. В линейном пространстве V_3 , описанном в § 3.1, скалярное произведение векторов можно определить как произведение длины этих векторов на косинус угла между ними.

2. В пространстве R_n (см. § 3.1) скалярное произведение векторов $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ и $y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ определим формулой

$$(x, y) = \xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 + \dots + \xi_n \eta_n. \quad (5.1.1)$$

Легко проверить, что аксиомы 1° – 3° действительно выполнены. Аксиома 4° также справедлива, поскольку

$$(x, x) = \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \geq 0 \quad \text{и} \quad (x, x) = \sum_{i=1}^n \xi_i^2 = 0$$

только при $\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_n = 0$.

Заметим, что соотношение (5.1.1) – не единственный способ введения скалярного произведения в R_n .

Зададимся некоторой квадратной матрицей $A = [\alpha_{ij}]$ ($i = \overline{1, n}$; $j = \overline{1, n}$). Скалярное произведение векторов x и y определим формулой

[illegible]

Выясним, какие условия нужно наложить на матрицу A , чтобы выражение, определяемое формулой (5.1.2), действительно удовлетворяло всем аксиомам скалярного произведения.

Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что аксиомы 2° и 3° выполнены для всякой матрицы A . Для того чтобы была выполнена аксиома 1°, необходимо и достаточно выполнения равенства

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji}, \quad (5.1.3)$$

т. е. матрица A должна быть симметричной.

Аксиома 4° требует, чтобы выражение

$$(x, x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \xi_i \xi_j \quad (5.1.4)$$

было неотрицательно для любых $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ и обращалось в нуль только при $\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_n = 0$. Это – условие положительной определенности квадратичной формы (5.1.4); о том, как его проверять, речь пойдет в следующем учебном пособии.

Итак, всякая матрица A задает скалярное произведение, определяемое формулой (5.1.2), если только эта матрица симметрична [условие (5.1.3)] и соответствующая ей квадратичная форма положительно определена.

Упражнение

Рассмотрим пространство квадратных матриц порядка n . Какие из перечисленных соотношений можно принять за скалярное произведение в этом пространстве:

- а) $\varphi(A, B) = \text{tr} AB$;
- б) $\varphi(A, B) = \text{tr} A \cdot \text{tr} B$;
- в) $\varphi(A, B) = \det AB$;
- г) $\varphi(A, B) = \text{tr} A^T B$?

§ 5.2. ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

Теорема 5.2.1. Для любых двух векторов x и y произвольного евклидова пространства E справедливо следующее неравенство Коши – Буняковского:

$$(x, y)^2 \leq (x, x)(y, y). \quad (5.2.1)$$

Доказательство. Рассмотрим вектор $\lambda x - y$, где λ – произвольное действительное число. Согласно аксиоме 4° скалярного произведения

$$(\lambda x - y, \lambda x - y) \geq 0,$$

т. е. для любого λ

$$\lambda^2(x, x) - 2\lambda(x, y) + (y, y) \geq 0.$$

Стоящий слева квадратный относительно λ трехчлен принимает лишь неотрицательные значения. Следовательно, дискриминант уравнения

$$\lambda^2(x, x) - 2\lambda(x, y) + (y, y) = 0$$

не может быть положительным, т. е.

$$(x, y)^2 - (x, x)(y, y) \leq 0.$$

■

Выясним, когда в неравенстве (5.2.1) возможен знак равенства.

Теорема 5.2.2. Неравенство Коши – Буняковского обращается в равенство тогда и только тогда, когда векторы x и y коллинеарны.

Доказательство. *Достаточность.* Пусть векторы x и y коллинеарны, т. е., например, $x = \lambda y$. Тогда

$$(x, y)^2 = (\lambda y, y)^2 = \lambda^2 (y, y)^2.$$

С другой стороны,

$$(x, x)(y, y) = (\lambda y, \lambda y)(y, y) = \lambda^2 (y, y)^2.$$

Сравнение левых частей двух последних равенств показывает, что достаточность утверждения теоремы имеет место.

Необходимость. Пусть теперь для некоторых векторов x, y выполняется равенство

$$(x, y)^2 = (x, x)(y, y). \quad (5.2.2)$$

Если $y = 0$, то векторы коллинеарны. Если же $y \neq 0$, выберем $\lambda = \frac{(x, y)}{(y, y)}$. С учетом (5.2.2) получаем

$$\begin{aligned}
 (x - \lambda y, x - \lambda y) &= (x, x) - 2\lambda (x, y) + \lambda^2 (y, y) = \\
 &= (x, x) - 2 \frac{(x, y)^2}{(y, y)} + \frac{(x, y)^2}{(y, y)} = \frac{(x, x)(y, y) - (x, y)^2}{(y, y)} = 0.
 \end{aligned}$$

В силу аксиомы 4° скалярного произведения это означает, что $x - \lambda y = 0$, т. е. векторы x и y коллинеарны. ■

ПРИМЕР

Неравенство Коши – Буняковского в пространстве R_n со скалярным произведением (5.1.1) записывается следующим образом:

$$\left(\sum_{i=1}^n \xi_i \eta_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n \xi_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n \eta_i^2 \right),$$

где ξ_i, η_i – произвольные действительные числа.

Введем в произвольном евклидовом пространстве понятие нормы (или длины) вектора.

Действительное линейное пространство L называется **нормированным**, если каждому вектору x ставится в соответствие вещественное число, обозначаемое символом $\|x\|$ и называемое **нормой** (длиной) указанного вектора. При этом предполагается выполнение следующих трех аксиом:

$$1^\circ. \|x\| > 0, \text{ если } x \neq 0, \text{ и } \|x\| = 0, \text{ если } x = 0;$$

$$2^\circ. \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall x \in L, \quad \forall \lambda \in R;$$

$$3^\circ. \forall x, y \in L \text{ справедливо неравенство}$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad (5.2.3)$$

называемое **неравенством треугольника** (или **неравенством Минковского**).

Теорема 5.2.3. Всякое евклидово пространство является нормированным, если в нем норма любого вектора x определяется равенством

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}. \quad (5.2.4)$$

Доказательство. Нужно показать, что для нормы, введенной соотношением (5.2.4), справедливы аксиомы $1^\circ - 3^\circ$ из определения нормированного пространства.

Справедливость аксиомы 1° для нормы сразу вытекает из аксиомы 4° скалярного произведения. Справедливость аксиомы 2° для нормы почти непосредственно следует из аксиом 1° и 2° скалярного произведения.

Убедимся в справедливости аксиомы 3° , т. е. неравенства (5.2.3). Запишем неравенство Коши – Буняковского в виде

$$|(x, y)| \leq \sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)}. \quad (5.2.5)$$

С помощью последнего неравенства, аксиом $1^\circ - 4^\circ$ скалярного произведения и определения нормы получим

$$\begin{aligned} \|x + y\| &= \sqrt{(x + y, x + y)} = \sqrt{(x, x) + 2(x, y) + (y, y)} \leq \\ &\leq \sqrt{(x, x) + 2\sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)} + (y, y)} = \sqrt{(\sqrt{(x, x)} + \sqrt{(y, y)})^2} = \\ &= \sqrt{(x, x)} + \sqrt{(y, y)} = \|x\| + \|y\|. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

В любом евклидовом пространстве можно ввести понятие угла между двумя произвольными векторами x и y этого пространства.

Углом φ между векторами $x, y \in E$ назовем угол, косинус которого определяется выражением

$$\cos \varphi = \frac{(x, y)}{\|x\|\|y\|} = \frac{(x, y)}{\sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)}},$$

где $0 \leq \varphi \leq \pi$.

Это определение угла корректно, так как в силу неравенства Коши – Буняковского дробь, стоящая в правой части последнего равенства, по модулю не превосходит единицы.

Два произвольных вектора x и y евклидова пространства E называются **ортогональными**, если $(x, y) = 0$ (в этом случае угол φ между векторами x и y равен $\pi/2$).

Теорема 5.2.4 (Пифагора). Если $x, y \in E$ ортогональны, то

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2,$$

т. е. квадрат длины гипотенузы равен сумме длин квадратов катетов.

Доказательство.

$$\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) = \|x\|^2 + \|y\|^2. \quad \blacksquare$$

Эту теорему можно обобщить: если векторы $x, y, \dots, z$ ортогональны, то

$$\|x + y + \dots + z\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \dots + \|z\|^2.$$

Упражнение

Запишите неравенство Минковского в пространстве R_n со скалярным произведением (5.1.1).

§ 5.3. ОРТОНОРМИРОВАННЫЙ БАЗИС ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

Будем говорить, что n векторов $e_1, e_2, \dots, e_n$ n -мерного евклидова пространства E образуют **ортонормированный базис** этого пространства, если эти векторы попарно ортогональны и норма каждого из них равна единице, т. е. если

$$(e_i, e_k) = \delta_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq k, \\ 1 & \text{при } i = k. \end{cases} \quad (5.3.1)$$

δ_{ik} в равенстве (5.3.1) называется **символом Кронекера**.

Если же $(e_i, e_k) = 0$ при $i \neq k$ и $(e_i, e_i) \neq 1$, то базис называется **ортонормальным**.

Установим корректность приведенного определения, т. е. докажем, что векторы $e_1, e_2, \dots, e_n$ линейно независимы. Для этого покажем, что равенство

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n = 0$$

возможно, лишь когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Действительно,

$$\begin{aligned} 0 &= (0, e_i) = (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n, e_i) = \\ &= \alpha_1 (e_1, e_i) + \alpha_2 (e_2, e_i) + \dots + \alpha_n (e_n, e_i) = \alpha_i (e_i, e_i). \end{aligned}$$

Поскольку $(e_i, e_i) \neq 0$, отсюда следует что $\alpha_i = 0 \quad \forall i = \overline{1, n}$. Следовательно, векторы $e_1, e_2, \dots, e_n$ линейно независимы.

Теорема 5.3.1. Во всяком n -мерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.

Доказательство. Выберем некоторый базис $f_1, f_2, \dots, f_n$ в евклидовом пространстве E . Построим ортонормированный базис $e_1, e_2, \dots, e_n$, векторы которого линейно выражаются через $f_1, f_2, \dots, f_n$. Начнем с построения ортогонального базиса $g_1, g_2, \dots, g_n$.

Положим

$$g_1 = f_1.$$

Вектор g_2 будем искать в виде $g_2 = f_2 + \alpha_{21} g_1$.

Число α_{21} подберем так, чтобы $(g_2, g_1) = 0$, т. е.

$$(f_2 + \alpha_{21} g_1, g_1) = 0.$$

Отсюда

$$\alpha_{21} = -\frac{(f_2, g_1)}{(g_1, g_1)}.$$

Предположим, что попарно ортогональные и отличные от нуля векторы $g_1, g_2, \dots, g_{k-1}$ уже построены. Вектор g_k ищем в виде

$$g_k = f_k + \alpha_{k1}g_1 + \alpha_{k2}g_2 + \dots + \alpha_{k,k-1}g_{k-1},$$

т. е. вектор g_k мы получаем из вектора f_k «исправлением» его с помощью линейной комбинации уже построенных векторов $g_1, g_2, \dots, g_{k-1}$. Коэффициенты $\alpha_{k1}, \alpha_{k2}, \dots, \alpha_{k,k-1}$ находим из условия ортогональности вектора g_k к векторам $g_1, g_2, \dots, g_{k-1}$:

$$\begin{aligned} (g_k, g_i) &= (f_k + \alpha_{k1}g_1 + \alpha_{k2}g_2 + \dots + \alpha_{k,k-1}g_{k-1}, g_i) = \\ &= (f_k, g_i) + \alpha_{k1}(g_1, g_i) + \alpha_{k2}(g_2, g_i) + \dots + \alpha_{k,k-1}(g_{k-1}, g_i) = \\ &= (f_k, g_i) + \alpha_{ki}(g_i, g_i) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\alpha_{ki} = -\frac{(f_k, g_i)}{(g_i, g_i)}, \quad \forall i = \overline{1, k-1}. \quad (5.3.2)$$

До сих пор мы не использовали то, что векторы $f_1, f_2, \dots, f_n$ линейно независимы. Используем это при доказательстве того, что построенный вектор g_k отличен от нулевого. Заметим, что вектор g_k есть линейная комбинация векторов $f_k, g_1, g_2, \dots, g_{k-1}$. Но вектор g_{k-1} можно заменить линейной комбинацией вектора f_{k-1} и векторов $g_1, g_2, \dots, g_{k-2}$ и т. д. Окончательно получаем, что вектор g_k записывается в виде

$$g_k = f_k + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_{k-1} f_{k-1}.$$

Отсюда следует, что $g_k \neq 0$. Действительно, в противном случае правая часть последнего равенства была бы нулевым вектором, что

противоречит линейной независимости векторов $f_1, f_2, \dots, f_k$, так как коэффициент при f_k равен 1. Таким образом, доказано, что $g_k \neq 0$.

Мы построили по векторам $g_1, g_2, \dots, g_{k-1}$ и f_k вектор g_k . Аналогично по векторам $g_1, g_2, \dots, g_k$ и f_{k+1} мы построим g_{k+1} и т.д.

Продолжая этот процесс до тех пор, пока не будут исчерпаны заданные векторы $f_1, f_2, \dots, f_n$, получаем n ненулевых попарно ортогональных векторов $g_1, g_2, \dots, g_n$.

Если заменить векторы g_k векторами

$$e_k = \frac{g_k}{\|g_k\|}, \quad \forall k = \overline{1, n},$$

то это будут попарно ортогональные вектора длиной 1, т. е. мы получим ортонормированный базис. ■

Отметим, что использованный при доказательстве теоремы 5.3.1 алгоритм построения ортогональной системы векторов часто называют **процессом ортогонализации Грама – Шмидта**.

В каждом n -мерном евклидовом пространстве E существует множество ортонормированных базисов.

Примером ортонормированного базиса евклидова пространства R_n со скалярным произведением (5.1.1) может служить следующая совокупность векторов:

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \quad e_n = (0, 0, 0, \dots, 1).$$

§ 5.4. СВОЙСТВА ОРТОНОРМИРОВАННОГО БАЗИСА ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ – произвольный ортонормированный базис n -мерного евклидова пространства E , а x и y – два произвольных вектора этого пространства. Найдем выражение скалярного произведения (x, y) этих векторов через их координаты в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Обозначим координаты векторов x и y в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ соответственно через $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ и $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$, т. е. предположим, что $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n$, $y = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \dots + \eta_n e_n$. В силу аксиом скалярного произведения и соотношения (5.3.1) получим

$$\begin{aligned} (x, y) &= \left(\sum_{i=1}^n \xi_i e_i, \sum_{k=1}^n \eta_k e_k \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \xi_i \eta_k (e_i, e_k) = \xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 + \dots + \xi_n \eta_n. \end{aligned} \quad (5.4.1)$$

Таким образом, **в ортонормированном базисе скалярное произведение двух любых векторов равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов.**

Рассмотрим теперь в n -мерном евклидовом пространстве E совершенно произвольный (вообще говоря, не ортонормированный) базис $f_1, f_2, \dots, f_n$ и найдем выражение скалярного произведения двух произвольных векторов x и y через координаты этих векторов в указанном базисе.

Обозначим координаты векторов x и y в базисе $f_1, f_2, \dots, f_n$ соответственно через $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ и $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$, т. е. предположим, что $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n$, $y = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \dots + \mu_n e_n$. Пользуясь аксиомами скалярного произведения, получаем

$$(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i, \sum_{k=1}^n \mu_k f_k \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \lambda_i \mu_k (f_i, f_k).$$

Таким образом, **в произвольном базисе $f_1, f_2, \dots, f_n$ евклидова пространства скалярное произведение двух любых векторов**

$$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n \text{ и } y = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \dots + \mu_n e_n$$

определяется равенством

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} \lambda_i \mu_k, \quad (5.4.2)$$

где матрица $[\alpha_{ik}]$ ($i = \overline{1, n}; \quad k = \overline{1, n}$) имеет элементы $\alpha_{ik} = (f_i, f_k)$.

Последнее утверждение приводит к следующему результату: для того чтобы в данном базисе $f_1, f_2, \dots, f_n$ евклидова пространства E скалярное произведение двух любых векторов было равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов, необходимо и достаточно, чтобы базис $f_1, f_2, \dots, f_n$ был ортонормированным.

В самом деле, выражение (5.4.2) переходит в (5.4.1) тогда и только тогда, когда матрица $[\alpha_{ik}]$ с элементами $\alpha_{ik} = (f_i, f_k)$ является единичной, т. е. тогда и только тогда, когда выполнено соотношение

$$(f_i, f_k) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq k, \\ 1 & \text{при } i = k, \end{cases}$$

устанавливающее ортонормированность базиса $f_1, f_2, \dots, f_n$.

Вернемся к рассмотрению произвольного ортонормированного базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$ n -мерного евклидова пространства E . Выясним смысл координат произвольного вектора x относительно указанного базиса.

Обозначим координаты вектора x в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ через $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, т. е. предположим, что $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n$. Умножив обе части данного равенства скалярно на вектор e_k , получим

$$(x, e_k) = \left(\sum_{i=1}^n \xi_i e_i, e_k \right) = \sum_{i=1}^n \xi_i (e_i, e_k) = \xi_k, \quad k = \overline{1, n}.$$

Таким образом, координаты произвольного вектора относительно ортонормированного базиса равны скалярным произведениям этого вектора на соответствующие базисные векторы.

§ 5.5. РАЗЛОЖЕНИЕ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА НА ОРТОГОНАЛЬНУЮ СУММУ ПОДПРОСТРАНСТВА И ЕГО ОРТОГОНАЛЬНОГО ДОПОЛНЕНИЯ

Кроме ортогональных векторов в евклидовом пространстве будем рассматривать и ортогональные множества векторов. Два множества G и H векторов евклидова пространства E называются **ортогональными**, если каждый вектор из G ортогонален к каждому вектору из H . Ортогональность G и H обозначается так: $G \perp H$.

Лемма 5.5.1. Для того чтобы вектор x был ортогонален подпространству L , необходимо и достаточно, чтобы он был ортогонален всем векторам какого-либо базиса подпространства L .

Доказательство. Необходимость. Зафиксируем базис $e_1, e_2, \dots, e_k$ подпространства L . Если $x \perp L$, то x ортогонален ко всем векторам из L и, в частности, к векторам $e_1, e_2, \dots, e_k$.

Достаточность. Пусть теперь $(x, e_i) = 0 \ \forall i = \overline{1, k}$. Возьмем произвольный вектор $y \in L$ и разложим его по векторам базиса. Если

$$y = \sum_{i=1}^k \eta_i e_i, \text{ то}$$

$$(x, y) = \left(x, \sum_{i=1}^k \eta_i e_i \right) = \sum_{i=1}^k \eta_i (x, e_i) = 0.$$

Это означает, что $x \perp L$. ■

Следствие. Для того чтобы два подпространства были ортогональными, необходимо и достаточно, чтобы каждый вектор какого-либо базиса одного подпространства был ортогонален ко всем векторам какого-либо базиса другого подпространства.

Сумма L подпространств $L_1, L_2, \dots, L_m$ называется **ортогональной**, если подпространства, образующие ее, попарно ортогональны. Ортогональную сумму будем обозначать так:

$$L = L_1 \oplus L_2 \oplus \dots \oplus L_m.$$

Лемма 5.5.2. Ортогональная сумма ненулевых подпространств всегда является прямой суммой.

Доказательство. Выберем в каждом подпространстве ортонормированный базис и рассмотрим систему векторов, представляющую собой объединение базисов всех подпространств. Любой вектор из ортогональной суммы линейно выражается через векторы построенной системы. Эта система линейно независима, так как состоит из ненулевых попарно ортогональных векторов. Теперь утверждение леммы вытекает из теоремы 3.6.2 о том, что L – прямая сумма подпространств $L_1, L_2, \dots, L_m$ тогда и только тогда, когда объединение базисов $L_1, L_2, \dots, L_m$ дает базис L . ■

Рассмотрим произвольное непустое множество G векторов евклидова пространства E . Совокупность всех векторов, ортогональных множеству G , называется **ортогональным дополнением** множества G и обозначается $G^\perp$.

Ортогональное дополнение есть подпространство. Действительно, если $x, y \in G^\perp$, то $x, y \in G$. Но тогда $\alpha x + \beta y \perp G \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, т. е. $\alpha x + \beta y \in G^\perp$.

Теорема 5.5.1. Евклидово пространство E есть ортогональная сумма любого своего линейного подпространства L и его ортогонального дополнения $L^\perp$, т. е. $E = L \oplus L^\perp$.

Доказательство. Пусть $\dim L = k$, $\dim L^\perp = m$. Выберем какой-либо ортонормированный базис $e_1, e_2, \dots, e_k$ подпространства L и какой-либо ортонормированный базис $f_1, f_2, \dots, f_m$ подпространства $L^\perp$. Система векторов $e_1, e_2, \dots, e_k, f_1, f_2, \dots, f_m$ – ортонормированная и, следовательно, линейно независимая.

Если эта система не является базисом E , то ее можно дополнить до ортонормированного базиса E . Пусть g – один из дополнительных векторов. Он ортогонален к $e_1, e_2, \dots, e_k$, поэтому $g \perp L$, т. е. $g \in L^\perp$. С другой стороны, вектор g ортогонален к векторам $f_1, f_2, \dots, f_m$, поэтому $g \perp L^\perp$. Следовательно, $g = 0$, что и доказывает справедливость утверждения теоремы. ■

Лемма 5.5.3. Если в евклидовом пространстве E задана некоторая система векторов $x_1, x_2, \dots, x_k$ и единственным вектором из E , ортогональным к этим векторам, является нулевой вектор, то ранг системы равен размерности E .

Доказательство. Обозначим через L линейную оболочку системы векторов $x_1, x_2, \dots, x_k$. Любой вектор, ортогональный к данным векторам, ортогонален к L , т. е. принадлежит ортогональному дополнению $L^\perp$. По условию леммы, подпространство $L^\perp$ состоит только из нулевого вектора. Поскольку $E = L \oplus L^\perp$, отсюда вытекает, что $\dim L = \dim E$. Но $\dim L$ равна рангу системы векторов $x_1, x_2, \dots, x_k$. Лемма доказана. ■

Упражнения

1. Пусть подпространства L_1 и L_2 ортогональны. Всегда ли ортогональны $L_1^\perp$ и $L_2^\perp$?
2. В пространстве квадратных матриц со стандартным скалярным произведением найдите ортогональное дополнение подпространства:
 - а) матриц со следом, равным нулю;
 - б) верхних треугольных матриц.
3. В пространстве многочленов степени не выше n со стандартным скалярным произведением найдите ортогональное дополнение пространства многочленов четной степени.

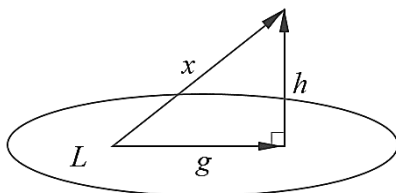
§ 5.6. НАКЛОННАЯ, ПЕРПЕНДИКУЛЯР, ПРОЕКЦИЯ

Рассмотрим в евклидовом пространстве E некоторое подпространство L и вектор x , вообще говоря, не входящий в подпространство L . Поставим задачу найти разложение

$$x = g + h, \quad (5.6.1)$$

где вектор g принадлежит подпространству L , а вектор h ортогонален к этому подпространству. Вектор g , участвующий в разложении (5.6.1), называется **проекцией** вектора x на подпространство L , а вектор h —

перпендикуляром, опущенным из конца вектора x на подпространство L . Сам вектор x при этом называется **наклонной** к подпространству L . Такие названия связаны с привычными нам геометрическими ассоциациями (см. рисунок).



Согласно теореме 5.5.1 евклидово пространство E – прямая сумма подпространств L и $L^\perp$. Поэтому разложение (5.6.1) всегда существует и притом единственно.

Покажем, как по наклонной x вычислить ее ортогональную проекцию g на подпространство L . Пусть базис подпространства L состоит из векторов $e_1, e_2, \dots, e_m$. Будем искать вектор g в виде

$$g = \chi_1 e_1 + \chi_2 e_2 + \dots + \chi_m e_m, \quad (5.6.2)$$

где коэффициенты χ_i найдем из условия ортогональности $h = x - g$ к L . Для того чтобы эта ортогональность имела место, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись m равенств $(x - g, e_i) = 0$, $i = \overline{1, m}$, т. е.

$$(g, e_i) = (x, e_i).$$

Подставляя сюда вместо g его выражение (5.6.2), получаем следующую систему из m уравнений:

$$\begin{cases} (e_1, e_1)\chi_1 + (e_2, e_1)\chi_2 + \dots + (e_m, e_1)\chi_m = (x, e_1), \\ (e_1, e_2)\chi_1 + (e_2, e_2)\chi_2 + \dots + (e_m, e_2)\chi_m = (x, e_2), \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ (e_1, e_m)\chi_1 + (e_2, e_m)\chi_2 + \dots + (e_m, e_m)\chi_m = (x, e_m), \end{cases}$$

разрешив которую найдем $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_m$, затем g и наконец h .

§ 5.7. ИЗОМОРФИЗМ ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Два евклидовых пространства E и E' называются **изоморфными**, если между векторами этих пространств можно установить взаимно однозначное соответствие так, что если векторам x и y пространства E отвечают соответственно векторы x' и y' пространства E' , то вектору $x + y$ из E отвечает вектор $x' + y'$ из E' , вектору λx из E отвечает $\lambda x'$ из E' и скалярное произведение (x, y) равно скалярному произведению (x', y') .

Таким образом, евклидовы пространства E и E' изоморфны, если они изоморфны как линейные пространства (см. § 3.6) и если этот изоморфизм сохраняет величину скалярного произведения соответствующих пар векторов.

Теорема 5.7. Все евклидовы пространства одной и той же размерности изоморфны между собой.

Доказательство. Возьмем два произвольных евклидовых пространства E и E' одинаковой размерности n . Они изоморфны как линейные пространства. Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ – ортонормированный базис в E , а $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ – ортонормированный базис в E' . Каждому вектору $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n$ пространства E поставим в соответствие вектор $x' = \xi_1 e'_1 + \xi_2 e'_2 + \dots + \xi_n e'_n$ пространства E' . Это соответствие будет изоморфизмом. Возьмем теперь другую пару векторов из E и E' : $y = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \dots + \eta_n e_n$ и $y' = \eta_1 e'_1 + \eta_2 e'_2 + \dots + \eta_n e'_n$. Согласно формуле (5.4.1) имеем

$$(x, y) = \xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 + \dots + \xi_n \eta_n = (x', y'). \quad \blacksquare$$

Доказанная теорема позволяет утверждать, что если в каком-либо конкретном n -мерном евклидовом пространстве E' доказана теорема, сформулированная в терминах операций сложения, умножения на числа и скалярного произведения, то эта теорема справедлива и в совершенно произвольном n -мерном евклидовом пространстве E .

§ 5.8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УНИТАРНОГО ПРОСТРАНСТВА

Комплексное линейное пространство U называется **унитарным**, если каждой паре векторов $x, y \in U$ поставлено в соответствие комплексное число (x, y) , называемое **скалярным произведением**, причем выполнены следующие аксиомы:

1°. $(x, y) = \overline{(y, x)}$ (под $\overline{(y, x)}$ мы понимаем число, комплексно сопряженное с (y, x));

2°. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y) \quad \forall \lambda \in C$;

3°. $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$;

4°. $(x, x) \geq 0$ и $(x, x) = 0$ только при $x = 0$.

Отметим, что при переходе к комплексному пространству невозможно сохранить без изменения аксиомы вещественного скалярного произведения. В этом случае

$$(ix, ix) = i^2(x, x) = -(x, x),$$

что противоречило бы аксиоме о неотрицательности $(y, y) \quad \forall y \in U$.

Из аксиом 1°–3° вытекают следующие два соотношения:

$$(x, \lambda y) = \overline{\lambda}(x, y), \quad (x, y + z) = (x, y) + (x, z).$$

Действительно,

$$(x, \lambda y) = \overline{(\lambda y, x)} = \overline{\lambda(y, x)} = \overline{\lambda} \overline{(y, x)} = \overline{\lambda}(x, y);$$

$$(x, y + z) = \overline{(y + z, x)} = \overline{(y, x) + (z, x)} = \overline{(y, x)} + \overline{(z, x)} = (x, y) + (x, z).$$

ПРИМЕРЫ УНИТАРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

1. В пространстве C_n (см. § 3.1) скалярное произведение векторов $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ и $y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ определим формулой

$$(x, y) = \xi_1 \bar{\eta}_1 + \xi_2 \bar{\eta}_2 + \dots + \xi_n \bar{\eta}_n. \quad (5.8.1)$$

Справедливость аксиом $1^\circ - 3^\circ$ проверяется элементарно. Справедливость аксиомы 4° вытекает из соотношения

$$(x, x) = \xi_1 \bar{\xi}_1 + \xi_2 \bar{\xi}_2 + \dots + \xi_n \bar{\xi}_n = |\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + \dots + |\xi_n|^2.$$

2. В C_n можно ввести скалярное произведение не соотношением (5.8.1), а более общим выражением

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} \xi_i \bar{\eta}_k,$$

в котором $\alpha_{ik} = \bar{\alpha}_{ki}$ и квадратичная форма $\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} \xi_i \bar{\xi}_k$ для всех комплексных $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ принимает вещественное неотрицательное значение и обращается в нуль лишь при условии $|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + \dots + |\xi_n|^2 = 0$.

Самостоятельно проверьте, что так определенное скалярное произведение удовлетворяет аксиомам $1^\circ - 4^\circ$.

§ 5.9. НЕРАВЕНСТВО КОШИ – БУНЯКОВСКОГО. ПОНЯТИЕ НОРМЫ

Докажем, что для двух векторов x и y произвольного унитарного пространства U справедливо неравенство Коши – Буняковского

$$|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y). \quad (5.9.1)$$

На основании аксиомы 4° определение унитарного пространства для любого комплексного числа λ справедливо неравенство

$$(\lambda x - y, \lambda x - y) \geq 0. \quad (5.9.2)$$

В силу аксиом $1^\circ - 3^\circ$ и следствий из них имеем

$$\begin{aligned} (\lambda x - y, \lambda x - y) &= (\lambda x, \lambda x) - (\lambda x, y) - (y, \lambda x) + (y, y) = \\ &= \lambda \bar{\lambda} (x, x) - \lambda \overline{(x, y)} - \overline{\lambda (x, y)} + (y, y) = |\lambda|^2 (x, x) - \lambda \overline{(x, y)} - \overline{\lambda (x, y)} + (y, y). \end{aligned}$$

Таким образом неравенство (5.9.2) принимает вид

$$|\lambda|^2 (x, x) - \lambda(x, y) - \overline{\lambda}(x, y) + (y, y) \geq 0. \quad (5.9.3)$$

Обозначим через φ аргумент комплексного числа (x, y) и представим это число в тригонометрической форме

$$(x, y) = |(x, y)|(\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (5.9.4)$$

Положим теперь комплексное число λ равным

$$\lambda = t(\cos \varphi - i \sin \varphi), \quad (5.9.5)$$

где t – произвольное вещественное число. Из соотношений (5.9.4) и (5.9.5) следует, что $|\lambda| = |t|$, $\lambda(x, y) = \overline{\lambda}(x, y) = t|(x, y)|$. Поэтому при выбранном нами λ неравенство (5.9.3) переходит в неравенство

$$t^2(x, x) - 2t|(x, y)| + (y, y) \geq 0, \quad (5.9.6)$$

справедливое при любом вещественном t . Необходимым и достаточным условием неотрицательности квадратного трехчлена, стоящего в левой части (5.9.6), является неположительность его дискриминанта, т. е. неравенство $|(x, y)|^2 - (x, x)(y, y) \leq 0$ эквивалентно неравенству (5.9.1). ■

С помощью неравенства Коши – Буняковского (5.9.1) и рассуждений, полностью аналогичных доказательству теоремы 5.2.3, устанавливается, что **всякое унитарное пространство является нормированным, если в нем норму любого вектора x определить соотношением**

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}. \quad (5.9.7)$$

В частности, во всяком унитарном пространстве с нормой, определяемой равенством (5.9.7), справедливо неравенство треугольника $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Отметим, что ранее введенное для евклидова пространства понятие угла φ между двумя произвольными векторами x и y теряет смысл для унитарного пространства (вследствие того, что скалярное произведение (x, y) является, вообще говоря, комплексным числом).

§ 5.10. ОРТОНОРМИРОВАННЫЙ БАЗИС УНИТАРНОГО ПРОСТРАНСТВА И ЕГО СВОЙСТВА

Векторы x и y произвольного унитарного пространства U будем называть **ортогональными**, если скалярное произведение (x, y) равно нулю.

Ортонормированным базисом n -мерного унитарного пространства называется совокупность векторов $e_1, e_2, \dots, e_n$, удовлетворяющих соотношению

$$(e_i, e_k) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq k, \\ 1 & \text{при } i = k \end{cases} \quad (5.10.1)$$

(т. е. попарно ортогональных и имеющих нормы, равные единице).

Как и в § 5.3, доказывается, что эти векторы линейно независимы и поэтому образуют базис.

В полной аналогии с доказательством теоремы 5.3.1 устанавливается существование в произвольном унитарном пространстве ортонормированного базиса.

Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ – произвольный ортонормированный базис n -мерного унитарного пространства U , а x и y – два произвольных вектора этого пространства. Найдем выражение скалярного произведения (x, y) этих векторов через их координаты в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Обозначим координаты векторов x и y в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ соответственно через $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ и $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$, т. е. предположим, что $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n$, $y = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \dots + \eta_n e_n$. В силу аксиом скалярного произведения, следствий из них и соотношения (5.10.1) получим

$$\begin{aligned} (x, y) &= \left(\sum_{i=1}^n \xi_i e_i, \sum_{k=1}^n \eta_k e_k \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \xi_i \bar{\eta}_k (e_i, e_k) = \xi_1 \bar{\eta}_1 + \xi_2 \bar{\eta}_2 + \dots + \xi_n \bar{\eta}_n. \end{aligned} \quad (5.10.2)$$

Выразим далее координаты $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ произвольного вектора x относительно ортонормированного базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Умножая разложение этого вектора по базису

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n$$

скалярно на вектор e_k , получаем

$$(x, e_k) = \left(\sum_{i=1}^n \xi_i e_i, e_k \right) = \sum_{i=1}^n \xi_i (e_i, e_k) = \xi_k, \quad k = \overline{1, n}.$$

Как и в случае евклидова пространства, **координаты произвольного вектора относительно ортонормированного базиса равны скалярным произведениям этого вектора на соответствующие базисные векторы.**

В полной аналогии с доказательством теоремы 5.7.1 устанавливается, что **все унитарные пространства одной и той же размерности изоморфны между собой.**

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Воеводин В. В.* Линейная алгебра / В. В. Воеводин. – СПб. : Лань, 2009. – 416 с.
2. *Гельфанд И. М.* Лекции по линейной алгебре / И. М. Гельфанд. – М. : Добросвет, МЦНМО, 1998. – 320 с.
3. *Головина Л. И.* Линейная алгебра и некоторые ее приложения / Л. И. Головина. – М. : Наука. Физматлит, 1985. – 392 с.
4. *Ильин В. А.* Линейная алгебра / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – М. : Наука. Физматлит, 1999. – 296 с.
5. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. – СПб. : Лань, 2020. – 432 с.
6. *Мальцев А. И.* Основы линейной алгебры / А. И. Мальцев. – СПб. : Лань, 2009. – 480 с.
7. *Шилов Г. Е.* Математический анализ (конечномерные линейные пространства) / Г. Е. Шилов. – М. : Наука. Физматлит, 1969. – 432 с.
8. *Шилов Г. Е.* Математический анализ (функции одного переменного) / Г. Е. Шилов. – М. : Наука. Физматлит, 1969. – 528 с.
9. *Икрамов Х. Д.* Задачник по линейной алгебре / Х. Д. Икрамов. – СПб. : Лань, 2006. – 320 с.
10. *Беклемишева Л. А.* Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре / Л. А. Беклемишева, А. Ю. Петрович, И. А. Чубаров. – СПб. : Лань, 2017. – 496 с.
11. *Бурдун А. А.* Сборник задач по алгебре и аналитической геометрии / А. А. Бурдун, Е. А. Мурашко, М. М. Толкачев, А. С. Феденко. – Минск : Універсітэцкае, 1999. – 302 с.
12. *Проскуряков И. В.* Сборник задач по линейной алгебре / И. В. Проскуряков. – СПб. : Лань, 2022. – 476 с.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Алгебраическое дополнение 30
Аргумент комплексного числа 13

Б

База системы векторов 51
Базис 52
– ортогональный 76
– ортонормированный 75

В

Векторы ортогональные 75, 86

Г

Грама – Шмидта процесс ортогонализации 77

И

Изоморфизм
– евклидовых пространств 83
– линейных пространств 54

К

Комплексное число 11
– алгебраическая форма 11
– тригонометрическая форма 13

Комплексно-сопряженное число 12
Координаты вектора 52
Коши – Буняковского неравенство 72, 85
Кронекера – Капелли теорема 66
Кронекера символ 76
Кронекерово произведение 39

Л

Лапласа теорема 33
Линейная комбинация 44
– оболочка 44
Линейное пространство 41
– вещественное 41
– евклидово 71
– комплексное 41
– унитарное 83

М

Матриц сумма 15
– произведение 16
– разность 16
Матрица 15
– блочная 21
– диагональная 17
– единичная 18
– квадратная, 15
– квазидиагональная 22
– клеточная 21
– комплексно-сопряженная 20
– кососимметричная 20
– невырожденная 38
– нулевая 18
– обратная, 36
– ортогональная 37
– перестановок 18

- присоединенная 38
- симметричная 20
- транспонированная 19
- унитарная 21
- эрмитова 20
- эрмитово-сопряженная 20

Матрица системы основная 34, 66

- расширенная 66

Матрицы определитель 24

- производная 40
- след 39

Матричный многочлен 18

Минковского неравенство 74, 85

Минор 30

- базисный 62
- дополнительный 33

Модуль комплексного числа 13

Н

Норма вектора 74, 85

Нормированное линейное пространство 74, 85

О

Ортогональное дополнение 80

Отношение эквивалентности 49

П

Пересечение подпространств 56

Пифагора теорема 75

Подпространство 55

Поле 8

Произведение матрицы и числа 16

Р

Разложение вектора по базису 52

Размерность пространства 52

Ранг матрицы 62

– системы векторов 51

С

Система векторов

– линейно зависимая 46

– линейно независимая 46

Система линейных алгебраических уравнений совместная 61

– несовместная 61

Скалярное произведение 71, 83

Сумма подпространств 56

– ортогональная 80

– прямая 58

У

Угол между векторами 75

Ф

Фундаментальная система решений 69

Ч

Число 8

Э

Эквивалентные системы векторов 49

Элементарные преобразования системы векторов 48, 51

Чубич Владимир Михайлович

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Учебное пособие

Редактор *И.Л. Кескевич*
Выпускающий редактор *И.П. Брованова*
Корректор *И.Е. Семенова*
Дизайн обложки *А.В. Ладыжская*
Компьютерная верстка *Л.А. Веселовская*

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции
Издание соответствует коду 95 3000 ОК 005-93 (ОКП)

Подписано в печать 20.01.2026. Формат 60 × 84 1/16. Бумага офсетная. Тираж 50 экз.
Уч.-изд. л. 6,74. Печ. л. 7,25. Изд. № 216/24. Заказ № 33. Цена договорная

Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета
630073, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20