

Современные компьютерные технологии

Модуль 1. Применение современных методов компьютерного моделирования электромагнитных полей в сложных трехмерных средах.

**Токарева М.Г., доц. каф. Прикладная математика
Новосибирский государственный технический
университет**

Представленный материал посвящен проблеме 3D-моделирования процессов становления поля и поля вызванной поляризации при возбуждении поля индукционными источниками.

Наиболее распространенной на сегодняшний день моделью является модель Cole-Cole, основанная на зависимости проводимости от частоты. Ее практическая реализация сводится к решению уравнения вида

$$\frac{1}{\mu_0} \text{rot rot } \vec{A} + \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{J}, \quad (1)$$

где $\vec{A} = \vec{A}(x, y, z, t)$ – вектор-потенциал магнитного поля (при этом индукция магнитного поля выражается через него в виде $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$), $\vec{J} = \vec{J}(x, y, z, t)$ – вектор сторонних токов, μ_0 – магнитная проницаемость вакуума.

Удельная электрическая проводимость σ с учетом модели Cole-Cole зависит от частоты и связана с ней соотношением:

$$\sigma(i\omega_k) = \sigma_\infty \left(1 - \frac{\eta}{1 + (1 - \eta)(i\omega_k \tau)^c}\right), \quad (2)$$

где η – коэффициент начальной поляризации, τ – постоянная времени, c – параметр, характеризующий спад.

Переход из частотной области во временную выполняется с помощью разложения в ряд Фурье. С учетом того, что, как правило, на практике ток в источнике изменяется по закону "ток"- "пауза" и длина периода равна $T = 4L$ (где L – время действия тока), правую часть и решение уравнения (1) можно разложить по времени в ряд Фурье:

$$\vec{J}(x, y, z, t) = \sum_{k=1,3,5,\dots} b_k (\vec{J}_k^s(x, y, z) \sin \frac{2\pi k}{T} t + \vec{J}_k^c(x, y, z) \cos \frac{2\pi k}{T} t), \quad (3)$$

$$\vec{A}(x, y, z, t) = \sum_{k=1,3,5,\dots} b_k \left(\vec{A}_k^s \sin \left(\frac{2\pi k}{T} t \right) + \vec{A}_k^c \cos \left(\frac{2\pi k}{T} t \right) \right), \quad (4)$$

где b_k – коэффициенты ряда Фурье. Вещественная и мнимая компоненты вектор-потенциала $\vec{A}_k^s = \vec{A}_k^s(x, y, z)$ и $\vec{A}_k^c = \vec{A}_k^c(x, y, z)$ могут быть найдены из решения следующей гармонической задачи

$$\frac{1}{\mu_0} \text{rot rot } \vec{\mathbf{A}}_k + i\omega_k \sigma \vec{\mathbf{A}}_k = \vec{\mathbf{J}}_k, \quad (5)$$

где $\omega_k = \frac{2\pi k}{T}$ – круговая частота, $\vec{\mathbf{A}}_k = \vec{\mathbf{A}}_k^s(x, y, z) + i\vec{\mathbf{A}}_k^c(x, y, z)$, $\vec{\mathbf{A}}_k^s$ и $\vec{\mathbf{A}}_k^c$ – соответствующие гармоники в разложении (4) вектор-потенциала $\vec{\mathbf{A}}(x, y, z, t)$, а выражения для вещественной $\sigma(\omega_k)$ и мнимой $\varepsilon(\omega_k)$ частей комплексной проводимости $\sigma(i\omega_k) = \sigma(\omega_k) + i\varepsilon(\omega_k)$ можно получить из (2).

Таким образом, для расчета процессов ВП с использованием модели Cole-Cole требуется многократное решение уравнения (5) на определенном (достаточно большом) наборе частот.

Существенного снижения вычислительных затрат при расчетах трехмерных геоэлектромагнитных полей позволяет добиться подход с разделением искомого поля на двумерную (нормальную) и трехмерную составляющие. С использованием этого подхода трехмерные гармоники $\vec{\mathbf{A}}_k^s$ и $\vec{\mathbf{A}}_k^c$ представляются в виде суммы нормальных $\vec{\mathbf{A}}_k^0$ и аномальных $\vec{\mathbf{A}}_k^a$ составляющих, и трехмерные аномальные составляющие ищутся как решения следующего уравнения

$$\frac{1}{\mu_0} \text{rot rot } \vec{\mathbf{A}}_k^a + i\omega_k \sigma \vec{\mathbf{A}}_k^a - \varepsilon \omega_k^2 \vec{\mathbf{A}}_k^a = \left(-i\omega_k (\sigma - \sigma^0) + \omega_k^2 (\varepsilon - \varepsilon^0) \right) \vec{\mathbf{E}}_k^0, \quad (6)$$

где $\vec{\mathbf{E}}_k^0$ – напряженность нормальной составляющей искомого поля, соответствующая гармоническому полю в горизонтально-слоистой среде с параметрами σ^0 , ε^0 . Аномальная (трехмерная) составляющая напряженности электрического поля может быть найдена из соотношения $\vec{\mathbf{E}}_k^a = -i\omega_k \vec{\mathbf{A}}_k^a$.

Поле $\vec{\mathbf{E}}^0$ для частоты ω_k (в дальнейшем индекс « k » у всех полей будем опускать) при его возбуждении незаземленной токовой петлей радиусом R в горизонтально-слоистой среде может быть вычислено через решение следующей задачи:

$$-\frac{1}{\mu_0}\Delta A_\varphi + \frac{1}{\mu_0 r^2}A_\varphi + (\sigma^0 i\omega_k - \varepsilon^0 \omega_k^2)A_\varphi = I\delta, \quad A_\varphi|_\Gamma = 0, \quad (7)$$

где I – величина полного тока в петле, A_φ – комплекснозначная функция, зависящая от r и z , а δ – дельта-функция, сосредоточенная на линии окружности радиусом R . Заметим, что ненулевыми для рассматриваемого источника являются только компонента $E_\varphi = -i\omega A_\varphi$ вектора напряженности электрического поля и компоненты $B_r = -\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}$ и $B_z = \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} + \frac{A_\varphi}{r}$ вектора индукции магнитного поля.

Заметим, что на практике, чаще всего используются петли прямоугольной или вообще произвольной формы. В этом случае нормальное поле вычисляется в виде суммы полей от диполей, ориентированных по контуру петли. Поле от диполя может быть найдено из решения задачи

$$-\frac{1}{\mu_0}\Delta A_l + (\sigma^0 i\omega_k - \varepsilon^0 \omega_k^2)A_l = I\delta, \quad A_l|_\Gamma = 0, \quad (8)$$

где A_l – соответствующая направлению диполя компонента вектор-потенциала, δ – дельта-функция, сосредоточенная в точке (центре отрезка контура, к которому приписан диполь), а I – величина полного тока, умноженная на длину отрезка.

Очевидно, что решение трехмерных задач (5) даже в формулировках (6)–(8) (с выделением поля вмещающей горизонтально-слоистой среды) для достаточно большого количества частот требует очень больших вычислительных затрат, поэтому задачи (6)–(8) имеет смысл решать только для некоторых k таких, чтобы остальные значения $\vec{A}_k^s$ и $\vec{A}_k^c$ можно было с необходимой точностью найти с использованием интерполяции по значениям $\vec{A}_k^s$ и $\vec{A}_k^c$ решенных задач. В данной работе интерполяция

осуществлялась с помощью кубического сплайна с непрерывными вторыми производными.

Таким образом, на заключительном этапе строятся зависимости искомых характеристик поля от времени с использованием сплайна:

$$S(t) = \sum_{i=1}^{2m} \left(q_i^s \sum_{k=1,3,5,\dots} b_k \psi_i\left(\frac{2\pi k}{T}\right) \sin\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) + q_i^c \sum_{k=1,3,5,\dots} b_k \psi_i\left(\frac{2\pi k}{T}\right) \cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) \right), \quad (9)$$

где m – количество узлов в сплайне (построенном по частотам), ψ_i – эрмитовы (одномерные) базисные функции третьего порядка, q_i^s и q_i^c – коэффициенты сплайнов, построенных по реальной и мнимой частям характеристик поля на i -й частоте, b_k – коэффициенты ряда Фурье (в разложении импульса тока петли по частотам ω_k , см. (3)).

Внутренние суммы в выражении (9) не зависят от конкретной задачи, следовательно, зафиксировав точки сплайна (а значит и вид базисных функций ψ_i , а также и значения частот ω_k в решаемых задачах для уравнений (6)–(8)), можно получить некоторые коэффициенты, значения которых могут быть вычислены один раз для каждого фиксированного момента времени t . Таким образом, вычислительные затраты на получение решения $\vec{A}(x, y, z, t)$ уравнения (1) для заданного набора времен будут определяться, в основном, временем решения m гармонических задач на соответствующих частотах ω_k , являющихся узлами сплайна (9).

Несмотря на то, что при моделировании полей ВП чаще всего используют подходы, основанные на кажущейся зависимости проводимости от частоты, многочисленные опыты (В.А. Комаров и др.) по исследованию физической природы ВП показывают, что электрическое поле и токи ВП порождаются процессами, дающими источники, которые в задачах электромагнетизма принято квалифицировать как сторонние ЭДС. В соответствии с этими опытами был разработан подход к моделированию электрических полей ВП, основанный на задании ЭДС ВП.

В случае, когда используются технологии с индукционным возбуждением поля (и которые рассматриваются в данной работе), в измеряемых сигналах присутствует влияние только индукционной ВП. При использовании подхода, основанного на задании в качестве источника ЭДС ВП, напряженность электрического поля ВП $\vec{E}^{IP}$ ищется в виде антиградиента потенциала V^{IP} ($\vec{E}^{IP} = -\text{grad}V^{IP}$), который в свою очередь может быть найден из решения уравнения

$$-\text{div}(\sigma \text{grad}V^{IP}) = -\text{div}\left(\alpha(x, y, z) \int_{-\infty}^t \frac{\partial \beta(x, y, z, t - \tau)}{\partial \tau} \vec{J}^{IC} d\tau\right), \quad (10)$$

где $\vec{J}^{IC}$ – вихревые токи, протекающие в среде в процессе становления поля и определяемые из решения уравнения (1) в виде $\vec{J}^{IC} = -\sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$. Удельная электрическая проводимость σ в этом случае является вещественной функцией трех пространственных координат.

Вектор-потенциал $\vec{A}$ (также для сокращения вычислительных затрат) ищется с помощью технологии выделения поля путем решения уравнения

$$\frac{1}{\mu_0} \text{rot}(\text{rot} \vec{A}^a) + \sigma \frac{\partial \vec{A}^a}{\partial t} = (\sigma - \sigma^0) \vec{E}^0, \text{ в } \Omega, \vec{A}^a|_{\Gamma} = 0, \vec{A}^a|_{t=t_0} = 0 \quad (11)$$

где σ^0 – проводимость вмещающей (горизонтально-слоистой) среды, $\vec{A}^a$ – вектор-потенциал трехмерной части поля, $\vec{E}^0 = -\frac{\partial \vec{A}^0}{\partial t}$, $\vec{A}^0$ – вектор-потенциал нормального поля (поля вмещающей среды). Нормальное поле ищется либо путем решения уравнения (для круглой петли)

$$-\frac{1}{\mu_0} \Delta A_{\varphi} + \frac{1}{\mu_0 r^2} A_{\varphi} + \sigma^0 \frac{\partial A_{\varphi}}{\partial t} = I \delta, \quad A_{\varphi}|_{\Gamma} = 0, \quad (12)$$

либо путем решения уравнений

$$-\frac{1}{\mu_0} \Delta A_l + \sigma^0 \frac{\partial A_l}{\partial t} = I \delta, \quad A_l \Big|_{\Gamma} = 0 \quad (13)$$

(где δ – соответствующая дельта-функция) с последующим интегрированием по контуру петли.

Как будет показано далее, в качестве приемников электромагнитного поля для рассматриваемой в данном проекте технологии целесообразно использовать как гальванически заземленные приемные линии, так и индукционные (петлевые) приемники. При этом, если значение поля ВП на приемных линиях вычисляется простой разностью потенциалов V^{IP} (распределение которого на каждом временном слое ищется путем решения уравнения (10)), то для нахождения сигнала на индукционных приемниках (фактически измеряющих ЭДС, т.е. $\int -\frac{\partial B_z}{\partial t} dS$) необходимо решение дополнительной задачи вида:

$$-\frac{1}{\mu_0} \Delta \vec{A}^{\text{IP}} = \sigma \vec{E}^{\text{IP}} + \vec{J}^{\text{GR}}, \quad (14)$$

в результате решения которой может быть найдено распределение $\vec{A}^{\text{IP}}$, с помощью которого в свою очередь на каждом временном слое может быть вычислено значение $\vec{B}^{\text{IP}} = \text{rot} \vec{A}^{\text{IP}}$.

Токи $\vec{J}^{\text{GR}}$ в уравнении (14) могут быть вычислены в виде $\sigma \text{grad} W$ из решения задач вида (для каждого Ω_k)

$$\int_{\Omega_k} \left(\sigma \text{grad} W - \vec{J}^{\text{All}} \right)^2 d\Omega \rightarrow \min, \quad (15)$$

где Ω_k – поляризующаяся подобласть, а токи $\vec{J}^{\text{All}}$, в свою очередь, могут быть вычислены в виде:

$$\vec{\mathbf{J}}^{All} = -\alpha(x, y, z) \int_{-\infty}^t \frac{\partial \beta(x, y, z, t - \tau)}{\partial \tau} \vec{\mathbf{J}}^{IC} d\tau. \quad (16)$$

Описанные выше задачи решаются методом конечных элементов. При этом для решения трехмерных задач (описывающих поле влияния трехмерных неоднородностей) используются edge-элементы (векторные базисные функции) за исключением задач (10) и (14), вычислительные схемы для которых строятся с использованием узловых базисных функций.

Задачи нахождения нормальных составляющих поля (поля в горизонтально-слоистой среде) решаются в цилиндрических координатах с использованием билинейных базисных функций.

Аппроксимация по времени выполняется с использованием трехслойной неявной разностной схемы с разрезающимся шагом по времени.

Зависимость от времени спада ВП β в уравнении (10), как правило, определяется экспериментально. В проводимых в данной работе экспериментах мы будем использовать функцию Комарова, которая, как правило, очень хорошо описывает практические данные и имеет вид:

$$\beta(t) = 1 - \frac{1}{\ln(b^2)} \cdot \ln \left(\frac{1 + \frac{b \cdot t}{T_0}}{1 + \frac{t}{b \cdot T_0}} \right), \quad (17)$$

где T_0 связана с постоянной времени τ соотношением $\tau = T_0 \sqrt{\pi}$, а параметр b (так же, как и параметр c в модели Cole-Cole) регулирует форму спада.