Министерство образования Российской Федерации
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие по курсу «Геометрия и топология»
для студентов 2 курса ФПМИ
специальности 010503 дневного отделения

Вектор-функция. Определение производной и техника дифференцирования

Вектор-функция $\mathbf{a}(t)$ - это функция, для которой каждому значению вещественного переменного $t \in [t_1, t_2]$ отвечает вполне определенное значение вектора $\mathbf{a}$. Под вектором $\mathbf{a}$ понимается свободный вектор (т.е. отложенный из какой угодно точки) в пространстве.

Таким образом, вектор-функция $\mathbf{a}(t)$ задает следующее соответствие: «число»→ «вектор» или, что то же самое, $\mathbf{a}(t): R \to R^m$.

Определим понятие предела для векторной функции.

Пусть аргумент t стремиться к пределу t_0. *Значение вектор-функции* $\mathbf{a}(t)$ *стремится к пределу* $\mathbf{a_0}$: $\mathbf{a}(t) \underset{t \to t_0}{\to} \mathbf{a}_0$ (где $\mathbf{a_0}$- некоторый постоянный вектор), если длина вектора разности $\mathbf{a}(t) - \mathbf{a}_0$ стремится к нулю, т.е. $|\mathrm{a}(t) - \mathrm{a}_0| \to 0$ при $t \to t_0$. (1)

Следствие из определения:

Если $\mathbf{a}(t) \underset{t \to t_0}{\to} \mathbf{a}_0$, то длина вектора $\mathbf{a}(t)$ стремится к длине вектора $\mathbf{a_0}$, т.е. $|\mathbf{a}(t)| \underset{t \to t_0}{\to} |\mathbf{a}_0|$. (2)

Используя обратное неравенство треугольника имеем:

$|x + y| \ge ||x| - |y||$

$||\mathbf{a}(t)| - |\mathbf{a}_0|| \le |\mathbf{a}(t) - \mathbf{a}_0| \to 0$ при $t \to t_0$.

В частности, $\mathbf{a}(t) \to \mathbf{0}$ равносильно $|\mathbf{a}(t)| \to 0$ при $t \to t_0$.

Вектор-функции $\mathbf{a}(t)$ *непрерывна в точке* $t = t_0$, если $\mathbf{a}(t) \underset{t \to t_0}{\to} \mathbf{a}(t_0)$, т.е. $|\mathbf{a}(t) - \mathbf{a}(t_0)| \to 0$ при $t \to t_0$. (3)

Дифференцирование вектор-функции

Определим понятие дифференцируемости вектор-функции. Разделим приращение вектор-функции на приращение аргумента $t - t_0$ (деление вектора на число): $\dfrac{\mathbf{a}(t) - \mathbf{a}_0}{t - t_0}$.

Если при $t \to t_0$ полученный вектор $\dfrac{\mathbf{a}(t) - \mathbf{a}_0}{t - t_0}$ к некоторому (одному и тому же) предельному вектору, то функция $\mathbf{a}(t)$ называется дифференцируемой в точке t_0, и предельный вектор называется ее *производной в этой точке* - $\mathbf{a}'(t_0)$: $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{\mathbf{a}(t) - \mathbf{a}_0}{t - t_0} = \mathbf{a}'(t)$. (4)

Таким образом, определение производной вектор-функции через определение предела можно записать следующим образом: $\left| \dfrac{\mathrm{a}(t) - \mathbf{a}_0}{t - t_0} - \mathbf{a}'(t_0) \right| \underset{t \to t_0}{\to} 0$.

Стоит обратить особое внимание на то, что производная является не скалярной, а векторной величиной, т.е. если производная вектор-функции существует при каждом значении t, то она снова представляет вектор-функцию от t $\mathbf{a}'(t)$. Если функция $\mathbf{a}'(t)$ в свою очередь непрерывна и дифференцируема, то ее производная $\mathbf{a}''(t)$ называется второй производной и т.д.

В дальнейшем будем рассматривать функции лишь непрерывные и дифференцируемые.

Свойства вектор-функции (свойства непрерывности)

Пусть

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{a}(t)\to\mathbf{a}_0\\ \mathbf{b}(t)\to\mathbf{b}_0\\ m(t)\to m_0\\ n(t)\to n_0\end{array}\right\}\text{ при }\ t\to t_0$$

или то же самое по определению непрерывности этих функций имеем:

$$\left.\begin{array}{l}|\mathbf{a}(t)-\mathbf{a}_0|\to 0\\ |\mathbf{b}(t)-\mathbf{b}_0|\to 0\\ |m(t)-m_0|\to 0\\ |n(t)-n_0|\to 0\end{array}\right\}\quad\text{при }\ t\to t_0 \tag{5}$$

1) Предел суммы двух вектор-функций существует и равен сумме пределов:

$$\mathbf{a}(t)+\mathbf{b}(t)\to\mathbf{a}_0+\mathbf{b}_0 \tag{6}$$

Для доказательства составим модуль разности

$\left|\{\mathbf{a}(t)+\mathbf{b}(t)\}-\{\mathbf{a}_0+\mathbf{b}_0\}\right|=\left|\{\mathbf{a}(t)-\mathbf{a}_0\}+\{\mathbf{b}(t)-\mathbf{b}_0\}\right|\le$ /используем равенство треугольника о том, что модуль суммы векторов не превышает суммы их модулей/

$\le|\mathbf{a}(t)-\mathbf{a}_0|+|\mathbf{b}(t)-\mathbf{b}_0|\to 0$ при $t\to t_0$, что является доказательством (6).

2) Предел произведения скалярной функции $m(t)$ на вектор-функцию $\mathbf{a}(t)$ существует и равен произведению $m(t_0)\mathbf{a}(t_0)$

$$m(t)\mathbf{a}(t)\to m(t_0)\mathbf{a}(t_0)\ \text{ при }\ t\to t_0 \tag{7}$$

Составим модуль разности векторов $|m(t)\mathbf{a}(t)\to m(t_0)\mathbf{a}(t_0)|=$ / прибавим и отнимем $m(t)\mathbf{a}(t_0)$ и сгруппируем / $=\left|m(t)\{\mathbf{a}(t)-\mathbf{a}(t_0)\}+\mathbf{a}(t_0)\{m(t)-m(t_0)\}\right|\le$ (7`)

/ используя неравенство треугольника /

$\le\underbrace{|m(t)|}_{\to m(t_0)}\underbrace{|\vec{a}(t)-\vec{a}(t_0)|}_{\to 0}+|\vec{a}(t_0)|\underbrace{|m(t)-m(t_0)|}_{\to 0}\to 0$ при $t\to t_0$, что доказывает (7).

3) Предел скалярного произведения $\mathbf{a}(t)\mathbf{b}(t)$ существует и равен скалярному произведению $\mathbf{a}_0(t)\mathbf{b}_0(t)$:

$$\mathbf{a}(t)\mathbf{b}(t)\to\mathbf{a}(t_0)\mathbf{b}(t_0)\ \text{ при }\ t\to t_0 \tag{8}$$

$|\mathbf{a}(t)\mathbf{b}(t)-\mathbf{a}(t_0)\mathbf{b}(t_0)|=$ / прибавим и отнимем $\mathbf{a}(t_0)\mathbf{b}(t)$ /

$=|\mathbf{a}(t)\mathbf{b}(t)-\mathbf{a}(t_0)\mathbf{b}(t_0)+\mathbf{b}(t)\mathbf{a}(t_0)-\mathbf{b}(t)\mathbf{a}(t_0)|=$ (8`)

/ сгруппируем / $=|\mathbf{b}(t)[\mathbf{a}(t)-\mathbf{a}(t_0)]+\mathbf{a}(t_0)[\mathbf{b}(t)-\mathbf{b}(t_0)]|\le$ /по неравенству треугольников/

$|\mathbf{b}(t)[\mathbf{a}(t)-\mathbf{a}(t_0)]|+|\mathbf{a}(t_0)[\mathbf{b}(t)-\mathbf{b}(t_0)]|\le$

/ по определению скалярного произведения двух векторов $\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}=|\mathbf{p}|\cdot|\mathbf{q}|\cdot\cos\angle(\mathbf{p},\mathbf{q})\ \Rightarrow$ $|\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}|\le|\mathbf{p}|\cdot|\mathbf{q}|$, следовательно /

$\le|\mathbf{b}(t)|\underbrace{|\mathbf{a}(t)-\mathbf{a}(t_0)|}_{\to 0}+|\mathbf{a}(t_0)|\underbrace{|\mathbf{b}(t)-\mathbf{b}(t_0)|}_{\to 0}\to 0$ при $t\to t_0$, что доказывает (8).

4) Предел векторного произведения $[\mathbf{a}(t),\mathbf{b}(t)]$ существует и равен $[\mathbf{a}(t_0),\mathbf{b}(t_0)]$:

$$[\mathbf{a}(t),\mathbf{b}(t)]\to[\mathbf{a}(t_0),\mathbf{b}(t_0)] \text{ при } t\to t_0 \qquad (9)$$

Составим разность двух векторов $[\mathbf{a}(t),\mathbf{b}(t)]-[\mathbf{a}(t_0),\mathbf{b}(t_0)]=$ / прибавим и отнимем вектор $[\mathbf{a}(t_0),\mathbf{b}(t)]$ сгруппируем и по свойствам векторного произведения получим / =

$$[\mathbf{a}(t)-\mathbf{a}(t_0),\mathbf{b}(t)]+[\mathbf{a}(t)_0,\mathbf{b}(t)-\mathbf{b}_0]. \qquad (9')$$

Таким образом, модуль разности данных векторов

$\left|[\mathbf{a}(t),\mathbf{b}(t)]-[\mathbf{a}(t_0),\mathbf{b}(t_0)]\right|\le\left|[\mathbf{a}(t)-\mathbf{a}(t_0),\mathbf{b}(t)]\right|+\left|[\mathbf{a}(t)_0,\mathbf{b}(t)-\mathbf{b}_0]\right|\le$

/ модуль векторного произведения двух векторов $|[\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}]|=|\mathbf{p}|\cdot|\mathbf{q}|\cdot\sin\angle(\mathbf{p},\mathbf{q})\ \Rightarrow |[\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}]|\le|\mathbf{p}|\cdot|\mathbf{q}|$ /

$\le\underbrace{|\mathbf{a}(t)-\mathbf{a}(t_0)|}_{\to 0}\underbrace{|\mathbf{b}(t)|}_{\vec{b}_0}+|\mathbf{a}(t_0)|\underbrace{|\mathbf{b}(t)-\mathbf{b}_0|}_{\to 0}$ при $t\to t_0$.

Свойства дифференцируемых вектор-функций

Пусть вектор-функции $\mathbf{a}(t)$, $\mathbf{b}(t)$ и скалярная функция m(t) - непрерывны и дифференцируемы в точке $t=t_0$. Тогда при том же значении аргумента $t=t_0$ дифференцируемы и следующие функции:

1) $(\mathbf{a}(t)+\mathbf{b}(t))'=\mathbf{a}'(t)+\mathbf{b}'(t)$ (10)

По определению производной вектор-функции в точке (4) имеем:

$$\lim_{t\to t_0}\frac{(\mathbf{a}(t)+\mathbf{b}(t))-(\mathbf{a}_0+\mathbf{b}_0)}{t-t_0}=\lim_{t\to t_0}\frac{(\mathbf{a}(t)-\mathbf{a}_0)+(\mathbf{b}(t)-\mathbf{b}_0)}{t-t_0}=\lim_{t\to t_0}\frac{\mathbf{a}(t)-\mathbf{a}_0}{t-t_0}+\lim_{t\to t_0}\frac{\mathbf{b}(t)-\mathbf{b}_0}{t-t_0}$$

Последнее равенство справедливо в силу правила (6) непрерывности суммы вектор-функций.

2) Вектор функция $m(t)\mathbf{a}(t)$ дифференцируема и ее производная равна:

$$(m(t)\mathbf{a}(t))'=m'(t)\mathbf{a}(t)+m(t)\mathbf{a}'(t) \qquad (11)$$

$\lim\limits_{t\to t_0}\frac{m(t)\mathbf{a}(t)-m_0\mathbf{a}_0}{t-t_0}\overset{no(7')}{=}\lim\limits_{t\to t_0}\frac{m(t)(\mathbf{a}(t)-\mathbf{a}_0)+\mathbf{a}_0(m(t)-m_0)}{t-t_0}=$ /по правилу (6)/

$=\lim\limits_{t\to t_0}\left(m(t)\frac{\mathbf{a}(t)-\mathbf{a}_0}{t-t_0}\right)+\lim\limits_{t\to t_0}\left(\mathbf{a}_0\frac{m(t)-m_0}{t-t_0}\right)=$/ предел произведения по правилу (7) равен произведению пределов / $=m(t)\mathbf{a}'(t)+m'(t)\mathbf{a}(t)$.

3) Скалярная функция $\mathbf{a}(t)\mathbf{b}(t)$ дифференцируема и ее производная определяется следующим образом:

$$(\mathbf{a}(t)\mathbf{b}(t))'=\mathbf{a}'(t)\mathbf{b}(t)+\mathbf{a}(t)\mathbf{b}'(t) \qquad (12)$$

$$\lim_{t\to t_0}\frac{\mathbf{a}(t)\mathbf{b}(t)-\mathbf{a}_0\mathbf{b}_0}{t-t_0}\overset{по(8')}{=}\lim_{t\to t_0}\frac{\mathbf{b}(t)(\mathbf{a}(t)-\mathbf{a}_0)+\mathbf{a}_0(\mathbf{b}(t)-\mathbf{b}_0)}{t-t_0}$$ = /по правилу (6)/

$=\lim\limits_{t\to t_0}\left(\mathbf{b}(t)\dfrac{\mathbf{a}(t)-\mathbf{a}_0}{t-t_0}\right)+\lim\limits_{t\to t_0}\left(\mathbf{a}_0\dfrac{\mathbf{b}(t)-\mathbf{b}_0}{t-t_0}\right)=$/ согласно правилу (8) предел скалярного произведения существует и равен скалярному произведению пределов, поэтому получаем $/=\mathbf{a}'(t)\mathbf{b}(t)+\mathbf{a}(t)\mathbf{b}'(t)$

4) Вектор-функция $\left[\mathbf{a}(t),\mathbf{b}(t)\right]$ дифференцируема и ее производная определяется следующим образом:

$$\left[\mathbf{a}(t),\mathbf{b}(t)\right]'=\left[\mathbf{a}'(t),\mathbf{b}(t)\right]+\left[\mathbf{a}(t),\mathbf{b}'(t)\right] \qquad (13)$$

Доказательство аналогичное предыдущему:

$$\lim_{t\to t_0}\frac{[\mathbf{a}(t),\mathbf{b}(t)]-[\mathbf{a}_0,\mathbf{b}_0]}{t-t_0}\overset{по(9')}{=}\lim_{t\to t_0}\frac{[\mathbf{a}(t)-\mathbf{a}_0,\mathbf{b}(t)]+[\mathbf{a}_0,\mathbf{b}(t)-\mathbf{b}_0]}{t-t_0}$$/ используя правила перехода к пределу (6) и (9) получим необходимое доказательство (13).

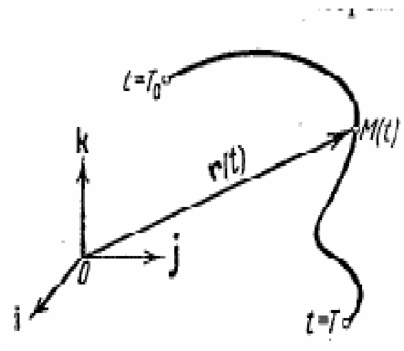
Необходимо обратить внимание на порядок множителей в (13): если множитель **a** стоит на первом месте слева от знака равно, то и справа он также должен стоять на первом месте.

Отметим, что для всех трех родов произведений (скалярной функции на вектор-функцию, скалярного и векторного произведения двух функций) повторяется в сущности одна и та же формула. Если в данных формулах один из множителей постоянный, то его производная равна нулю, и один из членов правой части исчезает. Получается правило вынесения постоянного множителя из-под знака дифференцирования.

Истолкование вектор-функции как радиус вектора кривой в параметрическом представлении

Пусть нам дана вектор-функция одного аргумента *t*: $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$, где $t\in[T_0,T]$. (14)

Зафиксируем в пространстве некоторую точку *O* и будем при всех значениях параметра *t* откладывать вектор $\mathbf{r}(t)$ именно из этой точки. При каждом значении параметра *t* мы получаем определенный вектор $\overline{OM}=\mathbf{r}(t)$, начало которого находится в точке О, а конец *M* зависит от параметра *t*. При *t* изменяющемся от T_0 до T точка *M* описывает в пространстве геометрическое место точке, которое называется *параметрически заданной кривой*. Уравнение (15) – *векторное параметрическое уравнение кривой.*



Пусть точка *O* – начало прямоугольной декартовой системы координат, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ - орты. Тогда любой вектор можно разложить по ортам $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, т.е. представить в виде их линейной комбинации:

$$\mathbf{r}(t)=x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}+z(t)\mathbf{k}\,, \qquad (15)$$

где координаты вектора $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ - координаты вектора $\mathbf{r}(t)$, которые как и вектор являются функциями параметра t. Координаты вектора совпадают с координатами точки $M(t)$, которая описывает нашу кривую:

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ T_0 \le t \le T \ - \qquad (15')$$

- *координатное параметрическое представление кривой.*

Функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ дифференцируемы столько же раз, сколько и вектор-функция $\mathbf{r}(t)$. Действительно, скалярно умножив (15) на орты прямоугольной декартовой системы координат $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, получим:

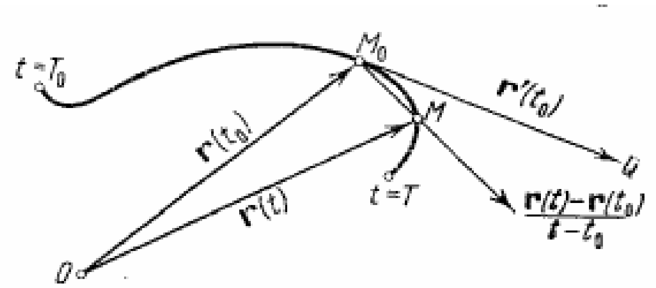
$$\mathbf{r}(t)\mathbf{i} = x(t),\ \mathbf{r}(t)\mathbf{j} = y(t),\ \mathbf{r}(t)\mathbf{k} = z(t).$$

Продифференцируем левые части по правилам дифференцирования:

$$(\mathbf{r}(t)\mathbf{i})' = \mathbf{r}'(t)\mathbf{i} + \mathbf{r}(t)\underbrace{\mathbf{i}'}_{=\mathbf{0}} = \mathbf{r}'(t)\mathbf{i}$$

Аналогично получаем $(\mathbf{r}(t)\mathbf{j})' = \mathbf{r}'(t)\mathbf{j}$ и $(\mathbf{r}(t)\mathbf{k})' = \mathbf{r}'(t)\mathbf{k}$. Таким образом, функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ дифференцируемы столько же раз, сколько и вектор-функция $\mathbf{r}(t)$. Справедливо и обратное - сколько раз мы дифференцируем $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ столько раз дифференцируема и вектор-функция $\mathbf{r}(t)$.

Геометрическое истолкование дифференцирования вектор-функции



Истолковав вектор-функцию (14) как радиус-вектор некоторой кривой в параметрическом представлении можно наглядно изобразить процесс дифференцирования этой функции. Пусть значению параметра $t = t_0$ отвечает значение функции $\mathbf{r}(t_0)$ и $\mathbf{r}(t_0) = \overrightarrow{OM_0}$. Для другого значения параметра t $\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{OM}$ (см. рис.). Составим разность этих двух значений вектор-функции $\vartriangle\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0) = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0} = \overrightarrow{M_0M}$. При ращение вектор-функции $\vartriangle\mathbf{r}(t)$ - это вектор-хорда $\overrightarrow{M_0M}$. Разделим $\vartriangle\mathbf{r}(t)$ на приращение аргумента $\vartriangle t = t - t_0$ и рассмотрим вектор $\dfrac{\mathbf{r}(t)-\mathbf{r}(t_0)}{t-t_0}$. Данный вектор коллиниарен вектору $\overrightarrow{M_0M}$, при этом направленный с ним в одну сторону если $t - t_0 > 0$, и в обратную если $t - t_0 < 0$. В силу непрерывности функции $\mathbf{r}(t)$ при $t \to t_0$ $\mathbf{r}(t) \to \mathbf{r}(t_0)$ $\Leftrightarrow$ $\left|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)\right| \underset{t\to t_0}{\to} 0$ - а это длина хорды $\overrightarrow{M_0M}$. Другими словами, когда значение параметра $t \to t_0$, отвечающая параметру t точка M на кривой стремится в точку M_0, отвечающую t_0. Таким образом, непрерывность вектор функции истолковывается как непрерывность кривой.

В силу определения (4) производной вектор функции при $t \to t_0$ вектор $\dfrac{\mathbf{r}(t)-\mathbf{r}(t_0)}{t-t_0}$ (коллинеарный вектору-хорде $\overrightarrow{M_0M}$) стремится к своему предельному значению $\mathbf{r}'(t)$:

$\frac{\triangle \mathbf{r}(t)}{\triangle t} = \frac{\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)}{t - t_0} \to \mathbf{r}'(t_0)$ при $t \to t_0$, где $\mathbf{r}'(t_0) \neq 0$ -ненулевой вектор. Таким образом, при $t \to t_0$ точка M стремится по кривой к точке M_0, а секущая $\overrightarrow{M_0 M}$ к предельному положению, а именно к прямой $M_0 Q$, направленной по вектору $\mathbf{r}'(t_0)$. Предельное положение $M_0 Q$ для секущей является *касательной к кривой в точке* M_0.

Таким образом, производная $\mathbf{r}'(t_0)$ от вектор-функции $\mathbf{r}(t_0)$ направлена по касательной в точке t_0 к кривой, которую определяет вектор-функция $\mathbf{r}(t)$.

Необходимо отметить следующее:

1) направление касательной совпадает с направлением вектор-хорды $\overrightarrow{M_0 M}$.

2) длина касательной не важна.

Замечание: На кривой, заданной вектор-функцией (15) можно произвольно менять параметризацию, отчего меняется вид функциональной зависимости (14), но при этом направление производной остается прежним, т.е. оно не зависит от выбора параметра, т.к. всегда это направление совпадает с направлением касательной.

Дифференциал вектор-функции и его геометрический смысл

Рассмотрим понятие о дифференциале вектор-функции. Вернемся к соотношению $\frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{t - t_0} \to \vec{r}'(t)$ при $t \to t_0$, где записана дифференцируемость вектор-функции $\mathbf{r}(t)$. Введем следующую вектор-функцию $\boldsymbol{\alpha}(t)$:

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = \frac{\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)}{t - t_0} - \mathbf{r}'(t_0). \tag{16}$$

По определению производной $\boldsymbol{\alpha}(t) \to \mathbf{0}$ при $t \to t_0$. Перепишем (16), умножив обе части на $(t - t_0)$, получим:

$$\triangle \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}'(t_0)(t - t_0) + \boldsymbol{\alpha}(t - t_0) \tag{16'}$$

Геометрический смысл формулы (16$'$). Левая часть (16$'$) – это вектор $\overrightarrow{M_0 M}$. Этот вектор смещения в правой части разложен на 2 слагаемых: первое – это вектор-производная $\mathbf{r}'(t_0)$, умноженный на численный коэффициент $(t - t_0)$, и следовательно, направленный по касательной в точке M_0; второе – вектор $\boldsymbol{\alpha}(t - t_0)$. При $t \to t_0$ во втором слагаемом бесконечно малый коэффициент $(t - t_0)$ стоит перед бесконечно малым вектором $\boldsymbol{\alpha}$, т.е. $\boldsymbol{\alpha}(t - t_0)$ - вектор, модуль которого бесконечно малое более высшего порядка по сравнению с приращением аргумента $(t - t_0)$. В первом слагаемо вектор $\mathbf{r}'(t_0)$ остается постоянным, и, следовательно вектор $\mathbf{r}'(t_0)(t - t_0)$ меняется пропорционально приращению аргумента $\triangle t$, сохраняя постоянное направление по касательной. Таким образом, смещение $\mathbf{r}'(t_0)(t - t_0)$ называется *главной линейной частью смещения* $\overrightarrow{M_0 M}$ при $t \to t_0$, или *главной линейной частью приращения вектор-функции* $\mathbf{r}(t)$ или *дифференциалом вектор-функции* $\mathbf{r}(t)$ в точке $t = t_0$:

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t_0)(t - t_0) = \mathbf{r}'(t_0)\vartriangle t = \mathbf{r}'(t_0)dt, \qquad (17)$$

так как переменная t является независимой $\vartriangle t = dt$. Из (17) следует, что

$$\mathbf{r}'(t_0) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \qquad (17')$$

т.е. $\mathbf{r}'(t_0)$ рассматривается как отношение дифференциалов.

Следствия

Лемма 1: Если вектор-функция $\mathbf{m}(t)$ сохраняет постоянный модуль ($|\mathbf{m}(t)| = const$) то при каждом значении параметра t ее производная ей перпендикулярна: $\mathbf{m}(t) \perp \mathbf{m}'(t)$.

☑ $|\mathbf{m}(t)|^2 = (\mathbf{m}(t), \mathbf{m}(t)) = \mathbf{m}^2(t) = const$, то, продифференцировав данное равенство, получим: $2\mathbf{m}(t)\mathbf{m}'(t) = 0$. Следовательно, эти два вектора перпендикулярны между собой, так как их скалярное произведение равно нулю. ☑

Геометрически: если откладывать вектор $\mathbf{m}(t)$ из неизменной точки O, то вектор $\mathbf{m}(t)$ меняется только по направлению $|\mathbf{m}(t)| = const$, т.е. конец вектора описывает кривую, лежащую на сфере с центром O. Производная $\mathbf{m}'(t)$ для любого значения параметра t будет направлена по касательной к этой кривой, а , значит, и по касательной к сфере. Следовательно $\mathbf{m}'(t)$ перпендикулярен радиусу сферы, проведенному из центра O, т.е. к вектору $\mathbf{m}(t)$.

Определим *скорость вращения* вектор функции $\mathbf{m}(t)$ по отношению к ее аргументу. Дадим аргументу t приращение $\vartriangle t$ и обозначим $\vartriangle\varphi = \angle(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$, где $\overrightarrow{OM} = \mathbf{m}(t)$, $\overrightarrow{OM}' = \mathbf{m}(t + \vartriangle t)$. Составим отношение $\frac{\vartriangle\varphi}{\vartriangle t}$, показывающее, какой угол поворота вектора $\mathbf{m}(t)$ приходится в среднем на единицу изменения аргумента *t,* на участке $(t, t + \vartriangle t)$.

$\lim\limits_{t \to t_0} \frac{\vartriangle\varphi}{\vartriangle t}$ - *скорость вращения* вектор-функции $\mathbf{m}(t)$ по отношению к ее аргументу *t.*

Лемма 2: Скорость вращения единичной вектор-функции $\mathbf{m}(t)$ равна модулю производной этой вектор функции $|\mathbf{m}'(t)|$.

Следствие. Главная линейная часть бесконечно малого угла поворота $\vartriangle\varphi$ единичной вектор-функции $\mathbf{m}(t)$ равна модулю дифференциала $d\mathbf{m}$ этой функции: $\vartriangle\varphi = d\mathbf{m} + \boldsymbol{\alpha}|\vartriangle t|$, где $\boldsymbol{\alpha}|\vartriangle t|$-бесконечно малая величина более высокого порядка относительно $\vartriangle t$.

Ряд Тейлора для вектор-функции

Рассмотрим функцию, заданную в координатном представлении:

$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, где $t \in [T_0; T]$ (0)

Пусть функции $x(t), y(t), z(t)$ - (n+1) раз дифференцируемы в окрестности точки t_0.

Разложим в ряд Тейлора по степеням $t - t_0$ каждую из функций $x(t), y(t), z(t)$ в окрестности точки t_0, используя остаточный член в форме Лагранжа:

$$x(t)=x(t_0)+\frac{x'(t_0)(t-t_0)}{1!}+\frac{x''(t_0)(t-t_0)^2}{2!}+...+\frac{x^{(n)}(t_0)(t-t_0)^n}{n!}+\frac{x^{(n+1)}(t_1)}{(n+1)!}(t-t_0)^{n+1}$$

$$y(t)=y(t_0)+\frac{y'(t_0)(t-t_0)}{1!}+\frac{y''(t_0)(t-t_0)^2}{2!}+...+\frac{y^{(n)}(t_0)(t-t_0)^n}{n!}+\frac{y^{(n+1)}(t_2)}{(n+1)!}(t-t_0)^{n+1}$$

$$z(t)=z(t_0)+\frac{z'(t_0)(t-t_0)}{1!}+\frac{z''(t_0)(t-t_0)^2}{2!}+...+\frac{z^{(n)}(t_0)(t-t_0)^n}{n!}+\frac{z^{(n+1)}(t_3)}{(n+1)!}(t-t_0)^{n+1}$$

Здесь $t_1,t_2,t_3\in[t_0;t]$ - промежуточные значения различные между собой.

Умножим на $\mathbf{i}$ обе части первого равенства, на $\mathbf{j}$ обе части второго равенства, на $\mathbf{k}$ - третьего. Складывая все три равенства и объединяя члены с одинаковыми степенями $t-t_0$ получим:

$$\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}(t_0)+\frac{\mathbf{r}'(t_0)(t-t_0)}{1!}+\frac{\mathbf{r}''(t_0)(t-t_0)^2}{2!}+...+\frac{\mathbf{r}^{(n)}(t_0)(t-t_0)^n}{n!}+\frac{\mathbf{Q}_n}{(n+1)!}(t-t_0)^{n+1} \qquad (1)$$

Здесь $\mathbf{Q}_n$ - *остаточный член формулы Тейлора в векторной форме,* который вычисляется по следующей формуле:

$$\mathbf{Q_n}=x^{(n+1)}(t_1)\mathbf{i}+y^{(n+1)}(t_2)\mathbf{j}+z^{(n+1)}(t_3)\mathbf{k} \qquad (2)$$

Так как рассматривая $x^{(n+1)},y^{(n+1)},z^{(n+1)}$ мы предполагаем непрерывность этих функций в промежутке $t\in[T_0;T]$, то по теореме Вейерштрасса данные функции будут ограничены для любого значения параметров $t_1,t_2,t_3\in[t_0;t]$, т.е. будут ограничены и координаты вектора $\mathbf{Q}_n$, поэтому и длина данного вектора ограничена:

$$\exists C_n>0:|\mathbf{Q}_n|\le C_n, \qquad (3)$$

где C_n - положительное число одинаковое для для любого значения параметра $t\in[T_0;T]$. Формула (2) – *разложение в ряд Тейлора вектор-функции* скалярного аргумента с остаточным членом в векторной форме.

Выпишем в разложении первые 2 слагаемых с остаточным членом:

$$\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}(t_0)+\frac{\mathbf{r}'(t_0)(t-t_0)}{1!}+\frac{\mathbf{Q}_1}{2!}(t-t_0)^2 \quad \text{или} \quad \mathbf{r}(t)-\mathbf{r}(t_0)=\frac{\mathbf{r}'(t_0)(t-t_0)}{1!}+\frac{\mathbf{Q}_1}{2!}(t-t_0)^2 \qquad (1')$$

Теперь, сравнивая $(1')$ с $(16')$, видим, что $(1')$ - есть уточнение формулы $(16')$ и бесконечно малый вектор $\boldsymbol{\alpha}(t)$ равен

$$\boldsymbol{\alpha}(t)=\frac{\mathbf{Q}_1}{2!}(t-t_0)\ ,\ |\mathbf{Q}_1|\le C_1. \qquad (4)$$

Вернемся к рисунку, т.к. $\overrightarrow{M_0M}=\mathbf{r}(t)-\mathbf{r}(t_0)$ - хорда, $\overrightarrow{M_0M'}=\mathbf{r}'(t_0)(t-t_0)=d\mathbf{r}$ - смещение по касательной, т.е .дифференциал. С учетом $(1')$ разность векторов

$$\overrightarrow{M_0M}-\overrightarrow{M_0M'}=\overrightarrow{M'M}=\frac{\mathbf{Q}_1}{2!}(t-t_0)^2.$$

При замене смещения вектор-функции ее дифференциалом мы получается неточное значение приращения. Оценим получаемую погрешность, выражаемую вектором $\overrightarrow{M'M}$ следующим образом. Используя обратное неравенство треугольника, о том, что разность длин двух сторон не превышает длины третьей стороны получим

$$\left\| \overrightarrow{M_0M} \right| - \left| \overrightarrow{M_0M'} \right\| \le \left| \overrightarrow{M_0M} - \overrightarrow{M_0M'} \right| = \left| \overrightarrow{M'M} \right| = \left| \mathbf{Q}_1 \right| \frac{(t-t_0)^2}{2} \le C_1 \frac{(t-t_0)^2}{2},$$

с учетом (4). $\overrightarrow{M_0M}$ - любая хорда нашей кривой, соединяющей, любую точку $M_0(t_0)$ с точкой $M(t)$, $\overrightarrow{M_0M'}$ - отрезок, отложенный по касательной к кривой в точке $M_0(t_0)$ - вектор, дифференциал.

Строение параметрически заданной кривой в окрестности произвольной точки

Пусть нам задана кривая в параметрическом виде $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ или в координатном виде :

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \quad \text{где} \quad T_0 \le t \le T \\ z = z(t) \end{cases}$$

Простым отрезком пространственной кривой называется геометрическое место точек, которое в некоторой прямоугольной декартовой системе координат задается в виде (5):

$$\begin{cases} y = f(x) \\ z = g(x) \end{cases} \quad x_1 \le x \le x_2 \tag{5}$$

Точка $t = t_0$ на кривой называется *обыкновенной*, если при значениях t достаточно близких к t_0 кривая представима в виде простого отрезка.

Например, геометрически для плоской кривой, если точку $M = M(t)$ на кривой можно заключить в прямоугольник (хотя бы очень маленький) так, что попавшая внутрь него часть кривой является простым отрезком. Точки в которых нельзя этого добиться , как бы мы не уменьшали размеры прямоугольника являются особыми.

Точки, которые не являются обыкновенными, называются *особыми*.

Достаточный признак обыкновенной точки.

Если в заданной точке t_0 производные $x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)$ не обращаются в нуль одновременно, т.е. выполняется условие $(x'(t_0) \ne 0 \vee y'(t_0) \ne 0 \vee z'(t_0) \ne 0) = u$, то точка t_0 является обыкновенной.

Доказательство.

▸Пусть исходное уравнение кривой записано в координатном виде. Не нарушая общности, предположим, что $x'(t_0) \ne 0$. Тогда рассмотри первое уравнение $x = x(t)$. Запишем его в виде $x - x(t) = 0$, при $t = t_0$ $x - x(t_0) = 0$ и $x'(t_0) \ne 0$. Так как $x(t)$ - непрерывная функция и $x'(t_0) \ne 0$, т.е. функция является монотонной (т.к. нет точек экстремума) в окрестности точки t_0. Следовательно, по теореме о существовании обратной функции для нее существует обратная функция $t = t(x)$. Подставляя полученное выражение в оставшиеся два координатных уравнения получаем:

$\left[\begin{array}{l} y = y(t) = y(t(x)) = y_1(x) \\ z = z(t) = z(t(x)) = z_1(x) \end{array}\right.$ - т.е. y и z однозначно выражаются относительно x, т.е. удовлетворяют соотношению (5) и кривая вблизи точки t_0 представляется в виде простого отрезка, т.е. является обыкновенной. ◄

Необходимо отметить, что данный признак не является необходимым, т.е. обратное утверждение неверно: если t_0 - обыкновенная точка, значит, производные в этой точке не обращаются в нуль все одновременно. Для доказательства данного утверждения достаточно рассмотреть "контрпример". Рассмотрим параболу, заданную уравнением $y^2 - x = 0$. Если в качестве параметра будет выступать переменная y, то параметрическое уравнение кривой: $x = t^2$, $y = t$. Следовательно, все точки параболы являются обыкновенными, т.к. $y'(t) = 1$ при любых значениях параметра t. Умножим левую часть исходного уравнения на $x^2 + y^2$, получим $(x^2 + y^2)(y^2 - x) = 0$. Новое уравнение определяет ту же самую кривую, т.к. множитель $x^2 + y^2$ обращается в нуль только тогда, когда $x = y = 0$, а эта точка и до этого принадлежала параболе, но частные производные по x и y обе равны нулю в точке $(0,0)$. Из этого следует, что точка "не является обыкновенной", хотя начало координат по прежнему является обыкновенной точкой на параболе.

Переформулируем достаточный признак в другом виде. Продифференцируем уравнение (0) по правилам дифференцирования, получим:

$$\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}$$

Отметим, что если будут выполняться условие следующей системы

$\begin{cases} x'(t_0) = 0 \\ y'(t_0) = 0 \\ z'(t_0) = 0 \end{cases}$ то мы можем сказать, что $\mathbf{r}'(t_0) = 0$. И обратно, если $\mathbf{r}'(t_0) = 0$, то все координаты данного вектора x', y', z' равны нулю.

Поэтому **достаточный признак** обыкновенной точки может быть переформулирован так: точка t_0 является обыкновенной, если в данной точке $\mathbf{r}(t_0) \neq 0$.

Теперь рассмотрим строение кривой в окрестности любой своей точки. Сместимся из точки $M_0(t_0)$ в бесконечно близкую точку $M(t)$. Вектор смещения $\overrightarrow{M_0M} = \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)$ найдем, используя разложение Тейлора (1).

Для простоты изложения введем следующие обозначения:

$$\mathbf{r}_0' = \mathbf{r}'(t_0)$$

$$\mathbf{r}_0'' = \mathbf{r}''(t_0)$$

.....

$$\mathbf{r}_0^{(n)} = \mathbf{r}^{(n)}(t_0)$$

Так как t_0 - любая точка, то не исключено, что мы будем получать в начале нулевые производные: $\mathbf{r}_0' = \mathbf{r}_0'' = ... = \mathbf{r}_0^{(p-1)} = 0$. Найдем первую ненулевую производную (в данном случае порядка p), выпишем разложение в ряд Тейлора (пренебрегая остаточным членом) для вектора смещения $\overrightarrow{M_0M}$ из точки M_0 в бесконечно близкую к ней точку M :

$$\overrightarrow{M_0M} = \mathbf{r}_0^{(p)} \frac{(t-t_0)^p}{p!} + \mathbf{r}_0^{(p+1)} \frac{(t-t_0)^{p+1}}{(p+1)!} + \ldots \qquad (6)$$

Теорема.

Кривая в точке $M_0(t_0)$ имеет касательную, направленную по вектору $\mathbf{r}_0^{(p)}$.

Доказательство:

▶ Разделим обе части (6) на $(t-t_0)^p$:

$$\frac{\overrightarrow{M_0M}}{(t-t_0)^p} = \frac{\vec{r}_0^{(p)}}{p!} + \frac{\vec{r}_0^{(p+1)}}{(p+1)!}(t-t_0) + \ldots$$

Вектор $\overrightarrow{M_0M}$ направлен по хорде секущей $M_0M \Rightarrow$ вектор $\dfrac{\overrightarrow{M_0M}}{(t-t_0)^p}$ также направлен по секущей. При $t \to t_0$, $(t-t_0) \to 0$, все члены правой части стремятся к нулю, кроме первого члена: $\dfrac{\overrightarrow{M_0M}}{(t-t_0)^p} \underset{t\to t_0}{\to} \dfrac{\vec{r}_0^{(p)}}{p!}$, т.е. вектор $\overrightarrow{M_0M}$ стремится также к предельному положению, направленному по вектору $\vec{r}_0^{(p)}$ - которое и есть по определению касательной. ◀

Если p=1, то точка обыкновенная, и теорема дает ранее известный результат, что касательная существует и направлена по вектору $\vec{r}_0'$.

Если p>1, то считая производные далее, находим первую по порядку производную $\vec{r}_0^{(q)}$, неколлинеарную к $\vec{r}_0^{(p)}$, q>p (большей частью получается, что q=p+1). Разложим опять вектор смещения $\overrightarrow{M_0M}$ в ряд Тейлора:

$$\overrightarrow{M_0M} = \vec{r}_0^{(p)} \frac{(t-t_0)^p}{p!} + \ldots + \vec{r}_0^{(q)} \frac{(t-t_0)^q}{q!} + \ldots$$

С другой стороны вектор смещения всегда можно разложить через сумму двух неколлениарных векторов:

$\overrightarrow{M_0M} = a\vec{r}_0^{(p)} + b\vec{r}_0^{(q)}$, где главная часть коэффициента a при $t \to t_0$ определяется как $a \sim \dfrac{(t-t_0)^p}{p!}$, а главная часть коэффициента b при $t \to t_0$ - $b \sim \dfrac{(t-t_0)^q}{q!}$. При этом знаки коэффициентов a и b будут совпадать со знаками их главных частей и при $t > t_0$, $a > 0$, $b > 0$, и при $t < t_0$ знаки a и b будут зависеть от четности или нечетности показателей p и q. В результате при $t < t_0$ возможны 4 случая. Представим эти данные в виде таблицы:

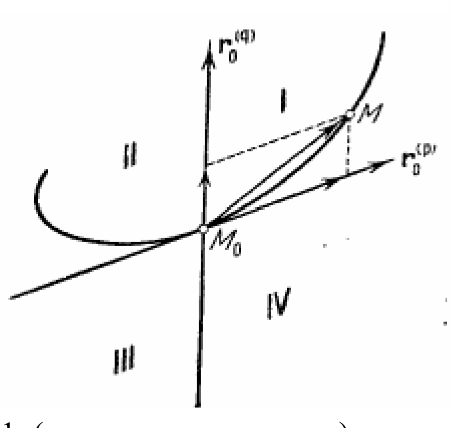
№	p	q	Знак a	Знак b	Положение $M(t), t < t_0$ (M_0 - в начале координат)
1	нечетное	четное	-	+	II четверть
2	нечетное	нечетное	-	-	III четверть
3	четное	нечетное	+	-	IV четверть
4	четное	четное	+	+	I четверть

Рассмотрим подробнее, что это за четверти. Проведем через точку $M_0(t_0)$ две прямые в направлении векторов $\vec{r}_0^{\,(p)}$ и $\vec{r}_0^{\,(q)}$. Они разобьют плоскость на 4 части, которые мы занумеруем согласно знакам a и b: I, II, III и III (см. таблицу). Когда $t \to t_0$ и $t > t_0$, то $a > 0$, $b > 0$ и из разложения $\overline{M_0M} = a\vec{r}_0^{\,(p)} + b\vec{r}_0^{\,(q)}$ видно, что точка M движется из точки t_0 по кривой всегда в первую четверть.

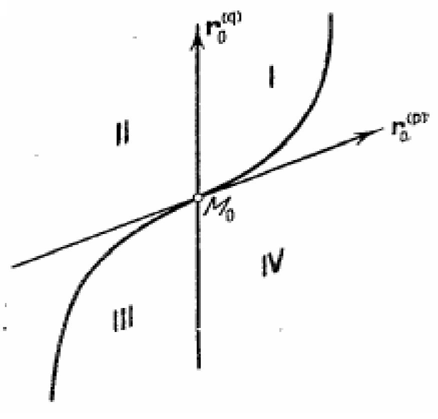
Когда $t \to t_0$ при $t < t_0$ в зависимости от знаков a и b кривая будет подходить к точке t_0 из различных четвертей. При этом согласно теореме кривая везде имеет касательную, направленную по вектору $\vec{r}_0^{\,(p)}$. В случае 1: кривая подходит к точке M_0 из II четверти и имеет строение, представленное на рис 1. Точка M_0 - *точка основного типа*. В случае 2: кривая подходит из III четверти и имеет строение, представленное на рис.2, M_0 - *точка перегиба.* В случае 3: кривая подходит из IV четверти и имеет строение, представленное на рис.3, M_0 - *точка возврата первого рода.* В случае 4: кривая подходит к точке M_0 из I четверти и имеет строение, представленное на рис.4, M_0 - *точка возврата второго рода.*

Замечание: обратим внимание, что направления p и q совсем необязательно должны быть перпендикулярны.

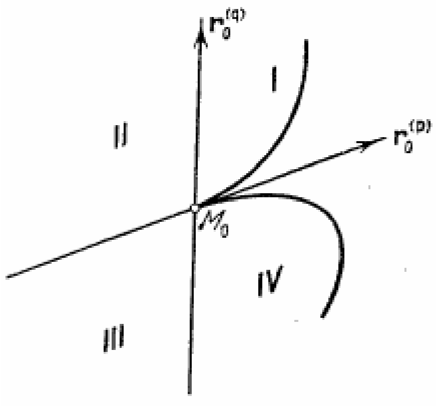
Номера рисунков соответствуют номерам в таблице.

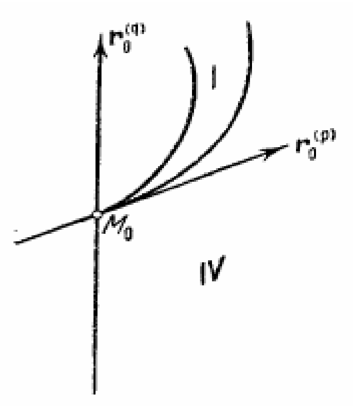


1. (точка основного типа)



2. (точка перегиба)





3. (точка возврата I рода) 4. (точка возврата II рода)

ПРИМЕР

Эпициклоидой называется кривая, описываемая любой точкой M подвижной окружности (радиусом λa, где $\lambda > 0, a > 0$), которая катится без скольжения (т.е. точка касания пробегает равные пути по обеим окружностям) по неподвижной окружности радиуса а, находясь вне последней. Если же подвижная окружность катится по неподвижной, находясь внутри ее, то полученная кривая называется *гипоциклоидой* (в этом случае $\lambda < 1$).

Параметрическое уравнение эпициклоиды имеет вид:

$$\frac{x}{a} = (1+\lambda)\cos\lambda\varphi - \lambda\cos(1+\lambda)\varphi$$

$$\frac{y}{a} = (1+\lambda)\sin\lambda\varphi - \lambda\sin(1+\lambda)\varphi$$

Параметрическое уравнение гипоциклоиды имеет вид:

$$\frac{x}{a} = (1-\lambda)\cos\lambda\varphi + \lambda\cos(\lambda-1)\varphi$$

$$\frac{y}{a} = (1-\lambda)\sin\lambda\varphi + \lambda\sin(\lambda-1)\varphi$$

В уравнениях эпициклоиды и гипоциклоиды φ - выраженная в радианах дуга, пробегаемая точкой касания по неподвижной окружности.

При $\lambda = 1$ эпициклоида называется ***кардиоидой***, а при $\lambda = \dfrac{1}{4}$ - гипоциклоида называется ***астроидой***.

Циклоидой называется кривая, параметрическое уравнение которой имеет вид $\dfrac{x}{a} = \varphi - \sin\varphi,\quad \dfrac{y}{a} = 1 - \cos\varphi$.

1) Рассмотрим строение циклоиды в произвольной точке. Найдем первую производную $\mathbf{r}'(\varphi)$: $\dfrac{x'}{a} = 1 - \cos\varphi,\quad \dfrac{y'}{a} = \sin\varphi$.

$x'(\varphi) = 0$ при $\varphi = 2\pi k$, $y'(\varphi) = 0$ при $\varphi = \pi k$.

$\mathbf{r}'(\varphi) = 0$: $x'(\varphi) = 0$, $y'(\varphi) = 0$, $\varphi = 2\pi k$. $\mathbf{r}'(\varphi) \neq 0$ при $\varphi \neq 2\pi k$.

При $\varphi = \pi(2k-1)$ $x'(\varphi) \neq 0$, $y'(\varphi) = 0$.

Исследуем поведение кривой в окрестностях данных точек:

1) $\varphi = \pi(2k-1)$

$\vec{r}' = a\{2,0\}$

$\vec{r}'': \quad \frac{x''}{a} = \sin\varphi, \quad \frac{y''}{a} = \cos\varphi$

$\vec{r}'' = a\{0,-1\}$

Таким образом, нашли первые два неколлинеарных вектора $\vec{r}^{(p)}$ и $\vec{r}^{(q)}$: p=1, q=2. Получили случай 1. Таким образом кривая подходит к точке А, соответствующей параметру $\varphi = \pi(2k-1)$, из II четверти по касательной $\vec{r}'$. Вектора оказались ортогональными (что не всегда обязательно). Построим вектора $\vec{r}'$ и $\vec{r}''$ с точностью до точки приложения (0,0) и пронумеруем четверти. Имеем точка А – точка основного типа.

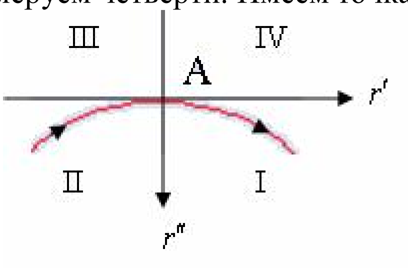


рис. 1

2) $\varphi = 2\pi k$: $\vec{r}' = a\{0,0\}$, $r'' = a\{0,1\}$,

$\vec{r}''': \quad \frac{x'''}{a} = \cos\varphi, \quad \frac{y''}{a} = -\sin\varphi,$

$\vec{r}''' = a\{1,0\}$

Первые два неколлинеарных вектора $\vec{r}_0''$ и $\vec{r}_0'''$: p=2;q=3 – случай 3. Таким образом, кривая подходит к точке В, соответствующей параметру $\varphi = 2k\pi$, из IV четверти по касательной $\vec{r}''$. Точка В – точка возврата первого рода.

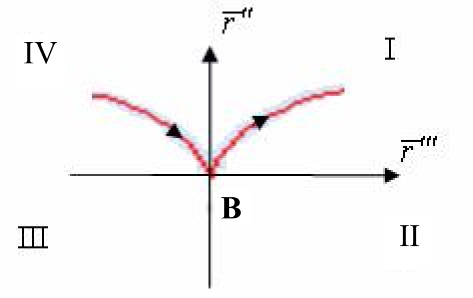


рис.2

Остальные точки $\varphi \neq 2\pi k$ являются обыкновенными. Общий вид циклоиды:

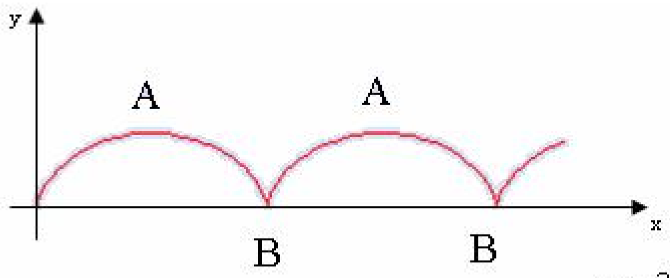


рис.3

2) Рассмотрим строение кардиоиды в окрестности произвольной точки.

$$x(\gamma)/a = 2\cos(\gamma) - \cos(2\gamma)$$

$$y(\gamma)/a = 2\sin(\gamma) - \sin(2\gamma)$$

Найдем первую производную:

$$x'(\gamma)/a = 2\sin(2\gamma) - 2\sin(\gamma)$$

$$y'(\gamma)/a = 2\cos(\gamma) - 2\cos(2\gamma)$$

Найдем точки, в которых $x'(\gamma) = 0$ и $y'(\gamma) = 0$.

$$\left|\begin{array}{l}\gamma = \pm\pi k \\ \gamma = 2\pi k \\ \gamma = \pm\pi/3 + 2\pi k \\ \gamma = \pm 2\pi/3 + 2\pi k\end{array}\right.$$

Исследуем поведение кривой в окрестностях данных точек:

1) $\gamma = 2\pi k$

Найдем две первых ненулевых производных

$\vec{r}' = \{0, 0\}$

$\vec{r}'': \begin{array}{l} x''/a = 4\cos(2\gamma) - 2\cos(\gamma); \\ y''/a = 4\sin(2\gamma) - 2\sin(\gamma); \end{array}$ $\vec{r}'' = a\{2, 0\}$

$\vec{r}''': \begin{array}{l} x'''/a = 2\sin(\gamma) - 8\sin(2\gamma); \\ y'''/a = 8\cos(2\gamma) - 2\cos(\gamma); \end{array}$ $\vec{r}''' = a\{0, 6\}$ p=2; q=3.

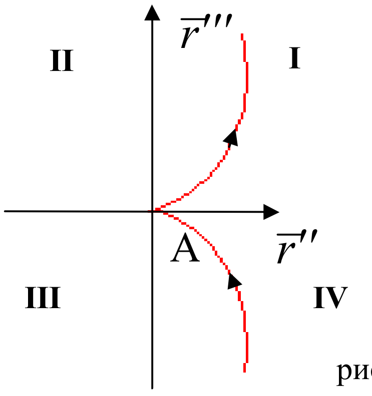


рис .1

2) $\gamma = \pi k$, $\vec{r}' = a\{0, -4\}$, $\vec{r}'' = a\{6, 0\}$

p=1; q=2.

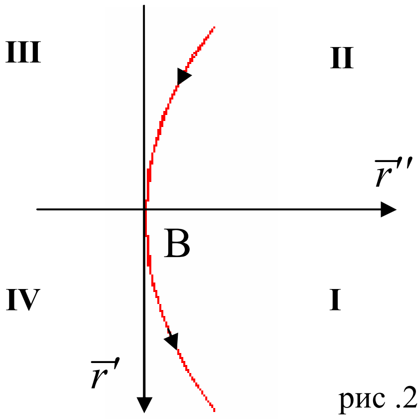
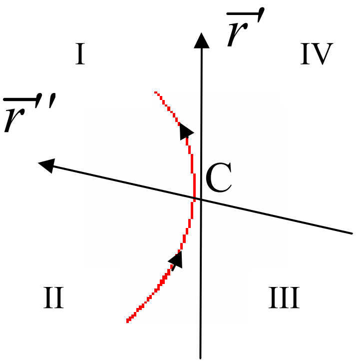


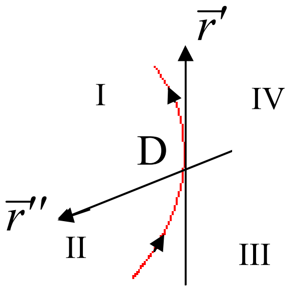
рис .2

3) $\gamma = \frac{\pi}{3}$ $\overline{r}' = a\{0,2\}$ $\overline{r}'' = a\{-3,\sqrt{3}\}$ p=1; q=2.



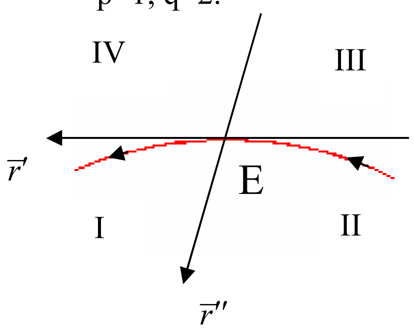
4) $\gamma = -\frac{\pi}{3}$ $\overline{r}' = a\{0,2\}$ $\overline{r}'' = a\{-3,-\sqrt{3}\}$

p=1; q=2.



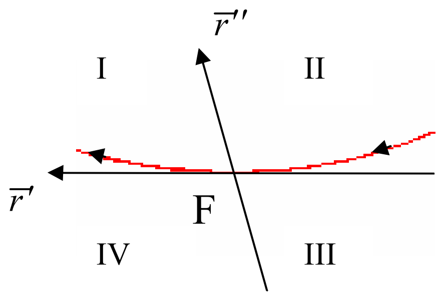
5) $\gamma = \frac{2\pi}{3}$, $\overline{r}' = a\{-2\sqrt{3},0\}$, $\overline{r}'' = a\{-1,-3\sqrt{3}\}$

p=1; q=2.

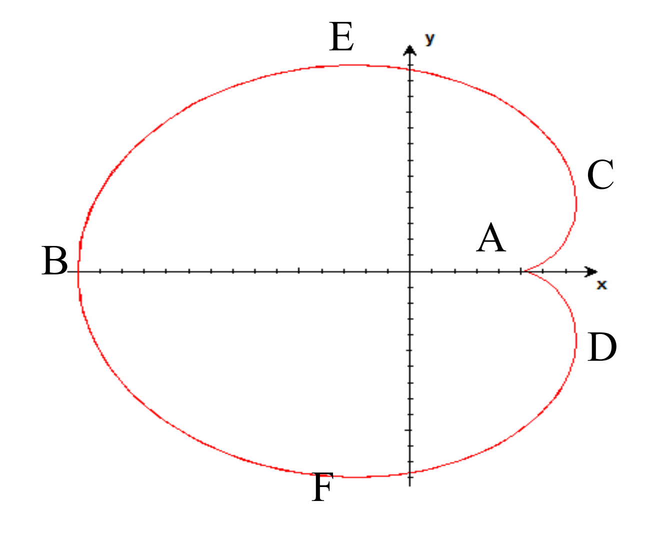


6) $\gamma = -\frac{2\pi}{3}$ $\overline{r}' = a\{-2\sqrt{3},0\}$ $\overline{r}'' = a\{-1,3\sqrt{3}\}$

p=1; q=2.

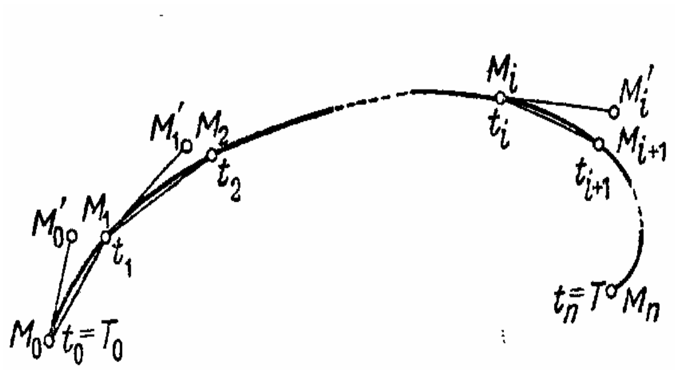


Общий вид кардиоиды, с отмеченными точками A, B, C, D, E, F, соответствующих параметрам $\gamma = 0$, $\gamma = \pi$, $\gamma = \frac{\pi}{3}$, $\gamma = -\frac{\pi}{3}$, $\gamma = \frac{2\pi}{3}$ и $\gamma = -\frac{2\pi}{3}$ соответственно.



Длина дуги как натуральный параметр

Рассмотрим кривую, заданную параметрически: $\vec{r} = \vec{r}(t)$, где $T_0 \le t \le T$. Разобьем кривую на n участков точками $t_0, t_1, t_2, ..., t_n$ таким образом, чтобы выполнялось соотношение: $T_0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = T$.



Рассмотрим произвольный участок $M_i M_{i+1}$. Рассмотрим хорду $\overrightarrow{M_i M_{i+1}}$ (отвечающую переходу из точки t_i в точку t_{i+1}) и соответствующий вектор-дифференциал

$\overline{M_i M'}_{i+1} = \vec{r}'(t_i)(t_{i+1} - t_i)$, который будет направлен по касательной в точке $t = t_i$. Составим сумму длин всех хорд

$$\sum_{i=0}^{n-1} M_i M'_{i+1}\ , \tag{1}$$

т.е. это длина ломаной $M_0 M_1 ... M_n$, вписанной в нашу кривую. Составим сумму длин всех соответствующих отрезков по касательным:

$$\sum_{i=0}^{n-1} M_i M'_i = \sum_{i=0}^{n-1} \vec{r}'(t_i)(t_{i+1} - t_i)\ . \tag{2}$$

Обозначим $\Delta = \max\{t_{i+1} - t_i\}$. При $\Delta \to 0$ разность между суммами (1) и (2) стремится к нулю. Убедимся в этом.

▷ Составим модуль разности:

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1} M_i M_{i+1} - \sum_{i=0}^{n-1} M_i M'_i\right| \overset{\substack{т.к.\\ пределы\\ суммирования\\ совпадают}}{=} \left|\sum_{i=0}^{n-1} (M_i M_{i+1} - M_i M')\right| \overset{\substack{неравенство\\ треугольника}}{\le} \sum_{i=0}^{n-1} \left|M_i M_{i+1} - M_i M'\right|$$

Пользуясь оценкой (4), получим:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left|M_i M_{i+1} - M_i M'\right| \le \sum_{i=0}^{n-1} C_1 \frac{(t_{i+1} - t_i)^2}{2} \overset{\substack{Заменим\\ одно\ из\\ множителей\\ под\ квадратом\\ на\ \Delta}}{\le} \frac{C_1}{2}\Delta \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i)}_{\cancel{t_1} - T_0 + \cancel{t_2} - \cancel{t_1} ... + T_n = T_n - T_0} = \frac{C_1}{2}\Delta(T - T_0)\ .$$

Учитывая, что $\Delta \to 0$, получим, что разность между двумя суммами также будет стремиться к нулю. Таким образом, при $\Delta \to 0$: $\left|\sum_{i=0}^{n-1} M_i M_{i+1} - \sum_{i=0}^{n-1} M_i M'_i\right| \to 0$ ◁ (3)

Сумму (2) можно рассматривать как интегральную сумму $\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi)\Delta x_i$, где $f(t) = \left|\vec{r}'(t)\right|$, построенную на промежутке от $t_0 = T_0$ до $t_n = T$. По определению определенного интеграла. $\sum_{i=0}^{n-1} M_i M'_i \underset{при\ \Delta \to 0}{\to} \int_{T_0}^{T} \left|\vec{r}'(t)\right| dt$. Следовательно, в силу (3) сумма (1) также будет стремится к тому же пределу

$$\sum_{i=0}^{n-1} M_i M_{i+1} \underset{\Delta \to 0}{\to} \int_{T_0}^{T} \left|\vec{r}'(t)\right| dt \tag{4}$$

Таким образом длина ломаной (1), вписанной в нашу кривую при бесконечном разбиении к пределу (4). Это предел называется *длиной нашей кривой* к интегралу

$$l(t) = \int_{T_0}^{T} \left|\vec{r}'(t)\right| dt\ . \tag{4′}$$

Выбор параметра *t* на данной кривой является в сущности произвольным. Это вносит некоторую путаницу в изучении кривой. Попробуем избежать эту проблему, выбрав параметризацию, геометрически связанную с самой кривой, а именно выбрав за параметр длину дуги.

Пусть нам дана кривая $\vec{r} = \vec{r}(t)$, где $t \in [T_0; T]$. Зафиксируем на кривой любую точку M_0 в качестве начала отсчета, а $M(t)$ – любая точка на этой кривой.

Длина участка кривой M_0M по (4) выражается с помощью интеграла с верхним переменным пределом:

$$s = \overset{\frown}{M_0M} = \int_{t_0}^{t} |\vec{r}'(t)| dt \qquad (5)$$

Таким образом, s выражается как функция верхнего переменного предела $s = s(t)$.

Отметим, что s может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Представим это в следующем виде:

$$\left.\begin{array}{l} t > t_0 \Rightarrow s > 0 \\ t < t_0 \Rightarrow s < 0 \\ t = t_0 \Rightarrow s = 0 \end{array}\right] \mapsto \textit{по свойству определенного интеграла}$$

Дифференцируя выражение (5) по переменной t получим:

$$s'(t) = |\vec{r}'(t)| \qquad (6)$$

Рассмотрим длину кривой в обыкновенной точке, т.е. $\vec{r}'(t) \neq 0 \Rightarrow |\vec{r}'(t)| > 0 \Rightarrow s'(t) > 0$, т.е. функция $s(t)$ является монотонной функцией. Следовательно, по теореме об обратной функции для функции $s(t)$ существует обратная $t = t(s)$, $s(T_0) \leq s \leq s(T)$.

Таким образом, длина кривой s может быть выбрана за новый параметр вдоль кривой, геометрически связанный с этой кривой: $\vec{r} = \vec{r}(t) = \vec{r}(t(s)) = \vec{r}_1(s)$. Получаем, что радиус-вектор выражен в функции параметра s.

<u>*Следствия:*</u>

1) Умножим обе части равенства (6) на dt: $s'(t)dt = |\vec{r}'(t)| dt$. Т.е.

$$|ds| = |d\vec{r}|, \qquad (7)$$

т.е. модуль дифференциала длины дуги равен модулю дифференциала радиус-вектора.

2) Разделив (7) на $|ds|$, имеем:

$$1 = \frac{|d\vec{r}|}{|ds|}, \qquad (7')$$

т.е. производная радиус-вектора по параметру дуге – это единичный вектор.

3) При координатном представлении $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, то, продифференцировав, это равенство, получим:

$$\vec{r}'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k} \qquad (8)$$

Найдем $|\vec{r}'(t)|$: $|\vec{r}'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} = s'(t)$.

Домножим на dt (8): $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$

$$|dr| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = |ds|. \qquad (8')$$

$$s(t) = \int_{T_0}^{T} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt \qquad (9)$$

Формула (9) выражает формулу для вычисления длины дуги, когда кривая задана параметрически. В частности, если параметром служит абцисса x, то формула (9) примет вид:

$$s(t)=\int_{T_0}^{T}\sqrt{1+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt \qquad (9')$$

Рассмотрим плоскую кривую, заданную в полярных координатах.

$$\begin{cases} x=\vec r(\varphi)\cos\varphi \\ y=\vec r(\varphi)\sin\varphi \\ z=0 \end{cases}$$, φ выступает в качестве параметра.

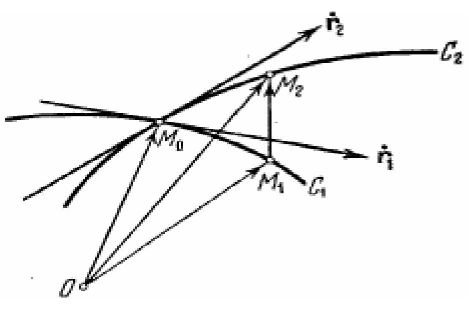
$$s(\varphi)=\int_{T_0}^{T}\sqrt{(x'(\varphi))^2+(y'(\varphi))^2+(z'(\varphi))^2}\,d\varphi=$$

$$=\int_{T_0}^{T}\sqrt{(\vec r'(\varphi)\cos\varphi-\vec r(\varphi)\sin\varphi)^2+(\vec r'(\varphi)\sin\varphi+\vec r(\varphi)\cos\varphi)^2}\,d\varphi=\int_{T_0}^{T}\sqrt{(\vec r'(\varphi))^2+(\vec r(\varphi))^2}\,d\varphi \qquad (9'')$$

Касания кривых

При изучении кривых в бесконечно малых приближениях часто играет важную роль порядок близости между двумя кривыми, выходящими из одной точки. Так, например, если нам нужно составить представление о ходе кривой в бесконечно малой области, то мы выбираем другую кривую, которая с необходимой степенью точности совпадает с первой кривой. Если же вторая кривая обладает хорошо известным строением (является, например окружностью), то мы получаем представление и о ходе первой кривой вв бесконечно малой области.

Изучим взаимное расположение кривых l_1 и l_2, выходящих из общей точки M_0. Возьмем за параметр длину дуги s: $\begin{matrix}\vec r_1=\vec r_1(s),\\ \vec r_2=\vec r_2(s).\end{matrix}$



Производные вектор-функции $\vec r$ по параметру дуги s в дифференциальной геометрии обозначается так: $\dot{\vec r}$, $\ddot{\vec r}$, …, $\overset{(n)}{\vec r}$.

Изучим расхождение между кривыми l_1 и l_2, которое образуется когда мы из общей точки M_0 сместимся на одно и тоже расстояние вдолькаждой кривой. Отметим точки, соответствующие одинаковым значениям параметра s на кривых l_1 и l_2 через M_1 и M_2:

$$\overset{\frown}{M_0M_1}=\overset{\frown}{M_1M_2}=s$$

Расхождение между кривыми l_1 и l_2 оценивается по величине расстояния M_1M_2 - чем меньше это расстояние (т.е. чем выше порядок малости расстояния M_1M_2 относительно s), тем слабее расхождение кривых, тем теснее они сближены между собой.

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}.$$

Выпишем разложения в ряд Тейлора для вектор-функций $\vec{r}_1(s)$ и $\vec{r}_2(s)$ по степеням s:

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{OM_1} &= \vec{r}_1(s) = \vec{r}_1 + \dot{\vec{r}}_1 s + \ddot{\vec{r}}_1 \frac{s^2}{2} + \ldots + \overset{(n)}{\vec{r}_1} \frac{s^n}{n!} + \ldots \\ \overrightarrow{OM_2} &= \vec{r}_2(s) = \vec{r}_2 + \dot{\vec{r}}_2 s + \ddot{\vec{r}}_2 \frac{s^2}{2} + \ldots + \overset{(n)}{\vec{r}_2} \frac{s^n}{n!} + \ldots \end{aligned}\right\}$$

Здесь мы не выписали остаточный член, т.к. он стремится к нулю при $s \to 0$. (становится бесконечно малым более высокого порядка, чем любой ненулевой член в данном разложении).

Представим $\overrightarrow{M_1M_2}$ как разность векторов $\vec{r}_1(s)$ *и* $\vec{r}_2(s)$:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = (\dot{\vec{r}}_2 - \dot{\vec{r}}_1)s + (\ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1)\frac{s^2}{2!} + \ldots + (\overset{(n)}{\vec{r}_2} - \overset{(n)}{\vec{r}_1})\frac{s^n}{n!} + \ldots \qquad (10)$$

Возможны следующие случаи:

1) Наиболее общий случай, когда $\dot{\vec{r}}_1$ и $\dot{\vec{r}}_2$ неколлинеарны между собой, т.е. касательные в точке M_0 к кривым l_1 и l_2 не совпадают, образуя угол, неравный нулю. Тогда разложение (10) начинается с члена $(\dot{\vec{r}}_2 - \dot{\vec{r}}_1)s$. Так как старший член определяет порядок малости всего разложения, то $\overrightarrow{M_1M_2}$ будет одного и того же порядка с длинами дуг $\overset{\frown}{M_0M_1}$ и $\overset{\frown}{M_1M_2}$. Это – случай *пересечения* кривых l_1 *и* l_2.

2) Рассмотрим теперь случай, когда $\dot{\vec{r}}_1$ и $\dot{\vec{r}}_2$ коллинеарны, т.е. касательные к кривым l_1 *и* l_2 в точке M_0 совпадают. В этом случае говорят, что кривые l_1 *и* l_2 имеют касание в точке M_0. Так как согласно (7′) векторы $\dot{\vec{r}}_1$ и $\dot{\vec{r}}_2$ - единичные, и $\dot{\vec{r}}_1 = \dot{\vec{r}}_2$, тогда в разложении (10) член первой степени относительно s равен нулю и оно начинается с члена $(\ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1)\frac{s^2}{2!}$. Таким образом, в случае касания расстояние M_1M_2 - бесконечно малое не ниже второго порядка малости относительно s.

В некоторых точках кривые l_1 *и* l_2, касаясь друг друга, могут быть сближены между собой особенно тесно, т.е. расстояние M_1M_2 становится еще меньше и имеет более высокий порядок малости. Тогда в точке M_0 кроме равенства $\dot{\vec{r}}_1 = \dot{\vec{r}}_2$ выполняется равенство $\ddot{\vec{r}}_1 = \ddot{\vec{r}}_2$ и разложение (10) содержит бесконечно малые не ниже 3-го порядка малости.

В общем случае кривые l_1 *и* l_2 в точке M_0 имеют *касание n-ого порядка*, если

$$\dot{\vec{r}}_1 = \dot{\vec{r}}_2,\ \ddot{\vec{r}}_1 = \ddot{\vec{r}}_2,\ \ldots,\ \overset{(n)}{\vec{r}_1} = \overset{(n)}{\vec{r}_2}. \qquad (11)$$

Тогда расстояние M_1M_2 является бесконечно малым не ниже (*n+1*)-ого порядка малости относительно s.

Если $\overset{(n+1)}{\vec{r}_1} \neq \overset{(n+1)}{\vec{r}_2}$, то мы имеем *касание точно* $n-$*го порядка* и смещение M_1M_2 является бесконечно малым точно (*n+1*)-ого порядка малости (а не выше).

Наиболее общим случаем касания является касание 1-ого порядка, когда *n*=1 и условие (11) состоит только из одного уравнения.

<u>*Следствия:*</u>

1) Рассмотрим обыкновенную точку M_0.В окрестности данной точки кривые l_1 *и* l_2 представляются в виде простого отрезка и могут быть заданы в следующем виде:

$$\underbrace{\begin{cases} y = f_1(x) \\ z = g_1(x) \end{cases}}_{l_1} \qquad \underbrace{\begin{cases} y = f_2(x) \\ z = g_2(x) \end{cases}}_{l_2}$$

Необходимый и достаточный признак касания $n-го$ ***порядка*** в общей точке $M_0\ (x_0, y_0 = f_1(x_0) = f_2(x_0), z_0 = g_1(x_0) = g_2(x_0))$.

Для касания $n-го$ порядка необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\begin{cases} f_1' = f_2',\ f_1'' = f_2''....f_1^{(n)} = f_2^{(n)} \\ g_1' = g_2',\ g_1'' = g_2''....g_1^{(n)} = g_2^{(n)} \end{cases} \tag{12}$$

2) Пусть задана плоская кривая в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \tag{13}$$

и семейство кривых от *n* параметров

$$F(x, y, C_1, ..., C_n) = 0 \tag{14}$$

Уравнение (12) задает *семейство параметрически заданных кривых*. Если n параметров, следовательно n *параметрическое семейство.* Необходимо найти среди кривых семейства (14) такую, которая бы имела с данной кривой (13) в точке $t = t_0$ касание наивысшего возможного порядка, т.е. найти кривую семейства (14), которая с наилучшей возможной точностью воспроизводит кривую (13) в окрестности точки $t = t_0$.

Подставим текущие координаты кривой (13) в левую часть уравнения этой кривой семейства. Результат подстановки обозначим за новую функцию $\varphi(t, C_1, ..., C_n) = F(x(t), y(t), C_1, ..., C_n)$. Необходимо потребовать, чтобы при $t = t_0$ данная функция была равна нулю, т.е. чтобы точка t_0 лежала на нашей кривой (13) и принадлежала семейству (14):

$$\varphi(t_0, C_1, ..., C_n) = 0. \tag{15}$$

Для касания наивысшего порядка необходимо обращение в нуль в этой точке последовательных производных от $\varphi(t_0, C_1, ..., C_n)$ по *t*:

$$\begin{cases} \varphi'(t_0, C_1, ..., C_n) = 0 \\ \varphi''(t_0, C_1, ..., C_n) = 0 \\ \quad ... \\ \varphi^{n-1}(t_0, C_1, ..., C_n) = 0 \end{cases} \tag{16}$$

Для однозначного нахождения *n* коэффициентов $C_1, ..., C_n$ необходимо решить *n* уравнений, т.е. в системе (16) необходимо остановиться на (*n-1*) производной, что будет гарантировать касание (*n-1*) – порядка.

ПРИМЕР.

1 .Семейство (14) представляет собой семейство всевозможных прямых (не параллельных оси Y): $y = C_1 x + C_2$. Найти прямую, имеющую касание 1-го порядка с кривой (13) в точке $t = t_0$, где $x'(t) \neq 0$.

1 способ:

Составим функцию $\varphi(t, C_1, C_2) = y(t) - C_1 x(t) - C_2$;

$t = t_0 : y(t) = y_0, \quad x(t) = x_0, \quad y_0 - C_1 x_0 - C_2 = 0$

$\varphi'(t, C_1, C_2) = y'(t) - C_1 x'(t) = 0; \quad {y_0}' - C_1 {x_0}' = 0; \quad \Rightarrow \quad C_1 = \dfrac{y_0'}{x_0'}; \quad C_2 = y_0 - C_1 x_0 = y_0 - \dfrac{y_0'}{x_0'} x_0; \quad \Rightarrow$

прямая, имеющая касание 1-го порядка $y = \dfrac{y_0'}{x_0'} x + y_0 - \dfrac{y_0'}{x_0'} x_0 = y_0 + \dfrac{y_0'}{x_0'}(x - x_0)$. Получили уравнение касательной, т.е. касательная с кривой имеет касание 1-го порядка.

2 способ:

Пусть нам даны две кривые

$l_1 : y = C_1 x + C_2$ и $l_2 : y = y(t), x = x(t)$

По следствию 1 необходимым и достаточным условием касания первого порядка является это равенство первых производных заданных функций $y_1' = y_2'$.

Продифференцировав первое уравнение, получим $y_1' = C_1$. С другой стороны производная y_2' параметрически заданной кривой l_2 определяется как $y_2' = \left.\dfrac{y_t'}{x_t'}\right|_{t=t_0} = \dfrac{y_0'}{x_0'} \Rightarrow C_1 = \dfrac{y_0'}{x_0'}$.

Параметр C_2 найдем из уравнения $y_0 = C_1 x_0 + C_2$, аналогично рассмотренному выше примеру (способ 1). Получим уравнение касательной.

Необходимо отметить, что если $y_{xx}'' \neq 0$, то касание точно 1-го порядка, где $y_{xx}'' = \dfrac{y''x' - y'x''}{(x')^3} \neq 0 \Rightarrow y''x' - y'x'' \neq 0$ в точке $t = t_0$.

Если $y''x' - y'x'' = 0$, то $y_{xx}'' = 0$ мы можем получить касание второго и более высокого порядка.

Если $y_{xx}'' = 0$, то точка в которой выполняется данное соотношение называется точкой распрямления такая точка называется *точкой распрямления*. Если при $y_{x^3}''' \neq 0$, то данная точка является точкой перегиба.

2. Семейство (14) представляет собой семейство всевозможных окружностей

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2.$$

Необходимо найти окружность, имеющую касание 2-го порядка с кривой (13) в точке $t = t_0$. Согласно (15) составим функцию $\varphi(t, a, b, R) = \left(x(t) - a^2\right) + \left(y(t) - b\right)^2 - R^2$. Для касания 2-го порядка, используя формулы (15) и (16) необходимо и достаточно, чтобы

$$\varphi(t_0) = \varphi'(t_0) = \varphi''(t_0) = 0.$$

Дифференцируя по t функцию $\varphi(t, a, b, R)$, получим следующую систему для определения коэффициентов a, b, R:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi(t) = (x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2 = 0, \\ &\varphi'(t) = 2\left\{x'(x-a) + y'(y-b)\right\} = 0, \\ &\varphi''(t_0) = 2\left\{x''(x-a) + y''(y-b) + x'^2 + y'^2 = 0\right\} \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Разрешим полученные уравнения относительно $(x-a)$ и $(y-b)$.

$$x-a=-\frac{y'(y-b)}{x'};$$

Подставляем полученное выражение в $\varphi''_{t^2}(a,b,R)$;

$$-x''(t)\frac{y'(t)(y-b)}{x'(t)}+(x'(t))^2+y''(t)(y-b)+(y'(t))^2=0;$$

$$(y-b)\left(\frac{y''x'-y'x''}{x'}\right)=-(x')^2-(y')^2;$$

$$(y-b)=-x'\frac{[(x')^2+(y')^2]}{y''x'-y'x''};$$

$$b-y=x'\frac{(x')^2+(y')^2}{y''x'-y'x''};$$

Тогда

$$x-a=-y'\frac{(x')^2+(y')^2}{y'x''-y''x'};$$

$$a-x=y'\frac{(x')^2+(y')^2}{y'x''-y''x'};$$

Тогда легко получить, что координаты центра *C(a,b)* окружности

$$a=y'\frac{(x')^2+(y')^2}{y'x''-y''x'}+x;$$

$$b=x'\frac{(x')^2+(y')^2}{y''x'-y'x''}+y.$$

Из первого уравнения системы (17) получим

$$R^2=(x-a)^2+(y-b)^2.$$

Подставляя формулы для $(x-a)$ и $(y-b)$, получим выражения для вычисления радиуса данной окружности:

$$R=\frac{[(x')^2+(y')^2]^{3/2}}{|y''x'-y'x''|}.$$

Таким образом, в точке $t=t_0$ $x(t_0)=x_0$, $y(t_0)=y_0$, $x'(t_0)={x_0}'$ $y'(t_0)={y_0}'$, $x''(t_0)={x_0}''$ $y''(t_0)={y_0}''$ получаем следующие вычислительные формулы для центра окружности *C(a,b)* и радиуса окружности *R*, имеющей с кривой (13) касание 2-го порядка.

$$\left.\begin{aligned} a-x_0&={y_0}'\frac{{x_0'}^2+{y'}^2_0}{x_0''{y_0}'-{y_0}''{x_0}'}\\ b-y_0&=x_0'\frac{{x_0'}^2+{y'}^2_0}{y_0''x_0'-x_0''y_0'}\end{aligned}\right\}, \qquad (18)$$

$$R=\frac{\sqrt{\left({x_0}'^2+{y_0}'^2\right)^3}}{\left|{x_0}''{y_0}'-{y_0}''{x_0}'\right|}. \qquad (19)$$

Такая окружность существует при условии, что $y_0''x_0'-x_0''y_0'\neq 0$.

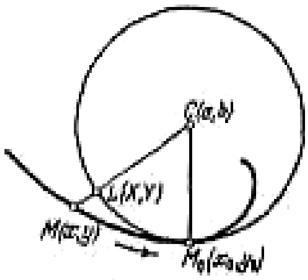
Теория кривизны плоских кривых. Соприкасающаяся окружность.

Простейший образ, связанный с данной точкой произвольной кривой, — это ее касательная в данной точке. Касательная имеет с кривой касание 1-го порядка и воспроизводит ход кривой вблизи точки касания с точностью первого порядка, т.е. пренебрегая бесконечно малыми 2-го порядка и выше. Иными словами, касательная – это самое «грубое» приближение кривой в данной точке. Теперь необходимо воспроизвести ход кривой вблизи данной точки с точностью 2-го порядка, т.е. пренебрегая бесконечно малыми 3-го порядка и выше. При помощи прямой это сделать нельзя. Тогда мы обртимся к другой элементарной кривой – к окружности.

Соприкасающаяся окружность – это окружность, которая имеет с кривой касание 2-го порядка, т.е. приближает нашу кривую, пренебрегая бесконечно малыми величинами 3-го порядком и выше.

В примере 2 предыдущей главы было получено, что такая окружность для кривой (13) определяется системой (17), из которой получены формулы для определения центра *C(a,b)* и радиуса *R* соприкасающейся окружности по формулам (18), (19) при условии что

$$y_0''x_0' - x_0''y_0' \neq 0. \tag{20}$$



Таким образом, при выполнении условия (20) для кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$ существует и определяется единственным образом окружность, имеющая с кривой касание 2-го порядка.

Точки, в которых выполняется условие $y_0''x_0' - x_0''y_0' = 0$, называются *точками распрямления*.

В точках распрямления мы имеем предельный случай соприкасающейся окружности – случай, когда ее радиус бесконечно большой, т.е. окружность превращается в прямую - распрямляется.

Центр *C(a,b)* соприкасающейся окружности называется *центом кривизны* в данной точке $t = t_0$. Радиус *R* соприкасающейся окружности называется *радиусом кривизны* в данной точке $t = t_0$.

Если уравнение кривой задается в явном виде *y=y(x)*, т.е. роль параметра *t* играет абсцисса *x*, тогда *x′*=1*, x″=0* и формулы (18), (19) принимают вид:

$$a - x_0 = -y_0'\frac{1 + y_0'^2}{y_0''},\ b - y_0 = \frac{1 + y_0'^2}{y_0''},\ R = \frac{\left(1 + y_0'^2\right)^{3/2}}{\left|y_0''\right|}. \tag{21}$$

Замечание.

Необходимо отметить, что при выводе условия касания с помощью разложения в ряд Тейлора по формуле (10) при $t \to t_0$ (если использовать разложение по степеням $t - t_0$) разложение в ряд Тейлора начинается с членов 3-ей степени относительно $t - t_0$, т.е. главная часть смещения имеет вид $\varphi'''(t_0)\frac{(t-t_0)^3}{3!}$, и значит, разложение в ряд Тейлора имеет знак главной части, т.е. меняет знак при переходе от значений $t<t_0$ к $t>t_0$. Следовательно отклонение кривой от соприкасающейся окружности меняет знак при переходе через точку касания M_0.Тем самым кривая в точке касания, переходит с одной стороны своей соприкасающейся окружности на другую (см. рис.).

Центр кривизны в полярных координатах

Пусть уравнение кривой имеет вид $r=r(\varphi)$. Тогда параметрическое представление кривой имеет вид:

$$\begin{aligned} x &= r(\varphi)\cos\varphi \\ y &= r(\varphi)\sin\varphi \end{aligned} \tag{22}$$

Оси *X* и *Y* всегда могут быть выбраны следующим образом: ось *X* проходит через точку *M* на кривой, а полярная ось принята за ось *X*. Это всегда можно сделать, осуществив поворот декартовой прямоугольной системы координат на угол φ. Тогда в новой системе координат полярный угол $\varphi=0$, а т.к. полярная ось принята за ось *X*, то координаты точки *M* в новой системе координат будут иметь вид $M(r,0)$.

Дифференцируем (22) по φ, учитывая, что $r=r(\varphi)$:

$$\begin{aligned} x' &= r'\cos\varphi - r\sin\varphi \quad & x'' &= r''\cos\varphi - 2r'\sin\varphi - r\cos\varphi \\ y' &= r'\sin\varphi + r\cos\varphi, & y'' &= r''\sin\varphi + 2r'\cos\varphi - r\sin\varphi \end{aligned}.$$

В точке M, т.к. $\varphi=0$, то

$$\begin{aligned} x' &= r' \quad & x'' &= r''-r \\ y' &= r, & y'' &= 2r' \end{aligned}.$$

Находим координаты центра кривизны *C* по формуле (18)

$$\begin{aligned} a &= r\frac{r^2+r'^2}{r''r-r^2-2r'^2}+r = r\frac{r''r-r'^2}{r''r-r^2-2r'^2}, \\ b &= r'\frac{r^2+r'^2}{r^2+2r'^2-r''r} \end{aligned} \tag{23}$$

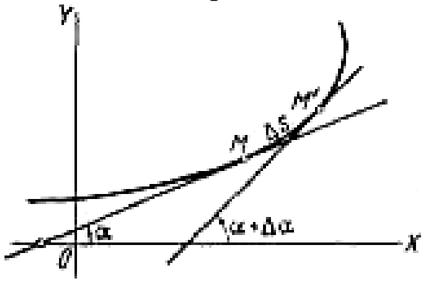
Так как в точке M $x_0=r$, $y_0=0$, то легко вычислить радиус кривизны:

$$R=\frac{\left(r^2+r'^2\right)^{3/2}}{\left|r^2+2r'^2-r''r\right|}. \tag{24}$$

Центр кривизны будет расположен на нормали.

Кривизна

Рассмотрим понятие кривизны, дав численную оценку степени искривленности кривой в данной точке. Как видно, разные кривые или одна т та же кривая в разных точках могут быть искривлены в большей или меньшей степени. Так прямая совсем не имеет искривления, окружность большого радиуса имеет слабую искривленность, а по мере уменьшения ее радиуса искривленность кривой растет. На рисунке искривленность кривой увеличивается по мере при движении слева направо. Аналитически: чем сильнее искривление кривой, тем быстрее меняет свое направление касательная к ней при переходе от одной точке к другой. Так, прямая являющаяся сама своей касательной все время сохраняет постоянное направление. Так за меру искривленности кривой в среднем на участке MM' можно принять угол поворота касательной, приходящейся в среднем на единицу пути, пройденного точкой касания.



За среднюю кривизну дуги обозначим угол поворота касательной, приходящейся в среднем на единицу пути, пройденного точкой касания:

$$k_{cp} = \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}, \qquad (25)$$

$\Delta\alpha$ - угол, образованный касательными в точках M и M', Δs - длина дуги MM'.

Заставим точку M' стремиться по кривой в M. Тогда, предел, к которому стремиться средняя кривизна дуги MM', называется *кривизной дуги* в точке M:

$$k = \lim_{M' \to M} \left| \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \right|. \qquad (26)$$

Вычислим кривизну кривой в произвольной точке. Пусть кривая задана параметрически $x = x(t)$, $y = y(t)$. Каждому значению параметра t отвечает некоторая точка на кривой $M(t)$ и угол $\alpha(t)$, образованный касательной с положительным направлением оси X.

Будем рассматривать обыкновенные точки, т.е. где $x'(t)$ и $y'(t)$ не равны нулю одновременно. Пусть для определенности $x'(t) \neq 0$. Тогда касательная не параллельна оси Y, и ее угловой коэффициент равен

$$\mathrm{tg}\alpha(t) = \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} \Rightarrow \alpha(t) = \mathrm{ar\,ctg}\frac{y'(t)}{x'(t)} \qquad (27)$$

С другой стороны, длина дуги s также является функция от t: $s=s(t)$.

Перейдем из точки $M(t)$ в некоторую другую точку $M'(t+\Delta t)$, давая параметру t приращение Δt. Тогда функция $\alpha(t)$ примет новое значение $\alpha(t+\Delta t)$. Разность $\alpha(t+\Delta t) - \alpha(t)$ - угол поворота касательной при переходе от M к M'. С другой стороны, $s(t+\Delta t)$ и $s(t)$ - длины дуг, отсчитанных от некоторой начальной точки соответственно до точек M' и M. Разность этих дуг $\Delta s = s(t+\Delta t) - s(t)$ выражает длину дуги от M до M'.

Тогда средняя кривизна кривой на отрезке MM' выражается отношением $k_{cp} = \left| \frac{\alpha(t+\Delta t) - \alpha(t)}{s(t+\Delta t) - s(t)} \right|$.

Рассмотрим поведение этой величины при стремлении точки M в точку M' по кривой. Если переписать предыдущее выражение, разделив его на Δt в виде

$$k_{cp} = \left| \frac{\dfrac{\alpha(t+\Delta t) - \alpha(t)}{\Delta t}}{\dfrac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}} \right|.$$

Ясно, что при $\Delta t \to 0$ числитель и знаменатель стремятся к пределам, а именно к производным $\alpha'(t)$ и $s'(t)$, следовательно, предел этого выражения (т.е. кривизна в точке) существует и выражается:

$$k = \left| \frac{\alpha'(t)}{s'(t)} \right| \tag{28}$$

Дифференцируя (27) находим $\alpha'(t) = \dfrac{\dfrac{y''(t)x'(t) - x''(t)y'(t)}{x'(t)^2}}{1 + \left(\dfrac{y'(t)}{x'(t)} \right)^2} = \dfrac{y''x' - x''y'}{x'^2 + y'^2}$

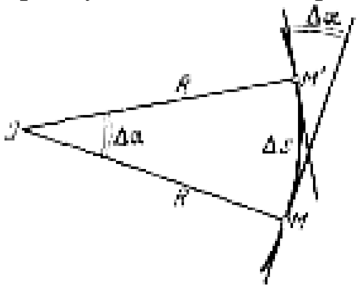
Найдем теперь $s'(t)$. Воспользуемся формулой $s'(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}$, т.к. $z\equiv 0$, получаем $s'(t) = \sqrt{x'^2 + y'^2}$. Подставляем полученные выражения в (28), получаем выражение для вычисления кривизны кривой в точке

$$k = \frac{|y''x' - x''y'|}{\left(x'^2 + y'^2\right)^{3/2}} \tag{29}$$

Сравнивая полученное выражение кривизны k с формулой (19) для радиуса кривизны, приходим к важному соотношению

$$k = \frac{1}{R}. \tag{30}$$

Кривизна произвольной кривой в каждой ее точке равна кривизне соприкасающейся окружности и величине, обратной величине радиуса соприкасающейся окружности. Чем больше радиус, тем меньше кривизна.



Геометрически для окружности получаем, что средняя кривизна любой дуги окружности равно обратной величине радиуса окружности. Следовательно, кривизна в любой точке окружности также равна $\dfrac{1}{R}$ и остается, постоянной от точки к точке.

Для точки распрямления ($y''x' - x''y' = 0$) по формуле (29) кривизна равна нулю *k=0.* В частности, к точкам кривизны нуль принадлежат все точки перегиба.

Векторы t и **n**.

В каждой точке M кривой мы можем ввести местную прямоугольную систему координат, где начало координат - это сама точка M, а в роли осей X и Y выступают касательная и нормаль в этой точке. Единичные векторы по касательной и нормали обозначаются **t** и **n**.

Пусть кривая зависит через параметр s

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(\mathrm{s}) \tag{31}$$

Производная радиус-вектора $\mathbf{r}(s)$ по дуге есть единичный касательный вектор $\mathbf{t}$.

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{t}\,. \tag{32}$$

По лемме1 производная единичного вектора ему ортогональна $\dot{\mathbf{t}} \perp \mathbf{t}$ следовательно вектор $\dot{\mathbf{t}}$ направлен по нормали $\mathbf{n}$. Дифференцируя (32), получаем $\ddot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{t}}$ следовательно вектор $\ddot{\mathbf{r}}$ также направлен по нормали $\mathbf{n}$. Условимся направлять вектор $\mathbf{n}$ всегда в сторону $\ddot{\mathbf{r}}$.

Вектор $\mathbf{t} = \dot{\mathbf{r}}$. Если изменим направление отсчета дуги *s*, то и направление вектора $\mathbf{t}$ тоже изменится. Направление вектора нормали $\mathbf{n}$ зависит от направления $\ddot{\mathbf{r}} = \dfrac{d\dot{\mathbf{r}}}{ds}$, который в свою очередь не зависит от направления s (т.к. $d\dot{\mathbf{r}}$ и ds одновременно меняют знаки на обратные). Таким образом, направление $\mathbf{n}$ будет всегда определенным, а вектор $\mathbf{t}$ будет менять свое направление в зависимости от отсчета дуги.

<u>Теорема</u>. Центр кривизны, т.е. центр соприкасающейся окружности, всегда лежит на нормали в сторону вектора **n**.

Доказательство. Рассмотрим нашу кривую в местной прямоугольной системе координат (центр кривой – точка *M*, *i* =**t**, *j* =**n**).

Запишем уравнение кривой в координатном виде ***r*** = ***r****(s)* = *x(s)****i*** + *y(s)****j***.

Дифференцируя по параметру *s*, получим

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\,\mathbf{i} + \dot{y}\,\mathbf{j},$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{x}\,\mathbf{i} + \ddot{y}\,\mathbf{j}$$

В точке *M* вектор $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{t}$ совпадает с **i**, следовательно $\dot{x} = 1, \quad \dot{y} = 0$.

Кроме того, **n** совпадает с **j** и , следовательно, $\ddot{\mathbf{r}}$ коллинеарен с **j** и направлен с ним в одну сторону, тогда $\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} > 0$. Найдем координаты центра кривизны *C(a, b)* по формулам (18). Учитывая, что в точке *M* координаты $x_0 = 0,\ y_0 = 0$, а производные их по параметру удовлетворяют только что полученным соотношениям, то формулы (18) примут вид $a = 0,\ b = \dfrac{1}{\ddot{y}},\ \ddot{y} > 0.$ Следовательно, $b > 0$ и центр *C* расположен на положительной полуоси *Y*, т.е. на нормали в сторону вектора **n.** Следовательно, центр окружности и сама кривая будут располагаться в сторону нормали и $\overrightarrow{MC} = R\mathbf{n}$, $\left|\overrightarrow{MC}\right| = R$

Вместе с центром кривизны С и вся соприкасающаяся окружность (тем самым и кривая, которая отличается от окружности на бесконечно малые 3-го порядка) расположены от касательной в сторону вектора **n** (см. рис.).

Формулы Френе

При изменении параметра s точка M движется по кривой, и вместе с ней меняются и векторы **t** и **n** как функции от s: $\mathbf{t} = \mathbf{t}(s)$, $\mathbf{n} = \mathbf{n}(s)$

Выясним, какой вид будут иметь производные векторов **t** и **n** по дуге s. Применим к вектор-функции $\mathbf{t}(s)$ 2-ю лемму. На ее основании скорость вращения единичной вектор-функции $\mathbf{t}(s)$ совпадает с модулем ее производной:

$$\lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right| = |\dot{\mathbf{t}}|, \tag{33}$$

$\Delta\alpha$ - угол поворота вектора **t** (т.е. угол поворота касательной), отвечающей приращению дуги Δs.

Левая часть равенства (33), согласно определению (26) представляет собой кривизну k нашей кривой. Следовательно, получаем

$$\left|\dot{\mathbf{t}}\right| = k \tag{34}$$

Вектор направлен $\dot{\mathbf{t}}$ по нормали, причем вектор нормали направлен в ту же сторону. Следовательно, вектор $\dot{\mathbf{t}}$ отличается от единичного вектора **n** положительным численным множителем, равным длине вектора $\dot{\mathbf{t}}$, т. е. кривизне k. Получаем

$$\dot{\mathbf{t}} = k\mathbf{n}. \tag{35}$$

Заметим, что признак точек распрямления k=0 может быть переписан в виде $\dot{\mathbf{t}} = 0$, т.е. $\ddot{\mathbf{r}} = 0$. Таким образом, устраненные нами из рассмотрения точки, где $\ddot{\mathbf{r}} = 0$, оказались действительно точками распрямления.

По лемме 1 производная единичного вектора **n** $\dot{\mathbf{n}} \perp \mathbf{n}$, а так как **n** направлено по нормали, то $\dot{\mathbf{n}}$ направлено по касательной и поэтому может отличаться от вектора **t** только численным множителем $\dot{\mathbf{n}} = \alpha\mathbf{t}$, α - неопределенный множитель. Определим α из условия, что векторы **t** и **n** перпендикулярны $\Rightarrow$ скалярное произведение этих векторов $\mathbf{tn} = 0$.

Продифференцируем последнее равенство по s. Получим $\dot{\mathbf{t}}\mathbf{n} + \mathbf{t}\dot{\mathbf{n}} = 0$. $\dot{\mathbf{t}} = k\mathbf{n}$, $\dot{\mathbf{n}} = \alpha\mathbf{t}$ и, учитывая, что **tt**=**nn**=1 (т.к. **t** и **n** – единичные векторы) получаем $\alpha + k = 0 \;\Rightarrow\; \alpha = -k$.

Получаем, что

$$\dot{\mathbf{n}} = -k\mathbf{t} \tag{36}$$

Формулы (35) и (36) называются *формулами Френе*. Они показывают зависимость производных векторов **t** и **n** от этих же векторов.

Геометрический смысл формул Френе

Умножим обе части (35) и (36) на ds

$$d\mathbf{t} = k\mathbf{n}ds,\; d\mathbf{n} = -k\mathbf{t}ds \tag{37}$$

Так как дифференциал любой функции – это главная часть приращения данной функции, то мы имеем главные части приращений вектор-функций $\mathbf{t}(s)$ и $\mathbf{n}(s)$ при переходе от значения s к значению $s + ds$.

Поскольку векторы **t** и **n** единичные, то фигуру, образованную этими векторами, можно только поворачивать. Если повернуть векторы **t** и **n** на угол $\varphi = kds$, то их новые значения выражаются через старые следующим образом:

$$\mathbf{t} + \Delta\mathbf{t} = \mathbf{t}\cos(kds) + \mathbf{n}\sin(kds),\ \mathbf{n} + \Delta\mathbf{n} = \mathbf{n}\cos(kds) - \mathbf{t}\sin(kds).$$

Мы ведем рассмотрение с точностью до первого порядка относительно ds, поэтому $\cos(kds) \sim 1$, $\sin(kds) \sim kds$ при $ds \to 0$.

Учитывая это, получаем, что $\Delta\mathbf{t} \sim \mathbf{n}kds$, $\Delta\mathbf{n} \sim -\mathbf{t}kds$, при $ds \to 0$.

Таким образом, сохраняя бесконечно малые первого порядка мы получили не точные значения приращений функций $\Delta\mathbf{t}$, $\Delta\mathbf{n}$, а только их главные части, т.е. дифференциалы, т.е. мы получили формулы (37).

Таким образом формула (37) выражают с точностью до 1-го порядка поворот векторов **t** и **n** на угол kds. Этот угол пропорционален пути ds, пройденному по кривой от точки M до точки M', а коэффициентом пропорциональности служит кривизна k в точке M.

Натуральное уравнение кривой

Задавая кривую ее уравнением мы пользуемся той или иной координатной системой. Таким образом, в записи кривой отражается не только геометрическая форма кривой, но и выбор координатной системы. Возникает вопрос: нельзя ли охарактеризовать кривую уравнением, вид которого не будет зависеть от выбора координатной системы.

Уравнение, вид которого не связан с выбором координатной системы и отражает только геометрическую форму самой кривой, называется *натуральным уравнением кривой*.

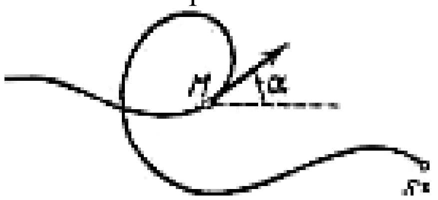
Под кривой мы будем понимать плоскую кривую, допускающую параметрическое представление $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $T_0 \le t \le T$.

Пусть кривая ориентирована, т.е. имеет направление в сторону возрастания параметра. Тогда, в качестве параметра может выступать дуга:

$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j}$, $S_0 \le s \le S$,

причем параметр s отсчитывается в положительном направлении, связанном с данной кривой.

Обозначим через $\alpha(s)$ - угол, образованный единичным касательным вектором $\mathbf{t}(s)$ с положительным направлением оси X.



Так как $\mathbf{t}(s)$ —вектор единичный, то его проекции на оси будут соответственно $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$. В то же время

$\mathbf{t}(s) = \dot{\mathbf{r}}(s) = \dot{x}(s)\mathbf{i} + \dot{\mathbf{y}}(s)\mathbf{j}$,

а значит,

$$\dot{x}(s) = \cos\alpha,\ \dot{y}(s) = \sin\alpha \tag{38}$$

Учитывая, что роль параметра t играет длина дуги s, и, следовательно, производная $s' = 1$, формула для кривизны (28) примет вид

$$k = \dot{\alpha}(s), \tag{39}$$

т.е. кривизна будет знаковой величиной, знак «+» перед $\dot{\alpha}(s)$ будет стоять, если α растет вместе с s, и знак «-», если α убывает при возрастании s.

Уравнение (39) выражает кривизну k как функцию дуги s вдоль кривой. Запишем его в виде

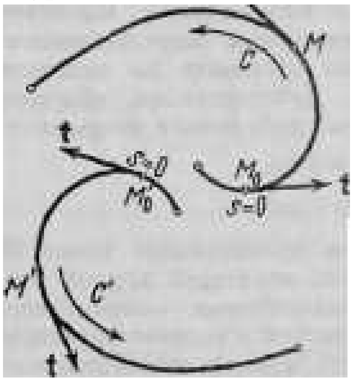
$$k = f(s),\ S_0 \le s \le S \tag{40}$$

Уравнение (40) называется *натуральным уравнением кривой*.

Для нахождения натурального уравнения используют уравнение (39).

Теорема.

Если, две кривые C и C' отличаются на плоскости только положением, то их натуральные уравнения одинаковы (после согласования начальных точек отсчета дуги).



Обратная теорема.

Если две кривые C и C' имеют одно и то же натуральное уравнение $k = f(s),\ S_0 \le s \le S$, то они отличаются только положением на плоскости.

Теорема.

Пусть совершенно произвольно задана непрерывная функция $f(s)$ в области изменения аргумента $S_0 \le s \le S$. В этом случае всегда можно построить кривую, для которой натуральное уравнение будет иметь вид $k = f(s),\ S_0 \le s \le S$

Доказательство.

Выберем произвольно некоторую точку $M_0(x_0,y_0)$ на плоскости и некоторый угол α_0.

Построим функцию $\alpha(s)$ следующим образом (так как $k = \dot{\alpha}(s) = f(s)$)

$$\alpha(s) = \int_0^s f(s)ds + \alpha_0 . \tag{41}$$

Используя (38), получаем, что

$$x(s) = \int_0^s \cos\alpha(s)ds + x_0 ,\quad y(s) = \int_0^s \sin\alpha(s)ds + y_0 \tag{41'}$$

Построим теперь кривую, определенную параметрическим представлением $x = x(s)$, $y = y(s)$ с ориентацией в сторону возрастания параметра s. Покажем, что нормальное уравнение для нее имеет вид $f(s) = k$.

Продифференцируем (41'):

$$dx = \cos\alpha(s)ds ,\quad dy = \sin\alpha(s)ds . \tag{42}$$

Теперь возведем эти два уравнения в квадрат и сложим:

$dx^2 + dy^2 = ds^2$, т.е. ds - есть дифференциал дуги и параметр s играет роль длины дуги вдоль пространственной кривой.

Выпишем выражение вектора **t** для построенной кривой:

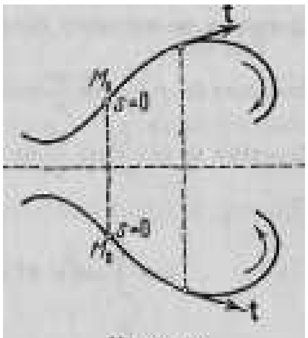
$\mathbf{t} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\,\mathbf{i} + \dot{y}\,\mathbf{j} = \cos\alpha(s)\ \mathbf{i} + \sin\alpha(s))\mathbf{j}$.

Эта формула показывает, что единичный вектор **t** наклонен к оси X по углом $\alpha(s)$. Вычислим для построенной кривой кривизну k по формуле (28): $k = \dot{\alpha}(s)$. Тогда используя (41) получаем $k = f(s)$. Таким образом, построенная кривая обладает наперед заданным уравнением.

Необходимо отметить, что данная теорема дает алгоритм нахождения кривой по ее натуральному уравнению.

Замечание. Зеркально симметричные кривые не переводятся одна в другую движением в плоскости (для этого требуется вращение в пространстве), поэтому они будут обладать разными натуральными уравнениями.

Чем же будут отличаться их натуральные уравнения? Если возьмем на этих кривых соответственные начальные точки и соответственные ориентации, то в соответственных точках значения угла α - наклона **t** к оси X для обеих кривых отличаются знаком. Следовательно, $k = \dot{\alpha}(s)$ также будет отличаться знаком. Значит, уравнения данных кривых будут отличаться только знаком $k = f(s)$ и $k = -f(s)$.



Черт. 60.

ПРИМЕР

1) Дано натуральное уравнение кривой $R^2 + s^2 = a^2$. Необходимо найти параметрическое уравнение данной кривой.

Выразим радиус кривизны $R = \sqrt{a^2 - s^2}$. Кривизна кривой определяется через радиус следующим образом $k = \frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - s^2}}$.

Натуральное уравнение определяется следующим образом: $k = \dot{\alpha}(s)$.

Ищем угол наклона $\alpha(s) = \int kds = \int \frac{ds}{\sqrt{a^2 - s^2}} = \arg\sin\frac{s}{a}$.

Отсюда $\frac{s}{a} = \sin\alpha$; $s = a\sin\alpha$, $ds = a\cos\alpha d\alpha$.

Примем α за параметр вдоль искомой кривой.

Так как по формулам (42)

$dx = \cos\alpha ds =$/ подставляем выражение для ds / $= a\cos^2\alpha d\alpha$.

Аналогично находим $dy = \sin\alpha ds = a\cos\alpha\sin\alpha d\alpha$.

Таким образом,

$$x(\alpha) = \int a\cos^2\alpha d\alpha = \frac{a}{2}\int(1+\cos 2\alpha)d\alpha = \frac{a}{2}\alpha + \frac{a}{4}\int cos2\alpha d(2\alpha) = \alpha\frac{a}{2} + \frac{a\sin 2\alpha}{4} + C,$$

$y(\alpha) = \int a\cos\alpha\sin\alpha d\alpha = a\int \sin\alpha d\sin\alpha = a\sin^2\alpha + C$.

Так нам важно найти хотя бы одну кривую, то постоянную C возьмем равную нулю.

Таким образом, искомая кривая $x(\alpha) = \alpha\frac{a}{2} + \frac{a\sin 2\alpha}{4}$, $y(\alpha) = a\sin^2\alpha$.

2) Дана кривая $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Необходимо репараметризировать кривую, т.е. перейти к параметру дуге и получить уравнение $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1(s)$.

а) Дана циклическая линия

$\mathbf{r} = \{a\cos t, a\sin t, bt\}$; $b > 0$.

Найдем длину дуги, для этого вычислим $\mathbf{r}'$:

$\mathbf{r}' = \{-a\sin t, a\cos t, b\}$;

$s = \int\limits_0^t \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \int\limits_0^t \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}dt = \sqrt{(a^2+b^2)}t$. Из данного уравнения $s = s(t)$ находим обратную зависимость $t = t(s) : t = \frac{s}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$.

Новое параметрическое уравнение кривой, где параметр дуга имеет вид:

$$r = \left\{ a\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), a\sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}} \right\}$$

Элементы теории кривизны для пространственных кривых

Касательные и нормали

Будем рассматривать кривые

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \tag{1}$$

лишь в их заведомо обыкновенных точках, т. е. при условии, что

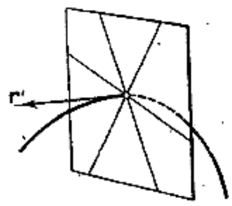
$$\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k} \neq 0\,. \tag{2}$$

Учтем, что производная $\mathbf{r}'(t)$ вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ направлена по касательной в соответствующей точке кривой $M(t)$. Воспользуемся этим результатом, прежде всего, для записи уравнения касательной. Касательную в данной точке кривой $M(t)$ мы можем рассматривать как прямую, проходящую через эту точку $M(x(t), y(t), z(t))$ по направлению вектора $\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}$

Тогда уравнение касательной имеет вид

$$\frac{X - x(t)}{x'(t)} = \frac{Y - y(t)}{y'(t)} = \frac{Z - z(t)}{z'(t)} \tag{3}$$

где X, Y, Z − текущие координаты.



Нормалью к пространственной кривой называется перпендикуляр, восставленный к касательной в точке касания. Конечно, в данной точке кривой будет бесчисленное множество нормалей. Все они перпендикулярны к касательной в этой точке и заполняют, следовательно, целую плоскость, перпендикулярную к касательной.

Плоскость, проходящая через точку касания перпендикулярно к касательной, называется *нормальной плоскостью*.

Нетрудно составить уравнение нормальной плоскости как плоскости, проходящей через точку кривой $M(x(t), y(t), z(t))$ перпендикулярно к касательному вектору $\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}$.

$$x'(t)(X - x(t)) + y'(t)(Y - y(t)) + z'(t)(Z - z(t)) = 0 \tag{4}$$

Мы получили уравнение нормальной плоскости, где X, Y, Z − текущие координаты.

Рассмотрим поверхность, заданную неявно с помощью уравнения между текущими координатами, т. е. это геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$F(x,\ y,\ z) = 0 \tag{5}$$

Проведем на этой поверхности кривую, задающуюся уравнением (1). Тогда при любом значении t точка $M(x(t), y(t), z(t))$ кривой лежит на поверхности, так что выполняется

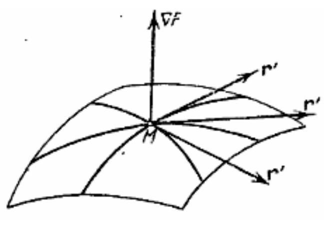
$$F(x(t), y(t), z(t)) = 0 \tag{5'}$$

Продифференцируем это тождество по t. Получим

$$F'_x x'_t + F'_y y'_t + F'_z z'_t = 0 \tag{5''}$$

где $x'_t,\ y'_t,\ z'_t$ − координаты касательного вектора $\mathbf{r}'(t)$, которые зависят от выбора кривой на поверхности. $F'_x,\ F'_y,\ F'_z$ зависят только от выбора точки $x,\ y,\ z$ на поверхности и являются координатами вектора

$$\nabla F = \mathrm{grad} F(x,\ y,\ z) = \left\{F'_x,\ F'_y,\ F'_z\right\} \tag{6}$$



Вектор ∇F (читается «набла F») существует, если функция $F(x,\ y,\ z)$ дифференцируема и называется *градиентом* функции F (или *градиентом* скалярного поля $F(x,\ y,\ z)$).

Мы ограничимся рассмотрением на поверхности только тех точек, где вектор $\nabla F \neq 0$.

Заметим, что $(5'')$ представляет собой скалярное произведение векторов ∇F и $\mathbf{r}'(t)$, т.е.

$$\nabla F(x,\ y,\ z)\ \mathbf{r}'(t) = 0 \qquad (7)$$

Равенство (7) показывает, что вектор ∇F всегда направлен перпендикулярно вектору касательной.

! Касательные в данной точке поверхности M (в которой $\nabla F \neq 0$) к всевозможным кривым, проходящим по поверхности, располагаются в одной плоскости, перпендикулярной к ∇F. Эта плоскость называется *касательной плоскостью* к поверхности в точке M.

Составим уравнение касательной плоскости как плоскости, проходящей через данную точку $M(x_0,\ y_0,\ z_0)$ перпендикулярно к вектору ∇F. Уравнение будет иметь вид

$$F'_x(X - x_0) + F'_y(Y - y_0) + F'(Z - z_0)_z = 0 \qquad (8)$$

где X, Y, Z − текущие координаты.

Нормалью к поверхности называется перпендикуляр к касательной плоскости в точке касания. Составим уравнение нормали как уравнение прямой, проходящей через данную точку $M(x_0,\ y_0,\ z_0)$ в направлении вектора ∇F. Уравнение будет иметь вид

$$\frac{X - x_0}{F'_x} = \frac{Y - y_0}{F'_y} = \frac{Z - z_0}{F'_z} \qquad (9)$$

Рассмотрим точки, в которых $F(x,\ y,\ z) \neq 0$. Допустим для определенности $F'_z \neq 0$. Тогда по теореме существования неявной функции уравнение поверхности однозначно разрешимо вблизи данной точки относительно z, т.е. $z = f(x,\ y)$.

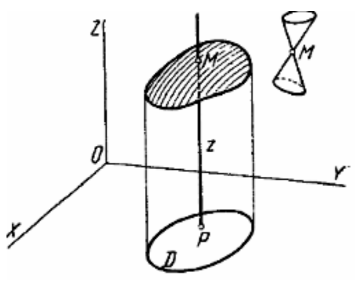
Если в какой-нибудь системе координат $x,\ y,\ z$ уравнение поверхности вблизи данной точки может быть написано в явном виде, разрешенном относительно одной координаты, то мы будем называть эту точку *обыкновенной точкой поверхности*.

Так же точки, в которых выполняется $\nabla F \neq 0$, называются заведомо обыкновенными точками.

Геометрически же уравнение $z = f(x,\ y)$ означает, как известно, что каждой точке $P(x,\ y,\ 0)$ в некоторой области D на плоскости XY отвечает одна и только одна точка поверхности $M(x,\ y,\ z)$, получаемая путем смещения точки параллельно оси Z на отрезок $f(x,\ y)$. Наглядно мы можем представлять себе соответствующий кусок поверхности как кусок плоскости D, деформированный путем плавного смещения его точек в направлении, перпендикулярном к плоскости.

Такой кусок поверхности мы будем называть простым куском поверхности.

Пример



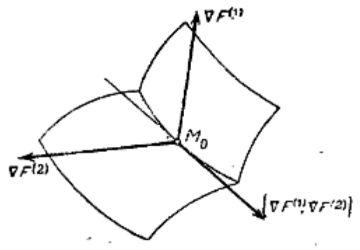
Для поверхности $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ $\nabla F = \{2x,\ 2y,\ 2z\}$. В точке $O(0,\ 0,\ 0)$ $\nabla F = 0$, т.е. точка O является особой точкой. Действительно, эта точка служит вершиной конуса, вблизи которой, как бы ни уменьшать окрестность, уравнение в этой точке нельзя представить в виде $z = f(x,\ y)$, а сам конус нельзя представить в виде простого куска поверхности.

! Обыкновенная точка поверхности характеризуется тем, что достаточно малая ее окрестность в пространстве (например шар) вырезает простой кусок поверхности.

Касательная и нормальная плоскость к кривой, полученной пересечением двух поверхностей.

Рассмотрим две какие-нибудь поверхности $F_1(x,\ y,\ z) = 0$ и $F_2(x,\ y,\ z) = 0$.

Геометрическое место точек, общих обеим поверхностям, называется *кривой их пересечения.*



Возьмем какую-нибудь точку $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ на кривой; ее координаты удовлетворяют по определению обоим уравнениям.

Построим в точке M_0 векторы ∇F_1 и ∇F_2. Мы предположим, что эти векторы не коллинеарны друг другу, так что касательные плоскости к обеим поверхностям в точке не совпадают между собой, т.е. $\nabla F_1 \nparallel \nabla F_2$. Или другими словами координаты данных векторов не пропорциональны между собой:

$$\frac{F'_{1x}}{F'_{2x}} \neq \frac{F'_{1y}}{F'_{2y}} \neq \frac{F'_{1z}}{F'_{2z}}$$

или

$$C_r = \begin{vmatrix} F'_{1x} & F'_{1y} \\ F'_{2x} & F'_{2y} \end{vmatrix},\ B_r = \begin{vmatrix} F'_{1x} & F'_{1z} \\ F'_{2x} & F'_{2z} \end{vmatrix},\ A_r = \begin{vmatrix} F'_{1z} & F'_{1y} \\ F'_{2z} & F'_{2y} \end{vmatrix} \quad \neq 0 \qquad (10)$$

Уравнение (10) показывает, что вблизи точки M_0 кривая представляет собой простой отрезок. Вектор касательной кривой $\mathbf{r}'$ будет перпендикулярен к обоим нормальным векторам ∇F_1 и ∇F_2, т.е будет направлен по вектору, представляющему собой векторное произведение

$$[\nabla F_1,\ \nabla F_2] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ F'_{1x} & F'_{1y} & F'_{1z} \\ F'_{2x} & F'_{2y} & F'_{2z} \end{vmatrix} = A_r\mathbf{i} + B_r\mathbf{j} + C_r\mathbf{k} \qquad (11)$$

$A_r,\ B_r,\ C_r$ определяются уравнением (10).

Составим уравнение этой касательной к кривой, задающейся пересечением двух плоскостей, как прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ параллельно вектору (11).

$$\frac{X - x_0}{A_r} = \frac{Y - y_0}{B_r} = \frac{Z - z_0}{C_r} \qquad (12)$$

Так же просто составляется и уравнение нормальной плоскости к кривой пересечения как плоскости, проходящей через данную точку $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ перпендикулярно к вектору (10).

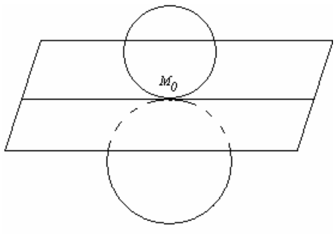
$$A_r(X - x_0) + B_r(Y - y_0) + C_r(Z - z_0) = 0 \qquad (13)$$

или

$$\begin{vmatrix} X - x_0 & Y - y_0 & Z - z_0 \\ F'_{1x} & F'_{1y} & F'_{1z} \\ F'_{2x} & F'_{2y} & F'_{2z} \end{vmatrix} = 0 \qquad (13')$$

Пример

Покажем, что невыполнение (10) приводит к особому характеру точки.



Представим две сферы, касающиеся друг друга в некоторой точке M_0. В этой точке касательные плоскости к обеим сферам совпадают, так что условие (10) не соблюдено, и действительно, линия пересечения состоит из одной, только точки M_0, которая является на ней, изолированной особой точкой.

Далее, возьмем пересечение гиперболического параболоида $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$ с плоскостью $z=0$. Если взять в качестве точки M_0 начало координат, лежащее на обеих поверхностях, то касательные плоскости к обеим поверхностям совпадут (для плоскости $z=0$ касательной плоскостью служит она сама). И действительно, линия пересечения обеих поверхностей, т. е. пара прямых на плоскости, имеет в начале координат особую точку (самопересечение).

Точки распрямления

Пусть кривая задана в параметрическом виде (1) и выполняется условие (2). Рассматриваем обыкновенные точки.

Точки, где $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{r}''$ коллинеарны, т.е.

$$\mathbf{r}' \parallel \mathbf{r}'' \tag{14}$$

называются точками *распрямления пространственной кривой*.

В данной точке (14) касание кривой с ее касательной будет по крайней мере 2-го порядка. Заметим, что если условие (14) выполняется вдоль всей кривой, которая, таким образом, вся состоит из точек распрямления, то кривая вырождается в прямую линию.

Докажем это утверждение.

Из параллельности векторов $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{r}''$ следует пропорциональность их координат:

$$\frac{x'}{x''} = \frac{y'}{y''} = \frac{z'}{z''}$$

Умножая это равенство на dt и учитывая, что $x''(t)dt = dx'(t)$, получим:

$$\frac{dx'(t)}{x'} = \frac{dy'(t)}{y'} = \frac{dz'(t)}{z'}$$

Затем проинтегрируем почленно

$$\ln x'(t) + C_1 = \ln y'(t) + C_2 = \ln z'(t) + C_3$$

где $C_1 = \ln a, C_2 = \ln b, C_3 = \ln c$.

$$\ln(x'(t)a) = \ln(y'(t)b) = \ln(z'(t)c)$$

Т.к. функция $\ln t$ монотонна возрастающая, то

$$x'(t)a = y'(t)b = z'(t)c$$

Проинтегрируем это равенство

$$ax(t) + C_1 = by(t) + C_2 = cz(t) + C_3$$

Мы получили уравнение прямой в пространстве.

!Условие (14) является инвариантом относительно выбора параметризации.

В частности, если за параметр принята дуга s, то $\dot{\mathbf{r}}$ − единичный вектор, и его производная ему ортогональна ($\dot{\mathbf{r}} \perp \ddot{\mathbf{r}}$). Тогда условие точек распрямления принимает вид

$$\ddot{\mathbf{r}} = 0 \qquad (14')$$

В этих точках не только общий вектор $\dot{\mathbf{r}}$, но и $\ddot{\mathbf{r}}$.

$$\mathbf{r}_1' = \mathbf{r}_2'$$

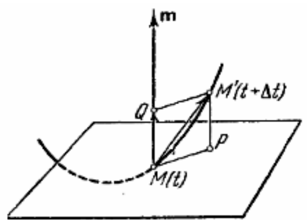
$$\vdots$$

$$\mathbf{r}_1^{(n)} = \mathbf{r}_2^{(n)}$$

Если $\dddot{\mathbf{r}} \neq 0$, то имеем точное касание 2-го порядка.

Соприкасающаяся плоскость

Для любой точки $M(t)$ на кривой, заданной параметрическим уравнением (1), можно подобрать проходящую через нее плоскость, наилучшим образом приближающуюся к кривой вблизи точки $M(t)$.



Сначала проведем через $M(t)$ произвольную плоскость; зададим ее единичным вектором **m**, ей ортогональным.

Разберем возможные здесь случаи.

1°. $\mathbf{m}\mathbf{r}'(t) \neq 0$

Векторы перпендикулярны. Мы имеем случай касания 0-го порядка, т.е. случай пересечения кривой с плоскостью.

2°. $\mathbf{m}\mathbf{r}'(t) = 0$.

Мы имеем случай касания 1-го порядка, т.е. касательная к кривой перпендикулярна к вектору $\mathbf{m}$ ($\mathbf{m} \perp \mathbf{r}'(t)$), а, следовательно, лежит в нашей плоскости ($\mathbf{r}'(t) \in \pi_i$).

Таким образом, касание 1-го порядка с данной кривой в данной точке $M(t)$ имеют те и только те плоскости, которые проходят через касательную в точке $M(t)$.

Если $\mathbf{m}\mathbf{r}''(t) = 0$, то мы выбрали плоскость наилучшим образом приближающуюся к нашей кривой. Эта плоскость называется *соприкасающейся плоскостью* и ее условия задания

$$\begin{cases} \mathbf{m}\mathbf{r}'(t) = 0, \\ \mathbf{m}\mathbf{r}''(t) = 0. \end{cases}$$

касание 2-го порядка.

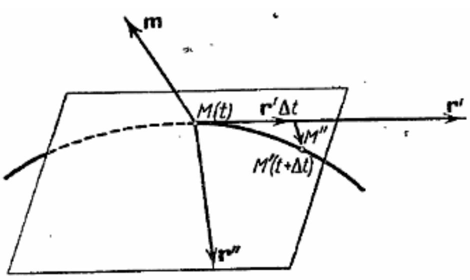
Если $\mathbf{m}\mathbf{r}'''(t) \neq 0$, то мы имеем касание точно 2-го порядка.

Т.к. $\mathbf{m} \perp \mathbf{r}'$ и $\mathbf{m} \perp \mathbf{r}''$, векторы $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{r}''$ неколинеарны, т.е. через них можно построить плоскость. Причем вектор нормали всегда перпендикулярен этой плоскости.

! Соприкасающаяся плоскость не зависит от выбора параметризации.

Роль соприкасающейся плоскости:

Среди всех плоскостей, проходящих через точку $M(t)$ соприкасающаяся плоскость единственно и наилучшим образом приближается к кривой.

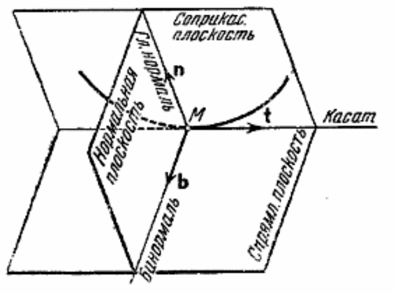


Смещение MM' будет бесконечно малым 3-го порядка относительно Δt.

$$\Delta\mathbf{r}(t) \approx c(\Delta t)^3$$

Если пренебречь бесконечно малыми 3-го порядка, то всякую пространственную кривую в бесконечно малой области около точки $M(t)$ можно считать плоской кривой, лежащей в соприкасающейся плоскости.

Сопровождающий трехгранник



Нормаль, проведенную в данной точке и лежащую в соприкасающейся плоскости, мы будем называть *главной нормалью*, а нормаль, перпендикулярную к соприкасающейся плоскости, − *бинормалью*.

Плоскость, проходящая через бинормаль и касательную, называется *спрямляющей плоскостью*.

Выбирая любую точку $M(t)$, мы определяем прямоугольную систему координат, начало которой совпадает с самой точкой $M(t)$, а оси − с касательной, главной нормалью и бинормалью в точке $M(t)$.

Роль координатных плоскостей будут играть:

соприкасающаяся плоскость (проходит через касательную **t** и главную нормаль **n**);

нормальная плоскость (проходит через главную нормаль **n** и бинормаль **b**);

спрямляющая плоскость (проходит через бинормаль **b** и касательную **t**).

Совокупность трех построенных нами прямоугольных координатных осей и трех координатных плоскостей называется сопровождающим трехгранником кривой в точке $M(t)$.

!Сопровождающий трехгранник строится в любой точке кривой (где $\mathbf{r}' \nparallel \mathbf{r}''$) и меняется от точки к точке.

Составим уравнение соприкасающейся плоскости. Так как векторы $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{r}''$ лежат в соприкасающейся плоскости, то нормальным вектором соприкасающейся плоскости является вектор, составленный как их векторное произведение

$$[\mathbf{r}',\ \mathbf{r}''] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = (y'z'' - z'y'')\mathbf{i} + (z'x'' - x'z'')\mathbf{j} + (x'y'' - y'x'')\mathbf{k} \qquad (15)$$

Рассматривая соприкасающуюся плоскость как плоскость, проходящую через данную точку $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ на кривой перпендикулярно к вектору (15), мы можем записать ее уравнение в виде

$$A_c(X - x_0) + B_c(Y - y_0) + C_c(Z - z_0) = 0,$$

где $A_c = (y'z'' - z'y''),\ B_c = (z'x'' - x'z''),\ C_c = (x'y'' - y'x'')$ (16)

или

$$\left(\mathbf{R} - \mathbf{r}_0, [\mathbf{r}', \mathbf{r}'']\right) = (\mathbf{R} - \mathbf{r}_0, \mathbf{r}', \mathbf{r}'') = 0 \qquad (16')$$

Можно записать (16) в виде определителя 3-го порядка:

$$\begin{vmatrix} X - x_0 & Y - y_0 & Z - z_0 \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0 \, (16'')$$

! В этих формулах $x,\ x',\ x''$ и т. д. взяты при аргументе *t*,фиксированном на определенном значении, соответственно выбранной точке на кривой.

Составим уравнение бинормали. Так как вектор, перпендикулярный к соприкасающейся плоскости и, следовательно, направленный по бинормали, − это вектор $[\mathbf{r}',\ \mathbf{r}'']$. В таком случае уравнение бинормали построим как уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ на кривой и параллельной вектору $[\mathbf{r}',\ \mathbf{r}'']$ в этой точке. Уравнение имеет следующий вид:

$$\frac{X-x_0}{A_c}=\frac{Y-y_0}{B_c}=\frac{Z-z_0}{C_c} \quad (17)$$

Составим уравнение главной нормали. Направляющим вектором главной нормали является вектор, составленный как векторное произведение перпендикулярных к ней векторов $\mathbf{n}\perp\mathbf{r}'$ и $\mathbf{n}\perp\mathbf{b}$. Т.к $\mathbf{b}=\left[\mathbf{r}',\ \mathbf{r}''\right]$ получаем, что направляющий вектор главной нормали $\mathbf{n}=\left[\mathbf{r}',\ \left[\mathbf{r}',\ \mathbf{r}''\right]\right]$. Используя свойство двойного векторного произведения, получим:

$$\left[\mathbf{r}',\left[\mathbf{r}',\mathbf{r}''\right]\right]=\mathbf{r}'(\mathbf{r}'\mathbf{r}'')-\mathbf{r}''(\mathbf{r}'\mathbf{r}')$$

Запишем уравнение главной нормали как прямой, проходящей через точку $M_0(x_0,\ y_0,\ \mathrm{z}_0)$ кривой параллельно этому вектору.

$$\frac{X-x_0}{x'(\mathbf{r}'\mathbf{r}'')-x''(\mathbf{r}'\mathbf{r}')}=\frac{Y-y_0}{y'(\mathbf{r}'\mathbf{r}'')-y''(\mathbf{r}'\mathbf{r}')}=\frac{Z-z_0}{z'(\mathbf{r}'\mathbf{r}'')-z''(\mathbf{r}'\mathbf{r}')}\,. \quad (18)$$

Элементы теории поверхностей

Кривые на поверхности

Рассмотрим на поверхности геометрическое место точек кривой, координаты которой удовлетворяют уравнениям

$u = u(t),\ v = v(t),$ (4)

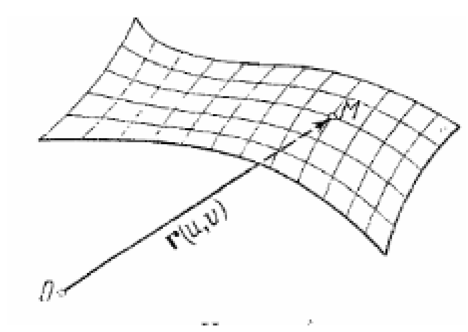
где t - независимая переменная. Радиус-вектор любой такой точки можно записать в виде

$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v) = \mathbf{r}(u(t),v(t))$.

Таким образом, $\mathbf{r}$ выражается в конечном итоге как функция одного аргумента t и, когда t пробегает область своего изменения $\mathbf{r}$ описывает своим концом некоторую кривую в пространстве. Уравнения (4) определяют, таким образом, некоторую кривую.

В частности, в уравнениях (4) параметром t может служить одна из криволинейных координат, например $t = u$, тогда пара уравнений (4) сводится к одному $v = v(u)$.

С данной системой криволинейных координат на поверхности наиболее непосредственно связаны так называемые *координатные линии*, т.е. кривые, вдоль которых одна из координат остается постоянной.



Будем называть линией *u* кривую, вдоль которой меняется только *u,* а *v=const.*

Линия *v* – кривая, вдоль которой изменяется только *v*, *u=const.*

Семейство кривых на поверхности, заданное уравнениями *u=const, v=const* называется *сетью кривых на поверхности.*

Через любую точку поверхности проходит ровно две линии сети.

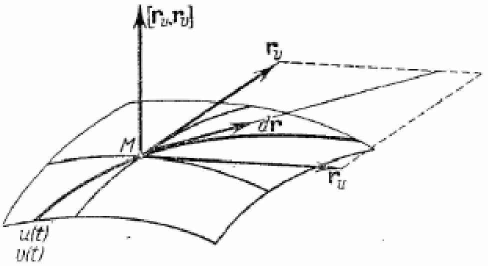
Пусть задана кривая (4)*,* пользуясь ее параметрическим представлением в пространстве $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u(t),v(t))$, найдем дифференциал радиус-вектора

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv,\ \text{где}\ du = u'\,dt,\ du = v_t' dt, \qquad (5)$$

где $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$ - частные производные радиус-вектора по переменным *u* и *v*.

В дальнейшем будем считать, что *du, dv* не обращаются в нуль одновременно, т.к. мы рассматриваем на кривой заведомо обыкновенные точки, где $d\mathbf{r} = \mathbf{r}_t' dt$.

Вектор $d\mathbf{r}$ направлен по касательной к кривой. Из (5) видно, что в каждой точке кривой $d\mathbf{r}$ разлагается по векторам $\mathbf{r}_u(u,v)$, $\mathbf{r}_v(u,v)$, и, следовательно, компланарен с ними. Но эти векторы – частные производные от $\mathbf{r}(u,v)$ – зависят только от выбора значений *u* и *v,* т.е. от выбора точки на поверхности. Таким образом, в какую бы точку поверхности мы бы не пришли, двигаясь по нашей кривой, касательная к кривой будет лежать в одной плоскости с векторами $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$ в этой точке (см. рис.)



Отсюда следует, что *если через данную точку поверхности $M(u,v)$ проводить по поверхности всевозможные кривые, то касательные к ним расположатся все в одной плоскости, а именно в плоскости векторов* $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$. Мы знаем, что плоскость все касательные к поверхности в данной точке называется *касатель-*

ной плоскостью. Таким образом, касательная плоскость в точке на поверхности определяется векторами $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$ в данной точке. Что же касается самих векторов $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$ то они направлены по касательным к координатным линиям в данной точке. Это следует из следующих соображений: вдоль координатных линий, например линии u, $v = v_0$ и равенство (5) имеет вид $d\mathbf{r} = \mathbf{r}_u du$, т.к. $dv = 0$. Касательная к линии u направлена по $d\mathbf{r}$, следовательно, в направлении $\mathbf{r}_u$. Аналогично и с линиями v.

Уравнение (5) может быть переписано в виде:

$$d\mathbf{r} = du\left(\mathbf{r}_u + \mathbf{r}_v \frac{dv}{du}\right),$$

множитель du не играет роли для направления касательной, векторы $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$ зависят только от выбора точки М на поверхности, следовательно, направление касательной определяется множителем $\dfrac{dv}{du} = \dfrac{v'dt}{u'dt} = \dfrac{v'(t)}{u'(t)}$.

Верно и обратное: направление касательной определяет этот вектор с точностью до численного множества, следовательно, $\dfrac{dv}{du}$ определяется этим направлением *однозначно*.

Запишем теперь уравнение касательной плоскости в данной точке $M(u,v)$ на поверхности. Т.к. эта плоскость проходит через векторы $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$ в данной точке, то плоскость перпендикулярна к их векторному произведению

$$[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} \neq 0 \text{ в силу (3).}$$

Это векторное произведение, отличное от нуля укажет нам направление нормали к поверхности в данной точке. Касательную плоскость в точке M можно рассматривать как плоскость, проходящую через М и перпендикулярную вектору $[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]$. Обозначая через X, Y, Z текущие координаты плоскости нетрудно записать ее уравнение в виде

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

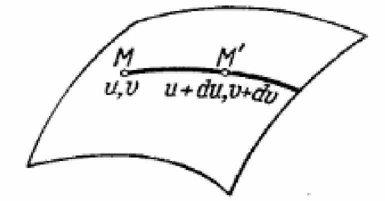
Направление вектора $[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]$ соответствует направлению нормали к поверхности в данной точке. Таким образом уравнение нормали, как прямой проходящей через данную точку по направлению $[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]$

$$\frac{X-x}{\begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix}} = \frac{Y-y}{\begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix}} = \frac{Z-z}{\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}}. \tag{7}$$

Первая основная квадратичная форма

Рассмотрим поверхность вблизи точки $M(u,v)$, учитывая лишь бесконечно малые 1-го порядка.

Сместимся из точки $M(u,v)$ по какой-нибудь кривой $u = u(t)$, $v = v(t)$ на поверхности в бесконечно близкую точку $M'(u+du, v+dv)$. Дифференциалы криволинейных координат на поверхности будут равны



$$du = u'(t)dt\ ,\ dv = v'(t)dt\ .$$

Отношение этих дифференциалов $\frac{dv}{du}$ характеризует направление касательной к пути смещения.

Вычислим дифференциал радиус-вектора $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u(t), v(t))$ вдоль нашей кривой, отвечающий смешению из M в M'.

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv\ .$$

Дифференциал дуги ds кривой, соответствующий смещению MM', равен

$|ds| = |d\mathbf{r}| = |\mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv|$ или

$$ds^2 = \left(\mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv\right)^2$$

Раскарывая скалярное произведение в правой части, получим:

$$ds^2 = \mathbf{r}_u{}^2 du^2 + 2\mathbf{r}_u\mathbf{r}_v dudv + \mathbf{r}_v{}^2 dv^2\ ,$$

Векторы $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$, а следовательно, и их скалярные произведения - функции от u и v и зависят, следовательно, лишь от выбора точки $M(u,v)$.

Введем для этих скалярных произведений сокращенные обозначения:

$$\mathbf{r}_u{}^2 = \mathbf{r}_u\mathbf{r}_u = E(u,v)\ ,$$

$$\mathbf{r}_v{}^2 = \mathbf{r}_v\mathbf{r}_v = G(u,v)$$

$$\mathbf{r}_u\mathbf{r}_v = F(u,v) \qquad (8)$$

Тогда предыдущая формула может быть записана в виде

$$ds^2 = E(u,v)du^2 + 2F(u,v)dudv + G(u,v)dv^2 \qquad (9)$$

Выражение в правой части называется *первой квадратичной формой* на поверхности и играет в теории поверхностей огромную роль. Формула (9) является квадратичной формой относительно du, dv. Коэффициенты E, G, F не завися от du, dv, а зависят лишь от выбора точки на поверхности.

Значение первой квадратичной формы заключается в том, что она выражает квадрат дифференциала дуги ds^2 при бесконечно малом смещении по поверхности и служит для измерения длин вдоль поверхности (с ошибкой относительно бесконечно малой 2-го порядка). Однако с помощью интегрирования нетрудно перейти и к точному вычислению длин на поверхности.

Пусть нам задан отрезок какой-нибудь кривой на поверхности

$$u = u(t),\ v = v(t)\ ,\ T_0 \le t \le T\ .$$

Вдоль этой кривой дифференциал дуги будет выражаться по формуле (9) таким образом

$$ds = \sqrt{E(u,v)du^2 + 2F(u,v)dudv + G(u,v)dv^2}$$

Интегрируя дифференциал ds в пределах от T_0 до T, получим точную длину соответствующего отрезка кривой от точки M_{T_0} до точки M_T

$$\overset{\frown}{M_{T_0}M_T} = \int_{T_0}^{T} \sqrt{E(u,v)\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F(u,v)\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G(u,v)\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\, dt\,. \qquad (10)$$

Углы между кривыми на поверхности

Зная первую квадратичную форму на поверхности, можно измерять не только длины, но и углы между кривыми. Действительно, пусть из точки М выходят две кривые, обозначим через du и dv дифференциалы криволинейных координат, отвечающие бесконечно малому смещению по одной кривой, а через δu и δv - для другой кривой. Соответствующие дифференциалы радиус вектора будем обозначать через $d\mathbf{r}$ и $\delta\mathbf{r}$:

$d\mathbf{r} = \mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv$, $\delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_u \delta u + \mathbf{r}_v \delta v$.

Эти дифференциалы направлены по касательным к соответствующим кривым. Таким образом, угол между кривыми равен углу между касательными и может быть вычислен как угол между $d\mathbf{r}$ и $\delta\mathbf{r}$.

Как известно, косинус угла между векторами равен их скалярному произведению, деленному на произведение их длин:

$\cos(dr, \delta r) = \dfrac{(dr, \delta r)}{|dr||\delta r|}$, где

$|dr| = \sqrt{E(u,v)du^2 + 2F(u,v)dudv + G(u,v)dv^2}$, $|\delta r| = \sqrt{E(u,v)\delta u^2 + 2F(u,v)\delta u\delta v + G(u,v)\delta v^2}$,

$$\cos\angle(dr, \delta r) = \frac{Edu\delta u + F(du\delta v + \delta u dv) + Gdv\delta v}{\sqrt{E(u,v)du^2 + 2F(u,v)dudv + G(u,v)dv^2}\sqrt{E(u,v)\delta u^2 + 2F(u,v)\delta u\delta v + G(u,v)\delta v^2}} \qquad (11)$$

Числитель (11) называется по отношению к du, dv, δu, δv *билинейной формой, полярной* по отношению к квадратичной форме (9).

В частности, если мы ищем угол между координатными линиями в какой-нибудь точке $M(u,v)$, то можно считать

$du \neq 0, dv = 0$ - смещение по линии u

$\delta u = 0, \delta v \neq 0$ - смещение по линии v

Формула (11) примет вид

$$\cos\varphi = \frac{Fdu\delta v}{\sqrt{Edu^2}\sqrt{G\delta v^2}} = \pm\frac{F}{\sqrt{EG}}, \qquad (11')$$

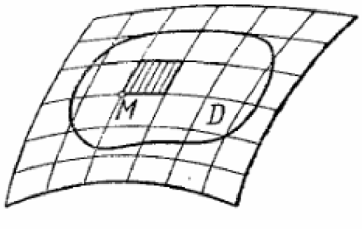
где $\pm$ обозначает, что можно взять любые из смежных углов.

Если F=0 $\Rightarrow$ $\cos\varphi = 0$ $\Rightarrow$ угол между координатными линиями – прямой.

Площади на поверхности

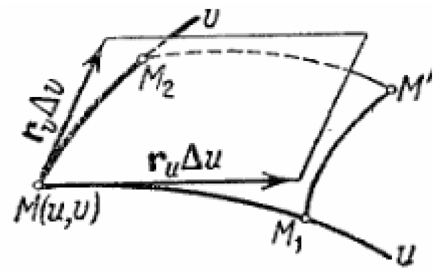
Наконец, первая основная квадратичная форма позволяет вычислять на поверхности также и площади.

Возьмем на поверхности какую-либо область *D*. Для определенности, будем считать, что она ограничена кусочно-гладкой кривой. Разобьем область *D*, проведя некоторое конечное количество координатных линий одного и другого семейств. Область *D* разобьется на так называемые криволинейные параллелограммы, каждый из которых ограничен с двух сторон отрезками линий *u* и отрезками линий *v*. На



обрезанные параллелограммы около границы D не обращаем внимания, т.к. при последовательном переходе к пределу в процессе бесконечного измельчения их роль сводится к нулю.

Рассмотрим один из параллелограммов. Пусть $M(u,v)$ будет вершина с наименьшими значениями u ,v. Обозначим другие его вершины через $M'(u+du,v+dv)$, $M_1(u+du,v)$, $M_2(u,v+dv)$; MM_1 и M_2M' - отрезки линий u, а MM_2, $M'M_1$ - отрезки линий v. При переходе из M в M' радиус-вектор $\mathbf{r}$(u,v) получит приращение



$$\mathbf{r}(u+\Delta u,v)-\mathbf{r}(u,v)=\overline{MM_1}\approx\mathbf{r}_\mathbf{u}\Delta u$$
$$\mathbf{r}(u,v+\Delta v)-\mathbf{r}(u,v)=\overline{MM_2}\approx\mathbf{r}_v\Delta v$$

Заменив криволинейный параллелограмм прямолинейным, построенном на векторах $\mathbf{r}_\mathbf{u}\Delta u$, $\mathbf{r}_v\Delta v$, и лежащим, следовательно, в касательной плоскости в точке $M(u,v)$. Этот параллелограмм тем точнее заменяет криволинейный, чем меньше размеры Δu , Δv .

Площадь прямолинейного параллелограмма, построенного на данных векторах равна модулю их векторного произведения

$$\Delta\sigma=\left\|\left[\mathbf{r}_u\Delta u,\mathbf{r}_v\Delta v\right]\right\|=\left\|\left[\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v\right]\right\|\Delta u\Delta v.$$

Эта площадь может быть выражена через коэффициенты первой квадратичной формы.

Вспомним некоторые свойства скалярного и векторного произведения.

$$\left\|[a,b]\right\|=|a||b|\sin(a,b),\quad ab=|a||b|\cos(a,b),\ \left\|[a,b]\right\|^2+(a,b)^2=|a|^2|b|^2.$$

Применим эту формулу к $\mathbf{r}_\mathbf{u}$, $\mathbf{r}_v$:

$$\left\|\left[\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v\right]\right\|^2+(\mathbf{r}_u\mathbf{r}_v)^2=\mathbf{r}_u^2\mathbf{r}_v^2$$

$$\left\|\left[\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v\right]\right\|^2=EG-F^2,\ \left\|\left[\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v\right]\right\|=\sqrt{EG-F^2}$$

Значение площади примет вид , где значения коэффициентов E, G, F взяты в точке M

$$\Delta\sigma=\sqrt{EG-F^2}\Delta u\Delta v$$

Составим теперь сумму всех площадей, где суммирование проводится по всем параллелограммам данного разбиении, попавшим внутрь области D:

$$\sum\Delta\sigma=\sum\sqrt{EG-F^2}\Delta u\Delta v$$

Будем теперь бесконечно измельчать разбиение, т.е.бесконечно увеличивать число координатных линий из того и другого семейства с таким расчетом, чтобы наибольшее значение Δu и Δv стремится к нулю.

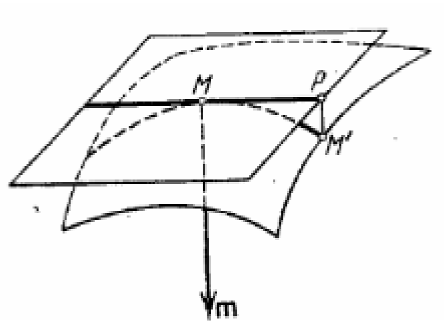
Предел, к которому стремится при этом сумма $\sum\Delta\sigma$ площадей называется *площадью области D* на поверхности.

$$S=\lim_{\substack{\max\Delta u\to 0\\ \max\Delta v\to 0}}\sum\sqrt{EG-F^2}\Delta u\Delta v=\iint\sqrt{EG-F^2}\,dudv \qquad (12)$$

Таким образом, если в некоторой системе криволинейных координат нам задана первая квадратичная форма (9), то ничего больше не зная о поверхности (форме в пространстве, уравнения) мы можем вычислять длины кривых на поверхности, углы, площади. Те геометрические свойства поверхности, которые можно устанавливать с помощью задания только первой квадратичной формы образуют *внутреннюю геометрию поверхности*.

Вторая квадратичная форма

Пусть MM' одна из кривых на поверхности, проходящих через точку *M*. Предположим, для простоты, что вдоль этой кривой за параметр принята длина дуги s, так что текущие координаты *u, v* выражаются как функции s:



$u = u(s), \ \ v = v(s)$

и, следовательно,

$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u(s), v(s))$

Пусть длина дуги MM' равна Δs. Соответствующее приращение $\Delta\mathbf{r}$ радиус-вектора $\mathbf{r}$ равно $\overline{MM'}$.Данное приращение можно вычислить с помощью разложения в ряд Тейлора:

$$\overline{MM'} = \Delta\mathbf{r} = \dot{\mathbf{r}}\,\Delta s + \frac{1}{2}\ddot{\mathbf{r}}(\Delta s)^2 + \dots, \qquad (13)$$

где $\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}$, взяты в точке *M*. Пусть теперь Δs стремиться к нулю, т. е. смещение по дуге MM' берется бесконечно малым. Если вести исследование с точностью до бесконечно малых 1-го порядка, то в правой части достаточно принять во внимание слагаемое $\dot{\mathbf{r}}\Delta s$, совпадающее с дифференциалом $d\mathbf{r}$. Тогда приращение $\Delta\mathbf{r}$ направлено по касательной $d\mathbf{r}$ и лежит в касательной плоскости , построенной в точке *M*.

Рассмотрим смещение по кривой с учетом бесконечно малых не только 1-го, но и 2-го порядка. Тогда $\Delta\mathbf{r}$ уже не будет располагаться в касательной плоскости. Оценим отклонение от касательной плоскости при смещении из точки касания *M* в бесконечно малую точку M' по кривой на поверхности.

Пусть P - основание перпендикуляра, опущенного из M' на касательную плоскость. Построим в точке М единичный вектор **m**, направленный по нормали к поверхности в точке *M*. Очевидно, что тогда вектор $\overline{PM'}$ параллелен вектору **m,** так что можно записать

$\overline{PM'} = l\mathbf{m}$,

где l - численный коэффициент и $l > 0$ если отклонение $\overline{PM'}$ от касательной плоскости направлено в сторону **m**, и $l < 0$, если оно направлено в обратную сторону. Кроме того, т.к. **m** – единичный, то $|l| = \left|\overline{PM'}\right|$.

Вычислим коэффициент l. Так как

$\overline{MM'} = \overline{MP} + \overline{PM'} = \overline{MP} + l\mathbf{m}$.

По формуле (13) разложения смещения $\overline{MM'}$ в ряд Тейлора получаем:

$$\overline{MP} + l\mathbf{m} = \dot{\mathbf{r}}\,\Delta s + \frac{1}{2}\ddot{\mathbf{r}}(\Delta s)^2 + \dots$$

Умножим скалярно обе части равенства на **m**, и учитывая, что вектор m перпендикулярен касательной плоскости, т.е. $\overline{MP} \perp \mathbf{m}$, $\dot{\mathbf{r}} \perp \mathbf{m}$, то первые слагаемые в обеих частях равенства обнуляются. Кроме того, вектор **m** - единичный и $\mathbf{m}^2 = 1$. В итоге получим

$$l = \frac{1}{2}\ddot{\mathbf{r}}\,\mathbf{m}(\Delta s)^2 + \dots . \qquad (13')$$

Таким образом, отклонение l от касательной плоскости является бесконечно малой величиной 2-го порядка.

Найдем $\ddot{\mathbf{r}}\,\mathbf{m}$.

$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}_u \dot{u} + \mathbf{r}_v \dot{v}$,

$\ddot{\mathbf{r}} = \left(\mathbf{r}_u\right)_u' \dot{u} + \mathbf{r}_u \ddot{u} + \left(\mathbf{r}_v\right)_v' \dot{v} + \mathbf{r}_v \ddot{v} = \mathbf{r}_{uu} \dot{u}^2 + \mathbf{r}_{uv} \dot{u}\dot{v} + \mathbf{r}_u \ddot{u} + \mathbf{r}_{vu} \dot{u}\dot{v} + \mathbf{r}_{vv} \dot{v}^2 + \mathbf{r}_v \ddot{v}$, $\mathbf{r}_{uv} = \mathbf{r}_{vu}$

Умножая обе части последнего равенства скалярно на $\mathbf{m}$, и учитывая, что $\mathbf{r}_u$ и $\mathbf{r}_v$ лежат в касательной плоскости, т.е. перпендикулярны $\mathbf{m}$, получаем:

$$\ddot{\mathbf{r}}\,\mathbf{m} = \mathbf{r}_{uu}\mathbf{m}\dot{u}_s^2 + 2\mathbf{r}_{uv} m \dot{u}_s \dot{v}_s + \mathbf{r}_{vv} m \dot{v}_s^2 . \qquad (14)$$

С учетом (14) правая часть формулы (13) примет вид:

$$\frac{1}{2}\ddot{\mathbf{r}}\,\mathbf{m}(\Delta s)^2 = \frac{1}{2}\left(\mathbf{r}_{uu}\mathbf{m}\dot{u}_s^2(\Delta s)^2 + 2\mathbf{r}_{uv}\mathbf{m}\dot{u}_s\dot{v}_s(\Delta s)^2 + \mathbf{r}_{vv}\mathbf{m}\dot{v}_s^2(\Delta s)^2\right) \qquad (14')$$

Введем следующие обозначения

$$L(u,v) = \mathbf{r}_{uu}\mathbf{m},\ M(u,v) = \mathbf{r}_{uv}\mathbf{m},\ N(u,v) = \mathbf{r}_{vv}\mathbf{m}. \qquad (15)$$

Таким образом,

Значения коэффициентов *L*, *M*, *N* зависят от выбора точки $M(u,v)$ на поверхности.

Так вектор $\mathbf{m}$ перпендикулярен касательной плоскости, то он может быть направлен по вектору, являющемуся векторным произведением векторов $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$ - $\left[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v\right]$. С учетом того, что вектор $\mathbf{m}$ должен быть единичным окончательно получим выражение для определения вектора $\mathbf{m}$:

$$\mathbf{m} = \frac{\left[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v\right]}{\left|\left[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v\right]\right|} = \frac{\left[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v\right]}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Таким образом, получены выражения для определения коэффициентов *L*, *M*, *N*:

$$L = \frac{\left(\mathbf{r}_{uu,}\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v\right)}{\sqrt{EG-F^2}},\ M = \frac{\left(\mathbf{r}_{uv,}\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v\right)}{\sqrt{EG-F^2}},\ L = \frac{\left(\mathbf{r}_{vv,}\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v\right)}{\sqrt{EG-F^2}} \qquad (16)$$

С учетом введенных обозначений (15) и того, что $du = \dot{u}_s \Delta s$, $dv = \dot{v}_s \Delta s$, формулу (14′) перепишем в виде

$$\frac{1}{2}\ddot{\mathbf{r}}\,\mathbf{m}(\Delta s)^2 = \frac{1}{2}\left(Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2\right).$$

Тогда смещение l от касательной плоскости, определенное по формуле (13′), будет определяться как:

$$l = \frac{1}{2}\left(Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2\right) + \ldots \qquad (17)$$

Главная часть отклонения от касательной плоскости при смещении по поверхности из точки касания М в бесконечно близкую M' выражается половиной квадратичной формы

$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$ - *второй основной квадратичной формой на поверхности.*

Коэффициенты второй квадратичной формы можно выразить иначе. Из условия того, что вектор $\mathbf{m}$ перпендикулярен касательной плоскости, а значит, и векторам $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$, получаем, что скалярные произведения $\mathbf{m}\mathbf{r}_u = 0$, $\mathbf{m}\mathbf{r}_v = 0$. Профифференцируем каждое равенство по переменным *u* и *v* поочередно:

$$\mathbf{m}_u\mathbf{r}_u + \mathbf{m}\mathbf{r}_{uu} = 0,$$
$$\mathbf{m}_u\mathbf{r}_v + \mathbf{m}\mathbf{r}_{vu} = 0,$$
$$\mathbf{m}_v\mathbf{r}_u + \mathbf{m}\mathbf{r}_{uv} = 0,$$
$$\mathbf{m}_v\mathbf{r}_v + \mathbf{m}\mathbf{r}_{vv} = 0.$$

С учетом (15) получаем выражения для коэффициентов L, M, N:

$$L = -\mathbf{m}_u\mathbf{r}_u,\ \ M = -\mathbf{m}_u\mathbf{r}_v = -\mathbf{m}_v\mathbf{r}_u,\ \ N = -\mathbf{m}_v\mathbf{r}_v. \tag{17}$$

Выпишем дифференциалы для вектор-функций $\mathbf{r}(u,v)$, $\mathbf{m}(u,v)$:

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv,\ \ d\mathbf{m} = \mathbf{m}_u du + \mathbf{m}_v dv.$$

Перемножим скалярно данные векторы:

$$d\mathbf{r}d\mathbf{m} = \mathbf{m}_u\mathbf{r}_u du^2 + (\mathbf{m}_u\mathbf{r}_v + \mathbf{m}_v\mathbf{r}_u)dudv + \mathbf{m}_v\mathbf{r}_v dv^2 = -Ldu^2 - 2Mdudv - Ndv^2.$$

Таким образом получили краткую запись второй квадратичной формы:

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 = -d\mathbf{r}d\mathbf{m}.$$

ПРИМЕР

Рассмотрим очень важный случай, когда поверхность задана явным уравнением $z = f(x,y)$. В этом случае можно считать, что две из декартовых координат x и y играют роль криволинейных координат u, v на поверхности. Тогда радиус-вектор $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, описывающий данную поверхность, можно выразить как функцию от x и y: $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(x,y)\mathbf{k}$.

Выразим коэффициенты первой и второй квадратичной формы для данного задания поверхности. Для этого продифференцируем последнее равенство по x и y:

$$\mathbf{r}_x = \mathbf{i} + f'_x\mathbf{k},\ \mathbf{r}_y = \mathbf{j} + f'_y\mathbf{k},\ \mathbf{r}_{xx} = f''_{xx}\mathbf{k},\ \mathbf{r}_{xy} = f''_{xy}\mathbf{k},\ \mathbf{r}_{yy} = f''_{yy}\mathbf{k}.$$

Вычислим теперь коэффициенты первой квадратичной формы как скалярные произведения:

$$E = \mathbf{r}_x^{\mathbf{2}} = 1 + f_x'^{\,2},\ G = \mathbf{r}_y^{\mathbf{2}} = 1 + f_y'^{\,2},\ F = \mathbf{r}_x\mathbf{r}_y = f'_x f'_y.$$

Отсюда $EG - F^2 = 1 + f_x'^2 + f_y'^2$.

Векторное произведение $\left[\mathbf{r}_x, \mathbf{r}_y\right] = \left[\mathbf{i} + f'_x\mathbf{k}, \mathbf{j} + f'_y\mathbf{k}\right] = \mathbf{k} - f'_x\mathbf{i} - f'_y\mathbf{j}$. Этот вектор направлен по нормали к поверхности. Единичный вектор $\mathbf{m}$ по нормали мы получим, разделив вектор $\left[\mathbf{r}_x, \mathbf{r}_y\right]$ на его длину:

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{k} - f'_x\mathbf{i} - f'_y\mathbf{j}}{\sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}}.$$

Вычислим коэффициенты второй квадратичной формы как скалярные произведения:

$$L = \mathbf{r}_{xx}\mathbf{m} = \frac{f''_{xx}}{\sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}},$$

$$M(u,v) = \mathbf{r}_{xy}\mathbf{m} = \frac{f''_{xy}}{\sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}},$$

$$N(u,v) = \mathbf{r}_{yy}\mathbf{m} = \frac{f''_{yy}}{\sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}}.$$