ББК 30.10
Г 77
УДК 53.08:2.13

Рецензент *И. Б. Челпанов*

Грановский В. А.

Г 77 Динамические измерения: Основы метрологического обеспечения.—Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние, 1984.—224 с. , ил.

В пер.: 1 р. 8000 экз.

В книге изложены основы метрологического обеспечения динамических измерений. Сформулированы основные проблемы, даны определения исходных понятий. Дано математическое описание динамических режимов средств измерений. Исследованы методы нахождения динамических характеристик, сформулированы требования к испытательным сигналам. Изложены методы оценивания и коррекции динамических погрешностей.

Книга рассчитана на инженерно-технических работников, занятых измерениями, и разработчиков средств измерений, а также может быть полезной студентам приборостроительных вузов.

Г $\frac{2103000000-119}{051(01)-84}$ 22—84

ББК 30.10
531.7

© Энергоатомиздат, 1984

ПРЕДИСЛОВИЕ

Динамические измерения, т. е. измерения с использованием средств измерений в динамическом режиме, получают все большее распространение в технике и научных исследованиях. Эти измерения связаны в первую очередь с изучением закономерностей протекания физических процессов в исследуемых объектах. Поэтому роль динамических измерений особенно велика, во-первых, в областях науки, связанных с исследованием структуры материи, анализом и синтезом новых веществ и материалов, изучением объектов в экстремальных условиях, и, во-вторых, в отраслях техники и производства, для которых характерно создание новых технологических процессов и испытание новых машин, приборов и аппаратов.

Актуальность вопросов, возникающих на практике при проведении динамических измерений,— одна из причин выделения их в самостоятельный раздел метрологии. Другая, более важная, причина состоит в том, что для решения основных задач динамики при измерениях используется специфический математический аппарат, который не зависит от физической природы измеряемых величин. Этот факт позволяет рассматривать указанные задачи как общие для многих областей измерений и разрабатывать общие методы их решения. Он же создает принципиальную возможность использовать в различных областях измерений те результаты, которые получены в той или иной конкретной области.

В последние годы формирование теории динамических измерений как раздела метрологии шло весьма интенсивно благодаря работам, проводимым в нашей стране в институтах Госстандарта, отраслевых НИИ и на кафедрах вузов. Этой же цели во многом способствовали Всесоюзные симпозиумы «Динамические измерения», проведенные в Ленинграде в 1975, 1978, 1981 и 1984 гг. Работы по динамическим измерениям развернуты и за рубежом: в ПНР, ГДР, США, ФРГ, Италии и других странах.

В связи со сложностью проблемы и ее значимостью в США в Национальном бюро эталонов была учреждена рабочая группа по динамическим электрическим измерениям, которая провела в конце 1974 г. первое пленарное заседание.

Признание мировой научно-технической общественностью важности данного направления выразилось в том, что вопросы дина-

мических измерений были включены в программу VII (Лондон, 1976 г.) и VIII (Москва, 1980 г.) конгрессов ИМЕКО.

Результатом отмеченных выше усилий специалистов — метрологов и приборостроителей — явилось решение многих задач динамики при измерениях. Поэтому назрела необходимость обобщить и систематизировать накопленные знания. При этом следует учитывать возникшую в современной измерительной практике потребность рассматривать метрологическое обеспечение динамических измерений как комплексную проблему, в которой различные аспекты взаимосвязаны.

Предлагаемая работа является первой попыткой такого рода, предпринятой на основе анализа отдельных задач как средств для достижения конечной цели — обеспечения единства и требуемой точности измерений в различных областях.

Тема книги весьма обширна как по содержанию метрологических задач, так в особенности по математическим методам их решения, которые зачастую заимствуются из смежных научных дисциплин: теории автоматического управления, теоретической радиотехники и др. В силу неизбежного ограничения объема не все вопросы могли быть рассмотрены достаточно полно.

В книге обобщены результаты работ, которые проводились и проводятся на многих предприятиях Госстандарта, Минприбора, других приборостроительных министерств и ведомств, а также в вузах.

Метрологическое обеспечение динамических измерений как научное направление сформировалось во ВНИИМ им. Д. И. Менделеева при участии В. О. Арутюнова, В. С. Пеллинца, Д. Ф. Тартаковского, К. П. Широкова, в соавторстве с которыми выполнен ряд работ, вошедших в книгу. С особой благодарностью вспоминает автор К. П. Широкова, участие в работах и поддержку которого трудно переоценить.

Автор признателен О. А. Кудрявцеву за участие в решении вопросов оценивания динамических погрешностей измерений, Ю. С. Этингеру за помощь в разработке программ для ЭВМ и оформлении результатов расчетов, Т. Н. Сарой за полезные обсуждения отдельных вопросов.

За отзывы и замечания, которые можно направлять по адресу: 191041, Ленинград, Марсово поле, 1, Ленинградское отделение Энергоатомиздата, автор заранее благодарит читателей.

Автор

ВВЕДЕНИЕ

Для современного этапа развития метрологии и измерительной техники характерен переход от наблюдений постоянных величин (характеристик свойств и состояний объектов) к наблюдениям переменных величин (характеристик процессов, т. е. закономерных изменений свойств и состояний объектов). Этот переход обусловлен двумя основными тенденциями развития измерений.

Первая тенденция — это развитие «ширь», или расширение областей применения точных измерений (измерений с оцениваемой точностью), в частности для технологического контроля параметров изделий в процессе изготовления, для эксплуатационного контроля технических устройств в процессе их работы, для испытаний образцов новой техники, в том числе в нестационарных режимах, для исследований новых физических объектов и явлений, для изучения поведения объектов в экстремальных условиях.

Вторая тенденция — развитие «вглубь», т. е. повышение точности измерений, обусловленное стремлением исследовать все более тонкие явления природы и создавать все более совершенные технические устройства. При этом ранее «постоянные» величины оказываются переменными.

Начало разработки теоретических вопросов динамических измерений было обусловлено потребностями электроизмерительной техники, в особенности осциллографии. В числе первых нужно упомянуть появившиеся в 80—90-х годах прошлого века работы А. Корню и А. Блондела, посвященные динамике измерительных элементов осциллографов. Далее следует указать на работы Е. Орлиха, Х. Буша, Вертхайма—Соломонсона, Х. Целлиха, В. Хоффмана, Г. Д. Робинсона. В этих трудах решались вопросы измерений, но проблема динамики в метрологии как самостоятельная не формулировалась. Началом развития современной теории динамических измерений следует считать опубликование мемуаров А. Н. Крылова [61]. Эта работа является классической по четкой постановке метрологической задачи и результатам, не потерявшим значения и сегодня. Фундаментальное значение имели труды А. А. Харкевича.

Дальнейшее развитие теории динамических измерений получила в работах Е. И. Баранчука, Л. А. Бибера, М. А. Быховского, В. Г. Васильева, В. А. Волконского, А. С. Немировского, Р. Я. Сапронятовой, Р. Р. Харченко, Я. З. Цыпкина, Н. А. Чехонадского, Ю. М. Элькина, А. М. Яглома. В нее внесли свой вклад зарубежные ученые H. Dallmann, G. Keinath, Marxen, A. Palm, H. Zollich.

В последние годы появились работы А. М. Азизова, В. Ф. Бикланова, Д. И. Бишделишвили, М. Д. Брекера, Н. Ф. Гонева, А. Н. Гордова, Ю. П. Дробышева, Н. А. Желудевой, Г. И. Кавалерова, А. Г. Козачка,

Е. Д. Колтика, П. П. Кремлевского, В. В. Леонова, С. М. Мандельштама, В. С. Пеллинца, Г. С. Скорика, Ю. Н. Солодкина, Г. Н. Солопченко, Д. Ф. Тартаковского, О. Н. Тихонова, В. М. Хрумало, Я. И. Хургина, И. Б. Челпанова, Б. А. Школьника, В. П. Яковлева и др.

За рубежом в послевоенное время к вопросам динамики обратились польские исследователи R. Hagel, A. Metal, S. Skoczowski, A. Zuchowski, чехословацкие H. R. Loos, V. Strejc, немецкие ученые W. Gitt, D. Hofmann, M. Kraus, P. Profos, H. Strobel, E.-G. Woschni, американские L. W. Brickle, R. C. Dove, R. T. Nash, C. H. Spraque и др.

Приведенный выше список авторов может быть значительно расширен, если учесть работы по исследованию нестационарных режимов систем автоматического управления, переходных процессов в радиотехнических устройствах, преобразований сигналов в системах связи. Это отражает особенность теории динамических измерений, находящейся на стыке ряда смежных дисциплин и поэтому широко заимствующей методы этих дисциплин. Так, исследование точности измерительных преобразователей и регистрирующих приборов, а также определение динамических свойств сложных измерительных устройств на основе известных свойств компонентов проводятся методами анализа систем. При этом в зависимости от свойств средства измерений как физического объекта и требуемой точности оно может рассматриваться как система линейная или нелинейная, аналоговая или дискретная, с сосредоточенными или распределенными параметрами. Соответственно, в методах исследования используется различный математический аппарат: линейные и нелинейные дифференциальные и разностные уравнения, обыкновенные дифференциальные уравнения и уравнения в частных производных, преобразования непрерывные и дискретные, интегральное и матричное исчисление и т. д.

Отмеченная особенность динамических измерений как раздела метрологии, с одной стороны, обеспечивает его постоянным притоком новых идей, методов и результатов из смежных областей и потому является весьма благоприятной, а с другой стороны, требует особо тщательного анализа конкретной измерительной задачи, условий конкретного эксперимента с целью выбора адекватного метода и аппарата и в этом смысле предъявляет повышенные требования как к экспериментатору, проводящему измерения, так и к исследователю-метрологу, модифицирующему известные или разрабатывающему новые методы решения метрологических задач.

ГЛАВА ПЕРВАЯ

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

1.1. ПРОБЛЕМЫ ДИНАМИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

Возможны две точки зрения на проблемы динамических измерений: метролога, озабоченного метрологическим обеспечением измерений в конкретной области, и приборостроителя, занятого их техническим обеспечением. Ниже рассмотрены метрологические проблемы измерений, однако следует иметь в виду, что в методах решения большинства рассматриваемых задач заинтересованы также приборостроители.

Метрологическое обеспечение измерений имеет обычную цель: достижение единства измерений при необходимом для современной науки и техники уровне точности. При этом возникают следующие основные задачи: а) передача размеров единиц от эталонов рабочим средствам измерений; б) нормирование и определение динамических характеристик средств измерений; в) оценивание и коррекция погрешностей измерений. Как видно, на данном уровне общности динамические измерения не ставят перед исследователями новых метрологических задач, однако содержание и методы решения известных задач специфичны.

Передача размеров единиц средствам измерений отличается тем, что необходимо передать размер единиц не только измеряемой величины, но и времени. Методы передачи размера единицы времени известны и весьма точны. Однако необходимо иметь в виду составляющую погрешности, возникающую при фиксации времени.

Значительно сложнее с единицей измеряемой величины. Если средство измерений допускает статический режим, то размер единицы ему можно передать от соответствующего эталона, отразив эту связь в существующей поверочной схеме. Если средства измерений нельзя градуировать в статическом режиме, то приходится специально создавать соответствующие образцовые средства и поверочные схемы. Исходные средства измерений этих поверочных схем должны воспроизводить единицу, по размеру согласованную с единицей, воспроизводимой соответствующим эталоном в статике. В случае технико-экономической целесообразности централизованного воспроизведения единицы возможно создание специального эталона, как это сделано для средств измерений пиковых ускорений при ударном движении (см. ГОСТ 8.137—75).

Динамические характеристики необходимо знать для выбора средств измерений, оценивания погрешностей измерений и полу-

чения их результатов. Информация о динамических характеристиках должна содержаться в нормативно-технической документации, однако до недавнего времени вопросы нормирования этих характеристик в отечественной (и зарубежной) практике решались по-разному, причем не всегда удовлетворительно. Например, для самопишущих электроизмерительных приборов нормировалось время установления показаний, что явно недостаточно для правильного применения приборов.

В последние годы предприняты усилия для исправления положения. Введен в действие ряд отечественных стандартов и методических указаний по нормированию динамических характеристик аналоговых и дискретных средств измерений, подготовлены проекты документов СЭВ и МОЗМ, разработан ряд частных нормативных документов.

Определяются динамические характеристики по реакции средства измерений на известный испытательный сигнал. Несмотря на различие источников испытательных сигналов в различных областях измерений, методология и теория решения задачи являются общими. Широкое применение здесь находят методы идентификации динамических объектов. Эти методы должны быть модифицированы с учетом специфики метрологии, которая заключается, в первую очередь, в тесной связи определения динамических характеристик и их нормирования [4], преимущественном использовании детерминированных испытательных сигналов, необходимости учитывать цели измерений и оценивать точность результатов измерений.

При определении переходной, импульсной и частотных характеристик основными следует считать прямые методы, при которых указанные характеристики находят соответственно с помощью ступенчатого, дельта-импульсного и синусоидальных испытательных сигналов. Устройства, реализующие прямые методы, позволяют на выходе исследуемого средства измерений получить сигнал, прямо представляющий искомую характеристику. Если нужно выразить ее в аналитической форме, то это производится известными методами аппроксимации. Здесь в принципе важно различать две ситуации:

1. Генераторы испытательных сигналов и аппаратура для контроля параметров сигналов сравнительно просты и доступны (например, генераторы стандартных электрических сигналов, осциллографы и т. п.). В этом случае для единообразного определения динамических характеристик средств измерений конкретных типов нужны лишь соответствующие методики измерений и обработка экспериментальных данных.

2. Генераторы испытательных сигналов сложны, а средства, пригодные для определения и контроля параметров сигналов, серийно не выпускаются. В этом случае задача определения динамических характеристик средств измерений в принципе сложна и при любом ее решении необходим комплекс аппаратуры. Например, для определения характеристик измерительных преобразователей

давления в качестве генератора ступенчатого воздействия используется ударная труба. Закон изменения во времени давления в ударной трубе устанавливается на основе хорошо изученных законов аэродинамики. Для поверки всего парка средств измерений нужно либо создать необходимое количество ударных труб, что вряд ли целесообразно, либо при необходимом числе труб или даже при единственной трубе предусмотреть создание особо быстродействующих преобразователей, которые затем использовать прямо для определения характеристик рабочих преобразователей или для определения характеристик сигналов на выходе специально создаваемых образцовых генераторов. В последнем случае образуется некоторая иерархическая структура определения динамических характеристик.

Косвенные методы определения динамических характеристик существенно сложнее прямых. Задача определения полной характеристики по известным нехарактеристическому испытательному и соответствующему выходному сигналам средства измерений является некорректно поставленной по Ж. Адамару и требует регуляризации [71]. Использование априорной информации позволяет удовлетворить условиям корректности по А. Н. Тихонову.

В косвенных методах чаще всего используются испытательные сигналы типовых форм, создаваемые с помощью специальных генераторов. Для исследований и аттестации таких генераторов нужны средства измерений, заведомо более быстродействующие, чем исследуемые. При реализации косвенного метода критерий близости искомой модели исследуемому средству измерений должен базироваться на измеряемом этим средством параметре (функционале).

К числу метрологических задач, возникающих при определении динамических характеристик средств измерений, относятся следующие: оценивание точности прямых методов; определение требований к временным (спектральным) свойствам испытательных сигналов; установление требуемой точности воспроизведения характеристических и типовых испытательных сигналов; разработка и модификация методов идентификации (методов обработки экспериментальных данных); установление требований к метрологическим характеристикам средств измерений, используемых для исследований и аттестации этих средств; разработка способов пересчета характеристик, найденных экспериментально, в другие; разработка критериев для построения иерархических структур определения характеристик средств измерений; установление требуемой точности определения этих характеристик.

1.2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Рассмотрение основных понятий динамики естественно начать с понятия «динамические измерения», однако предварительно необходимо сделать замечание общего характера относительно понятия «измерение».

Измерения направлены на изучение тех или иных материальных объектов, которые могут быть более или менее сложными. Объекты обладают свойствами, находятся в тех или иных состояниях, в них могут протекать различные процессы (изменения состояний).

Измерениям подвергаются свойства объектов и параметры состояний или процессов, поддающиеся количественному выражению в принятых единицах. Они называются физическими величинами [45].

При измерении объект оказывает воздействие на средство измерений и вызывает его отклик, из которого можно извлечь информацию об измеряемой величине, т. е. получить значение величины.

Значения величин, получаемые в результате измерений, являются приближенными их оценками, так как абсолютно точные измерения принципиально невозможны. Поэтому необходимые при измерениях значения величин всегда содержат погрешности, которые точно определить также невозможно, поскольку истинные значения измеряемых величин остаются неизвестными и чаще всего определяют не конкретную погрешность результата, а степень недостоверности (или просто недостоверность) полученного значения величины. В качестве оценки недостоверности служат границы зоны, в которой могут лежать погрешности, или один из параметров функции распределения возможных погрешностей (например, среднее квадратическое отклонение результата измерений).

Под динамическими следует понимать измерения, при которых в соответствии с поставленной задачей средства измерений применяются в динамическом режиме [56]. В свою очередь, динамический режим характеризуется переменным выходным сигналом средства измерений. Режим составного средства измерений (установки или системы) считается динамическим, если таковым является режим хотя бы одного из входящих в его состав средств измерений. Принятое определение следующим образом разграничивает ситуации, связанные с характером измеряемых величин, входных и выходных сигналов средства измерений [1] (= — постоянный, ~ — переменный):

Измерения	Статические		Динамические	
Измеряемая величина	=	=	=	~
Сигнал:				
входной	=	~	~	~
выходной	=	=	~	~

По существу принятое определение близко к определению, данному в работе [82], в основу которого положена необходимость учета динамических свойств средства измерений, однако выгодно отличается от него тем, что позволяет априорно, до измерения, решить, к какой категории оно относится. В отличие от определения предложенного в статье [1] (динамические измерения суть «измерения физической величины в процессе ее изменения»), принятое определение охватывает третью ситуацию, которая по содержанию возникающих метрологических задач не отличается от четвертой ситуации.

[1] Подразумевается, что речь идет о характере поведения величины и сигнала на интервале времени наблюдений.

В соответствии с принятым определением измерения охватывают следующие измерительные задачи: определение последовательных значений величины, изменяющейся во времени; измерение параметра однократной реализации величины (например, амплитуды одиночного импульса) с преобразованием и (или) регистрацией переменного сигнала; динамическое измерение постоянной величины (например, измерение постоянной температуры с экстраполяцией выходного сигнала средства измерений к установившемуся значению).

В методологическом аспекте динамические измерения знаменуют собой переход от измерений скалярных величин к измерениям векторных величин (в общем случае бесконечномерных), от измерений с числовым результатом к измерениям с результатом в виде функции, от измерений с целью определения постоянной величины к измерениям с целью определения зависимости одной величины от другой — времени. Таким образом, в узаконенной классификации измерений (ГОСТ 16263—70) динамические измерения могут быть отнесены к совместным измерениям интересующей величины и времени.

Поскольку эти измерения представляют собой процесс, протекающий во времени, то необходимо определить его характеристики. Некоторые из них относятся к любым измерениям.

Началом измерения будем считать момент времени, в который средство измерений приводится во взаимодействие с объектом исследования. Измерение заканчивается получением оценок измеряемой величины и погрешности измерения.

Измерение включает в себя два этапа: наблюдение и обработку экспериментальных данных, причем начало наблюдения совпадает с началом измерения, а заканчивается регистрацией показаний. Следует иметь в виду, что измерению предшествует этап подготовки, содержанием которого является формирование измерительной задачи и выбор (конструирование) средства измерений.

Способность средства измерений реагировать на изменяющееся воздействие отражает его динамические свойства. В зависимости от категории воздействия (точки приложения) можно рассматривать динамические свойства средства измерений по отношению к измеряемой величине (информативному параметру входного сигнала), влияющей величине, неинформативному параметру входного сигнала и помехе. Динамические свойства выражаются с помощью динамических характеристик, которые относятся к метрологическим характеристикам средства измерений поскольку динамические свойства влияют на результаты и погрешности измерений, проводимых с помощью этих средств.

На примере измерения пикового значения однократного импульса легко проиллюстрировать специфику предложенного подхода к выделению динамических измерений в самостоятельную категорию. Пусть вначале речь идет об измерении импульсного напряжения с помощью вольтметра, градуиро-

ванного в единицах напряжения. Предположим, что импульсный вольтметр представляет собой простое средство измерений, т. е. не содержит в своем составе других средств измерений. Тогда в соответствии с данными выше определениями режим вольтметра при измерении пикового значения одиночного импульса и само измерение являются статическими. Пусть далее идет речь об измерении пикового ударного ускорения. Измерительное устройство может быть выполнено по-разному. Если оно представляет собой прибор, градуированный непосредственно в единицах ускорения, то ситуация ничем не отличается от измерений импульсного напряжения. Другое дело, если используется установка, состоящая из измерительного преобразователя «ускорение — напряжение» и импульсного вольтметра. Поскольку при измерениях преобразователь находится в динамическом режиме, то режим установки в целом следует считать динамическим. Наконец, можно проводить измерения пикового ударного ускорения с регистрацией всей кривой изменяющегося ускорения. При этом установка содержит кроме преобразователя, например, электронный осциллограф с запоминанием. Этот вариант подобен предыдущему с той лишь разницей, что оба средства измерений, входящих в состав установки, используются в динамическом режиме. Таким образом, измерения пикового ударного ускорения могут быть и статическими, и динамическими в зависимости от используемых средств измерений. Это — закономерное следствие принятого определения динамических измерений, основанного на характере режима средства измерений.

Рассмотренный пример раскрывает сущность подхода к определению таких измерений, который заключается во взгляде на средство измерений не «изнутри» (взгляд конструктора), а «извне» (взгляд потребителя).

В заключение следует сделать одно замечание общего характера. Динамические измерения сложнее, чем статические. Надо признать законным стремление к упрощению процедур использования средств измерений. В частности, переход от измерений конкретного параметра процесса с помощью регистрирующих средств измерений и сложной обработки результатов наблюдений к измерениям с помощью показывающих средств с погрешностью, не превышающей заданную, является переходом на более высокую ступень развития техники измерений в данной области. Этот переход требует либо детализации измерительной задачи (сужения диапазонов возможных изменений неинформативных параметров входного сигнала, стабилизации условий измерений), либо совершенствования конструкции средства измерений (уменьшения чувствительности к неинформативным параметрам и влияющим величинам). Таким образом, чем больше вопросов решено при формировании измерительной задачи и конструировании средства измерений, тем более просты (для потребителя, а не для прибора) и, следовательно, совершеннее измерения.

1.3. ВХОДНЫЕ СИГНАЛЫ И ИЗМЕРЯЕМЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Взаимодействие объекта исследования и средства измерений вызывает появление на входе последнего сигнала, несущего информацию об измеряемой величине. Вообще говоря, понятия «входной сигнал» и «измеряемая величина» не совпадают [56]. Различие между ними побуждает глубже раскрыть содержание этих понятий. Остановимся прежде всего на понятии «измеряемая величина».

Как указано в § 1.2, измерению подвергается физическая величина, т. е. «свойство, общее в качественном отношении многим физическим объектам (физическим системам, их состояниям и происходящим в них процессам), но в количественном отношении индивидуальное для каждого объекта» (ГОСТ 16263—70).

Физическая величина имеет двоякий смысл: она может обозначать свойство конкретного объекта исследования (например, длину стержня) и может выражать абстрагированное свойство многих объектов (например, длина как выражение свойства протяженности различных материальных объектов). Конкретизация объекта исследования недостаточна для полной формулировки измерительной задачи. Необходимо учесть также следующие соображения.

Измерения, как известно, выполняются ради решения различных познавательных или созидательных задач, возникающих в процессе деятельности людей. Этап решения конкретной задачи, в которой непосредственно используется результат измерения, обусловливает определенные требования к измерению. Назовем совокупность этих требований целевой установкой измерения.

Целевая установка позволяет решить, какое свойство объекта подлежит исследованию и соответственно — какую физическую величину и с какой точностью нужно измерить. Формулирование целевой установки измерения в конечном итоге позволяет выбрать (или сконструировать) подходящее средство измерений.

Измерение осуществляется путем взаимодействия средства измерений с объектом исследования. Однако как акт количественного познания оно включает в себя, кроме реальных действий с реальными объектами, целый ряд мысленных построений, необходимость которых в настоящее время общепризнана. Так, в статье [38] отмечается, что «к показаниям приборов как элементов эмпирического знания ведет довольно длинная цепь гипотетико-дедуктивных построений, которые собственно и делают эти показания осмысленными».

Необходимость таких построений обусловлена следующими обстоятельствами. Любой объект исследования находится во взаимосвязи с окружающим миром. Кроме того, объект в целом и любое его свойство не остаются абсолютно неизменными. Таким образом, объективная реальность, которую мы хотим познать количественно путем измерения, чрезвычайно сложна. Познающий эту реальность человек не может воспринять и осмыслить ее сразу всю в целом, во всех взаимосвязях отдельных сторон. Поэтому, опираясь на целевую установку измерения, он вынужден в каждом конкретном случае выделить определенное свойство объекта и дать определение измеряемой величине. Последнее осуществляется с помощью модели исследуемого объекта. Модель представляет собой мысленную конструкцию, образованную с помощью абстрактных математических образов, которая обусловленным способом соотносится с исследуемым объектом. Следует заметить, что модель объекта часто присутствует при измерении в неявном или неполном виде.

Очевидно, что построение модели, отражающей сразу все свойства конкретного объекта, невозможно. Поэтому модель объекта строится применительно к одной, интересующей нас, физической величине. Поскольку модель объекта нужно иметь до измерения, то приходится строить ее на основе априорной информации.

Таким образом, в соответствии с целевой установкой измерения и до измерения на основе априорной информации строится идеализированная модель объекта, отражающая то его свойство, которое соответствует цели измерения. На модели определяется некоторый параметр, который является абстрактным образом измеряемой физической величины. За истинное значение измеряемой величины принимается такое значение параметра модели, которое можно было бы получить в результате мысленного эксперимента,

свободного от каких-либо погрешностей. Очевидно, что поскольку понятия измеряемой физической величины конкретного объекта и ее истинного значения связаны с моделью объекта, то они справедливы до тех пор, пока сохраняется данная модель. Если в связи с целевой установкой измерения модель объекта пересматривается, то изменяются как определение измеряемой величины, так и понятие об ее истинном значении

Измеряемые физические величины могут выступать как постоянные и как переменные, т. е зависящие от других величин, например, от времени, частоты, длины, температуры. Эта зависимость может быть существенной или несущественной, что определяется конкретной измерительной задачей Так, при исследовании постоянного во времени физического поля интерес может представить измерение физической величины в определенной точке пространства. При заданной точности измерения может быть выбрано средство измерений, так хорошо локализующее эту точку, что можно будет пренебречь изменением физической величины в пространстве. Примером другой ситуации служит измерение на переменном токе. Пусть модель силы тока представляет собой синусоидальную функцию времени. Тогда можно определить ряд параметров этой функции (например, действующую силу тока), которые наряду с мгновенной силой тока могут выступать как измеряемые физические величины. Таким образом, одной переменной физической величине, создающей входной сигнал средства измерений, может соответствовать целый ряд измеряемых величин. Этим измеряемым величинам (параметрам процессов) на модели соответствуют функционалы.

Изложенное выше может быть резюмировано путем формулировки следующих постулатов [23]:

1-й постулат — в рамках принятой модели объекта исследования существуют измеряемая величина и ее истинное значение, и следствие из него — для данной конкретной физической величины существует множество измеряемых величин и их истинных значений;

2-й постулат — измеряемая величина постоянна, и следствие из него — для измерений при переменной конкретной физической величине необходимо определить постоянный ее параметр — измеряемую величину.

Проанализируем на основе введенных постулатов и их следствий содержание измерительных задач, решаемых с помощью динамических измерений.

Определение последовательных значений величины, изменяющейся во времени, производится в конечном итоге для нахождения временной зависимости изменений этой величины. Поскольку требуется определить не одно, а ряд значений величины, то целесообразно говорить не об одном, а о многих измерениях. В каждом из них измеряемой должна быть мгновенная величина, т. е. величина, соответствующая определенному моменту времени. На заданном интервале времени наблюдений непрерывной величины число моментов времени, соответственно число измеряемых мгновенных величин, может быть конечным (дискретные динамические измерения) или бесконечным (аналоговые измерения). Следует заметить, что в силу конечной разрешающей способности реальных средств измерений они производят усреднение входного сигнала, причем интервал усреднения при дискретных измерениях фиксированно связан с каждым отдельным моментом времени, а при аналоговых — является скользящим. Измеряемая мгновенная величина является

постоянной (фиксированной) и вводится с помощью функционала

$$Q_k = \int_0^\infty x(t)\,\delta(t - t_k)\,dt, \qquad (1.1)$$

где $\delta(t)$ — дельта-функция; t_k — заданный момент времени.

При измерительном преобразовании переменного сигнала и регистрации изменяющейся величины измеряемые величины определяются аналогичным образом. Следует лишь иметь в виду, что измерительное преобразование и регистрация представляют собой незавершенные измерения.

При измерении параметра однократной реализации величины определение измеряемой величины (параметра) вводится также с помощью функционала, например, пиковое значение импульса определяется функционалом

$$Q = \max_{t \in [0,\ \theta]} x(t), \qquad (1.2)$$

где θ — длительность импульса.

При динамических измерениях постоянной величины последняя определяется как обычно в статическом режиме, т. е. на «статической» модели.

Сигнал на входе средства измерений изменяется во времени, причем характер его изменения может быть различным. Очевидно, что явления, происходящие в средстве измерений, его отклик на сигнал тесно связаны с характером последнего. Поэтому полезно выделить виды входных сигналов, специфические для свойств средств измерений, которые необходимы для достижения возможно более точного соответствия их выходного сигнала измеряемой величине. Для целей анализа удобно разделить входные сигналы на детерминированные и случайные. Реальные сигналы представляют собой сочетания тех или других, однако в большинстве конкретных ситуаций может быть обоснованно принята первая или вторая модель. Отнесение же всех без исключения сигналов к случайным процессам представляет собой переоценку роли случайности в постановке измерений.

Детерминированные сигналы могут быть непрерывными во времени или последовательностями дискретных сигналов (импульсов); те и другие могут быть периодическими или непериодическими.

Из всех возможных непрерывных непериодических сигналов представляют наибольший интерес: финитные, т. е. отличные от нуля лишь на конечном интервале времени, и с ненулевым установившимся значением.

Непрерывный периодический сигнал может быть представлен:

рядом Фурье

$$x(t) = c_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \cos(k\omega_0 t + \arg c_k); \qquad (1.3)$$

$$c_k = \frac{1}{\theta}\int_{-\theta/2}^{\theta/2} x(\tau)\, e^{-jk\omega_0\tau}\,d\tau; \quad \omega_0 = 2\pi/\theta, \qquad (1.4)$$

а также с помощью других разложений по системам ортогональных функций (полиномам Чебышева, Лежандра, Лагерра и др.);

изображением по Лапласу

$$X(p) = \frac{1}{1 - \exp(-\theta p)} \int_0^{\theta} x(t) \exp(-pt)\, dt. \qquad (1.5)$$

Финитный сигнал, а также сигнал с ненулевым установившимся значением (на конечном интервале времени θ) может быть представлен:

комплексным амплитудным спектром (с помощью интеграла Фурье)

$$X(j\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\theta} x(\tau) \exp(-j\omega\tau)\, d\tau;$$

$$x(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} X(j\omega) \exp(j\omega t)\, d\omega; \qquad (1.6)$$

изображением по Лапласу

$$X(p) = \int_0^{\theta} x(t) \exp(-pt)\, dt; \qquad (1.7)$$

изображением по Лапласу—Карсону

$$X(p) = p \int_0^{\theta} x(t) \exp(-pt)\, d \qquad (1.8)$$

Реальные дискретные сигналы имеют вид импульсов, как правило, периодических, с определенными формой и параметрами (пиковым значением, длительностью и др.). Модели таких сигналов определяются тем, какого рода измерительная информация в них заключена. В одном случае каждый импульс содержит всю информацию о свойствах исследуемого объекта в момент появления импульса, а повторяемость импульсов позволяет судить о постоянстве этих свойств и создает избыточность, которая облегчает обработку сигналов и повышает достоверность результатов. В указанном случае временные характеристики импульсов и измерительных устройств, на которые они воздействуют, соизмеримы, и каждый импульс должен рассматриваться как аналоговый сигнал. Соответственно, для его описания должны быть использованы рассмотренные выше способы.

В другом случае измерительная информация содержится во всей совокупности импульсов, которая, таким образом, представляет собой единый кодированный сигнал. Каждый отдельный импульс несет весьма малую часть общей информации, и эта часть заключена в значении какого-либо параметра — амплитуды, частоты, длительности и т. п. (в зависимости от способа кодирования). При этом в большинстве случаев форма отдельного импульса несущественна и может быть как угодно искажена в измерительном устройстве при условии, что информативный параметр сохраняется (выделяется, преобразуется) с требуемой точностью. Естественно, что в этом случае дискретный сигнал может быть описан с помощью модели, которая представляет собой последовательность импульсов идеализированных форм. Простейшей из таких моделей яв-

ляется (при не временных информативных параметрах) решетчатая функция, т. е. функция, значения которой могут быть отличными от нуля лишь при дискретных равноотстоящих друг от друга значениях независимой переменной.

Решетчатая функция обозначается символом $f[n\Delta t]$, где Δt — период дискретизации, n — целое число. Значения $f[n\Delta t]$ при различных n называются дискретами. Равноотстоящие значения непрерывной функции $f(t)$ образуют решетчатую функцию $f[n\Delta t] = f(t)\big|_{t=n\Delta t}$. Если ввести смещение τ ($-\Delta t \leqslant \tau \leqslant \Delta t$) и рассматривать смещенную решетчатую функцию как параметрическую, то можно сказать, что непрерывная функция $f(t)$ порождает множество смещенных решетчатых функций $f[n\Delta t, \tau]$, соответствующих различным значениям параметра τ из промежутка $[-\Delta t, \Delta t]$. Обратно, данной решетчатой функции $f[n\Delta t]$ соответствуют различные непрерывные функции, ординаты которых в моменты времени $t = n\Delta t$ равны дискретам $f[n\Delta t]$, т. е. различные огибающие. Простейшая огибающая представляет собой ступенчатую функцию

$$f(t) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} U(t - n\Delta t)\{f[n\Delta t] - f[(n-1)\Delta t]\}, \qquad (1.9)$$

где $U(t)$ — единичная ступень. Более гладкой огибающей является кусочно-линейная функция, отрезки которой соединяют между собой соседние дискреты.

В безразмерном времени $\bar{t} = t/\Delta t$ решетчатая функция обозначается $f[n, \nu]$, где $\nu = \tau/\Delta t$, $-1 \leqslant \nu \leqslant 1$. Рассматриваемые ниже свойства $f[n]$ легко переносятся на $f[n, \nu]$.

Скорость изменения решетчатой функции характеризуется ее разностью первого порядка, или первой разностью:

$$\Delta f[n] = f[n+1] - f[n], \qquad (1.10)$$

которая является аналогом производной непрерывной функции. С учетом (1.10) ступенчатая огибающая (1.9) может быть записана в виде

$$f(\bar{t}) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} U(\bar{t} - n)\, \Delta f[n-1]. \qquad (1.11)$$

Разность второго порядка, или вторая разность,

$$\Delta^2 f[n] = \Delta f[n+1] - \Delta f[n] = f[n+2] - 2f[n+1] + f[n].$$

Разность k-го порядка, или k-я разность, определяется рекуррентным соотношением

$$\Delta^k f[n] = \Delta^{k-1} f[n+1] - \Delta^{k-1} f[n] = \sum_{\mu=0}^{k} (-1)^{\mu} \binom{k}{\mu} f[n + k - \mu],$$

где $\binom{k}{\mu} = \frac{k!}{\mu!\,(k-\mu)!}$ — биномиальный коэффициент.

Сумма решетчатой функции $\sum_{m=0}^{n-1} f[m] = \sum_{m=1}^{n} f[n-m]$ аналогична интегралу от непрерывной. Свойства решетчатых функций и соответствующих операторов изучаются в теории конечных разностей [39].

Входные сигналы, длительностью которых можно пренебречь, описываются, кроме решетчатых функций, также с помощью дельта-импульсов, «модулированных» таким образом, что их площади пропорциональны пиковым значениям входных сигналов.

Последовательность дискретных сигналов может быть представлена:

с помощью дискретного преобразования Лапласа — изображением

$$X(q) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \exp(-nq); \tag{1.12}$$

с помощью Z-преобразования

$$Z[x_k;\ z] = X_Z(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k}. \tag{1.13}$$

Случайные сигналы могут быть описаны случайной функцией аргумента (времени), который либо непрерывен (случайный процесс), либо дискретен (случайная последовательность).

Случайный процесс может быть стационарным и нестационарным (в узком и широком смысле), а стационарный — обладать или не обладать эргодическим свойством.

Случайный процесс представляется совокупностью конечномерных распределений вероятностей, описываемых функциями распределений соответствующих порядков.

На практике случайный процесс приближенно может быть представлен: конечной совокупностью ограниченных во времени реализаций; ограниченной совокупностью конечномерных распределений вероятностей для аргументов на конечных интервалах; ограниченной совокупностью конечных смешанных моментов (для аргументов на конечных интервалах), в частности, средним по множеству и автоковариационной (для центрированного процесса — автокорреляционной) функцией.

Для стационарных в широком смысле случайных процессов основным является описание с помощью автоковариационной (автокорреляционной) функции, а также спектральной плотности, которая связана с автоковариационной (автокорреляционной) функцией соотношениями Хинчина—Винера:

$$\Phi_{xx}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} R_{xx}(\tau) \cos \omega\tau d\tau; \tag{1.14}$$

$$R_{xx}(\tau) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \Phi_{xx}(\omega) \cos \omega\tau d\omega. \tag{1.15}$$

При $\tau = 0$

$$M|x|^2 = R_{xx}(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \Phi_{xx}(\omega)\, d\omega, \tag{1.16}$$

что позволяет трактовать $\Phi_{xx}(\omega)$ как спектральную плотность средней «мощности» $M|x|^2$ по частотам ω в промежутке $(0, \infty)$ с единицей $[\Phi_{xx}(\omega)] = [x]^2 \cdot$с/рад, где $[x]$ — единица величины x, или при переходе к частоте $f = \omega/(2\pi)$ $[\Phi_{xx}(f)] = [x]^2/$Гц.

Эргодический процесс может быть представлен: реализацией конечной длительности; автоковариационной (автокорреляционной) функцией по времени:

$$\hat{R}_{xx}(\tau) = \lim_{\theta\to\infty} \frac{1}{2\theta} \int_{-\theta}^{\theta} x(t)\, x(t+\tau)\, d\tau, \tag{1.17}$$

которая совпадает с $R_{xx}(\tau)$. Соответствующая спектральная плотность $\hat{\Phi}_{xx}(\omega)$ вводится также с помощью выражения (1.14).

Помехи на входе средства измерений могут иметь различный характер. Чаще всего при измерениях сталкиваются с шумами, которые описываются случайными функциями времени.

Внешние влияния на средство измерений могут быть, как и входные сигналы, детерминированными и случайными.

Рассмотрим основные типы измеряемых величин, соответствующие различным по характеру исследуемым физическим величинам и, соответственно, входным сигналам.

1. Периодически изменяющаяся величина $x(t+\theta) = x(t)$, $-\infty < t < \infty$. Основным параметром, характеризующим интенсивность изменений величины, является максимальное значение

$$Q = x_m = \max_{0\leqslant t\leqslant\theta} x(t). \tag{1.18}$$

Важным «энергетическим» параметром служит действующая величина

$$Q = x_{ef} = \sqrt{\frac{1}{\theta} \int_{-\theta/2}^{\theta/2} x^2(t)\, dt}. \tag{1.19}$$

Часто, например, при измерениях на переменном токе, используется средняя по модулю («средневыпрямленная») величина

$$Q = x_{mn} = \frac{1}{\theta} \int_{-\theta/2}^{\theta/2} |x(t)|\, dt. \tag{1.20}$$

Из временных параметров периодической величины важнейшим является период повторений, длительность θ_{fe} нарастания или спада θ_{be} величины от одного до другого фиксированных уровней. При измерениях в радиоэлектронике чаще всего фиксируются уровни 0,1 x_m и 0,9 x_m.

Кроме того, в некоторых измерительных задачах цель состоит в нахождении мгновенной величины, соответствующей заданному моменту времени:

$$Q = x_{in} = x(t_{in}). \tag{1.21}$$

2. Финитная величина

$$x = \begin{cases} x(t), & 0 \leqslant t \leqslant \theta, \\ 0, & t < 0,\ t > \theta. \end{cases} \tag{1.22}$$

Важнейшим параметром финитной величины в большинстве областей измерений является пиковое значение

$$Q = x_p = \max_{0\leqslant t\leqslant\theta} x(t). \tag{1.23}$$

При измерениях в механике измеряемая величина часто представляет собой импульс силы (или приращение количества движения тела):

$$Q = x_{pf} = \int_0^{\theta} x(t)\, dt, \tag{1.24}$$

где $x(t)$ — сила, действующая на центр масс тела вдоль траектории его движения.

При исследованиях ударных процессов частной реализацией указанной величины является ударный импульс.

Среди временных характеристик финитной величины, могущих выступать в качестве измеряемых, главный интерес представляют длительности величины в целом (импульса) θ, нарастания θ_{fe} и спада θ_{be}.

3. Величина с ненулевым установившимся значением $x_{set} = \lim_{t\to\theta} x(t)$, $\theta > 0$. При исследованиях этой величины измеряемыми могут быть, в первую очередь, x_{set}, x_{in}, θ_{fe}.

4. Случайные величины; при их исследованиях в качестве измеряемых величин служат первые два центральных момента, автокорреляционная функция случайного процесса и спектральная плотность «мощности».

1.4. ПОГРЕШНОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

Погрешности измерений определяются неидеальностью статических и динамических свойств средств измерений. Соответственно разделению свойств погрешности динамических измерений разделяются в общем случае на две составляющие: статические и динамические погрешности. Нужно отметить, что если выделение статических и динамических свойств оправдано возможностью их экспериментального определения по отдельности, то разделение погрешностей измерений на составляющие в известной мере является умозрительным, поскольку часто эти составляющие трудно или невозможно выделить из экспериментальных данных. Тем не менее для целей анализа указанное разделение необходимо.

О статической погрешности имеет смысл говорить прежде всего в том случае, когда используемое средство измерений имеет полосу пропускания частот, включающую нулевую частоту (устройство с «открытым входом»). Очевидно, что в процессе измерений происходит как бы «развертывание» статической погрешности во времени, т. е. преобразование ее в функцию времени. При этом систематической составляющей статической погрешности соответствует детерминированная функция, а случайной — случайная функция времени. Кроме развертывания во времени статическая погрешность может «деформироваться» в процессе измерений, если ее источник — физическое явление, зависящее от характера изменения входного (выходного) сигнала. Примером такого рода погрешности является вариация показаний стрелочного прибора, обусловленная трением (в кернах).

Систематическая статическая погрешность измерений складывается из систематических статических погрешностей средства измерений (основной и дополнительной) и статической составляющей погрешности метода измерений. Случайная статическая погрешность измерений есть случайная статическая погрешность устройства (основная и дополнительная).

Динамическая составляющая погрешности измерений, рассматриваемая сама по себе, обусловлена неидеальностью динамических

свойств используемых средств измерений. Если же иметь в виду такую динамическую составляющую, которая заметна по сравнению со статической (например, превышает статическую), то следует признать причиной ее появления несоответствие динамических свойств средства измерений характеру входного сигнала. Это несоответствие может быть выражено отклонениями динамических параметров СИ от требуемых (идеальных). Отклонения параметров могут быть как регулярными — детерминированными, и тогда нужно говорить о систематической, или регулярной [58], динамической погрешности, так и нерегулярными — случайными, в этом случае они вызывают появление случайной динамической погрешности.

Большинство средств для динамических измерений могут работать как в статическом, так и в динамическом режимах. Для них нормальными условиями применения следует считать регламентированные в установленном порядке (см., например, ГОСТ 8.050—73 и ГОСТ 8.395—80) условия применения в статическом режиме. Поэтому для указанных средств измерений их динамическая погрешность является дополнительной. Сложнее обстоит дело с устройствами, непригодными для использования в статическом режиме (устройство с «закрытым входом»). Подобные устройства могут иметь «статическую» составляющую погрешности, например погрешность установки нулевого уровня выходного сигнала, статическую погрешность выходного регистрирующего прибора и т. п. Однако нормальные условия применения, определяющие понятие основной погрешности, должны в этом случае относиться к динамическому режиму устройства. Например, «нормальным» динамическим режимом преобразователя переменных давлений может быть режим преобразования синусоидального сигнала давления, имеющего определенную «номинальную» частоту. Коэффициент преобразования преобразователя на этой частоте представляет собой аналог статического коэффициента преобразования средства измерений

1.5. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ

В соответствии с определением (см. § 1.2) динамический режим простого средства измерений, не содержащего в своем составе других устройств, характеризуется изменяющимся во времени выходным сигналом. Естественно, что и входной сигнал средства при этом является переменным. Математическое описание динамического режима должно позволить выразить связь между значениями выходного и входного сигналов устройства в совпадающие моменты времени. В общем виде эту связь можно представить в виде функциональной зависимости

$$y(t) = \mathcal{K}[x(t)]\, x(t), \qquad (1.25)$$

где $x(t)$ — входной сигнал; $y(t)$ — выходной сигнал; $\mathcal{K}[x]$ —

оператор, представляющий собой динамический коэффициент преобразования устройства.

В общем случае сигналы $x(t)$ и $y(t)$ имеют различную физическую природу. Поэтому $\mathcal{K}[x]$ должен выражать не только связь между числовыми значениями величин x и y, но и связь между размерностями этих величин. Иными словами, $\mathcal{K}[x]$ должен содержать множитель, размерность которого равна отношению размерностей y и x. Если средство измерений представляет собой линейную систему, то указанный множитель представляет собой статический коэффициент преобразования K.

Уравнение связи (1.25) неудобно тем, что оно в принципе не допускает выделения в нем элемента, выражающего динамические свойства устройства безотносительно ко входному сигналу. Исключение составляет тривиальный случай безынерционного линейного средства измерений, которое осуществляет масштабное преобразование $x(t)$, не искажая его формы. В последнем случае (1.25) вырождается в уравнение

$$y(t) = Kx(t). \tag{1.26}$$

В силу указанного недостатка уравнение связи (1.25) находит весьма ограниченное применение в измерительной практике, например, в области измерений параметров ударных движений.

Более удобную форму уравнения связи между входным и выходным сигналами устройства в динамическом режиме представляет собой операторное уравнение

$$y = \mathcal{B}[x(t)] = \mathcal{B}(x) = \mathcal{B}x, \tag{1.27}$$

где $\mathcal{B}$ — оператор, отражающий характер отклика устройства на входной сигнал. Область определения и область значений оператора зависит от свойств сигналов x и свойств средства измерений. Так, если речь идет о преобразовании непрерывных сигналов, то $\mathcal{B}$ рассматривается как оператор, действующий из C в C ($C \to C$); если сигналы имеют конечную энергию, то $\mathcal{B}$ есть оператор $\mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}_2$, и т. п. Линейный оператор $\mathcal{B}$ будем обозначать с помощью $\mathbf{B}$: $y = \mathbf{B}x$.

Соотношение (1.27) названо уравнением потому, что цель измерений в конечном итоге состоит в определении входного сигнала x (или его параметра). Уравнением (1.27) является также при определении динамических свойств средства измерений.

Если устройство может быть описано линейной аналоговой моделью с постоянными сосредоточенными параметрами, то имеют место следующие формы операторного уравнения:

интегральное уравнение Фредгольма

$$y(t) = K\int_0^\infty g(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau \tag{1.28}$$

или Вольтерра

$$y(t) = K\int_0^t g(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau; \tag{1.29}$$

дифференциальное уравнение

$$\mathbf{D}_1 y = \mathbf{D}_2 x \tag{1.30}$$

($\mathbf{D}_1$, $\mathbf{D}_2$ — дифференциальные операторы)

или

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}(t) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^{(k)}(t). \tag{1.31}$$

При ненулевых начальных условиях уравнение Вольтерра имеет вид

$$y(t) = K\int_0^t g(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau + x(t)\left[\int_0^t g(\tau)\,d\tau\right]_{t=0}. \tag{1.29a}$$

Нелинейные операторные уравнения для аналоговых средств измерений с сосредоточенными параметрами весьма разнообразны по форме. Важнейшими являются:

интегральное уравнение, определяющее оператор Урысона,

$$y(t) = \int_0^\theta G[t,\ \tau,\ x(\tau)]\,d\tau \tag{1.32}$$

и его частный случай — уравнение Хаммерштейна

$$y(t) = \int_0^\theta g(t,\ \tau)\,f[\tau,\ x(\tau)]\,d\tau; \tag{1.33}$$

интегральное уравнение, определяющее оператор Вольтерра (Лихтенштейна—Ляпунова),

$$y(t) = g_0(t) + \sum_{\mu=1}^{\infty} \underbrace{\int_0^t \ldots \int_0^t}_{\mu} g_\mu(\tau_1 \ldots, \tau_\mu)\left[\prod_{i=1}^{\mu} x(t-\tau_i)\right] d\tau_1 \ldots d\tau_\mu; \tag{1.34}$$

нелинейное дифференциальное уравнение, выражения которого могут быть различными.

Для описания динамического режима аналогового средства измерений с распределенными параметрами существуют два способа. Один из них применяется для описания объектов с распределенными параметрами в физике. Он основан на использовании краевой системы — совокупности дифференциального уравнения с частными производными и краевых условий, которая устанавливает связь между входным воздействием и переменной состояния, характеризующей поведение объекта во времени и в пространстве. Эти уравнения представляют собой либо канонические уравнения математической физики, либо уравнения более общего вида. Так, в [90] приводится следующее уравнение:

$$F\left(\frac{\partial^M u}{\partial t^N \partial x_1^{l_1} \ldots \partial x_n^{l_n}}, \ldots,\ u,\ t,\ x,\ \alpha\right) = f_\Omega(t, \vec{x}), \tag{1.35}$$

где $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — точка, принадлежащая некоторой об-

ласти n-мерного евклидова пространства; t — время; $u = u(t, \vec{x}) = [u_1(t, \vec{x}), \ldots, u_m(t, \vec{x})]$ — вектор-функция, характеризующая состояние системы (набор переменных состояния); $F(\cdot)$ — линейная или нелинейная m-мерная вектор-функция; $\alpha = \alpha(t, \vec{x})$ — l-мерный вектор параметров, определяющих динамические свойства объекта; f_Ω — распределенное m-мерное воздействие, определенное в области Ω; $M = N + \sum_{i=1}^{n} I_i$ — порядок уравнения; N, I_i — целые числа.

Для реальных физических объектов количество независимых переменных $n \leqslant 3$. Для объектов с одной переменной состояния $m = 1$. Вектор параметров α чаще всего является постоянным во времени и пространстве. Уравнение (1.35) дополняется начальными и граничными условиями, которые могут содержать параметры, отражающие динамические свойства объекта.

Кроме дифференциальных уравнений и краевых условий, описание динамического режима устройства предполагает также наличие уравнения связи переменной состояния и выходного сигнала, являющегося функцией времени.

Ниже приведены уравнения динамики ряда измерительных преобразователей с распределенными параметрами, содержащиеся в [2].

Уравнение для мембранного измерительного преобразователя давления, получающееся из рассмотрения классической задачи о колебаниях мембраны, имеет вид

$$P(t) + \frac{1}{\bar{\lambda}_0}\nabla^2 u(x, y, t) = K_1 \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} + \rho_S \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial t^2}; \qquad (1.36)$$

$u(x, y, t)\big|_{t=0} = u_0$; $u_t'(x, y, t)\big|_{t=0} = u_0'$ (начальные условия);
$u(x, y, t)\big|_\Gamma = 0$; $t \geqslant 0$ (граничное условие),

где $P(t)$ — действующее на мембрану измеряемое давление; $u(x, y, t)$ — перемещение (отклонение) точки мембраны с координатами x, y от исходного положения; $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа.

Если мембрана имеет круглую форму, то уравнение удобнее записывать в полярных координатах. В том случае, когда перемещение мембраны не зависит от полярного угла, уравнение приобретает вид

$$\frac{1}{\bar{\lambda}_0}\left[\frac{\partial^2 u(r, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u(r, t)}{\partial r}\right] + P(t) = K_1 \cdot \frac{\partial u(r, t)}{\partial t} + \rho_S \cdot \frac{\partial^2 u(r, t)}{\partial t^2}, \quad 0 \leqslant r < R; \qquad (1.37)$$

для $r = R$ $u(R, t) = 0$ (граничное условие); $u(r, 0) = u_0$; $u_t'(r, 0) = u_0'$ (начальные условия).

Параметры $\bar{\lambda}_0$, K_1, ρ_S определяют свойства конкретного преобразователя и имеют смысл: $\bar{\lambda}_0$ — характеристика материала мембраны, ее натяжения и упругости; K_1 — коэффициент демпфирования; ρ_S — масса единицы поверхности мембраны.

Выходной величиной мембранного преобразователя считают либо среднеповерхностное отклонение, либо отклонение центра мембраны.

Уравнение динамики термоприемника получается из рассмотрения задачи теплопроводности и в общем случае имеет вид

$$\frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial t} = a\nabla^2 u(x, y, z, t); \qquad (1.38)$$

при краевых условиях

$$\lambda \cdot \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial n}\bigg|_S + \alpha_k u(x, y, z, t)\bigg|_S = \Theta(t);$$
$$u(x, y, z, 0) = u_0, \qquad (1.39)$$

где λ, a — коэффициенты теплопроводности и температуропроводности материала термоприемника; α_k — коэффициент конвективного теплообмена между термоприемником и средой; $u(x, y, z, t)$ — температура точки термоприемника с координатами x, y, z; $\Theta(t)$ — измеряемая температура; $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа; $\frac{\partial}{\partial n}$ — производная по нормали к поверхности термометрического тела.

Обычно уравнения динамики термоприемников получают, рассматривая задачу о распространении теплоты для канонических тел: неограниченной пластины, шара, неограниченного цилиндра и стержня.

Показания термоприемников соответствуют их среднеобъемным температурам. В качестве выходной величины стержневых термоприемников используется в ряде случаев температура начала стержня.

Уравнения динамики хемотронных измерительных преобразователей получаются из рассмотрения задачи о течении жидкости в катодной области преобразователя. Уравнение хемотронного измерительного преобразователя с плоским каналом, с учетом диффузии в направлении течения электролита, имеет вид:

$$\frac{\partial C(x, y, t)}{\partial t} = D\nabla^2 C(x, y, t) - v(x, t)\frac{\partial C(x, y, t)}{\partial y}; \qquad (1.40)$$

$$C(x, y, t)\big|_{x=\pm r_0} = C(x, y, t)\big|_{t=0} = 0;$$
$$C(x, y, t)\big|_{y=0} = C_0; \quad C(x, y, t)\big|_{y=l_0} = C_1,$$

где $C(x, y, t)$ — текущее значение концентрации электроактивного

вещества в точке (x, y); D — коэффициент диффузии; $v(x, t)$ — скорость потока в канале преобразователя; r_0 — полуширина канала; l_0 — длина электрода; C_0 и C_1 — концентрации электроактивного вещества на входе и выходе катодной области, соответственно; направление потока совпадает с осью y.

В хемотронном измерительном преобразователе сигнал измеряемой величины преобразуется в сигнал скорости потока $v(x, t)$. Выходной величиной является диффузионный поток

$$I(t) = -2b_0 D \int_0^{l_2} \left. \frac{\partial C(x, y, t)}{\partial x} \right|_{x=r_0} dy, \qquad (1.41)$$

где b_0 — поперечный размер пластины электрода.

Основой описания динамического режима дискретного средства измерений служит разностное уравнение, представляющее собой аналог дифференциального уравнения для устройства непрерывного действия:

$$A_n \Delta^n y(i\Delta t) + A_{n-1}\Delta^{n-1} y(i\Delta t) + \ldots + A_0 y(i\Delta t) = \\ = B_m \Delta^m x(i\Delta t) + B_{m-1}\Delta^{m-1} x(i\Delta t) + \ldots + B_0 x(i\Delta t). \qquad (1.42)$$

Введя оператор смещения $\mathbf{E}y(t) = y(t + \Delta t)$; $\mathbf{E}^r y(t) = y(t + r\Delta t)$, можно записать (1.42) в операторной форме:

$$\left[A_n (\mathbf{E}-1)^n + A_{n-1}(\mathbf{E}-1)^{n-1} + \ldots + A_0\right] y(i\Delta t) = \\ = \left[B_m (\mathbf{E}-1)^m + B_{m-1}(\mathbf{E}-1)^{m-1} + \ldots + B_0\right] x(i\Delta t). \qquad (1.43)$$

Стандартная форма разностного уравнения получается из (1.42) путем раскрытия разностей; при этом (1.43) переходит в следующее:

$$\left[a_n(i)\,\mathbf{E}^n + a_{n-1}(i)\,\mathbf{E}^{n-1} + \ldots + a_0(i)\right] y(i\Delta t) = \\ = \left[b_m(i)\,\mathbf{E}^m + b_{m-1}(i)\,\mathbf{E}^{m-1} + \ldots + b_0(i)\right] x(i\Delta t). \qquad (1.44)$$

Для устройств с постоянными параметрами коэффициенты a_k и b_k не зависят от i:

$$\left[a_n \mathbf{E}^n + a_{n-1}\mathbf{E}^{n-1} + \ldots + a_0\right] y(i\Delta t) = \\ = \left[b_m \mathbf{E}^m + b_{m-1}\mathbf{E}^{m-1} + \ldots + b_0\right] x(i\Delta t). \qquad (1.45)$$

Уравнения (1.44) и (1.45) можно рассматривать как рекуррентные соотношения, с помощью которых при заданных значениях $y[0]$, $y[1], \ldots, y[n-1]$ можно последовательно находить $\mathbf{E}^n y(t)$ при

$t = 0, \Delta t, 2\Delta t, \ldots$ Коэффициенты уравнений связаны между собой следующим образом:

$$a_{n-k} = \sum_{\nu=0}^{k} A_{n-\nu}(-1)^{k-\nu}\binom{n-\nu}{k-\nu}; \\ b_{m-l} = \sum_{\mu=0}^{l} B_{m-\mu}(-1)^{l-\mu}\binom{m-\mu}{l-\mu}; \qquad (1.46) \\ A_{n-k} = \sum_{\nu=0}^{k} a_{n-\nu}\binom{n-\nu}{k-\nu}; \\ B_{m-l} = \sum_{\mu=0}^{l} b_{m-\mu}\binom{m-\mu}{l-\mu}.$$

Основным инструментом анализа уравнений (1.42) — (1.45) служит Z-преобразование [39]. Его применение к обеим частям выражения (1.45) при нулевых начальных условиях дает

$$\left(a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0\right) Y(\mathbf{z}) = \\ = \left(b_m z^m + b_{m-1}z^{m-1} + \ldots + b_0\right) X(z), \qquad (1.47)$$

где $X(z)$, $Y(z)$ — изображения входного и выходного сигналов соответственно.

Спектр дискретного выходного сигнала устройства, например аналого-цифрового преобразователя, выражается формулой

$$Y\left[e^{j\omega\Delta t}\right) = \frac{1}{\Delta t}\sum_{n=-\infty}^{\infty} Y\left(\omega - \frac{2\pi}{\Delta t}n\right). \qquad (1.48)$$

При соблюдении условий теоремы Котельникова

$$\Delta t \leqslant 1/(2f_c), \qquad (1.49)$$

где f_c — верхняя граничная частота спектра непрерывного выходного сигнала; последний может быть восстановлен без искажений. Таким образом, в отношении сигналов, удовлетворяющих условию (1.49), аналого-дискретные устройства могли бы в принципе рассматриваться как аналоговые. Целесообразно было бы проанализировать такую возможность для цифро-аналоговых преобразователей.

С другой стороны, при использовании аналоговых устройств измерительная информация в конечном итоге представляется в дискретной (цифровой) форме. Поэтому целесообразно исследовать вопрос об едином описании динамических свойств аналоговых и дискретных средств измерений. Такое описание особенно важно

при совместном использовании средств измерений обеих категорий

скоростей аппроксимируется выражением $I^2 = I_0^2 + a\sqrt{v}$, где $a = \text{const}$, т. е. является нелинейной.

Линейные аналоговые средства измерений с сосредоточенными параметрами. Основным уравнением связи во временной области для таких устройств служит дифференциальное уравнение (1.31). Это уравнение (его структура и коэффициенты) представляют собой основную (исходную) характеристику динамических свойств средства измерений, поскольку оно определяет его реакцию на любое воздействие при любых начальных условиях. Применение для решения дифференциального уравнения метода функции Грина [39] позволяет выразить нормальную реакцию устройства на внешнюю нагрузку с помощью уравнений свертки (1.28) и (1.29). При подстановке в эти уравнения $x(t) \equiv \delta(t)$ в соответствии с фильтрующим свойством дельта-функции получается $y(t) = Kg(t)$. Иными словами, ядро интегральных уравнений (1.28), (1.29) представляет собой реакцию линейного аналогового устройства с сосредоточенными параметрами, имеющего единичный статический коэффициент преобразования, на дельта-импульс. Поэтому $g(t)$ называется импульсной характеристикой устройства (ГОСТ 21878—76). Если рассматривать дельта-импульс как входное воздействие, сосредоточенное по времени в точке $t = 0$, то из принципа причинности (отклик не может опережать воздействие) следует, что при $t < 0$ $g(t) = 0$. Поэтому при $\tau = t' > t$: $\int_0^{t'} g(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau = 0$.

Таким образом, левые части уравнений (1.28) и (1.29) оказываются равными, а сами уравнения — тождественными с точностью до формы записи. Отметим, что уравнение (1.28) существенно отличается от (1.29) лишь в том случае, когда при описании устройств отказываются от принципа причинности (иногда он называется принципом «физической реализуемости»), подобно тому, как это делается при моделировании свойств стробоскопических измерительных преобразователей [42].

Для входных сигналов, начало которых не совпадает с началом отсчета времени, в уравнениях (1.28), (1.29) в качестве нижних пределов интегрирования можно записать $-\infty$. Таким образом, приходим к наиболее общей форме записи уравнения связи во временной области:

$$y(t) = K \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau. \qquad (2.1)$$

Уравнения свертки (1.28), (1.29) и (2.1) симметричны относительно входного сигнала и импульсной характеристики:

$$y(t) = K \int_{-\infty}^{\infty} [g(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau. \qquad (2.2)$$

Импульсная характеристика $g(t)$ формально представляет собой функцию Грина для соответствующей краевой задачи и обладает всеми ее свойствами [39].

В предположении, что $x(0) = 0$, интегрированием по частям получаем из (1.29)

$$y(t) = K \int_0^t x'(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau, \qquad (2.3)$$

где

$$h(t) = \int_0^t g(\tau)\, d\tau. \qquad (2.4)$$

Поскольку для входного сигнала, представляющего собой единичную ступень

$$x(t) = U(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant 0; \\ 1, & t > 0, \end{cases} \qquad (2.5)$$

справедливо соотношение $x'(t) = \delta(t)$, то из (2.3) следует, что $h(t)$ есть отклик средства измерений (при $K = 1$) на единичную ступень, т. е. описывает переходный процесс в устройстве. Поэтому $h(t)$ называется переходной характеристикой средства измерений. Так как переходная характеристика реального устройства всегда дифференцируема, то

$$g(t) = dh(t)/dt. \qquad (2.6)$$

В общем случае, когда входной сигнал $x(t)$ претерпевает скачкообразные изменения в отдельные моменты времени, уравнение связи записывается с помощью интеграла Стилтьеса

$$y(t) = K \int_0^t h(t-\tau)\, d[x(\tau)]. \qquad (2.7)$$

Дифференциальное уравнение (1.31) (точнее, соответствующий дифференциальный оператор, представленный своими структурой и коэффициентами) является исходной характеристикой динамических свойств рассматриваемых устройств во временной области. Анализ интегральных форм уравнения связи (1.28), (1.29), (2.1) — (2.3), (2.7) позволяет ввести еще две временные динамические характеристики устройства — импульсную и переходную. К другим динамическим характеристикам можно придти путем интегральных преобразований дифференциального уравнения (1.31).

Если сигналы $x(t)$ и $y(t)$ формально представляют собой абсолютно интегрируемые функции, то к обеим частям (1.31) можно применить преобразование Фурье. В силу линейности преобразования Фурье получим уравнение

$$Y(j\omega) \sum_{i=0}^{n} a_i (j\omega)^i = X(j\omega) \sum_{k=0}^{m} b_k (j\omega)^k, \qquad (2.8)$$

которое представляет собой уравнение связи в частотной области. По аналогии с отношением выходного и входного сигналов средства

измерений в статическом режиме отношение

$$\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{m} b_k (j\omega)^k}{\sum_{i=0}^{n} a_i (j\omega)^i} = K(j\omega) \qquad (2.9)$$

называется комплексным коэффициентом преобразования (усиления, передачи). Отношение $K(j\omega)/K$, которое обозначим $\dot{W}(j\omega)$, целесообразно называть комплексной частотной характеристикой. Как всякое комплексное выражение, характеристика $\dot{W}(j\omega)$ может быть представлена своими вещественной и мнимой частями:

$$\dot{W}(j\omega) = \mathrm{Re}\,[\dot{W}(j\omega)] + j\,\mathrm{Im}\,[\dot{W}(j\omega)], \qquad (2.10)$$

однако чаще она выражается с помощью модуля и фазы:

$$W(j\omega) = A(\omega)\exp[j\Phi(\omega)]. \qquad (2.11)$$

Форме представления характеристики (2.11) соответствуют две частотные динамические характеристики: амплитудная — $A(\omega)$ и фазовая — $\Phi(\omega)$. Характеристика $A(\omega)$ связана с модулем комплексного коэффициента передачи устройства следующим соотношением:

$$A(\omega) = |K(j\omega)|/K, \qquad (2.12)$$

где $K = b_0/a_0$ — статический коэффициент преобразования устройства. С учетом (2.12) можно записать

$$K(j\omega) = KA(\omega)\exp[j\Phi(\omega)]. \qquad (2.11a)$$

Поскольку средство измерений представляет собой устойчивую систему, то при синусоидальном входном сигнале

$$x(t) = x_m \sin(\omega t + \varphi) \qquad (2.13)$$

единственным установившимся решением дифференциального уравнения (1.31) — выходным сигналом — будет

$$y(t) = y_m \sin(\omega t + \psi). \qquad (2.14)$$

В комплексной форме

$$x(t) = x_m \exp[j(\omega t + \varphi)]; \qquad y(t) = y_m \exp[j(\omega t + \psi)], \qquad (2.15)$$

причем

$$y(t) = K(j\omega)\,x(t). \qquad (2.16)$$

Из выражения (2.11а) с учетом (2.13) — (2.16) получаем:

$$A(\omega) = y_m/(Kx_m); \qquad (2.17)$$

$$\Phi(\omega) = \psi - \varphi. \qquad (2.18)$$

Таким образом, модуль $A(\omega)$ комплексной частотной характеристики $\dot{W}(j\omega)$ при данной частоте ω равен приведенному отношению амплитуд синусоидальных выходного и входного сигналов

с частотой ω, а фаза $\Phi(\omega)$ равна разности фаз этих сигналов. Поэтому $A(\omega)$ называется амплитудно-частотной, а $\Phi(\omega)$ — фазочастотной характеристиками.

Требование абсолютной интегрируемости для реальных сигналов не является ограничением, и метод Фурье-преобразования широко применяется для решения метрологических (как и вообще технических) задач. Однако для целей анализа более удобно освободиться от этого требования, что позволит расширить множество используемых моделей. Переход от функции $f(t)$, не интегрируемой абсолютно, к функции $f_1(t)$, интегрируемой абсолютно, осуществляется с помощью соотношения $f_1(t) = f(t)\exp(-\sigma t)$, $\sigma > 0$, $t > 0$.

Применив к $f_1(t)$ преобразование Фурье, получим

$$F_1(j\omega) = \int_0^\infty f_1(t)\exp(-j\omega t)\,dt =$$

$$= \int_0^\infty f(t)\exp[-(\sigma + j\omega)t]\,dt, \qquad (2.19)$$

т. е. формально

$$F_1(j\omega) = F(\sigma + j\omega). \qquad (2.20)$$

Вводя комплексную переменную $p = \sigma + j\omega$, имеем из (2.19) и (2.20)

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)\exp(-pt)\,dt, \qquad (2.21)$$

т. е. прямое преобразование Лапласа.

Применение преобразования Лапласа (2.21) к дифференциальному уравнению (1.31) дает

$$Y(p)\sum_{i=0}^{n} a_i p^i - F(p) = X(p)\sum_{k=0}^{m} b_k p^k - E(p), \qquad (2.22)$$

где

$$F(p) = \sum_{i=0}^{n-1} y^{(i)}(0) \sum_{\mu=0}^{n-1-i} a_\mu p^{n-1-\mu};$$

$$E(p) = \sum_{k=0}^{m-1} x^{(k)}(0) \sum_{\nu=0}^{m-1-k} b_\nu p^{n-1-\nu}.$$

Преобразуя (2.22), приходим к выражению

$$Y(p) = \frac{\sum_{k=0}^{m} b_k p^k}{\sum_{i=0}^{n} a_i p^i} X(p) + \frac{F(p) - E(p)}{\sum_{i=0}^{n} a_i p^i}, \qquad (2.23)$$

представляющему собой уравнение связи в плоскости комплексной переменной p. При нулевых начальных условиях

$$Y(p) = KW(p)\,X(p), \tag{2.24}$$

где

$$W(p) = \sum_{k=0}^{m} (b_k/b_0)\,p^k \Big/ \sum_{i=0}^{n} (a_i/a_0)p^i \tag{2.25}$$

— передаточная функция.

Передаточная функция (при $K = 1$) представляет собой линейный оператор, преобразующий входное воздействие (входной сигнал устройства) в нормальную реакцию (выходной сигнал устройства при нулевых начальных условиях).

Для физически реализуемых систем степень числителя передаточной функции должна быть меньше степени знаменателя: $m<n$. Значения p, при которых передаточная функция обращается в нуль и в бесконечность, называются, соответственно, ее нулями и полюсами. Таким образом, передаточная функция (2.25) имеет m нулей и n полюсов. Коэффициенты передаточной функции представляют собой функции параметров устройства, и поэтому все они вещественны. Из этого следует, что все невещественные нули и полюсы передаточной функции обязательно являются комплексно-сопряженными. Поскольку средство измерений должно быть устойчивым, то все полюсы его передаточной функции расположены в левой полуплоскости p. Соответственно, все полюсы комплексного коэффициента передачи расположены в верхней полуплоскости.

Линейные дискретные средства измерений с сосредоточенными параметрами. Исходной характеристикой динамических свойств этой категории устройств служит разностное уравнение (1.45) — его структура и коэффициенты. Как отмечено выше, разностное уравнение представляет собой аналог дифференциального уравнения для устройства непрерывного действия. Другие динамические характеристики дискретных средств измерений также вводятся аналогично соответствующим характеристикам аналоговых средств.

Применение к уравнению (1.45) дискретного преобразования Лапласа [39] дает

$$Y(q)\sum_{i=0}^{n} a_i e^{iq} - F(q) = X(q)\sum_{k=0}^{m} b_k e^{kq} - E(q), \tag{2.26}$$

где

$$F(q) = \sum_{i=1}^{n} e^{iq} \sum_{\nu=0}^{n-i} a_{i+\nu}\,y_\nu; \qquad E(q) = \sum_{k=1}^{m} e^{kq} \sum_{\mu=0}^{m-k} b_{k+\mu}x_\mu;$$

$X(q)$, $Y(q)$ — изображения входного и выходного сигналов; $q = \sigma + j\omega$ — параметр преобразования; σ, ω — непрерывные вещественные переменные; $y_i = y(i\Delta t)$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$; $x_k = x(k\Delta t)$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$ — граничные условия.

Преобразуя (2.26), приходим к выражению

$$Y(q) = \frac{\sum_{k=0}^{m} b_k e^{kq}}{\sum_{i=0}^{n} a_i e^{iq}}\,X(q) + \frac{F(q) - E(q)}{\sum_{i=0}^{n} a_i e^{iq}}, \tag{2.27}$$

по форме аналогичному (2.23). При нулевых граничных условиях

$$Y(q) = KW(q)\,X(q), \tag{2.28}$$

где

$$W(q) = \sum_{k=0}^{m} (b_k/b_0)\,e^{kq} \Big/ \sum_{i=0}^{n} (a_i/a_0)\,e^{iq} \tag{2.29}$$

— передаточная функция.

Следует заметить, что дискретное преобразование Лапласа представляет собой функциональное преобразование

$$X(q) = \mathcal{D}\{x[t_k]\} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-qk}\,x[t_k], \tag{2.30}$$

где $x[t_k]$ — решетчатая функция, т. е. функция, заданная последовательностью своих значений в дискретные моменты времени $t_k = k\Delta t$, которые определяются периодом дискретизации Δt. В большинстве случаев решетчатая функция получается из соответствующей непрерывной функции. Обратно, огибающая решетчатой функции является приближением к исходной непрерывной. Поскольку огибающую можно построить различными способами, то очевидно, что решетчатая функция не может полностью отразить свойства непрерывной функции.[1] Поэтому часто в рассмотрение вводится смещенная решетчатая функция $x[t_k, \tau] = x(t_k + \tau)$, которая при смещении τ, изменяемом непрерывно от 0 до Δt, тождественна непрерывной функции $x(t)$. Применение дискретного преобразования Лапласа к смещенной решетчатой функции приводит к смещенному изображению

$$X(q, \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-qk}\,x[t_k, \tau]. \tag{2.31}$$

Переходя к безразмерному времени $\bar{t} = t/\Delta t$, $\varepsilon = \tau/\Delta t$, можно записать (2.30) и (2.31) в виде

$$X(q) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-qk}\,x[k]; \qquad X(q, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-qk}\,x[k, \varepsilon].$$

[1] Это не противоречит теореме Котельникова, которая устанавливает принципиальную возможность восстановления непрерывной функции по достаточному числу ее дискретных значений.

Изображения непрерывной и смещенной решетчатых функций связаны между собой соотношениями:

$$X(q,\ \varepsilon)=\sum_{r=-\infty}^{\infty}{}' e^{(q+2\pi jr)\,\varepsilon}\,X(q+2\pi jr)^{*};$$

$$X(q)=\int_0^1 e^{-q\varepsilon}X(q,\ \varepsilon)d\varepsilon. \tag{2.32}$$

Указанные соотношения определяют прямое и обратное $\mathcal{D}$-преобразования:

$$X(q,\ \varepsilon)=\mathcal{D}\{X(q)\};\quad X(q)=\mathcal{D}^{-1}\{X(q,\ \varepsilon)\},$$

свойства которого приведены в работе [81].

Применение к выражению (2.27) обратного $\mathcal{D}$-преобразования позволяет получить для выходного сигнала во временной области уравнение

$$y[k]=K\sum_{i=0}^{k} g[i]\,x[k-i]+v[k], \tag{2.33}$$

аналогичное уравнению свертки (1.29). В выражении (2.33) член $v[k]$ определяется граничными условиями; само уравнение получено в предположении, что полином, стоящий в знаменателе (2.27), не имеет кратных корней. При нулевых граничных условиях

$$y[k]=K\sum_{i=0}^{k} g[i]\,x[k-i], \tag{2.34}$$

и $g[i]$ может рассматриваться как импульсная характеристика дискретного средства измерений. Уравнения (2.33) и (2.34) получаются на основе формулы разложения

$$y[k]=\sum_{\nu=0}^{n}\frac{\sum_{l=0}^{m} b_l e^{lq_\nu}X(q_\nu)+F(q_\nu)-E(q_\nu)}{e^{q_i}\left[\frac{d}{de^{q}}\left(\sum_{i=0}^{n}a_i e^{iq}\right)\right]_{q=q_i}}\cdot e^{q_\nu k} \tag{2.35}$$

для простых корней q_ν уравнения $\sum_{i=0}^{n} a_i\exp(iq)=0$. При кратных корнях с кратностью $r_1, r_2, \ldots, r_s$, где $r_1+r_2+\ldots+r_s=n$, формула разложения приобретает вид

$$y[k]=\sum_{\nu=1}^{s}\sum_{\mu=0}^{r_\nu-1} c_{\nu\mu}\,\frac{k^{(\mu)}}{\mu!}\,e^{q_\nu(k-\mu)}, \tag{2.36}$$

где

$$c_{\nu\mu}=\frac{1}{(r_\nu-\mu-1)!}\cdot\frac{d^{r_\nu-\mu-1}}{de^{q(r_\nu-\mu-1)}}\times$$

$$\times\left[\frac{\sum_{l=0}^{m} b_l e^{lq}X(q)+F(q)-E(q)}{e^{q}\sum_{i=0}^{n}a_i e^{iq}}\cdot\left(e^{q}-e^{q_\nu}\right)^{r_\nu}\right]_{q=q_\nu}.$$

На основе формулы (2.36) снова приходим к дискретной свертке (2.33), в которой импульсная характеристика $g[i]$ представляет собой оригинал для $W(q)$. В частном случае простых корней ($s=n$, $r_\nu=1$, $\mu=0$) формула (2.36) переходит в (2.35). Поскольку спектр решетчатой функции

$$X(j\bar{\omega})=\sum_{k=0}^{\infty} e^{-j\bar{\omega}k}x[k],$$

где $\bar{\omega}=\omega\Delta t$, получается из выражения для ее $\mathcal{D}$-преобразования подстановкой $q=j\bar{\omega}$, то из (2.28) получается выражение комплексной частотной характеристики

$$W(j\bar{\omega})=\frac{Y(j\bar{\omega})}{KX(j\bar{\omega})}=W(q)\big|_{q=j\bar{\omega}}.$$

При этом следует иметь в виду, что спектр решетчатой функции $X(j\bar{\omega})$ следующим образом связан со спектром соответствующей непрерывной функции:

$$X(j\bar{\omega})=\frac{1}{2}x[0]+\sum_{r=-\infty}^{\infty} X[(j\bar{\omega}+2\pi r)].$$

Кроме импульсной, может быть введена также временная характеристика дискретного устройства $h[n]=\sum_{m=0}^{n} g[m]$, соответствующая переходной характеристике аналогового устройства. С помощью временной характеристики можно представить дискретное уравнение свертки в форме

$$y[k]=K\left(x[k]\,h[0]+\sum_{i=1}^{k} x[i-1]\,\Delta h[k-i]\right)$$

или

$$y[k]=K\left(x[0]\,h[k]+\sum_{i=0}^{k-1}\Delta x[i]\,h[k-i-1]\right).$$

---

* При $\varepsilon=0$ $X(q)=\frac{1}{2}x[0]+\sum_{r=-\infty}^{\infty}X(q+2\pi jr)$, что при $x[0]\neq 0$ не совпадает с результатом подстановки $\varepsilon=0$ в (2.32). Отмеченный эффект связан с тем, что сумма ряда Фурье в точке разрыва 1-го рода равна среднему арифметическому значению функции справа и слева от этой точки [39].

Из другой эквивалентной формы свертки

$$y[k]=K\left(\sum_{i=0}^{\infty} x[k-i]\,g[i]-\sum_{i=k+1}^{\infty} x[k-i]\,g[i]\right)$$

легко получить выражение для установившегося режима дискретного устройства: $y_{уст}[k]=K\sum_{i=0}^{\infty} x[k-i]\,g[i]$, которое с использованием моментов импульсной характеристики $d_m=\sum_{i=0}^{\infty} i^m g[i]$ может быть преобразовано в уравнение

$$y_{уст}[k]=K\left(d_0 x[k]+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m d_m\frac{\Delta^m x[k-m]}{m!}\right),$$

где второе слагаемое характеризует искажение сигнала $x[k]$ дискретным устройством.

Модели конкретных видов дискретных средств измерений — аналого-цифровых и цифро-аналоговых — должны строиться с учетом структуры измерительной цепи, в которую входят эти средства, а также условий теоремы Котельникова. Действительно, пусть цифро-аналоговый преобразователь подключен к цифровому фильтру и требуется определить общую характеристику такой цепи. Может оказаться удобным описывать преобразователь аналогично фильтру как чисто дискретное устройство, что упростит «стыковку» характеристик фильтра и преобразователя. В другом случае может понадобиться описать преобразователь с помощью непрерывной модели. Поэтому вопрос об описании дискретных средств измерений различных видов должен рассматриваться в рамках задачи описания составных средств. Здесь следует лишь отметить, что безусловно существует возможность однотипного описания различных частей измерительной цепи как дискретных элементов, в то время как использование только непрерывных моделей обусловлено указанными выше факторами.

Линейные аналоговые средства измерений с распределенными параметрами. Исходной характеристикой динамических свойств устройств этой категории во временной области, как и в предыдущих случаях, является дифференциальное уравнение — уравнение в частных производных (1.35) или его конкретные формы (1.36) — (1.40) и др. Применение к этим уравнениям метода функции Грина позволяет перейти от дифференциальных к интегральным уравнениям связи, подобно тому, как это делается для устройств с сосредоточенными параметрами. Ядра указанных интегральных уравнений, т. е. функции Грина для соответствующих задач, представляют собой импульсные характеристики линейных аналоговых устройств с распределенными параметрами. Далее аналогично вводятся переходные характеристики, передаточные функции и частотные характеристики. В отличие от средств измерений с сосредоточенными параметрами передаточные функции рассматриваемых

средств суть иррациональные функции комплексной переменной p [70].

В качестве примера рассмотрим одномерное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{c}{\lambda}\cdot\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{v}{\lambda},\qquad(2.37)$$

где c — удельная объемная теплоемкость. Подобным уравнением описываются разнообразные измерительные преобразователи, например, построенные на основе цепочных схем, длинных линий с распределенными емкостью и сопротивлением и др. Моделями таких устройств служат так называемые «полуинерционные» звенья [52], передаточные функции которых суть рациональные функции переменной $\sqrt{p}$, например:

$$W(\sqrt{p})=\frac{1}{(\sqrt{pT_1}+1)(\sqrt{pT_2}+1)};$$

$$W(\sqrt{p})=\frac{1}{\sqrt{pT}+1};\quad W(\sqrt{p})=\frac{1}{\sqrt{pT}+1}.\qquad(2.38)$$

Переходные характеристики устройств с двумя последними передаточными функциями соответственно имеют вид

$$h(t)=1-\exp(t/T)\operatorname{erf}(\sqrt{t/T});\quad h(t)=\operatorname{erf}(\sqrt{t/T}),\qquad(2.39)$$

где

$$\operatorname{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt.\qquad(2.40)$$

Для средств измерений, динамика которых может быть описана с помощью уравнения Лапласа [39], моделью служит полуинерционное звено со следующими передаточной функцией и переходной характеристикой:

$$W(\sqrt{p})=1/\sqrt{Tp};\quad h(t)=1/\sqrt{\pi Tt}.\qquad(2.41)$$

Линейные дискретные средства измерений с распределенными параметрами. Модели этого типа в литературе практически не встречаются. Возможной областью их применения является описание динамических свойств измерительных цепей, в которых используется первичный измерительный преобразователь с распределенными параметрами (скорее всего, преобразователь неэлектрического сигнала в электрический) и обработка электрического сигнала предполагает его дискретизацию.

Нелинейные аналоговые средства измерений с сосредоточенными параметрами. Нелинейные модели этих устройств целесообразно разделить на две группы: слабо нелинейные и существенно нелинейные. К первой группе относятся модели, выражающие «остаточные» нелинейности, т. е. нелинейные эффекты, влияние которых конструктору устройства удалось снизить до уровня, позволяю-

щего учесть их с помощью специфических погрешностей: погрешностей от нелинейности градуировочной характеристики и (или) динамической характеристики. Модели второй группы выражают «принципиальные» нелинейности, т. е. эффекты, связанные с принципом преобразования сигналов в измерительной цепи. Зачастую нелинейности такого рода представляют собой цену, которую конструктор вынужден платить за достижение высоких метрологических характеристик средства измерений (чувствительности, помехоустойчивости и др.).

Модели первой группы естественно строить на основе линеаризации. В работе [81] различают четыре вида линеаризации: статическую, дифференциальную, гармоническую и случайную. При линеаризации безынерционный нелинейный элемент с характеристикой

$$y = H(x) \tag{2.42}$$

описывается с помощью уравнения

$$\tilde{y} = k^{(\cdot)} x, \tag{2.43}$$

где $k^{(\cdot)}(\cdot)$ — коэффициент линеаризации, который определяется ее видом. Коэффициент статической линеаризации $k^{\text{с}}(x) = y/x = H(x)/x$, и уравнение связи приобретает вид

$$\tilde{y} = [H(x)/x]\, x, \tag{2.44}$$

т. е. совпадает с выражением (2.42) с точностью до формы записи. При фиксации аргумента в выражении для $k^{\text{с}}(x)$ уравнение (2.44) может рассматриваться как линейная аппроксимация (2.42).

Коэффициент дифференциальной линеаризации

$$k^{\text{д}}(x) = dy/dx = dH(x)/dx, \tag{2.45}$$

и уравнение (2.43)

$$\tilde{y} = [dH(x)/dx]\, x. \tag{2.46}$$

При фиксации аргумента в (2.45) уравнение (2.46) может быть использовано для определения реакции нелинейного элемента на малые изменения входного воздействия относительно фиксированного уровня.

Коэффициенты гармонической линеаризации $k_s^{\text{г}}$, $k_c^{\text{г}}$ определяют из условия:

$$\int_0^{2\pi} [y(t) - \tilde{y}(t)]^2 d\omega \to \min_{k_s^{\text{г}},\, k_c^{\text{г}}},$$

где

$$\tilde{y}(t) = a\left[k_s^{\text{г}} \sin \omega t + k_c^{\text{г}} \cos \omega t\right]. \tag{2.47}$$

Таким образом, речь идет о приближении отклика $y(t)$ нелинейного элемента на гармонический сигнал $x(t) = a \sin \omega t$ с помощью

гармонического сигнала $\tilde{y}(t)$. Уравнение (2.47) в комплексной форме имеет вид: $\vec{\tilde{y}}(t) = \vec{k}^{\text{г}}(a)\, \vec{x}(t)$,
где

$$\vec{k}^{\text{г}}(a) = k^{\text{г}}(a) \exp[-j\Psi(a)];$$

$$k^{\text{г}}(a) = \sqrt{\left[k_s^{\text{г}}(a)\right]^2 + \left[k_c^{\text{г}}(a)\right]^2}; \quad \Psi(a) = -\operatorname{arctg}\left[k_c^{\text{г}}(a)/k_s^{\text{г}}(a)\right];$$

$$k_s^{\text{г}}(a) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} H(a \sin \omega t) \sin \omega t dt;$$

$$k_c^{\text{г}}(a) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} H(a \sin \omega t) \cos \omega t dt.$$

Для однозначных нелинейностей $k_c^{\text{г}}(a) = 0$, и коэффициент гармонической линеаризации оказывается вещественным: $\vec{k}^{\text{г}}(a) = k_s^{\text{г}}(a)$.

Следует отметить, что выражение (2.47) лишь в комплексной форме соответствует (2.43).

Вторая группа моделей основана на использовании нелинейных операторов, которые, вообще говоря, могут быть весьма разнообразными по форме. Важнейшими являются оператор Урысона, определяемый уравнением (1.32), и две его основные модификации, которым соответствуют модели Хаммерштейна и Винера. Первая структурно может быть представлена цепью, в которой к выходу нелинейного (в общем случае инерционного) звена подключено линейное инерционное звено. Выходной сигнал цепи

$$y(t) = \int_0^{\theta} g(t, \tau) f[\tau, x(\tau)]\, d\tau,$$

где $f[\cdot]$ — характеристика преобразования нелинейного звена; $g(t, \tau)$ — импульсная характеристика линейного звена.

Модель Хаммерштейна часто используется в варианте с безынерционным нелинейным и стационарным линейным звеньями:

$$y(t) = K \int_0^{\theta} g(t - \tau) f[x(\tau)]\, d\tau.$$

Модель Винера отличается от предыдущей порядком соединения звеньев:

$$y(t) = f\left[K \int_0^{\theta} g(t - \tau)\, x(\tau)\, d\tau\right].$$

Чаще всего нелинейные модели динамических звеньев строятся на основе нелинейного интегрального оператора Вольтерра (Лихтенштейна—Ляпунова), определяемого рядом (1.34), где $g_0, g_1, \ldots g_\mu, \ldots$ по аналогии с характеристиками линейных устройств могут быть названы импульсными. Из выражения (1.34) видно, что

модель нелинейного аналогового устройства с сосредоточенными параметрами может быть представлена в виде соединения элементарных линейных звеньев повышающейся размерности. Продолжая указанную аналогию, можно следующим образом перейти к описанию рассматриваемых устройств в комплексной (частотной) области [60].

Представим выходной сигнал средства измерений в виде суммы:

$$y(t) = g_0(t) + \sum_{\mu=1}^{\infty} y_\mu(t), \tag{2.48}$$

где

$$y_\mu(t) = \underbrace{\int_0^t \cdots \int_0^t}_{\mu} g_\mu(t-\tau_1, \ldots, t-\tau_\mu)\left[\prod_{i=1}^{\mu} x(\tau_i)\right] d\tau_1 \ldots d\tau_\mu \tag{2.49}$$

определяет выходной сигнал элементарного звена с размерностью μ.

Введем вспомогательные функции

$$y_\mu(t_1, \ldots, t_\mu) = \underbrace{\int_0^t \cdots \int_0^t}_{\mu} g_\mu(t-\tau_1, \ldots, t-\tau_\mu) \times$$

$$\times x(\tau_1, \ldots, \tau_\mu)\, d\tau_1 \ldots d\tau_\mu, \tag{2.50}$$

где $x(\tau_1, \ldots, \tau_\mu) = \prod_{i=1}^{\mu} x(\tau_i)$. Из выражений (2.49) и (2.50) следует, что $y_\mu(t) = y_\mu(t, \ldots, t)$. Поскольку (2.50) представляет собой свертку функций $g(t_1, \ldots, t_\mu)$ и $x(t_1, \ldots, t_\mu)$, то, применив многомерное преобразование Лапласа, получим

$$W_\mu(p_1, \ldots, p_\mu) = Y_\mu(p_1, \ldots, p_\mu)/X(p_1 \ldots, p_\mu), \tag{2.51}$$

где $X(p_1, \ldots, p_\mu) = X(p_1) \ldots X(p_\mu)$, а $W_\mu(p_1, \ldots, p_\mu)$ представляет собой изображение по Лапласу импульсной характеристики $g_\mu(t_1, \ldots, t_\mu)$. Выражение (2.51) показывает, что модель, описываемую рядом Вольтерра (1.34), можно характеризовать последовательностью передаточных функций $W_1(p_1)$, $W_2(p_1, p_2)$, $\ldots$, $W_\mu(p_1, \ldots, p_\mu)$, $\ldots$, каждая из которых определяет динамические свойства соответствующего элементарного звена. Как и для линейных систем, путем замены переменных $p_\mu = j\omega_\mu$ можно перейти к описанию свойств нелинейных аналоговых устройств с сосредоточенными параметрами в частотной области с помощью комплексных коэффициентов преобразования $K_1(j\omega_1)$, $\ldots$, $K_\mu(j\omega_1, \ldots, j\omega_\mu)$ и соответствующих АЧХ и ФЧХ.

Нелинейные дискретные средства измерений с сосредоточенными параметрами. Динамика этой модели может быть описана, аналогично предыдущему, с помощью дискретного ряда Вольтерра:

$$y(k\Delta t) = g_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{m_1=1, \ldots, m_\mu=k_0}^{k-1} g_\mu^{(k)}[(k-m_1)\Delta t, \ldots,$$

$$\ldots, (k-m_\mu)\Delta t] \prod_{i=1}^{\mu} x(m_i \Delta t), \tag{2.52}$$

где g_μ — импульсная характеристика размерности μ. Применение к этому выражению дискретного многомерного преобразования Лапласа позволяет ввести для этой модели, как и для предыдущей, передаточные функции различной размерности.

Нелинейные средства измерений с распределенными параметрами. Эти модели могут иметь различные формы, среди которых трудно выделить предпочтительные. Исследования средств измерений с такими моделями конкретизируются применительно к определенным типам средств измерений, и их обобщение затруднительно и малорезультативно.

2.2. ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ

Под динамическими понимаются свойства средств измерений, определяющие преобразования переменных сигналов в его измерительной цепи и в конечном счете связь сигнала на выходе с вызывающим его сигналом, обусловленным измеряемой величиной или дестабилизирующими факторами. К последним относятся помехи, внешние влияния и неинформативные параметры входного сигнала. Таким образом, можно говорить о динамических свойствах устройства по отношению к различным переменным сигналам (входному сигналу, сигналу, обусловленному измеряемой величиной, или сигналу, вызванному одним из дестабилизирующих факторов).

Строго говоря, динамическим следует называть свойство средства измерений, которое проявляется в том, что воздействие на него (входной сигнал) в какой-либо момент времени обусловливает отклик этого средства (выходной сигнал) в последующие моменты времени.

Динамические свойства средств измерений выражаются с помощью динамических характеристик. Динамической называется метрологическая характеристика устройства, отражающая связь информативного параметра переменного выходного сигнала с информативным или неинформативным параметром входного сигнала или влияющей величиной. Характеристики можно разделить, по отношению к тем или иным параметрам входного сигнала, на основные и дополнительные, а по принципу полноты — на полные и частные.

Основные характеристики отражают связь информативного параметра выходного сигнала устройства с изменяющейся измеряемой величиной, дополнительные — изменение выходного сигнала в зависимости от изменения влияющей величины или неинформа-

тивного параметра входного сигнала, например температуры окружающей среды, напряжения питания, сопротивления нагрузки, частоты переменного тока при измерении его амплитуды. По существу дополнительная характеристика представляет собой динамическую функцию влияния данной влияющей величины (или неинформативного параметра). Действительно, влияющая величина в зависимости от скорости своего изменения может оказывать на динамические свойства средства измерений статическое или динамическое воздействие. В последнем случае происходит дополнительная «динамическая» деформация выходного сигнала устройства. Дополнительные характеристики по отношению к неинформативным параметрам входного сигнала часто существенны и для средств, предназначенных для статических измерений. Например, при измерениях действующего напряжения синусоидального тока таким параметром является частота, обусловливающая так называемую частотную погрешность вольтметра.

Полной динамической характеристикой называется такая, которая однозначно определяет изменение информативного параметра выходного сигнала устройства при любом изменении во времени информативного или неинформативного параметра входного сигнала или влияющей величины. Полная характеристика либо сама представляет собой оператор, либо при известной его форме полностью его определяет. Таким образом, конкретные характеристики связаны с определенными формами уравнения связи, рассмотренными в § 2.1. Так, например, для линейных аналоговых устройств с сосредоточенными параметрами полными характеристиками являются:

дифференциальное уравнение (структура и коэффициенты);

передаточная функция;

импульсная характеристика;

переходная характеристика;

совокупность амплитудно-частотной и фазочастотной характеристик (АЧХ и ФЧХ).

Частной динамической характеристикой называется такая, которая представляет собой параметр или функционал полной характеристики устройства. Примерами частных характеристик служат:

время установления показаний;

ширина полосы пропускания частот при заданном постоянстве АЧХ и нелинейности ФЧХ (для пневмоэлектрического преобразователя — ГОСТ 16521—74);

параметры переходной характеристики: время нарастания, выброс, неравномерность вершины (для электронно-лучевого осциллографа — по ГОСТ 22737—77).

Частная характеристика, в отличие от полной, отражает не всю совокупность динамических свойств устройства, а лишь ее часть, поэтому она не может быть использована для точного априорного оценивания и для коррекции динамических погрешностей (см. гл. 4). Она позволяет решать только задачи сравнения и, в определенных случаях, выбора средства измерений требуемой точности. Главное назначение частных характеристик при их нормировании (см. § 2.4) заключается в обеспечении единообразия средств измерений данного типа. С точки зрения потребителя этих средств наиболее важной формой частной характеристики является предел допускаемой динамической погрешности средства измерений для заданной совокупности входных сигналов. Привлекательность такой характеристики основана на том, что она позволяет наиболее просто выбирать устройство для измерений с требуемой точностью и (или) оценивать погрешности проведенных измерений. Основной задачей при применении средств измерений, у которых нормирована такая характеристика, является установление (проверка) того факта, что реальный входной сигнал входит в заданную совокупность. С этой точки зрения использование таких средств динамических измерений аналогично использованию средств статических измерений, у которых нормированы пределы допускаемых основной и дополнительных погрешностей для заданного диапазона измерений. Также весьма полезной частной характеристикой, широко используемой в практике нормирования, является зависимость предела динамической погрешности средства измерений от характеристического параметра входного сигнала известной формы. Примером такого рода служит зависимость погрешности измерений пикового ударного ускорения от длительности импульса ускорения, называемая ударным спектром [58].

2.3. ВЗАИМОСВЯЗЬ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК

Уравнения динамики средств измерений, рассмотренные в § 2.1, вообще говоря, связаны между собой, что обусловливает взаимосвязь соответствующих этим уравнениям характеристик. Рассмотрим формы указанной взаимосвязи для различных моделей устройств, а также соотношения между приведенными в § 2.1 «каноническими» характеристиками и некоторыми распространенными их представлениями.

Начнем с линейного аналогового устройства с сосредоточенными параметрами, исходной характеристикой которого является дифференциальное уравнение (1.31) или линейный дифференциальный оператор

$$\mathbf{D} : \{d/dt;\ a_i,\ i = 1, \ldots,\ n;\ b_k,\ k = 1, \ldots,\ m\}.$$

Его связь с оператором, действующим в комплексной области, устанавливается с помощью преобразования Лапласа, которое приводит к выражению (2.23). Это выражение содержит передаточную функцию (2.25), которая при нулевых начальных условиях в соответствии с (2.24) сама может рассматриваться как оператор. Поскольку преобразование Фурье для абсолютно интегрируемых функций может рассматриваться как предельный случай преобразования Лапласа при $\sigma \to 0$, то формально получается с помощью предельного перехода: $W(j\omega) = \lim_{\sigma \to 0} W(p)$.

Как видно из выражения (2.25), на практике $W(j\omega)$ может быть получена подстановкой $W(j\omega) = W(p)|_{p=j\omega}$. Преобразование Лапласа свертки двух функций равно произведению изображений этих функций, поэтому из (1.28) получаем

$$Y(p) = K\mathbf{L}\{g(t)\}\, X(p). \tag{2.53}$$

Сравнение выражений (2.53) и (2.24) показывает, что передаточная функция средства измерений представляет собой преобразование Лапласа его импульсной характеристики:

$$W(p) = \mathbf{L}\{g(t)\} = \int_0^\infty g(t) \exp(-pt)\, dt.$$

Аналогично, комплексная частотная характеристика средства измерений есть Фурье-изображение его импульсной характеристики:

$$W(j\omega) = \mathbf{F}\{g(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \exp(-j\omega t)\, dt.$$

Связь импульсной и переходной характеристик устанавливается с помощью выражений (2.4) и (2.6).

Соотношение (2.25) позволяет получить общее выражение для импульсной характеристики рассматриваемого устройства. Представим $W(p)$ в виде отношения полиномов: $W(p) = Q(p)/P(p)$, а полином, стоящий в знаменателе — в виде произведения: $P(p) = (p+\alpha_1)^{m_1} \ldots (p+\alpha_n)^{m_n}$, где $\alpha_i \neq \alpha_k$, если $i \neq k$. Поскольку в (2.25) показатели m и n связаны неравенством $m<n$, то степень полинома $Q(p)$ не превышает $m_1 + \ldots + m_n$. При этом из таблиц преобразования Лапласа [6] находим

$$g(t) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m_k} \frac{\Phi_{kl}(-\alpha_k)}{(m_k - l)!\,(l-1)!}\, t^{m_k - l} e^{-\alpha_k t}, \tag{2.54}$$

где

$$\Phi_{kl}(p) = \frac{d^{l-1}}{dp^{l-1}}\left[\frac{Q(p)}{P_k(p)}\right]; \quad P_k(p) = \frac{P(p)}{(p+\alpha_k)^{m_k}}.$$

Из выражений (2.4) и (2.54) следует, что

$$h(t) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m_k} \frac{\Phi_{kl}(-\alpha_k)}{(l-1)!} \times$$

$$\times \left[\frac{1}{\alpha_k^{m_k - l + 1}} - e^{-\alpha_k t} \sum_{i=0}^{m_k - l} \frac{1}{(m_k - l - i)!\,\alpha_k^{i+1}}\, t^{m_k - l - i}\right].$$

Конкретные выражения $g(t)$ и $h(t)$ для типовых динамических звеньев 2- и 3-го порядков приведены в табл. 2.1. Выражения для более простых звеньев получаются из табличных подстановкой соответствующих коэффициентов. Здесь же содержатся выражения для АЧХ и ФЧХ типовых звеньев.

Для средств измерений, представляющих собой минимально-фазовые системы, т. е. таких, у которых передаточная функция $W(p)$ не имеет нулей в правой полуплоскости p, АЧХ и ФЧХ однозначно связаны между собой парой преобразований Гильберта, которые удобно представить в форме с интегрированием на полуоси:

$$\Phi(\omega) = \frac{2\omega}{\pi} \int_0^\infty \frac{\ln[A(\omega)/a]}{\nu^2 - \omega^2}\, d\nu; \quad \ln A(\omega) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\nu\Phi(\nu)}{\nu^2 - \omega^2}\, d\nu,$$

где a — произвольная постоянная, определяющая масштаб АЧХ.

Из общих свойств преобразования Гильберта [36] следует, что на интервалах частоты ω со слабым изменением АЧХ $A(\omega)$ ФЧХ $\Phi(\omega)$ изменяется почти линейно. Значительным (резким) изменениям $A(\omega)$ соответствуют нелинейные участки изменений $\Phi(\omega)$. Экстремумам $A(\omega)$ отвечают нули $\Phi(\omega)$, причем в точках максимумов $A(\omega)$ $d\Phi(\omega)/d\omega < 0$, т. е. наклон ФЧХ отрицателен, а в точках минимумов $d\Phi(\omega)/d\omega > 0$, т. е. наклон ФЧХ положителен.

У неминимально-фазовых средств измерений, у которых $W(p)$ имеет нули в правой полуплоскости, отсутствует связь между АЧХ и ФЧХ. Это позволяет изменять ФЧХ (в частности, ее наклон) при неизменной АЧХ. Подобные системы используются в качестве корректирующих, а также в качестве устройств задержки. Поскольку задержка сигнала на частоте ω [17] $t_0(\omega) = |d\Phi(\omega)/d\omega|$, то, сформировав при постоянной в нужном диапазоне частот АЧХ $A(\omega)$ линейно изменяющуюся ФЧХ $\Phi(\omega) = -t_з\omega$, получим звено чистого запаздывания. Это звено имеет передаточную функцию $W(p) = \exp(-t_з p)$ и осуществляет задержку сигнала на время $t_з$ без искажения его формы. Заметим, что в работе [17] минимально-фазовая система определена как система, из ФЧХ которой изъяты все составляющие, не связанные с АЧХ. Такое определение позволяет избежать противоречия между словом «минимальный» и тем фактом, что исключение нулей передаточной функции системы приводит к увеличению ее аргумента, т. е. увеличению фазы выходных сигналов системы.

Для практических расчетов более удобно следующее выражение ФЧХ минимально-фазовой системы через АЧХ [69]:

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d[\ln KA(\omega)]}{d\lambda} \ln \operatorname{cth}\left|\frac{\lambda}{2}\right| d\lambda, \tag{2.55}$$

где $\lambda = \ln(\nu/\omega)$. Выражение (2.55) показывает, что фаза при любой частоте пропорциональна среднему взвешенному значению производной от логарифмической АЧХ. Поскольку $\ln \operatorname{cth} |\lambda/2| =$

Соотношения для пересчета полных дина мических характеристик средств измерений

Динамическая характеристика или коэффициент	Аналитические выражения полных и формулы для пересчета их динамических характеристик $h(t)$, $g(t)$, $A(z)$, $\Phi(z)$ коэффициентов через коэффициенты $W(p)$ для				
	$W(p)=\frac{1}{Tp+1}$	$W(p)=\frac{T_4^2p^2+T_3p+1}{(T_1p+1)^2(T_2p+1)}$ $T_1>0;\ T_2,\ T_3,\ T_4\geqslant 0$	$W(p)=\frac{T_3^2p^2+T_2p+1}{(T_1p+1)^3}$ $T_1>0;\ T_2,\ T_3\geqslant 0$	$W(p)=\frac{T_5^2p^2+T_4p+1}{(T_1p+1)(T_2p+1)(T_3p+1)}$ $T_1>T_2>0;\ T_2>T_3>0;\ T_4,\ T_5\geqslant 0$	$W(p)=\frac{T_5^2p^2+T_4p+1}{(T_1^2p^2+2\gamma T_1p+1)(T_3p+1)}$ $T_1>0;\ 0<\gamma<1;\ T_3,\ T_4,\ T_5\geqslant 0$
$h(t)$	$1-e^{-t/T}$	$1-(D_0+D_1t)e^{-t/T_1}-E_0e^{-t/T_2}$	$1-(1+D_1t+D_2t^2)\times e^{-t/T_1}$	$1-D_0e^{-t/T_1}-E_0e^{-t/T_2}-F_0e^{-t/T_3}$	$1-D_0(D_1\sin\omega t+D_2\cos\omega t)\times e^{-\gamma t/T_1}-E_0e^{-t/T_3};$ $\omega=\sqrt{1-\gamma^2}/T_1$
$g(t)$	$A_0e^{-t/T}$	$(A_0+A_1t)e^{-t/T_1}+B_0e^{-t/T_2}$	$(A_0+A_1t+A_2t^2)\times e^{-t/T_1}$	$A_0e^{-t/T_1}+B_0e^{-t/T_2}+\frac{F_0}{T_3}e^{-t/T_3}$	$A_0(A_1\sin\omega t+A_2\cos\omega t)\times e^{-\gamma t/T_1}+\frac{E_0}{T_3}e^{-t/T_3};$ $\omega=\sqrt{1-\gamma^2}/T_1$
D_0	—	$\frac{T_1^2-T_4^2+T_2(T_3-2T_1)}{(T_1-T_2)^2}$	—	$\frac{T_5^2+T_1(T_1-T_4)}{(T_3-T_1)(T_2-T_1)}$	$\frac{1}{T_1\left[T_1^2+T_3(T_3-2\gamma T_1)\right]\sqrt{1-\gamma^2}}$
D_1	—	$\frac{T_4^2+T_1(T_1-T_3)}{T_1^2(T_1-T_2)}$	$\frac{T_1^2-T_3^2}{T_1^3}$	—	$\gamma T_1(T_1^2+T_3T_4+T_5^2)-T_1^2\times(T_4-T_3)-T_3T_5^2-2\gamma^2T_1^2T_3$
D_2	—	—	$\frac{\left[T_3^2+T_1(T_1-T_2)\right]}{(2T_1^4)}$	—	$T_1\sqrt{1-\gamma^2}(T_1^2-T_5^2+T_3T_4-2\gamma T_1T_3)$
E_0	—	$\frac{T_4^2+T_2(T_2-T_3)}{(T_1-T_2)^2}$	—	$\frac{T_5^2+T_2(T_2-T_4)}{(T_1-T_2)(T_3-T_2)}$	$\frac{T_5^2+T_3(T_3-T_4)}{T_1^2+T_3(T_3-2\gamma T_1)}$
F_0	—	—	—	$\frac{T_5^2+T_3(T_3-T_4)}{(T_1-T_3)(T_2-T_3)}$	—
A_0	$1/T$	D_0/T_1-D_1	$-D_1+1/T_1$	D_0/T_1	D_0/T_1
A_1	—	D_1/T_1	D_1/T_1-2D_2	—	$\gamma D_1+D_2\sqrt{1-\gamma^2}$
A_2	—	—	D_2/T_1	—	$\gamma D_2-D_1\sqrt{1-\gamma^2}$
B_0	—	$E_0/T_2,\ T_2>0$	—	E_0/T_2	—

Динамическая характеристика или коэффициент	Аналитические выражения полных и формулы для пересчета их		
	$W(p)=\frac{1}{Tp+1}$	$W(p)=\frac{T_4^2p^2+T_3p+1}{(T_1p+1)^2(T_2p+1)}$ $T_1>0;\ T_2,\ T_3,\ T_4\geqslant 0$	$W(p)=\frac{T_3^2p^2+T_2p+1}{(T_1p+1)^3}$ $T_1>0;\quad T_2,\ T_3\geqslant 0$
$A(z)$			$\sqrt{\left[B_1^2z^2+\left(1+B_3^2z^2\right)^2\right]}/$
$\Phi(z)$			$\operatorname{arctg}\left[z\left(C_1+C_2z^2-C_3z^4\right)/\right.$
z	$2\pi fT$	$2\pi fT_1$	$2\pi fT_1$
B_1	1	T_3/T_1	T_2/T_1
B_2	0	T_2/T_1	1
B_3	0	T_4/T_1	T_3/T_1
Γ	1	1	1
C_1			B_1-
C_2			$C_3-C_1-2\Gamma\times$
C_3			
C_4			$B_1B_2-\left(B_3^2+1\right)+$
C_5			B_3^2-

$= \ln|(\nu+\omega)/(\nu-\omega)|$, то влияние производной (наклона) логарифмической АЧХ при частоте ω_1 на значение ФЧХ при частоте ω обратно пропорционально логарифму разности $|\omega_1-\omega|$.

Вещественная и мнимая части комплексного коэффициента преобразования связаны с АЧХ и ФЧХ следующими формулами:

$$\operatorname{Re}[K(j\omega)]=KA(\omega)\cos\Phi(\omega);$$
$$\operatorname{Im}[K(j\omega)]=KA(\omega)\sin\Phi(\omega). \qquad (2.56)$$

Из выражений (2.56), (2.57) следует, что

$$A(\omega)=\sqrt{\{\operatorname{Re}[K(j\omega)]\}^2+\{\operatorname{Im}[K(j\omega)]\}^2}/K;$$
$$\Phi(\omega)=\operatorname{arctg}\{\operatorname{Im}[K(j\omega)]/\operatorname{Re}[K(j\omega)]\}.$$

динамических характеристик $h(t)$, $g(t)$, $A(z)$, $\Phi(z)$ коэффициентов через коэффициенты $W(p)$ для

$W(p)=\frac{T_5^2p^2+T_4p+1}{(T_1p+1)(T_2p+1)(T_3p+1)}$ $T_1>T_2>0;\ T_2>T_3\geqslant 0;\ T_4,\ T_5\geqslant 0$	$W(p)=\frac{T_5^2p^2+T_4p+1}{(T_1^2p^2+2\gamma T_2p+1)(T_3p+1)}$ $T_1>0;\quad 0<\gamma<1;\ T_3,\ T_4,\ T_5\geqslant 0$
$/\{(1+B_2^2z^2)\left[(1-z^2)^2+4\Gamma^2z^2\right]\}$	
$/(1+C_4z^2+C_5z^4)]$	
$2\pi f\sqrt{T_1T_2}$	$2\pi fT_1$
$T_4/\sqrt{T_1T_2}$	T_4/T_1
$T_3/\sqrt{T_1T_2}$	T_3/T_1
$T_5/\sqrt{T_1T_2}$	T_5/T_1
$(T_1+T_2)/(2\sqrt{T_1T_2})$	γ
$B_2-2\Gamma$	
$\times(1-B_3^2+B_1B_2)$	
$B_2B_3^2$	
$+2\Gamma(B_1-B_2)$	
$-B_1B_2+2\Gamma C_3$	

Временные характеристики выражаются через вещественную и мнимую части комплексного коэффициента преобразования:

$$g(t)=\frac{2}{\pi K}\int_0^\infty \operatorname{Re}[K(j\omega)]\cos\omega t d\omega =$$
$$=-\frac{2}{\pi K}\int_0^\infty \operatorname{Im}[K(j\omega)]\sin\omega t d\omega; \qquad (2.57)$$
$$h(t)=\frac{2}{\pi K}\int_0^\infty \frac{\operatorname{Re}[K(j\omega)]}{\omega}\sin\omega t d\omega=\operatorname{Re}[W(j\omega)]_{\omega=0}+$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{Im}[W(j\omega)]}{\omega}\cos\omega t d\omega. \qquad (2.58)$$

Из выражения (2.58) следует: $h\left(\frac{t}{\alpha}\right)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{Re}[K(j\alpha\omega)]}{\omega}\sin\omega t d\omega$,

т. е. более широкополосной вещественной частотной характеристике соответствует более быстро устанавливающаяся переходная характеристика. Также полезным может оказаться свойство линейности вещественной частотной характеристики: если $\operatorname{Re}[W(j\omega)]=\sum_{i=1}^{n} RW_i(\omega)$, то $h(t)=\sum_{i=1}^{n} h_i(t)$, причем $h_i(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} RW_i(\omega)\times\frac{\sin\omega t}{\omega}d\omega$.

Из общих свойств преобразования Лапласа следует:

$$\lim_{t\to 0} h(t)=\lim_{p\to\infty} W(p)=\lim_{\omega\to\infty}\operatorname{Re}[K(j\omega)]/K;$$

$$\lim_{t\to\infty} h(t)=\lim_{p\to 0} W(p)=\lim_{\omega\to 0}\operatorname{Re}[K(j\omega)]/K.$$

Поскольку для физически реализуемых систем порядок числителя передаточной функции меньше порядка знаменателя, то $\lim_{\omega\to\infty}\operatorname{Re}[K(j\omega)]=0$ и переходная характеристика в нуле равна нулю.

2.4. НОРМИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ

Нормирование предопределяет свойства средств измерений и поэтому давно привлекает к себе внимание специалистов. Международная торговля, обмен научной информацией и другие виды контактов между странами сделали необходимыми унификацию методов нормирования свойств средств измерений и самих норм в международном масштабе. Этой цели посвящен ряд рекомендаций МОЗМ и МЭК, например [97, 98]. Ведется работа по созданию рекомендаций и стандартов в этой области и в рамках СЭВ. Содержание международных рекомендаций учитывается в стандартах СССР (например, ГОСТ 8.401—80).

Практика создания и эксплуатации средств измерений выработала принципы нормирования, которые были обобщены метрологами [32]. Эти принципы могут быть сформулированы следующим образом:

нормировать следует все свойства средств измерений, влияющие на точность результатов измерений;

каждое из свойств нужно нормировать по отдельности;

нормирование свойств должно позволять выбирать средство измерений и оценивать погрешности результатов измерений;

нормирование должно давать возможность экспериментально проверить соответствие свойств каждого отдельного средства измерений установленным нормам;

способы нормирования должны выбираться так, чтобы проверка соответствия средства измерений установленным нормам и применение его были возможно более простыми.

Способы нормирования свойств средств измерений, предназначенных для применения в составе других устройств (в частности, в составе измерительных установок и систем), должны позволять рассчитывать метрологические характеристики последних или оценивать погрешности выполняемых измерений.

Нормирование свойств средств измерений и проверка соответствия этих свойств нормам при выпуске из производства и во время эксплуатации дает возможность обеспечить необходимое метрологическое единообразие средств одного типа и сделать их взаимозаменяемыми. Кроме того, создается возможность сравнивать между собой устройства различных конструктивных исполнений.

Для применения средств измерений в динамическом режиме необходимо знать их динамические свойства, которые выражаются с помощью характеристик, позволяющих выбирать средства для измерений с требуемой точностью, априорно и апостериорно оценивать, а также корректировать динамические погрешности измерений. Знание динамических характеристик требуется также для статических измерений с переменными входными сигналами. Например, при измерениях на переменном токе на основе динамических характеристик устанавливают дополнительные (частотные) погрешности и формулируют условия применения средств измерений.

Несмотря на важность для практики динамических характеристик, вопросам их нормирования длительное время не уделялось должного внимания. Анализ способов их нормирования в стандартах на средства измерений позволил обнаружить существенные недостатки. Так, например, ГОСТ 9999—79 «Приборы электроизмерительные самопишущие прямого преобразования. Общие технические условия» устанавливает лишь верхние границы первого переброса и времени успокоения подвижной части приборов. Такой способ нормирования не позволяет использовать самопишущие приборы в динамическом режиме, т. е. по их прямому назначению.

Классический пример измерительного преобразователя, предназначенного для работы в динамическом режиме,— гальванометр светолучевого осциллографа. Принято считать его удовлетворительной моделью передаточную функцию 2-го порядка с постоянным числителем. При этом динамические свойства гальванометра можно полностью регламентировать указанием норм на его собственную частоту и степень успокоения. Такой способ был удовлетворительным до тех пор, пока конструкции гальванометров обеспечивали гладкую амплитудно-частотную характеристику и названная выше модель хорошо соответствовала объекту. Изменения конструкции гальвано-

метров, вызванные стремлением расширить полосу пропускания частот, привели к тому, что на амплитудно-частотной характеристике появились отдельные небольшие выбросы, соответствующие частным резонансам конструкции Поэтому упомянутая модель в ряде случаев уже не соответствует реальным свойствам гальванометра. В силу этих причин уже недостаточно нормирования упомянутых двух параметров и необходимо дополнительно регламентировать допускаемые искажения формы полной динамической характеристики. Нужно подчеркнуть, что выбросам на амплитудно-частотной характеристике соответствуют значительные искажения фазочастотной характеристики, а последними, как иллюстрируют примеры в [10, 21], в значительной степени определяются динамические погрешности осциллографических измерений В настоящее время для гальванометров в соответствии с ГОСТ 11013—81 нормируются собственная частота и вместо степени успокоения — верхняя граница рабочей полосы частот при заданном пределе допускаемой неравномерности АЧХ. Последнее могло бы служить и удобной частной динамической характеристикой гальванометра. Однако для этого необходимо, чтобы гальванометр имел линейную ФЧХ, линейность же этой характеристики стандартом не регламентируется, и, по-видимому, обеспечивается не всегда Об этом можно судить хотя бы по тому, что предыдущим стандартом (ГОСТ 11013—64) предусматривалось нормирование искажений АЧХ (в форме интегрального коэффициента и максимального отклонения действительной характеристики от номинальной).

Результаты анализа выявили необходимость установить общие положения, которые могли бы служить основой для решения вопросов нормирования динамических свойств типов средств измерений в различных областях измерений. Первый шаг в этом направлении был сделан ГОСТ 8.009—72, в котором динамические характеристики включены в число метрологических характеристик средств измерений и дан перечень основных нормируемых динамических характеристик.

Следующий шаг должен был состоять в установлении правил выбора нормируемых характеристик и способов нормирования. Решению этих задач посвящен ГОСТ 8.256—77 ГСИ. Нормирование и определение динамических характеристик линейных аналоговых средств измерений. Основные положения. Стандарт устанавливает классификацию динамических характеристик, правила выбора их для нормирования, формы представления и способы нормирования, а также основные требования к методам экспериментального определения этих характеристик.

Содержание стандарта базируется на положениях, сформулированных в статье [4]. Нормирование есть волевой акт, который должен закрепить компромисс между стремлениями к максимально подробному описанию свойств средств измерений и к максимально простым процедурам определения и проверки соответствующих характеристик. Естественный предел детальности описания определяется нестабильностью характеристик, простоты — характеристиками, обеспечивающими только однородность устройств по типу.

Компромисс должен достигаться путем нормирования максимально простых характеристик, обеспечивающих возможность применения устройства по назначению.

Нормирование динамических свойств средств измерений включает в себя: выбор той или иной динамической характеристики в качестве нормируемой, установление номинальной характеристики

и допустимых отклонений от нее. Выбор в качестве нормируемой полной или частной динамической характеристики и конкретный ее вид должны определяться на основе сформулированных выше принципов, исходя из назначения средства измерений. Следует признать разумным стремление так нормировать характеристики средств измерений, чтобы при их применении были заранее известны пределы динамических погрешностей. С этой точки зрения нормирование пределов допускаемых погрешностей, вообще говоря, предпочтительнее нормирования характеристик, поскольку такой способ максимально упрощает обработку данных и поэтому наиболее полно отвечает сформулированным выше требованиям к нормированию. Однако погрешности средств динамических измерений — понятие условное, так как погрешности эти зависят как от динамических свойств средств измерений, так и от характера изменения входного сигнала. Поэтому для средств динамических измерений сложнее нормировать пределы допускаемых погрешностей, чем характеристики.

В стандарте различают показывающие приборы, измерительные преобразователи и регистрирующие приборы, характеристики делят на полные и частные (см. § 2.2). Поскольку показывающие приборы используются в статическом режиме, то стандарт регламентирует нормирование для них времени установления показаний. Эта частная динамическая характеристика определяет условие правильного применения прибора. Аналогично должны нормироваться динамические свойства измерительных преобразователей и регистрирующих приборов, предназначенных для применения в режиме, при котором изменениями измеряемой величины и динамическими погрешностями можно пренебречь У средств измерений постоянных величин при переменном входном сигнале возникает дополнительная погрешность, обусловленная динамическими свойствами средства по отношению к входному сигналу. Выработанный практикой подход заключается в следующем. Во входном сигнале выделяются неинформативные параметры, определяющие характер его изменения во времени (особенности формы сигнала, его частотных свойств и т. п.). Указанная выше дополнительная погрешность разделяется на составляющие, обусловленные в отдельности каждым параметром, например, у импульсного вольтметра — погрешности от длительности импульса, его фронта и среза, погрешность от скважности импульсов и т. п. Отдельная составляющая дополнительной погрешности нормируется либо путем указания пределов, либо в виде зависимости от неинформативного параметра (функции влияния), позволяющей вносить поправки при измерениях Стандарт закрепляет этот подход.

Одним из важнейших положений стандарта является требование нормировать полные динамические характеристики измерительных преобразователей переменных сигналов и приборов, предназначенных для регистрации изменяющихся величин. Реализация этого положения необходима для эффективного применения многих существующих и вновь разрабатываемых устройств по их назначению.

Для средств динамических измерений, предназначенных для применения с входными сигналами определенной формы, наиболее удобным для потребителей способом нормирования динамических свойств является указание норм на зависимость динамической погрешности от неинформативного параметра входного сигнала. Указанный способ предусмотрен стандартом как обеспечивающий мак-

симальную простоту оценивания динамических погрешностей измерений.

Стандартом также предусмотрено нормирование влияний величин, характеризующих условия измерений, а также неинформативных параметров входного сигнала, на нормированные динамические характеристики. Это относится к устройствам, для которых установлены нормальная и рабочая области применения.

При динамических измерениях особую важность приобретает вопрос о взаимодействии средства измерений с источником входного сигнала и с устройствами, подключенными к выходу этого средства (с нагрузкой). Устройства, с которыми связано средство измерений, могут существенно влиять на его динамические свойства: сужать полосу пропускания, вносить нелинейные искажения в фазовую характеристику и т. п. В стандарте указано на необходимость регламентировать подобные влияния путем нормирования соответствующих характеристик.

Один из разделов стандарта посвящен формам представления и способам нормирования характеристик. В целом в качестве предпочтительной формы представления динамических характеристик в нормативно-технической документации указана аналитическая форма, т. е. указание вида функции, а также либо номинальных значений коэффициентов и пределов допускаемых отклонений от этих значений, либо границ допускаемых значений коэффициентов. Для дифференциального уравнения и передаточной функции аналитическая форма является, соответственно, единственной и основной формой. Для полных временных динамических характеристик — импульсной и переходной — аналитическая форма предпочтительна в случае, если эти характеристики содержат не более двух коэффициентов (кроме статического коэффициента преобразования). При этом подразумевается, что использование многопараметрических функций затруднительно, если только не используется ЭВМ, поскольку в последнем случае аналитическая форма теряет преимущества по сравнению с табличной и графической. Однако существующие методы понижения порядка дифференциального уравнения [93] почти всегда позволяют обойтись уравнением не выше 3-го порядка. Этот вывод подтверждается опытом исследования и применения устройств автоматического управления [73].

Частотные характеристики обладают большой наглядностью, и их обычно представляют графически. Однако для однопараметрических частотных характеристик аналитическая форма предпочтительна, что и установлено стандартом.

Основными способами нормирования динамических характеристик — параметров и функций — являются соответственно: а) указание номинальных значений (номинальных функций) и пределов допускаемых отклонений (границ допускаемых отклонений) и б) указание пределов допускаемых значений параметров (граничных функций).

Поскольку вопросы нормирования и определения динамических характеристик средств измерений неразрывно связаны, то стандарт содержит раздел, содержащий основные требования к методам их экспериментального определения. Центральными положениями этого раздела являются указания о предпочтительности прямых методов определения полных характеристик и допустимости упрощенных способов их контроля. Введение в стандарт первого из этих положений обусловлено тем, что задача определения полных характеристик весьма сложна и в общем случае относится к числу некорректно поставленных обратных задач математической физики [71]. При использовании характеристических испытательных сигналов — ступени, дельта-импульса и синусоидальных — отклик исследуемого устройства совпадает, соответственно, с переходной, импульсной и частотной характеристиками, что позволяет избежать некорректности при обработке экспериментальных данных. Поэтому прямые методы, основанные на использовании стандартных сигналов, наиболее удобны для измерительной практики.

Контроль динамических характеристик, постоянство которых обеспечивается принципом действия и конструкцией устройства может, а следовательно, должен быть упрощенным. Под упрощенным понимается контроль более простой характеристики, чем нормированная, или отдельных параметров последней.

Поскольку, как было отмечено выше, в нормировании динамических свойств средств измерений имеются серьезные недостатки, то распространение требований стандарта сразу на все средства привело бы к необходимости переработки большого объема документов, в том числе и на устройства, морально устаревшие и малоперспективные. Поэтому внедрение стандарта осуществляется в два этапа, на первом из которых в течение 5 лет с момента введения в действие он распространялся лишь на вновь разрабатываемую документацию. После окончания первого этапа, т. е. с 1 июля 1983 г., стандарт распространяется на все линейные аналоговые средства измерений с сосредоточенными параметрами.

2.5. ПРИМЕРЫ. МОДЕЛИ СРЕДСТВ ДИНАМИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ, МЕХАНИЧЕСКИХ И ТЕПЛОВЫХ ВЕЛИЧИН

Умножитель частоты на основе импульсно-фазовой автоподстройки [76]. В измерительных устройствах для прецизионных измерений частоты (сличений образцовых мер частоты) с целью кратного преобразования измеряемых частот наряду с умножителями используются системы импульсно-фазовой автоподстройки частоты (см. рис. 2.1). Такая система в отличие от обычной системы фазовой автоподстройки работает в импульсном режиме и содержит вместо фазового (аналогового) импульсно-фазовый (дискретный) детектор. Опорный сигнал на одном из выходов детектора представляет собой последовательность импульсов с длительностью θ и периодом $T_{0\,г}$

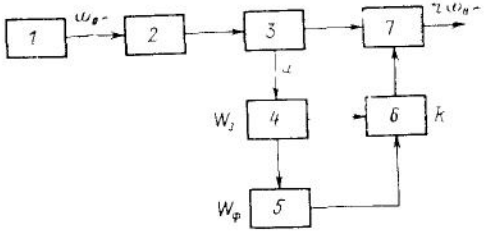


Рис. 2.1. Структурная схема умножителя частоты с импульсно-фазовой автоподстройкой

1 — опорный генератор, *2* — формирователь, *3* — импульсно-фазовый детектор, *4* — запоминающее устройство, *5* — фильтр нижних частот, *6* — управляющий элемент, *7* — подстраиваемый генератор

Уравнение системы в операторной форме (с использованием дискретного преобразования Лапласа) имеет вид:

$$\varphi(q) + \frac{kVT_{0\,г}c_{00}}{\exp(q) - 1} \times$$

$$\times \int_0^1 W(q, \varepsilon) F[\varphi(n)]\, d\varepsilon = \Omega_н T_{0\,г} \sum_{n=0} ne^{-qn},$$

где $W(q, \varepsilon)$ — дискретная передаточная функция, определяемая с помощью

соотношений:

$$W(q, \varepsilon) = \begin{cases} 1 + \sum_{\nu=1}^{l} \frac{c_{\nu 0}}{c_{00}} \cdot \frac{\exp(q) - \exp[q(1-\delta)]}{\exp(q) - \exp(q_\nu)} \exp(q_\nu \varepsilon), & 0 < \varepsilon < \delta, \\ \sum_{\nu=1}^{l} \frac{c_{\nu 0}}{c_{00}} \cdot \frac{\exp(q)[\exp(q_\nu \delta) - 1]}{\exp(q) - \exp(q_\nu)} \exp[q_\nu(\varepsilon - \delta)], & \delta < \varepsilon < 1, \end{cases}$$

где $c_{00} = W_0 = P(0)/Q(0)$; $c_{\nu 0} = P(q_\nu)/Q'(q_\nu)$; $W(q) = W_з(q)\, W_ф(q) = P(q)/Q(q)$; $F[\varphi(n)]$ — изображение нормированной характеристики детектора $f(\varphi)$; $q = pT_{о.г}$; $\delta = \tau/T_{о\ г}$; q_ν — корень полинома $Q(q)$.

Передаточная функция $W(q, \varepsilon)$ представляет собой отношение изображений отклонения фазы сигнала подстраиваемого генератора и отклонения фазы сигнала опорного генератора. В предположении, что система линейна, детектор и запоминающее устройство формируют импульсы прямоугольной формы с амплитудой, определяемой разностью фаз сигналов генераторов, и фильтр является пропорционально-интегрирующим, получены выражения для динамических характеристик системы.

Передаточная функция замкнутой системы имеет вид:

$$W(q, \varepsilon) = a\{[A(\varepsilon)\exp(2q) + B(\varepsilon)\exp(q) + C(\varepsilon)] \times$$
$$\times [\exp(2q) + \exp(q)\{a[1 + M - M\exp(-\alpha)] -$$
$$- 1 - \exp(-\alpha)\} + \exp(-\alpha)[1 - a(1 - M)] - aM]^{-1}\},$$

где $a = kVT_{о\ г}F'(\varphi_0)$; $A(\varepsilon) = \varepsilon + M[1 - \exp(-\alpha\varepsilon)]$; $B(\varepsilon) = 1 - \varepsilon[1 + \exp(-\alpha)] + M[2\exp(-\alpha\varepsilon) - 1 - \exp(-\alpha)]$; $C(\varepsilon) = \exp(-\alpha)(\varepsilon + M - 1) - M\exp(-\alpha\varepsilon)$; $M = (m-1)/\alpha$; $\alpha = T_{о\ г}/T$; $m = T_1/T$; T — постоянная времени фильтра.

Амплитудно-частотная характеристика замкнутой системы

$$A(\bar{\omega}) = \frac{a}{\bar{\omega}} \sqrt{\frac{(\alpha^2 + m^2\bar{\omega}^2)[1 + (1+w)^2 + w^2 - 2(1+w^2)\cos\bar{\omega} + 2w\cos 2\bar{\omega}]}{T_{о\ г}(\alpha^2 + \bar{\omega}^2)[1 + u^2 + v^2 + 2u(v+1)\cos\bar{\omega} + 2v\cos 2\bar{\omega}]}}, \quad (2.59)$$

где $u = a[M(1-w) + 1] - (1 + w)$; $v = a[M(w-1) - w] + w$; $w = \exp(-\alpha)$.

Для нестабильности фазы (частоты) подстраиваемого генератора

$$A_{п\ г}(\bar{\omega}) = \sqrt{\frac{1 + (1+w^2) + w^2 - 2(1+w)^2\cos\bar{\omega} + 2w\cos 2\bar{\omega}}{1 + u^2 + v^2 + 2u(v+1)\cos\bar{\omega} + 2v\cos 2\bar{\omega}}}. \quad (2\ 60)$$

Выражения частотных характеристик для помех, воздействующих на вход детектора и управляющего элемента, соответственно:

$$A_{п\ д}(\bar{\omega}) = \frac{k}{a} A(\bar{\omega}); \quad A_{п\ у\ э}(\bar{\omega}) = \frac{k}{\bar{\omega}} A_{п\ г}(\bar{\omega}). \quad (2.61)$$

С помощью выражений (2.59) — (2.61) могут быть рассчитаны отклики системы импульсно-фазовой автоподстройки частоты на малые детерминированные и флуктуационные помехи, воздействующие на различные элементы системы.

Вибрационный преобразователь сигналов угловой скорости [11]. Преобразователь, используемый для точных измерений малых угловых скоростей,

содержит в качестве первичного измерительного преобразователя роторный вибрационный гироскоп (см. рис. 2.2).

Уравнение движения чувствительного элемента гироскопа относительно оси растяжки имеет вид:

$$T^2\alpha + 2\beta T\alpha + \alpha = K[(\omega_x - T_1\omega_y)\sin\Omega t - (\omega_y + T_1\omega_x)\cos\Omega t], \quad (2\ 62)$$

где $T^2 = J_x/[c + (J_z - J_x)\Omega^2]$; $T_1 = J_x/[(J_z - J_y + J_x)\Omega]$; $\beta = \mu/\{2T[c + (J_z - J_y)\Omega^2]\}$; $K = \Omega(J_z - J_y + J_x)/[(c + (J_z - J_y)\Omega^2]$; ω_x, ω_y — проекции измеряемой угловой скорости основания; J_x, J_y, J_z — главные центральные моменты инерции чувствительного элемента; μ — коэффициент момента сил вязкого трения; c — коэффициент упругого восстанавливающего момента; Ω — угловая скорость рамки.

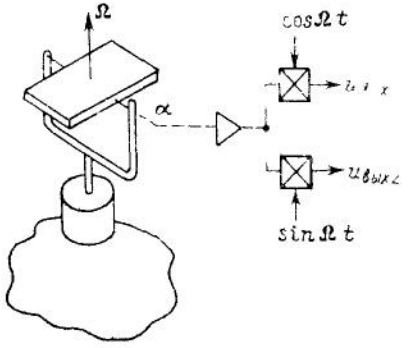


Рис. 2.2. Роторный вибрационный гироскоп

Для повышения чувствительности первичного преобразователя его применяют с резонансной настройкой, когда сопрягающая частота $T^{-1} = \sqrt{[c + (J_z - J_y)\Omega^2]/J_x}$ совпадает с частотой вращения ротора. При этом $T = 1/\Omega$; $K = (J_z - J_y + J_x)/(J_x\Omega)$; $\beta = \mu/(2J_x\Omega)$.

Структурная схема вибрационного преобразователя представлена на рис. 2.3. Механическая часть содержит амплитудный модулятор M и линейное колебательное звено с передаточной функцией $W(p)$. Входные воздействия ω_x и ω_y образуют на входе модулятора антисимметричные перекрестные

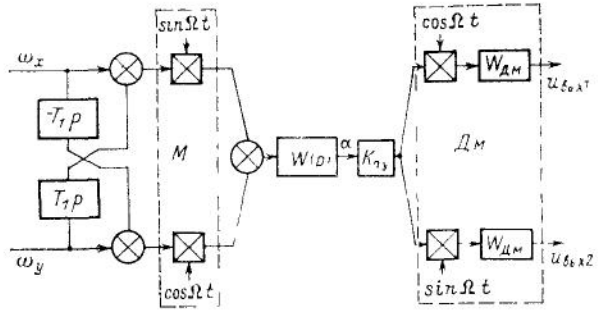


Рис. 2.3. Структурная схема вибрационного преобразователя угловой скорости

связи через дифференцирующие звенья, которые отражают отклик первичного преобразователя на угловые ускорения основания. Электрическая часть состоит из практически безынерционного преобразователя углового сигнала α в электрическое напряжение и демодулятора *Дм*, который может быть описан множительным звеном. Без учета отклика преобразователя на угловые ускорения основания правая часть выражения (2.62) при гармоническом воздействии с частотой ω_0 может быть представлена [11] как $\sin\omega_0 t \sin\Omega t = [\cos(\Omega - \omega_0)t - \cos(\Omega + \omega_0)t]/2$. Таким образом, можно считать, что на вход линейного звена воздействуют два гармонических сигнала с частотами, симметричными относительно Ω. Отклик линейного звена

$$\alpha = (R\cos\omega_0 t\cos\Omega t + \bar{R}\sin\omega_0 t\sin\Omega t + P\cos\omega_0 t\sin\Omega t + \bar{P}\sin\omega_0 t\cos\Omega t)/2, \quad (2\ 63)$$

а основной и перекрестный сигналы на выходах демодулятора

$$u_{\text{вых }1} = A_1(\omega)\sin[\omega_0 t + \Phi_1(\omega)]; \quad u_{\text{вых }2} = A_2(\omega)\sin[\omega_0 t + \Phi_2(\omega)]. \tag{2.64}$$

В выражении (2.63) обозначено: $P = \mathrm{Im}W_- - \mathrm{Im}W_+$; $\overline{P} = \mathrm{Im}W_- + \mathrm{Im}W_+$; $R = \mathrm{Re}W_- - \mathrm{Re}W_+$; $\overline{R} = \mathrm{Re}W_- + \mathrm{Re}W_+$; $W_+ = W[j(\Omega + \omega_0)]$; $W_- = W[j(\Omega - \omega_0)]$.

Из соотношений (2.63) и (2.64) получаются следующие выражения для АЧХ и ФЧХ преобразователя для основного и перекрестного сигналов:

$$A_1(\omega) = \sqrt{P^2 + R^2}; \quad \Phi_1(\omega) = \mathrm{arctg}(R/P);$$

$$A_2(\omega) = \sqrt{P^2 + \overline{R}^2}; \quad \Phi_2(\omega) = \mathrm{arctg}(P/R).$$

В предположении, что $(\omega_0/\Omega) = \nu \ll 1$; $(\Delta\Omega/\Omega) = \varepsilon \ll 1$ и статические коэффициенты преобразования модулятора и преобразователя углового сигнала $K_{\text{п м}}$, $K_{\text{п. у}}$ удовлетворяют условию $(K_{\text{п м}} K_{\text{п. у}}/4) = 1$, получены следующие выражения передаточных функций вибрационного преобразователя для основного и перекрестного сигналов:

$$W_0(p) = \frac{T_{20}p + 1}{T_0^2 p^2 + 2\gamma_0 T_0 p + 1}; \quad W_{\text{п}}(p) = \frac{T_{\text{п}}^2 p^2 + 2\gamma_{\text{п}} T_{\text{п}} p \mp 1}{T_0^2 p^2 + 2\gamma_0 T_0 p + 1}, \tag{2.65}$$

где $T_0 = 1/\left(\Omega\sqrt{\gamma^2 + \varepsilon^2}\right)$; $\gamma_0 = \gamma/\sqrt{\gamma^2 + \varepsilon^2}$; $T_{20} = (T + T_1\varepsilon)/\beta$;

$$\gamma_{\text{п}} = \gamma(1 - T_1\Omega)/\sqrt{2\varepsilon(1 - 2T_1\Omega)}; \quad T_{\text{п}} = \sqrt{(1 - 2T_1\Omega)/(2\varepsilon\Omega^2)}.$$

В формуле (2.65) знак «—» в числителе соответствует положительному сдвигу $\Delta\Omega$ несущей частоты и наоборот.

Статические коэффициенты преобразования основного и перекрестного сигналов $K_0 = \gamma/(\gamma^2 + \varepsilon^2)$, $K_{\text{п}} = \varepsilon/(\gamma^2 + \varepsilon^2)$.

В результате цифрового моделирования при изменении ε от 0 до 1 % и γ от 0,0005 до 0,002 с учетом и без учета отклика преобразователя на угловое ускорение установлено, что погрешность аппроксимации частотных характеристик в рабочем диапазоне частот не превышает по амплитуде 1—2 дБ, по фазе — 2—3° [11]. Расстройка ε не должна превышать 0,05 % несущей частоты Ω с тем, чтобы уровень перекрестного сигнала оставался малым по сравнению с основным сигналом, что необходимо для нормальной работы преобразователя.

Пленочный термоприемник. Термоприемник представляет собой первичный измерительный преобразователь сигнала температуры или скорости турбулентного потока жидкости или газа в электрический сигнал, используемый при измерениях пульсаций температуры и скорости. Преобразователь выполнен в виде тонкой металлической пленки, нанесенной на диэлектрическую подложку. В соответствии с конструкцией двухслойная модель термоприемника состоит из неограниченной пластины (пленки) и полуограниченного тела (подложка), находящихся в контакте [31]. При нахождении температурного поля модели предполагается, что задача одномерная (боковые поверхности имеют тепловую изоляцию), термические коэффициенты обоих тел известны и не зависят от температуры, температура модели одинакова и равна нулю в начальный момент времени. Начиная с момента $t > 0$ модель нагревается со стороны свободной поверхности пластины тепловым потоком $q_0 = \mathrm{const}$. Теплообмен между средой и неизолированным концом

модели происходит по закону конвекции (граничные условия третьего рода). Соответствующая краевая задача имеет вид [59]:

$$\frac{\partial\Theta_{\text{м}}}{\partial t} = a_{\text{м}}\frac{\partial^2\Theta_{\text{м}}}{\partial x^2}\ (t > 0, \quad 0 > x > -l);$$

$$\frac{\partial\Theta_{\text{д}}}{\partial t} = a_{\text{д}}\frac{\partial^2\Theta_{\text{д}}}{\partial x^2}\ (t > 0, \quad x > 0); \tag{2.66}$$

$$\Theta_{\text{м}}(x, 0) = \Theta_{\text{д}}(x, 0) = 0; \quad \Theta_{\text{д}}(\infty, t) = 0\ (t \geqslant 0); \quad \Theta_{\text{м}}(0, t) = \Theta_{\text{д}}(0, t);$$

$$\frac{\lambda_{\text{м}}}{\lambda_{\text{д}}}\cdot\frac{\partial\Theta_{\text{м}}(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial\Theta_{\text{д}}(0, t)}{\partial x}; \quad \lambda_{\text{м}}\frac{\partial\Theta_{\text{м}}(-l, t)}{\partial x} + q_0 = 0,$$

где l — толщина пластины; $\Theta_{\text{м}}$, $\Theta_{\text{д}}$ — температуры металлической пластины и диэлектрического тела, соответственно; $\lambda_{\text{м}}$ ($a_{\text{м}}$), $\lambda_{\text{д}}$ ($a_{\text{д}}$) — коэффициенты теплопроводности (температуропроводности) пластины и тела.

Решение краевой задачи (2.66) находится операционным методом [39]. В результате применения преобразования Лапласа к первым двум дифференциальным уравнениям с частными производными в выражении (2.66) получаются обыкновенные дифференциальные уравнения 2-го порядка относительно изображения искомого решения — пространственно-временного распределения температур $\Theta_{\text{м}}(x, t)$, $\Theta_{\text{д}}(x, t)$ пластины и тела. Температура контакта пластины и тела определяется как $\Theta_{\text{к}} = \Theta_{\text{д}}(0, t)$, а температура свободной поверхности пластины $\Theta_{\text{п}} = \Theta_{\text{м}}(-l, t)$.

Передаточная функция модели по температуре (скорости) [31]

$$W_1(p) = 1/\left(1 + \sqrt{T_1 p} + T_2 p\right), \tag{2.67}$$

где $T_1 = \left[\lambda_{\text{д}}/\left(\alpha\sqrt{a_{\text{д}}}\right)\right]^2$; $T_2 = \lambda_{\text{м}} l/(\alpha a_{\text{д}})$; α — коэффициент теплоотдачи.

Если толщина пленки очень мала ($l \approx 0$), то из выражения (2.67) получаем

$$W_2(p) = 1/\left(1 + \sqrt{Tp}\right), \tag{2.68}$$

где $T \equiv T_1$.

При условии $\sqrt{\omega} \leqslant \sqrt{\omega_{\text{гр}}}\, k \cdot 10^{-2}\sqrt{T_1}/T_2$ $W_2(p)$ может служить приближением $W_1(p)$ с погрешностью, не превышающей k %. Для термоприемников с платиновой пленкой толщиной 0,2—0,3 мкм, нанесенной на стеклянную основу, при $k = 5$ $\omega_{\text{гр}}$ составляет несколько килогерц.

Если термоприемник с тонкой подложкой применяется при измерениях в потоках с малым α и низкими частотами пульсаций, то в качестве его модели используется неограниченная пластина. Передаточная функция модели [31]

$$W_3(p) = \frac{\alpha}{\lambda}\cdot\frac{\left(\sqrt{p/a} - \alpha/\lambda\right) + \left(\sqrt{p/a} + \alpha/\lambda\right)\exp\left(-2\sqrt{p/\alpha}\, l\right)}{(p/a - \alpha^2/\lambda^2)\left[1 - \exp\left(-2\sqrt{p/a}\, l\right)\right]}.$$

При малых l и ω $W_3(p)$ переходит в $W_2(p)$. Для платиновых преобразователей на стеклянной подложке толщиной не менее $0{,}7 \cdot 10^{-3}$ мкм соответствующая граничная частота составляет примерно 1 Гц.

Частотные характеристики моделей (2.67) и (2.68):

$$A_1(\omega) = \left(1 + \sqrt{2z_1} + z_1 + z_2\sqrt{2z_1} + z_2^2\right)^{-1/2};$$

$$\Phi_1(\omega) = -\mathrm{arctg}\left[-\left(\sqrt{z_1/2} + z_2\right)/\left(1 + \sqrt{z_1/2}\right)\right];$$

$$A_2(\omega) = \left(1 + \sqrt{2z} + z\right)^{-1/2}; \quad \Phi_2(\omega) = \mathrm{arctg}\left[-1/\left(1 + \sqrt{2/z}\right)\right], \tag{2.69}$$

где $z_1 = \omega T_1$; $z_2 = \omega T_2$; $z \equiv z_1$.

Переходная и импульсная характеристики модели (2.68) имеют вид

$$h(t) = 1 - \mathrm{erfc}\left(\sqrt{t/T}\right)\exp(t/T);\ g(t) = (\pi T t)^{-1/2} - T^{-1}\mathrm{erfc}\left(\sqrt{t/T}\right)\exp(t/T). \quad (2.70)$$

Переходная характеристика (2 70) приведена на рис 2 4; там же представлена для сравнения переходная характеристика проволочного термоприемника, описываемого дробно-рациональной передаточной функцией Видно, что кривая (2.70) круче возрастает в начале и медленнее стремится к установившемуся значению. Это означает, что АЧХ (2 69) имеет больший уровень при высоких частотах, чем соответствующая характеристика звена с сосредоточенными параметрами Время установления переходного процесса (2 70) весьма велико: уровень 95 % от установившегося достигается за время, равное (200 ÷ 250) T. Это обстоятельство должно было служить серьезным препятствием при экспериментальном определении динамических характеристик плеиочных термоприемников с использованием ступенчатых испытательных сигналов Однако на практике для установления требуется меньшее время [примерно (70 ÷ 80) T] [34]. Этот факт свидетельствует в пользу того, что более точная модель термоприемника по своим свойствам должна быть промежуточной между звеньями с сосредоточенными и распределенными параметрами

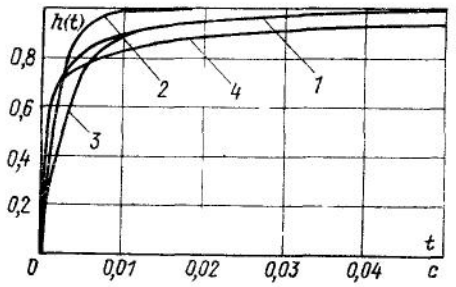


Рис. 2.4. Переходные характеристики плеиочного термоприемника и моделирующих его динамических звеньев

1 — термоприемник, *2* — инерционное звено 1-го порядка, *3* — инерционное звено 2 го порядка, *4* — полуинерционное звено

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ

3.1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА МЕТОДОВ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ

Определение динамических характеристик средств измерений — центральный вопрос проблемы обеспечения единства динамических измерений. Знание этих характеристик позволяет решать задачи, связанные с выбором средств измерений, обработкой данных наблюдений. коррекцией погрешностей. Без достаточной информации о характеристиках используемых средств измерений, по существу, невозможно проведение измерений за исключением отдельных случаев измерений по стандартизированным методикам.

Обобщенные схемы определения динамических характеристик средств измерений *СИ* приведены на рис. 3.1. Первая из них соответствует схеме поверки по образцовой мере, роль которой играет генератор испытательных сигналов *ГИС*. С его помощью воспроизводится сигнал определенной формы с известными характеристиками, и, таким образом, ГИС представляет собой «динамическую» меру. Вторая схема соответствует поверке по образцовому средству измерений. Быстродействующее средство измерений *БСИ* прежде всего является образцовым при работе в динамическом режиме. Если статические характеристики (например, статический коэффициент преобразования средства измерений) целесообразно определять в одном эксперименте с динамическими характеристиками, то БСИ должно быть образцовым в общепринятом («статическом») смысле.

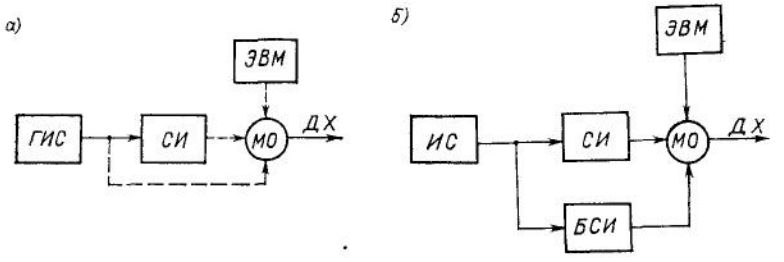


Рис. 3.1. Структурные схемы определения динамических характеристик

МО —математическая обработка, ИС — источник сигна ла

Из рисунка видно, что определение характеристик включает в себя следующие процедуры:

воспроизведение (определение) испытательного сигнала;

регистрацию выходного сигнала исследуемого средства измерений (отклика на испытательный сигнал);

обработку данных (испытательного и выходного сигналов) с целью определения требуемой характеристики и оценивания погрешности ее определения.

В связи с указанными процедурами выделяются общие теоретические задачи, важнейшими среди которых являются:

анализ методов и создание алгоритмов обработки данных при определении динамических характеристик;

установление требований к испытательным сигналам;

установление требований к характеристикам измерительных устройств, используемых при определении характеристик средств измерений.

Перечисленные задачи ставятся и решаются по-разному для полных и частных динамических характеристик и разных методов их определения. Методы определения частных характеристик в наибольшей мере отражают специфику областей измерений и особенности конкретных типов средств измерений. Методы определения полных характеристик чаще всего являются общими, т. е. пригодными для многих областей измерений и различных типов средств

измерений. В то же время определение полных характеристик представляет наибольшую сложность при исследовании метрологических свойств средств для динамических измерений. Поэтому в дальнейшем ограничимся полными характеристиками.

Нахождение из экспериментальных данных полной характеристики формально сводится к определению из операторного уравнения динамики средства измерений (1.27) неизвестного оператора $\mathscr{B}$ по известным испытательному сигналу x и отклику средства измерений y. Методы решения уравнения (1.27) относительно $\mathscr{B}$ активно разрабатываются в теории идентификации систем автоматического управления [86]. Однако заимствование методов идентификации и их применение при определении динамических свойств средства измерений затруднительно в силу специфических отличий метрологии и измерительной техники от теории и техники автоматического управления.

Прежде всего задача идентификации в теоретическом плане отличается по постановке от задачи определения динамических свойств средств измерений. Методы идентификации направлены на исследование устройств автоматики в режиме нормального функционирования и при высоком уровне помех. Поэтому моделью испытательного воздействия в большинстве задач служит случайная функция времени, что обусловливает специфику методов идентификации. В метрологии же, как правило, для определения динамических свойств средства измерений проводится специальный эксперимент, в котором на это средство воздействует испытательный сигнал с известными свойствами. Во многих областях измерений случайные испытательные сигналы не могут быть воспроизведены с требуемой точностью. Поэтому для метрологии наиболее актуальны методы идентификации с использованием детерминированных испытательных сигналов. Однако эти методы относительно слабо разработаны в теории идентификации.

Кроме того, в метрологии первостепенную роль играют вопросы точности определения динамических характеристик средств измерений. К сожалению, многие методы идентификации теории автоматического управления, применимые к задаче определения этих характеристик, не содержат оценок точности.

Отмеченные выше обстоятельства показывают, что проблема определения динамических свойств средств измерений является актуальной для метрологии. Ввиду ее сложности и разнообразия возможных исходных данных вряд ли можно ожидать ее решения путем создания одного наилучшего метода. Скорее речь должна идти о ряде методов различной сложности, трудоемкости и точности, от простых и приближенных экспресс-методов до самых сложных и точных методов, требующих для своей реализации универсальных ЭВМ. Однако каждый из методов должен удовлетворять следующим естественным требованиям:

границы применимости четко очерчены;

характеристики получаются в форме, наиболее удобной для нормирования и практического использования;

необходимые исходные данные доступны экспериментатору, и вся информация, которой располагает исследователь, эффективно используется;

адекватность получаемых моделей исследуемым средствам измерений подтверждена экспериментально;

точность получаемых результатов оценена.

Методы определения полных динамических характеристик средств измерений могут быть классифицированы по ряду признаков, но наиболее важной представляется классификация по виду испытательных сигналов, что объясняется следующими соображениями. Требуемая точность определения характеристик обусловливает необходимую точность воспроизведения (регистрации) испытательного сигнала. Воспроизведение же сигнала заданной формы с требуемой точностью в различных областях измерений требует разных усилий, и в настоящее время характеристические испытательные сигналы — идеальная ступень, дельта-импульс и синусоидальное воздействие,— традиционно и широко используемые при исследованиях средств электрических измерений, в ряде областей измерений могут воспроизводиться лишь с невысокой точностью или даже не могут быть воспроизведены вовсе. Поэтому возможность и достижимая точность воспроизведения тех или иных сигналов в конкретной области измерений могут стать определяющими факторами при выборе той или иной характеристики в качестве нормируемой и тем самым в значительной мере предопределить метод ее нахождения. Исходя из изложенного, можно разделить методы нахождения полных характеристик на две группы:

прямые, т. е. методы нахождения характеристик в соответствии с их определениями: переходной характеристики с помощью ступенчатого, импульсной — с помощью дельта-импульсного и частотных — с помощью синусоидальных испытательных сигналов;

косвенные, т. е. методы нахождения характеристик с помощью известных нехарактеристических испытательных сигналов.

При использовании прямых методов обработка экспериментальных данных в принципе проста и нужно лишь удовлетворить определенные требования к испытательному сигналу, обусловливающие достижение требуемой точности нахождения характеристики. Общий недостаток прямых методов состоит в том, что характеристики с их помощью получаются в форме кривой (при непрерывной записи) или таблицы значений (при дискретной регистрации). Поэтому прямые методы представляют интерес в первую очередь для контроля нормированных характеристик. Для оценивания и коррекции динамических погрешностей средств измерений может потребоваться аппроксимация найденной характеристики аналитическим выражением, т. е. усложнение обработки данных. Графическая и табличная форма представления характеристик может быть приемлемой при использовании ЭВМ для расчетов оценок погрешностей и поправок.

С помощью косвенных методов характеристика находится, как правило, в аналитической форме. Однако в этом случае при обра-

ботке данных возникают специфические трудности, связанные с некорректностью задачи [71]. Ниже рассмотрены наиболее перспективные для метрологии косвенные методы идентификации и дан анализ этих методов на соответствие сформулированным выше требованиям. Вопросы пересчета одной характеристики в другую не затрагиваются.

Конкретные способы нахождения характеристик отличаются видом испытательного воздействия и алгоритмом обработки экспериментальных данных. Испытательные воздействия и требования к ним рассмотрены в § 3.2, а здесь мы сосредоточимся на методах обработки. Рассмотрены наиболее общие методы обработки экспериментальных данных при определении характеристик аналоговых средств измерений с линейным дифференциальным уравнением, которые являются наиболее распространенными средствами для динамических измерений. Рассматриваются методы непосредственного нахождения полных характеристик: дифференциального уравнения, импульсной и переходной характеристик, передаточной функции, а также АЧХ и ФЧХ. Имея в виду широкое использование ступенчатых испытательных сигналов, рассматриваются также методы определения характеристик средства измерений по его переходной характеристике.

Для каждой из характеристик методы рассматриваются в порядке нарастающей их сложности.

Дифференциальное уравнение. Способам определения порядка и коэффициентов дифференциального уравнения средства измерений посвящено сравнительно немного работ, относящихся к уравнениям без дифференцирования в правой части, т. е. к средствам измерений, не содержащим форсирующих (дифференцирующих) звеньев. Этот факт объясняется, по-видимому, как сложностью задачи определения такого уравнения, так и трудностями при его использовании для оценивания искажений формы сигналов и динамических погрешностей измерений.

Рассмотрим способ, предложенный в [100] и развитый в [95]. Дифференциальное уравнение средства измерений неизвестного порядка n представляется в виде:

$$a_n y^{(n)}(t) + \ldots + a_1 y'(t) + y(t) = Kx(t) \tag{3.1}$$

или

$$a_n y^{(n)}(t) + \ldots + a_1 y'(t) + y(t) = K_1 \int x(t)\,dt. \tag{3.2}$$

Рассмотрим уравнение (3.1). Пусть в качестве входного используется ступенчатый сигнал $x(t)=AU(t)$. Тогда $y(t)$ имеет установившееся значение AK. Введя нормировку $y(t)/(AK=c(t)$, запишем (3.1) при $t \geqslant 0$:

$$a_n c^{(n)}(t) + \ldots + a_2 c''(t) + a_1 c'(t) + c(t) = 1. \tag{3.3}$$

Проинтегрируем уравнение (3.3) на полуоси $[0, \infty)$:

$$a_n c^{(n-1)}(t)\Big|_{t=0}^{t\to\infty} + \ldots + a_2 c'(t)\Big|_{t=0}^{t\to\infty} + a_1 c(t)\Big|_{t=0}^{t\to\infty} = \int_0^\infty [1 - c(t)]\,dt.$$

Функция $c(t)$ при $t \leqslant 0$ и $t \to \infty$ стационарна, следовательно,

$$a_1 [c(\infty) - c(0)] = a_1 = \int_0^\infty [1 - c(t)]\,dt.$$

Разделим проинтегрированное на $[0, t]$ уравнение на a_1:

$$\frac{a_n}{a_1} c^{(n-1)}(t) + \ldots + \frac{a_3}{a_1} c''(t) + \frac{a_2}{a_1} c'(t) = \frac{1}{a_1} \int_0^t [1 - c(t)]\,dt. \tag{3.4}$$

Уравнение (3.4) можно рассматривать как дифференциальное уравнение $(n-1)$-го порядка со входным сигналом

$$x_1(t) = \frac{1}{a_1} \int_0^t [1 - c(t)]\,dt,$$

где

$$\lim_{t\to 0} x_1(t) = 0; \quad \lim_{t\to\infty} x_1(t) = 1.$$

Проинтегрируем уравнение (3.4):

$$\frac{a_n}{a_1} c^{(n-2)}(t)\Big|_{t=0}^{t\to\infty} + \ldots + \frac{a_3}{a_1} c'(t)\Big|_{t=0}^{t\to\infty} + \frac{a_2}{a_1} c(t)\Big|_{t=0}^{t\to\infty} = \int_0^\infty [x_1(t) - c(t)]\,dt. \tag{3.5}$$

Из уравнения (3.5) получаем

$$a_2 = a_1 \int_0^\infty [x_1(t) - c(t)]\,dt.$$

Продолжая этот процесс, находим:

$$a_i = a_{i-1} \lim_{t\to\infty} f_i(t);$$

$$f_i(t) = \int_0^t \left[\frac{a_{i-2}}{a_{i-1}} f_{i-1}(t) - c(t)\right] dt; \quad a_{-1} = a_0 = 1; \quad f_0(t) = 1.$$

Решение уравнения (3.2) имеет вид:

$$a_i = a_{i-1} \lim_{t\to\infty} f_i(t);$$

$$f_i(t) = \int_0^t \frac{a_{i-2}}{a_{i-1}} f_{i-1}(t)\,dt - c^*(t); \quad c^*(t) = y(t)/(AK_1); \quad a_{-1} = a_0 = 1; \quad f_0(t) = 1. \tag{3.6}$$

Если входной сигнал $x(t)$ — произвольного вида с установившимся значением A, то уравнение (3.1), например, приводится к виду:

$$a_n c^{(n)}(t) + \ldots + a_1 c'(t) + c(t) = \bar{x}(t);$$

$$\bar{x}(t) = x(t)/A; \quad c(t) = y(t)/(AK); \quad c(0) = \bar{x}(0) = 0; \quad c(\infty) = \bar{x}(\infty) = 1.$$

При этом верны формулы (3.6), где $a_{-1} = a_0 = 1$; $f_0(t) = \bar{x}(t)$.

Если испытательный сигнал $x(t)$ — импульсный, то интегрированием он приводится к сигналу с установившимся значением, для которого годится рассмотренный способ.

Важным вопросом при использовании этого способа является вопрос о нахождении порядка дифференциального уравнения. Если порядок равен n, то, осуществляя редукцию уравнения $(n+1)$-го порядка к уравнению n-го порядка, можно найти, что $a_{n+1}=0$. Таким образом, теоретически порядок уравнения определяется точно. На практике из-за неизбежных погрешностей возможна ошибка в определении n. Критерием правильного определения может служить устойчивость системы. Если при нахождении a_i окажется, что система i-го порядка неустойчива, то следует остановиться на a_{i-1}. Поэтому параллельно нахождению коэффициентов уравнения надо осуществлять проверку устойчивости, например, по критерию Гурвица. В работе [100] указано, что способ достаточно надежен для средства измерений с уравнениями до 3-го порядка включительно.

Анализ способа показывает, что он удовлетворяет первым трем из сформулированных выше требований. Следует лишь заметить, что гипотеза о структуре дифференциального уравнения в общем случае требует экспериментальной проверки. Что касается двух последних требований, то адекватность экспериментально не подтверждена, и выражения для оценок погрешностей коэффициентов отсутствуют.

Разновидность метода многократного интегрирования дифференциального уравнения средства измерений — способ, сводящийся не к рекуррентной процедуре, а к решению линейной алгебраической системы, предложен в [91], где дифференциальное уравнение рассматривается в форме

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^{(j)}(t), \quad m<n, \tag{3.7}$$

(x, y — входной и выходной сигналы устройства, соответственно; a_i, $i=0, \ldots, n$; b_j, $j=0, \ldots, m$ — параметры; n и m — известные числа).

Проинтегрировав $(n+1)$ раз выражение (3.7) по k различным промежуткам, получим линейную систему

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \Psi_{n+1-i}(k) = \sum_{j=0}^{m} b_j \Phi_{n+1-j}(k), \tag{3.8}$$

где

$$\Psi_{n+1-i}(k) \equiv \underbrace{\int_0^{\theta_k} \int \cdots \int}_{n+1-i} y(t)\, dt^{n+1-i}; \quad \Phi_{n+1-j}(k) \equiv \underbrace{\int_0^{\theta_k} \int \cdots \int}_{n+1-j} x(t)\, dt^{n+1-j};$$

$$k=1, \ldots, n+m+2.$$

Из (3.8) обычным способом можно определить вектор параметров $[a_0, \ldots a_n; b_0, \ldots, b_m]$. Метод изложен на уровне принципа, и ни один из вопросов практического применения не рассмотрен. С другой стороны, принцип перспективен для средств измерений с дифференциальными уравнениями невысокого порядка в силу своей простоты. Таким образом, целесообразна разработка метода, основанного на изложенном принципе и удовлетворяющего сформулированным требованиям.

Передаточная функция. Методы нахождения передаточной функции, естественно, являются косвенными. Большинство из них основано на использовании ступенчатого испытательного сигнала и пересчета параметров переходной характеристики в коэффициенты передаточной функции. Обзор и результаты исследований этих методов даны в статье [51].

Способ нахождения коэффициентов передаточной функции по реакции средства измерений на произвольный испытательный сигнал с конечной площадью предложен в работе [94] для устройств с передаточной функцией вида $W(p)=1/(a_n p^n+\ldots+a_1 p+1)$. Изображения по Лапласу входного и выходного сигналов связаны соотношением

$$Y(p)=KX(p)/(a_n p^n+\ldots+a_1 p+1). \tag{3.9}$$

Устремляя к пределу при $p\to 0$ правую и левую части соотношения (3.9), находим $K=\lim\limits_{p\to 0} Y(p)/\lim\limits_{p\to 0} X(p)$. Полагая $X(0)\neq 0$, осуществим нормировку $\tilde{X}(p)=X(p)/X(0)$; $\tilde{Y}(p)=Y(p)/Y(0)$. Образуем разность

$$D_1(p)=pS_1(p)=\tilde{X}(p)-\tilde{Y}(p)=X(p)\,\frac{a_n p^n+\ldots+a_1 p}{a_n p^n+\ldots+a_1 p+1}.$$

По теореме о предельном значении [39]

$$\lim_{p\to 0} S_1(p)=X(p)\,\frac{a_n p^{n-1}+\ldots+a_1}{a_n p^n+\ldots+a_1 p+1}\Bigg|_{p=0}=a_1.$$

Продолжая процесс, получим для i-го шага

$$D_i(p)=pS_i(p)=S_{i-1}(p)-a_{i-1}Y(p)=$$

$$=\lim_{p\to 0} S_i(p)=\frac{a_n p^{n-i}+\ldots+a_i}{a_n p^n+\ldots+a_1 p+1}\Bigg|_{p=0}=a_i.$$

По постановке задачи и получаемым результатам данный метод эквивалентен предыдущему. Для него сохраняют силу сделанные выше выводы.

Метод, предложенный в статье [5], основан на аппроксимации известного входного сигнала $x(t)$ и соответствующего выходного сигнала устройства $y(t)$. Рассмотрены ступенчатая и кусочно-линейная аппроксимация. Выражение, аппроксимирующее истинный комплексный коэффициент передачи средства измерений, имеет вид

$$K_a W_a(p)=\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k p^k \Big/ \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k p^k, \tag{3.10}$$

где $\alpha_k=\dfrac{(-1)^k}{k!}\int\limits_0^{\infty} t^k x_a(t)\,dt$; $\beta_k=\dfrac{(-1)^k}{k!}\int\limits_0^{\infty} t^k y_a(t)\,dt$; $x_a(t)$, $y_a(t)$—функции, аппроксимирующие $x(t)$ и $y(t)$, соответственно. Истинная передаточная функция ищется в дробно-рациональной форме (2.25). Приравнивая (3.10) и (2.25), с учетом $K_a=\beta_0/\alpha_0$, можно получить систему уравнений относительно a_k и b_k:

$$\sum_{k=0}^{l}\alpha_k b_{l-k}=\sum_{k=0}^{l} a_k\beta_{l-k}, \quad l=0, 1, \ldots, m+n. \tag{3.11}$$

При ступенчатой аппроксимации

$$\alpha_{k-1}^{ст}=\frac{(-\Delta t)^k}{k!}\sum_{i=0}^{\infty} x(i\Delta t)\,[i^k-(i+1)^k];$$

$$\beta_{k-1}^{ст}=\frac{(-\Delta t)^k}{k!}\sum_{i=0}^{\infty} y(i\Delta t)\,[i^k-(i+1)^k].$$

При кусочно-линейной аппроксимации

$$\alpha_{k-1}=\alpha_{k-1}^{ст}-\frac{(-\Delta t)^k}{(k+1)!}\sum_{i=0}^{\infty}\{x[(i+1)\Delta t]-x(i\Delta t)\}\,[i^{k+1}-(i-k)(i+1)^k],$$

$$\beta_{k-1}=\beta_{k-1}^{ст}-\frac{(-\Delta t)^k}{(k+1)!}\sum_{i=0}^{\infty}\{y[(i+1)\Delta t]-y(i\Delta t)\}\,[i^{k+1}-(i-k)(i+1)^k].$$

Поскольку число уравнений системы (3.11) на единицу меньше числа неизвестных, то, по-видимому, предполагается, что статический коэффи-

циент преобразования средства измерений $K = b_0/a_0$ должен быть определен отдельно.

Метод описан на уровне принципа и проверен на модельном примере. Выражения для оценок погрешностей коэффициентов передаточной функции, находимых с помощью метода, получены в статье [44]. Эти погрешности обусловлены конечностью времени наблюдения, а также неточностью измерений и аппроксимации сигналов $x(t)$ и $y(t)$. Метод конкретизирован для случая ступенчатого испытательного сигнала.

Важной задачей, не решенной при реализации метода в работе [5], является формирование системы (3.11). Дело в том, что полная система, получающаяся из равенства $W_a(p) = W(p)$, содержит бесконечное число уравнений. Состав конечной системы (3.11), выбираемой из бесконечной, и число уравнений зависят от вида испытательного сигнала, способа аппроксимации, требуемой точности и погрешностей исходных данных. Поэтому метод предназначен для нахождения параметров передаточной функции известной структуры. Это существенно ограничивает область его применения. Кроме того, серьезным недостатком является отсутствие проверки адекватности получаемых моделей исследуемым средствам измерений. Отсутствие проверки, а также решений указанных выше вопросов затрудняет практическое использование метода.

Метод определения коэффициентов передаточной функции известной структуры, на которую не наложены ограничения, для известных испытательных сигналов произвольной формы предложен в статье [9]. По известному аналитическому выражению испытательного сигнала $x(t)$ находится выражение для соответствующего выходного сигнала $y = y(t; \mathbf{T})$, зависящее от вектора $\mathbf{T} = (T_1, \ldots, T_l)$ неизвестных параметров передаточной функции. С помощью итерационной процедуры находится вектор оптимальных оценок $\mathbf{T}^* = (T_1^*, \ldots, T_l^*)$, т. е. таких, которые минимизируют квадратический функционал Φ от разности $\tilde{y}_i - y(t_i; \mathbf{T}^*)$, где $\tilde{y}_i$ — значения выходного сигнала устройства, полученные экспериментально. При каждой итерации с помощью псевдообращения находится вектор приращений параметров относительно начальных значений. Применение псевдообращения основано на линеаризации зависимости $y(t; \mathbf{T})$ от параметров. Условием останова итерационной процедуры на $(k+1)$-м шаге служит выполнение неравенства $|1 - \Phi_k/\Phi_{k+1}| < \alpha$, где α — наперед заданное число. Если в пространстве параметров функции $y(t; \mathbf{T})$ немонотонны, то необходимо, чтобы начальное приближение попало в область притяжения решения $\mathbf{T}^*$, иначе процедура разойдется. Критичность к выбору начального приближения является принципиальным недостатком метода. В работе [8] предложено в качестве начального приближения использовать результат дробно-рациональной аппроксимации передаточной функции по методу, изложенному в статье [30]. В качестве исходных данных для аппроксимации используются вещественная и мнимая части передаточной функции. Для получения этих исходных данных рекомендуется применять либо гармонические испытательные сигналы, либо, если это невозможно, при сигнале произвольной формы обрабатывать экспериментальные данные с использованием численного преобразования Фурье.

Как показано, при нехарактеристических испытательных сигналах метод отличается большой сложностью, что обусловило необходимость разработки для его реализации большого комплекса машинных программ [48]. Существенным недостатком метода является отсутствие оценок погрешностей найденных коэффициентов передаточной функции.

Методы нахождения передаточных функций развиты лишь для случая точно известной структуры исследуемого устройства. Это характерно также и для методов нахождения передаточных функций с помощью самонастраивающихся моделей [101], в которых математическая или физическая модель заданной структуры с помощью подбора значений параметров приближается к исследуемому средству измерений, причем качество приближения оценивается по некоторому критерию, чаще всего квадратическому. По-видимому, подобные методы удобны тогда, когда структура устройства неизвестна.

Импульсная и переходная характеристики. В основе всех методов экспериментального определения импульсной и переходной характеристик лежат уравнения (1.28) и (1.29). Средство измерений предполагается устойчивым, т. е. $\int_0^\infty |g(t)|\,dt < \infty$, и при $t \leqslant 0$ имеет $g(t) = 0$. Неслучайный испытательный сигнал $x(t)$ в большинстве случаев удовлетворяет условиям: а) $x(t) \equiv 0$ при $t < 0$; б) либо $x(t) = 0$ при $t \geqslant \theta$, где θ — длительность импульса, либо $\lim_{t\to\infty} x(t) = a$, где $a = \text{const}$, $a \neq 0$.

Далее ограничимся рассмотрением методов нахождения импульсной характеристики, учитывая однозначную связь (2.4), (2.6) между ней и переходной характеристикой, а также существенно большее, чем для переходной характеристики, количество частных методов нахождения импульсной характеристики и посвященных им работ.

На практике выходной сигнал исследуемого устройства может регистрироваться с помощью самопишущего или печатающего прибора. В первом случае при отсчитывании показаний, а во втором случае непосредственно получаются значения y_i $(i = 1, 2, \ldots)$ в дискретных точках отсчета t_i, взятых с периодом дискретизации по времени Δt. Значения испытательного сигнала могут быть получены аналогичным образом. В ряде случаев может быть известно аналитическое выражение испытательного сигнала. В зависимости от формы представления сигналов $x(t)$ и $y(t)$ возможны два подхода к их обработке при нахождении импульсной характеристики, а также других характеристик. Во-первых, можно аппроксимировать сигналы $x(t)$ и $y(t)$ функциями $\tilde{x}(t)$ и $\tilde{y}(t)$ и перейти затем к аналитическому решению уравнения (1.29). Во-вторых, можно решать это уравнение непосредственно численными методами. Следует заметить, что при первом подходе провести до конца аналитическое решение возможно лишь в ограниченном числе случаев. В то же время задача аппроксимации сама по себе достаточно сложна. Поэтому прямые численные методы представляются более перспективными для практики, что подтверждается большим числом посвященных им публикаций. Ниже рассмотрены наиболее общие численные методы.

Основной проблемой при обработке экспериментальных данных является проблема некорректности. Остановимся на ней подробнее. Самым важным для практики является вопрос о непрерывной зависимости решения уравнения (1.29) от исходных данных. Поскольку значения сигналов $x(t)$ и $y(t)$, полученные экспериментально, отягощены погрешностями, то непрерывность указанной зависимости необходима. Однако известно, что задача решения уравнения (1 29) («обратная задача») является некорректно поставленной. В данном случае это означает, что при малых погрешностях определения значений $x(t)$ и $y(t)$ погрешность определения $g(t)$ может быть так велика, что полученное решение не будет иметь физического смысла. Следует подчеркнуть, что проблема некорректности не является только математической проблемой. Действительно, если рассматривать соотношение (1.29) как абстрактное математическое уравнение (интегральное уравнение Вольтерра I рода) относительно неизвестной функции $g(t)$ с абсолютно точными исходными данными [функциями $x(t)$ и $y(t)$], то решение его существует и является единственным. Алгоритм нахождения решения известен [39]. Однако если исходные данные представлены в виде дискретных значений, которые к тому же содержат погрешности, что как раз характерно для экспериментальных данных, то проблема некорректности становится серьезным препятствием при обработке последних. Физическая сущность проблемы некорректности применительно к определению динамических характеристик заключается в следующем. Реальный испытательный сигнал всегда имеет убывающий по интенсивности спектральный состав, и то же самое справедливо для отклика устойчивого средства измерений на этот сигнал. Таким образом, по двум сигналам с убывающими спектрами требуется найти характеристику, которая их однозначно связывает. В областях низких и средних частот, где интенсивность спектров достаточно высока, удается достаточно достоверно определить искомую характеристику, причем неизбеж-

ные погрешности исходных данных и процедуры решения действуют «регулярным» образом, т. е. искажают решение, не меняя принципиально его характера. В области высоких частот, где интенсивности спектров соизмеримы с погрешностями, последние могут обусловить неопределенность решения. Эта неопределенность в зависимости от конкретного источника (квантование сигналов во времени, погрешности отсчитывания значений) принимает форму искажений (помех) истинного решения, соответствующих характеру источника, но настолько интенсивных по сравнению с истинным решением, что последнее оказывается совершенно подавленным. Поскольку на практике конкретные источники искажений, в том числе и упомянутые выше, имеют характер более «высокочастотный», чем сами сигналы, то искажения истинного решения во временной области имеют вид быстро осциллирующих функций, интенсивность которых на несколько порядков превосходит интенсивность истинной характеристики (решения). Проблема некорректности может быть снята путем использования априорной информации об истинном решении, которая позволяет отфильтровать нерегулярные решения. Вообще, все методы решения некорректно поставленных задач по физической сущности сводятся к фильтрации нерегулярных решений, причем основным вопросом является выбор оптимальной степени фильтрации. Заметим, что в рассмотренных выше способах обработки данных при определении коэффициентов дифференциального уравнения и передаточной функции некорректность постановки задачи проявляется в первую очередь в неопределенности порядка моделей.

При обработке результатов наблюдений обычно пользуются корректными процедурами на основе большой априорной информации, которая имеется при измерениях. Однако в ряде случаев не удается избежать некорректно поставленных задач, поэтому необходимо знать методы их решения. Обзор некорректно поставленных задач измерительной техники дан в работе [67].

Некорректно поставленная задача определения импульсной характеристики из уравнения (1.29) может быть решена одним из методов регуляризации [71]. Методам регуляризации, развиваемым А. Н. Тихоновым и его школой, посвящено огромное количество публикаций (см. обзор [50]). Ниже будут рассмотрены основные методы решения уравнения (1.29).

Численные методы решения (1.29) основаны на замене интеграла суммой по одной из формул приближенного вычисления. При этом (1.29) переходит в матричное уравнение:

$$\mathbf{Y} = \Delta t K \mathbf{X} \mathbf{G}, \tag{3.12}$$

где $\mathbf{Y}$ и $\mathbf{G}$ — векторы-столбцы, составленные из значений $y(t)$ и $g(t)$; $\mathbf{X}$ — матрица значений испытательного сигнала.

Например, при использовании обобщенной формулы прямоугольников матрицы в уравнении (3.12) имеют вид:

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g_n \end{pmatrix}; \qquad \hat{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} x_1 & & & \\ x_2 & x_1 & & 0 \\ \cdot & \cdot & & \\ \cdot & & \cdot & \\ \cdot & & & \cdot \\ x_n & x_{n-1} & \cdot\ \cdot\ \cdot & x_1 \end{pmatrix}, \tag{3.13}$$

где $x_k = x[(2k-1)\Delta t/2]$; $g_k = g[(2k-1)\Delta t/2]$; $k = 1, \ldots, n$; n — число точек отсчета; $\theta = n\Delta t$ — время наблюдения.

Определитель матрицы $\hat{\mathbf{X}}$ удовлетворяет условию:

$$\det \hat{\mathbf{X}} = x_1^n \neq 0, \tag{3.14}$$

следовательно, решение уравнения (3.12) дается выражением

$$\mathbf{G} = (\Delta t K)^{-1} (\hat{\mathbf{X}})^{-1} \mathbf{Y}. \tag{3.15}$$

Некорректность постановки обратной задачи при переходе от уравнения (1.29) к уравнению (3.12) принимает форму плохой (или даже критической [92]) обусловленности матрицы $\mathbf{X}$. При плохо обусловленной матрице решение по формуле (3.15) оказывается неудовлетворительным по точности. Количественно обусловленность матрицы может характеризоваться одним из «чисел обусловленности», которое зависит от принятой нормы матрицы [74]. Числа обусловленности в применении к уравнению (3.12) имеют ясный физический смысл. Так, например, H-число [74] дает отношение наибольшей и наименьшей полуосей эллипсоида рассеяния вектора, компонентами которого являются погрешности нахождения значений $g(t)$. Вообще, если обозначить через $\delta\mathbf{G}$, $\delta\mathbf{Y}$ и $\delta\mathbf{X}$ соответственно векторы и матрицу, составленные из погрешностей значений искомой характеристики $g(t)$, сигналов $y(t)$ и $x(t)$, то можно получить следующую оценку [92]:

$$\|\delta\mathbf{G}\| \leqslant \frac{(\Delta t K)^{-1} \|\mathbf{X}^{-1}\delta\mathbf{Y}\| + \|\mathbf{X}^{-1}\delta\mathbf{X}\| \|\mathbf{G}\|}{1 - \|\mathbf{X}^{-1}\delta\mathbf{X}\|}, \tag{3.16}$$

справедливую при условии $\|\mathbf{X}^{-1}\delta\mathbf{X}\| < 1$.

Метод регуляризации, предложенный А. Н. Тихоновым [71], в применении к решению уравнения (3.12) основан на рассмотрении следующего параметрического функционала:

$$M^{\alpha}[\mathbf{G}, \tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{Y}}] = \|\tilde{\mathbf{X}}\mathbf{G} - \tilde{\mathbf{Y}}\|^2 + \alpha\Omega[\mathbf{G}], \quad \Omega[\mathbf{G}] = \|\mathbf{G}\|^2, \tag{3.17}$$

где $\tilde{\mathbf{X}}$, $\tilde{\mathbf{Y}}$ — δ-приближения матрицы $\mathbf{X}$ и вектора $\mathbf{Y}$. Теорема регуляризации гласит: если $\mathbf{Y}$ удовлетворяет условию разрешимости, и $\alpha(\delta)$, $\varepsilon(\delta)$ — убывающие функции δ, такие, что при $\delta \to 0$ они также стремятся к нулю, то каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует такое $\delta_0 = (\varepsilon, \|\mathbf{G}^{(0)}\|)$, что вектор $\mathbf{G}^{\alpha}$, реализующий минимум функционала (3.17), где α — любое, такое, что, $[\delta^2/\varepsilon(\delta)] \leqslant \alpha \leqslant \alpha_0(\delta)$, удовлетворяет неравенству $\|\mathbf{G}^{\alpha} - \mathbf{G}^{(0)}\| \leqslant \varepsilon$, если только $\delta \leqslant \alpha_0(\varepsilon, \|\mathbf{G}^{(0)}\|)$. Под условием разрешимости в теореме понимается принадлежность вектора $\mathbf{Y}$ классу $\mathcal{U}_{\mathbf{X}}$, который определяется следующим образом: $\mathcal{U}_{\mathbf{X}} = (\mathbf{Y} : \mathbf{Y} = \mathbf{X}\mathbf{G}, \mathbf{G} \in \mathcal{R}^n)$, где $\mathcal{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство.

Теорема регуляризации, по существу, утверждает возможность отыскания как угодно близкого к истинному приближенного решения уравнения (3.12) при надлежащем выборе параметра регуляризации α. Выбор α является самым существенным моментом при практическом применении метода регуляризации, что обусловило большое число работ, посвященных специально этому вопросу.

Метод ортогональных разложений. Метод основан на представлении искомой импульсной характеристики в виде ряда по системе ортонормированных функций. Пусть $\{f_i(t)\}$ — система функций, удовлетворяющих на интервале наблюдения $[0, \theta]$ условию $\int_0^{\theta} f_i(t) f_k(t)\, dt = \delta_{ik}$ $(i, k = 0, 1, 2, \ldots)$, где δ_{ik} — символ Кронекера. Будем аппроксимировать $g(t)$ суммой

$$G_m(t) = \sum_{k=0}^{m} b_k f_k(t) \tag{3.18}$$

с неизвестными коэффициентами b_k. Выходной сигнал $y(t)$ аппроксимируем аналогично:

$$Y_m(t) = \sum_{i=0}^{m} c_i f_i(t). \tag{3.19}$$

Если погрешность аппроксимации понимать в смысле наименьшего квадратического отклонения, то $c_i = \int_0^{\theta} y(t) f_i(t)\, dt$. Подставляя выражения

(3.18) и (3.19) в (1.29), получим систему

$$\sum_{k=0}^{m} A_{ik} b_k = c_i, \quad i = 0, 1, \ldots, m,$$

где

$$A_{ik} = \int_0^\theta \int_0^\theta x(t-\tau) f_i(t) f_k(\tau)\, dt d\tau,$$

из которой можно найти коэффициенты b_k.

Конкретные реализации метода основаны на использовании в качестве системы ортогональных функций полиномов Чебышева, функций Уолша, а также полиномов Лежандра и Лагерра. К этой же группе относится метод локальной аппроксимации. Сущность всех указанных способов заключается в том, чтобы свести уравнение (1.29), или преобразовать систему (3.12), к хорошо обусловленной алгебраической системе. Общую трудность при применении этих способов представляет правильный выбор параметра регуляризации и в особенности учет априорной информации о динамических свойствах средства измерений при этом выборе.

Способ фильтрации. Способ сводится к тому, что решение уравнения (1.29) или (3.12) «пропускается» через фильтр нижних частот и подбором частотной характеристики фильтра достигается нужная степень сглаживания решения. При математической фильтрации можно реализовать любую частотную характеристику фильтра, в частности прямоугольную [102]. Используется также [37] фильтр с частотной характеристикой

$$A(\omega) = \left[a + 2\sum_{r=1}^{\infty} a_r \cos\left(r\frac{\pi\omega}{\omega_g}\right)\right][U(\omega-\omega_g) - U(\omega+\omega_g)].$$

Достоинством способа является то, что априорная информация об исследуемом средстве измерений, которая часто имеет форму ограничений частотного диапазона, естественным образом может быть использована в нем.

Ортогональный метод моментов. Этот метод применительно к определению импульсной характеристики основывается на идее восстановления функции по ее моментам [65]. При этом исходным является уравнение Лапласа:

$$W(p) = \int_0^\infty g(t)\, w(t)\, e^{-pt}\, dt, \qquad (3.20)$$

решение которого рассматривается как задача восстановления импульсной характеристики $g(t)$ по значениям передаточной функции $W(p)$ в вещественных точках. Иными словами, ядро преобразования Лапласа рассматривается как моментная функция оригинала с весом $w(t)$. Из формулы (3.20) получим при $p = 0, 1, 2, \ldots$ моменты μ_k функции $g(t)$ с весом $w(t)$:

$$\mu_k = \int_0^\infty w(t) e^{-kt} g(t)\, dt, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Импульсная характеристика $g(t)$ ищется в форме интегро-интерполяционного многочлена.

Если в качестве системы $\{f_i(t)\}$ используются ортогональные функции Лагерра, то

$$g(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i L_i(at); \qquad c_i = \int_0^\infty g(t) L_i(at)\, dt;$$

$$L_i(t) = \frac{a^c}{i!} \exp[a(1-c)t] \frac{d^i(t^i e^{-at})}{dt^i}; \qquad w(t) = (ae^{-at})^{1-2c}.$$

При этом $c_0 = \mu_0$; $c_1 = \mu_0 - a\mu_1$; $c_2 = \mu_0 - 2a\mu_1 + a^2\mu_2/2!$;

$$c_3 = \mu_0 - 3a\mu_1 + \frac{3a^2}{2!}\mu_2 - \frac{1}{3!}a^3\mu_3; \ldots,$$

где

$$\mu_k = \int_0^\infty t^k g(t) \exp(-at/2)\, dt, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Моменты $\{\mu_k\}$ можно вычислить по моментам входного и выходного сигналов. Для этого уравнение (1.29) представляется в виде:

$$\int_0^\infty \left[1 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{n!} p^n\right] g(t)\, w(t)\, dt \int_0^\infty \left[1 + \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{t^m}{m!} p^m\right] \times$$

$$\times\, x(t)\, w(t)\, dt = \int_0^\infty \left[1 + \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{t^\nu}{\nu!} p^\nu\right] y(t)\, w(t)\, dt. \qquad (3.21)$$

Приравнивая в выражении (3.21) члены с одинаковыми степенями, найдем моменты импульсной характеристики: $\mu_0 = b_0/a_0$; $\mu_1 = (b_1 - a_1)\,\mu_0/a_0$;

$$\mu_2 = (b_2 - \mu_0 a_2 - 2\mu_1 a_1)/a_0; \ldots; \mu_n = \left[\frac{b_n}{n!} - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\mu_m a_{n-m}}{m!\,(n-m)!}\right] \times$$

$$\times\, n!/a_0 = \int_0^\infty t^n g(t)\, e^{-ct} dt,$$

где

$$a_n = \int_0^\infty t^n x(t)\, e^{-ct} dt; \quad b_n = \int_0^\infty t^n y(t)\, e^{-ct}\, dt$$

суть моменты входного и выходного сигналов.

В описанном способе существенную роль играет правильный выбор масштабного весового коэффициента c. Методике выбора c посвящен ряд работ (см., например, [89]). Установлено [65], что при использовании функций Лагерра изменение масштабного коэффициента в довольно широких пределах не меняет существенно точности определения импульсной характеристики.

Корреляционный метод. Корреляционный метод основан на использовании в качестве испытательного воздействия стационарного случайного процесса $x(t)$. При этом исходным для определения импульсной характеристики оказывается вместо соотношения (1.28) уравнение Винера—Хопфа [69]:

$$R_{xy}(\tau) = K \int_0^\infty g(t)\, R_{xx}(\tau - t)\, dt, \qquad (3.22)$$

где $R_{xx}(\tau)$ — автокорреляционная функция входного сигнала $x(t)$; $R_{xy}(\tau)$ — взаимная корреляционная функция входного и выходного сигналов $x(t)$ и $y(t)$. Если в качестве испытательного сигнала используется белый шум с дисперсией σ^2, то $R_{xx}(t) = \sigma^2\delta(t)$, и, используя фильтрующее свойство дельта-функции, получим из (3.22) $R_{xy}(t) = K\sigma^2 g(t)$, $t \geqslant 0$.

Таким образом, нахождение импульсной характеристики средства измерений сводится к вычислению и масштабному преобразованию взаимной корреляционной функции $R_{xy}(t)$ входного и выходного сигналов устройства.

Уравнение (3.22), так же как (1.28) и (1.29), может быть сведено к алгебраической системе

$$\frac{1}{\Delta t K} R_{xy}(\tau) = \sum_{k=0}^{m} g(k\Delta t) R_{xx}(\tau - k\Delta t), \qquad (3.23)$$

где $\tau = \Delta t, 2\Delta t, \ldots, k\Delta t$. Авто- и взаимная корреляционные функции суть детерминированные, поэтому к соотношениям (3.22), (3.23) применимы все рассмотренные выше методы регуляризации.

В заключение отметим, что полезные сведения о методах определения динамических характеристик устройств автоматики содержатся в обзорах [87, 101].

Проведенный анализ показывает, что нахождение полных характеристик линейных аналоговых средств измерений представляет собой весьма сложную (в формальной постановке — некорректную) задачу; сфера применения ряда простых и эффективных методов нахождения динамических характеристик ограничена выбором испытательных сигналов специальной формы, которые не во всех областях измерений могут быть воспроизведены с необходимой точностью; применение в метрологии многих методов, разработанных в теории автоматического управления, затруднительно из-за отсутствия оценок точности получаемых результатов; многие методы идентификации неприменимы в метрологии из-за сложной формы получаемых характеристик, делающей практически невозможным их нормирование.

3.2. ИСПЫТАТЕЛЬНЫЕ СИГНАЛЫ, ИХ СВОЙСТВА И ОПИСАНИЕ

Определение динамических характеристик средств измерений, как указано в § 3.1, осуществляется с помощью специального эксперимента, в котором на вход устройства воздействует известный (или определяемый в ходе эксперимента) испытательный сигнал. Испытательные сигналы характеризуются следующими свойствами: точностью воспроизведения (определения), максимальной скоростью изменений во времени (ширина спектра), формой временных изменений (форма спектра).

Испытательный сигнал является одним из компонентов метода определения динамических характеристик (метода идентификации), и свойства сигнала при заданных требованиях к результату идентификации определяются выбранным методом. Требования к параметрам испытательных сигналов, выражающим их точностные и временные (спектральные) свойства, рассмотрены ниже.

Как было указано в § 3.1, при определении характеристик средств измерений отдается предпочтение детерминированным испытательным сигналам как более точно воспроизводимым по сравнению со случайными. Детерминированные испытательные сигналы, как правило, имеют типовую форму. Среди типовых выделяются характеристические сигналы:

1) единичная ступень $U(t)$ (2.5);

2) дельта-импульс $\delta(t)$, связанный с $U(t)$ условием:

$$\delta(t) = \frac{dU(t)}{dt}; \qquad (3.24)$$

3) гармонический сигнал

$$s(t) = \sin(\omega_0 t + \varphi), \quad -\infty < t < \infty. \qquad (3.25)$$

Характеристические сигналы представляют собой математические абстракции, результат идеализации реальных сигналов. Поэтому их использование при анализе методов определения характеристик средств измерений требует оценивания погрешностей, обусловленных идеализацией. Характеристические сигналы можно рассматривать как предельные для семейств реальных сигналов при уменьшении (увеличении) некоторых характеристических параметров. Например, единичная ступень может быть представлена как предел для сигнала с монотонным нарастанием и единичным установившимся значением при стремлении к нулю длительности фронта нарастания. В частности,

$$U(t) = \lim_{\theta \to 0} x(t;\ \theta),$$

где

$$x(t;\ \theta) = \begin{cases} t/\theta, & 0 \leqslant t \leqslant \theta, \\ 1, & t > \theta. \end{cases} \qquad (3.26)$$

С целью упрощения рассматриваемых далее выражений введем обозначение прямоугольного импульса:

$$\Pi_{t_0}(t;\ \theta) = U(t - t_0) - U(t - t_0 - \theta), \qquad (3.27)$$

где t_0 — момент начала импульса; θ — длительность.

Дельта-импульс можно описать с помощью соотношения

$$\delta(t) = \lim_{\theta \to 0} [\Pi_0(t;\ \theta)/\theta],$$

т. е. как предел для прямоугольного импульса с уменьшающейся длительностью и растущим максимальным значением. Гармонический сигнал может рассматриваться как предел для узкополосного периодического сигнала при сужении полосы частот.

Другие типовые испытательные сигналы чаще всего конструируются на основе характеристических. Соответственно, можно выделить три группы сигналов: ступенчатые (с ненулевым установившимся значением), финитные, или импульсные (равные нулю вне определенного интервала времени), периодические. Среди ступенчатых и импульсных сигналов наибольший интерес представляют сигналы с монотонными нарастанием и срезом. Наиболее распространенным ступенчатым сигналом следует считать сигнал с линейным нарастанием (3.26). Его распространенность объясняется тем, что на практике закон нарастания сигнала зачастую неизвестен (или требует для своего определения сложных методов) и линейно нарастающий сигнал служит часто удобным первым приближением.

Другим часто используемым испытательным сигналом является сигнал с экспоненциальным нарастанием:

$$x(t) = [1 - \exp(-\beta t)]\, U(t). \qquad (3.28)$$

Значение этого сигнала обусловлено тем, что в основе принципов действия многих генераторов испытательных сигналов лежат процессы заряда и разряда (как, например, при формировании электрических сигналов в цепях, содержащих конденсаторы и другие емкостные элементы, катушки индуктивности и т. п.). Кроме указанных, могут быть использованы также сигнал с гармоническим нарастанием:

$$x(t) = 0{,}5\,(1 - \cos \pi t/\theta)\, \Pi_0(t;\ \theta) + U(t - \theta), \qquad (3.29)$$

а также с нарастанием по «колокольному» закону:

$$x(t) = [1 - \exp(-\beta^2 t^2)]\, U(t). \qquad (3.30)$$

Два последних сигнала можно использовать в тех случаях, когда при аппроксимации необходимо подчеркнуть отсутствие скачка производной у реального испытательного сигнала в начальный момент («плавное касание» оси абсцисс).

Для испытательных сигналов, характеризующихся весьма плавным изменением на начальном участке (касание оси абсцисс слева сколь угодно высокого порядка), может оказаться полезным следующее описание:

$$x(t) = \left[1 - \frac{\sin(\pi t/\theta)}{\pi t/\theta}\right] \Pi_0(t;\ \theta) + U(t - \theta). \qquad (3.31)$$

Среди импульсных сигналов следует в первую очередь выделить следующие сигналы:

прямоугольный импульс $\Pi_0(t;\ \theta)$;

треугольный импульс

$$x(t) = \frac{t}{\theta}\, \Pi_0(t;\ \theta) + \left(2 - \frac{t}{\theta}\right) \Pi_\theta(t;\ \theta); \qquad (3.32)$$

синусоидальный импульс

$$x(t) = \left(\sin \frac{\pi}{\theta}\, t\right) \Pi_0(t;\ \theta); \qquad (3.33)$$

смещенный косинусоидальный импульс

$$x(t) = 0{,}5 \left(1 - \cos \frac{2\pi}{\theta}\, t\right) \Pi_0(t;\ \theta). \qquad (3.34)$$

К импульсным можно также отнести условно сигналы, убывание которых до нуля происходит на бесконечности:

импульс с линейным нарастанием и экспоненциальным убыванием

$$x(t) = \frac{t}{\theta}\, \Pi_0(t;\ \theta) + \{\exp[-\beta(t - \theta)]\}\, U(t - \theta); \qquad (3.35)$$

«колокольный» импульс

$$x(t) = \exp(-\beta^2 t^2). \qquad (3.36)$$

Наиболее распространенными периодическими сигналами являются последовательности прямоугольных и трапецеидальных импульсов. Сюда же примыкают псевдослучайные испытательные сигналы, которые представляют собой периодически повторяющиеся серии прямоугольных сигналов различной длительности, кратной периоду тактовых импульсов.

В некоторых областях измерений могут использоваться случайные испытательные сигналы (например, турбулентные пульсации температуры при измерениях параметров водных потоков). Эти сигналы предполагаются стационарными эргодическими. Чаще всего используются сигналы со следующими спектральными (корреляционными) свойствами:

белый шум (дельта-коррелированный сигнал)

$$\Phi_{xx}(\omega) = 1; \quad R_{xx}(\tau) = \delta_0(\tau); \qquad (3.37)$$

окрашенный («розовый») шум

$$\Phi_{xx}(\omega) = 2\alpha/(\omega^2 + \alpha^2); \quad R_{xx}(\tau) = \exp(-\alpha|\tau|); \qquad (3.38)$$

колебание со случайной огибающей

$$\Phi_{xx}(\omega) = \alpha \left[\frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \alpha^2} + \frac{1}{(\omega + \omega_0)^2 + \alpha^2}\right];$$

$$R_{xx}(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau. \qquad (3.39)$$

Способы описания испытательных сигналов разнообразны. Наиболее естественно аналитическое описание изменений сигналов во времени (2.5), (3.24) — (3.36). Для характеристических сигналов указанным выражениям однозначно соответствуют следующие спектральные представления (имеются в виду комплексная спектральная плотность и ее модуль — амплитудный спектр, полученные с использованием симметричной формы записи пары преобразований Фурье):

$$S_U(j\omega) = 1/(j\sqrt{2\pi}\omega); \quad S_U(\omega) = 1/(\sqrt{2\pi}\omega); \qquad (3.40)$$

$$S_\delta(j\omega) = [\exp(-j\omega t)]/\sqrt{2\pi}; \quad S_\delta(\omega) = 1/\sqrt{2\pi}; \qquad (3.41)$$

$$S_s(j\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, [e^{j\varphi}\delta(\omega - \omega_0) + e^{-j\varphi}\delta(\omega + \omega_0)];$$

$$S_s(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]. \qquad (3.42)$$

В теоретических исследованиях обычно используются интегральные представления сигналов (интегральные преобразования) вида:

$$x(t) = \int_{\mathfrak{T}} u(\tau)\, \varphi(t,\ \tau)\, d\tau, \quad t \in \mathcal{T}, \qquad (3.43)$$

где $\varphi(t, \tau)$ — базисная функция (базисное ядро интегрального преобразования). Представлению (3.43) может соответствовать выражение

$$u(\tau) = \int_{\mathcal{T}} x(t)\,\tilde{\varphi}(\tau, t)\,dt, \quad \tau \in \mathfrak{T}, \tag{3.44}$$

где $\tilde{\varphi}(\tau, t)$ — сопряженное базисное ядро. При существовании сопряженного базиса (3.43) и (3.44) образуют пару преобразований. Самыми распространенными интегральными преобразованиями являются преобразование Фурье и Лапласа. Для представления узкополосного сигнала в виде обобщенного колебательного процесса используется преобразование Гильберта.

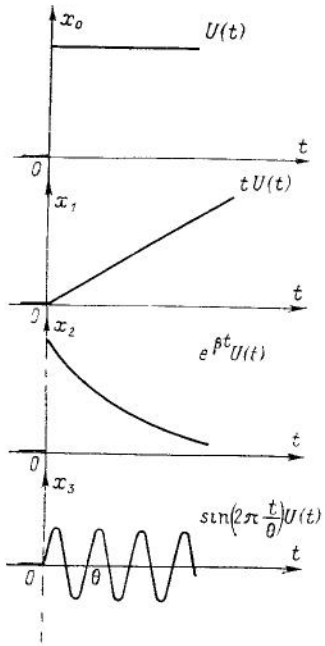


Рис. 3 2. Типовые испытательные сигналы

При решении практических задач используются дискретные представления сигналов в виде функционального ряда

$$x(t) = \sum_{i=1}^{N} a_i \varphi_i(t), \tag{3.45}$$

где $\varphi_i(t)$ — специально подобранные функции. В случае если $\varphi_i(t)$ — базисные функции, то (3.45) представляет собой дискретный аналог выражения (3.43). В зависимости от конкретного вида базисной функции выражение (3.45) приобретает форму разложения по комплексным гармоническим функциям (ряд Фурье), полиномам и функциям Лежандра и Чебышева, функциям Лагерра, Эрмита, Уолша. Выражение (3.45) удобно тем, что от него легко перейти к приближенным конечным представлениям сигналов. Приближенный подход позволяет отказаться от требования ортогональности функций $\varphi_i(t)$ и конструировать представления (3.45) на основе простых «геометрических» соображений. В работе [26] предложен набор типовых испытательных сигналов, с помощью которых можно аппроксимировать разнообразные по форме реальные сигналы. Заменив в указанном наборе «составные» сигналы — треугольный и тригонометрические импульсы — элементарными, придем к следующей совокупности типовых сигналов (см. рис. 3.2).

Возможность конструирования с помощью типовых сигналов более сложных испытательных сигналов иллюстрируется следующими примерами:

прямоугольный импульс (3.27)

$$\Pi_0(t;\ \theta) = x_0(t) - x_0(t-\theta);$$

симметричный треугольный импульс (3.32)

$$x(t) = [x_1(t) - 2x_1(t-\theta) + x_1(t-2\theta)]/\theta;$$

сигнал с экспоненциальным нарастанием (3.28)

$$x_\beta(t) = x_0(t) - x_2(t);$$

импульс с линейным нарастанием и экспоненциальным убыванием (3.35)

$$x_{\theta\beta}(t) = [x_1(t) - x_1(t-\theta)]/\theta - x_0(t-\theta) + x_2(t-\theta);$$

сигнал с косинусоидальным нарастанием до установившегося значения

$$x_{U\theta}(t) = [x_0(t) - x_0(t-\theta/2)]\,[1 - x_3(t+\theta/4)] + x_0(t-\theta/2); \tag{3.46}$$

синусоидальный импульс

$$x(t) = [x_0(t) - x_0(t-\theta/2)]\,x_3(t); \tag{3.47}$$

сигнал с синусоидальным нарастанием до установившегося значения

$$x(t) = [x_0(t) - x_0(t-\theta/4)]\,x_3(t) + x_0(t-\theta/4); \tag{3.48}$$

смещенный косинусоидальный импульс

$$x(t) = 0{,}5\,[x_0(t) - x_0(t-\theta)]\,[1 + x_3(t-\theta/4)]. \tag{3.49}$$

Приведенные выше выражения суть модели испытательных сигналов. Реальные сигналы, естественно, сложнее своих моделей и описываются с их помощью лишь приближенно. Поскольку в алгоритмах обработки данных при определении динамических характеристик средств измерений используются модели испытательных сигналов, постольку указанная неточность описания обусловливает одну из составляющих погрешности определения характеристик. Значимость этой погрешности обусловлена методом определения характеристик (алгоритмом обработки данных); в частности, при использовании прямых методов она может быть одной из существенных (и даже определяющих) составляющих.

Для реализации корреляционного метода определения характеристик требуется случайный испытательный сигнал. Сигналы, представляющие собой случайные физические процессы, например шумы в газоразрядных и полупроводниковых электронных приборах, во многих случаях не обладают требуемой воспроизводимостью вероятностных и корреляционных (спектральных) свойств. Поэтому в метрологии, в первую очередь в области электрических измерений, получили преимущественное распространение псевдослучайные испытательные сигналы, представляющие собой двоичные последовательности максимальной длины (M-последовательности) [88]. M-последовательности (рис. 3.3) генерируются с помощью регистров сдвига, которые состоят из последовательно соединенных двоичных триггеров и запускаются тактовыми импульсами. M-последовательность обладает следующими свойствами:

а) автокорреляционная функция, вычисленная формально в предположении случайной начальной фазы последовательности, представляет собой периодическую последовательность импульсов треугольной формы (рис. 3.4);

б) параметры корреляционной функции определяются характеристиками генератора тактовых импульсов и регистра: амплитуда a^2

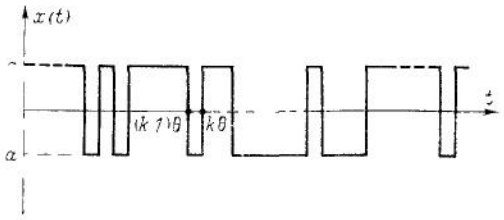


Рис 3 3. Участок M-последовательности

(«мощность» последовательности, аналог дисперсии) — логическим уровнем a (напряжением питания регистра), длительность импульса 2θ — периодом повторений тактовых импульсов θ, период $n\theta$ — значением θ и количеством периодов последовательности n;

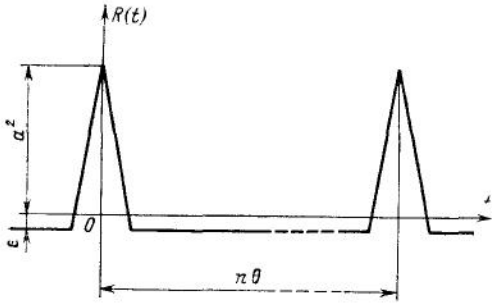


Рис. 3 4 Автокорреляционная функция M-последовательности

в) период последовательности $T = (2^N - 1)\ \theta$ и определяется числом разрядов регистра N;

г) последовательность обладает наибольшей мощностью среди сигналов, ограниченных по амплитуде;

д) если обозначить логические состояния триггеров регистра сдвига с помощью 0 и 1 и рассматривать образованные этими состояниями числа, возникающие последовательно при поступлении тактовых импульсов, как двоичные числа между 0 и 2^{N-1}, то каждое возникает один и только один раз, за исключением числа 00 . . . 0, которое отсутствует;

е) если обозначить логические состояния триггеров с помощью $+1$ и -1, то число пересечений последовательностью нулевого уровня равно 2^{N-1}.

Легко видеть, что путем надлежащего выбора параметров a, θ и N (n) можно добиться того, что автокорреляционная функция M-последовательности будет как угодно мало отличаться от дельта-

функции. Это означает, что по своим спектральным свойствам M-последовательность может быть приближена к белому шуму.

Спектр плотности «мощности» M-последовательности, вычисленный формально как амплитудный спектр ее автокорреляционной функции, имеет вид:

$$S(\omega_k) = 2R_M(0)\frac{1-\cos\omega_k\theta}{\omega_k^2\theta^2}\tau, \quad \omega_k = 2\pi k/T, \quad k = 0,\ 1,\ \ldots$$

Поскольку T кратно θ, то $S(\omega_k)$ обращается в нуль при $k = mT/\theta$, $m = 1, 2, \ldots$ В полосе частот $(0,\ 2\pi/\theta)$ сосредоточено примерно 90 % «энергии» M-последовательности. Ширина спектра $S(\omega_k)$ возрастает приблизительно пропорционально отношению T/θ. В то же время число триггеров N, необходимое для увеличения T/θ, растет существенно медленнее. При $(T/\theta) > 10$ для увеличения T/θ на порядок необходимо увеличить N на $\Delta N = \log_2 10$, т. е. примерно на 3. Ниже приведены значения верхней граничной частоты спектра $S(\omega_k)$, соответствующей его спаду на 10 % относительно уровня $S(0)$, принятого за единицу:

Число триггеров N	7	10	14	17	20
Отношение T/θ	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6
Приведенная верхняя граничная частота $\omega_{k\text{в}}/(2\pi/T)$ . .	10^0	10^1	10^2	10^3	10^4

Таким образом, псевдослучайные двоичные последовательности максимальной длины обладают высокой воспроизводимостью цифровых сигналов, характерной для шумоподобных сигналов широкой полосой частот и хорошей равномерностью спектра, а также отличаются сравнительной простотой воспроизведения.

Качество испытательных сигналов определяется тем, насколько они отвечают необходимым требованиям к их временным (спектральным) свойствам и к точности их воспроизведения (определения). Ниже рассмотрены указанные требования.

Разделение точностных и спектральных требований невозможно для некоторых испытательных сигналов. Во-первых, это относится к характеристическим сигналам, используемым при прямом определении характеристик. Действительно, любое искажение ступенчатого сигнала приводит к принципиальному изменению его спектра. С другой стороны, при идеальном воспроизведении ступенчатого сигнала невозможно предъявить требования к его спектральным свойствам, поскольку единственный параметр — уровень — не оказывает влияния на его спектр. Сказанное полностью относится также к дельта-импульсу и гармоническому сигналу.

Во-вторых, невозможность разделения требований существует и для некоторых сигналов, представляющих собой комбинацию характеристических. Примером такого рода является прямоугольный импульс, который может быть представлен как разность двух сдвинутых относительно друг друга ступенчатых сигналов. В отличие от характеристических сигналов идеальный прямоугольный импульс допускает установление требований к его спектру (требо-

вание к длительности). Однако при любых искажениях импульса длительности его фронта и среза становятся ненулевыми, что принципиально влияет на его спектр.

Таким образом, для характеристических и некоторых скомбинированных из них испытательных сигналов возможно установление лишь совокупных требований к точностным и спектральным свойствам. Эти требования должны базироваться на соотношениях и зависимостях, представленных в § 3.3. Полученные в § 3.3 оценки погрешностей нахождения переходной, импульсной и частотных характеристик дают возможность определить значение параметра реального испытательного сигнала, обеспечивающее требуемую точность нахождения нужной характеристики. Если задана норма допускаемой погрешности нахождения характеристики $\delta_{доп}$ и известна оценка нормы погрешности регистрации выходного сигнала δ_u, то, образуя разность

$$\| \delta_{доп} \| - \| \delta_y / K \| = \| \delta_\theta \|, \tag{3 50}$$

получим, что $\| \delta_\theta \|$ выражает допускаемую погрешность нахождения характеристики, обусловленную неидеальностью испытательного сигнала. Что касается нехарактеристических сигналов, используемых в косвенных методах определения характеристик, то требования к их точностным и спектральным свойствам могут быть сформулированы раздельно. Если для данного косвенного метода разработан способ оценивания погрешностей найденных этим способом характеристик, то это означает, что связь между погрешностями исходных данных (включая погрешность воспроизведения испытательного сигнала) и погрешностью найденной характеристики выражена либо в виде соотношения (формулы, графика и т. п.), либо в виде алгоритма. В первом случае допускаемая погрешность воспроизведения (регистрации) испытательного сигнала может быть непосредственно установлена, исходя из требуемой точности определения характеристик с помощью «обратного» соотношения. Во втором случае задача может быть решена путем последовательных приближений, т. е. расчетов по известному алгоритму оценок погрешностей определения характеристик для ряда значений погрешности воспроизведения испытательного сигнала и выбора из указанного ряда предельных значений. В любом случае решение задачи специфично для каждого косвенного метода (способа оценивания его погрешности). Поэтому установление общих соотношений, выражающих требования к точностным свойствам испытательных сигналов, затруднительно, и подобные соотношения обычно мало информативны.

Наиболее общее из указанных соотношений может быть получено из операторного уравнения (1.27). Вводя в него погрешности δx, δy и $\delta \mathbf{B}$, раскрывая скобки и переходя к нормам, получим

$$\| \delta x \| \leqslant \frac{\| \delta y \| + \| \delta \mathbf{B} \| \, \| x \|}{\| (\mathbf{B} + \delta \mathbf{B})^{-1} \|^{-1}}. \tag{3.51}$$

Из выражения (1.27) можно получить также

$$\| \delta x \| \leqslant \frac{\| \mathbf{B}^{-1} \| \, \| \delta y \| + \| \mathbf{B}^{-1} \delta \mathbf{B} \| \, \| x \|}{1 - \| \mathbf{B}^{-1} \delta \mathbf{B} \|} \tag{3 52}$$

при условии $\| \mathbf{B}^{-1} \delta \mathbf{B} \| < 1$. Усиливая неравенство (3.52), получим в симметричной форме

$$\frac{\| \delta x \|}{\| x \|} \leqslant \frac{\| \delta y \| / \| y \| + \| \delta \mathbf{B} \| / \| \mathbf{B} \|}{1 - \| \delta \mathbf{B} \| / \| \mathbf{B} \|}. \tag{3.53}$$

Оценки, получаемые из неравенств (3.51) — (3.53), имеют практический смысл для случаев, когда норма оператора $\mathbf{B}$ близка к единице (динамически точные средства измерений). В остальных случаях эти оценки оказываются завышенными.

Общее соотношение во временной области, на основе которого могут быть установлены требования к точностным свойствам испытательных сигналов, имеет вид

$$\int_0^t g(t-\tau) \, \delta x(\tau) \, d\tau = \int_0^t \delta g(t-\tau) \, x(\tau) \, d\tau, \tag{3.54}$$

где $\delta x(t)$ — погрешность воспроизведения (регистрации) испытательного сигнала; $\delta g(t)$ — погрешность определения характеристик; $x(t)$ — реальный испытательный сигнал.

Исходя из максимального модуля ε допускаемой погрешности определения импульсной характеристики, из выражения (3.54) имеем

$$\left[\left| \int_0^t g(t-\tau) \, \delta x(\tau) \, d\tau \right| \Big/ \int_0^t |x(\tau)| \, d\tau \right] \leqslant \varepsilon. \tag{3.55}$$

Это неравенство выражает необходимое условие, которому должен удовлетворять испытательный сигнал. Для его выполнения достаточно соблюдение неравенства

$$\max |\delta x(t)| < \left[\varepsilon \int_0^t |x(\tau)| \, d\tau \Big/ \int_0^t |g(\tau)| \, d\tau \right]. \tag{3.56}$$

В частотной области неравенству (3.55) соответствует соотношение

$$G(\omega) \, |\delta X(\omega) / X(\omega)| \leqslant \varepsilon. \tag{3.57}$$

Неравенства (3.55) и (3.57) полезны при анализе сигналов в качестве испытательных, так как они позволяют однозначно решить вопрос о непригодности рассматриваемого сигнала. Достаточные условия пригодности сигналов могут быть установлены на основе исследования конкретных методов определения характеристик.

Рассмотрим ниже требования к точностным свойствам испытательных сигналов, используемых в косвенных методах определения характеристик, которые представлены в § 3.3.

Для метода дискретизации уравнения свертки разработаны способы получения интегральной и локальной оценок погрешности

определения импульсной характеристики, выраженные с помощью неравенства (3.83) и системы (3.85).

Исходя из уравнения (3.12), можно получить аналогично (3.51) и (3.52)

$$\|\delta \mathbf{X}\| \leqslant \frac{\|\delta \mathbf{Y}\|/(\Delta t K) + \|\mathbf{X}\|\,\|\mathbf{G}\|}{\|(\mathbf{G}+\delta \mathbf{G})^{-1}\|^{-1}}; \tag{3.58}$$

$$\|\delta \mathbf{X}\| \leqslant \frac{\|\mathbf{G}^{-1}\delta \mathbf{Y}\|/(\Delta t K) + \|\mathbf{G}^{-1}\delta \mathbf{G}\|\,\|\mathbf{X}\|}{1-\|\mathbf{G}^{-1}\delta \mathbf{G}\|} \tag{3.59}$$

при условии $\|\mathbf{G}^{-1}\delta \mathbf{G}\|<1$. Из выражения (3.59), как и выше, можно вывести усиленное неравенство

$$\frac{\|\delta \mathbf{X}\|}{\|\mathbf{X}\|} \leqslant \frac{(\Delta t K)^{-1}\|\delta \mathbf{Y}\|/\|\mathbf{Y}\| + \|\delta \mathbf{G}\|/\|\mathbf{G}\|}{1-\|\delta \mathbf{G}\|/\|\mathbf{G}\|}. \tag{3.60}$$

Относительно оценок (3.58) — (3.60) сохраняет силу сказанное выше по поводу (3.51) — (3.53).

Если исходное дискретизированное уравнение свертки (3.12) записать в симметричной форме:

$$\mathbf{Y} = \Delta t K \mathbf{G} \mathbf{X}, \tag{3.61}$$

где $\mathbf{G}$ — в частном случае треугольная матрица, аналогичная $\hat{\mathbf{X}}$, а $\mathbf{X}$ — вектор-столбец, то, обозначив верхнюю границу погрешности определения импульсной характеристики ε, найдем

$$\|\delta \mathbf{X}\| \leqslant \frac{\|\mathbf{X}\| + \lambda/(n\,\varepsilon \Delta t K)}{1-\Omega'}\,\Omega',$$

де Ω' — фактор обусловленности матрицы $\mathbf{G}$. Исходя из уравнения (3.61), можно получить локальные оценки границ допускаемых погрешностей воспроизведения (регистрации) испытательного сигнала, соответствующих заданной погрешности ε определения импульсной характеристики. Эти оценки находятся решением системы:

$$\delta x_k = (\lambda + \varepsilon x)\, b_k' / (1-\Omega'), \quad k = 1, \ldots, n,$$

где $x = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$; $b_k' = \sum_{i=1}^{n} |b_{ki}'|$, b_{ki}' — элемент обратной матрицы $\mathbf{G}^{-1}$.

В методе многократного интегрирования погрешность определения испытательного сигнала $x(t)$ входит в результирующее выражение для погрешности $\delta \mathbf{A}$ вектора искомых коэффициентов дифференциального уравнения сложным образом через посредство матриц $\delta \mathbf{R}$ и $\delta \mathbf{F}$, элементами которых являются интегралы от $x(t)$. Выразить в явном виде погрешности $x(t)$ в общем случае не представляется возможным, и поэтому допускаемые погрешности $x(t)$ следует находить методом последовательных приближений, как указано выше.

При применении метода для исследования простых средств измерений удается выразить в явном виде требования к точностным

свойствам испытательных сигналов. В качестве примера такого рода рассмотрим определение параметра устройства, представляющего собой инерционное звено 1-го порядка с импульсной характеристикой

$$g(t) = T^{-1}\exp(-t/T). \tag{3.62}$$

Используя метод, получим $T = -\int_0^{\tau} \delta_g(t)\,dt / y(\tau)$, где $\delta_g(t) = y(t) - x(t)$.

В методе используется номинальное выражение для входного сигнала — $x_{\text{н}}$, в действительности же на вход устройства поступает искаженный сигнал $\tilde{x} = x_{\text{н}} + \delta x$ и вместо истинного значения параметра T находится его оценка $\tilde{T} = T + \delta T$. Из уравнения (3.62) имеем

$$\tilde{T} = \left(1 + \int_0^{\tau} \delta x\,dt \Big/ \int_0^{\tau} \delta_g\,dt\right) \int_0^{\tau} (x_{\text{н}} - y)\,dt / y(\tau),$$

откуда

$$\delta T = T \int_0^{\tau} \delta x\,dt \Big/ \int_0^{\tau} \delta_g\,dt. \tag{3.63}$$

С точностью до величин второго порядка малости относительно δT получаем из выражения (3.62)

$$\delta g(t) = -\delta T\,(1 + t/T)\exp(-t/T)/T^2. \tag{3.64}$$

С другой стороны, $\delta g(t)$ должно быть меньше ε. Подставляя в (3.64) выражение для δT из (3.63), получим

$$|\delta g(t)| = \left|(1 + t/T)\exp(-t/T) \int_0^{\tau} \delta x\,dt \Big/ \int_0^{\tau} \delta_g\,dt\right| T^{-1} \leqslant \varepsilon.$$

Видно, что наибольшего значения модуль $|\delta g(t)|$ достигает при $t = 0$. Следовательно,

$$\left|\int_0^{\tau} \delta_g\,dt\right| > (T\varepsilon)^{-1}\left|\int_0^{\tau} \delta x\,dt\right|. \tag{3.65}$$

Пусть в качестве испытательного используется реальный ступенчатый сигнал (3.26). Тогда на основе решения прямой задачи для звена 1-го порядка имеем

$$\left|\int_0^{\tau} \delta_g\,dt\right| = \begin{cases} |\tau + T\exp(-\tau/T) - T|\,T/\theta, & \tau \leqslant \theta, \\ T + \exp(-\tau/T)\,|1 - \exp(\theta/T)|\,T^2/\theta, & \tau > \theta. \end{cases} \tag{3.66}$$

Построив графики зависимости интеграла $\int_0^{\tau} \delta_g\,dt$ от T при различных θ, можно, задавшись видом искажений испытательного сигнала δx и используя неравенство (3.65), делать заключение о пригодности сигнала (3.26).

Для средств измерений, представляющих собой звенья 2-го порядка, аналог неравенства (3.65) получается более громоздким. Погрешность метода в этом случае зависит от параметров T_1, T_2 и от параметра θ, характеризующего сигнал. Поэтому в этом случае не удается построение номограмм, упрощающих процедуру проверки пригодности испытательного сигнала.

В разработанном адаптивном методе определения полных характеристик средств измерений связь между погрешностями исходных данных и погрешностями коэффициентов найденной передаточной функции имеет по существу форму алгоритма. Поэтому для установления требований к точности воспроизведения испытательного сигнала может быть использован только метод последовательных приближений. Его использование облегчается наличием разработанной программы для оценивания погрешностей.

Рассмотрим далее вопрос об установлении требований к спектральным свойствам испытательных сигналов.

Критерий качества сигнала как испытательного должен быть основан на достаточности искажений этого сигнала исследуемым устройством. Действительно, «хорошим» рабочим сигналом считается тот, который искажается в устройстве не слишком сильно с точки зрения цели измерений (динамическая погрешность не превышает заданную). Это означает, что выходной сигнал устройства содержит достаточную для достижения указанной цели информацию о входном сигнале Иными словами, динамические свойства средства измерений не слишком сильно проявляются при измерениях с данным входным сигналом.[1] В противоположность рабочему сигналу «хорошим» испытательным сигналом должен считаться тот, который позволяет наиболее полно (для поставленной цели) выявить динамические свойства устройства. Проявлением указанных свойств является возникновение динамических искажений выходного сигнала по сравнению с входным. Следовательно, показателем того, что свойства средства измерений выявлены достаточно, служит погрешность, превышающая определенный уровень.

Сказанное можно подытожить следующим образом. Выходной сигнал средства измерений в динамическом режиме несет информацию о входном сигнале и о динамических свойствах устройства. Чем меньше в выходном сигнале информации о свойствах устройства, тем больше информации о входном сигнале, и наоборот. «Хороший» рабочий сигнал почти полностью сохраняется в выходном сигнале, а «хороший» испытательный сигнал слабо заметен в выходном. При этом необходимо заметить, что «улучшение» испытательного сигнала (расширение спектра в область высоких частот, увеличение пикового значения и т. д.) не должно приводить к слишком жесткому режиму средства измерений при испытаниях, с тем

[1] Сказанное относится в первую очередь к устройствам, предназначенным для регистрации и масштабного преобразования сигналов, однако оно может быть с необходимыми уточнениями распространено и на функциональные преобразователи

чтобы избежать проявления нелинейных и других нежелательных свойств устройства, которые могут быть характерны для него вне рабочей области применения.

Таким образом, требования к спектральным свойствам испытательного сигнала выражаются неравенством $\|\delta_{\text{дин}}\| \geqslant d$, где d — заданный уровень погрешности. В операторной форме для средств измерений, предназначенных для масштабного преобразования x,

$$\|(\mathbf{B}-\mathbf{I})x\| \geqslant d, \tag{3.67}$$

где $\mathbf{B}$ выражает динамические свойства устройства.

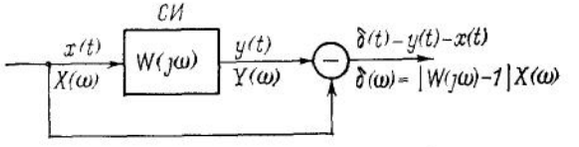


Рис. 3.5. Структурная схема образования динамической погрешности средства измерения *СИ*

Задачу определения требований к спектральным свойствам сигналов естественно решать в частотной области. Эта задача имеет два основных варианта: первый связан с определением полной динамической характеристики (совокупности АЧХ и ФЧХ), а второй — с определением АЧХ в ограниченном диапазоне частот.

Рассмотрим задачу в первом варианте. Структурная схема образования динамической погрешности представлена на рис. 3.5. Будем считать, что погрешность характеризуется нормой в $\mathscr{L}_2$. Тогда неравенство (3.67) примет вид

$$\int_0^\infty [|W(j\omega)-1|X(\omega)]^2 d\omega \geqslant d^2. \tag{3.68}$$

Установленный уровень погрешности при исследовании динамических свойств устройства должен быть связан с требуемой точностью измерений, для которых предназначено устройство. Если норма допускаемой погрешности при измерениях равна Δ, то $d = k\Delta$, где $k \geqslant 1$. Нахождение k представляет собой нетривиальную задачу. Строго говоря, она может быть решена лишь путем последовательных приближений. Установив некоторое k_0, следует оценить погрешность определения динамических характеристик при выполнении неравенства [3.68], а затем найти влияние этой погрешности на точность оценки динамической погрешности. По результатам такого анализа можно уточнить k_0 (см. РД 50-404-83. Методические указания. Определение динамических характеристик линейных аналоговых средств измерений с сосредоточенными параметрами. Общие положения). Этот подход чрезвычайно сложен и может быть реализован только в отдельности для каждого конкретного метода определения характеристик. Поэтому учитывая относительно слабое влияние погрешностей определения динами-

ческих характеристик на оценки динамической погрешности, можно рекомендовать на практике устанавливать k в диапазоне 3—10, причем использовать большие значения при исследованиях более точных устройств.

Требования к сигналу при заданном k устанавливаются следующим образом. Преобразуя подынтегральное выражение, запишем (3.68) в форме

$$\int_0^\infty [A^2(\omega) - 2A(\omega)\cos\Phi(\omega) + 1] X^2(\omega)\, d\omega \geqslant d. \qquad (3.69)$$

Общие выражения для АЧХ и ФЧХ средств измерений с трехпараметрической передаточной функцией 2-го порядка, описывающих инерционные и колебательные звенья с дифференцированием и без него, могут быть получены из табл. 2.1 (6-й столбец) при $T_3 = T_5 = 0$. Подставляя эти выражения в (3.69), получим

$$\frac{f_X^2(T_1)}{T_1}\int_0^\infty \left\{ \frac{1 + m_4^2 z^2}{(1-z^2)^2 + 4\gamma^2 z^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{2\left[1 - (1 - 2m_4\gamma)z^2\right]\sqrt{1 + m_4^2 z^2}}{\sqrt{\{[1-(1-2m_4\gamma)z^2]^2 + [(m_4 - 2\gamma)z - m_4 z^3]^2\}\,[(1-z^2)^2 + 4\gamma^2 z^2]}} + 1 \right\} \times$$

$$\times X^2(z)\, dz \geqslant d, \qquad (3.70)$$

где $z = \omega T_1$; $m_4 = T_4/T_1$; $f_X(T_1)$ — множитель, зависящий от X и определяемый равенством $f_X(T_1)\, X(z) = X(\omega)$.

Неравенство (3.70) представляет собой основное соотношение, позволяющее найти требуемые значения параметров конкретного испытательного сигнала, определяющих его спектр, а именно такие, которые обеспечивают достаточно полное выявление динамических свойств исследуемых устройств. Область возможного применения неравенства (3.70) столь же широка, что и соответствующей передаточной функции, которая описывает большое число линейных средств измерений.

Для устройств, не содержащих в своем составе дифференцирующих звеньев ($T_4 = 0$), неравенство (3.70) упрощается:

$$\frac{f_X^2(T_1)}{T_1}\int_0^\infty \left[\frac{z^2(1 + 4\gamma^2 + z^2)}{(1-z^2)^2 + 4\gamma^2 z^2} + 1\right] X^2(z)\, dz \geqslant d.$$

Для инерционного звена 1-го порядка ($\gamma = m_4 = 1$) получается

$$\frac{f_X^2(T_1)}{T_1}\int_0^\infty \frac{z^2}{1+z^2} X^2(z)\, dz \geqslant d. \qquad (3.71)$$

Пусть, например, звено 1-го порядка исследуется с помощью ступенчатого сигнала (3.26) с амплитудным спектром

$$S(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\omega}} \cdot \frac{|\sin(\omega\theta/2)|}{\omega\theta/2}. \qquad (3.72)$$

Подставляя (3.72) в (3.71), получим

$$T_1 \frac{I(k)}{k} \geqslant \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, d,$$

где

$$I(k) = \int_0^\infty \frac{\sin^2 kz}{z^2(1+z^2)}\, dz, \quad k = \frac{\theta}{2T_1}. \qquad (3.73)$$

Неравенство устанавливает требуемое соотношение между параметрами испытательного сигнала и исследуемого устройства.

Во втором варианте задачи речь должна идти об установлении требований к испытательному сигналу при определении частотных характеристик в заданном (рабочем) диапазоне частот. Пусть рабочий диапазон задан своей верхней границей $\omega_в$, соответствующей приведенному уровню η. При задании η в качестве нормирующего используется значение АЧХ на определенной (номинальной) частоте, например $\omega_н = 0$ для устройства с «открытым входом». Значение η часто устанавливается равным 6 дБ, 3 дБ и менее. В указанном варианте критерий качества не может базироваться на искажениях сигнала в диапазоне частот $[0, \infty)$, как было принято выше. Сохранение того же критерия для исследуемого рабочего диапазона имеет тот недостаток, что становится невозможным оценивание искажений непосредственно во временной области (использование равенства Парсеваля). Кроме того, в случае конечного диапазона частот усложняются расчеты, в которые входит вычисление интегралов, подобных (3.73).

Поэтому для рассматриваемого варианта целесообразно принять другой критерий. Он может быть основан на том, что параметр (в частности, «энергия») отклика средства измерений в элементарном поддиапазоне частот превышает погрешность определения динамических характеристик. Формально такой критерий выражается неравенством

$$\int_\omega^{\omega+\delta\omega} [A(\omega)\, X(\omega)]^2\, d\omega \geqslant k\sigma^2, \qquad (3.74)$$

где $\delta\omega$ — разрешающая способность по частоте метода определения динамических характеристик; σ^2 — среднее квадратическое значение погрешности.

Относительно коэффициента k сохраняют силу замечания, сделанные выше. Понятие разрешающей способности метода требует пояснений. Многие импульсные и реальные ступенчатые сигналы имеют спектр, по форме аналогичный изображенному на рис. 3.6.

Если χ обозначает минимальный уровень интенсивности спектральных компонентов, различимых во входном сигнале исследуемого устройства на фоне погрешностей его определения, то компоненты с интенсивностью, меньшей χ, следует считать отсутствующими в спектре испытательного сигнала. При определении частотных характеристик прямым методом поточечно период дискретизации по частоте не может быть меньше, чем ширина области $\delta\omega$, лежащей вблизи «нулевых точек» ω_{0k} и ограниченной абсциссами точек пересечения уровня χ с функцией $X(\omega)$. Следует заметить, что проблема конечной разрешающей способности по частоте сохраняется в неявном виде и при определении характеристик во временной области. Если при обработке экспериментальных данных используется «непрерывный» алгоритм или аппроксимация непрерывными функциями, то с указанной проблемой в явном виде не приходится сталкиваться в силу аналитических свойств используемых в практике функций. Если же используются дискретные алгоритмы, то проблема оказывается скрытой из-за наличия конечного периода дискретизации по времени.

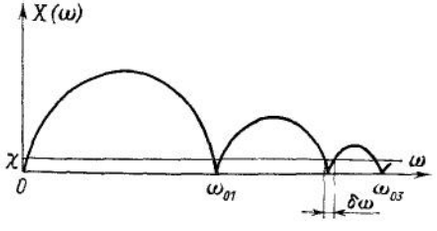


Рис. 3.6. Спектр испытательного сигнала

Проблема конечной разрешающей способности по частоте методов определения динамических характеристик требует специального рассмотрения, в особенности для методов, использующих испытательные сигналы, аналогичные представленному на рис. 3.6. Это рассмотрение выходит за рамки данной работы, поэтому представляется целесообразным в настоящее время рекомендовать использовать испытательные сигналы с такими параметрами, чтобы удовлетворялось неравенство $\omega_{\chi 1} \geqslant \omega_{в}$, где $\omega_{\chi 1}$ — минимальный корень уравнения $X(\omega) = \chi$.

Использование неравенства (3.74) как основного соотношения для установления спектральных требований к испытательным сигналам аналогично использованию (3.68) в первом варианте задачи. Разница заключается лишь в упрощении подынтегральных выражений. Так, для звена с трехпараметрической передаточной функцией получаем вместо выражения (3.70)

$$\frac{f_X^2(T_1)}{T_1} \int_z^{z+\delta z} \frac{1 + m_4^2 z^2}{(1 - z^2)^2 + 4\gamma^2 z^2} X^2(z)\, dz \geqslant k\sigma^2.$$

Относительно возможностей создания испытательных сигналов нужно заметить следующее.

Воспроизведение испытательных электрических сигналов не представляет проблемы, за исключением создания широкополосных сигналов (ультракоротких импульсов, высокочастотных периодических и быстро нарастающих сигналов). Генератор испытательного сигнала в общем случае содержит два основных структурных элемента: источник опорного сигнала (например, ступенчатого или прямоугольного) и формирователь сигнала с требуемым законом изменения во времени или спектром (например, фильтр нижних частот). Сложные сигналы могут быть сформированы с помощью ЭВМ. Подключение к ЭВМ цифро-аналогового преобразователя позволяет построить по существу генератор испытательных сигналов произвольных (требуемых) форм. ЭВМ-«генератор» одновременно может быть использован для обработки экспериментальных данных. Это позволяет в итоге конструировать автоматизированные системы циклического действия для исследований свойств средств измерений. В таких системах форму испытательного сигнала и алгоритм обработки данных в каждом цикле можно изменять в соответствии с результатами, полученными в предыдущем цикле. Подобные возможности в той или иной мере реализуются в измерительно-вычислительных комплексах, создаваемых для метрологической аттестации сложных и разнотипных средств измерений, а также в автоматизированных поверочных установках.

Воспроизведение испытательных неэлектрических сигналов возможно двумя основными способами. Первый состоит в использовании физического явления, позволяющего сформировать непосредственно неэлектрический сигнал с требуемым законом изменения во времени. Второй заключается в создании электрического сигнала требуемой формы и последующем преобразовании его в неэлектрический сигнал. Второй способ в принципе расширяет множество возможных форм сигналов, однако требует для своей реализации наличия достаточно быстродействующих преобразователей.

3.3. МЕТОДЫ НАХОЖДЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК С ПОМОЩЬЮ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ИСПЫТАТЕЛЬНЫХ СИГНАЛОВ

Прямой метод нахождения полной динамической характеристики реализуется путем воспроизведения и подачи на вход исследуемого устройства характеристического испытательного сигнала и определения значений выходного сигнала, совпадающего с точностью до постоянного множителя с искомой характеристикой. При необходимости производится аппроксимация найденной характеристики известной функцией.[1] Соответственно погрешность нахождения характеристики в предположении, что статический коэффициент преобразования средства измерений равен единице, может быть представлена в виде суммы трех составляющих:

$$\delta_\Sigma(t) = \delta_{исп}(t) + \delta_{вых}(t) + \delta_{ап}(t). \qquad (3.75)$$

[1] Строго говоря, метод определения динамических характеристик в аналитической форме с помощью характеристического сигнала является косвенным.

Рассмотрим эти составляющие. Погрешность аппроксимации представляет собой методическую погрешность. Она зависит от формы характеристики и вида аппроксимирующей функции, однако эта погрешность всегда может быть уменьшена до требуемого уровня, поскольку существующие способы позволяют аппроксимировать экспериментально полученную кривую с любой наперед заданной точностью. Поэтому в дальнейшем сосредоточимся на погрешности воспроизведения испытательного сигнала $\delta_{исп}\,/(t)$ и погрешности определения значений выходного сигнала $\delta_{вых}\,(t)$. Погрешность $\delta_{вых}\,(t)$ либо является инструментальной (если регистрация выходного сигнала производится с помощью цифрового прибора), либо содержит инструментальную составляющую (погрешность регистрации) и методическую (погрешность обработки). Следовательно, $\delta_{вых}\,(t)$ зависит от используемой измерительной (регистрирующей) аппаратуры и количественный анализ этой погрешности в общем виде затруднителен. Однако на основании выражения (3.75) могут быть установлены пределы допускаемых значений и тем самым требования к используемым измерительным средствам. Поскольку прямой метод определения полной характеристики сводится по существу к ее динамическим измерениям, то указанные требования устанавливаются на основе общего подхода к выбору средства измерений для работы в динамическом режиме с погрешностью, не превышающей заданную [21]. В рассматриваемом случае этот подход реализуется следующим образом. Исходя из требуемой точности измерений, осуществляемых с помощью исследуемого устройства, устанавливается предел допускаемой погрешности определения характеристики Δ. При этом Δ представляет собой заданное значение нормы погрешности определения характеристики в некотором функциональном пространстве [78]. Тогда с учетом (3.75) можно записать условие для норм погрешностей, достаточное для определения характеристики с погрешностью, не превышающей Δ:

$$\|\delta_{исп}\|+\|\delta_{вых}\|+\|\delta_{ап}\|\leqslant\Delta. \qquad (3.76)$$

Соотношение (3.76) позволяет проверить, пригодны ли данный метод и аппаратура для определения характеристики с требуемой точностью. С другой стороны, это соотношение дает возможность установить предел допускаемых значений любой из составляющих, исходя из заданных пределов для других составляющих. Так, из выражения (3.76) можно получить $\|\delta_{вых}\|\leqslant\Delta-(\|\delta_{исп}\|+\|\delta_{ап}\|)$, что по существу выражает требования к точности регистрирующей аппаратуры, а также

$$\|\delta_{исп}\|\leqslant\tilde{\Delta}, \qquad (3.77)$$

где

$$\tilde{\Delta}=\Delta-(\|\delta_{вых}\|+\|\delta_{ап}\|).$$

Неравенство (3.77) выражает требования к допускаемой погрешности создания испытательного сигнала $\delta_{исп}\,(t)$ при определении

полной динамической характеристики. Ниже дается анализ погрешностей при определении переходной и импульсной характеристик, а также АЧХ и ФЧХ средства измерений. Указанная погрешность обусловлена неидеальностью испытательных сигналов, т. е. отклонением реальных сигналов, создаваемых с помощью технических средств, от идеальных характеристических, с помощью которых вводятся определения понятий переходной, импульсной и частотных характеристик. Анализ погрешностей проводился на основе решения прямой задачи динамики (нахождения выходного сигнала устройства по известному входному) в предположении, что реальные испытательные сигналы могут быть аппроксимированы известными функциями времени.

Погрешности определения переходной характеристики. Переходная характеристика определяется как отклик устройства на испытательное воздействие, описываемое единичной ступенью (2 5). Реальный испытательный сигнал всегда отличается от ступени. Это обусловливает одну из составляющих погрешности экспериментального определения переходной характеристики. Обычно считается [15], что эта составляющая погрешности пренебрежимо мала, если длительность фронтов испытательного сигнала $\theta_{исп}$ и переходной характеристики t_y связаны неравенством:

$$\theta_{исп}\leqslant 0{,}1\,t_y. \qquad (3.78)$$

Очевидно, однако, что при различной требуемой точности нахождения переходной характеристики условие (3.78) может оказаться и избыточным, и недостаточным. Поэтому целесообразно оценить составляющую погрешности нахождения переходной характеристики, обусловленную неидеальностью испытательного сигнала

Общее выражение для погрешности нахождения переходной характеристики, обусловленной неидеальностью испытательного сигнала, имеет вид:

$$\delta h=\frac{1}{KA}\,y(t)-h(t),$$

где $y\,(t)$ — выходной сигнал устройства при подаче на его вход неидеального испытательного сигнала; A — установившееся значение испытательного сигнала.

Погрешность δh есть функция времени, которую далее будем характеризовать ее нормами в функциональных пространствах C, L_1 и L_2, т е. максимальным и средним модулями и средним квадратическим значением

Рассмотрим случай, когда реальный испытательный сигнал может быть представлен в виде ступенчатого сигнала с линейным нарастанием до установившегося значения [вида (3.26)]

$$x(t)=A\left[\frac{t}{\theta}\,\Pi_0(t,\,\theta)+U(t-\theta)\right].$$

Для средств измерений с передаточными функциями 1- и 2-го порядков получены соотношения для погрешности δh и оценки ее

максимального модуля $|\delta h|_m$, приведенные в табл. 3.1. В таблице и ниже использованы обозначения: $\tau = t/T_1$; $\varkappa = \theta/T_1$; $m_3 = T_3/T_1$; $m_2 = T_2/T_1$.

Таблица 3.1

Передаточная функция	Погрешность определения переходной характеристики с помощью линейно нарастающего сигнала
$W_1(p) = \dfrac{1}{T_1 p + 1}$	$\delta h = \begin{cases} [\tau - 1 + \exp(-\tau)]/\varkappa - [1 - \exp(-\tau)], \\ \tau \leqslant \varkappa, \\ 1 + \exp(-\tau)[1 - \exp(\varkappa)]/\varkappa - [1 - \exp(-\tau)], \\ \tau > \varkappa; \end{cases}$ $\quad |\delta h|_m \leqslant 0{,}5\varkappa \;\forall\; \varkappa \leqslant 0{,}3$
$W_2(p) = \dfrac{T_3 p + 1}{(T_1 p + 1)^2}$	$\|\delta h\|_m \leqslant \begin{cases} 0{,}5\varkappa\,[m_3 + \varkappa(1 - m_3)], & m_3 < 1, \\ 0{,}5\varkappa\, m_3/[(\varkappa + m_3)(1 + \varkappa)], & 1 < m_3 < 2, \\ 0{,}5\varkappa\,(m_3 - 1)\exp(-\varkappa), & m_3 > 2 \end{cases}$
$W_3(p) = \dfrac{T_3 p + 1}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)} =$	$\|\delta h\|_m \leqslant 0{,}5\varkappa \left(1 + \dfrac{1}{m_2}\right) \times$ $\times \sqrt{\left[\dfrac{(1 + m_2)^2}{4m_2} - 1\right]} \dfrac{(1 + m_2)\sqrt{m_2} - m_2 - m_3^2}{m_2} \times$ $\times \exp\left[\dfrac{1 + m_2}{\sqrt{(1 + m_2)^2 - 4m_2}} \operatorname{arth} \dfrac{0{,}5(1 + m_2)m^{-1/2} - m_2}{\sqrt{(1 + m_2)^2 - 4m_2}}\right]$
$W_4(p) = \dfrac{T_3 p + 1}{T_1^2 p^2 + 2\gamma T p + 1} =$	$\|\delta h\|_m \leqslant \varkappa\gamma \sqrt{1 - \gamma^2} \sqrt{1 - 2\gamma m_3 + m_3^2} \times$ $\times \exp\left(\dfrac{\gamma}{\sqrt{1 - \gamma^2}} \operatorname{arctg} \dfrac{m_3 - \gamma}{\sqrt{1 - \gamma^2}}\right)$

Во многих случаях физические принципы, лежащие в основе устройств для воспроизведения ступенчатых сигналов, таковы, что реальный сигнал, используемый в качестве испытательного, может быть аппроксимирован функцией с экспоненциальным нарастанием до установившегося значения [вида (3.28)]:

$$x(t) = A\left(1 - e^{-\beta t}\right) U(t).$$

В табл. 3.2 приведены выражения для погрешностей определения с помощью этого сигнала переходных характеристик средств измерений с теми же, что и выше, передаточными функциями (использовано обозначение $\varkappa = \beta T_1$).

Для средств измерений с передаточными функциями, расположенными в строках 2—4 табл. 3.1, не удается найти выражение

Таблица 3.2

Передаточная функция	Погрешность определения переходной характеристики с помощью экспоненциально нарастающего сигнала
$W_1(p) = \dfrac{1}{T_1 p + 1}$	$\|\delta h\|_m = \varkappa^{-1/(1-\varkappa^{-1})}; \quad \|\delta h\|_m \leqslant \varkappa^{-1} \;\forall\; \varkappa \geqslant 10$
$W_2(p) = \dfrac{T_3 p + 1}{(T_1 p + 1)^2}$	$\delta h = \left[\dfrac{\varkappa m_3}{1 - \varkappa} + \dfrac{1 - m_3}{(1 - \varkappa)^2} + \dfrac{\tau(1 - m_3)}{1 - \varkappa}\right] e^{-\tau} +$ $+ \dfrac{m_3\varkappa - 1}{(1 - \varkappa)^2} e^{-\varkappa\tau}$
$W_3(p) = \dfrac{T_3 p + 1}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)} =$	$\delta h = \dfrac{\varkappa m_3 - 1}{(1 - \varkappa)(1 - \varkappa m_2)} e^{-\varkappa\tau} +$ $+ \dfrac{m_3 - m_2}{(1 - m_2)(1 - \varkappa m_2)} e^{-m_2\tau} + \dfrac{1 - m_3}{(1 - \varkappa)(1 - m_2)} e^{-\tau}$
$W_4(p) = \dfrac{T_3 p + 1}{T_1^2 p^2 + 2\gamma T_1 p + 1} =$	$\delta h = \dfrac{1}{1 - 2\gamma\varkappa + \varkappa^2} \left\{(\varkappa m_3 - 1) e^{-\varkappa\tau} + e^{-\gamma\tau} \times \right.$ $\times [(1 - \varkappa m_3) \cos\sqrt{1 - \gamma^2}\tau +$ $\left. + \dfrac{\gamma - \varkappa - m_3 + \gamma\varkappa m_3}{\sqrt{1 - \gamma^2}} \sin\sqrt{1 - \gamma^2}\tau\right]\Big\}$

$|\delta h|_m$, поэтому максимум определен численным способом. Результаты расчетов представлены в РД 50-404—83 (см. Приложение 5).

Во многих случаях используемый на практике испытательный сигнал, в отличие от предыдущего, имеет плавное касание с осью абсцисс и на участке нарастания может быть аппроксимирован с помощью выражения вида (3.29):

$$x(t) = A\{0{,}5[1 - \cos(\pi t/\theta)]\,\Pi_0(t;\ \theta) + U(t - \theta)\}.$$

Для указанного сигнала проделаны аналогичные расчеты, результаты которых приведены в РД 50-404—83.

Погрешность определения импульсной характеристики. Импульсная характеристика $g(t)$ определяется как выходной сигнал устройства, на вход которого воздействует испытательный сигнал, описываемый дельта-функцией. Реальный испытательный сигнал $x(t)$, аппроксимируемый дельта-функцией, обычно представляет собой короткий импульс, который очень часто близок по форме к прямоугольнику. Если $y(t)$ — выходной сигнал, соответствующий реальному испытательному сигналу с длительностью θ, то погрешность нахождения импульсной характеристики

$$\delta g = (KA\theta)^{-1} y(t) - g(t).$$

При прямоугольном испытательном импульсе

$$\delta g = \begin{cases} \theta^{-1} h(t) - g(t), & 0 \leqslant t \leqslant \theta, \\ \theta^{-1} [h(t) - h(t-\theta)] - g(t), & t > \theta. \end{cases}$$

Как и выше, рассматриваются средний модуль и среднее квадратическое значение δg. Не имеет смысла использовать $|\delta g|_m$, поскольку импульсные характеристики, соответствующие передаточным функциям с разностью порядков знаменателя и числителя, равной единице, имеют скачок в начале координат. Для таких импульсных характеристик максимальная погрешность соответствует точке $t = 0$, равна указанному скачку и не зависит от параметров испытательного сигнала. Поэтому $|\delta g|_m$ как характеристика погрешности δg в общем случае неинформативна.

Как и в случае переходной характеристики, ниже рассмотрены передаточные функции четырех структур 1- и 2-го порядков от одно- до трехпараметрических. Используя введенные выше обозначения и имея в виду другой смысл величины θ, получим для указанных передаточных функций выражения для безразмерного произведения $T_1 \delta g$, приведенные в табл. 3.3.

Погрешности определения частотных характеристик. В соответствии с ГОСТ 8.256—77 для средств измерений, используемых в динамическом режиме, следует нормировать в частотной области две характеристики: АЧХ и ФЧХ. Частотные характеристики определяются по отклику устройства на синусоидальные испытательные сигналы $x(t) = R \sin \omega t$, $0 < \omega < \infty$, $-\infty < t < \infty$. В установившемся режиме ($t \to \infty$)

$$y(t) = KA(\omega) R \sin [\omega t + \Phi(\omega)].$$

Отношение амплитуд синусоидальных сигналов $y(t)$ и $x(t)$ определяет АЧХ, а разность фаз — ФЧХ. Реальный испытательный сигнал является периодическим, но не гармоническим, что служит источником погрешностей при прямом методе определения АЧХ и ФЧХ. В отличие от прямого метода определения полных временных динамических характеристик, когда выходной сигнал средства измерений принимается за искомую характеристику и погрешность ее оценки определяется однозначно, при нахождении частотных характеристик оценивание погрешностей обусловлено способом обработки экспериментальных данных. В свою очередь способ обработки зависит от того, как определено понятие измеряемой величины (в данном случае — значений АЧХ и ФЧХ при фиксированной частоте).

Рассмотрим вначале определение АЧХ. При небольших искажениях $x(t)$ и соответственно $y(t)$ можно определять АЧХ, как при гармоническом испытательном сигнале:

$$\tilde{A}(\omega) = \max_{t \in [0,\, 2\pi\omega]} y(t) / \left[K \max_{t \in [0,\, 2\pi\omega]} x(t)\right].$$

Неидеальность испытательного сигнала $x(t)$ может характеризоваться наличием в нем, кроме основной (с частотой ω), также

других гармонических составляющих с кратными частотами. На практике наиболее распространены нелинейные искажения с преобладающей второй гармоникой. Для указанных искажений рассчитана абсолютная погрешность нахождения амплитудно-частотных характеристик прямым методом $\delta A(\omega) = \tilde{A}(\omega) - A(\omega)$.

Расчеты проведены на основе решения прямой задачи динамики: нахождения отклика устройства на испытательный сигнал

$$x(t) = \sin \omega t + \alpha \sin 2(\omega t + \varphi),$$

где α — приведенная амплитуда 2-й гармоники.

Отклик средства измерений на сигнал

$$y(t) = K[A(\omega) \sin \omega t + \alpha A(2\omega) \sin \{2[\omega t + \varphi - \Phi(\omega)] + \Phi(2\omega)\}].$$

Результаты расчетов приведены в РД 50-404—83.

Рассмотрим далее определение ФЧХ. Поскольку ФЧХ находится прямым методом по значениям разности фаз выходного и входного сигналов устройства, то требуется уточнить понятие фазы немоногармонического сигнала. Однозначное определение фазы (как и амплитуды) основано на понятии аналитического сигнала [17], однако экспериментальное нахождение ФЧХ в соответствии с таким определением затруднительно. Поэтому в практике часто фазой периодического сигнала считают положение момента пересечения сигналом нулевого уровня относительно аналогичного момента опорного сигнала. В соответствии с этим экспериментальное нахождение фазы (разности фаз) сводится к измерению длительности интервала времени между «нулевыми точками» двух сигналов. Поэтому считаем значением ФЧХ на данной частоте минимальную по модулю разность между абсциссами точек пересечения нулевого уровня входным и выходным сигналами устройства, соответственно. При этом для исключения неоднозначности рассматриваются «нулевые точки», в которых оба сигнала имеют положительные производные.

В соответствии с вышеизложенным задача определения ФЧХ сводится к нахождению корней следующих уравнений:

$$\sin \varepsilon + \alpha \sin 2(\varepsilon + \varphi) = 0; \tag{3.79}$$

$$\sin [\psi + \Phi(z)] + \alpha \frac{A(2z)}{A(z)} \sin [2(\psi + \varphi) + \Phi(2z)] = 0. \tag{3.80}$$

Оценка ФЧХ на данной частоте определяется как разность $\Phi = \varepsilon_0 - \psi_0$, где ε_0 и ψ_0 — корни уравнений (3.79) и (3.80), которым соответствуют положительные производные $x'(t)$ и $y'(t)$. Погрешность определения ФЧХ $\delta\Phi(\omega) = \tilde{\Phi}(\omega) - \Phi(\omega)$.

Характеристики погрешности $\delta\Phi(\omega)$ рассчитаны на ЭВМ. Результаты расчетов представлены в РД 50-404—83.

Таблица 3.3

Передаточная функция	Погрешность определения импульсной характеристики с помощью прямоугольного импульса [выражение $T_1\delta g(\tau)$]
$W_1(p)=\dfrac{1}{T_1p+1}$	$\varkappa^{-1}-(1+\varkappa^{-1})\exp(-\tau),\ 0\leqslant\tau\leqslant\varkappa;$ $[\varkappa^{-1}\exp(\varkappa)-\varkappa^{-1}-1]\exp(-\tau),\ \tau>\varkappa$
$W_2(p)=\dfrac{T_3p+1}{(T_1p+1)^2}$	$\{\varkappa^{-1}-1-\varkappa^{-1}[1+(1-m_3)\tau]+(1-m_3)(1-\tau)\}\times$ $\times\exp(-\tau),\ 0\leqslant\tau\leqslant\varkappa;$ $\{-\varkappa^{-1}-1+\varkappa^{-1}[(m_3-1)\tau+(1+(1-m_3)\times$ $\times(\tau-\varkappa))]\exp(\varkappa)+(1-m_3)(1-\tau)\}\exp(-\tau),$ $\tau>\varkappa$
$W_3(p)=$ $=\dfrac{T_3p+1}{(T_1p+1)(T_2p+1)}$	$\dfrac{1}{\varkappa}-\left[\dfrac{1-m_3}{\varkappa(1-m_2)}+\dfrac{1-m_3}{1-m_2}\right]\exp(-\tau)-$ $-\left[\dfrac{m_3-m_2}{\varkappa(1-m_2)}-\dfrac{m_3-m_2}{m_2(1-m_2)}\right]\times\exp(-\tau/m_2),$ $0\leqslant\tau\leqslant\varkappa;$ $\left[\dfrac{1-m_3}{\varkappa(1-m_2)}\exp(\varkappa)-\dfrac{1-m_3}{\varkappa(1-m_2)}-\dfrac{1-m_3}{1-m_2}\right]\exp(-\tau)+$ $+\left[\dfrac{m_3-m_2}{\varkappa(1-m_2)}\exp(\varkappa/m_2)-\dfrac{m_3-m_2}{\varkappa(1-m_2)}-\dfrac{m_3-m_2}{m_2(1-m_2)}\right]\times$ $\times\exp(-\tau/m_2),\ \tau>\varkappa$
$W_4(p)=$ $=\dfrac{T_3p+1}{T_1^2p^2+2\gamma T_1p+1}$	$\dfrac{1}{\varkappa}\left\{\left[1-\left(\dfrac{\gamma-m_3}{\sqrt{1-\gamma^2}}\sin\sqrt{1-\gamma^2}\tau+\cos\sqrt{1-\gamma^2}\tau\right)\times\right.\right.$ $\times\exp(-\gamma\tau)]-\left(\dfrac{1-\gamma m_3}{\sqrt{1-\gamma^2}}\sin\sqrt{1-\gamma^2}\tau+\right.$ $\left.\left.+m_3\cos\sqrt{1-\gamma^2}\tau\right)\exp(-\gamma\tau)\right\},\ 0\leqslant\tau\leqslant\varkappa;$ $\dfrac{1}{\varkappa}\left\{\left[\dfrac{\gamma-m_3}{\sqrt{1-\gamma^2}}\sin\sqrt{1-\gamma^2}(\tau-\varkappa)+\cos\sqrt{1-\gamma^2}\times\right.\right.$ $\times(\tau-\varkappa)]\exp[-\gamma(\tau-\varkappa)]-$ $-\left(\cos\sqrt{1-\gamma^2}\tau+\dfrac{\gamma-m_3}{\sqrt{1-\gamma^2}}\sin\sqrt{1-\gamma^2}\tau\right)\times$ $\times\exp(-\gamma\tau)-\left(m_3\cos\sqrt{1-\gamma^2}\tau+\right.$ $\left.\left.+\dfrac{\gamma m_3-1}{\sqrt{1-\gamma^2}}\sin\sqrt{1-\gamma^2}\tau\right)\exp(-\gamma\tau)\right\},\ \tau>\varkappa$

3.4. МЕТОДЫ НАХОЖДЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК С ПОМОЩЬЮ НЕХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ ИСПЫТАТЕЛЬНЫХ СИГНАЛОВ

Достижимая точность воспроизведения характеристических испытательных сигналов, как указано выше, не во всех областях измерений соответствует требованиям. Это ограничивает сферу применения прямых методов. Кроме того, графическая (табличная) форма характеристик, получаемых прямыми методами, делает последние актуальными преимущественно для задач контроля нормированных характеристик. Для типовой или индивидуальной аттестации средств измерений, когда требуется получать характеристики в аналитической форме, необходимы косвенные методы, в которых используются нехарактеристические испытательные сигналы. Эти обстоятельства побуждают к разработке и модификации косвенных методов. Ниже приведены результаты исследований и разработки косвенных методов с использованием детерминированных сигналов.

Метод дискретизации уравнения свертки. Одним из наиболее простых методов определения характеристик средств измерений с помощью нехарактеристических испытательных сигналов является метод дискретизации уравнения свертки. Принцип метода заключается в следующем. Испытательный и соответственно выходной сигналы устройства представляются своими значениями в равностоящие моменты времени, взятые с периодом дискретизации Δt. При этом динамика устройства описывается уравнением (3.12), в котором форма матрицы значений испытательного сигнала определяется выбранной интерполяционной формулой.

При большом числе обусловленности матрицы $\mathbf{X}$ решение задачи нахождения импульсной характеристики, доставляемой формулой (3.15), может не иметь физического смысла. Более того, может потерять смысл само выражение (3.15), поскольку плохая обусловленность приводит к тому, что стирается грань между особенной и неособенной матрицей. Действительно, для матрицы $\mathbf{X}$ с большим числом обусловленности при определенном уровне погрешностей ее элементов возможны такие реализации последних, для которых нарушается условие (3.14). В связи с этим в работе [92] введено понятие критической обусловленности (critical ill-conditioning), которое используется для разграничения ситуаций, в которых соответственно возможно и невозможно превращение неособенной матрицы в особенную. Достаточным условием отсутствия критической обусловленности является неравенство [92]:

$$\Omega=\rho(\mathbf{C})\leqslant 1, \qquad (3.81)$$

где Ω — так называемый фактор критической обусловленности; $\rho(\cdot)$ — спектральный радиус; $\mathbf{C}=|\mathbf{X}^{-1}|\delta\mathbf{X}$ — матрица обусловленности, а матрицы $|\mathbf{X}^{-1}|$ и $\delta\mathbf{X}$ составлены соответственно из абсолютных значений элементов матрицы $\mathbf{X}^{-1}$ и верхних границ для погрешностей этих элементов. Условие (3.81) выполняется, если какая-либо норма матрицы $\mathbf{C}$ меньше единицы.

Если верхние границы погрешностей элементов матрицы **X** одинаковы и равны, то условие (3.81) переходит в следующее [92]:

$$\Omega = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|b_{ik}|\right)\delta < 1, \qquad (3.82)$$

где b_{ik} — элементы матрицы $\mathbf{X}^{-1}$.

Ниже приведены значения фактора Ω в зависимости от числа отсчетов (с погрешностью $\delta = 0{,}01$) для двух импульсов с одинаковыми амплитудой и длительностью — полусинусоидального и линейно нарастающего со скачкообразным спадом (в скобках):

Число отсчетов	8	16	32
Значение Ω	0,06 (0,18)	0,49 (1,54)	4,04 (12,7)

Видно, что стремление к увеличению числа отсчетов с целью большего сглаживания (усреднения) экспериментальных данных может привести к обратному результату — появлению некорректного (критически обусловленного) решения.

Таким образом, в том случае, когда импульсная характеристика определяется путем цифровой обработки экспериментальных данных, полученных с помощью известного нехарактеристического испытательного сигнала, необходимым условием применимости формулы (3.15) является выполнение соотношений (3.81) или (3.82). Следовательно, эти соотношения обусловливают требования к испытательному сигналу, которые обязательно должны быть учтены на этапе подготовки эксперимента по определению динамических свойств средств измерений.

Приведенные выше соотношения на практике могут применяться для проверки отсутствия критической обусловленности при использовании заданного испытательного сигнала и установленного шага дискретизации. Возможно также использование указанных соотношений при выборе испытательного сигнала. Поскольку фактор обусловленности уменьшается с увеличением шага дискретизации, а диапазон частот, в котором исследуется устройство, при этом сужается, то очевидно, что выбор испытательного сигнала должен явиться результатом компромисса.

При отсутствии критической обусловленности погрешность нахождения импульсной характеристики может быть оценена с помощью выражения (3.16), в котором нормы векторов и матриц введены по формулам: для векторов — $\|\mathbf{G}\| = \max_i(|g_i|)$; для матриц — $\|X\| = \max_i\left(\sum_{k=1}^{n}|x_{ik}|\right)$.

Обозначим верхние границы погрешностей определения входного и выходного сигналов, соответственно, δ и λ. Тогда

$$\|\delta\mathbf{G}\| \leqslant \frac{\lambda(\Delta t K)^{-1}\|\mathbf{X}^{-1}\Lambda\| + \delta\|\mathbf{X}^{-1}\mathbf{E}\|\|\mathbf{G}\|}{1-\delta\|\mathbf{X}^{-1}\mathbf{E}\|},$$

где

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}.$$

Переходя от норм произведений к произведению норм и учитывая, что $n\delta\|X^{-1}\| = \Omega$, получим

$$\|\delta\mathbf{G}\| \leqslant [\lambda(n\delta\Delta t K)^{-1} + \|\mathbf{G}\|]\,\Omega/(1-\Omega). \qquad (3.83)$$

Оценка погрешности $\delta\mathbf{G}$ может оказаться завышенной. Поэтому целесообразно найти более точную оценку. Следуя методике [92], получим систему уравнений для верхних границ погрешностей Δg_k нахождения значений импульсной характеристики:

$$\Delta g_k = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|b_{ki}|\,\delta_{ij}(|g_i| + \Delta g_i) + \sum_{i=1}^{n}|b_{ki}|\,\lambda_i, \quad k = 1, \ldots, n, \qquad (3.84)$$

где δ_{ij} и λ_i — соответственно погрешности значений входного и выходного сигналов; b_{kl} — элемент обратной матрицы $\mathbf{X}^{-1}$. Рассмотрим, как и выше, случай $\delta_{ij} = \delta$; $\lambda_i = \lambda$; $i, j = 1, \ldots, n$. Тогда решение (3.84) будет

$$\Delta g_k = (\lambda + g\delta)\,b_k/(1-\Omega), \qquad k = 1, \ldots, n, \qquad (3.85)$$

где $g = \sum_{j=1}^{n}|g_j|$; $\quad b_k = \sum_{i=1}^{n}|b_{ki}|$.

Оценки, доставляемые системой (3.85), более точны, чем те, которые дает (3.83). Кроме того, оценка (3.83) является интегральной, в то время как оценки (3.85) индивидуализированы для каждого значения импульсной характеристики и потому представляются более реалистичными.

Метод многократного интегрирования дифференциального уравнения. Разработанный метод [22] основан на принципе, изложенном в работе [91]. Применительно к метрологической задаче исследования средства измерений изложенный в [91] способ нужно модифицировать следующим образом.

При экспериментальном исследовании свойств средства измерений его статические и динамические параметры следует определять по отдельности, поскольку они оказывают существенно различное влияние на экспериментальные данные. Поэтому в дальнейшем считаем статический коэффициент преобразования устройства $K = b_0/a_0$ известным.

Поделив обе части (3.7) на a_0 и сохраняя для нормированных параметров те же, что и раньше, обозначения, перепишем выражение (3.7) в форме

$$y(t)+\sum_{i=1}^{n} a_i y^{(i)}(t)=Kx(t)+\sum_{j=1}^{m} b_j x^{(j)}(t), \quad m<n. \tag{3.86}$$

Число неизвестных параметров здесь на два меньше, чем в (3.7); соответственно уменьшается число различных промежутков интегрирования. В итоге понижается размерность линейной системы. Итак, если последовательно интегрировать обе части (3.86) $(n+1)$ раз, причем последний интеграл взять по промежутку $[0, \theta_k]$, то, заставляя k пробегать все значения от 1 до $n+m$, придем к линейной алгебраической системе относительно коэффициентов a_i, b_j $(i=1, \ldots, n;\ j=1, \ldots, m)$:

$$\Psi_{n+1}(k)+\sum_{i=1}^{n} a_i \Psi_{n-i+1}(k)=K\Phi_{n+1}(k)+\sum_{j=1}^{m} b_j \Phi_{n-j+1}(k),$$
$$k=1, \ldots, n+m. \tag{3.87}$$

Эта система может быть записана в матричной форме:

$$\mathbf{RA}=\mathbf{F}, \tag{3.88}$$

где

$$\mathbf{R}=\begin{bmatrix} \Psi_n(1) & \ldots & \Psi_1(1) & -\Phi_n(1) & \ldots & -\Phi_{n-m+1}(1) \\ \Psi_n(2) & \ldots & \Psi_1(2) & -\Phi_n(2) & \ldots & -\Phi_{n-m+1}(2) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Psi_n(n+m) & \ldots & \Psi_1(n+m) & -\Phi_n(n+m) & \ldots & -\Phi_{n-m+1}(n+m) \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{F}=\begin{bmatrix} K\Phi_{n+1}(1)-\Psi_{n+1}(1) \\ K\Phi_{n+1}(2)-\Psi_{n+1}(2) \\ \vdots \\ K\Phi_{n+1}(n+m)-\Psi_{n+1}(n+m) \end{bmatrix}.$$

Элементы $\mathbf{R}$, $\mathbf{A}$ и $\mathbf{F}$ имеют разные физические размерности, что создает неудобства при вычислениях. Поэтому, учитывая тот факт, что выходной (а часто и входной) сигнал представляется рядом своих значений, взятых с периодом дискретизации по времени Δt, будем в дальнейшем проводить вычисления в безразмерном времени $\bar{t}=t/\Delta t$. При этом элементы $\mathbf{A}$ будут безразмерными, а элементы $\mathbf{R}$ и $\mathbf{F}$ будут иметь размерность величин x и y.

Если $\det \mathbf{R} \neq 0$, то система (3.88) имеет единственное решение:

$$\mathbf{A}=\mathbf{R}^{-1}\mathbf{F}. \tag{3.89}$$

Поскольку элементы матриц $\mathbf{R}$ и $\mathbf{F}$ получены из экспериментальных данных и содержат погрешности, то (3.89) имеет смысл лишь в том случае, когда матрица $\mathbf{R}$ не является критически обусловленной [92], т. е. выполняется условие (3.81), где

$$\mathbf{C}=|\mathbf{R}^{-1}|\,\delta\mathbf{R}, \tag{3.90}$$

$|\mathbf{R}^{-1}|$ — матрица, составленная из модулей элементов $\mathbf{R}^{-1}$; $\delta\mathbf{R}$ — матрица, элементы которой суть погрешности элементов $\mathbf{R}$.

Ограничиваясь нормами матриц, подчиненными нормам векторов [74], можно заменить (3.81) условием

$$\max_j \sum_{i=1}^{n} |c_{ij}|<1, \tag{3.91}$$

где c_{ij} — элементы матрицы $\mathbf{C}$. При выполнении этого условия погрешности решения (3.88), получаемого по формуле (3.89), могут быть оценены путем решения системы

$$\delta\alpha_k=\sum_{i=1}^{n+m}\sum_{j=1}^{n+m}|p_{ki}|\,\delta_{ij}(|\alpha_j|+\delta\alpha_j)+\sum_{i=1}^{n+m}|p_{ki}|\,\lambda_i,$$
$$k=1, \ldots, n+m, \tag{3.92}$$

где p_{ki}, α_i — элементы матриц $\mathbf{R}^{-1}$ и $\mathbf{A}$, соответственно; δ_{ij}, λ_i — погрешности элементов $\mathbf{R}$ и $\mathbf{F}$, соответственно.

Преобразуя выражение (3.92) с учетом (3.81) и того, что $\alpha_j>0$, выразим это соотношение в матричной форме:

$$\delta\mathbf{A}=(\mathbf{I}-\mathbf{C})^{-1}(\mathbf{CA}+|\mathbf{R}^{-1}|\,\delta\mathbf{F}), \tag{3.93}$$

где $\mathbf{I}$ — единичная матрица.

Таким образом, обработка экспериментальных данных при реализации метода сводится к следующим операциям: а) вычисление элементов матриц $\mathbf{R}$, $\delta\mathbf{R}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{R}^{-1}$, $\mathbf{C}$; б) проверка условия (3.91); в) определение вектора параметров из выражения (3.89); г) оценка погрешностей найденных параметров из (3.93). Рассмотрим выполнение указанных операций.

Вычисление матрицы $\mathbf{R}$ и вектора $\mathbf{F}$ сводится к нахождению интегралов Ψ_i и Φ_j. Если сигнал $x(t)$ задан в аналитической форме, то Φ_j находится тривиально. В случае если $x(t)$ задан в виде совокупности значений, то Φ_j находится, как и Ψ_i, приближенно. Ограничиваясь формулой Симпсона, получим следующее рекуррентное выражение для вычисления интеграла $I_{n-i}\left(j\cdot 2^{n-i}\right)$ кратности $n-i$ в точке $\bar{t}=j\cdot 2^{n-i}$:

$$I_{n-i}(j\cdot 2^{n-i}) = \frac{2^{n-i-1}}{3}\{I_{n-i-1}(0) + 4[I_{n-i-1}(1\cdot 2^{n-i-1}) + \ldots$$

$$\ldots + I_{n-i-1}((2j-1)\,2^{n-i-1})] + 2[I_{n-i-1}(2\cdot 2^{n-i-1}) + \ldots$$

$$\ldots + I_{n-i-1}((2j-2)\,2^{n-i-1})] + I_{n-i-1}(2j\cdot 2^{n-i-1})\},$$

где $i = n-1, \ldots, 1, 0$; $j = \begin{cases} 1, 2, \ldots, 2^{i+l}, & i>0, \\ 2^{i+l}, & i=0; \end{cases}$ l — целое; $l>0$,

а $I_0(j)$ обозначает подынтегральную функцию в точке $\bar{t} = j$.

Вычисления интеграла заданной кратности k целесообразно также проводить по рекуррентной формуле: $I_k(2j) = I_k[2(j-1)] + 2^{k-1}[f_{2(j-1)} + 4f_{2j-1} + f_{2j}]/3$, где f_s — значение подынтегральной функции в точке $\bar{t} = s$.

Матрицу $\mathbf{R}^{-1}$ ввиду ее небольшой размерности целесообразно вычислять через союзную с $\mathbf{R}$:

$$\mathbf{R}^{-1} = [p_{ik}]^{-1} = [\overline{R}_{ki}]/\det \mathbf{R}, \qquad (3.94)$$

где $\overline{R}_{ki}$ — алгебраическое дополнение ki-го элемента матрицы $\mathbf{R}$. Матрица $\delta\mathbf{R}$ погрешностей элементов $\mathbf{R}$ находится следующим образом. Если погрешности определения $x(t)$ и $y(t)$ заданы своими границами Δx и Δy, то матрица $\delta\mathbf{R}$, при условии пренебрежения погрешностями численного интегрирования, будет иметь вид:

$$\delta\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \Delta y\tilde{\theta}_1^n/n! & \ldots & \Delta y\tilde{\theta}_1 & \ldots & \Delta x\tilde{\theta}_1^n/n! & \ldots & \Delta x\tilde{\theta}_1^{n-m+1}/(n-m+1)! \\ \Delta y\tilde{\theta}_2^n/n! & \ldots & \Delta y\tilde{\theta}_2 & \ldots & \Delta x\tilde{\theta}_2^n/n! & \ldots & \Delta x\tilde{\theta}_2^{n-m+1}/(n-m+1)! \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \Delta y\tilde{\theta}_{n+m}^n/n! & \ldots & \Delta y\tilde{\theta}_{n+m} & \ldots & \Delta x\tilde{\theta}_{n+m}^n/n! & \ldots & \Delta x\tilde{\theta}_{n+m}^{n-m+1}/(n-m+1)! \end{bmatrix},$$

где $\tilde{\theta}_k = \theta_k/\Delta t$, $k = 1, \ldots, n+m$.

Если известны границы Δx неисключенного остатка систематической составляющей $\delta x_{\text{сист}}$ и дисперсия σ_x^2 случайной составляющей $\delta x_{\text{сл}}$ погрешности определения $x(t)$, то погрешность интеграла $\Phi_j(k)$ можно оценить, рассматривая $\delta x_{\text{сист}}$ как величину, равномерно распределенную в интервале $[-\Delta x, \Delta x]$, и учитывая нормализующие свойства операции интегрирования (суммирования). В соответствии с выражением (3.8) можно представить $\Phi_j(k)$ в виде взвешенной суммы:

$$\Phi_j(k) = \sum_{i=0}^{l} d_i(j)\, x_i,$$

где $l = \text{entier}\,\tilde{\theta}_k$, а коэффициенты d_i определяются выбранной интерполяционной формулой и значением j. Дисперсия погрешности

определения $\Phi_j(k)$, которую можно считать нормально распределенной,

$$\sigma_\Phi^2(k) = [\sigma_x^2 + (\Delta x)^2/3]\sum_{i=1}^{l} d_i^2.$$

Композиция равномерного и нормального распределений имеет нормированный эксцесс, больший нуля, поэтому значение $\Delta_\Phi = 2\sigma_\Phi(k)$ можно считать практически предельным для погрешности определения $\Phi_j(k)$ и использовать его при построении матрицы $\delta\mathbf{R}$.

Аналогично определяется дисперсия $\sigma_\Psi^2(k)$ и практически предельное значение Δ_Ψ погрешности определения $\Psi_j(k)$.

При известных $\mathbf{R}^{-1}$ и $\delta\mathbf{R}$ вычисление $\mathbf{C}$ по формуле (3.90), проверка условия (3.91) и определение параметров по (3.89) не вызывают затруднений.

Для определения погрешностей $\delta\alpha_k$ требуется найти оценки погрешностей элементов $\mathbf{F}$. При задании погрешностей $x(t)$ и $y(t)$ своими границами Δx и Δy для погрешностей λ_k элементов матрицы $\mathbf{F}$ получим границы $\Delta f_k = \tilde{\theta}_k^n(\Delta y + K\Delta x)$, $k = 1, \ldots, n+m$

При известных границах неисключенных остатков систематических составляющих Δx, Δy и дисперсиях σ_x^2, σ_y^2 случайных составляющих погрешностей определения $x(t)$ и $y(t)$ для λ_k будем иметь оценку дисперсии

$$\sigma_{\lambda_k}^2 = \left\{\sigma_y^2 + \frac{(\Delta y)^2}{3} + K^2\left[\sigma_x^2 + \frac{(\Delta x)^2}{3}\right]\right\}\sum_{i=1}^{l} d_i^2(n+1),$$

$$k = 1, \ldots, n+m.$$

Пример. Рассмотрим определение параметров средства измерени с передаточной функцией

$$W(p) = (T_3 p + 1)/[(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)], \qquad (3.95)$$

где $T_1 = 0{,}3$ с; $T_2 = 0{,}2$ с; $T_3 = 0{,}1$ с.

В качестве испытательного использован ступенчатый сигнал с единичным установившимся значением. На ЭВМ «М-222» рассчитан с точностью до третьего знака отклик звена (3.95) на интервале $\theta = 2$ с с шагом $\Delta t = 0{,}02$ с. Дифференциальное уравнение модели

$$a_2 y'' + a_1 y' + y = a_3 x' + x.$$

Безразмерные искомые коэффициенты $a_1 = 25$, $a_2 = 150$, $a_3 = 5$, а промежутки интегрирования $\bar{\theta}_1 = 32$, $\bar{\theta}_2 = 64$, $\bar{\theta}_3 = 96$. Интегралы от $x(t)$ рассчитаны по точным формулам: $\Phi_1 = t$; $\Phi_2 = \bar{t}^2/2$. Одно-, двух- и трехкратный интегралы от $y(t)$ рассчитаны по формуле Симпсона с шагами Δt, $2\Delta t$ и $4\Delta t$, соответственно. В результате

$$\mathbf{R} = 32\begin{bmatrix} 5{,}398 & 0{,}473 & -16 \\ 34{,}743 & 1{,}388 & -64 \\ 94{,}911 & 2{,}376 & -144 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{R}^{-1} = \frac{1}{32\cdot 22{,}2}\begin{bmatrix} -47{,}808 & 30{,}096 & -8{,}064 \\ -1071{,}312 & 741{,}264 & -210{,}416 \\ -49{,}187 & 32{,}067 & -8{,}941 \end{bmatrix}.$$

Элементы матриц $\delta\mathbf{R}$ и $\delta\mathbf{F}$ найдены следующим образом. Погрешность вычисления Ψ_1 может быть оценена по формуле Шевиллье [64]:

$$\delta\Psi_1(\theta_k) \approx -(\Delta t)^4 [y'''(\theta_k) - y'''(0)]/180. \qquad (3.96)$$

Для всех трех промежутков (3.96) дает значения порядка $5\cdot 10^{-5}$, а оценки $\delta\Psi_2$ и $\delta\Psi_3$ будут ниже. Погрешность округления δy, которая превалирует над погрешностью численного интегрирования, равномерно распределена в интервале [— 0.0005, + 0,0005]. Распределение погрешностей оценивания Ψ_1, вызванных погрешностью δy, близко к нормальному, начиная с Ψ_1 (4). Практически предельное значение $\delta\Psi_1(k) = 2\sqrt{k}\,\sigma_y$, где σ_y — среднее квадратическое отклонение δy. Погрешности $\delta\Psi_2$ и $\delta\Psi_3$ имеют распределение, еще более близкое к нормальному, чем $\delta\Psi_1$. Однако погрешности интегралов одной кратности для различных промежутков будут коррелированы. Если считать коэффициент корреляции r равным единице, то среднее квадратическое отклонение и предельная погрешность оценивания Ψ_2 (Ψ_3) равны суммам аналогичных характеристик погрешностей интегралов Ψ_1 (Ψ_2). Вычисления дают в итоге

$$\delta\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0{,}12 & 0{,}005 & 0 \\ 0{,}33 & 0{,}007 & 0 \\ 0{,}596 & 0{,}009 & 0 \end{bmatrix}; \qquad \delta\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1{,}728 \\ 8{,}792 \\ 23{,}36 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{F} = 32\begin{bmatrix} 125{,}998 \\ 756{,}854 \\ 2009{,}489 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0{,}029 & 0{,}001 & 0 \\ 0{,}702 & 0{,}018 & 0 \\ 0{,}031 & 0{,}001 & 0 \end{bmatrix}.$$

Критической обусловленности нет, и (3.89) дает $\tilde{\mathbf{A}}_0 = [24{,}8\ 144{,}9\ 4{,}8]$. Вектор предельных погрешностей $\Delta\mathbf{A} = [1{,}1\ 27\ 1{,}2]$, а действительные отклонения найденных параметров $\tilde{a}_i$ от истинных равны: $\delta a_1 = 0{,}2$; $\delta a_2 = 5{,}1$; $\delta a_3 = 0{,}2$. Превышение расчетными оценками действительных отклонений объясняется использованием в расчетах значения $r = 1$.

Влияние погрешностей исходных данных исследовано с помощью датчика случайных чисел ЭВМ «М-222». При добавлении к $y(t)$ шума $N(0; 0{,}03)$ получен вектор параметров $\tilde{\mathbf{A}} = [24{,}9\ 155{,}0\ 4{,}9]$. Ввиду сглаживающего характера операции интегрирования алгоритм мало чувствителен к случайным помехам. По той же самой причине он чувствителен к систематическим сдвигам. При введении, кроме шума, сдвига $\delta_{\text{сист}} = \pm 0{,}01$ оценки параметров резко ухудшились: $\tilde{\mathbf{A}}_1 = [28{,}0\ 243{,}4\ 9{,}2]$.

Знание пределов для систематической погрешности позволяет улучшить оценки. Предполагая $\delta_{\text{сист}}$ неизвестным и ограниченным интервалом [0; 0,01], делим интервал дважды пополам и вводим в значения $y(t)$ поправки $\overline{\delta}_{\text{сист}} = -0{,}005$ и $\underline{\delta}_{\text{сист}} = -0{,}0075$. Соответственно получаются оценки: $\tilde{\mathbf{A}}_2 = [26{,}2\ 202{,}2\ 7{,}0]$, $\tilde{\mathbf{A}}_3 = [25{,}7\ 186{,}6\ 6{,}3]$. Последняя дает хорошее приближение свойств модели (3.95) во временной области. Критерием эффективности поправок может служить уменьшение либо оценок погрешностей $\Delta\mathbf{A}$, либо разности реакций устройства и получаемых моделей. Для оценок $\tilde{\mathbf{A}}_i$ ($i = 1, 2, 3$) получены следующие векторы погрешностей и средние квадратические отклонения Σ_i разности реакций:

$$\Delta\tilde{\mathbf{A}}_1 = [2{,}3\ \ 58{,}9\ \ 2{,}6]; \qquad \Sigma_1 = 0{,}03;$$

$$\Delta\tilde{\mathbf{A}}_2 = [1{,}2\ \ 29{,}0\ \ 1{,}3]; \qquad \Sigma_2 = 0{,}04;$$

$$\Delta\tilde{\mathbf{A}}_3 = [1{,}0\ \ 24{,}9\ \ 1{,}1]; \qquad \Sigma_3 = 0{,}035.$$

Ясно, что вектор оценок погрешностей является лучшим показателем эффективности поправок, что объясняется сложностью передаточной функции (3.95), в которой параметры числителя и знаменателя оказывают взаимообратное влияние на характер выходного сигнала устройства. Информация о структуре передаточной функции также может быть использована для уточнения оценок параметров. Рассмотрим оценку $\tilde{\mathbf{A}}_2$. Ей соответствует передаточная функция колебательного звена, поскольку $\left(a_1/2\sqrt{a_2}\right) < 1$, в то время как модель (3.95) построена из инерционных звеньев. Уточнение оценок производится следующим образом: 1) вычисляются значения $2\sqrt{a_2}$ и $(a_1/2)^2$; 2) промежутки $\left[a_1, 2\sqrt{a_2}\right]$ и $\left[(a_1/2)^2, a_2\right]$ делятся пополам, и для центральных значений $a_1' = \left(a_1 + 2\sqrt{a_2}\right)/2$ и $a_2' = \left[a_2 + (a_1/2)^2\right]/2$ проверяется выполнение условия $a_1'/\left(2\sqrt{a_2'}\right) > 1$; 3) если условие выполнено, процедура заканчивается, если нет — делятся пополам интервалы $[a_1', 2\sqrt{a_2}]$ и $[(a_1/2)^2, a_2']$. Для $\tilde{\mathbf{A}}_2$ описанная процедура дает на втором шаге оценку $\tilde{\mathbf{A}}_2'' = [27{,}9\ 179{,}3\ 7{,}0]$, близкую к $\tilde{\mathbf{A}}_3$. Оценке $\tilde{\mathbf{A}}_2''$ соответствует модель

$$\tilde{W}(p) = \frac{0{,}14p + 1}{(0{,}357p + 1)(0{,}202p + 1)},$$

свойства которой близки к свойствам (3.95).

Расчет примера проведен на настольной ЭКВМ «Электроника-155», что подтверждает возможность реализации метода с помощью простых средств вычислительной техники.

Выше предполагался известным порядок дифференциального уравнения средства измерений. Если порядок уравнения неизвестен, то можно определять параметры последовательно усложняющихся моделей (см. ниже).

Описанный алгоритм обработки данных может быть записан на одном из алгоритмических языков и реализован с помощью ЭВМ.

Адаптивный метод нахождения полных динамических характеристик средств измерений. Метод предназначен для полного исследования динамических свойств средства измерений в процессе его метрологической аттестации. Метод может быть использован конструкторами при создании устройств с требуемыми свойствами, а также метрологами и потребителями этих устройств при проверке нормированных метрологических характеристик средств измерений. В отличие от метода дискретизации уравнения свертки метод дает возможность получить полные характеристики в аналитической форме. По сравнению с методом многократного интегрирования дифференциального уравнения адаптивный метод обладает тем преимуществом, что позволяет исследовать средства измерений с более сложными моделями.

Достоинства адаптивного метода, естественно, достигаются за счет определенного усложнения процедуры обработки экспериментальных данных, требующей применения универсальной ЭВМ.

Как известно [71], регуляризация некорректно поставленных задач, в том числе задачи нахождения полной динамической характеристики, упирается в выбор оптимального параметра регуляризации, зависящего от априорной информации о свойствах сред-

ства измерений. Поскольку априорная информация, имеющаяся у исследователя на практике, зачастую с трудом поддается формализации, ее использование во многих методах регуляризации затруднительно. Поэтому в технических приложениях чаще всего используются методы адаптивной регуляризации, один из которых реализован, например, в работе [66], где предложено изменять параметр регуляризации до тех пор, пока не будет удовлетворен заданный критерий. Следует отметить, что адаптивный подход хорошо согласуется с постановкой задачи определения полных характеристик, которая в общем случае (в отсутствие сведений о порядке и структуре дифференциального уравнения средства измерений) может быть сформулирована только как оптимизационная.

Способ определения импульсной характеристики устройства, предложенный в [66] и развитый в [33], пригоден, как и прямые методы, лишь для тех областей измерений, в которых возможно создание с требуемой точностью характеристических испытательных сигналов. С помощью этого способа импульсная характеристика находится в форме таблицы значений, что неудобно для практики. Кроме того, недостатком способа является то, что начальное значение параметра регуляризации выбирается произвольно.

Адаптивный подход может быть реализован и в методе подбора, который, как отмечено в [71], широко распространен в технике. В частности, адаптивный способ подбора использован в [30] для аппроксимации передаточной функции, заданной таблично, с помощью дробно-рационального выражения.

Разработанный метод [19, 20, 26] также сводится к адаптивному подбору при определении полных характеристик в аналитической форме. Метод основан на использовании типовых испытательных сигналов и позволяет находить по экспериментальным данным — входному и выходному сигналам исследуемого устройства — его полные характеристики: передаточную функцию, импульсную, переходную и частотные характеристики.

Метод основан на следующих предположениях:

средство измерений представляет собой устойчивую линейную систему с сосредоточенными параметрами; такой модели устройства соответствует линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами или дробно-рациональная передаточная функция;

усложнение структуры дифференциального уравнения до определенного уровня приводит к более точному описанию устройства.

Метод включает в себя три процедуры:

нахождение коэффициентов простейшей по структуре передаточной функции;

оценивание погрешностей найденных коэффициентов передаточной функции;

пересчет найденной передаточной функции в другие полные характеристики устройства.

В методе используются пять типовых испытательных сигналов: скачкообразный, экспоненциальный и три импульсных — треугольной, косинусоидальной и синусоидальной формы [26]. Реальный испытательный сигнал должен с известной точностью совпадать с одним из типовых на всем интервале времени наблюдения, либо с различными типовыми — на различных участках интервала.

Простейшая оптимальная передаточная функция находится с помощью многошаговой адаптивной процедуры. Процедура включает в себя последовательный перебор передаточных функций с усложнением их структур от шага к шагу и нахождения на каждом шаге оптимальных коэффициентов передаточной функции принятой структуры.

Факторы (в порядке их значимости), которые определяют иерархию структур передаточных функций при переборе, следующие:

а) количество коэффициентов;

б) отсутствие дифференцирующих звеньев (нулевая степень полинома в числителе передаточной функции);

в) порядок передаточной функции (степень полинома в знаменателе).

Иерархическая система включает в себя двадцать три дробно-рациональные передаточные функции от простейшей однопараметрической

$$W_1(p) = 1/(Tp+1)$$

до пятипараметрической передаточной функции 3-го порядка

$$W_{23}(p) = \frac{T_3^2 p^2 + T_4 p + 1}{\left(T_1^2 p^2 + 2\gamma T_2 p + 1\right)\left(T_2 p + 1\right)}.$$

Любая из передаточных функций системы может быть представлена линейной комбинацией функций $W_1(p)$, а также

$$W_2(p) = \frac{1}{(Tp+1)^2}; \qquad W_3(p) = \frac{1}{(Tp+1)^3};$$

$$W_5(p) = \frac{1}{T^2 p^2 + 2\gamma T p + 1}; \qquad W_{13}(p) = \frac{T_2 p + 1}{T_1^2 p^2 + 2\gamma T_1 p + 1}.$$

Реакция любой из моделей системы на заданный испытательный сигнал может быть вычислена на основе реакций указанных элементарных звеньев путем представления модели в виде параллельного соединения этих звеньев. Оптимальные коэффициенты передаточной функции принятой структуры находятся путем минимизации функционала

$$\Phi_0 = \int_0^\theta [y(t) - Y(t;\ \mathbf{T})]^2\, dt,$$

где $y(t)$ — выходной сигнал; $Y(t,\ \mathbf{T})$ — реакция модели; $\mathbf{T} = [T_1, \ldots, T_n]$ — вектор искомых параметров; θ — верхняя граница интервала времени измерения.

Теоретическое обоснование метода заключается в следующем. Задачу определения полной характеристики устройства можно

рассматривать как задачу решения операторного уравнения (1.27) относительно неизвестного оператора $\mathscr{B}$. Во временной области (1.27) можно записать в симметричной форме:

$$y = \mathbf{B}_x g, \tag{3.97}$$

где $\mathbf{B}_x$ — интегральный оператор с ядром $x(t)$; $g = g(t)$ — неизвестная импульсная характеристика.

При решении уравнения (3.97) предполагается, что y и g суть элементы определенных метрических пространств $\mathscr{P}$ и $\mathscr{G}$. $\mathbf{B}_x$ осуществляет взаимно однозначное отображение $\mathscr{G} \to \mathscr{P}$. Поскольку импульсная характеристика устройства — ограниченная функция, имеющая конечную «энергию», а минимизируемый функционал — квадратический, то в качестве $\mathscr{G}$ целесообразно рассматривать пространство $\mathscr{L}_2$.

Как известно [71], если решение (3.97) ищется на компакте $\mathscr{M} \subset \mathscr{G}$ и известно, что $y \in \mathbf{B}_x\mathscr{M}$, то из корректности задачи по А. Н. Тихонову следует, что метод подбора может быть эффективно использован для ее решения. Если $y \notin \mathbf{B}_x\mathscr{M}$, то вводится понятие квазирешения и метод подбора позволяет найти приближение к нему [71].

Таким образом, важнейшим условием успешного решения уравнения (3.97) является указание компактного класса корректности. В $\mathscr{L}_2$ условие компактности выражается критерием M Рисса [78]: для компактности $\mathscr{M} \subset \mathscr{L}_2(0, \theta)$ необходимо и достаточно, чтобы $\mathscr{M}$ было ограниченным в $\mathscr{L}_2(0, \theta)$ и чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало $\delta > 0$ такое, что при $|\tau| < \delta$

$$\int_0^\theta |g(t+\tau) - g(t)|^2 dt < \varepsilon. \tag{3.98}$$

Ограниченность множества импульсных характеристик, соответствующих дробно-рациональным передаточным функциям с ограниченными порядком и коэффициентами, очевидна. Проверим выполнение соотношения (3.98), которое запишется с учетом [6] в виде:

$$\int_0^\theta \left\{ \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m_k} \frac{\Psi_{kl}(\alpha_k)}{(m_k - l)!\,(l-1)!} \left[(t+\tau)^{m_k - l} e^{\alpha_k (t+\tau)} - t^{m_k - l} e^{\alpha_k t} \right] \right\}^2 dt \leqslant$$

$$\leqslant b e^{2(\alpha_k)_{\max}\tau},$$

где

$$b = n^2 (m_k)^2_{\max} (4\theta^2)^{(m_k)_{\max}} \left[\frac{\Psi_{kl}(\alpha_k)}{(m_k - l)!\,(l-1)!} \right]^2_{\max} \frac{\exp[2(\alpha_k)_{\max}\theta] - 1}{2(\alpha_k)_{\max}}.$$

Очевидно, что при $\delta = [2(\alpha_k)_{\max}]^{-1} \ln(\varepsilon/b)$ условие (3.98) выполняется и рассматриваемое множество $\mathscr{M}$ импульсных характеристик компактно в $\mathscr{L}_2(0, \theta)$.

Если $y \in \mathbf{B}_x\mathscr{M}$, то в качестве приближенного решения уравнения (3.97) можно брать точное его решение с неточными исходными данными $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$. Последняя задача эквивалентна задаче нахождения на $\mathscr{M}$ функции, минимизирующей функционал $\Phi = \| \mathbf{B}_{\tilde{x}} g - \tilde{y} \|_{\mathscr{L}_2}$. Пусть $\rho_C(\tilde{y}, y) \leqslant \delta$. Тогда в качестве приближенного решения уравнения (3.97) можно взять функцию g_δ, для которой $\| \mathbf{B}_{\tilde{x}} g_\delta - \tilde{y} \|_{\mathscr{L}_2} < \delta$. Последнее условие весьма важно, так как оно позволяет сформулировать правило останова в алгоритме поиска оптимальных моделей с усложняющимися структурами.

Область поиска неизвестных коэффициентов передаточной функции на каждом шаге представляет собой многомерный параллелепипед: $\mathbf{T}_н \leqslant \mathbf{T} \leqslant \mathbf{T}_в$, где $\mathbf{T}_н$ и $\mathbf{T}_в$ — векторы нижних и верхних границ. На первом шаге область поиска определяется непосредственно по кривой записи выходного сигнала $y(t)$ и границы области поиска задаются в качестве исходных данных. Границы области на последующих шагах определяются на основе соотношений, установленных в [19], и вводимых соотношений упорядоченности коэффициентов передаточной функции и зависят от формы испытательного сигнала. Для обеспечения единственности решения оптимизационной задачи к функционалу прибавлены штрафные функции Φ_i $(i = 1, 2, \ldots)$, которые не изменяют значений основного функционала при выполнении определенных условий и резко увеличивают его в противном случае. Количество штрафных функций различно для разных структур передаточных функций и определяется количеством условий, налагаемых на искомые коэффициенты. Поскольку реальные испытательные сигналы, используемые в эксперименте, относятся к сигналам импульсным или с ненулевым установившимся значением, то выходные сигналы исследуемых устройств имеют установившиеся значения. Это обстоятельство используется при определении штрафной функции Φ_1, общей для всех циклов поиска:

$$\Phi_1 = \begin{cases} 0, & \max\limits_{t \in [\theta\ \theta_1]} |y(t) - Y(t;\ \mathbf{T})| = \delta_{yY} \leqslant \delta_1, \\ \delta_{yY} \cdot 10^6, & \delta_{yY} > \delta_1. \end{cases}$$

Здесь θ_1 — время наблюдения; θ — момент времени, начиная с которого выходной сигнал устройства и реакция его модели на тот же испытательный сигнал не должны различаться более чем на установленную величину δ_1. θ определяется по выходному сигналу $y(t)$ с учетом погрешности его определения и требуемой точности описания средства измерений его моделью. Функция Φ_2 определяется на основе установленных соотношений между оптимальным коэффициентом передаточной функции 1-го порядка и первой частной дробью в разложении передаточной функции в цепную дробь [19]. Например, разложение $W(p) = 1/[(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)]$ в цепную дробь и сжатие ее до первой частной дроби дает $\tilde{W}_1(p) = 1/[(T_1 + T_2)p + 1]$. Область поиска коэффициентов T_1 и T_2 может быть ограничена неравенствами $\tilde{T} - \Delta \leqslant T_1 + T_2 \leqslant \tilde{T}$, где $\tilde{T}$ — оптимальный коэффициент динамического звена 1-го порядка.

Параметр Δ представляет собой разность между оптимальным коэффициентом передаточной функции 1-го порядка и коэффициентом 1-й частной дроби, которая получена путем сжатия цепной дроби, эквивалентной $W(p)$ [19]. Для каждой из передаточных функций значение Δ определяется формой испытательного сигнала и увеличивается с шириной его спектра. В рассматриваемом случае

$$\Phi_2 = \begin{cases} (\tilde{T} - \Delta - T_1 - T_2)(A/\Delta t)\cdot 10^6, & T_1 + T_2 < \tilde{T} - \Delta; \\ 0, & \tilde{T} - \Delta < T_1 + T_2 < \tilde{T}; \\ (T_1 + T_2 - \tilde{T})(A/\Delta t)\cdot 10^6, & T_1 + T_2 > \tilde{T}, \end{cases}$$

где Δt — период дискретизации $y(t)$; A — амплитуда входного импульса или скачка.

Остальные штрафные функции определяются на основании введенных соотношений упорядоченности. В рассматриваемом случае естественно положить $T_1 > T_2$, так как $W(p)$ симметрична относительно этих параметров.

Пересчет найденной передаточной функции в другие полные характеристики осуществляется по известным формулам (см. табл. 2.1), связывающим коэффициенты временных и частотных характеристик с коэффициентами соответствующей дробно-рациональной передаточной функции.

Погрешность нахождения коэффициентов передаточной функции определяется [20] из операторного уравнения динамики средства измерений (1.27). Погрешность $\delta\mathbf{B}$ нахождения оператора $\mathbf{B}$ в (1.27) обусловлена неточностью определения испытательного и выходного сигналов, а также ограниченной точностью нахождения экстремума функционала. Обозначив погрешности определения сигналов и разрешающую способность алгоритма поиска по функционалу соответственно δx, δy, z, получим $\delta\mathbf{B}x = \delta y + \mathbf{B}_0\delta x + z$, где $\mathbf{B}_0$ — истинный оператор Рассматривая последнее уравнение во временной области и беря нормы обеих частей, получаем

$$\left\| \int_0^t \delta g(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau \right\| \leqslant \|\delta y\| + \left\| \int_0^t g(t-\tau)\, \delta x(\tau)\, d\tau \right\| + \|z\|$$

В частности, для чебышевской нормы

$$\left| \int_0^t \delta g(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau \right|_{\max} \leqslant |\delta y|_{\max} + |\delta x|_{\max} \left[\int_0^t |g(t-\tau)|\, d\tau \right]_{\max} +$$

$$+ |y(t) - Y(t;\ \mathbf{T}_{\text{опт}})|_{\max}, \qquad t \in [0,\ \theta]. \qquad (3.99)$$

Погрешность δg импульсной характеристики устройства обусловлена погрешностями найденных коэффициентов:

$$\delta g(t;\ \mathbf{T}) = g(t,\ T_1 + \delta T_1, \ldots, T_n + \delta T_n) - g(t;\ T_1 \ldots, T_n).$$

Рассматривая по отдельности каждый коэффициент, выражаем «частичную» погрешность δg_i в виде

$$\delta g_i(t;\ \mathbf{T}) = g(t;\ T_1, \ldots, T_{i-1},\ T_i + \delta T_i,\ T_{i+1}, \ldots, T_n) -$$

$$- g(t;\ T_1, \ldots, T_{i-1},\ T_i,\ T_{i+1}, \ldots, T_n) = \frac{\delta T_i}{T_i} f(t;\ \mathbf{T}).$$

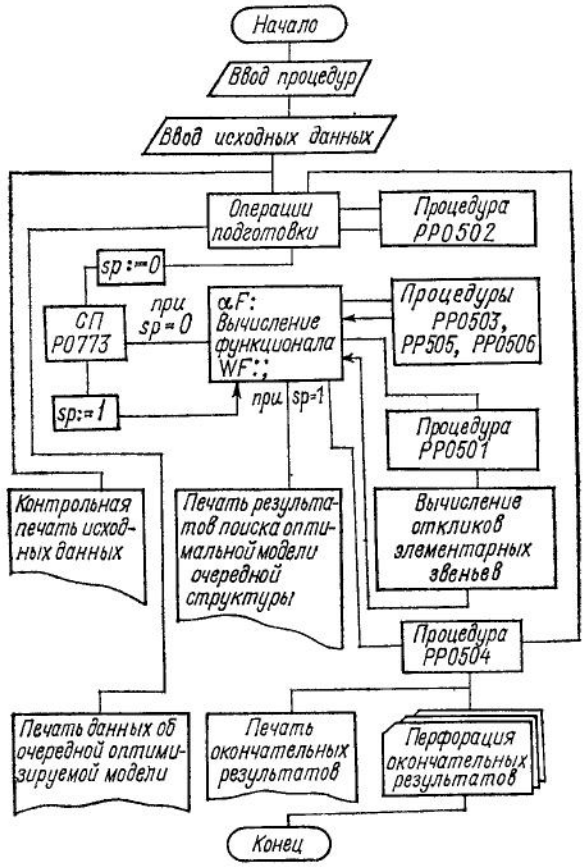


Рис. 3 7. Схема программы определения оптимальной передаточной функции средства измерений с помощью типовых испытательных сигналов

Тогда, обозначив правую часть (3 99) через d, получим

$$\frac{\delta T_i}{T_i} \leqslant \frac{d}{\max\limits_{t\in[0\ \theta]} \left| \int_0^t f(t-\tau,\ \mathbf{T})\, x(\tau)\, d\tau \right|}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Описанный алгоритм реализован в виде комплекса программ [26], написанных на языке АЛГОЛ для транслятора ТА-1М ЭВМ «М-222», а также ФОРТРАН для ЕС ЭВМ.

Основная программа определяет простейшую передаточную функцию, соответствующую исследуемому устройству. Две дополнительные программы реализуют пересчет коэффициентов передаточной функции в коэффициенты других характеристик по известным формулам, а также расчет погрешностей.

Упрощенная структурная схема основной программы представлена на рис. 3.7.

3.5. МЕТОДЫ НАХОЖДЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК С ПОМОЩЬЮ ПСЕВДОСЛУЧАЙНЫХ ИСПЫТАТЕЛЬНЫХ СИГНАЛОВ

Принцип нахождения характеристик линейного аналогового устройства с сосредоточенными параметрами с помощью псевдослучайных испытательных сигналов основан на использовании для описания динамики средства измерений уравнения Винера—Хопфа (3.22). Как указано выше (см. § 3.2), наиболее широко используе-

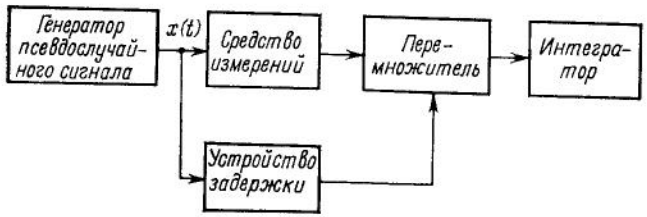


Рис. 3.8. Структурная схема измерительной установки, предназначенной для реализации корреляционного метода

мые псевдослучайные сигналы — M-последовательности или последовательности максимальной длины — объединяют в себе достоинства детерминированных (хорошая воспроизводимость) и случайных (широкий частотный диапазон) сигналов.

Реализации метода определения динамических свойств средства измерений с помощью псевдослучайного двоичного сигнала посвящена работа [84]. Достоинством метода является возможность получения устойчивого решения при изменении объема априорной информации об устройстве в довольно широких пределах. Выбор испытательного сигнала ограничивает сферу применения метода областью электрических измерений.

Метод реализуется с помощью измерительной установки, представленной на рис. 3.8.

Операции обработки псевдослучайного испытательного сигнала $x(t)$ и отклика на него исследуемого средства измерений $y(t)$ могут осуществляться как путем вычислений на универсальной ЭВМ, так и с помощью специализированной аппаратуры. В работе [84] разработано специализированное вычислительное устройство, позволяющее определять поточечно значения импульсной характеристики. В качестве элементов системы обработки могут быть использованы цифровое устройство задержки, схема совпадений как элемент логического перемножения дискретных сигналов, аналоговый интегратор на операционном усилителе или устройство цифрового интегрирования.

Погрешности корреляционного метода обусловлены неидеальностью испытательного сигнала (отличием его от белого шума), неточностью установки и колебаниями времени задержки, несовершенством методов и средств перемножения и интегрирования сигналов. При цифровой обработке определяющими являются неидеальность испытательного сигнала и погрешность интегрирования. Как показано выше, отличие корреляционных (спектральных) свойств M-последовательности от аналогичных свойств белого шума уменьшается при увеличении отношения T/θ. «Приведенная» широкополосность M-последовательности (см. § 3.2) сравнительно легко может быть повышена за счет наращивания числа каскадов формирующего регистра. Однако реальная широкополосность определяется частотой повторений $1/\theta$ тактовых импульсов, определяющей масштаб величин при частотном анализе псевдослучайного сигнала. Как показано в [84], методические погрешности при поточечном определении импульсной характеристики с помощью M-последовательности уменьшаются с уменьшением θ. Инструментальные погрешности, наоборот, растут с уменьшением θ. Следовательно, результирующая погрешность определения дискретного значения импульсной характеристики достигает минимума при некотором значении θ. Погрешность слабо изменяется относительно минимального уровня в довольно широкой области [84]. Ширина области минимума определяется соотношением периода θ и характеристического временного параметра импульсной характеристики исследуемого средства измерений. Для различных уровней дрейфа интегратора указанная ширина может составлять 2—3 порядка. Этот факт облегчает требования к объему априорной информации об исследуемом устройстве при установлении периода θ.

При реализации корреляционного метода с помощью численных методов переходят от уравнения свертки (3.22) к линейной алгебраической системе подобно тому, как это сделано в § 3.1 для уравнения (1.29). Получается система:

$$(\Delta t K)^{-1}\mathbf{R}_{yx,n} = \mathbf{R}_{xx}\mathbf{G}, \qquad (3.100)$$

где $\mathbf{R}_{yx,n}$ — n-мерный вектор-столбец с элементами $R_{yx}(i\Delta t)$, $i = 1, \ldots, n$; $\mathbf{R}_{xx}$ — матрица с размерностью $n \times m$; $\mathbf{G}$ — m-мерный вектор-столбец с элементами $g(i\Delta t)$, представляющими собой искомые значения импульсной характеристики. Система (3.100) может быть решена методами, рассмотренными в § 3.1, 3.4. В частности, могут быть использованы методы регуляризации. Среди последних можно выделить два подхода: применение регуляризующего функционала и поиск решения в виде ряда по выбранной ортонормальной системе с усечением ряда или его устойчивым суммированием с помощью сглаживающих множителей.

3.6. ПОГРЕШНОСТИ ОЦЕНИВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК

В соответствии со структурной схемой рис. 3.1, иллюстрирующей обобщенный алгоритм определения характеристик, можно выделить следующие основные источники погрешностей их определения:

погрешность определения (неидеальность) испытательного сигнала;

погрешность исследуемого средства измерений;

погрешность определения отклика средства измерений на испытательный сигнал;

погрешность алгоритма обработки данных.

Рассмотрим подробно эти источники.

Погрешность определения испытательного сигнала может иметь различный характер в зависимости от того, используется ли генератор, представляющий собой меру, или источник сигнала, не имеющий нормированных метрологических характеристик. В первом случае, как правило, номинальный испытательный сигнал имеет одну из типовых (геометрически простых) форм: ступенчатый, импульсный одномодальный, периодический. Реальный сигнал на выходе генератора отличается от номинального по форме, в связи с чем говорят о неидеальности испытательного сигнала. Неидеальность обусловлена систематическим отклонением испытательного сигнала от типового и случайными флуктуациями реального сигнала, которые определяются нестабильностью генератора от включения к включению и за время эксперимента. В состав исходных данных при использовании генератора входят его нормированные характеристики: номинальный воспроизводимый сигнал и пределы допускаемых отклонений от него.

Во втором случае испытательный сигнал может иметь произвольную форму и должен быть определен в процессе эксперимента наряду с откликом средства измерений. Для определения испытательного сигнала используется измерительное устройство, состоящее в общем случае из измерительного преобразователя и регистрирующего прибора. В состав исходных данных входят результат определения (регистрации) сигнала и оценка его погрешности.

Погрешность исследуемого устройства служит причиной «неинформативных» искажений его отклика. Под информативными искажениями понимаются те, которые обусловлены исследуемыми регулярными динамическими свойствами средства измерений. Статическая погрешность устройства (при раздельном определении статических и динамических свойств) и случайная составляющая его динамической погрешности вызывают искажения отклика, не несущие информацию об искомой характеристике (точнее, об ее регулярной части). Искажения отклика за счет статических погрешностей могут быть оценены на основе нормированных статических характеристик средства измерения и включены в погрешности исходных данных при определении характеристик. Искажения,

вызванные случайными флуктуациями определяемой характеристики, могут быть определены лишь приближенно на основе априорных сведений о динамических свойствах исследуемого устройства.

Погрешность определения отклика средств измерений в общем случае складывается из погрешности регистрации (включающей в себя в случае необходимости погрешность предварительного преобразования) и погрешности отсчитывания, содержащей составляющую, вызванную дискретизацией сигнала. Эти погрешности оцениваются, соответственно, на основе нормированных характеристик используемых измерительных устройств (измерительного преобразователя и регистрирующего прибора) и на основе известных соотношений, базирующихся на теореме Котельникова.

Погрешность алгоритма обработки данных специфична для каждого алгоритма и содержит две группы составляющих. В первую группу входят составляющие, обусловленные погрешностями исходных данных. Эти составляющие получаются в результате преобразований, соответствующих операциям, которые образуют в совокупности алгоритм обработки. Ко второй группе относятся составляющие, характеризующие несовершенство алгоритма (например, погрешность поиска в адаптивных алгоритмах или погрешность исходных теоретических соотношений в замкнутых, конечных алгоритмах) и неточность вычислений.

Наиболее просто оценивается погрешность определения характеристик прямым методом. В общем случае эта погрешность выражается с помощью соотношения (3.75), содержащего сумму указанных выше составляющих в их конкретных формах. Поскольку может потребоваться представить найденную характеристику в аналитической форме, выражение (3.75) содержит в качестве погрешности алгоритма, кроме погрешностей регистрации и отсчитывания значений выходного сигнала, также погрешность аппроксимации. Определение динамических характеристик прямым методом можно рассматривать при превалирующей точности определения аргумента как прямые измерения, при которых измеряемая величина, характеризующая объект исследований, получается как отклик его на известное воздействие. Поэтому результат измерений, т. е. характеристика, содержит составляющую, которая определяется неадекватностью воздействия: неидеальностью или неточностью определения испытательного сигнала. С учетом этой специфики оценивание погрешностей определения характеристик прямым методом в целом аналогично оцениванию прямых измерений.

Определение динамических характеристик устройства косвенным методом представляет собой пример совместных измерений, оценивание которых сугубо специфично для каждого конкретного метода. Соотношения для оценивания погрешностей ряда методов приведены выше при описании этих методов (см. § 3.1, 3.4 и 3.5).

В работе [85] построены зависимости отношения методической и инструментальной погрешностей определения импульсной характеристики средств измерений с помощью периодической после-

довательности коротких импульсов от периода повторений импульсов (для одного и двух последовательно соединенных интегрирующих звеньев).

Общие соображения по оцениванию погрешностей коэффициентов динамических характеристик, найденных методами статистической теории оценивания, приведены в [54].

3.7. ПРИМЕРЫ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ, МЕХАНИЧЕСКИХ И ТЕПЛОВЫХ ВЕЛИЧИН

Малоинерционный газоанализатор типа ГУМ. Прибор предназначен для измерения постоянной и регистрации переменной концентрации углекислого газа, например для регистрации изменений концентрации CO_2 в смеси, выдыхаемой человеком. Газоанализатор (рис. 3.9) представляет собой измерительную установку, включающую в себя оптико-акустический показывающий прибор с выходом электрического сигнала и регистрирующий прибор — самописец типа Н320-1.

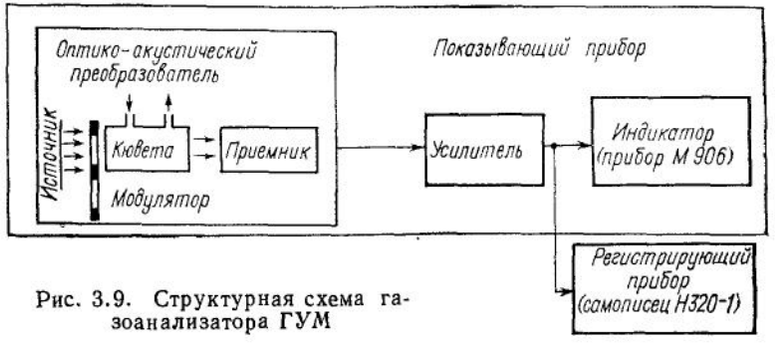


Рис. 3.9. Структурная схема газоанализатора ГУМ

Основными узлами прибора являются: оптико-акустический преобразователь, содержащий источник инфракрасной радиации, кювету и оптико-акустический приемник, а также усилитель и индикатор, в качестве которого используется магнитоэлектрический показывающий прибор, градуированный в единицах относительного содержания CO_2 в смеси — процентах. Таким образом, при измерении постоянной концентрации CO_2 газоанализатор используется как показывающий прибор, а при измерениях переменной концентрации — как регистрирующий. В связи с этим у газоанализатора должна нормироваться наряду с пределом допускаемой статической погрешности также полная динамическая характеристика [4], позволяющая при применении прибора оценить его динамическую погрешность. Ранее в технических условиях на газоанализатор нормировалось время переходного процесса, определяемое как время достижения 95 %-ного значения измеряемой постоянной величины. Указывались также постоянная времени и время начала реагирования. Указанные характеристики в общем случае являются частными характеристиками [4]. Нормирование постоянной времени как полной характеристики имеет смысл лишь в том случае, когда моделью прибора является динамическое звено 1-го порядка, однако при этом не должно нормироваться время переходного процесса, которое однозначно связано с постоянной времени. Предстояло выяснить, насколько полно исследуемое устройство описывается этой моделью. Вопрос чрезвычайно важен для оценивания погрешностей средств измерений в динамическом режиме, поскольку точность оценивания в некотором смысле «однозначно» связана с полнотой моделирования. Покажем это.

Пусть $y(t)$, $y_{м1}(t)$ и $y_{м2}(t)$ — реакции, соответственно, средства измерений, его более и менее точных моделей на входной сигнал $x(t)$. Таким образом, $\|y_{м2}(t) - y(t)\| > \|y_{м1}(t) - y(t)\|$. На основании очевидного тождества $y_м(t) - y(t) = -x(t) + y_м(t) - [-x(t) + y(t)] = \delta_м(t) - \delta(t)$ получаем, что между динамическими погрешностями существует аналогичное неравенство: $\|\delta_{м2}(t) - \delta(t)\| > \|\delta_{м1}(t) - \delta(t)\|$. Таким образом, замена полной модели устройства упрощенной, вообще говоря, приводит к искажению оценки динамической погрешности. Как показали исследования, результаты которых приведены ниже, погрешность газоанализатора оказалась заниженной.

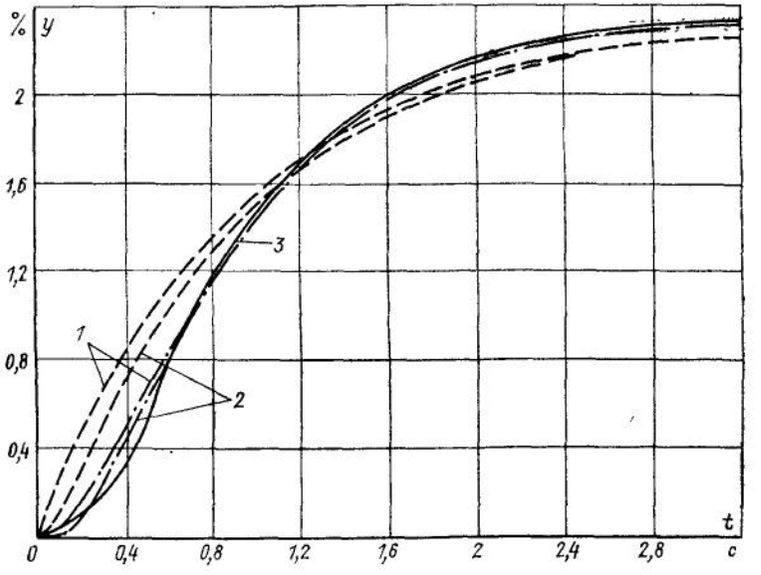


Рис. 3.10. Отклики газоанализатора ГУМ и его моделей на испытательные сигналы

1 — модель 1-го порядка; *2* — модель 2-го порядка; *3* — газоанализатор; штриховые кривые — идеальный ступенчатый сигнал; штрихпунктирные кривые — сигнал с линейным нарастанием

В качестве исходных были взяты данные, полученные при заводских испытаниях газоанализатора, а также данные, полученные в результате специального эксперимента в ходе государственных испытаний типа приборов. В эксперименте при государственных испытаниях на вход газоанализатора подавалась из баллона газовая смесь, содержащая 2,3 % CO_2. Смесь подавалась путем быстрого открывания («выстрела» с помощью пружины) вентиля, что позволило считать изменение концентрации в начале трубопровода ступенчатым. Расход смеси составлял $8{,}3 \cdot 10^{-6}$ м$^3 \cdot$с$^{-1}$. Смесь подавалась под давлением 120 кПа, следовательно, можно считать, что в трубопроводе отсутствовали процессы диффузии и по нему распространялась волна с четко очерченным фронтом, разделяющим области с концентрациями CO_2: 0 и 2,3 % соответственно. Имевшее место транспортное запаздывание исключалось из экспериментальных данных. Кривая записи выходного сигнала газоанализатора приведена на рис. 3.10. Скорость движения ленты самопишущего прибора составляла 50 мм$\cdot$с$^{-1}$. По осциллограмме были отсчитаны 64 значения кривой записи, взятых через 0,025 м. В предположении ступенчатого испытательного сигнала по методике, описанной в § 3.4, были найдены оптимальные модели анализатора в виде звеньев 1-, 2- и 3-го порядков.

В табл. 3.4 приведены результаты. Из их анализа можно сделать следующие **выводы.** Погрешности нахождения коэффициентов передаточной функции, **обусловленные** несовершенством алгоритма поиска (см. § 3.4), оцениваются **сверху** значениями $\Delta T_i = \Delta T_{i\,\text{нач}}/2$, где n — порядок модели, $\Delta T_{i\,\text{нач}}$ — **начальный** шаг поиска параметра T_i, $i = 1, \ldots, 2n{-}1$. Максимальные разности выходных сигналов устройства и его моделей из-за неидеальности алгоритма в первом приближении могут быть оценены так:

$\Delta y_1 = \Delta h_1 = 2{,}3\,(\Delta T/T)\exp(-t/T) = 0{,}14$ — для модели 1-го порядка;
$\Delta y_2 = \Delta h_2 = 0{,}03$ — для модели 2-го порядка;
$\Delta y_3 = \Delta h_3 = 0{,}02$ — для модели 3-го порядка.

Таблица 3.4

Модели газоанализатора ГУМ для испытательного сигнала, близкого к идеальной ступени

Передаточная функция	Коэффициент, с	Погрешность найденных коэффициентов, с	Максимальный модуль разности откликов модели и устройства, усл. ед.
$W_1(p) = \dfrac{1}{Tp+1}$	$T = 0{,}45$	$\Delta T = 0{,}03$	0,46 ($\sigma = 0{,}18$)
$W_2(p) = \dfrac{1}{(Tp+1)^2}$	$T = 0{,}23$	$\Delta T = 0{,}01$	0,12 ($\sigma = 0{,}04$)
$W_3(p) = \dfrac{1}{(T_1p+1)(T_2p+1)}$	$T_1 = 0{,}19$ $T_2 = 0{,}28$	$\Delta T_1 = 0{,}01$ $\Delta T_2 = 0{,}02$	0,12 ($\sigma = 0{,}04$)

Погрешность отсчитывания значений выходного сигнала устройства можно оценить сверху значением 0,03 %. Вычислительной погрешностью в данном случае можно пренебречь. Следовательно, суммарная погрешность нахождения переходной характеристики составляет:

0,17 — для модели 1-го порядка;
0,05 — для модели 2-го порядка;
0,04 — для модели 3-го порядка.

Сравнение полученных значений с соответствующими значениями, приведенными в последнем столбце табл. 3.4, показывает, что различие реакций модели и средства измерений может быть объяснено лишь несовершенством алгоритма поиска и неточностью отсчитывания значений выходного сигнала. Следовательно, речь идет о том, что испытательный сигнал не соответствует принятой модели — идеальной ступени. В то же время можно считать несомненным, что на входное устройство газоанализатора — кювету — воздействует поток газовой смеси со скачкообразно изменяющейся концентрацией. Поэтому следует рассмотреть, как видоизменяется форма испытательного сигнала в самой кювете. Заполнение кюветы происходит не мгновенно. При объеме кюветы $50{,}8\cdot10^{-8}$ м^3 и расходе смеси $8{,}3\ 10^{-6}$ м$^3\cdot$с$^{-1}$ время заполнения составляет 61 мс. Оптико-акустический приемник создает на выходе электрический сигнал, который пропорционален средней концентрации CO_2 по всему объему кюветы. За время заполнения кюветы средняя концентрация CO_2 изменяется от 0 до установившегося значения 2,3 %. В первом приближении можно принять, что средняя концентрация в кювете изменяется за время заполнения по линейному закону. Таким образом, более реальной моделью испытательного воздействия является сигнал с линейным

фронтом и ненулевым установившимся значением, который может быть представлен линейной комбинацией двух типовых (см. § 3.2): $x_1(t)$ на интервале [0; 1,6 с] и $-x_1(t-0{,}06)$ на интервале [0,06; 1,6 с]. Такому преобразованию ступени в сигнал с линейным фронтом соответствует следующая модель кюветы.

Пусть ξ — объемная концентрация CO_2 на входе в кювету, а x — средняя концентрация CO_2 в кювете, т. е. та величина, которую воспринимает чувствительный элемент газоанализатора. Очевидно, что $\xi = dV_{CO_2}/dV_{см}$, а $x = V_{CO_2}/V_к$, где dV_{CO_2}, $dV_{см}$ — элементарные объемы CO_2 и смеси, и $v_{расх} = dV_{см}/dt$. При $t \leqslant \theta$ в кювету смесь только поступает, вытесняя чистый воздух. При $t > \theta$ смесь начинает выходить из кюветы. Соответствующие дифференциальные уравнения имеют вид:

$$dx_1 = \frac{v_{расх}}{V_к}\xi dt, \qquad x_1(0) = 0, \qquad 0 \leqslant t \leqslant \theta;$$

$$dx_2 = \frac{v_{расх}}{V_к}\xi dt - \frac{v_{расх}}{V_к}x_2 dt, \qquad x_2(\theta) = x_1(\theta), \qquad \theta < t < \infty.$$

В операторной форме эти уравнения таковы:

$$X_1(p) = \frac{\Xi(p)}{\theta p}; \qquad X_2(p) = \frac{\Xi(p)}{\theta p+1} + \frac{\theta X_2(0)}{\theta p+1},$$

где $\theta = V_к/v_{расх}$.

В случае когда θ много меньше времени нарастания сигналов с установившимся значением, наличием первого режима работы кюветы можно пренебречь. В этом случае операторное уравнение таково: $x(p) = \xi(p)/(\theta p + 1)$. В предположении, что реальный испытательный сигнал нарастает линейно за время θ до установившегося значения, были найдены с помощью адаптивного метода (см. § 3.4) оптимальные передаточные функции прибора (без учета кюветы) 1-, 2- и 3-го порядков. В табл. 3 5 приведены результаты, из которых видно, что модель испытательного сигнала с линейным фронтом существенно лучше описывает реальное воздействие, чем ступень.

В связи с изложенной методикой исследования динамических свойств газоанализатора необходимо сделать следующее замечание. При определении динамических свойств устройства информация о форме и параметрах испытательного сигнала входит в число исходных данных, которые должны оставаться фиксированными и могут изменяться лишь в исключительных случаях при наличии серьезных оснований. В противном случае существует опасность, что вместо выявления динамических свойств исследуемого устройства и уточнения их описания (например, путем разумного усложнения моделей) будет происходить их маскировка (искажение) за счет неоправданного «усложнения» исходных данных. Указанная опасность обусловлена тем, что конкретную реакцию устройства, вообще говоря, можно аппроксимировать либо откликом на определенный (фиксированный) испытательный сигнал правильно подобранной модели, либо откликом определенной (фиксированной) модели на специально подобранный испытательный сигнал. Что касается газоанализатора, то подбор формы испытательного сигнала был обусловлен очевидными физическими соображениями.

Найденные модели газоанализатора позволили исследовать его точность при регистрации изменяющейся концентрации CO_2 в выдыхаемой смеси. При однократном выдохе, длительность которого приблизительно равна 5 с, концентрация CO_2 на входе в кювету определенным образом нарастает до установившегося значения. Для оценки возможных искажений входных сигналов были рассчитаны для $v_{расх} = 16{,}6\cdot10^{-6}$ м$^3\cdot$с$^{-1}$ реакции найденных моделей газоанализатора на близкие к рабочим воздействиям сигналы (3.26) и (3.29) со временем нарастания $\theta = 5$ с и установившимся значением, равным 1 усл. ед.

Таблица 3.5

Модели газоанализатора ГУМ для линейно нарастающего испытательного сигнала

Передаточная функция	Коэффициент, с	Погрешность найденных коэффициентов, с	Максимальный модуль разности откликов модели и устройства, усл. ед.
$W_1(p) = \frac{1}{Tp+1}$	$T = 0,44$	$\Delta T = 0,03$	0,35 ($\sigma = 0,13$)
$W_2(p) = \frac{1}{(Tp+1)^2}$	$T = 0,22$	$\Delta T = 0,01$	0,04 ($\sigma = 0,02$)
$W_3(p) = \frac{1}{(T_1p+1)(T_2p+1)}$	$T_1 = 0,18$ $T_2 = 0,26$	$\Delta T_1 = 0,01$ $\Delta T_2 = 0,02$	0,05 ($\sigma = 0,02$)

Передаточные функции рассматриваемых моделей:

$$W_{м2}(p) = W_2(p); \qquad W_{м3}(p) = W_к(p)\,W_1(p);$$
$$W_{м4}(p) = W_к(p)\,W_2(p),$$

где $W_1(p)$, $W_2(p)$ — найденные передаточные функции (см. табл. 3.5); $W_к(p)$ — передаточная функция кюветы.

Были рассчитаны нормы динамических погрешностей моделей в C и $\mathscr{L}_1$, значения которых приведены в табл. 3.6. Из таблицы видно, что использование модели 1-го порядка приводит к получению заниженных оценок динамических, а значит и результирующей, погрешностей измерений.

Таблица 3.6

Динамические погрешности газоанализатора ГУМ (в условных единицах)

Передаточная фуикция модели прибора	Испытательный сигнал			
	с линейным нарастанием		с косинусоидальным нарастанием	
	максимальный модуль погрешности	средний модуль погрешности	максимальный модуль погрешности	средний модуль погрешности
$W_{м1}(p)$	0,01	0,004	0,02	0,004
$W_{м2}(p)$	0,06	0,02	0,06	0,02
$W_{м3}(p)$	0,02	0,006	0,03	0,006
$W_{м4}(p)$	0,06	0,02	0,6	0,02

Таким образом, принятый ранее способ нормирования динамических характеристик газоаналитических приборов по ГОСТ 13320—69 не позволял

достоверно оценивать результаты динамических измерений, выполняемых с помощью этих приборов. В связи с этим были сформулированы рекомендации по корректировке положений о динамических характеристиках этого ГОСТ. Рекомендации учтены в новом ГОСТ 13320—81, положения которого соответствуют общим требованиям ГОСТ 8.256—77.

Из табл. 3.5 следует, что удовлетворительной моделью газоанализатора может служить динамическое звено 2-го порядка с передаточной функцией $W_2(p)$. Ее можно использовать в тех случаях, когда время нарастания входного сигнала больше времени заполнения кюветы. В других случаях надо переходить к $W_{м4}(p)$.

Результаты проведенных исследований позволили скорректировать техническую документацию на прибор ГУМ. В техническое описание газоанализатора внесено следующее дополнение:

«Передаточная функция прибора при подключении его к источнику входного сигнала с помощью внешней газоподводящей трубки длиной от 20 до 300 мм с внутренним диаметром 3 мм при расходе газовой смеси от 1 до 2 л·мин$^{-1}$ без учета статического коэффициента преобразования имеет вид:

$$W_0(p) = e^{-\theta_0 p}/(T_0 p + 1)^2,$$

где $T_0 = 0,07$ с, а запаздывание θ_0 определяется формулой:

$$\theta_0 = \frac{0,06}{v}\left(0,6 + \frac{\pi l d^2}{4}\cdot 10^{-3}\right),$$

где v — расход смеси, л·мин$^{-1}$; l, d — длина и диаметр внешней газоподводящей трубки, мм. При регистрации концентраций, нарастающих или убывающих до определенного постоянного уровня за время, большее 3 с, можно пользоваться упрощенной передаточной функцией $W_1(p) = [\exp(-\theta_1 p)]/(T_1 p + 1)$, где $T_1 = 0,03$ с, а запаздывание $\theta_1 = 0,02 + 0,06\,(1,55 + 25\cdot 10^{-5}\pi l d^2)/v$».

Исследование газоанализатора [24] представляет особый интерес потому, что весь прибор в целом, от входа в кювету до выхода самопишущего прибора, является нелинейным. Действительно, параметры его полной характеристики зависят от скорости расхода газовой смеси в подводящем трубопроводе, так как последняя определяет значение θ. Однако анализ работы входного элемента — кюветы — позволил определить вид его передаточной функции и уточнить форму испытательного сигнала. Таким образом, была выделена линейная часть прибора, для нахождения передаточной функции которой пригоден адаптивный метод.

Пьезоэлектрический преобразователь переменных давлений. Исследованный преобразователь используется для записи индикаторных диаграмм двигателей внутреннего сгорания. Диаграмма — график зависимости давления в цилиндре двигателя от времени, угла поворота коленчатого вала или хода поршня — позволяет получать данные, полностью характеризующие рабочий процесс в цилиндре. По этой диаграмме вычисляют параметры, обеспечивающие требуемые мощность, экономичность, надежность и ресурс двигателя. Поэтому точная регистрация индикаторной диаграммы имеет первостепенное значение при исследованиях в процессе конструирования двигателя. Однако отсутствие необходимых сведений о динамических свойствах индикаторов (преобразователей) давления не позволяет обоснованно выбирать их для регистрации индикаторной диаграммы и оценивать точность регистрации. Этим обстоятельством объясняется противоречивость опубликованных в литературе опытных данных о ширине спектра частот индикаторной диаграммы и соответственно о необходимой ширине полосы пропускания индикатора: оценки верхней граничной частоты требуемой полосы пропускания индикатора колеблются в пределах от 1 до 100 кГц. Таким образом, актуальной задачей для практики измерений переменных давлений при исследовании характеристик разрабатываемых двигателей является определение полных динамических характеристик индикаторов давления и их важнейшей части — пьезоэлектрических первичных преобразователей.

Исследуемый преобразователь с частотой собственных колебаний $f_0 = 45$ кГц, определенной с помощью вибрационной установки, был помещен в ударную трубу, где на него воздействовал ступенчатый перепад давления, равный 5,07 МПа. Время нарастания давления не превышало 10^{-7} с. Выходной (электрический) сигнал преобразователя приведен на рис. 3.11. Для определения полной характеристики преобразователя были взяты 16 значений выходного сигнала с периодом дискретизации по времени 5 мкс. В результате расчета на машине «М-222» по разработанной программе [26] получена передаточная функция $W(p) = 1/(T^2p^2 + 2\gamma Tp + 1)$ с коэффициентами: $T = 3{,}3 \times 10^{-6}$ рад$^{-1}$ с, $\gamma = 0{,}24$. Частота собственных колебаний, рассчитанная по найденным коэффициентам, $f_{0\,\text{расч}} = 47$ кГц, т. е. хорошо совпадает с действительной.

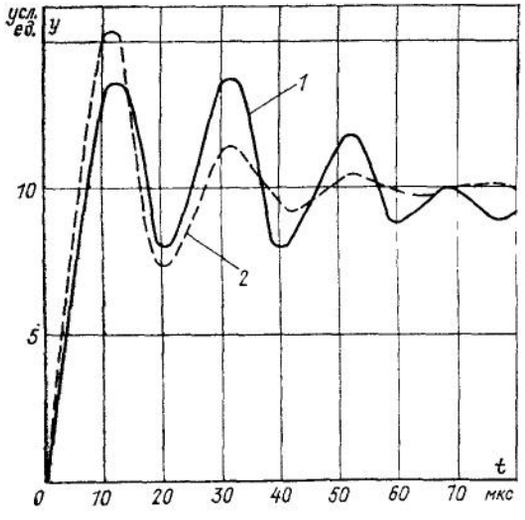


Рис. 3.11. Отклики пьезоэлектрического преобразователя переменных давлений и его модели на ступенчатый испытательный сигнал

1 — преобразователь; *2* — модель

Пленочный термоприемник. С помощью адаптивного метода были исследованы динамические свойства пленочного термоприемника, который представляет собой систему с распределенными параметрами, его передаточная функция имеет вид (см. § 2.1): $W_{\text{п.т}}(p) = 1/\left(T\sqrt{p} + 1\right)$. Задача исследования состояла в отыскании наилучшей аппроксимирующей модели с сосредоточенными параметрами. Отклик термоприемника на ступенчатое изменение температуры приведен на рис. 3.12. С помощью разработанной программы [26] были определены оптимальные передаточные функции различных порядков, приведенные в табл. 3.7.

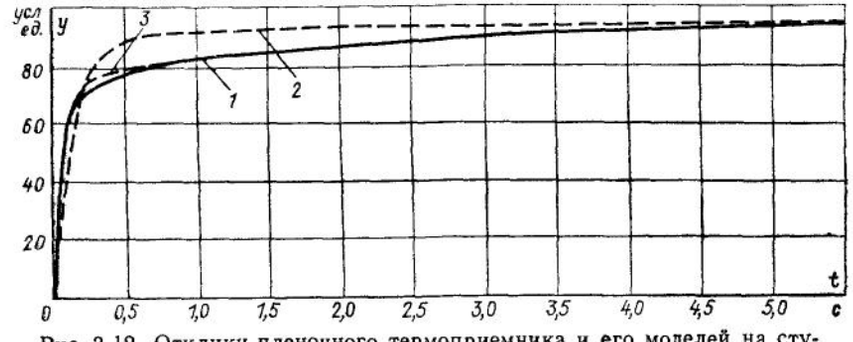


Рис. 3.12. Отклики пленочного термоприемника и его моделей на ступенчатый испытательный сигнал

1 — термоприемник; *2* — модель 1-го порядка; *3* — модели 2-и 3-го порядков

На рис. 3.12 приведены реакции найденных моделей на ступенчатый сигнал. Видно, что модели 2- и 3-го порядков почти равноценны с точки зрения близости реакций к выходному сигналу термоприемника. Таким образом, можно считать, что модель с передаточной функцией $W_2(p)$ хорошо описывает динамику работы термоприемника. Из результатов исследования можно заключить, что динамика пленочного термоприемника, описываемая дифференциальным уравнением в частных производных, может быть удовлетворительно охарактеризована с помощью дробно-рациональной передаточной функции. Однако если трансцендентная передаточная функция, полностью соответствующая физике процессов в термоприемнике, определяется одним коэффициентом, то аппроксимирующая дробно-рациональная передаточная функция содержит три коэффициента, т. е. сложнее для практического использования.

Таблица 3.7

Модели пленочного термоприемника

Передаточная функция	Коэффициент, с	Погрешность найденных коэффициентов, с	Максимальный модуль разности откликов модели и устройства, усл. ед.
$W_1(p) = \dfrac{1}{Tp + 1}$	$T = 0{,}152$	$\Delta T = 0{,}01$	19 ($\sigma = 6{,}1$)
$W_2(p) = \dfrac{T_3p + 1}{(T_1p + 1)(T_2p + 1)}$	$T_1 = 1{,}75$ $T_2 = 0{,}06$ $T_3 = 1{,}41$	$\Delta T_1 = 0{,}08$ $\Delta T_2 = 0{,}01$ $\Delta T_3 = 0{,}15$	3,4 ($\sigma = 0{,}75$)
$W_3(p) = \dfrac{T_5^2p^2 + T_4p + 1}{(T_1p + 1)(T_2p + 1)(T_3p + 1)}$	$T_1 = 1{,}6$ $T_2 = 0{,}06$ $T_3 = 0{,}006$ $T_4 = 1{,}31$ $T_5 = 0{,}08$	$\Delta T_1 = 0{,}1$ $\Delta T_2 = 0{,}01$ $\Delta T_3 = 0{,}02$ $\Delta T_4 = 0{,}15$ $\Delta T_5 = 0{,}02$	3 ($\sigma = 0{,}61$)

Попытка определения для термоприемника аппроксимирующей модели с сосредоточенными параметрами была предпринята ранее [34]. Полученные модели обладают переходными характеристиками, которые хорошо совпадают с переходной характеристикой термоприемника либо на начальном участке, либо на участке установления. На этом основании в [34] сделан вывод о необходимости описывать термоприемник в различных частотных диапазонах различными моделями. Однако в этом нет надобности, поскольку, как видно из рис. 3.12, найденная модель хорошо описывает динамические свойства термоприемника во всем диапазоне рабочих частот.

Сульфидно-кадмиевые фоторезисторы. Сульфидно-кадмиевые фоторезисторы применяются во многих измерительных устройствах, например в фотогальванических усилителях и в приборах для измерений малых перемещений. В этих устройствах фоторезисторы работают при равномерном освещении части поверхности. Под воздействием контролируемого сигнала площадь освещенной поверхности изменяется. Так как содержащее фоторезистор фотоэлектрическое звено обычно входит в контур отрицательной обратной связи более сложного средства измерений, например, фотогальва-

нометрического автокомпенсатора, то ошибка в определении его динамических свойств может привести к нарушению режима всего средства. Между тем фоторезистор является инерционным звеном с существенно нелинейными свойствами. Поэтому если определять его динамические характеристики в условиях, отличающихся от рабочих, то может возникнуть ошибка в сотни и даже тысячи процентов. Для устранения этой погрешности необходимо определить его динамические характеристики в режиме с малыми изменениями площади засветки.

На рис. 3.13 приведена структурная схема экспериментальной установки. Исследуемый фоторезистор *СФ* включается в схему фотогальванометрического усилителя *ФГУ*. Гальванометр *Г* этого усилителя подключается к вторичной обмотке катушки *М* взаимной индуктивности, через первичную обмотку которой протекает постоянный ток. Если скачком разомкнуть переключатель *В*, то в цепи гальванометра протекает очень короткий импульс тока, подвижная часть гальванометра отклоняется, освещение и состояние

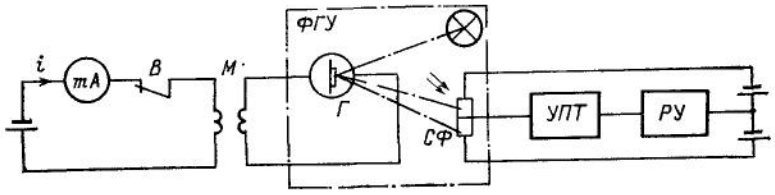


Рис. 3.13. Структурная схема установки для исследования фоторезисторов

СФ изменяются. Осциллограмма преобразованного линейно усилителем *УПТ* выходного тока *СФ*, записанная с помощью регистрирующего устройства *РУ*, может быть использована для исследования динамических свойств *СФ*. Для этого учтем, что обусловленный коротким импульсом тока угол отклонения подвижной части гальванометра [49]

$$\alpha(t) = \alpha_m[\exp(-\mathscr{W}^{\circ}t/P) - \exp(-Pt/\mathscr{J})], \qquad (3.101)$$

где α_m — наибольший угол отклонения; $\mathscr{W}^{\circ}$ — удельный противодействующий момент растяжек; $P = \Psi^2/R$ — коэффициент успокоения; Ψ — полное потокосцепление рамки подвижной части; R — сопротивление контура гальванометра; $\mathscr{J}$ — момент инерции подвижной части. Входящие в выражение (3.101) постоянные времени $\tau_1 = P/\mathscr{W}^{\circ}$ велика, а $\tau_2 = \mathscr{J}/P$ мала.

Таким образом, в первый момент после окончания импульса подвижная часть гальванометра с весьма малой постоянной времени τ_2 почти скачкообразно отклоняется на угол α_m, а затем очень медленно с постоянной времени τ_1 начнет возвращаться в исходное состояние.

При повороте подвижной части на угол α на выходе фотогальванометрического усилителя появляется сигнал

$$y(t) + K\int_0^t \alpha(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau, \qquad (3.102)$$

где K — коэффициент преобразования; $g(t)$ — импульсная характеристика исследуемого фоторезистора.

Для определения на основании (3.102) динамических характеристик *СФ* использован адаптивный метод [26]. В качестве исходных использованы экспериментальные данные, полученные для фоторезисторов ФС-К7б, широко используемых в отечественных фотогальванометрических усилителях [7]. В качестве усилителя *ФГУ* (рис. 3.11) выбран усилитель Ф117/8 с параметрами: $\Psi = 0{,}024$ Вб (в одном витке); $\mathscr{W}^{\circ} = 10^{-7}$ Н·м·рад; $\mathscr{J} = 0{,}1\times$ $\times 10^{-7}$ кг·м²; $R = R_{\Gamma} = 210$ Ом; $P = 28\cdot 10^{-7}$ Н·м·с·рад$^{-1}$; $\tau_1 = 31$ с; $\tau_2 = 3{,}6$ мс.

Исследованы три фоторезистора, для которых получены пять осциллограмм реакций на сигнал (3.101). Выходной сигнал фоторезистора регистрировался с помощью светолучевого осциллографа Н115, гальванометр которого имеет собственную частоту $f_0 = 1200$ Гц. Одна из исследованных реакций изображена на рис. 3.14.

Для примененного *ФГУ* выполняется условие $\tau_1 \gg \tau_2$. Поэтому выражение (3.101) можно упростить и считать угол отклонения гальванометра

$$\alpha(t) = \alpha_m[1 - \exp(-t/\tau)], \qquad (3.103)$$

где $\tau = 0{,}0036$ с.

Для *ФГУ* типа Ф117/8 погрешность, обусловленная переходом от (3.101) к (3.103), не превышает 0,1 %.

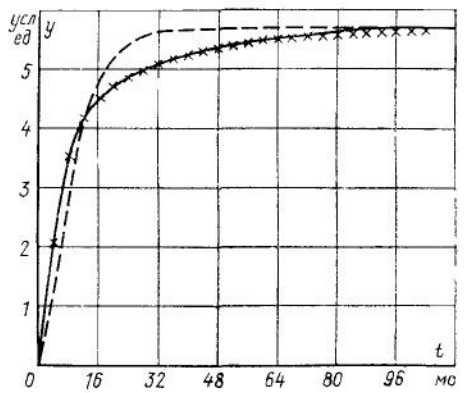


Рис. 3.14. Отклики фоторезистора и его моделей на испытательный сигнал
——— резистор; — — — — модель 1-го порядка; × × × — модель 2-го порядка

В соответствии со схемой, представленной на рис. 3.15, зарегистрированный сигнал $y(t)$ связан с испытательным сигналом следующим соотношением в комплексной плоскости: $Y(p) = W(p)\,A(p)$, где $Y(p)$, $A(p)$ — изображения $y(t)$ и $\alpha(t)$; $W(p) = W_{СФ}(p)\,W_{УПТ}(p)\,W_{РУ}(p)$, $W_{СФ}(p)$, $W_{УПТ}(p)$, $W_{РУ}(p)$ — передаточные функции *СФ*, *УПТ* и *РУ* (рис. 3.13).

В результате обработки экспериментальных данных получена передаточная функция

$$W(p) = (T_3p + 1)/[(T_1p + 1)(T_2p + 1)]. \qquad (3.104)$$

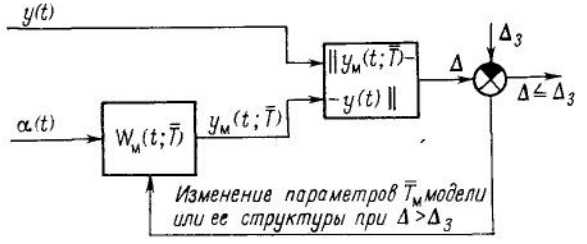


Рис. 3.15. Структурная схема определения модели фоторезистора

В табл. 3.8 представлены исходные данные и найденные значения коэффициентов T_1, T_2, T_3. На рис. 3.14 изображена одна из реакций модели $Y_м(t;\ T)$.

Искомая передаточная функция $W_{СФ}(p)$ может быть получена на основе следующих соображений. Транзисторный *УПТ* практически безынерционен. Инерционность *РУ* характеризуется постоянной времени $T_{РУ} = \pi\gamma f_0/2$, где γ и f_0 — степень успокоения и частота собственных колебаний осциллографического гальванометра. Обычно $\gamma = 0{,}7$, и в описываемом случае $f_0 = 1200$ Гц. Тогда $T_{РУ} = 0{,}2$ мс.

Модели (3.104) эквивалентно звено 1-го порядка с постоянной времени $T_э \approx T_1 + T_2 - T_3$ [19]. Для значений T_1, T_2, T_3, приведенных в табл. 3.8, $T_э$ находится в диапазоне 7—14 мс. Отношение $T_{РУ}/T_э$ составляет 1,5—3 %,

Таблица 3.8

К исследованию динамических свойств фоторезистора ФС-К7б

Номер фоторезистора	Номер осциллограммы	Число отсчетов	Период дискретизации, мс	Установившееся значение, усл. ед	Найденная постоянная, мс, для модели				Среднее квадратическое отклонение отклика модели от выходного сигнала фоторезистора, отнесенное к $y_{уст}$, %, для модели	
					1-го порядка		2-го порядка			
					T	T_1	T_2	T_3	1-го порядка	2-го порядка
1	1	23	4	5,7	2,7	35,5	1,6	31,4	4,3	1,6
2	2	26	4	5,7	6,3	27,4	1,5	19,3	6,2	0,6
	3	35	4	6,6	10,0	32,9	2,1	21,2	6,5	0,9
3	4	35	4	6,8	8,2	29,2	0,9	18,3	6,6	0,9
	5	35	4	6,7	8,7	27,0	0,3	15,4	6,5	1,2

и погрешность, обусловленная пренебрежением инерционностью *РУ*, не превышает 3 %.

Таким образом, можно считать, что найденная передаточная функция (3.104) совпадает с искомой функцией $W_{СФ}(p)$.

Другие полные характеристики, соответствующие (3 104), имеют вид: переходная характеристика $h(t) = 1 - D_0 \exp(-t/T_1) - E_0 \exp(-t/T_2)$; импульсная характеристика $g(t) = A_0 \exp(-t/T_1) + B_0 \exp(-t/T_2)$;

АЧХ $A(z) = \sqrt{(1 + B_1^2 z^2)/[(1 - z^2)^2 + 4\gamma^2 z^2]}$, $z = \omega T_1^*$, $T_1^* = \sqrt{T_1 T_2}$, $\gamma = (T_1 + T_2)/(2T_1^*)$,

ФЧХ (непрерывная ветвь, начинающаяся от нуля и расположенная в полосе $[-\pi, +\pi/2]$) $\Phi(z) = \operatorname{arctg}[z(B_2 - B_1 z^2)/(1 - B_3 z^3)]$

Значения параметров приведенных выше выражений даны в табл. 3.9.

Таблица 3.9

Параметры полных динамических характеристик фоторезистора ФС-К7б

Номер осциллограммы	T_1, мс	T_2, мс	T_1^*, мс	γ	$A_0 10^3$, мс$^{-1}$	$B_0 10^3$, мс$^{-1}$	D_0	E_0	B_1	B_2	B_3
1	35,5	1,6	7,5	2,5	3,4	24,7	0,12	0,88	4,2	—0,76	—19,8
2	27,4	1,5	6,3	2,3	11,4	25,1	0,31	0,69	3,1	—1,52	—13,0
3	32,9	2,2	8,4	2,1	11,6	18,7	0,38	0,62	2,5	—1,67	—9,6
4	29,2	0,9	5,2	2,9	13,2	21,0	0,39	0,62	3,6	—2,29	—19,7
5	27,0	0,3	2,9	4,7	16,1	20,9	0,44	0,57	5,3	—4,12	—49,6

Проведенное исследование показало, что реальная модель фоторезистора более сложна, чем принятая в литературе модель, описываемая звеном 1-го порядка [7] Приведенные в табл. 3 8 значения невязок, а также кривые реакций, представленные на рис 3 14, подтверждают, что звено 1-го порядка по сравнению со звеном 2-го порядка дает весьма приближенное описание свойств фоторезистора

Исходя из формы кривой переходного процесса, можно предположить, что динамические свойства фоторезистора более точно могут быть описаны с помощью полуинерционного звена 1-го порядка (см. также рис. 3.12), которое обычно используется для моделирования динамических свойств средств измерений с распределенными параметрами [52]

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

ПОГРЕШНОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ И ИХ ОЦЕНИВАНИЕ

4.1. СОСТАВЛЯЮЩИЕ ПОГРЕШНОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ. СУММИРОВАНИЕ СОСТАВЛЯЮЩИХ

Оценивание погрешностей — важная проблема обеспечения единства измерений [55]. Среди общих проблем она относится к числу наименее разработанных. Это обстоятельство, а также многообразие конкретных задач измерений и соответственно задач оценивания их погрешностей делают необходимыми систематизацию и анализ указанных задач. Анализ должен опираться на ряд исходных положений. Во-первых, погрешность измерений δ_Σ в соответствии с общим определением погрешности (ГОСТ 16263—70) представляет собой разность:

$$\delta_\Sigma = \tilde{Q} - Q, \tag{4.1}$$

где $\tilde{Q}$ — результат измерений; Q — измеряемая величина.

В выражении (4 1) все три величины должны иметь одинаковую размерность

Зависимость δ_Σ от времени определяется величиной Q, т. е. в конечном счете измерительной задачей При измерении в динамическом режиме постоянной физической величины Q погрешность δ_Σ — постоянная величина (детерминированная или случайная). При измерениях изменяющейся величины $Q(t)$ погрешность $\delta_\Sigma(t)$ есть детерминированная или случайная функция времени.

Во-вторых, при оценивании погрешностей динамических измерений в соответствии с (4.1) представляется целесообразным сохранить тот же подход, который выработан в практике статических измерений. Он состоит в анализе погрешности измерений, расчленении ее на составляющие, теоретическом и экспериментальном исследовании каждой составляющей, оценивании составляющих и синтезе общей погрешности, в частности путем суммирования оценок составляющих. Основной недостаток подобного подхода состоит в неизбежной потере точности на этапе синтеза. Однако его достоинства — возможность точного оценивания составляющих на основе тщательного изучения их источников и снижения уровня составляющих путем введения поправок и осреднения — превали-

руют, что и обеспечило повсеместное распространение этого подхода, который может быть назван аналитическим.

Способы оценивания составляющих и их суммирования выбирают такие, чтобы обеспечить получение оценок сверху. При этом возникает опасность сильно завысить оценку результирующей погрешности. Чтобы избежать этого, часто предлагают не вполне обоснованные способы «вероятностного» суммирования, суммирования «под корнем квадратным» и др. Представляется методологически более правильным оценивать погрешности и сверху, и снизу. Получение двусторонних оценок облегчит использование результатов измерений, а также решение ряда метрологических задач. Например, однозначный выбор средства для измерений с погрешностью, не превышающей заданную, не всегда возможен. Если оценка сверху $\Delta_в$ ожидаемой погрешности меньше заданной, то устройство безусловно пригодно, если больше — возникает неопределенность, зависящая от того, насколько оценка близка к точной верхней границе погрешности. Наличие оценки снизу $\Delta_н$ уменьшает неопределенность, сводя ее количественно к разности $\Delta_в - \Delta_н$. Наличие двух оценок дает представление о точности каждой из них. Кроме того, оно облегчает использование вероятностных способов суммирования погрешностей. Действительно, предположение о равномерном распределении погрешности в интервале $[\Delta_н, \Delta_в]$ более оправдано, чем аналогичное предположение относительно интервала $[-|\Delta|_в, |\Delta|_в]$, где $|\Delta|_в$ — оценка сверху модуля погрешности.

В-третьих, оценивание погрешностей измерений специфично для различных измерительных задач: масштабного измерительного преобразования переменного сигнала, регистрации изменяющейся величины, функционального или операторного преобразования переменного сигнала, динамического измерения постоянной величины (параметра переменного сигнала). Употребление термина «прямые динамические измерения» для обозначения масштабного преобразования и регистрации не вполне правомерно, поскольку указанные разновидности измерений суть совместные измерения определенной физической величины и времени. С этой точки зрения другие задачи приводят к измерениям, представляющим собой одновременно совместные и косвенные измерения, поскольку, с одной стороны, с их помощью устанавливается зависимость определенной («исходной») величины от времени, а с другой, требуемая величина находится на основании известной зависимости ее от исходной величины. В то же время вполне возможны «косвенные динамические измерения», т. е. нахождение с использованием известной зависимости требуемой физической величины по результатам регистрации (преобразования) сигналов других изменяющихся во времени величин. Граница между указанными вариантами косвенных измерений обусловлена количеством сигналов изменяющихся во времени величин, воздействующих на вход (входы) средства измерений. При одном сигнале будем условно говорить о прямых измерениях, при двух и более сигналах — о косвенных.

Структура погрешности прямых измерений иллюстрируется с помощью рис. 4.1.

Изучаемое свойство объекта исследований *ОИ* выражено истинным сигналом $x_и(t)$. Измеряемая величина в общем случае определяется как результат функционального преобразования сигнала $x_и(t)$:

$$Q = \mathcal{D}_н\{\mathcal{B}_н[x_и(t)]\}, \qquad (4.2)$$

где $\mathcal{B}_н$ — требуемый (номинальный) оператор преобразования; $\mathcal{D}_н$ — требуемый (номинальный) функционал. Вследствие взаимо-

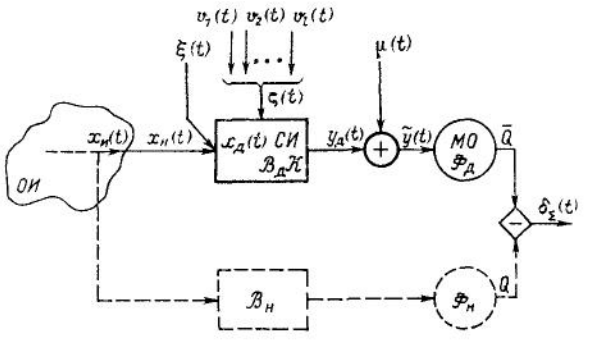


Рис 4 1 Структурная схема образования погрешности динамических измерений

действия средства измерений с объектом (влияния средства измерений на объект) действительный выходной сигнал *ОИ* (номинальный входной сигнал) $x_н(t)$ будет отличаться от $x_и(t)$. На вход устройства, кроме $x_н(t)$, воздействует также помеха $\xi(t)$. Следовательно, действительный входной сигнал $x_д(t)$ определяется совокупным действием номинального сигнала и помехи, т. е. отличается от $x_н(t)$. С помощью средства измерений осуществляется преобразование входного сигнала $x_д(t)$ в выходной сигнал $y_д(t)$. Действительный оператор преобразования $\mathcal{B}_{д\,т}$, выражающий свойства средства измерений данного типа, отличается от $\mathcal{B}_н$ в силу несовершенства принципа действия и конструкции устройства. Индивидуальные свойства конкретного экземпляра средства измерений, выражаемые с помощью оператора $\mathcal{B}_{д\,э}$, отличны от типовых. Кроме того, в процессе преобразования на устройство воздействуют влияющие величины $v_1, \ldots, v_l$ (в общем случае изменяющиеся), совокупное действие которых может быть выражено влияющим сигналом $\zeta(t)$, обусловливающим возмущение оператора $\mathcal{B}_{д\,э}$. В результате возмущенный оператор $\mathcal{B}_д$, который реализуется при измерениях, отличается от $\mathcal{B}_н$. Вычисление функционала $\mathcal{D}(y)$ может либо входить составной частью в алгоритм работы средства измерений, либо производиться путем обработки значений выходного сигнала устройства, отсчитанных по его шкале (отсчетному

устройству). В последнем случае следует учитывать по отдельности погрешность отсчитывания и погрешность вычислений.

За результат измерения естественно принять величину

$$\widetilde{Q} = \mathfrak{Z}_{\text{д}}[\widetilde{y}(t)] = \mathfrak{Z}_{\text{д}}\{\mathscr{B}_{\text{д}}[x_{\text{д}}(t)] + \mu(t)\}. \qquad (4.3)$$

Погрешность

$$\delta_{\Sigma} = \widetilde{Q} - Q = \mathfrak{Z}_{\text{д}}\{\mathscr{B}_{\text{д}}[x_{\text{д}}(t)] + \mu(t)\} - \mathfrak{Z}_{\text{н}}\{\mathscr{B}_{\text{н}}[x_{\text{и}}(t)]\}. \qquad (4.4)$$

С целью реализации аналитического подхода преобразуем выражение (4.4) в предположении линейности операторов и функционалов следующим образом в соответствии со схемой, представленной на рис. 4.1:

$$\delta_{\Sigma} = \Phi_{\text{н}}[\delta\mathbf{B}_{\text{д.э}}(x_{\text{д}})] + \Phi_{\text{н}}[\delta\mathbf{B}_{\text{д.т}}(x_{\text{д}})] + \Phi_{\text{н}}[\delta\mathbf{B}_{\text{н}}(x_{\text{д}})] + \Phi_{\text{д}}[\mu(t)] +$$
$$+ \Phi_{\text{н}}[\mathbf{B}_{\text{н}}(\delta x)] + \delta\Phi[\mathbf{B}_{\text{д}}(x_{\text{д}})], \qquad (4.5)$$

где $\delta\mathbf{B}_{\text{д.э}} = \mathbf{B}_{\text{д}} - \mathbf{B}_{\text{д.э}}$; $\delta\mathbf{B}_{\text{д.т}} = \mathbf{B}_{\text{д э}} - \mathbf{B}_{\text{д.т}}$; $\delta\mathbf{B}_{\text{н}} = \mathbf{B}_{\text{д.т}} - \mathbf{B}_{\text{н}}$; $\delta\Phi = \Phi_{\text{д}} - \Phi_{\text{н}}$; $\delta x = x_{\text{д}} - x_{\text{н}} = x_{\text{н}} + \xi - x_{\text{н}} = \delta x_{\text{и}} + \xi$.

Соотношение (4.5) позволяет проанализировать составляющие погрешности измерений. Характер составляющих и их взаимосвязь в значительной мере обусловлены сигналом $x_{\text{д}}$. Характер этого сигнала определяется задачей исследований и свойствами помехи ξ. В отношении каждого из указанных факторов можно выделить два основных варианта. Если исследуются закономерные изменения состояний объекта, то сигнал $x_{\text{и}}$ будет детерминированным. Поскольку взаимодействие средства измерений с объектом является регулярным, в этом случае $x_{\text{н}}$ также будет детерминированным. Если к тому же случайная помеха пренебрежимо мала, то будет детерминированным и сигнал $x_{\text{д}}$.

В том случае, когда исследуется объект со случайными характеристиками и (или) случайная помеха существенна, сигнал $x_{\text{д}}$ оказывается случайным.

Погрешность, обусловленная взаимодействием средства измерений с объектом, может быть представлена с помощью разности;

$$\delta_{\text{вз}} = \Phi_{\text{н}}\{\mathbf{B}_{\text{н}}[x_{\text{н}}(t)]\} - \Phi_{\text{н}}\{\mathbf{B}_{\text{н}}[x_{\text{и}}(t)]\} = \Phi_{\text{н}}[\mathbf{B}_{\text{н}}(\delta x_{\text{и}})].$$

В зависимости от указанных выше вариантов задачи исследований сигналы $x_{\text{н}}$, $x_{\text{и}}$ и соответственно погрешность $\delta_{\text{вз}}$ могут оказаться либо детерминированными, либо случайными функциями времени. Помеха $\xi(t)$ рассматривается обычно как аддитивная величина по отношению к сигналу $x_{\text{н}}$, которая содержит в общем случае детерминированную и случайную части, т. е. может быть выражена случайной функцией времени с ненулевым математическим ожиданием $E\xi(t) = c(t)$. Соответствующая составляющая погрешности $\delta_{\text{п}}(t) = \Phi_{\text{и}}[B_{\text{н}}(\xi)]$.

Отклонение оператора средства измерений данного типа $\mathbf{B}_{\text{д.т}}$ от $\mathbf{B}_{\text{н}}$ носит регулярный характер, поэтому характер составляющей

погрешности преобразования, обусловленной указанным отклонением:

$$\delta_{\text{пр.т}} = \Phi_{\text{н}}[\mathbf{B}_{\text{д.т}}(x_{\text{д}})] - \Phi_{\text{н}}[\mathbf{B}_{\text{н}}(x_{\text{д}})] = \Phi_{\text{н}}[\delta\mathbf{B}_{\text{н}}(x_{\text{д}})],$$

определяется сигналом $x_{\text{д}}$. Таким образом, погрешность $\delta_{\text{пр.т}}$ может быть и детерминированной, и случайной функцией времени. Отклонение оператора $\mathbf{B}_{\text{д.э}}$ конкретного экземпляра средства измерений от $\mathbf{B}_{\text{д т}}$ рассматривается как случайное по множеству устройств данного типа, поэтому вне зависимости от $x_{\text{д}}$ соответствующая составляющая погрешности

$$\delta_{\text{пр.э}} = \Phi_{\text{н}}(\mathbf{B}_{\text{д.э}}x_{\text{д}}) - \Phi_{\text{н}}(\mathbf{B}_{\text{д.т}}x_{\text{д}}) = \Phi_{\text{и}}[\delta\mathbf{B}_{\text{д.т}}(x_{\text{д}})]$$

представляет собой случайную функцию времени. Погрешность, вызванная вариацией оператора $\mathbf{B}_{\text{д.э}}$ под воздействием влияющего сигнала $\zeta(t)$, сложным образом зависит от последнего. Указанная зависимость детерминирована, однако вследствие того, что $\zeta(t)$ содержит детерминированную и случайную составляющие, вариация $\mathbf{B}_{\text{д.э}}$ и обусловленная ею погрешность будут иметь такие же составляющие. Таким образом, погрешность из-за вариации:

$$\delta_{\text{вл}} = \Phi_{\text{н}}(\mathbf{B}_{\text{д}}x_{\text{д}}) - \Phi_{\text{н}}(\mathbf{B}_{\text{д.э}}x_{\text{д}}) = \Phi_{\text{и}}[\delta\mathbf{B}_{\text{д.э}}(x_{\text{д}})],$$

где $\mathbf{B}_{\text{д}}$ — возмущенный оператор средства измерений. Величина $\delta_{\text{вл}}$ является случайной с ненулевым математическим ожиданием $E\delta_{\text{вл}} = n$. Погрешность отсчитывания $\mu(t)$ является аддитивной по отношению к сигналу $y_{\text{д}}(t)$ и содержит в общем случае систематическую и случайную составляющие. Таким образом, $\mu(t) = \widetilde{y}(t) - y_{\text{д}}(t)$ есть случайная функция с ненулевым математическим ожиданием $E\mu(t) = m(t)$. Соответствующая составляющая погрешности $\delta_{\mu} = \Phi_{\text{д}}(\mu)$. Погрешность вычислений определяется отклонением действительного функционала $\Phi_{\text{д}}$ от $\Phi_{\text{н}}$:

$$\delta_{\text{выч.и}} = \Phi_{\text{д}}(\mathbf{B}_{\text{д}}x_{\text{д}}) - \Phi_{\text{н}}(\mathbf{B}_{\text{д}}x_{\text{д}}) = \delta\Phi(\mathbf{B}_{\text{д}}x_{\text{д}}).$$

Рассмотрим вопрос о зависимости составляющих погрешности δ_{Σ}. Поскольку независимы причины, вызывающие взаимные отклонения операторов в выражении (4.5), то зависимость и независимость соответствующих составляющих обусловлены лишь характером сигнала $x_{\text{д}}$. В том случае когда $x_{\text{д}}$ — случайная функция, составляющие $\delta_{\text{пр.т}}$, $\delta_{\text{пр.э}}$ и $\delta_{\text{вл}}$ как случайные величины взаимно коррелированы. При детерминированном сигнале $x_{\text{д}}$ указанные составляющие независимы.

Рассмотрим частные случаи соотношения (4.5) для различных измерительных задач.

1. Регистрация или масштабное преобразование сигнала. Сюда относятся запись изменений величины во времени, цифровая регистрация, измерительное преобразование сигнала неэлектрической величины в электрический сигнал, измерительное усиление и т. п. В этом случае функционал $\Phi_{\text{н}}$ не задан, а оператор $\mathbf{B}_{\text{н}}$ пред-

ставляет собой масштабный коэффициент (номинальный коэффициент преобразования) $K_и$. Таким образом, измеряемая величина

$$Q = K_н x_и (t), \tag{4 2а}$$

результат измерений

$$\tilde{Q} = \mathbf{B}_д x_д + \mu (t), \tag{4.3а}$$

погрешность

$$\delta_\Sigma = \delta \mathbf{B}_{д\ э} (x_д) + \delta \mathbf{B}_{д\ т} (x_д) + \delta \mathbf{B}_н (x_д) + \mu (t) + K_н \delta x, \tag{4 5а}$$

где $\delta \mathbf{B}_{д\ э}$, $\delta \mathbf{B}_{д\ т}$, $\delta \mathbf{B}_н$, δx — те же, что и в (4.5) с учетом того, что $\mathbf{B}_н = K_н$.

2. Линейное функциональное преобразование сигнала. Сюда относятся интегрирование и дифференцирование сигнала, текущее усреднение и т. п. В этом случае функционал $\Phi_н$ не задан и измеряемая величина

$$Q = \mathbf{B}_н x_н, \tag{4.2б}$$

результат измерений

$$\tilde{Q} = \mathbf{B}_д x_д + \mu, \tag{4.3б}$$

погрешность

$$\delta_\Sigma = \delta \mathbf{B}_{д\ э} (x_д) + \delta \mathbf{B}_{д.т} (x_д) + \delta \mathbf{B}_и (x_д) + \mu (t) + \mathbf{B}_н (\delta x). \tag{4.5б}$$

3. Измерение параметра переменного сигнала (линейного функционала). Сюда относятся нахождение интегрального значения сигнала на заданном интервале времени, среднего значения, значения в фиксированный момент времени и т. п. В этом случае оператор $\mathbf{B}_н$ является тождественным ($\mathbf{B}_н \equiv \mathbf{I}$) и измеряемая величина

$$Q = \Phi_н (x_и), \tag{4.2в}$$

а результат измерений в общем случае определяется выражением (4.3). Если динамические свойства средства измерений можно не учитывать, то

$$\tilde{Q} = \Phi_д (x_д + \mu), \tag{4.3в}$$

и погрешность

$$\delta_\Sigma = \Phi_д (\mu) + \Phi_н (\delta x) + \delta \Phi (x_д) = \Phi_н (\mu) + \Phi_н (\delta x) + \delta \Phi (x_д + \mu). \tag{4.5в}$$

В предположении линейности функционалов и нелинейности операторов выражение (4.4) приобретает вид:

$$\delta_\Sigma = \Phi_и [\mathscr{B}_д (x_д) - \mathscr{B}_{д\ э} (x_д)] + \Phi_н [\mathscr{B}_{д\ э} (x_д) - \mathscr{B}_{д\ т} (x_д)] + \Phi_н [\mathscr{B}_{д\ т} (x_д) - \mathscr{B}_н (x_д)] + \Phi_н (\mu) + \delta \Phi (\tilde{y}) + \Phi_н [\mathscr{B}_н (x_д) - \mathscr{B}_н (x_и)].$$

Для нелинейных функционалов и линейных операторов

$$\delta_\Sigma = [\mathscr{F}_д (\tilde{y}) - \mathscr{F}_н (\tilde{y})] + \mathscr{F}_н (\delta \mathbf{B}_{д\ э} (x_д) + \delta \mathbf{B}_{д.т} (x_д) + \delta \mathbf{B}_и (x_д) + \mathbf{B}_н x_д] - \mathscr{F}_н (\mathbf{B}_н x_н). \tag{4.5г}$$

Для нелинейных функционалов и нелинейных операторов

$$\delta_\Sigma = [\mathscr{F}_д (\tilde{y}) - \mathscr{F}_и (\tilde{y})] + \{\mathscr{F}_н [\mathscr{B}_д (x_д) + \mu] - \mathscr{F}_н [\mathscr{B}_д (x_д)]\} + \{\mathscr{F}_н [\mathscr{B}_д (x_д)] - \mathscr{F}_н [\mathscr{B}_н (x_д)]\} + \{\mathscr{F}_н [\mathscr{B}_и (x_д)] - \mathscr{F}_н [\mathscr{B}_и (x_н)]\} + \{\mathscr{F}_н [\mathscr{B}_и (x_н)] - \mathscr{F}_н [\mathscr{B}_н (x_н)]\}.$$

Рассмотрим оценивание составляющих суммарной погрешности (4.5). Для оценивания первого слагаемого в (4.5) необходимо установить зависимость оператора $\mathbf{B}_{д\ э}$ от влияющего сигнала $\zeta (t)$ или от каждой из влияющих величин v_i ($i = 1, \ldots, l$). Поскольку при оценивании погрешностей не требуется высокой точности, то можно воспользоваться зависимостями от v_i не индивидуального ($\mathbf{B}_{д\ э}$), а типового ($\mathbf{B}_{д\ т}$) оператора средства измерений. Указанные зависимости устанавливаются с помощью функций влияния. При нормированных (известных) функциях влияния должно быть определено совокупное изменение $\mathbf{B}_{д\ т}$ под воздействием v_i с учетом взаимозависимости влияний отдельных влияющих величин. Далее следует рассчитать изменение функционала $\Phi_н$ от отклика «типового» устройства $\mathbf{B}_{д\ т} x_д$. При расчете вместо неизвестного сигнала $x_д$ может быть использован подходящий сигнал $x_р$ из совокупности возможных (рабочих) входных сигналов средства измерений. При небольшой совокупности возможных сигналов в качестве $x_р$ может быть выбран «наихудший», т. е. такой, которому отвечает наибольшее изменение отклика. Если наихудший в указанном смысле сигнал установить заранее затруднительно, то он может быть заменен сигналом, который претерпевает наибольшие искажения в устройстве, т. е. который преобразуется (измеряется) с наибольшей погрешностью. При широкой совокупности возможных рабочих сигналов в качестве расчетного целесообразно выбрать наиболее типичный. При апостериорном оценивании погрешностей расчетный сигнал может быть уточнен по результатам измерительного эксперимента. Расчет изменения функционала от отклика представляет собой в общем случае нахождение экстремума вариации функционала при заданных изменениях влияющих величин. Как правило, влияющие величины заданы пределами допускаемых значений или номинальными значениями и пределами допускаемых отклонений от указанных значений. При параметрическом задании оператора $\mathbf{B}_{д\ т} = \mathbf{B}_{д\ т} (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ и представлении функций влияния в форме зависимостей параметров: $\alpha_1 = \alpha_1 (v_1, \ldots, v_l), \ldots, \alpha_m = \alpha_m (v_1, \ldots, v_l)$ задача формулируется как нахождение экстремума функции многих переменных:

$$\delta_1 = \max_{\substack{\delta v_i \in [0,\ \Delta v_i] \\ \delta v_l \in [0\ \Delta v_l]}} \Phi_н \{B_{д\ т} [\alpha_1 (v_1 + \delta v_1, \ldots, v_l + \delta v_l), \ldots, \alpha_m (v_1 + \delta v_1, \ldots, v_l + \delta v_l)] [x_р] - B_{д\ т} [\alpha_1 (v_1, \ldots, v_l), \ldots, \alpha_m (v_1, \ldots, v_l)] [x_р]\},$$

где Δv_i, $i = 1, \ldots, l$ — пределы допускаемых изменений влияющих величин v_i.

При независимых влияниях

$$\delta_1 = \max_{\substack{\delta v_i \in [0,\ \Delta v_i] \\ \delta v_l \in [0,\ \Delta v_l]}} \Phi_{\text{н}} \left\{ \sum_{i=1}^{l} [\mathbf{B}_{\text{д.т}}(\alpha_1(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i + \delta v_i, v_{i+1}, \ldots, v_l), \ldots, \alpha_m(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i + \delta v_i, v_{i+1}, \ldots, v_l)) - \mathbf{B}_{\text{д.т}}(\alpha_1 \ldots, \alpha_m)][x_{\text{р}}] \right\}.$$

При линейных функциях влияния

$$\delta_1 = \max_{\substack{\delta v_i \in [0,\ \Delta v_i] \\ \delta v_l \in [0,\ \Delta v_l]}} \Phi_{\text{н}} \left\{ \sum_{i=1}^{l} [\mathbf{B}_{\text{д.т}}(\alpha_1 + k_{1i}\delta v_i, \ldots, \alpha_m + k_{mi}\delta v_m) - B_{\text{д т}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)][x_{\text{р}}] \right\},$$

где $k_{1i}, \ldots, k_{mi}$ — коэффициенты влияния i-й влияющей величины на параметры $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$.

Для оценивания второго слагаемого в (4.5) требуется знать отклонение «индивидуального» оператора $\mathbf{B}_{\text{д. э}}$ от «типового» $\mathbf{B}_{\text{д. т}}$. Эти сведения в обобщенном (по совокупности устройств данного типа) виде представляются в результате нормирования полных характеристик. ГОСТ 8.256—77 регламентирует указание либо номинальной характеристики и пределов допускаемых отклонений от нее, либо предельных характеристик средства измерений. При параметрическом задании оператора средства измерений требуется указание номинальных параметров $\alpha_{i\text{н}}$ и пределов $\Delta\alpha_i$ допускаемых отклонений $\delta\alpha_i$ от этих параметров. Как и выше, задача сводится к нахождению экстремума функции многих переменных:

$$\delta_2 = \max_{\substack{\delta\alpha_i \in [0,\ \Delta\alpha_i] \\ \delta\alpha_m \in [0,\ \Delta\alpha_m]}} \Phi_{\text{н}} \left\{ \sum_{i=1}^{l} [\mathbf{B}_{\text{д.т}}(\alpha_{1\text{н}} + \delta\alpha_1, \ldots, \alpha_{m\text{н}} + \delta\alpha_m) - \mathbf{B}_{\text{д.т}}(\alpha_{1\text{н}}, \ldots, \alpha_{m\text{н}})][x_p] \right\}.$$

Опуская третью составляющую, которая будет рассмотрена ниже, перейдем к следующим.

Оценивание четвертой составляющей предполагает знание функциональной зависимости погрешности отсчитывания от времени (от моментов дискретизации выходного сигнала устройства). На практике такая зависимость, как правило, неизвестна. Поэтому целесообразно представить $\mu(t)$ как случайную функцию времени с известным распределением вероятностей, например равномерным или усеченно-нормальным, в заданных границах, которые в общем случае могут зависеть от времени. При этом оценка составляющей может быть рассчитана с использованием функционала $\Phi_{\text{н}}$ вместо $\Phi_{\text{д}}$, который чаще всего остается неизвестным.

Для оценивания пятой составляющей необходимо прежде всего изучить обратное влияние средства измерений на объект исследований, которое позволит оценить отличие номинального входного

сигнала $x_{\text{н}}$ от истинного $x_{\text{и}}$, присущего невозмущенному объекту. Кроме того, необходимо получить сведения о помехе $\xi(t)$. Влияние средства измерений на объект обусловливает методическую погрешность, которая, как таковая, является систематической. Разброс этой погрешности по множеству устройств данного типа, который может рассматриваться как случайный, обычно невелик, и в целом указанная погрешность должна оцениваться как систематическая, т. е. пределами допускаемых значений. Помеха $\xi(t)$ в общем случае содержит детерминированную и случайную части. Для определения характеристик случайной части рассматриваемой составляющей, вызванной случайной частью помехи $\xi(t)$, необходимы подробные сведения о вероятностных свойствах помехи. На практике эти сведения, как правило, отсутствуют. Поэтому обычно ограничиваются оцениванием энергетических характеристик случайной части (дисперсия, среднее квадратическое отклонение), для чего используют имеющиеся сведения или обоснованные предположения о спектральных (корреляционных) свойствах помехи $\xi(t)$. Если средство измерений приводится во взаимодействие с объектом спустя определенное время после подключения к источнику питания, достаточное для установления стационарного режима работы, то и случайная часть оцениваемой составляющей будет представлять собой стационарную случайную функцию. Ее дисперсия оценивается с помощью выражений:

$$\sigma_5^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} S_5(\omega)\, d\omega,$$

где $S_5(\omega) = |W(j\omega)|^2 S_\xi(\omega)$; $W(j\omega)$ — комплексный коэффициент преобразования средства измерений; $S_\xi(\omega)$ — спектральная плотность «мощности» $\xi(t)$, либо

$$\sigma_5^2 = R_{zz}(0),$$

где

$$R_{zz}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau - \nu) R_{z\xi}(\nu)\, d\nu; \qquad z(t) = B_{\text{и}}[\xi(t)];$$

$$R_{z\xi}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau - \lambda) R_{\xi\xi}(\lambda)\, d\lambda;$$

$g(t)$ — импульсная характеристика средства измерений; R_{zz}, $R_{\xi\xi}$ — автокорреляционные функции сигналов $z(t)$ и $\xi(t)$; $R_{z\xi}$ — взаимная корреляционная функция сигналов $z(t)$ и $\xi(t)$.

Для оценивания шестой составляющей необходимо учесть погрешности способов вычислений и используемых средств вычислительной техники. К указанным погрешностям относятся погрешности интерполяции и экстраполяции, погрешности приближенного интегрирования, погрешности округления, обусловленные разрядной сеткой ЭВМ, и т. п. При оценивании этой составляющей вместо $\mathbf{B}_{\text{д}}$ и $x_{\text{д}}$ в случае необходимости должны быть использованы $\mathbf{B}_{\text{н}}$ и $x_{\text{н}}$.

Как видно из проведенного выше краткого анализа, оценивание

рассмотренных составляющих суммарной погрешности (4.5) специфично для конкретной измерительной задачи, поскольку исходные данные обусловлены указанной задачей. Исключением является третья составляющая, вызванная отличием оператора $\mathbf{B}_{д.т}$, характеризующего динамические свойства средства измерений данного типа, от требуемого оператора $\mathbf{B}_н$. При оценивании этой составляющей основная сложность состоит в определении аргумента функционала $\Phi_н$, равного $\delta\mathbf{B}_н(x_д)$, или, в общем случае, $\mathscr{B}_{д.т}(x_д) - \mathscr{B}_н(x_д)$. Рассмотрим подробнее оценивание указанного аргумента.

Операторы $\mathscr{B}_{д.т}$ и $\mathscr{B}_н$ выражают в совокупности статические и динамические свойства средства измерений. В практике указанные свойства нормируются, контролируются и определяются раздельно, поэтому в выражениях для погрешности измерений целесообразно выделить статический коэффициент преобразования $\mathbf{K}(x)$ ($\mathbf{K}_н(x)$, $\mathbf{K}_{д.т}(x)$), в общем случае зависящий от уровня входного сигнала (но не от его временных характеристик), и оператор $\overline{\mathscr{B}}$ ($\overline{\mathscr{B}}_н$, $\overline{\mathscr{B}}_{д.т}$), выражающий динамические свойства средства измерений, в общем случае нелинейный. Операторы $\mathbf{K}$ и $\overline{\mathscr{B}}$ удается выделить в следующих случаях.

1. Элементы устройства, реализующие $\mathbf{K}_{д.т}$ и $\overline{B}_{д.т}(x)$, структурно разделены. В этом случае, если операторы применяются в порядке $\mathbf{K}$, $\overline{\mathscr{B}}$, то

$$\delta(t) = \delta\left[\overline{\mathscr{B}}_{д.т}[K_{д.т}(x)]\right] + \overline{\mathscr{B}}_н\left[\mathbf{K}_{д.т}(x)\right] - \overline{\mathscr{B}}_н[\mathbf{K}_н(x)], \qquad (4.6)$$

где $\delta[\overline{\mathscr{B}}_{д.т}(x)] = \mathscr{B}_{д.т}(x) - \mathscr{B}_н(x)$.

Если порядок применения операторов обратный, то

$$\delta(t) = \mathbf{K}_н\left[\overline{\mathscr{B}}_{д.т}(x)\right] - \mathbf{K}_н\left[\overline{\mathscr{B}}_н(x)\right] + \delta\mathbf{K}\left[\overline{\mathscr{B}}_{д.т}(x)\right], \qquad (4.7)$$

где $\delta\mathbf{K}(x) = \mathbf{K}_{д.т}(x) - \mathbf{K}_н(x)$.

2. Статический коэффициент преобразования средства измерений не зависит от входного сигнала: $\mathbf{K}(x) \equiv K = \text{const}$, а преобразование $\overline{\mathscr{B}} \equiv \overline{\mathbf{B}}$ — линейное. Этим условиям отвечают свойства большинства устройств, которые в своей области применения могут рассматриваться как линейные системы. Погрешность измерений, приведенная к входу,

$$\delta(t) = \delta\overline{\mathbf{B}}(x) + \delta_K\overline{\mathbf{B}}_н(x) + \delta_K\delta\overline{\mathbf{B}}_н(x), \qquad (4.8)$$

где $\delta_K = \delta K/K_н$ — относительная погрешность безынерционного элемента средства измерений.

Первое слагаемое в правой части (4.8) выражает динамическую погрешность средства измерений, которая обусловлена отличием действительного оператора от номинального. Второе слагаемое, обусловленное отклонением действительного статического коэффициента преобразования средства измерений от номинального, не может быть названо статической погрешностью, поскольку содержит оператор $\overline{\mathbf{B}}_н$. Однако при нетождественном операторе $\overline{\mathbf{B}}_н$ средство измерений следует рассматривать как систему, преобразующую в выходной сигнал не $x(t)$, а

$$z(t) = \mathbf{B}_н[x(t)]. \qquad (4.9)$$

Иными словами, выражение (4.9) должно быть принято за определение измеряемой величины и (4.8) представлено в форме:

$$\delta(t) = \delta\widetilde{\mathbf{B}}[z(t)] + \delta_K z(t) + \delta_K\delta\widetilde{\mathbf{B}}[z(t)], \qquad (4.10)$$

где $\delta\widetilde{\mathbf{B}}[z(t)] = \delta\widetilde{\mathbf{B}}[x(t)]$, с разделением динамической (первое слагаемое) и статической (второе слагаемое) погрешностей. Третье слагаемое является смешанным (статико-динамическим), однако на практике при оценивании $\delta(t)$ этой составляющей можно пренебречь как величиной 2-го порядка малости.

Описание динамики средства измерений на основе (4.9) имеет также то преимущество, что позволяет существенно расширить номенклатуру устройств, которые могут быть описаны линейными моделями, поскольку большинство средств измерений, нелинейных по отношению ко входному сигналу, являются линейными по отношению к измеряемой величине.

3. Требуемое преобразование входного сигнала является тождественным: $\mathbf{B}_н[x(t)] = x(t)$. Это — наиболее распространенный случай применения средства измерений в динамическом режиме, включающий в себя измерительное преобразование и регистрацию переменного сигнала. В этом случае приведенная к входу устройства погрешность измерений [56]

$$\delta(t) = \frac{y(t)}{\mathbf{K}(x)} - x(t). \qquad (4.11)$$

Поскольку измерение имеет целью нахождение значения измеряемой физической величины в принятых единицах, аналоговая регистрация изменяющейся величины представляет собой совокупность незавершенных измерений мгновенных величин. Для их завершения требуется отсчитать мгновенные значения, что сопровождается внесением статических погрешностей. Выражение (4.11) может служить для оценивания как общей погрешности измерений с регистрацией, так и погрешности собственно регистрации в зависимости от того, учтены или нет в $y(t)$ погрешности отсчитывания. Аналогичное может быть сказано относительно измерительного преобразования, если в измерительной цепи за преобразователем следует отсчетное устройство или показывающий прибор.

Следует заметить, что при разработке методов оценивания погрешностей измерения физическая природа величин $y(t)$ и $x(t)$ несущественна. Отметим лишь, что если $y(t)$ и $x(t)$ выражают различные физические величины, коэффициент $K_н$ будет размерным, благодаря чему размерности обеих частей (4.6) совпадают с размерностью y, а (4.8), (4.11) — с размерностью x.

4.2. ДИНАМИЧЕСКИЕ ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ ПОСТОЯННЫХ ВЕЛИЧИН

Динамические погрешности при измерениях постоянных величин можно рассматривать как основные и как дополнительные в зависимости от измерительной задачи.

Измерение постоянной величины с экстраполяцией к установившемуся значению. Речь идет об измерении, включающем в себя следующие операции:

подачу на вход средства измерений сигнала постоянной измеряемой величины (включение устройства или источника сигнала, приведенных во взаимодействие, либо приведение во взаимодействие включенных источника и устройства);

регистрацию выходного сигнала средства измерений в течение известного (установленного или измеряемого) интервала времени;

расчет по значениям зарегистрированиого сигнала и известным динамическим свойствам средства измерений измеряемой величины.

Поскольку входной сигнал устройства близок к идеальной ступени, то выходной сигнал пропорционален (для линейного средства измерений) его переходной характеристике. Полные характеристики предполагаются известными. Задача состоит в нахождении по участку сигнала коэффициента его пропорциональности известной переходной характеристике, т. е. статического коэффициента преобразования средства измерений, экстраполяции сигнала к его установившемуся значению и пересчете экстраполированного значения к входу устройства, т. е. определении уровня входного сигнала (измеряемой величины). Такой способ измерения постоянной величины в динамическом режиме применяется в тех случаях, когда ограничены либо время измерения, либо допускаемый уровень входного (выходного) сигнала. Примером измерений такого рода может служить измерение высокой температуры среды с помощью термопары с относительно низкой температурой разрушения. Термопара погружается в среду на такое короткое время, которое позволяет избегнуть ее разрушения, но остается недостаточным для установления регистрируемого выходного сигнала [18].

Рассмотрим обработку данных с целью оценивания результата измерения и его погрешности. Пусть передаточная функция используемого устройства

$$W(p)=\left(1+\sum_{\nu=n+1}^{n+m} T_\nu p^{\nu-n}\right)\Big/\prod_{i=1}^{n}(T_i p+1)^{\mu_i}, \qquad (4.12)$$

где T_i, T_ν — номинальные коэффициенты.

Выходной сигнал такого устройства при измерении постоянной величины Q имеет вид:

$$y(t)=QK\left[1-\sum_{i=1}^{n}\exp(-t/T_i)\sum_{k=0}^{r_i}a_{ik}(T_i,\ T_\nu)\,t^k\right],$$

где K — статический коэффициент преобразования; $r_i \equiv \mu_i - 1$;

$a_{ik}(T_i,\ T_\nu)$ — известное дробно-рациональное выражение относительно коэффициентов передаточной функции.

Результат измерения сигнала $y(t)$ в момент времени t_0

$$\tilde{y}_0(t)=Q\tilde{K}\left[1-\sum_{i=1}^{n}\exp(-\tilde{t}_0/\tilde{T}_i)\sum_{k=0}^{r_i}\tilde{a}_{ik}(T_i,\ T_\nu)\tilde{t}_0^k\right]+\delta y,$$

где $\tilde{K}=K+\delta K$; $\tilde{t}_0=t_0+\delta t_0$; $\tilde{T}_i=T_i+\delta T_i$; $\tilde{a}_{ik}(T_i,\ T_\nu)=a_{ik}(\tilde{T}_i,\ \tilde{T}_\nu)=a_{ik}(T_i,\ T_\nu)+\delta a_{ik}$; $\tilde{T}_\nu=T_\nu+\delta T_\nu$; δt_0 — погрешность фиксации (измерения) t_0; δT_i, δT_ν — допускаемые отклонения коэффициентов T_i и T_ν от номинальных (или погрешности определения коэффициентов); δK — допускаемое отклонение коэффициента $\tilde{K}$ от номинального, или погрешность определения K (статическая погрешность средства измерений); δy — погрешность отсчитывания.

Оценка измеряемой величины находится по измеренному значению на основе номинальной переходной характеристики:

$$\tilde{Q}=\tilde{y}_0K^{-1}\Big/\left[1-\sum_{i=1}^{n}\exp(-t_0/T_i)\sum_{k=0}^{r_i}a_{ik}(T_i,\ T_\nu)\,t_0^k\right].$$

Абсолютная погрешность полученной оценки

$$\delta\tilde{Q}=-\frac{\tilde{Q}}{K}\delta K+$$

$$+\frac{\tilde{Q}}{\tilde{y}_0}\delta y+\tilde{Q}\frac{\sum_{i=1}^{n}\exp(-t_0/T_i)\sum_{k=0}^{r_i}a_{ik}(T_i,\ T_\nu)\,t^k\left(T_i^{-1}-k/t_0\right)}{1-\sum_{i=1}^{n}\exp(-t_0/T_i)\sum_{k=0}^{r_i}a_{ik}(T_i,\ T_\nu)\,t^k}\delta t+$$

$$+\tilde{Q}\frac{\sum_{i=1}^{n}\exp(-t_0/T_i)\sum_{k=0}^{r_i}\left[\frac{t_0}{T_i}a_{ik}(T_i,\ T_\nu)+\frac{\partial a_{ik}(T_i,\ T_\nu)}{\partial T_i}\right]t^k}{1-\sum_{i=1}^{n}\exp(-t_0/T_i)\sum_{k=0}^{r_i}a_{ik}(T_i,\ T_\nu)\,t^k}\delta T_i+$$

$$+\tilde{Q}\frac{\sum_{i=1}^{n}\exp(-t_0/T_i)\sum_{k=0}^{r_i}\frac{\partial a_{ik}(T_i,\ T_\nu)}{\partial T_\nu}t^k}{1-\sum_{i=1}^{n}\exp(-t_0/T_i)\sum_{k=0}^{r_i}a_{ik}(T_i,\ T_\nu)\,t^k}\delta T_\nu. \qquad (4.13)$$

Относительная погрешность

$$\varepsilon_Q\approx-\varepsilon_K+\varepsilon_y+\frac{\tilde{Q}K}{y_0}\sum_{i=1}^{n}\exp(-t_0/T_i)\sum_{k=0}^{r_i}t^k\left\{a_{ik}(T_i,\ T_\nu)\left[\left(\frac{t_0}{T_i}-k\right)\varepsilon_t+\right.\right.$$

$$+\frac{t_0}{T_i}\varepsilon_{T_i}\Big]+\Big[T_i\frac{\partial a_{ik}(T_i,\,T_v)}{\partial T_i}\varepsilon_{T_i}+T_v\frac{\partial a_{ik}(T_i,\,T_v)}{\partial T_v}\varepsilon_{T_v}\Big]\Big\}, \tag{4.14}$$

где $\varepsilon_Q=\delta Q/Q$; $\varepsilon_K=\delta K/K$; $\varepsilon_y=\delta y/y$; $\varepsilon_T=\delta T/T$.

Ниже приведены конкретные выражения величин, входящих в (4.13), (4.14), для ряда динамических звеньев с передаточными функциями вида (4.12):

1. $W(p)=1/(Tp+1)\Rightarrow h(t)=1-\exp(-t/T)$; $r_1=(\partial a_0/\partial T)=0$; $a_0=1$.

2. $W(p)=1/[(T_1p+1)(T_2p+1)]\Rightarrow h(t)=1+\frac{T_1}{T_2-T_1}\exp(-t/T_1)+$

$$+\frac{T_2}{T_1-T_2}\exp(-t/T_2);\qquad r_1=r_2=0;\qquad a_{10}=T_1/(T_2-T_1);$$

$$a_{20}=T_2/(T_1-T_2);\qquad \frac{\partial a_{10}}{\partial T_1}=-\frac{\partial a_{20}}{\partial T_1}=\frac{T_2}{(T_1-T_2)^2};$$

$$\frac{\partial a_{10}}{\partial T_2}=-\frac{\partial a_{20}}{\partial T_2}=-\frac{T_1}{(T_1-T_2)^2}.$$

3. $W(p)=\frac{T_3p+1}{(T_1p+1)(T_2p+1)}\Rightarrow h(t)=1+\frac{T_3-T_1}{T_1-T_2}\exp(-t/T_1)+$

$$+\frac{T_2-T_3}{T_1-T_2}\exp(-t/T_2);\qquad r_1=r_2=0;\qquad a_{10}=\frac{T_3-T_1}{T_1-T_2};$$

$$a_{20}=\frac{T_2-T_3}{T_1-T_2};\qquad \frac{\partial a_{10}}{\partial T_1}=-\frac{\partial a_{20}}{\partial T_1}=\frac{T_2-T_3}{(T_1-T_2)^2};$$

$$\frac{\partial a_{10}}{\partial T_2}=-\frac{\partial a_{20}}{\partial T_2}=\frac{T_3-T_1}{(T_1-T_2)^2};\qquad \frac{\partial a_{10}}{\partial T_3}=-\frac{\partial a_{20}}{\partial T_3}=\frac{1}{T_1-T_2}.$$

4. $W(p)=\frac{1}{(Tp+1)^2}\Rightarrow h(t)=1-(1+t/T)\exp(-t/T)$;

$$r_1=-a_{10}=1;\qquad a_{11}=-1/T;\qquad \frac{\partial a_{10}}{\partial T}=0;\qquad \frac{\partial a_{11}}{\partial T}=\frac{1}{T^2}.$$

5. $W(p)=\frac{T_2p+1}{(T_1p+1)^2}\Rightarrow h(t)=1-\Big[1+\Big(1-\frac{T_2}{T_1}\Big)\frac{t}{T_1}\Big]\exp(-t/T_1)$;

$$r_1=-a_{10}=1;\qquad a_{11}=\frac{1}{T_1}\Big(\frac{T_2}{T_1}-1\Big);$$

$$\frac{\partial a_{10}}{\partial T_1}=\frac{\partial a_{10}}{\partial T_2}=0;\qquad \frac{\partial a_{11}}{\partial T_1}=\frac{1}{T_1^2}\Big(1-\frac{2T_2}{T_1}\Big);$$

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial T_2}=\frac{1}{T_1^2}.$$

Если точность измерения Q, оцениваемая с помощью соотношений (4.13) и (4.14), меньше требуемой, то можно измерить не одно,

а несколько значений переходного процесса $y(t)$ в различные моменты времени. Можно выделить ряд вариантов.

1. Кроме y_0 измеряется также $y_1=y(t_1)$. Момент времени t_1 должен быть удален от момента t_0 в достаточной мере, для того чтобы избежать коррелированности погрешностей $\delta\tilde{Q}_0$ и $\delta\tilde{Q}_1$. Второе рассчитанное значение $\tilde{Q}_1$ используется для контроля первого ($\tilde{Q}_0$). Из оценок $\tilde{Q}_0$ и $\tilde{Q}_1$ выбирается та, которой соответствует меньшая оценка погрешности.

2. С помощью измерений $y(t)$ в n моментов времени получается совокупность оценок $\tilde{Q}_i$, $i=1,\ldots,n$, и погрешностей этих оценок $\delta\tilde{Q}_i$. Совокупность оценок рассматривается как случайная выборка. Результат измерения вычисляется в соответствии с ГОСТ 8.207—76 как среднее арифметическое выборочных значений: $\bar{Q}=\Big(\sum_{i=1}^{n}\tilde{Q}_i\Big)\Big/n$. Погрешность результата находится путем вероятностной обработки совокупности $\delta\tilde{Q}_i$, рассматриваемых как случайные величины. Каждая из величин представляет собой сумму пяти составляющих, обусловленных погрешностями определения K, T_i, T_v и погрешностями измерения (фиксации) моментов t_i и соответствующих значений y_i. Первая группа включает в себя погрешности, не зависящие от i, которые следует рассматривать как постоянные систематические погрешности. Обозначим эти составляющие δ_K, δ_{T_i} и δ_{T_v}, соответственно. Составляющие δ_{y_i} и δ_{t_i} можно суммировать как случайные величины, распределенные равномерно в своих границах $\Delta_{y,\,i}$ и $\Delta_{t,\,i}$ (см. ГОСТ 8.207—76). Если обозначить результат суммирования (границу суммарной составляющей) Δ_{yt}, то задача сведется к суммированию четырех составляющих: δ_K, δ_{T_i}, δ_{T_v} и Δ_{yt}. Суммирование производится аналогично описанному выше.

3. Значение Q ищется методом погружения. Рассматривается задача нахождения зависимости $y(t;\,Q,\,T_i,\,T_v)$ по результатам совместных измерений y_i и t_i, $i=1,\ldots,n$. При этом, вообще говоря, T_i и T_v могут быть неизвестны. Если они определены ранее (при исследовании динамических свойств средства измерений), то нахождение Q упрощается. В любом варианте задача ставится как регрессионная. Например, при использовании ортогональной регрессии минимизируется взвешенная сумма $\sum_i[\alpha_i(y_i-\tilde{y}_i)^2+\beta_i(t_i-\tilde{t}_i)^2]$.

Следует отметить, что описанный способ нахождения измеряемой величины не требует регуляризации, поскольку неточность определения переходной характеристики не влияет на погрешность определения установившегося значения. Последняя обусловлена лишь неточностью определения K.

Измерение постоянного параметра переменной величины. Рассмотрим два способа получения оценки измеряемой величины: а) с разделением преобразования $\tilde{\mathcal{P}}(x)$ на преобразование перемен-

ного сигнала в переменной и переменного в постоянный и б) без указанного разделения. Первый способ используется в условиях, когда переменная величина вначале регистрируется (записывается), а затем результаты регистрации обрабатываются с целью получения искомого параметра. Указанный способ используется также в том случае, когда измерение производится с помощью сложного средства измерений, т. е. совокупности функционально (а возможно и конструктивно) объединенных устройств с нормированными по отдельности динамическими свойствами.

Обозначим через $\mathbf{C}$ результирующий оператор преобразования переменных сигналов в средстве измерений (в первом случае — это оператор регистрации), а через $\tilde{\mathcal{F}}(\cdot)$ — функционал, определяющий преобразование результирующего переменного сигнала в постоянный (в первом случае — это функционал, представляющий алгоритм обработки). Тогда оценка измеряемой величины $\tilde{Q} = \tilde{\mathcal{F}}(\mathbf{C}x)$. Функционал $\tilde{\mathcal{F}}$ в общем случае может быть отличным от $\mathcal{F}$, однако чаще всего его стремятся сделать равным $\mathcal{F}$, и отличие $\tilde{\mathcal{F}}$ от $\mathcal{F}$ является одним из источников погрешности. Для линейного функционала Φ можно получить, пренебрегая величиной второго порядка малости,

$$\delta_{\Phi} \approx \delta\Phi(x) + \Phi[\delta\mathbf{C}(x)], \tag{4.15}$$

где $\delta\mathbf{C} = \mathbf{C} - K_J\mathbf{I}$ — оператор, характеризующий отличие преобразования непрерывных сигналов от масштабного (безынерционного); K_J — статический коэффициент преобразования переменных сигналов; $\delta\Phi = \tilde{\Phi}(\cdot) - \Phi(\cdot)$ — функционал, характеризующий отличие преобразования результирующего переменного сигнала в постоянный, осуществляемого в средстве измерений, от требуемого. Оценить δ_{Φ} на основе (4.15) можно лишь для конкретных функционалов Φ и $\tilde{\Phi}$ и оператора $\mathbf{C}$, определенных сведениях о входном сигнале устройства $x(t)$. При нелинейном функционале $\tilde{\mathcal{F}}$ оценку $\delta\tilde{\mathcal{F}}$ приходится получать непосредственно по (4.5г).

Второй способ может быть использован при измерениях с помощью простых средств измерений, градуированных непосредственно в единицах измеряемой величины. Он не относится к динамическим измерениям (см. § 1.2) и рассмотрен с целью иллюстрировать различие между использованием средства измерений для статических и динамических измерений. Пусть оценкой истинного значения измеряемой величины Q служит показание средства измерений D. Предполагая, что $y(t)$ не содержит статической погрешности и что статический коэффициент преобразования устройства равен единице, а также то, что D отличается от Q лишь из-за инерционности устройства, получим, что разность

$$\Delta = D - Q = D - \Phi(x) \tag{4.16}$$

представляет собой динамическую погрешность. Для нахождения оценки Δ требуется в соответствии с выражением (4.16) оценить функционал $\Phi(x)$. С этой целью прежде всего необходимо было бы из экспериментальных данных, т. е. на основании показания D, оценить функцию $x(t)$. Однако эту задачу в принципе решить невозможно, так как в соответствии с общими свойствами функционалов одно и то же показание D может соответствовать разным сигналам $x(t)$. Поэтому для решения задачи необходимо получить определенную информацию об $x(t)$, помимо той, которую дает используемое устройство. В общем случае сигнал на входе можно представить выражением $x = x(t, Q, \beta, \ldots, \nu)$, где $x(\cdot)$ — вид функции, определяющей форму сигнала; $\beta, \ldots, \nu$ — неинформативные параметры. Тогда $\Phi[x(t; Q; \beta, \ldots, \nu)] = Q$ и аналогично $\Phi[x(t; D; \beta, \ldots, \nu)] = D$. Показание D можно представить как некоторый функционал F, отличный (вследствие инерционности устройства) от Φ. Градуировкой средства измерений по известному сигналу $x_0(t)$ добиваются того, чтобы устройство для этого сигнала реализовывало функционал, практически совпадающий с Φ. Однако для сигналов, отличных от x_0, справедливо $F \neq \Phi$. Соотношение (4.16) может быть преобразовано следующим образом:

$$\Delta = D - \Phi[x(t; Q; \beta, \ldots, \nu)] = F[x(t; Q; \beta, \ldots, \nu)] - \Phi[x(t; Q; \beta, \ldots, \nu)]. \tag{4.17}$$

Если известны функционал F и все информативные параметры входного сигнала, то, подставляя в (4.17) вместо Q ее оценку D, можно получить оценку погрешности, которая отличается от истинного ее значения только ввиду того, что $D \neq Q$. В действительности, однако, неинформативные параметры входного сигнала известны с ограниченной точностью. Подставив в формулу (4.17) вместо Q ее оценку D и вместо параметров $\beta, \ldots, \nu$ их оценки $\tilde{\beta}, \ldots, \tilde{\nu}$, получим оценку погрешности $\tilde{\Delta} = F[x(t; D; \tilde{\beta}, \ldots, \tilde{\nu})] - D$, которая будет тем точнее, чем точнее известны функция x и ее неинформативные параметры $\beta, \ldots, \nu$.

Приведенный метод оценивания погрешности слишком сложен для повседневного применения средства измерений, и его можно использовать только в исключительных случаях. Практика выработала другой подход. Прежде всего, средства измерений постоянных величин конструируются как специализированные, предназначенные для входных сигналов определенного вида. При конструировании устройства стремятся сделать его нечувствительным к неинформативным параметрам. На практике это удается лишь для части параметров. В общем случае влияние неинформативных параметров ослабляется. Далее, для всех неинформативных параметров можно установить такие границы, что при изменении параметров внутри этих границ суммарная погрешность средства измерений будет изменяться незначительно. Это позволяет установить нормальные условия применения устройства. Если какой-либо неинформативный параметр выходит за границы нормальной области его изменения, то в этом случае нужно учесть возникающую погрешность как дополнительную. Можно дать этой погрешности и общее название динамической, но при нескольких параметрах это мало информативно. Более содержательно каждой погрешности дать собственное наименование, как это обычно и делается в электро- и радиоизмерительной технике.

Дополнительные погрешности часто нормируются в документации на средства измерений в виде зависимостей от соответствующих неинформативных параметров. Эти зависимости представляют собой дополнительные характеристики средства измерений [4]. Если вид входного сигнала и значения неинформативных параметров могут быть установлены с помощью простых средств, а также в том случае, когда необходимо достичь предельных точностных показателей устройства, указанные зависимости используются для введения поправок. В общем же случае стремятся установить, в каких границах находятся неинформативные параметры, и на основе указанных зависимостей оценить дополнительные погрешности. Если сведения о том, что неинформативные параметры находятся в установленных границах и не могут быть получены с помощью достаточно простых средств, то эти сведения получают путем накопления информации об объекте исследований и рассматривают как априорные, а при оценивании дополнительных погрешностей принимают наименее благоприятные значения неинформативных параметров.

Проиллюстрируем сказанное на примере вольтметра типа В4-11, предназначенного для измерений амплитуд переменных напряжений. Этот серийный прибор создан на основе разработанного во ВНИИМ им. Д. И. Мен-

делеева образцового вольтметра ОКВ-5. Прибор предназначен для измерений амплитуд напряжений импульсной, импульсно-модулированной и синусоидальной форм и для поверки импульсных и высокочастотных вольтметров и генераторов в цеховых и лабораторных условиях. Для него нормируется основная погрешность при измерениях амплитуд напряжений видеоимпульсов прямоугольной формы, а также синусоидальных и радиоимпульсных напряжений с синусоидальной несущей и прямоугольной огибающей. Отклонение формы импульсного напряжения от прямоугольной характеризуется коэффициентами α и $u_{0\,c}$: $\alpha = 0{,}5\ (\theta_{ф1} + \theta_{ф2})/\theta_{0,5}$, $u_{0\,c} = u_c/u_m$, где $\theta_{ф1}$, $\theta_{ф2}$ — длительности фронта и среза импульса; $\theta_{0,5}$ — длительность импульса на относительном уровне, равном 0,5; u_c — срез плоской части импульса; u_m — амплитуда импульса. В техническом описании приведены графики зависимостей дополнительных погрешностей от этих коэффициентов при представлении фронта, среза и вершины импульса прямолинейными отрезками. Следовательно, оценивание погрешностей возможно лишь в случае, если входной сигнал достаточно хорошо аппроксимируется ломаной линией, состоящей из трех линейных участков. Для определения коэффициентов α и $u_{0\,c}$ рекомендуется (см. «Вольтметр компенсационный В4-11. Паспорт, техническое описание, инструкция по эксплуатации и периодической поверке») использовать осциллограф, обеспечивающий измерение длительности с погрешностью в пределах ± 5 %.

Относительно погрешности измерений амплитуды напряжения с формой, близкой к синусоидальной, но все же искаженной, в описании прибора сказано: «Учесть эту погрешность с помощью поправок в практике измерений не удается, так как фаза и состав гармоник, как правило, бывают неизвестны. Целесообразно лишь определить пределы погрешности измерений напряжения вольтметром В4-11 в положении «СИНУСОИДА» при искажениях синусоидальной формы как в сторону притупления до прямоугольной, так и в сторону заострения до треугольной».

Рассмотрение особенностей нормирования метрологических характеристик вольтметра В4-11 и его применения на практике иллюстрирует тот факт, что оценивание динамических погрешностей средств статических измерений с переменными входными сигналами в принципе аналогично оцениванию любых дополнительных погрешностей. Таким образом, проблема оценивания погрешностей указанных средств измерений решается по существу на этапе нормирования метрологических характеристик и получения (накопления) информации об объекте исследования.

Сказанное выше относительно нормирования динамических свойств и оценивания динамических погрешностей средств статических измерений с переменными входными сигналами верно, если эти устройства являются простыми. Если средство измерений применяется как установка или система, т. е. как совокупность устройств с нормированными по отдельности динамическими свойствами, то ситуация усложняется. Различные измерительные устройства, входящие в состав такого средства измерений, могут находиться при применении в различных режимах. Способы нормирования и оценивания погрешностей этих устройств в соответствии с изложенным выше будут различны. Например, средство измерений импульсных давлений может содержать пьезоэлектрический измерительный преобразователь и импульсный вольтметр. Если это устройство будет применяться как специализированное (с небольшими изменениями форм входных сигналов), то целесообразно нормировать его динамические свойства в целом и так, как это предусмотрено для импульсного вольтметра. Если же есть необходимость применять указанное устройство как универсальное (с разнообразными входными сигналами), то следует нормировать по отдельности полную основную характеристику преобразователя и дополнительные характеристики вольтметра, учитывающие влияние изменяющихся неинформативных параметров входного сигнала. Для применения средства измерений в условиях изменяющихся за время измерения влияющих величин необходимо также нормировать соответствующие дополнительные характеристики преобразователя. При необходимости применить составное средство измерений, сконструированное как единое целое, на пределе его возможностей придется индивидуально исследовать динамические свойства входящих в его состав измерительных устройств. Применение такого средства измерений по существу не будет отличаться от применения системы.

Таким образом, между средствами для статических и динамических измерений имеются существенные различия, которые проявляются при их применении и обусловливают различия в нормировании их динамических свойств. Эти различия можно резюмировать следующим образом:

1. При применении средства измерений в динамическом режиме может возникнуть задача оценивания динамической погрешности как функции времени. Эта задача при высокой требуемой точности ставится как задача нахождения формы и параметров входного сигнала и может решаться на основе использования любой из полных характеристик устройства.

2. При применении средства измерений в статическом режиме при переменном входном сигнале динамическая погрешность есть число. Задача оценивания этой погрешности (обратная задача) в общем случае не может быть решена, так как требует чрезвычайно большого объема информации о входном воздействии. Поэтому рассматриваемые устройства всегда создают как специализированные.

3. Сложное средство статических измерений может создаваться и применяться как единое целое или как установка или система. В первом случае оно проектируется как специализированное и его динамические свойства в целом нормируются аналогично простым устройствам. Во втором случае динамические свойства измерительных устройств, образующих сложное средство измерений, нормируются по отдельности и это позволяет использовать последнее как универсальное.

4.3. ДИНАМИЧЕСКИЕ ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРИТЕЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Измерительное преобразование — наиболее типичная задача динамических измерений. Преобразования могут быть условно разделены по виду функции преобразования на пропорциональные и функциональные (с функцией, отличной от линейной). В практике чаще всего имеют дело с пропорциональным преобразованием, примерами которого являются: первичное преобразование сигнала неэлектрической величины в электрический сигнал, усиление электрического сигнала, деление сигналов механических величин, ослабление уровня и мощности электрических сигналов. Коэффи-

циент пропорционального преобразования может быть размерным, как в случае первичного преобразования, и безразмерным, как в остальных примерах. В последнем случае преобразование называют масштабным.

В измерительной цепи средства измерений, используемого в динамическом режиме, погрешность преобразования часто является определяющей. В особенности это относится к первичному преобразованию, которое в большинстве случаев ограничивает достижимую точность измерений неэлектрических величин. Строго говоря, измерительная регистрация с помощью самопишущего прибора или осциллографа представляет собой преобразование сигнала измеряемой величины в сигнал перемещения (пера самописца, светового пятна или луча осциллографа), т. е. длины, изменяющейся со временем. Поэтому все, что говорится о погрешностях измерительного преобразования, относится также к измерительной регистрации. При этом следует учитывать, что измерительная регистрация имеет особенности, которые рассмотрены в § 4.4. Имея в виду отмеченную общность вопросов оценивания погрешности измерительного преобразования, будем в дальнейшем говорить об оценивании погрешностей измерений и вместо преобразователя говорить о средстве измерений.

Ограничимся оцениванием погрешностей измерений по формуле (4.8) в предположении, что устройство описывается линейным дифференциальным уравнением. Выражение (4.8) показывает сложность задачи оценивания, поскольку $\delta(t)$ зависит как от динамических свойств средств измерений, так и от скоростных (частотных) свойств измеряемой величины (входного сигнала). В связи со сложностью задачи в практике сложился поэтапный подход к ее решению, который может быть обобщен следующим образом.

Оценивание погрешностей начинается на этапе подготовки измерений, при выборе средства измерений. Задача выбора такого устройства определена метрологически строго в том случае, когда требуется провести измерения с наибольшей достижимой точностью. Априорное оценивание погрешностей при выборе средства измерений осуществляется с использованием информации о возможных входных сигналах и сведений о динамических свойствах имеющихся устройств. Априорное оценивание погрешностей производится также с целью изучения возможностей средства измерений данного типа при его использовании для измерений. В последнем случае оцениваются ожидаемые погрешности при воздействии на устройство сигналов типовых форм — периодических (синусоидальных, прямоугольных, трапецеидальных), импульсных (прямоугольных, колоколообразных), ступенчатых (с линейным, экспоненциальным и синусоидальным нарастанием до установившегося значения), случайных с известными законами распределения и корреляционными (спектральными) свойствами. Формально априорное оценивание погрешностей измерений сводится к решению прямой задачи динамики — определению $y(t)$ по известным $\mathscr{B}_д$ и $x(t)$ и вычислению затем $\delta(t)$. Апостериорное оценивание погрешностей измерений

производится в зависимости от цели исследования и результатов априорного оценивания. Если по итогам априорного оценивания выбранное средство измерений обеспечивает требуемую точность измерений, и за результат измерений может быть принят выходной сигнал устройства, то апостериорное оценивание, как правило, не производится Если динамические измерения входят в состав ответственных (уникальных) исследований или возникает сомнение в том, что реальный выходной сигнал и условия измерений соответствовали предполагаемым, может возникнуть необходимость уточнить априорную оценку по результатам измерений. Формально апостериорное оценивание есть нахождение оценки $\delta(t)$ по выражению (4.8).

Наконец, возможны случаи, когда не удается выбрать средство измерений, достаточно быстродействующее для обеспечения требуемой точности измерений, и апостериорная оценка погрешности не изменяет этого вывода, либо когда необходимо осуществить предельно точные измерения. В этих случаях выходной сигнал устройства не может служить оценкой измеряемой величины и требуется скорректировать погрешности измерений. Коррекция статической погрешности осуществляется путем индивидуальной градуировки средства измерений. В предположении пренебрежимо малой статической погрешности коррекция динамической погрешности формально сводится к решению обратной задачи динамики — нахождению $x(t)$ по известным $\mathscr{B}_д$ и $\hat{y}(t) = y(t)/K_д$. Эта задача относится к некорректно поставленным [71] и представляет наибольшую сложность при обработке данных измерений. Она рассмотрена в § 4 5.

Поскольку погрешность измерений обусловлена свойствами как средства измерений, так и входного сигнала, то формулировка конкретной задачи ее оценивания определяется характером и объемом сведений об этих свойствах, а сложность решения — дефицитом имеющейся информации. Наибольшая информация о динамических свойствах средств измерений выражается его полной характеристикой. Информация о входном сигнале заключается между следующими пределами: а) заданный (своими значениями или аналитическим выражением) входной сигнал, б) сведения о входном сигнале, содержащиеся в выходном с учетом имеющейся информации о свойствах устройства. Между указанными пределами имеется множество градаций, различные сочетания которых определяют «матрицу» задач, вообще говоря, неограниченной размерности. Выделение наиболее распространенных вариантов исходной информации позволяет сформулировать типичные задачи оценивания, которые можно представить в виде таблицы, содержащей более 100 задач [25]. Если при анализе указанных задач ограничиться в оценке их результатов тремя градациями: 1) пригодны для фактического использования, 2) требуют доработки и 3) отсутствуют, то подавляющее большинство задач следует отнести к последней группе. Таким образом, проблема оценивания погрешностей измерений остается весьма актуальной.

Ниже рассмотрены некоторые из сформулированных в работе [25] задач.

Точное априорное оценивание. Рассмотрим средство измерений с дифференциальным уравнением:

$$T_1^2 y'' + T_2 y' + y = T_0 x' + x. \qquad (4.18)$$

При непрерывных на интервале $[0, t]$ входных воздействиях $x(t)$ решение (4.18) может быть представлено в виде:

$$y(t) = C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t) + y_ч(t), \qquad (4.19)$$

где $y_ч(t)$ — частное решение (4.18); f_1 и f_2 — линейно независимые решения соответствующего однородного уравнения; C_1 и C_2 — константы, определяемые начальными данными. Начальные данные не могут задаваться произвольно, поскольку решение должно быть непрерывным в точках разрыва $x(t)$. Начальное условие для $y'(t_0)$ должно удовлетворять соотношению:

$$y'(t_{0+}) = y'(t_{0-}) + \frac{T_0}{T_1^2}\Delta x, \quad \text{где } \Delta x = x(t_{0+}) - x(t_{0-});$$

$$x(t_{0+}) = \lim_{\varepsilon \to 0} x(t_0 + \varepsilon); \qquad x(t_{0-}) = \lim_{\varepsilon \to 0} x(t_0 - \varepsilon).$$

В дальнейшем используются обозначения: $D = y(t_0) - y_1(t_0)$; $H = y'(t_{0-}) + \frac{T_0}{T_1^2}\Delta x$.

В зависимости от значений коэффициентов T_1 и T_2 в уравнении (4.18) можно выделить три группы соотношений для f_1, f_2 и C_1, C_2 в (4.19):

Группа 1:

$$T_2^2 - 4T_1^2 > 0; \qquad f_1 = \exp(-\lambda_1 t); \qquad f_2 = \exp(-\lambda_2 t); \qquad (4.20)$$

$$C_1 = (-\lambda_2 D + H)[\exp(\lambda_1 t_0)]/(\lambda_1 - \lambda_2);$$

$$C_2 = (\lambda_1 D - H)[\exp(\lambda_2 t_0)]/(\lambda_1 - \lambda_2),$$

где

$$\lambda_{1,2} = 0{,}5\left(T_2 \pm \sqrt{T_2^2 - 4T_1^2}\right)/T_1^2.$$

Группа 2:

$$T_2^2 - 4T_1^2 = 0; \qquad f_1 = \exp(-\lambda t); \qquad f_2 = t\exp(-\lambda t); \qquad (4.21)$$

$$C_1 = [(1 - t_0\lambda)D - Ht_0]\exp(\lambda t_0); \qquad C_2 = (H + \lambda D)\exp(\lambda t_0),$$

где $\lambda = T_2/(2T_1^2)$.

Группа 3:

$$T_2^2 - 4T_1^2 < 0; \qquad f_1 = [\exp(-\lambda t)]\sin\omega t; \qquad f_2 = [\exp(-\lambda t)]\cos\omega t;$$

$$C_1 = [\exp(\lambda t_0)][D(\omega\sin\omega t_0 + \lambda\cos\omega t_0) + H\cos\omega t_0]/\omega; \qquad (4.22)$$

$$C_2 = [\exp(\lambda t_0)][D(-\lambda\sin\omega t_0 + \omega\cos\omega t_0) - H\sin\omega t_0]/\omega,$$

где $\lambda = T_2/(2T_1^2)$;

$$\omega = 0{,}5\sqrt{4T_1^2 - T_2^2}/T_1^2.$$

Приведенные выше соотношения позволяют определить отклики устройства на входные сигналы в тех случаях, когда удается найти частное решение (4.18).

Для трех важных типов входных сигналов частные решения имеют вид:

$$x(t) = at + b \Rightarrow y_ч(t) = at + b + a(T_0 - T_2); \qquad (4.23)$$

$$x(t) = a_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \Rightarrow y_ч(t) = c\sin\omega_0 t + d\cos\omega_0 t, \qquad (4.24)$$

где

$$c = [a_0(1 - \omega_0^2 T_1^2) + b_0\omega_0 T_0]/[T_1^2\omega_0^2 + (1 - T_1^2\omega_0^2)^2];$$

$$d = [b_0(1 - \omega_0^2 T_1^2) - a_0\omega_0 T_2]/[T_1^2\omega_0^2 + (1 - T_1^2\omega_0^2)^2];$$

$$a_0 = a_m(\cos\varphi_0 - \omega_0 T_0\sin\varphi_0); \qquad b_0 = a_m(\sin\varphi_0 + \omega_0 T_0\cos\varphi_0); \qquad (4.25)$$

$$x(t) = a_1 + b_1\exp(c_1 t) \Rightarrow y_ч(t) = a_1 + b_1\frac{T_0 c_1 + 1}{T_1^2 c_1^2 + T_2 c_1 + 1}\exp(c_1 t).$$

Подстановка в (4.19) выражений $f_{1,2}$ и $C_{1,2}$ из (4.20) — (4.22) и частных решений (4.23) — (4.25) позволяет рассчитать отклики средства измерений с уравнением (4.18) на входные сигналы, широко распространенные в практике исследований и контроля характеристик средств измерений (например, идеально ступенчатый, линейно нарастающий, синусоидальный со ступенчатой модуляцией); кроме того, комбинируя их, можно конструировать отклики на другие, более сложные сигналы.

Приближенное априорное оценивание. Для получения приближенных априорных оценок погрешностей кроме характеристик средства измерений используется также априорная информация о характере изменений во времени измеряемой величины (сигнала на входе).

Наиболее общий результат, характеризующийся наименьшей информацией о входном сигнале, имеет место для устройства с монотонной переходной характеристикой. Для таких устройств при сигнале с нулевым начальным значением справедливо следующее неравенство:

$$|\delta(t)| = |y(t) - x(t)| \leqslant \left|\int_0^t [1 - h(t - \tau)]\,d\tau\right| \max_t |x'(t)|$$

или

$$|\delta(t)| \leqslant M\,|x'(t)|_{\max},$$

где M — константа, мажорирующая модуль интеграла в правой части.

Для средства измерений с дифференциальным уравнением 1-го порядка $Ty' + y = x$

$$|\delta(t)| = T\,|y'|. \qquad (4.26)$$

Если иметь в виду, что в моменты времени, когда $\delta(t)$ принимает экстремальные значения, $x' = y'$, то из выражения (4.26) имеем

$$|\delta(t)| \leqslant T\,|x'(t)|_{\max}. \qquad (4.27)$$

Проиллюстрируем использование оценки (4.27). Пусть $x(t) = -\exp(-t/\tau_1) + \exp(-t/\tau_2)$; $\tau_1 = 10^{-2}$ с; $\tau_2 = 5\ \tau_1$. Ниже даны расчетные значения и оценки погрешностей [по формуле (4.27)]:

Коэффициент T	$0{,}9\tau_1$	$0{,}1\tau_1$
Расчетное значение	0,13	0,07
Оценка погрешности . . .	0,72	0,08

В первом случае неравенство (4.27) дает существенно завышенную оценку погрешности, во втором мы имеем дело с более точными измерениями и оценка, получаемая с помощью (4.27), вполне удовлетворительна.

Средства измерений с дифференциальными уравнениями 2-го порядка

$$T_1^2 y'' + T_2 y' + y = x + T_0 x' \qquad (4.28)$$

могут иметь немонотонную переходную характеристику. Остановимся вначале на случае, когда $T_1^2 - 4T_2^2 \geqslant 0$. При $T_0 = 0$ выражение (4.28) описывает динамику устройства, составленного из двух последовательно соединенных инерционных звеньев 1-го порядка. Очевидно, что погрешность такого устройства не превзойдет суммы оценок сверху для каждого из звеньев. На этом основании получаем

$$|\delta| \leqslant T_2\,|x'|_{\max}. \qquad (4.29)$$

Аналогичное рассуждение позволяет получить оценку погрешности для средства измерений, состоящего из произвольного числа m последовательно соединенных звеньев 1-го порядка:

$$|\delta| \leqslant \sum_{i=1}^{m} T_i\,|x'|_{\max}. \qquad (4.30)$$

При $T_0 \neq 0$ вместо выражения (4.29) получаем

$$|\delta| \leqslant (|T_0 - T_2 + T_3| + |T_3|)\,|x'|_{\max}, \qquad (4.31)$$

где $T_3 = \left(T_2 - \sqrt{T_2^2 - 4T_1^2}\right)/2$.

Отметим, что оценки (4.27), (4.29) — (4.31) могут быть использованы при любом сигнале с известной предельной скоростью изменения и нулевым начальным значением.

Остановимся далее на случае $T_1^2 - 4T_2^2 < 0$. При этом переходная характеристика устройства имеет вид:

$$h(t) = 1 - [\exp(-at)]\cos(\omega t + \varphi)/\cos\varphi,$$

где $a = 0{,}5\ T_2/T_1^2$; $\omega = 0{,}5\sqrt{4T_2^2 - T_1^2}/T_1^2$; $\varphi = \operatorname{arctg}[T_0\omega/(1 - aT_0)] - \operatorname{arctg}(\omega/a)$.

При произвольном входном сигнале с нулевым начальным значением с учетом равенства $\delta = \int_0^t [1 - h(t-\tau)]\,x'(\tau)\,d\tau$ имеем $|\delta| \leqslant |x'|_{\max}/(a\cos\varphi)$.

При монотонно нарастающем входном сигнале, скорость изменения которого имеет не более одного внутреннего максимума, справедлива оценка

$$|\delta| \leqslant 0{,}5\tau_0\,|x'|_{\max}, \qquad (4.32)$$

где τ_0 — период собственных колебаний устройства.

Оценка (4.32) получена в работе [41] для $a = 0$, $\varphi = 0$. С помощью выкладок, аналогичных приведенным в [41], результат (4.32) может быть распространен на случай, когда a и φ отличны от нуля. Следует отметить, что в этой работе сформулировано без вывода более сильное утверждение, которое может быть записано в форме неравенства:

$$|\delta| \leqslant \frac{\tau_0}{2} \max_t |x(t) - x(t - \tau_0/2)|.$$

Рассмотрим далее задачу оценивания со следующими исходными данными: входной сигнал финитный гладкий с длительностью θ, ограниченный $[x(t) \leqslant A]$ и с ограниченной скоростью нарастания $[x'(t) \leqslant \alpha]$; динамические свойства средства измерений выражены с помощью импульсной характеристики с конечной «памятью» T, определенной из условия: $g(T) = \eta$, $g(t) < \eta\ \forall\ t > T$.

Уровень η соответствует статической погрешности δ_c: $|1 - h(t)| = \left|1 - \int_0^t g(\tau)\,d\tau\right| < \delta_c\ \forall\ t > T$. Рассмотрим случай точных измерений $T \ll \theta$. С точностью до величины $\eta T x(T)$ выходной сигнал (в предположении, что $K = 1$)

$$y(t) = \int_{t-T}^{t} g(t - \tau)\,x(\tau)\,d\tau$$

Используя свойства $x(t)$ и $g(t)$, заменим $x(\tau)$ на интервале $[t-T,\ t]$ прямой: $x(\tau) \approx x(t) - x'(t)(t - \tau)$ Тогда $y(t) \approx [x(t) - Tx'(t)]\,h(T) + x'(t)\int_0^T h(t)\,dt$.

Погрешность $\delta(t) = [h(T) - 1]\,x(t) + x'(t)\,[I - Th(T)]$, где обозначено $I = \int_0^T h(t)\,dt$.

Обозначив $\|\delta(t)\|_C = \Delta_C$, $\|\delta(t)\|_{\mathscr{L}_2} = \Delta_{\mathscr{L}_2}$, найдем $\Delta_C \leqslant A\delta_c + \alpha|I - T + T\delta_c|$

Если переходная характеристика средства измерений не имеет больших выбросов, то, поскольку $\max|I - Th(T)| \leqslant \max I - T\,h(T)$, а $\max I \leqslant T \max h(t)$, можно получить $\Delta_C \leqslant A\delta_c + \alpha T\,[\max h(t) - h(T)]$

Ограничиваясь величиной выброса $\mu = \max|h(t) - 1| = 0{,}3$, получим:

$$\Delta_C \leqslant A\delta_c + \alpha T\,(\delta_c + \mu)$$

$$\Delta_{\mathscr{L}_2} \leqslant \sqrt{\delta_c^2 E_x + \alpha^2 [I - Th(T)]^2}; \qquad E_x = \int_0^\theta x^2(t)\,dt.$$

Важным для практики классом входных сигналов являются периодические сигналы, простейший из которых — синусоидальный — вызывает аналогичный отклик линейного средства измерений в установившемся режиме [см. (4.24)]. Представим частотные характеристики устройства в форме, соответствующей распространенному способу их нормирования:

$$A(\omega) = 1 + \delta A(\omega); \qquad \Phi(\omega) = a\omega + \delta\Phi(\omega);$$

$$|\delta A(\omega)| \leqslant \Delta A; \qquad |\delta\Phi(\omega)| \leqslant \Delta\Phi \qquad \text{при} \qquad \omega \in [\omega_н, \omega_в].$$

Динамическая погрешность

$$\delta(t) = a_m \left\{ \left[\delta A(\omega_0) \cos\delta\Phi(\omega_0) - 2\sin^2 \frac{\delta\Phi(\omega_0)}{2} \right] \sin(\omega_0 t + \varphi_0) + \right.$$

$$\left. + A(\omega_0) \sin\delta\Phi(\omega_0) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \right\},$$

откуда для достаточно больших t (установившийся режим) и для диапазона частот, в котором допустимо пренебречь величинами порядка малости выше второго относительно $|\delta A(\omega)|$, $|\delta\Phi(\omega)|$, получаем приближенную оценку

$$\delta(t) \leqslant a_m \sqrt{[\delta A(\omega)] + [A(\omega)\,\delta\Phi(\omega)]^2}. \qquad (4.33)$$

Этот результат может быть использован в том случае, когда входной сигнал представляет собой сумму нескольких гармонических составляющих с частотами, не обязательно кратными минимальной: $x(t) = \sum_i a_{mi} \sin(\omega_i t + \varphi_i)$. Для такого сигнала в установившемся режиме справедлива оценка погрешности

$$|\delta| \leqslant \sum_i |a_{mi}| \sqrt{(\Delta A)^2 + (1 + \Delta A)^2 (\Delta\Phi)^2}.$$

Кроме оценок погрешности измерений в норме C, т. е. $|y - x|_{\max}$, представляется полезным получить оценки в норме $\mathscr{L}_2$. Если при обработке выходного сигнала предусматривается его масштабное преобразование с коэффициентом m и сдвиг во времени на величину τ, то

$$\Delta_{\mathscr{L}_2}(t;\ m,\ \tau) = \int_0^\infty [my(t + \tau) - x(t)]^2\,dt$$

или, в частотной области,

$$\Delta_{\mathscr{L}_2}(\omega;\ m,\ \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |1 - mW(j\omega) \exp(j\omega\tau)|^2 X^2(\omega)\,d\omega.$$

Получена оценка:

$$\Delta_{\mathscr{L}_2}(m,\ \tau) \leqslant [1 + (1 + \Delta A)^2 m^2] D - 2m(1 - \Delta A) \sqrt{1 - (\Delta\Phi)^2} \times$$

$$\times R_{xx}(a + \tau) + 2m\Delta\Phi(1 + \Delta A) D;\ D = R_{xx}(0). \qquad (4.34)$$

При $m = 1$, $\tau = 0$ из (4.34) получается оценка погрешности в соответствии с (4.8).

Минимальное значение $\Delta_{\mathscr{L}_2}(m, \tau)$ достигается при $\bar{\tau} = -a$ и $\bar{m} = [(1 - \Delta A)\sqrt{1 - (\Delta\Phi)^2} - \Delta\Phi(1 + \Delta A)]/(1 + \Delta A)^2$ и имеет вид:

$$\Delta_{\mathscr{L}_2}(\bar{m},\ \bar{\tau}) = 1 - [(1 - \Delta A)\sqrt{1 - (\Delta\Phi)^2} - \Delta\Phi(1 + \Delta A)]^2/(1 + \Delta A)^2.$$

При $\Delta\Phi = 0$ $\Delta_{\mathscr{L}_2}(m, \tau) \leqslant [1 + (1 + \Delta A)^2] D - 2(1 - \Delta A) \times R_{xx}(a)$, что совпадает с результатом, полученным в [53].

Наряду с оценками погрешности измерений сверху представляется полезным иметь оценки (ненулевые) погрешности снизу.

Для средства измерений с уравнением $Ty' + y = x$ погрешность $\delta = -Ty' = Tx' - T\delta'$.

На интервале $[t_1, t_2]$ монотонного изменения x имеем

$$\max_t |\delta| > T|x(t_2) - x(t_1)|/(t_2 - t_1 - 2T),$$

где t_2 — момент максимума x; t_1 — момент ближайшего к t_2 минимума x.

Для устройств, описываемых уравнениями более высоких порядков, получить аналогичную оценку не удается.

Если динамические свойства средств измерений заданы так же, как и в случае преобразования ограниченного финитного сигнала, то для синусоидального сигнала (4.24), где $\omega_0 = 2\pi/\theta$, можно получить следующие результаты. Без ограничения общности можно считать $\varphi_0 = 0$. Задача имеет смысл, если сдвигом во времени между $x(t)$ и $y(t)$ нельзя пренебречь.

Выходной сигнал (при $T \ll \theta$) $y(t) = a_m \int_{t-T}^{t} g(t - \tau) \sin\frac{2\pi}{\theta}\tau\,d\tau$. Обозначив $\rho = \tau/\theta$ и перейдя к безразмерному времени $\bar{t} = t/\theta$, $\alpha = T/\theta$, получим $y(\theta\bar{t}) = a_m\theta \int_{\bar{t}-\alpha}^{\bar{t}} g(\theta\bar{t} - \theta\rho) \sin 2\pi\rho\,d\rho$. На интервале $[\bar{t} - \alpha, \bar{t}]$ с длительностью $\alpha \ll 1$ можно представить приближенно $\sin 2\pi\rho \approx \sin 2\pi\bar{t} - 2\pi(\bar{t} - \rho)\cos 2\pi\rho$. Тогда

$$y(\theta\bar{t}) = a_m \{(\sin 2\pi\bar{t} - 2\pi\bar{t}\cos 2\pi\bar{t})\, h(\alpha\theta) + (2\pi/\theta)\cos 2\pi\bar{t} \times$$

$$\times \left[(\theta\bar{t} - \theta\alpha)\, h(\theta\alpha) + \int_0^{\theta\alpha} h(t)\,dt \right] \}.$$

Возвращаясь к естественному времени, получим

$$y(t) = a_m \left[\left(\sin\frac{2\pi}{\theta} t - \frac{2\pi}{\theta} T \cos\frac{2\pi}{\theta} t \right) h(T) + \frac{2\pi}{\theta} \cos\frac{2\pi}{\theta} t \int_0^T h(t)\,dt \right]$$

Динамическая погрешность

$$\delta(t) = a_m \left\{ \sin\frac{2\pi}{\theta} t\,[h(T) - 1] + \frac{2\pi}{\theta}[I - Th(T)] \cos\frac{2\pi}{\theta} t \right\}.$$

Нормы погрешности $\delta(t)$:

$$\Delta_C = a_m \sqrt{\delta_c^2 + \frac{4\pi^2}{\theta^2}[I - Th(T)]^2};$$

$$\Delta_{\mathscr{L}_2} = a_m \left\{ \frac{1}{\tau} \left\{ \frac{[h(T)-1]^2}{2\pi/\theta} \left(\frac{\pi\tau}{\theta} - \frac{1}{4} \sin \frac{4\pi\tau}{\theta} \right) - [h(T)-1] \times \right. \right.$$

$$\times [I - Th(T)] \cos \frac{4\pi\tau}{\theta} + \frac{2\pi}{\theta} [I - Th(T)]^2 \left(\frac{\pi\tau}{\theta} + \frac{1}{4} \sin \frac{4\pi\tau}{\theta} \right) +$$

$$\left. \left. + [h(T)-1]\,[I - Th(T)] \right\} \right\}^{\frac{1}{2}};$$

при $\tau = \theta$ имеем

$$\Delta_{\mathscr{L}_2} = a_m \sqrt{\frac{[h(T)-1]^2}{2} + \frac{2\pi^2}{\theta^2}[I - Th(T)]^2}.$$

Апостериорное оценивание. Полученные выше оценки являются априорными, т. е. при их получении не использовались результаты измерений. Можно попытаться улучшить эти оценки на основе результатов измерений.

Для звена 1-го порядка имеем точное равенство $-\delta = Ty'$, т. е. оценка погрешности измерений может быть определена с точностью до погрешности определения производной выходного сигнала по его зарегистрированным значениям. Для звена 2-го порядка имеем точное равенство $-\delta = T_1^2 y'' + T_2 y' - T_0 x'$ и

$$|\delta|_{\max} = \max_t |T_1^2 y'' + (T_2 - T_0) y'|. \qquad (4.35)$$

Точность оценки (4.35) ограничена достижимой точностью определения первых двух производных выходного сигнала.

Для звена 2-го порядка по результатам измерений можно оценить погрешность снизу следующим образом. Исходя из уравнения

$$T_1^2 y'' + T_2 y' = -\delta + T_0 x',$$

получаем

$$|\delta|_{\max} \geqslant T_2 |y'|_{\max} - T_0 |x'|_{\max}. \qquad (4.36)$$

Оценка (4.36) может быть полезна в случае, если $T_2 |y'|_{\max} > T_0 |x'|_{\max}$.

Для звена 1-го порядка максимальные значения погрешности достигаются в точках перегиба y, а в точках минимальных и максимальных значений y погрешность равна нулю.

При апостериорном оценивании погрешности, так же как при априорном, представляется полезной оценка погрешности в норме $\mathscr{L}_2$:

$$\Delta_{\mathscr{L}_2} = \int_0^t [y(\tau) - x(\tau)]^2 d\tau$$

или, в частотной области,

$$\Delta_{\mathscr{L}_2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |1 - W(j\omega)|^2 X^2(\omega)\, d\omega.$$

Рассмотрим наряду с $\Delta_{\mathscr{L}_2}$ величину

$$\sigma^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |1 - W(j\omega)|^2 |W(j\omega)| X^2(\omega)\, d\omega.$$

Нетрудно видеть, что

$$(1 - \Delta A)^2 \Delta_{\mathscr{L}_2} \leqslant \sigma^2 \leqslant (1 + \Delta A)^2 \Delta_{\mathscr{L}_2}.$$

Величина σ^2 при наличии результатов измерений и известной импульсной характеристики может быть оценена по формуле:

$$\sigma^2 = \int_0^{\infty} \left[\int_0^t g(t-\tau)\, y(\tau)\, d\tau - y(t) \right]^2 dt.$$

4.4. ДИНАМИЧЕСКИЕ ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ С РЕГИСТРАЦИЕЙ

Измерения могут проводиться с регистрацией изменений величины во времени. Структурная схема измерительных операций приведена на рис. 4.2.



Рис 4 2. Структурная схема измерительных операций при динамических измерениях с регистрацией

Измерительная задача может состоять как в определении закономерности изменений величины, характеризующей исследуемый процесс, так и в определении обобщенных числовых характеристик процесса, в частности его энергетических и временных параметров. В первом случае речь идет об измерениях мгновенных величин, во втором — об измерении постоянной величины, представляющей собой функционал. Соответственно математическая обработка состоит либо в отсчитывании координат диаграммы (осциллограммы), либо включает в себя также вычисление требуемого функционала.

В зависимости от формы представления информации различают дискретную и аналоговую регистрацию и в зависимости от вида носителя: запись на диаграммной бумаге — обычной или теплочувствительной (в самопишущих приборах), фотобумаге (в светолу-

чевых осциллографах), экране электронно-лучевой трубки (в электронных осциллографах), магнитной ленте (в магнитографах).

Дискретная регистрация может быть осуществлена с помощью самопишущего прибора с точечной записью, стробоскопического осциллографа или с помощью цифропечатающего прибора. Последний способ имеет большее распространение в практике. Для его осуществления структурная схема (рис. 4.2) должна содержать, кроме операций аналогового преобразования (первичное преобразование и усиление), также аналого-цифровое преобразование.

Большинство видов записи на различных носителях представляет собой разновидности аналоговой регистрации. Как указано выше, аналоговую регистрацию можно рассматривать как преобразование электрического или неэлектрического сигнала в угол отклонения (перемещение) фиксирующего элемента (пера самописца, луча осциллографа) или в фиксирующий сигнал (поток теплоты из нагревательного элемента теплового пера, магнитный поток катушки записи магнитографа). Этот подход позволяет распространить на регистрацию все результаты, получаемые для оценивания погрешностей измерительного преобразования (§ 4.3). Поэтому в данном разделе целесообразно подчеркнуть специфику оценивания погрешностей измерений с регистрацией.

Всем регистрирующим приборам присуща погрешность, обусловленная несовершенством развертывания во времени выходного сигнала. В электромеханических регистрирующих устройствах это — погрешности лентопротяжного механизма, в электронных — погрешности формирования напряжения (тока) развертки.

Рассмотрим общий подход к оцениванию погрешностей развертывания. Если обозначить оператор, характеризующий в совокупности преобразования исследуемого сигнала $x(t)$ в цепи выход объекта — вход регистрирующего прибора, через $\mathbf{B}_{\text{пр}}$, то непосредственно регистрируемый сигнал $z(t) = \mathbf{B}_{\text{пр}}[x(t)]$. Временная координата зарегистрированного сигнала представлена протяженностью диаграммы (осцилограммы), т. е. с помощью длины. Обозначим временную зависимость сигнала развертки $l = l(t)$, а оператор преобразования сигнала $z(t)$ при регистрации $\mathbf{B}_{\text{р}}$. Временная зависимость значений зарегистрированного сигнала $\alpha(t) = \mathbf{B}_{\text{р}}[z(t)]$, а его зависимость от длины диаграммы или осциллограммы может быть определена как

$$\alpha = \alpha[t(l)], \tag{4.37}$$

где $t(l)$ — зависимость, обратная $l(t)$.

Зависимость $l(t)$ в общем случае содержит систематическую и случайную части. Последняя имеет причиной нестабильность электромеханического или шумы электронного устройства. Если не приняты специальные меры для исключения систематической составляющей, она, как правило, превалирует. Систематическая составляющая имеет периодический характер, что обусловлено принципом действия как механических, так и электронных развертывающих устройств. Если обозначить период систематической

составляющей через T, то зависимость $l(t)$ может быть представлена в виде:

$$l = m_0 t + \sum_{i=1}^{\infty} m_i \sin\left(2\pi \frac{t}{T} i + \varphi_i\right). \tag{4.38}$$

Ограничимся основной гармонической составляющей ряда (4.38):

$$l \approx m_0 t + m_1 \sin(2\pi t/T), \tag{4.39}$$

где без потери общности положено $\varphi_1 = 0$. Функция, обратная (4.39), может быть определена только численным способом. Для нахождения обратной функции в аналитической форме введем две кусочно-линейные функции: мажорантную и минорантную для гармонического слагаемого в (4.39) (см. рис. 4.3). На интервалах вре-

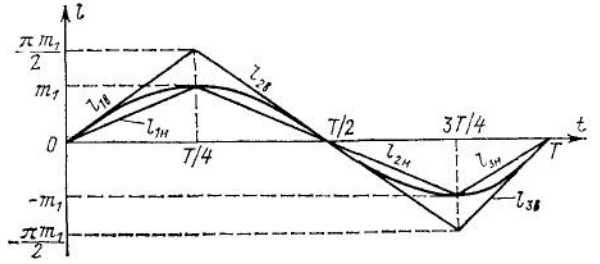


Рис. 4.3. Периодическая составляющая погрешности развертывания и граничные функции для нее

мени $[0, T/4]$, $[T/4, 3T/4]$, $[3T/4, T]$ указанные функции выражаются следующим образом:

$$l_{1\text{в}} = 2\pi m_1 t/T; \quad l_{2\text{в}} = \pi m_1 (1 - 2t/T); \quad l_{3\text{в}} = -2\pi m_1 (1 - t/T);$$
$$l_{1\text{н}} = 4m_1 t/T; \quad l_{2\text{н}} = 2m_1 (1 - 2t/T); \quad l_{3\text{н}} = -4m_1 (1 - t/T). \tag{4.40}$$

Используя указанные выражения, можно установить, что функция, обратная (4.39), заключена между следующими верхней и нижней границами:

$$t_{\text{в}} = \frac{T}{m_0 T + 2\pi m_1} l \prod_{0}^{\frac{m_0 T}{4} + \frac{\pi m_1}{2}} + \frac{T}{m_0 T - 2\pi m_1} (l - \pi m_1) \times$$

$$\times \prod_{\frac{m_0 T}{4} + \frac{\pi m_1}{2}}^{\frac{3m_0 T}{4} - \frac{\pi m_1}{2}} + \frac{T}{m_0 T + 2\pi m_1} (l + 2\pi m_1) \prod_{\frac{3m_0 T}{4} - \frac{\pi m_1}{2}}^{m_0 T}; \tag{4.41}$$

$$t_{\text{н}} = \frac{T}{m_0 T + 4m_1} l \prod_{0}^{\frac{m_0 T}{4} + m_1} + \frac{T}{m_0 T - 4m_1}(l - 2m_1) \times$$

$$\times \prod_{\frac{m_0 T}{4} + m_1}^{\frac{3m_0 T}{4} - m_1} + \frac{T}{m_0 T + 4m_1}(l + 4m_1) \prod_{\frac{3m_0 T}{4} - m_1}^{m_0 T} ;$$

$$\left(\prod_{\alpha}^{\beta} \equiv \prod_{\alpha}(t;\ \beta - \alpha)\right).$$

Подставив выражения $t_{\text{в}}$ и $t_{\text{н}}$ в (4.37), найдем оценки $\alpha_{\text{в}} = \alpha\,[t_{\text{в}}(l)] = \alpha_{\text{в}}(l)$ и $\alpha_{\text{н}} = \alpha\,[t_{\text{н}}(l)] = \alpha_{\text{н}}(l)$, которые представляют собой граничные функции для функции, выражающей зависимость полученной в результате регистрации диаграммы (осциллограммы) от длины. При расшифровке диаграммы основной или единственной операцией является отсчитывание значений. При этом предполагается постоянной скорость развертывания и, следовательно, линейной зависимость $l(t)$:

$$l = mt. \tag{4.42}$$

Зависимость от длины зарегистрированного сигнала с учетом (4.42) имеет вид: $\alpha = \alpha(l/m)$. Результирующая погрешность определения значений зарегистрированного сигнала находится в зоне, определяемой модулями разностей $\alpha(l/m) - \alpha_{\text{в}}(l)$ и $\alpha(l/m) - \alpha_{\text{н}}(l)$.

Период повторений T систематической составляющей погрешности развертывания определяется конструктивными параметрами развертывающего устройства. В электронных приборах он совпадает с периодом повторений импульсов запуска развертки. В электромеханических устройствах он обусловлен скоростью v протягивания ленты или бумаги и диаметром d ведущего вала (барабана): $T = 60\,\pi d/v$. С целью уменьшения погрешности развертывания используют периодические метки времени, т. е. сигналы, сформированные с помощью стабильного генератора и используемые в качестве градуировочных для зависимости $l(t)$. Очевидно, что метки времени уменьшают период повторений систематической составляющей погрешности развертывания и ее амплитуду.

Рассмотрим кратко особенности регистрирующих приборов.

Самопишущие приборы [83] предназначены для записи аналоговых электрических сигналов в диапазоне частот до 150—200 Гц. Оператор $\mathbf{B}_{\text{р}}$ самопишущего прибора в общем случае определяется передаточной функцией

$$W_{\text{р}}(p) = 1/(T_1 T_{\text{р}}^2 p^3 + T_{\text{р}}^2 p^2 + T_2 p + 1), \tag{4.43}$$

где $T_1 = \frac{L}{R_{\text{э}}}$; $R_{\text{э}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$; $T_{\text{р}}^2 = \frac{1}{\omega_0^2} = \frac{\mathcal{J}}{\mathcal{W}}$; $T_2 = \frac{1}{R_{\text{э}}}\left(L + \frac{k_{\text{р}}^2}{\mathcal{W}}\right)$; R_1 — входное сопротивление усилителя регистрируемого сигнала; R_2 — сопротивление резистора в эквивалентной электрической схеме, отражающего влияние успокоения, вносимого с целью улучшения динамических характеристик прибора; L — индуктивность входной цепи прибора; $\mathcal{J}$ — момент инерции подвижной части; $\mathcal{W}$ — удельный противодействующий (упругий) момент; $k_{\text{р}}$ — коэффициент пропорциональности вращающего момента $\mathcal{M}_{\text{вр}}$ току i в обмотке двигателя ($\mathcal{M}_{\text{вр}} = k_{\text{р}} i$); $k_{\text{р}}$ определяется конструкцией прибора.

Вывод выражения для $W_{\text{р}}(p)$ [83] основан на двух предположениях: а) механические потери в приборе пренебрежимо малы, т. е. коэффициент демпфирования P достаточно близок к нулю (степень успокоения прибора $\gamma = P/\left(2\sqrt{\mathcal{J}\mathcal{W}}\right)$ при разрыве внешней цепи составляет 0,1); б) активное сопротивление обмоток возбуждения пренебрежимо мало. Последнее тем более верно, чем выше частота регистрируемого сигнала. При регистрации сигналов в диапазоне частот не выше 50—70 Гц можно пренебречь величиной L, что приводит к существенному упрощению передаточной функции прибора (4.43): $W_{\text{р}}'(p) = 1/(T_{\text{р}}^2 p^2 + T_2 p + 1)$. Частотные характеристики прибора, соответствующие передаточной функции (4.43), имеют вид:

$$A(\omega) = \left[(1 - \eta^2)^2 + \omega_0^2 \eta^2 (T_2 - \eta^2 T_1)^2\right]^{-1/2}; \qquad \Phi(\omega) = \operatorname{arctg}\left[\omega_0 \eta \times (T_2 - \eta^2 T_1)/(1 - \eta^2)\right],$$

где $\eta = \omega/\omega_0$ — приведенная частота.

Импульсные и переходные характеристики прибора различны в зависимости от соотношений коэффициентов передаточной функции (4.43) и могут быть определены из табл. 2.1.

Статической характеристикой самопишущего прибора является зависимость выходной величины (как правило, угла поворота подвижной части α) от входной электрической величины (например, силы тока i) при условии, что подвижная часть находится в установившемся режиме [83]. Статическая характеристика определяется чувствительностью прибора по току: $S_{\text{угл}} = \alpha/i$. Для обеспечения линейной зависимости амплитуды диаграммы от силы тока $S_{\text{угл}}$ должна быть функцией α, в связи с чем вводится дифференциальная чувствительность $S_{\text{д}} = d\alpha/di$. При использовании на диаграммной бумаге координатной сетки с равномерными делениями по оси амплитуд средняя чувствительность, измеренная по диаграмме: $S_{\text{ср}} = l_k/i_k$, должна быть постоянной. Для выполнения условия $S_{\text{ср}} = \text{const}$ необходимо, чтобы

$$S_{\text{д}} = S_{\text{ср}} \frac{\alpha}{\sin\alpha} \cdot \frac{1}{r_0}, \tag{4.44}$$

где r_0 — радиус записи (плечо пишущего устройства). При записи «на ребре» (с резким перегибом диаграммной бумаги)

$$S_д = S_{ср}\frac{\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}\cdot\frac{1}{r_0}. \qquad (4.45)$$

Зависимость $i = i(\alpha)$, соответствующая формуле (4.44), в первом приближении имеет вид:

$$i = r_0(\alpha - \pi/2)/S_{ср}. \qquad (4.46)$$

Выражению (4.45) соответствует приближенная зависимость

$$i \approx r_0\alpha/(3S_{ср}). \qquad (4.47)$$

Приближения (4.46), (4.47) тем вернее, чем меньше угол отклонения α.

Схематически оценивание результатов и погрешностей измерений с регистрацией должно выглядеть следующим образом. Статические погрешности измерений оцениваются расчетным путем на основе нормированных статических характеристик приборов и данных об условиях измерений. Как отмечено в [83], статическую погрешность прибора легко определить экспериментально. Динамическая погрешность рассчитывается априорно (при выборе регистрирующего прибора) на основе известных характеристик с использованием соотношений для решения прямой задачи динамики (см. § 4.3). При расчете входной сигнал выбирается достаточно близким к регистрируемому на основе априорной информации о последнем. Расшифровка зарегистрированной диаграммы состоит в отсчитывании координат (α_k, l_k) ее точек и преобразовании полученной таким образом зависимости $\alpha(l)$ в зависимость $\alpha(t)$ с использованием соотношений (4.40) — (4.42). Далее при необходимости следует пересчитывать зависимость $\alpha(t)$ в искомое выражение (таблицу) $i(t)$ на основе (4.46) или (4.47). При необходимости уточнить априорную оценку динамической погрешности могут быть использованы соотношения, приведенные в § 4.3.

В светолучевом осциллографе динамика осциллографического гальванометра описывается с помощью уравнения [62]:

$$y'' + 2\gamma y' + y = y_д(\omega_0 t), \qquad (4.48)$$

где $y_д(\omega_0 t) = 2nL\mathscr{M}_{вр}(t)/\mathscr{W}$ — неискаженное отклонение луча светового указателя, точно соответствующее регистрируемой величине; n — коэффициент преломления успокаивающей жидкости; L — длина светового указателя.

Уравнению (4.48) соответствуют АЧХ и ФЧХ:

$$A(\omega) = [(1-\eta^2)^2 + 4\gamma^2\eta^2]^{-1/2}; \quad \Phi(\omega) = -\operatorname{arctg}[2\gamma\eta/(1-\eta^2)].$$

Оптимизация параметров гальванометра может быть произведена на основе соотношений, приведенных в работе [10]. С одной стороны, оптимальное значение γ, обеспечивающее максимальный частотный диапазон $T\omega_k$ при заданном симметричном поле допуска

с полушириной δ для АЧХ, и минимальная δ при заданном $T\omega_k$:

$$\gamma_{опт} \approx \sqrt{0{,}5\left(1-\sqrt{2\delta}\right)}; \qquad T\omega_к \approx \sqrt{(3{,}4-1{,}4\delta)\sqrt{\delta}}.$$

С другой стороны, при $\gamma = 0{,}75$ ФЧХ может быть хорошо аппроксимирована прямой линией $\Phi(\omega) = -0{,}5\pi\omega T$, которой соответствует легко устранимый постоянный сдвиг регистрируемого сигнала во времени на $\pi/2$.

Если установлено $\gamma = 0{,}75$ и верхняя граничная частота регистрируемого сигнала не превышает $0{,}2\,\omega_0$, то погрешности регистрации пренебрежимо малы: фазовые искажения отсутствуют, а амплитудные — не превышают 0,5 %. При установлении $\gamma_{опт}$ амплитудные и фазовые погрешности при регистрации примерно одинаковы [10].

В работе [10] получены также соотношения, связывающие погрешность отсчитывания мгновенных значений при расшифровке осциллограммы с параметрами осциллографа: скоростью движения бумаги v, полушириной линии записи (радиусом светового пятна) r, шириной записи d и погрешностью отсчитывания абсцисс Δl. Максимальная погрешность отсчитывания Δ_m и минимальная скорость v_{min}, обеспечивающая возможность отсчитывания с погрешностью, не превышающей заданную $\Delta_з$, выражаются следующим образом:

$$\Delta_m = \left[r\sqrt{(\pi d f_m)^2 + v^2} + d f_m \Delta l\right]/v;$$

$$v_{min} = \pi d f_m\left[\Delta_з\Delta l + r\sqrt{\Delta_з^2 - r^2 + (\Delta l)^2}\right]/(\Delta_з^2 - r^2),$$

где f_m — максимальная частота спектра регистрируемого сигнала.

Простой способ выбора гальванометра для записи импульсных сигналов приведен в сборнике [61]. Верхняя граничная частота гальванометра выбирается такой, чтобы за пределами полосы пропускания оказались гармоники сигнала с амплитудами, не превышающими допускаемой погрешности регистрации.

Наиболее существенной влияющей величиной при измерениях с помощью светолучевых осциллографов является температура окружающей среды, оказывающая воздействие на динамические характеристики осциллографических гальванометров [61]. Поскольку моделью динамических свойств гальванометра служит колебательное звено 2-го порядка, то его характеристика полностью определяется двумя параметрами: собственной частотой и степенью успокоения. Собственная частота изменяется с температурой незначительно, и основной эффект от влияния температуры связан с изменением степени успокоения. При жидкостном успокоении

$$\frac{d\gamma}{d\Theta} = \frac{dP}{d\Theta}\cdot\frac{1}{4\pi\mathscr{J}f}. \qquad (4.49)$$

Коэффициент успокоения

$$P = C\zeta\varphi, \qquad (4.50)$$

где C — конструктивная постоянная; ζ — динамическая вязкость; $\varphi = \varphi(\Theta)$ — функция влияния температуры Θ.

Из выражений (4.49) и (4.50) следует [61]:

$$\frac{d\gamma}{d\Theta} = \frac{C}{4\pi \mathcal{J} f}\left(\zeta \frac{d\varphi}{d\Theta_x} + \varphi_s' \frac{d\varepsilon}{d\Theta}\right). \qquad (4.51)$$

Если конструкция гальванометра обеспечивает выполнение условия термокомпенсации $(d\varphi/d\Theta) = (-\varphi/\zeta)(d\zeta/d\Theta)$, то температурная зависимость должна отсутствовать. При наличии термокомпенсации для расчета изменений γ в соотношение (4.51) следует подставить вместо φ «остаточную» (нескомпенсированную) функцию влияния.

Другим влияющим фактором являются вибрации. В работе [61] приведена методика расчета влияния вибраций на показания светолучевого осциллографа. Размахи отклонений светового пятна по шкале осциллографа с оптическим рычагом 300 мм равны

$$a_1 = 1{,}2 \cdot 10^{-4}\left[1 + \eta_п^2/(1-\eta_п^2)\right]\omega_п^2 x_{10} A_в;$$
$$a_2 = 1{,}2 \cdot 10^{-4}\left[1 + \eta_п^2/(1-\eta_п^2)\right]\omega_п^2 y_{10} A_в,$$

где $\eta_п = \omega_п/\omega_{0п}$; $\omega_п$ — угловая частота поперечных колебаний гальванометра; $\omega_{0п}$ — угловая частота поперечных собственных колебаний подвижной части гальванометра; x_{10}, y_{10} — амплитуды перемещений корпуса вдоль взаимно перпендикулярных осей; $A_в$ — динамическая восприимчивость подвижной части.

При частотах вынуждающей силы ω, больших $0{,}2\ \omega_0$ и меньших $2\ \omega_0$, $A_в$ практически не зависит от γ. В диапазоне приведенных частот η от 0,6 до 1 восприимчивость $A_в$ наиболее существенно зависит от γ, достигая максимума вблизи $\eta = 0{,}8$. В указанном диапазоне для ослабления влияния вибраций необходимо увеличивать степень успокоения. В сборнике [61] приведена методика расчета виброустойчивости гальванометра в области заданных частот и амплитуд вибраций.

В работе [62] показано, что уровень статических погрешностей пренебрежимо мал по сравнению с динамическими погрешностями. Там же указано, что осциллограмма, полученная с помощью светолучевого осциллографа, может оказаться сильно искаженной только на участках, где зарегистрированы значительные изменения сигнала за время порядка $0{,}5\ \pi/\omega_0$.

4.5. КОРРЕКЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ПОГРЕШНОСТЕЙ ИЗМЕРЕНИЙ

Указанное в названии раздела выражение следует понимать как сокращенное наименование операции, состоящей в коррекции результатов измерений, содержащих динамические погрешности, с целью исключения последних. Эта операция отличается от коррекции статических погрешностей. Коррекция статических погрешностей сводится к введению поправок в результат измерения. Коррекция динамических погрешностей, оставаясь по существу тем же самым, может быть осуществлена в общем случае лишь путем сложной обработки выходного сигнала устройства. Коррекцию этих погрешностей называют также «редукцией к идеальному прибору» [80] и «восстановлением неискаженного сигнала по искаженному» [13]. Ряд общих вопросов проблемы коррекции рассмотрен в работах [13, 77, 80]. В указанных книгах в качестве основной области приложений разрабатываемой теории предполагалась оптика, в частности, спектроскопия. Поэтому уравнения связи искаженного и неискаженного сигналов содержат не оператор Вольтерра, а оператор Фредгольма и аргументом используемых функций служит не временная, а пространственная переменная.

Скорректировать динамические погрешности означает (при отсутствии статических погрешностей) определить по выходному сигналу устройства $y(t)$ входной сигнал $x(t)$. Формально это означает решить операторное уравнение динамики средства измерений (1.27):

$$x(t) = \mathscr{B}^{-1}[y(t)], \qquad (4.52)$$

т. е. по существу найти обратный оператор устройства $\mathscr{B}^{-1}$. Задача обращения оператора $\mathscr{B}$ некорректно поставлена по Ж. Адамару, т. е. для нее не выполняется какое-либо из условий: а) решение существует, б) оно единственно и в) непрерывно зависит от исходных данных. Проблема корректности имеет два аспекта: теоретический и прикладной. Рассмотрим условия корректности применительно к задаче (1.27), (4.52).

Выходной сигнал средства измерений есть отклик на входной сигнал, поэтому решение существует. Вопрос о существовании не требует теоретического анализа, если только модель [уравнение динамики (1.27)] адекватна объекту (процессу преобразования сигнала в устройстве).

Теоретически, для того чтобы решение уравнения (1.27) с линейным оператором $\mathscr{B} \equiv B$ было однозначным, необходимо и достаточно, чтобы из равенства $Bz = 0$ следовало $z = 0$. Действительно, если x_0 — решение (1.27), т. е. $\mathbf{B}x_0 = y_0$, то для решения x_1 получим $y = \mathbf{B}x_1 = \mathbf{B}[x_0 + (x_1 - x_0)] = \mathbf{B}x_0 + \mathbf{B}(x_1 - x_0)$, откуда $\mathbf{B}(x_1 - x_0) = 0$ и, следовательно, $x_1 \equiv x_0$. Уравнение (1.27) в форме свертки (1.29) теоретически решается однозначно, так как из $g(t) * x(t) = 0$ для всех t следует $x(t) \equiv 0$. У реального устройства импульсная характеристика ограничена во времени, а полоса пропускания частот конечна. Из этого следует наличие либо нулевой АЧХ, либо областей, в которых она тождественно равна нулю. Поэтому решением уравнения (1.29) будет любая сумма действительного входного сигнала $x(t)$ и гармонических сигналов с частотами, при которых АЧХ равна нулю.

Непрерывная зависимость решения от исходных данных означает, что стремление $y \to 0$ (по норме [78]) обязательно влечет $x \to 0$ (по норме). При этом, если $y = \mathbf{B}x_0$, то из $y + \delta = \mathbf{B}x_1$ следует при $\delta \to 0$ $x_1 \to x_0$. Для уравнения свертки (1.29) непрерывная зависимость может отсутствовать. Пусть, например, $g(t) = \exp(-t)$, т. е. представляет собой импульсную характеристику устройства

с дифференциальным уравнением 1-го порядка, а входной сигнал $x(t) = \sin \omega t$, $t \geqslant 0$. Тогда $y(t) = [\omega \exp(-t) + \sin \omega t - \omega \cos \omega t]/(1 + \omega^2)$ и $\lim\limits_{\omega \to \infty} y(t) = 0$. Таким образом, указанные выше условия непрерывности могут быть удовлетворены при $x(t) = \sin \omega t$, $\omega \to \infty$. Это означает, что если исходные данные $[y(t)]$ содержат убывающую к нулю погрешность, то решение может содержать гармонические составляющие с неограниченно возрастающими частотами и неубывающими амплитудами.

Наличие погрешностей в исходных данных (оценках характеристик и выходного сигнала устройства) обостряет проблему неоднозначности и отсутствия непрерывной зависимости. К возможным ложным решениям добавляются те спектральные составляющие, отклики на которые не превышают по уровню погрешность опреде-

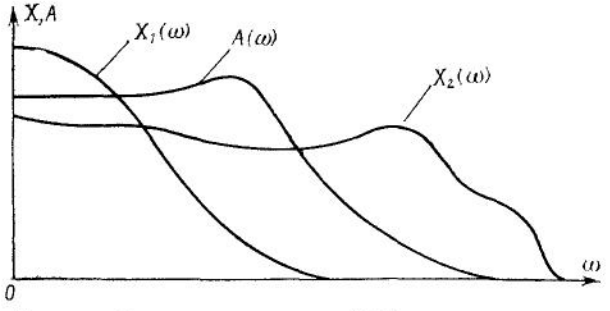


Рис. 4.4. Соотношение между АЧХ средства измерений и спектром входного сигнала

ления выходного сигнала. Снижение погрешностей исходных данных при ограниченной полосе пропускания, как показано выше, не гарантирует сходимости к истинному решению.

Если заранее известно, что спектр $x(t)$ находится целиком внутри полосы пропускания средства измерений (рис. 4.4), то проблемы неоднозначности в связи с коррекцией динамических погрешностей не возникает. Таким образом, однозначность решения обратной задачи (1.27), (4.52) существенно связана с объемом априорной информации при измерениях. Можно утверждать, что априорная информация всегда достаточна для снятия проблемы неоднозначности, иначе задача измерения не может быть поставлена. Действительно, при нормировании частотных свойств средства измерений чаще всего регламентируется рабочая полоса частот, что имеет целью задание условий, в которых гарантируются определенные точностные характеристики устройства. Таким образом, расположение спектра входного сигнала внутри полосы пропускания частот (рабочей полосы частот) есть по существу условие правильного применения устройства. Представляется естественным считать априорную информацию при измерениях достаточной для правильного применения устройства.

В практике выходной сигнал средства измерений $y(t)$ чаще всего представлен совокупностью своих мгновенных значений. Оператор **B** также может быть задан в дискретной форме. Поэтому точное уравнение (1.29) переходит в приближенное, например матричное. Как указано в работе [28], решение приближенного уравнения всегда неоднозначно и для снятия проблемы неоднозначности необходимо наложить ряд ограничений на множество возможных решений. Следует отметить, что дискретизация непрерывной кривой $y(t)$ (рис. 4.5) всегда приводит к повышению уровня высокочастотных составляющих в спектре дискретного сигнала $y(t_i)$ по сравнению с непрерывным. При избыточности числа отсчетов спектр

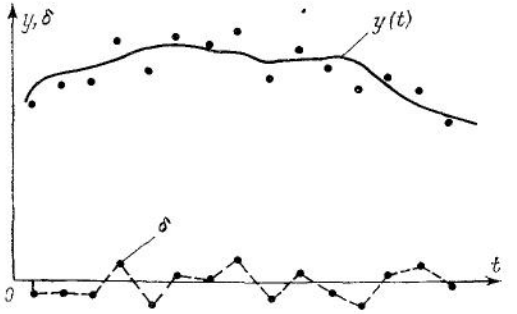


Рис. 4 5 Погрешность отсчитывания выходного сигнала

может выйти за пределы полосы пропускания средства измерений.

Рассмотрим далее пути решения уравнения (1.27) при различных формах задания оператора **B** Общая постановка задачи такова: требуется решить уравнение (1 27), если известны оценки оператора **B**, выходного сигнала $y(t)$ и нормы их погрешностей $\|\delta \mathbf{B}\|$, $\|\delta y\|$. Решение понимается как нахождение оценок входного сигнала x и нормы его погрешности $\|\delta x\|$ Погрешность $\delta \mathbf{B}$ есть либо погрешность нахождения оператора конкретного экземпляра устройства, либо допускаемое отклонение «конкретного» оператора от нормируемого для устройства данного типа. Погрешность δy есть погрешность определения $y(t)$, которая в общем случае состоит из погрешностей регистрации и отсчитывания. Погрешность δx есть погрешность коррекции, т. е. по существу погрешность определения динамической погрешности $\delta(t)$. Очевидно, что коррекция целесообразна лишь в том случае, когда $\|\delta x\| < \|\delta y\|/K$.

Комплексная область. В уравнении динамики (2.24) динамические свойства средств измерений представлены передаточной функцией $W(p)$ и известно преобразование Лапласа выходного сигнала $Y(p)$. Тогда изображение входного сигнала $X(p) = Y(p)/W(p)$. Решение (2.24) рассмотрено во многих работах (см., например, [16, 28, 40, 84, 96]), однако наиболее полно вопросы оценивания погрешностей отражены в статье [14]. Предполагается, что средство измерений представляет собой устойчивое линейное динамическое

звено с сосредоточенными параметрами. Входной, а следовательно, и выходной сигналы устройства имеют ограниченную вариацию и тождественно равны нулю при $t<0$. При этих условиях существует преобразование Лапласа

$$Y(p)=\int_0^\infty y(t)\exp(-pt)\,dt$$

и справедлива формула обращения Римана—Меллина

$$x(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}X(p)\exp(pt)\,dp, \qquad (4.53)$$

где $X(p)$ может быть получена из (2.24). При использовании формулы (4.53) $y(t)$ можно представить в виде суммы:

$$y(t)=y(t)_{\text{вын}}+y(t)_{\text{св}}+y(t)_{\text{рез}}, \qquad (4.54)$$

где в правой части представлены вынужденная, свободная и резонансная составляющие. Вынужденная составляющая выходного сигнала обеспечивает требуемое его соответствие входному сигналу, свободная составляющая представляет собой решение однородного дифференциального уравнения средства измерений, а резонансная составляющая определяется явлением комплексного резонанса. Представление выходного сигнала устройства в виде суммы (4.54) позволяет сформулировать необходимые условия его использования для измерений. Первое условие заключается в том, что интенсивность затухания свободных движений $y(t)_{\text{св}}$ должна превышать интенсивность затухания любого из возможных входных воздействий. В комплексной области это условие имеет вид:

$$-a<-b, \qquad (4.55)$$

где линия $-a=\mathrm{Re}(p)$ есть правая граница области особых точек $W(p)$, а линия $-b=\mathrm{Re}(p)$ есть левая граница области полюсов $X(p)$. При выполнении условия (4.55) области полюсов $W(p)$ и $X(p)$ не перекрываются, что гарантирует отсутствие комплексного резонанса. Второе условие есть условие малости выражения $\sup\limits_{0\leqslant t<\infty}|y(t)_{\text{вын}}-x(t)|$ для любого возможного входного воздействия. Это условие выполняется лишь в случае, если достаточно компактным является отображение области полюсов $X(p)$ на плоскость искажений $\varkappa_0=\varkappa_0(p)$, где функция искажений $\varkappa_0(p)=W(p)-1$. Если входной сигнал $x(t)$ ищется с точностью до постоянного временного сдвига τ, то в приведенных выше выражениях вместо $\varkappa_0(p)$ используется функция $\varkappa_\tau(p)=W(p)-\exp(p\tau)$.

Рассмотрим особенности практического решения задачи коррекции при задании (нормировании) передаточной функции средства измерений. Чаще всего передаточная функция представляется в аналитической форме. Выходной сигнал $y(t)$, как правило, представлен в виде некоторой кривой записи во временной области. Преобразование $y(t)$ в комплексную область может быть проделано

двумя путями. Во-первых, можно на основе полученных при отсчитывании значений выходного сигнала аппроксимировать его аналитическим выражением. Затем, используя таблицы преобразования Лапласа, можно перейти к изображению $Y(p)$. Во-вторых, от дискретного представления выходного сигнала в виде совокупности отсчитанных значений можно перейти к дискретному представлению его в комплексной области на основе дискретного преобразования Лапласа или Z-преобразования [39]. Далее возможны два варианта: либо продолжать оперировать с дискретными представлениями и в результате прийти к дискретному представлению искомого сигнала $x(t)$, либо переходить к непрерывному представлению $X(p)$ и, следовательно, $x(t)$, используя известные соотношения между непрерывным и дискретным преобразованиями Лапласа [39].

Частотная область. Если известны амплитудный $Y(\omega)$ и фазовый $\Psi(\omega)$ спектры выходного сигнала $y(t)$, то соответствующие характеристики входного сигнала $X(\omega)$ и $\chi(\omega)$ находятся по формулам:

$$X(\omega)=Y(\omega)/A(\omega); \qquad \chi(\omega)=\Psi(\omega)-\Phi(\omega). \qquad (4.56)$$

Если устройство минимально-фазовое, то можно оперировать лишь с амплитудными спектрами и использовать только первую из этих формул. При этом целесообразно представлять временные функции как четные и переходить от общего выражения (1.6) к косинус-преобразованию Фурье [39].

Переход от полученной экспериментально записи выходного сигнала $y(t)$ к спектру $Y(\omega)$ может осуществляться следующим образом. Пусть отсчитывание значений $y(t)$ (дискретизация) производится с периодом Δt. При этом вместо представления $y(t)$ с помощью интеграла Фурье (1.6) получим ряд Фурье:

$$Y_{\text{д}}(j\omega)=\sum_{k=0}^{\infty}y(k\Delta t)\exp(-j\omega k\Delta t). \qquad (4.57)$$

Амплитудный и фазовый спектры $y(k\Delta t)$, равные

$$Y_{\text{д}}(\omega)=\sqrt{\sum_{k=0}^{\infty}y^2(k\Delta t)+2\sum_{i>j}\sum y(i\Delta t)\,y(j\Delta t)\cos|(i-j)\,\omega\Delta t|}\,; \qquad (4.58)$$

$$\Psi_{\text{д}}(\omega)=\operatorname{arctg}\left[\sum_{k=0}^{\infty}y(k\Delta t)\sin k\,\omega\Delta t\Big/\sum_{k=0}^{\infty}y(k\Delta t)\cos k\,\omega\Delta t\right],$$

должны быть подставлены в (4.56). Реальные сигналы имеют конечную длительность, поэтому в качестве верхних пределов всех сумм в (4.57) — (4.58) следует подставить $N<\infty$. В следующих частных случаях число N может быть связано с погрешностью отсчитывания значений $y(t)$:

1) $x(t)$ — финитный сигнал, и $N=0/\Delta t$, где 0 определяется как максимальный корень уравнения $y(t)=\delta_{\text{отсч}}$ ($\delta_{\text{отсч}}$ — погрешность отсчитывания);

2) $x(t)$ — сигнал с установившимся значением, и $N = \theta/\Delta t$, где θ определяется как максимальный корень условного уравнения $|y_{уст} - y(t)| = \delta_{отсч}$ при условии $|y_{уст} - y(t)| < \delta_{отсч}$ для $t > \theta$ ($y_{уст}$ — установившееся значение $y(t)$);

3) $x(t)$ — периодический сигнал, и $N = \theta/\Delta t$, где θ определяется как максимальное значение, удовлетворяющее условному неравенству $|y_{m\,уст} - y_m(t)| \leqslant \delta_{отсч}$ при условии $|y_{m\,уст} - y_m(t)| < \delta_{отсч}$ для $t > \theta$ ($y_m(t)$, $y_{m\,уст}$ — соответственно текущее и установившееся значения амплитуды выходного сигнала при его установлении). В общем случае число N определяется интервалом наблюдения выходного сигнала θ и периодом дискретизации Δt. Для сигналов сложной формы период Δt должен быть не больше половины минимального интервала времени между соседними относительными экстремумами сигнала.

В статье [3] метод регуляризации в частотной области использован для определения $x(t)$ из (1.29). Решение (1.29) ищется на основе преобразования Фурье:

$$X_\alpha(j\omega) = K_\alpha^{-1}(j\omega)\, Y(j\omega), \tag{4.59}$$

где $K_\alpha^{-1}(j\omega) = K(-j\omega)/[A(\omega) + \alpha(\omega^2 + q)]$; α, q — малые постоянные числа.

Регуляризация состоит в замене функции $K^{-1}(j\omega)$ функцией $K_\alpha^{-1}(j\omega)$, что позволяет сгладить решение, т. е. отфильтровать высокочастотные компоненты, обусловленные некорректностью задачи. Преобразование (4.59) к виду

$$X_\alpha(j\omega) = \frac{A(\omega)}{A(\omega) + \alpha(\omega^2 + q)}\, X(j\omega)$$

показывает, что регуляризация эквивалентна пропусканию сигнала $X(j\omega)$ — решения некорректной задачи — через стабилизирующий фильтр с АЧХ, равной $A(\omega)/[A(\omega) + \alpha(\omega^2 + q)]$. Регуляризованное решение

$$x_\alpha(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} K_\alpha^{-1}(j\omega)\, Y(j\omega) \exp(j\omega t)\, d\omega.$$

Разность $\delta x_\alpha = x_\alpha(t) - x(t)$ для устройства с сосредоточенными параметрами, у которого $K(j\omega)$ при $\omega \to \infty$ убывает как a/ω^n, где n — целое число ($n > 0$; $a > 0$), равна:

$$\delta x_\alpha \approx \frac{1}{2n+2} \left(\frac{\alpha}{a^2}\right)^{1/(2n+2)} \left(\frac{\sin[\pi/(2n+2)] + \sin[3\pi/(2n+2)]}{1 + \cos[\pi/(n+1)]}\right) x'(t). \tag{4.60}$$

Для устройства с распределенными параметрами, у которого $K(j\omega) = K\exp[-(aj\omega)^{1/m}]$, где $K > 0$; $m > 1$ имеем

$$\delta x_\alpha \approx \frac{a^3}{6\pi} \left\{\frac{2\cos[\pi/(2m)]}{\ln(a^2K^2/\alpha}\right\}^{3m} [qx'(t) - x^{(3)}(t)]. \tag{4.61}$$

Выражения (4.60), (4.61) получены в предположении [3], что сигнал $y(t)$ известен точно. Если к $y(t)$ добавлен белый шум со спектральной плотностью мощности $\sigma^2\delta(t)$, то для указанных выше категорий средств измерений получаются следующие выражения квадрата амплитуды шума найденного сигнала:

$$s^2 \approx \frac{\sigma^2\delta(t)}{2(n+1)^2} \cdot \frac{a^{-1/(n+1)}}{\sin[\pi/(2n+2)]} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{2n+1}{2n+2}}; \tag{4.62}$$

$$s^2 \approx \frac{m}{8\sqrt{\pi}\,(a\omega_0)^{1/m}\cos[\pi/(2m)]\,\alpha\omega_0}\, \sigma^2\delta(t). \tag{4.63}$$

Из (4.62), (4.63) следует, что при $\alpha \to 0$ амплитуда шума в регуляризованном сигнале неограниченно возрастает. В то же время искажения, вносимые регуляризацией, при $\alpha \to 0$ убывают к нулю. Оптимальные значения $\alpha_{опт}$ параметра регуляризации α соответствуют равенству указанных искажений и шума. Для рассмотренных категорий устройств

$$\alpha_{опт} = a^{\frac{|2}{2n+3}} \left\{\frac{2\sigma^2\delta(t)}{[x'(t)]^2} \times \frac{1 + \cos[\pi/(n+1)]}{\sin[\pi/(2n+2)]\{\sin[\pi/(2n+2)] + \sin[3\pi/(2n+2)]\}}\right\}^{\frac{2n+2}{2n+3}};$$

$$\alpha_{опт} \approx \frac{9\pi^{3/2} m\sigma^2\delta(t)}{a^5[qx'(t) - x^{(3)}(t)]} \cdot \frac{[\ln(K^2a^2/\alpha_{опт})]^{5m-1}}{\{2\cos[\pi/(2m)]\}^{5m}}.$$

При $\alpha = \alpha_{опт}$ амплитуды погрешностей нахождения сигнала $x(t)$ методом регуляризации равны:

$$\delta_m = \frac{|z'(t)|}{2n+2} \left(\frac{\alpha_{опт}}{a^2}\right)^{1/(2n+2)} \times \left|\frac{\sin[\pi/(2n+2)] + \sin[3\pi/(2n+2)]}{1 + \cos[\pi/(n+1)]}\right|;$$

$$\delta_m = \frac{a^3}{6\pi} \left\{\frac{2\cos[\pi/(2m)]}{\ln(a^2K^2/\alpha_{опт})}\right\}^{3m} |qx'(t) - x^{(3)}(t)|.$$

Метод регуляризации с использованием в качестве стабилизирующего нерекурсивного фильтра с гладкими монотонно затухающими частотными характеристиками рассмотрен в работе [63]. В статье [43] описана регуляризация (1.27) в частотной области с использованием обратного оператора

$$K_\alpha^{-1}(j\omega) = \frac{1}{1 + \alpha\omega^4} K^{-1}(j\omega)$$

и применением быстрого преобразования Фурье.

Временная область. Оператор $\mathcal{B}$ во временной области может быть задан либо как дифференциальный [дифференциальное уравнение (1.31)], либо как интегральный [интегральное уравнение (1.28) или (2.3) с импульсной или переходной характеристикой в качестве ядра].

Определению входного сигнала по известным выходному сигналу и дифференциальному уравнению средства измерений посвящена работа [72]. Предложенный в ней способ сводится к следующему. Если устройство не содержит дифференцирующих звеньев, то его дифференциальное уравнение имеет вид:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}(t) = x(t). \tag{4.64}$$

Если $y(t)$ задан как непрерывная функция времени, то, подставляя эту функцию в (4.64), где все коэффициенты a_i ($i = 0, 1, \ldots, n$) известны, получим искомый входной сигнал $x(t)$. В общем случае, когда дифференциальное уравнение устройства имеет вид (1.31), решение задачи расчленяется на два этапа. Обозначив правую часть уравнения (1.31)

$$z = \sum_{k=0}^{m} b_k x^{(k)}(t), \tag{4.65}$$

запишем его в виде

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}(t) = z(t), \tag{4.66}$$

эквивалентном (4.64). Находя описанным выше способом $z(t)$ из (4.66), переходим затем к (4.65), т. е. к решению прямой задачи динамики.

Как указано в статье [67], при постановке задачи в работе [72] игнорируется ее некорректность. Поэтому предложенный способ может быть использован лишь для теоретического анализа, когда $y(t)$ задан в аналитической форме и не содержит погрешностей. Аналогичное можно заметить относительно [99], где предложено путем дискретизации переходить от интегрального оператора к матричному и где не упоминается о плохой обусловленности полученного матричного уравнения.

Конкретный регуляризирующий метод нахождения $x(t)$ из интегрального уравнения (1.29) — метод сопряженных функций — разработан в работе [28]. Принцип метода состоит в том, что для определения любого значения $x(t)$ на интервале времени наблюдения $[0, \theta]$ используются все значения $y(t)$ на этом интервале. В частности, значение $y_1 = y(t_1)$ будет использовано для определения $x_2 = x(t_2)$, где $t_1 < t_2$, т. е. «будущего значения» входного сигнала. Следовательно, метод является аналогом физически неосуществимой фильтрации. При этом используется тот факт, что, несмотря на отсутствие причинной связи между x_2 и y_1, существует формальная связь между ними, обусловленная детерминированностью сигнала $x(t)$, т. е. причинной связью между x_2 и $x_1 = x(t_1)$. Таким образом, оказывается, что y_1 содержит информацию об x_2, которую можно использовать для коррекции погрешностей (фильтрации).

В соответствии с методом решение представляется путем разложения по ортонормальному полному в $\mathcal{L}_2$ базису $\{\varphi_i\}$:

$$\tilde{x}(t) = \sum_i a_i \varphi_i(t), \tag{4.67}$$

где

$$a_i = \int_0^\theta y(t)\, p_i(t)\, dt, \quad i = 1, \ldots, n.$$

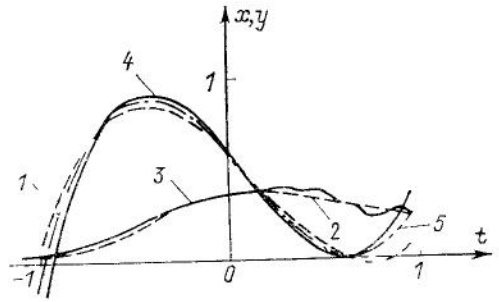


Рис. 4.6. Результаты проверки метода сопряженных функций

1 — действительный входной сигнал; *2* — действительный выходной сигнал модели; *3* — выходной сигнал, искаженный шумами; *4* — оценка входного сигнала при $\sigma = 0{,}1$; — оценка входного сигнала при $\sigma = 0{,}01$

Ряд (4.67) есть ряд Фурье, а весовые функции p_i определяются из сопряженного к (1.29) уравнения:

$$\int_t^\theta g(t-\tau)\, p_i(\tau)\, d\tau = \omega(t)\, \varphi_i(t).$$

Использование множителя $\omega(t)$ означает, что базис $\{\varphi_i\}$ ортонормален на $[0, \theta]$ с весом. Это позволяет отказаться от требования $\varphi_i(\theta) \neq 0$ и обеспечивает устойчивость задачи при $t \to 0$. При выборе $\omega(t) = 1 - t^2$ можно использовать базис:

$$\varphi_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \varphi_1 = \frac{\sqrt{15}}{2} t; \quad \varphi_2 = \frac{\sqrt{21}}{4\sqrt{2}} (5t^2 - 1); \quad \ldots$$

$$\varphi_3 = \frac{3\sqrt{5}}{4\sqrt{2}} (7t^2 - 3t), \quad \ldots,$$

полученный из степенного ряда $1, t, t^2, \ldots$ с помощью ортогонализации по Грамму—Шмидту.

Проверка метода проведена путем моделирования. Отклик $y(t)$ динамического звена с импульсной характеристикой $g(t) =$

$= \alpha \exp(-\alpha t)$ на сигнал $x(t) = \sum_{i=0}^{3} b_i t^i$ определен на дискретном множестве значений t_k ($k = 0, 1, \ldots, 80$). Рассмотрены два случая воздействия гауссовой (0, σ) аддитивной помехи $\xi(t)$ на входе и выходе звена. На рис. 4.6 приведены в качестве примера графики сигналов $x(t)$, $y(t)$, $y(t) + \xi(t)$ и решения $\tilde{x}(t)$.

Если рассматривать метод сопряженных функций как способ коррекции амплитудных и фазовых искажений сигнала в звене с АЧХ $A(\omega) = 1/\sqrt{1+\nu^2}$, где $\nu = \omega/\alpha$, то можно заметить следующее. Сигнал $x(t)$ задан в виде функции на интервале $[-1, 1]$. Если продолжить его периодическим образом на всю ось, то центральная частота $\omega_0 = 4\pi/\alpha$. При $\alpha = 0{,}7$ $\nu_0 \approx 18$, и $A(\nu_0) \approx \approx 5{,}6 \cdot 10^{-2}$. Это означает, что метод позволяет использовать звено в области частот, где АЧХ составляет всего около шести процентов от исходного уровня при низких частотах. Таким образом, математическая коррекция результатов измерений по методу сопряженных функций позволяет в десятки раз расширить диапазон частот, в котором может быть использовано средство измерений.

Программы для обработки данных на ЭВМ «М-20» по методу сопряженных функций приведены в работе [28].

Метод [28] разработан для устройств с импульсными характеристиками, удовлетворяющими условию $g(0) \neq 0$. Он может быть распространен на средства измерений с $g(0) = 0$ и на устройства с параметрами, изменяющимися в течение времени наблюдения.

4.6. ПРИМЕРЫ. ПОГРЕШНОСТИ ОСЦИЛЛОГРАФИРОВАНИЯ, РЕГИСТРАЦИИ КРИВЫХ НАМАГНИЧИВАНИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СИГНАЛОВ УДАРНЫХ УСКОРЕНИЙ

Погрешности осциллографирования. Погрешность воспроизведения переменного сигнала на экране электронно-лучевого осциллографа складывается из составляющих, присущих любому измерительному преобразованию, и составляющих, характерных именно для этой категории измерительных устройств. К первой группе составляющих следует отнести погрешности, обусловленные взаимодействием осциллографа с источником входного сигнала; помехами, воздействующими на вход, и внутренними шумами; динамическими свойствами осциллографа. Ко второй группе относятся погрешности, обусловленные нелинейностью развертки, неидеальностью формирования меток времени, ненулевой апертурой луча и ее изменениями по экрану (неидеальностью фокусировки), нестабильностью момента запуска развертки и несовершенством синхронизации.

Входные цепи современных осциллографов характеризуются следующими диапазонами значений параметров: сопротивление $R_{вх} = 0{,}1 \div 10$ МОм, емкость $C_{вх} = 2 \div 60$ пФ. Эти значения обеспечивают в большинстве случаев отсутствие заметной реакции источника на подключение осциллографа, за исключением особых случаев исследований генераторов тока. В указанных случаях вследствие преимущественно активного характера входного полного сопротивления осциллографа в широком диапазоне частот его воздействие на источник приводит лишь к уменьшению уровня входного сигнала по сравнению с сигналом ненагруженного источника. Коэффициент масштабного преобразования сигнала равен $R_{вх}/(R_{вх} + R_{ист})$, где $R_{ист}$ — выходное сопротивление источника (которое также предполагается чисто активным). Таким образом, случаи «динамических» искажений (искажений

формы) исследуемого сигнала сравнительно редки и связаны с использованием осциллографа на пределе его частотного диапазона. Однако в этих случаях можно учесть указанные искажения путем введения в выходную цепь источника фиктивных пересчитанных параметров входной цепи осциллографа.

Внутренние шумы осциллографа составляют одну из причин формирования ненулевой апертуры луча (ненулевой ширины линии на экране). В зависимости от качества фокусировки ширина линии колеблется в пределах от долей миллиметра до 1—2 мм, чему соответствует минимальная относительная погрешность отсчитывания значений по изображению на экране порядка десятой доли процента. Другие специфические составляющие погрешности у современных осциллографов находятся на уровне 1—10 %. При воспроизведении сигналов, спектр которых целиком находится в рабочей полосе пропускания частот осциллографа, эти погрешности превалируют. Однако они в значительной мере могут быть устранены путем калибровки используемого экземпляра осциллографа. Речь идет о калибровке как по уровню с помощью стабилизированного источника постоянного напряжения, так и по времени с помощью образцовой меры частоты (времени). Калибровка позволяет свести статические погрешности воспроизведения (преобразования) сигнала к значениям, определяемым геометрическими размерами изображения и апертуры.

Динамические искажения сигнала при его преобразовании в изображение обусловлены динамическими свойствами осциллографа. Эти погрешности существенны при высокой требуемой точности преобразования и при исследовании относительно широкополосных сигналов. Оценивание динамических погрешностей осциллографа осложняется тем, что в соответствии с принятым способом нормирования его динамических свойств в документации регламентируется не полная характеристика осциллографа, а параметры его переходной характеристики или отклика на прямоугольный импульс: длительность фронта, выброс и неравномерность вершины. Поэтому даже априорное оценивание погрешности осциллографических измерений представляет собой нетривиальную задачу.

В статье [27] предложена методика расчета выходного сигнала осциллографа (кривой на экране) и оценивания ширины зоны неопределенности этого сигнала. Методика предусматривает использование в качестве исходных данных нормированных частных динамических параметров осциллографа. С помощью этих параметров строится зона (названная в [27] «рукавом»), содержащая переходную характеристику любого осциллографа данного типа. Конкретная переходная характеристика представляется в форме $h(t) = \overline{h}(t) + h_0(t)$, где $\overline{h}(t)$ — средняя кривая зоны, а $h_0(t)$ — допускаемое отклонение от нее, ограниченное по модулю $|h_0(t)| \leqslant \Delta h(t)$. Пределы допускаемых отклонений $\Delta h(t)$ для различных интервалов времени устанавливаются на основе нормированных параметров. Таким образом, получается рукав для переходной характеристики с переменной шириной $\Delta h(t)$. Для заданного входного сигнала $x(t)$ с помощью уравнения свертки в форме (2.3) находится соответствующий рукав выходного сигнала: $y(t) = \overline{y}(t) + y_0(t)$, где $\overline{y}(t) = \overline{h}(t) * x'(t)$; $y_0(t) = h_0(t) * x'(t)$. Рукав для выходного сигнала описывается неравенствами:

$$\boldsymbol{y}_н(t) \leqslant y(t) \leqslant y_в(t),$$

где $y_{в,\,н}(t) = y(t) \pm s(t)$; $s(t) = \Delta h(t) * |x'(t)|$.

На граничных кривых «рукавов» для импульсов и сигналов с ненулевым установившимся значением вводятся вспомогательные параметры: $\theta_{0,\,5\,н}$, $\theta_{0,\,5в}$, $y_{вт}$, $y_{нт}$, $\theta_{ф\,н}$, $\theta_{ф\,в}$, смысл которых ясен из рис. 4.7. С помощью этих параметров оцениваются следующие погрешности:

преобразования —

$$\delta(t) \leqslant \max(|y_в(t) - x(t)|,\ |\boldsymbol{y}_н(t) - x(t)|);$$

измерения амплитуды импульса A —

$$\delta A \leqslant \max[|(\boldsymbol{y}_{вт} - A)/A|,\ |(\boldsymbol{y}_{нт} - A)/A|];$$

измерения длительности импульса $\theta_{0,5}$ на уровне 0,5 от амплитудного —

$$\delta\theta_{0,5} \leqslant \max\left[\left|(\theta_{0,5в}-\theta_{0,5})/\theta_{0,5}\right|,\ \left|\theta_{0,5н}-\theta_{0,5})/\theta_{0,5}\right|\right];$$

измерения длительности фронта $\theta_ф$ (между уровнями 0,1 и 0,9 относительно установившегося уровня) —

$$\delta\theta_ф \leqslant \max\left[\left|(\theta_{ф\,в}-\theta_ф)/\theta_ф\right|,\ \left|(\theta_{ф\,н}-\theta_ф)/\theta_ф\right|\right].$$

Указанные погрешности рассчитаны для трех групп осциллографов, характеризуемых (для сопоставимых интервалов времени) различными уровнями пределов $\Delta h\ (t)$: 0,03; 0,05 и 0,1 и десяти сигналов типовых форм. Импульсные сигналы включают в себя симметричные импульсы: прямоугольный, треугольный, трапецеидальный, колоколообразный, экспоненциальный, с изменением по закону $\sin^2 t$ и аналогичный с плоской вершиной. Вторая

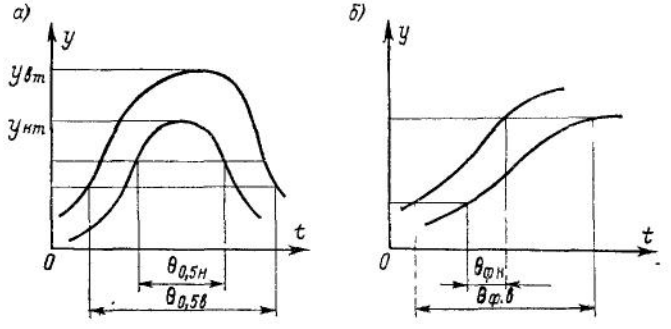


Рис. 4.7. Граничные кривые и вспомогательные параметры для импульсного (*а*) и монотонно нарастающего (*б*) испытательных сигналов

группа содержит сигналы с установлением к ненулевому значению: линейным, экспоненциальным и по закону $\sin^2 t$. Погрешности рассчитаны для различных соотношений параметров сигналов.

Погрешности регистрации кривых намагничивания [57]. Кривая намагничивания, т. е. зависимость относительной намагниченности J/J_s от относительной напряженности магнитного поля H/H_m, записывается на двухкоординатном самопишущем приборе. Регистрация J/J_s осуществляется по каналу Y, а H/H_m — по каналу X. В общем случае оба канала моделируются апериодическими звеньями с постоянными времени T и T'. Для записи квазистатической кривой намагничивания формируется магнитное поле, медленно изменяющееся со скоростью $v = \dfrac{d}{dt}(H/H_m)$. Упрощенная регистрируемая кривая представлена на рис. 4.8 (ломаная линия). На линейном участке кривой намагничивания $J/J_s = \varkappa_н H/H_m$, где $\varkappa_н$ — нормализованная магнитная восприимчивость ($0 \leqslant \varkappa_н < \infty$).

Если H/H_m изменяется в промежутке $[-1, 1]$ линейно с постоянной скоростью v_0, то

$$J/J_s = -1 + \varkappa_н v_0 t; \quad H/H_m = -\frac{1}{\varkappa_н} + v_0 t;$$

$$y = -1 + \varkappa_н v_0 t - \varkappa_н v_0 T\left[1 - \exp\left(-t/T\right)\right]; \quad x = -1/\varkappa_н + v_0 t - v_0 T',$$

при $0 \leqslant t \leqslant 2\ (\varkappa_н v_0)$;

$$J/J_s = 1; \quad H/H_m = \frac{1}{\varkappa_н} + v_0 t'; \quad y = 1 - \varkappa_н v_0 T\left(1 - \exp\left[-2/(\varkappa_н v_0 T)\right]\right) \times$$

$$\times \exp\left(-t'/T\right); \quad x = 1/\varkappa_н + v_0 t' - v_0 T',$$

при $0 \leqslant t' < \infty$, $t' = t - 2/(\varkappa_н v_0)$.

Значения t и t' отсчитаны от моментов времени, соответствующих точкам A и B. На рис. 4.8 изображена кривая намагничивания (записанная при постоянной скорости изменения $(H/H_m)\,(t) = v = v_0$), искаженная динамической погрешностью $\delta_{дн\,н}$, равной $y - J/J_s$. При идентичных по динамическим свойствам каналах Y и X ($T = T'$) среднее квадратическое значение погрешности

$$\delta_{с\ кв} = \sqrt{\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left[\delta_{дн\,н}(x)\right]^2 dx}$$

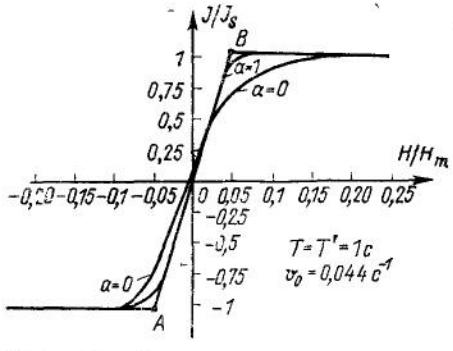


Рис. 4.8. Результаты регистрации кривой намагничивания

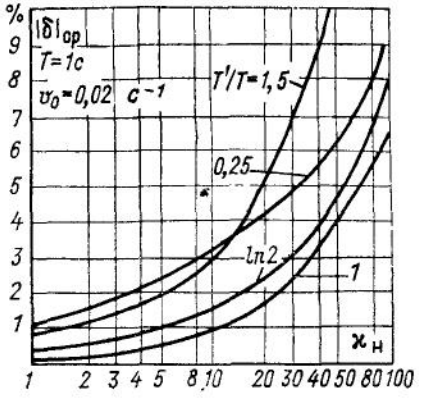


Рис. 4.9. Погрешности регистрации кривых намагничивания

равно:

$$\delta_{с\ кв} = \begin{cases} \varkappa_н\sqrt{v_0^3 T^3\left\{9{,}76\cdot 10^{-2} - 1{,}32\cdot 10^{-1}\exp\left[-2/(\varkappa_н v_0 T)\right]\right\}}, \\ \varkappa_н \leqslant 2\ (v_0 T), \\ \left\{-1{,}33/\varkappa_н - \varkappa_н v_0^2 T' + \varkappa_н^2 v_0^3 T^3\left[1 - \exp\left[-2/(\varkappa_н v_0 T)\right]\right]\right\} \times \\ \times\left\{0{,}13 + 0{,}37\exp\left[2/(\varkappa_н v_0 T)\right]\right\}^{\frac{1}{2}}, \quad \varkappa_н \quad 2\ (v_0 T) \end{cases}$$

Для неидентичных каналов ($T \neq T'$) на рис. 4.9 показаны зависимости $\delta = \delta_{с\ кв}(\varkappa_н)$ для различных соотношений T'/T.

При регистрации ступенчатой кривой намагничивания ($\varkappa_н \to \infty$)

$$J/J_s = 1; \quad H\ H_m = v_0 t; \quad y = 1 - 2\exp\left(-t/T\right); \quad \lambda = v_0 t - v_0 T,$$

и погрешность представляется выражением:

$$\delta_{с\ кв} = \sqrt{v_0\left[2T' - 3T + 4T\exp\left(-T'/T\right)\right]}, \qquad (4\ 68)$$

достигающим минимума при $T' = T\ln 2$.

Погрешность регистрации может быть уменьшена с помощью адаптивного управления скоростью по закону:

$$v = \begin{cases} v_0 - a\left|\frac{dy}{dt}\right|, & v_0 \geqslant a\left|\frac{dy}{dt}\right|, \\ 0, & v_0 \leqslant a\left|\frac{dy}{dt}\right|. \end{cases}$$

Расчет переходных процессов регистрации кривой намагничивания в этом случае дает следующие результаты (см. рис. 4.8):

для первого излома A кривой (скачка намагниченности) —

$$\frac{H}{H_m} = \frac{v_0}{1+a|\varkappa_н|}\left\{t - \frac{1+a|\varkappa_н|}{v_0|\varkappa_н|} + T_1 a|\varkappa_н|[1-\exp(-t/T_1)]\right\};$$

$$\frac{J}{J_s} = \varkappa_н \frac{H}{H_m};$$

$$x = \frac{v_0}{1+a|\varkappa_н|}\left\{t + \frac{T'(T'-T)}{T_1-T} - \frac{1+a|\varkappa_н|}{v_0|\varkappa_н|} + \frac{a|\varkappa_н|T_1^2}{T_1-T'} \times \right.$$

$$\left. \times [1-\exp(-t/T_1)] + \frac{a|\varkappa_н|T'^2\exp(-t/T')}{T_1-T'}\right\};$$

$$y = \frac{v_0\varkappa_н}{1+a|\varkappa_н|}\left\{t - \frac{1+a|\varkappa_н|}{v_0|\varkappa_н|} - T_1[1-\exp(-t/T)]\right\}, \qquad (4.69)$$

где $T_1 = T/(1+a\varkappa_н)$;

для второго излома B кривой —

$$H/H_m = \frac{1}{\varkappa_н} + v_0 t' - v_0 T_1 a|\varkappa_н|[1-\exp(-t/T)]; \qquad J/J_s = 1;$$

$$x = \frac{1}{\varkappa_н} + v_0 t' - \frac{a|\varkappa_н|v_0 T_1 T}{T-T'}[1-\exp(-t'/T)] - \frac{v_0 T'(T_1-T')}{T-T'} \times$$

$$\times[1-\exp(-t'/T')] - \frac{v_0 T'\exp(-t/T')}{1+a|\varkappa_н|}; \qquad y = 1 - v_0\varkappa_н T_1\exp(-t'/T); \qquad (4.70)$$

$$t' = t - 2/(\varkappa_н v_0);$$

при $T = T'$

$$x = \frac{1}{\varkappa_н} + v_0 t' - \frac{v_0 T(1+2a|\varkappa_н|)}{1+a|\varkappa_н|} + \frac{v_0 a|\varkappa_н|}{1+a|\varkappa_н|}(2T+t') \times$$

$$\times \exp(-t'/T). \qquad (4.71)$$

На рис. 4.8 изображены кривая намагничивання, записанная в режиме с адаптивным управлением скоростью при $a=1$, и точки, отвечающие значениям, рассчитанным с помощью выражений (4.69) — (4.71). Различие экспериментальных и теоретических данных не превышает 2 %. Таким образом, адаптивное управление скоростью изменения перемагничивающего поля позволяет минимизировать погрешность регистрации кривой намагничивания.

Погрешности преобразования сигналов ударных ускорений [68]. Преобразование сигналов ударных ускорений в электрическое напряжение осуществляется с помощью пьезоэлектрических измерительных преобразователей, моделью которых служит колебательное звено с дифференциальным уравнением

$$y''(\bar{t}) + 2\gamma z y'(\bar{t}) + z^2 y(\bar{t}) = x(\bar{t}), \qquad (4.72)$$

где $\bar{t} = t/\theta$ — безразмерное время; θ — длительность импульса ударного ускорения; $x(\bar{t})$ — воздействующее усилие на единицу массы (ускорение); $z = \omega_0\theta$.

По методу функции Грина решение уравнения (4.72) выражается интегралом свертки:

$$y(\bar{t}) = \frac{1}{z_1}\exp(-z\gamma\bar{t})\int_0^{\bar{t}} x(\tau)\exp(z\gamma\tau)\sin[z_1(\bar{t}-\tau)]\,d\tau, \qquad (4.73)$$

где $z_1 = z\sqrt{1-\gamma^2}$.

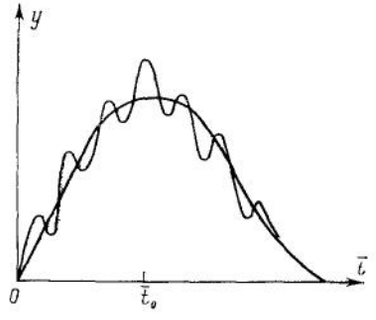


Рис. 4.10. Форма сигнала ударного ускорения

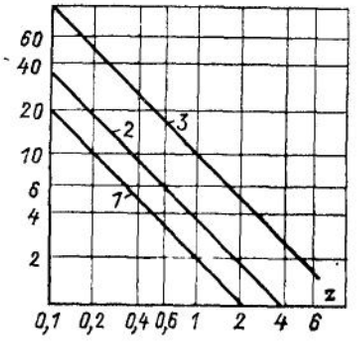


Рис. 4.11. Отношение точной и приближенной оценок погрешностей преобразования импульсов ударного ускорения

1 — треугольный импульс; *2* — полусинусоидальный импульс, *3* — пилообразный импульс

В работе [41] получены приближенные формулы для оценивания погрешности преобразования, справедливые при монотонном возрастании одномодального сигнала $x(t)$ до максимального значения и монотонном спаде от указанного значения. Эти формулы непригодны для оценивания погрешностей преобразования ударных сигналов с наложенными колебаниями (рис. 4.10).

Если представить выражение (4.73) в форме

$$y(\bar{t}) = \frac{1}{z_1^2}x(\bar{t}) - \frac{1}{z_1^2}\exp(-z\gamma\bar{t})\left[\sin z_1\bar{t}_0\int_0^{\bar{t}_0} f'(\tau)\sin z_1\tau\,d\tau + \right.$$

$$\left. + \cos z_1\bar{t}_0\int_0^{\bar{t}_0} f'(\tau)\cos z_1\tau\,d\tau\right],$$

где $f(\tau) = x(\tau)\exp(z\gamma\tau)$; $\bar{t}_0$ — абсцисса максимума $x(\bar{t})$; погрешность преобразования δ определяется выражением в квадратных скобках. Погрешность оценивается сверху:

$$|\delta| \leqslant \sqrt{2}\,V\exp(-z\gamma\bar{t}_0)/z_1^2.$$

где $V = \int_0^{\bar{t}_0} |f'(\tau)|\,d\tau$ — полная вариация $f(\tau)$ на промежутке $[0, \bar{t}_0]$.

Для определения вариации V можно использовать неравенство $V \leqslant (V_0 + |x|_m)\exp(z\gamma\bar{t}_0)$, с учетом которого

$$|\delta| \leqslant \sqrt{2}\, z_1^{-2}\{V_0 + x_m[1 - \exp(-z\gamma\bar{t}_0)]\}, \qquad (4.74)$$

где $V_0 = \int_0^{\bar{t}_0} |x'(\tau)|\,d\tau$ — полная вариация $x(\bar{t})$ на промежутке $[0, \bar{t}_0]$.

Пьезоэлектрические измерительные преобразователи характеризуются малым коэффициентом затухания, поэтому может быть полезной оценка (4.74) при условии $\gamma = 0$:

$$|\delta| < \sqrt{2}\, V_0 z^{-2}. \qquad (4.75)$$

Расчет оценок погрешностей преобразования симметричного треугольного, полусинусоидального и пилообразного импульсов по формулам (4.74), (4.75) и выражениям, полученным в работе [41], показал, что оценки (4.74), (4.75) точнее. На рис. 4.11 приведены зависимости отношений рассчитанных оценок, показывающие, что при относительно низких собственных частотах коэффициент, характеризующий выигрыш в точности оценивания, может достигать 20—100.

ГЛАВА ПЯТАЯ

ВОПРОСЫ ОБЕСПЕЧЕНИЯ ЕДИНСТВА ДИНАМИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

5.1. ВЫБОР СРЕДСТВ ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ С ПОГРЕШНОСТЬЮ, НЕ ПРЕВЫШАЮЩЕЙ ЗАДАННУЮ

Одним из важных вопросов, связанных с использованием средств измерений в динамическом режиме, является выбор средства для измерений с погрешностью, не превышающей заданную. Этот вопрос формулируется следующим образом: задана предельно допустимая погрешность измерений, а также некоторый набор сведений о входном воздействии на устройство; необходимо указать, каковы должны быть его динамические свойства, для того чтобы погрешность измерений при данном входном воздействии в данных условиях не превосходила предельно допускаемую. Более узкая задача заключается в том, что требуется оценить пригодность средства измерений с известными динамическими свойствами для измерений при заданном входном сигнале в данных условиях с погрешностью, не превышающей заданную. Заметим, что выбор устройства чаще всего основывается на решении задачи пригодности для тех из них, которыми располагает экспериментатор, и поэтому в дальнейшем сконцентрируем внимание на этой задаче.

Если динамическая погрешность превалирует над остальными составляющими погрешности измерений, то условие, которому

должна удовлетворять погрешность измерений $\delta_\Sigma(t)$, имеет вид:

$$\Delta = \|\delta_\Sigma(t)\| \approx \|\delta(t)\| \leqslant \Delta_з, \qquad (5.1)$$

где $\delta(t)$ — динамическая погрешность устройства; $\Delta_з$ — заданная предельная погрешность.

В другом случае среди составляющих погрешности измерений нет доминирующей и каждая из них оценивается по отдельности предельным значением нормы соответствующей функции. Тогда, используя свойство нормы, получим соотношение для нормы функции

$$\Delta \leqslant \Delta_{1\,пр} + \ldots + \Delta_{m\,пр}, \qquad (5.2)$$

где m — общее число составляющих.

Предположим, что оценки $\Delta_{2пр} - \Delta_{mпр}$ известны. Тогда условие (5.1) преобразуется к виду:

$$\Delta_1 \leqslant \bar{\Delta}_з = \Delta_з - \sum_{i=2}^{m} \Delta_{i\,пр}. \qquad (5.3)$$

Следует указать, что арифметическое суммирование норм составляющих погрешности приводит к завышенной оценке в неравенстве (5.2). Тем не менее более точное суммирование вряд ли целесообразно, поскольку необходим запас по точности выбранного средства измерений, рассчитанный на возможные отклонения условий его применения от предполагаемых.

Задачу пригодности устройства можно формализовать следующим образом: при известном входном сигнале $x(t)$ необходимо установить, удовлетворяет ли оператор $\mathcal{B}$ (известный полностью или частично) неравенству:

$$\left\| \frac{\mathcal{B}(x)}{K} - x \right\|.$$

При известном полностью входном сигнале устройства задача пригодности тривиальна, поэтому в дальнейшем будем считать известными характерные свойства сигнала (финитный, ограниченный, периодический и т. д.), а также числовые оценки этих свойств: длительность, максимальное значение, период и др. Динамические свойства средства измерений могут быть представлены полными или частными характеристиками.

В указанной постановке задача пригодности сводится к априорному оцениванию погрешностей измерений, в первую очередь динамической погрешности средства измерений. Таким образом, в качестве инструмента для определения пригодности устройства должны служить результаты решения задач, сформулированных в § 4.3.

В качестве примера оценим погрешность осциллографического гальванометра, описываемого дифференциальным уравнением второго порядка. Пусть необходимо записать кривую периодически изменяющейся силы тока с погрешностью, не превышающей 5 % максимального значения. Период по-

вторения измеряемой величины $\theta = 40$ мс. Кроме того, известно, что гармониками выше пятой в исследуемом сигнале можно пренебречь. Требуется оценить, пригоден ли для записи указанной кривой осциллографический гальванометр М004/1 с собственной частотой $f_0 = 300$ Гц и степенью успокоения $\gamma = 0{,}6 \div 0{,}7$. При относительной частоте $\eta = 125/300 = 0{,}4$ относительное непостоянство АЧХ гальванометра $\delta A = 0{,}012$, а нелинейность ФЧХ $\delta\Phi = 0{,}018$ рад [62]. Воспользуемся следующей оценкой погрешности записи (преобразования) периодического сигнала [21]:

$$\Delta_C = \|\delta(t)\|_C \leqslant \sqrt{2\left[(\delta A + \delta\Phi)^2 + (\delta\Phi)^2\right]}\,|x(t)|_{\max}, \qquad (5.4)$$

полученной для случая, когда сдвиг $y(t)$ относительно $x(t)$, обусловленный линейной частью ФЧХ, несущественен и погрешность определяется для совмещенных во времени сигналов $y(t)$ и $x(t)$. В соответствии с выражением (5.4) относительная погрешность $\Delta_C / |x|_m$ не превосходит 4,95 %. Таким образом, гальванометр пригоден для записи кривой с погрешностью, не превышающей заданную. Полученные соотношения позволяют также оценить сверху погрешность, с которой может быть записана данная кривая. Пусть период повторений входного сигнала $\theta = 25$ мс. Новое значение относительной частоты $\eta = 200/300 = 0{,}67$, а предельные отклонения частотных характеристик $\delta A = 0{,}08$ и $\delta\Phi = 0{,}075$ рад. При этом погрешность записи не превзойдет $\delta = 24$ % относительно максимального значения сигнала.

Обычная методика выбора гальванометра предполагает оценивание амплитудной погрешности при записи каждой гармонической составляющей в отдельности [62]. Расчет суммарной погрешности записи несинусоидальной кривой при числе составляющих, большем трех, весьма затруднен, особенно когда максимальная частота спектра сигнала выходит за границы рабочей полосы частот гальванометра, т. е. если определяющими являются не амплитудные, а фазовые искажения. Поэтому при необходимости записи несинусоидальной кривой возможны лишь качественные рекомендации, учитывающие отличие формы кривой от некоторых типовых: прямоугольной, треугольной, трапециевидной [62]. Использование полученных соотношений позволяет более обоснованно и просто оценить погрешность гальванометра.

Оценивание пригодности средства измерений (соответственно динамической погрешности) с известной полной характеристикой в принципе не вызывает особых затруднений. Как указано в § 4.1, выбор сигнала, для которого оценивается динамическая погрешность, определяется совокупностью возможных рабочих сигналов. При использовании устройства с широкой совокупностью выбор «наихудшего» сигнала может быть затруднен многообразием возможных форм. В этом случае полезны соотношения, позволяющие сравнивать между собой различные сигналы по возможной динамической погрешности их преобразования в данном устройстве.

Подобная задача впервые поставлена А. А. Харкевичем [79], где сформулировано без доказательства следующее положение: квадратическая норма погрешности преобразования линейной стационарной системой сигнала $x(t)$ меньше такой же нормы погрешности преобразования единичной ступени, если сигнал $x(t)$: а) тождественно равен нулю при $t < t'$; б) монотонно изменяется в интервале $t' \leqslant t < \infty$; в) находится в промежутке 0 и 1. Математическая формулировка этого положения при статическом коэффициенте преобразования устройства, равном единице, такова:

$$\int_0^\infty [h(t) - U(t)]^2\,dt \geqslant \int_0^\infty \left[\int_0^t g(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau - x(t)\right]^2 dt. \qquad (5.5)$$

Ниже приведены обоснования этого положения А. А. Харкевича для важнейших частных случаев.

1. $x(t)$ — монотонно возрастающая функция. Без ограничения общности можно считать, что $t' = 0$, $x(\infty) = 1$.

Случай конечного времени наблюдения представляет самостоятельный интерес для практики. Если представить $x(t)$ как предел мажорирующей равномерно-ступенчатой функции при стремлении к нулю высоты ступенек:

$$x(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} U(t - t_k), \qquad (5.6)$$

где $x(t_k) = k/n$, то из монотонности $x(t)$ следует, что $t_{k+1} \geqslant t_k$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Подставляя выражение (5.6) в (5.5), где верхние пределы интегрирования заменены на θ — время наблюдения, можно получить

$$\int_0^\theta \left[\int_0^t g(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau - x(t)\right]^2 dt = \int_0^\theta \left[\int_0^t g(t-\tau) \times \right.$$

$$\left. \times \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} U(\tau - t_k)\,d\tau - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} U(t - t_k)\right]^2 dt.$$

По теореме Лебега о сходимости [39] возможна перестановка знаков интегрирования и предельного перехода во внутреннем интеграле. Далее, используя правило Коши для произведения двух бесконечных рядов [39], применяя вторично теорему Лебега к внешнему интегралу и разбивая промежуток интегрирования $[0, \theta]$ на $[0, t_k]$ и $[t_k, \theta]$, можно прийти к соотношению:

$$\int_0^\theta \left[\int_0^t g(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau - x(t)\right]^2 dt = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^\theta [h(t - t_k) - \right.$$

$$\left. - U(t - t_k)\right]^2 dt + 2 \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=1}^{n-1-k} \int_{t_{k+l}}^{\theta} [h(t - t_k) - U(t - t_k)]\,[h(t - t_{k+l}) - \right.$$

$$\left. - U(t - t_{k+l})]\,dt \right\}.$$

Использование неравенства Буняковского—Шварца и упорядоченности значений t_k дает

$$\int_0^\theta \left[\int_0^t g(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau - x(t)\right]^2 dt \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{0-t_k} [h(t) - U(t)]^2\,dt + \right.$$

$$\left. + 2 \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=1}^{n-1-k} \sqrt{\int_0^{\theta - t_{k+l}} [h(t + t_{k+l} - t_k) - U(t)]^2 dt \int_0^{0 - t_{k+l}} [h(t) - U(t)]^2 dt} \right\}.$$

Если справедливо соотношение

$$\int_0^a [h(t) - U(t)]^2\,dt \geq \int_\tau^{\tau+a} [h(t) - U(t)]^2\,dt, \quad \tau \to 0, \quad a \to 0,$$

предъявляющее определенные требования к характеру установления функции $h(t)$, которые выполняются на практике для всех средств измерений,

пропускающих постоянную составляющую входного сигнала, а также для устройств, не пропускающих постоянную составляющую, у которых порядок убывания переходной характеристики на бесконечности меньше порядка роста в нуле, то расширение промежутка интегрирования до $[0, \theta]$ и вынесение интеграла за знаки сумм и предела позволяет прийти к искомому неравенству:

$$\int_0^\theta \left[\int_0^t [g(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau - x(t)\right]^2 dt \leqslant \int_0^\theta [h(t) - U(t)]^2\,dt. \qquad (5.7)$$

Соотношение (5.7) справедливо для любого конечного θ, поэтому с помощью предельного перехода получаем (5.5), распространяя тем самым полученный результат на случай неограниченного времени наблюдения.

2. $x(t)$ — монотонно убывающая функция. В статье [79] в качестве примера, иллюстрирующего справедливость неравенства (5.5), рассмотрены искажения сигнала $x(t) = U(t)\exp(-\beta t)$. Таким образом, монотонность трактовалась [79] как свойство сигнала на открытом интервале $(0, \infty)$, в то время как промежуток интегрирования $[0, \infty)$ полуоткрыт. При такой трактовке невозможно доказательство неравенства (5.5) в общем случае. Пусть, например,

$$x(t) = \frac{1-\exp(t-\theta)}{1-\exp(-\theta)}\,\Pi_0(t;\,\theta); \qquad h(t) = 1-\exp(-t), \quad t \geqslant 0.$$

Легко показать непосредственным подсчетом, что при $\theta \geqslant 3$ условие (5.7) не выполняется. Таким образом, при монотонно убывающем на $(0, \theta]$ сигнале $x(t)$ соотношение (5.7) и, следовательно, (5.5) не имеют места. Очевидной причиной полученного отрицательного результата является неэквивалентность постановки задачи для возрастающей и убывающей на $(0, \theta]$ функции $x(t)$ при условии $x(0) = 0$. В неравенстве (5.7) убывающая функция $x(t)$ содержит один положительный скачок при $t = 0$ и в пределе, как показывает рассмотренный пример, может стремиться к отрицательному скачку в какой-либо другой точке промежутка $[0, \theta]$. Монотонно возрастающая функция может иметь лишь один предельный единичный скачок в промежутке $[0, \theta]$. Если рассматривать $x(t)$, равную 1 на $(-\infty, 0)$ и убывающую к 0 на $[0, \theta]$, то неравенство (5.7) примет вид:

$$\int_0^\theta \left[\int_{-\infty}^t g(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau - x(t)\right]^2 dt \leqslant \int_0^\theta [h(t) - U(t)]^2\,dt. \qquad (5.8)$$

Выполнение этого неравенства доказывается, как и выше, при представлении $x(t)$, аналогичном выражению (5.6):

$$x(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} U(t_k - t).$$

На практике встречаются ситуации, в которых требуется сохранение формы сигнала безотносительно к его положению на временной оси. Тогда в выражение для динамической погрешности преобразования должен быть введен сдвиг сигналов, компенсирующий чистое запаздывание. При этом возможны следующие два случая.

Во-первых, сдвиг может не зависеть от каждого сигнала, а определяться из условия минимизации погрешности преобразования одного характеристического сигнала, например идеального ступенчатого. В этом случае неравенство (5.5) принимает вид:

$$\min_\theta \int_0^\infty [h(t) - U(t-\theta)]^2\,dt \geqslant \int_0^\infty \left[\int_0^t g(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau - x(t-\theta)\right]^2 dt. \qquad (5.9)$$

Можно показать, что это неравенство справедливо.

Во-вторых, сдвиг для каждого сигнала может определяться из условия минимизации погрешности преобразования этого сигнала. Тогда неравенство (5.5) принимает вид:

$$\min_\theta \int_0^\infty [h(t) - U(t-\theta)]^2\,dt \geqslant \min_{\theta'} \int_0^\infty \left[\int_0^t g(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau - x(t-\theta')\right]^2 dt.$$

Справедливость этого неравенства следует из (5.9), так как минимизация правой части (5.9) лишь усиливает последнее.

Для практики может представить интерес вывод соотношения, аналогичного выражению (5.7), в метрике C:

$$\max_{[0,\,\theta]} |h(t) - U(t)| \geqslant \max_{[0,\,\theta]} \left|\int_0^t g(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau - x(t)\right|. \qquad (5.10)$$

При тех же предположениях, что и выше, рассмотрим случай конечного времени наблюдения

$$\max_{[0,\,\theta]} \left|\int_0^t g(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau - x(t)\right| = \max_{[0,\,\theta]} \left|\int_0^t [h(t) - 1]\frac{dx(\tau)}{d\tau}\,d\tau\right|.$$

Так как $x(t)$ — монотонная, то по обобщенной теореме о среднем получим

$$\max_{[0,\,\theta]} \left|\int_0^t g(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau - x(t)\right| = \max_{[0,\,\theta]} |[h(t-\eta t) - U(t)]\,x(t)|, \qquad (5.11)$$

где $0 \leqslant \eta \leqslant 1$.

Так как $|x(t)| \leqslant 1$, то, усиливая правую часть выражения (5.11), получаем (5.10). На бесконечное время наблюдения неравенство (5.10) распространяется аналогично приведенному выше для квадратической метрики.

Таким образом, доказано, что суммарная квадратическая (следовательно, средняя квадратическая) и максимальная погрешность преобразования любого монотонного ограниченного сигнала не превосходят соответствующих погрешностей преобразования идеального ступенчатого воздействия.

Задача пригодности средства измерений для работы с пренебрежимо малой динамической погрешностью (по сравнению со статической) рассмотрена в работе [12]. При точных измерениях оценкой входного сигнала служит сдвинутый и масштабно преобразованный выходной сигнал

$$\tilde{x}(t) = y(t+\tau)/K,$$

где время задержки τ выбирается таким, чтобы минимизировать погрешность $\delta(t) = \tilde{x}(t) - x(t)$. При этом условием пренебрежимо малой (на относительном уровне ε) погрешности служит неравенство

$$TM_1 < \varepsilon M_0, \qquad (5.12)$$

где T — время установления переходной характеристики устройства до заданного относительного уровня:

$$M_0 = \max_{t\,\in\,[\tau,\,T+\tau]} |x(t)|; \qquad M_1 = \max_{t\,\in\,[\tau,\,T+\tau]} |x'(t)|.$$

Если выбрано $\tau=\tau_0=\int_0^T th(t)\,dt$, то получается менее жесткое, чем неравенство (5.12), условие пренебрежимо малой погрешности:

$$0{,}5T^2M_2 < \varepsilon M_0, \tag{5.13}$$

где $M_2=\max_{t\in[\tau_0,\ T+\tau_0]}|x''(t)|$.

Таким образом, соотношения (5.12) и (5.13) могут быть использованы для выбора динамически точного средства измерений по единственному динамическому параметру — времени установления переходной характеристики.

Для динамики точных устройств оценка пригодности для работы с импульсными сигналами может быть сделана на основе результатов, полученных в § 4.3. Возможен также следующий подход. Пусть импульсная характеристика устройства $g(t)$ существенно отлична от нуля лишь на интервале времени $[0,\ T_g]$, причем «память» устройства T_g, определенная на уровне η, удовлетворяет соотношению $T_g \ll \theta$, где θ — длительность импульсного сигнала $x(t)$. Линеаризуя $x(t)$ на скользящем интервале $[t-T_g,\ t]$, получим $y(t)\approx x(t)\,h(T_g)$.

Динамическая погрешность средства измерений

$$\delta(t)=x(t)\,[h(T_g)-1].$$

Поскольку значение $h(T_g)$ неизвестно, оценим его следующим образом. Заменяя $g(t)$ экспоненциальной огибающей, получим

$$\eta=t_0^{-1}\exp(-T_g/t_0), \tag{5.14}$$

где t_0 — постоянная времени соответствующего устройства с экспоненциальной импульсной характеристикой. При этом $h(t)$ также заменяется экспонентой, значение которой при $t=T_g$ $h(T_g)=1-\eta t_0$. В результате $\delta_1(t)=-\eta t_0 x(t)$. Нормы погрешности равны:

$$\Delta_{1C}=\eta t_0|x|_{\max};\qquad \Delta_{1\mathscr{L}_2}=\eta t_0\sqrt{E_x/\tau},$$

где E_x — энергия входного импульса $x(t)$.

Если при вычислении $y(t)$ с помощью интеграла свертки воспользоваться экспоненциальным приближением импульсной характеристики, то с учетом (5.14), можно получить:

$$\Delta_{1C}=\eta t_0|x|_{\max}+|\eta t_0T_g-t_0+\eta t_0^2||x'|_{\max};$$

$$\Delta_{1\mathscr{L}_2}=\sqrt{[(\eta t_0)^2E_x+(\eta t_0T_g-t_0+\eta t_0^2)^2E_{x'}]/\tau},$$

где $E_{x'}$ — энергия производной входного сигнала.

5.2. ПЕРЕДАЧА РАЗМЕРОВ ЕДИНИЦ СРЕДСТВАМ ДИНАМИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

Мероприятия по обеспечению единства измерений по существу направлены на то, чтобы при каждом измерении была реализована установленная единица измеряемой величины. Неизбежное наличие погрешности измерения можно рассматривать как результат того, что указанная цель недостижима. Иными словами, «единица при данном измерении» не совпала с установленной. Одна из причин этого — неизбежная потеря точности при передаче размера единицы от эталона к рабочему средству измерений.

При измерениях погрешность результата определяется наряду с другими факторами также динамическими свойствами используемых устройств. Следовательно, обеспечение единства динамических измерений требует, кроме передачи размера единицы измеряемой величины, также «передавать» характеристику, т. е. определять характеристику рабочего средства измерений с помощью более быстродействующего («динамически образцового») устройства.

Естественно возникает вопрос о необходимости и целесообразности иметь иерархию средств измерений по их динамическим характеристикам аналогично их иерархии в поверочной схеме для статических измерений. Решение этого вопроса определяется теми же технико-экономическими факторами, что и при построении поверочной схемы для статических измерений (выборе числа уровней и установлении необходимого парка образцовых средств измерений). Среди указанных факторов следует в первую очередь выделить количество находящихся в обращении рабочих средств измерений с учетом выпуска новых и изъятия из обращения устаревших и пришедших в негодность, а также доступность и стоимость генераторов испытательных сигналов и других средств, используемых при аттестации и контроле средств измерений. Кроме того, необходимо учитывать достижимую точность воспроизведения единицы с помощью эталона и требуемую точность рабочих средств измерений.

Вопрос об иерархии средств измерений по их динамическим свойствам должен решаться по-разному для средств динамических измерений, допускающих использование их в статическом или квазистатическом (как, например, для пьезоэлектрических преобразователей переменных давлений) режиме.

Для устройств, которые могут быть использованы и в динамическом, и в статическом режимах, наиболее простым и поэтому целесообразным является установление одной иерархии, соответствующей статическим измерениям (обычная поверочная схема). В этой схеме должны быть предусмотрены методы и средства для определения динамических характеристик средств измерений. Если в соответствии с потребностями конкретной области измерений образуется ряд типов устройств с различным, легко и просто сравниваемым, быстродействием (например, ряд осциллографических гальванометров с возрастающими собственными частотами), то это естественно создает основу для иерархии средств измерений. Однако для определения характеристики наиболее быстродействующего устройства необходим генератор испытательного сигнала и это в принципе позволяет избежать построения иерархической системы. При доступности и достаточно малой стоимости генератора он может быть использован для определения характеристик

всех типов устройств. В противном случае аттестация (поверка) менее быстродействующих средств измерений может проводиться по более быстродействующим с использованием источника испытательного сигнала, не являющегося в полном смысле слова мерой. В указанном случае к наиболее быстродействующему средству измерений относится то, что сказано выше о генераторе. Иными словами, исходным принципом при определении характеристик устройств должно быть стремление к максимальной простоте и единообразию методов и средств. Таким образом, правильная иерархия средств измерений по быстродействию, аналогичная иерархии в обычной поверочной схеме, должна быть вынужденной (обусловленной технико-экономическими факторами). Разумеется, сказанное выше относительно генератора испытательных импульсов и наиболее быстродействующего из аттестуемых средств измерений целиком и полностью относится к другим средствам, используемым при определении характеристик устройств: регистрирующим приборам и измерительным преобразователям.

Описанный выше подход к аттестации средств для динамических измерений базируется на раздельном определении их статических и динамических свойств. Необходимость указанного разделения обусловлена различной (зачастую несоизмеримой) чувствительностью экспериментальных данных к изменениям статических и динамических параметров.

Для устройств, которые могут быть использованы лишь в динамическом режиме (системы с «закрытым входом»), передача размера единицы и определение динамических характеристик трудно разделимы. Размер единицы передается через параметр переменного сигнала, а отклик средства измерений на этот сигнал определяется динамическими характеристиками. Так, наиболее простой способ передачи размера единицы основан на использовании гармонического входного сигнала, амплитуда которого известным образом соотнесена с единицей. При использовании указанного способа для линейного устройства отношение амплитуд выходного и входного сигналов определяет значение АЧХ при данной частоте, причем указанное значение «содержит» единицу. Эта ситуация принципиально отличается от той, которая возникает при определении прямым способом АЧХ такого устройства, которое может быть использовано в статическом режиме. В этом режиме статический коэффициент преобразования средства измерений может быть определен, как правило, значительно точнее, чем в динамическом. Поэтому требования к абсолютной точности установки амплитуды генератора стандартных сигналов могут быть менее жесткими, чем к точности установки частоты. В этом случае, как впрочем и при определении АЧХ косвенным методом, она представляется в приведенной форме так, чтобы ее начальное значение на нулевой частоте было равно единице. Подобная АЧХ совместно с ФЧХ полностью определяет динамические свойства измерений, однако не дает возможности без использования статического коэффициента преобразования оценить динамическую погрешность средства. Тем

не менее указанные способ определения и форма представления АЧХ традиционны и широко используются в практике, что обусловлено сравнительной простотой используемых средств, в первую очередь генератора испытательных сигналов, и алгоритмов обработки данных.

Имея в виду необходимость обоснования иерархии средств измерений по динамическим свойствам в поверочных схемах, рассмотрим далее указанные схемы. Выделим две типовые схемы: с эталонным измерительным преобразователем и эталонным генератором испытательных сигналов, а также их разновидности, ограничиваясь верхними звеньями этих схем. Термин «эталонный» используется как краткое обозначение термина «исходный образцовый».

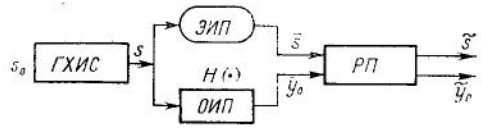


Рис. 5.1. Верхнее звено поверочной схемы с эталонным измерительным преобразователем и генератором характеристического испытательного сигнала

Схема с эталонным измерительным преобразователем [*ЭИП*]. Эта схема имеет две разновидности, отличающиеся использованием генераторов либо характеристического (*ГХИС*), либо другого типового испытательных сигналов. Рассмотрим первую разновидность схемы, представленную на рис. 5.1. По определению *ЭИП* его выходной сигнал $\bar{s}$ должен считаться практически совпадающим с выходным сигналом *ГХИС*: $\bar{s} = s$. Сигнал s отличается от характеристического сигнала s_0 и представляет собой функцию времени и параметров *ГХИС*:

$$s = s(t;\ \alpha,\ \beta,\ \ldots,\ \nu). \tag{5.15}$$

Поскольку в схеме реализуется прямой метод определения динамических характеристик образцового измерительного преобразователя *ОИП*, то сигнал y_0 на его выходе представляет собой оценку искомой характеристики и является функцией времени и параметров *ОИП*:

$$\bar{y}_0 = y(t;\ \tilde{T}_1,\ \ldots,\ \tilde{T}_n). \tag{5.16}$$

Наличие в выражении (5.16) оценок $\tilde{T}_i$ вместо истинных параметров T_i обусловлено отличием s от s_0. По указанной причине $\bar{y}_0$ может быть выражен функцией времени, параметров *ГХИС* и параметров *ОИП*:

$$\bar{y}_0 = \bar{y}_0(t;\ \alpha,\ \beta,\ \ldots,\ \nu;\ T_1,\ \ldots,\ T_n). \tag{5.17}$$

Регистрация сигналов $\bar{s}$ и $\bar{y}_0$ приводит к появлению в выражениях (5.15) и (5.17) параметров регистрирующего прибора (*РП*):

$$\tilde{s} = \tilde{s}(t;\ \alpha,\ \beta,\ \ldots,\ \nu;\ \varkappa,\ \rho,\ \ldots,\ \chi); \tag{5.18}$$

$$\tilde{y}_0 = \tilde{y}_0(t;\ \alpha,\ \beta,\ \ldots,\ \nu;\quad T_1,\ \ldots,\ T_n;\quad \varkappa,\ \rho,\ \ldots,\ \chi). \tag{5.19}$$

С другой стороны, искажения при регистрации приводят к деформации оценок $\tilde{T}_i$ в выражении (5.16) и к необходимости заменить параметры *ГХИС* в (5.15) их оценками: $\tilde{y}_0 = H(t;\ \tilde{\tilde{T}}_1,\ \ldots,\ \tilde{\tilde{T}}_n)$; $\tilde{s} = s(t;\ \tilde{\alpha},\ \tilde{\beta},\ \ldots,\ \tilde{\nu})$, где $H(\cdot)$ — функция, выражающая искомую характеристику. Выражения (5.18) и (5.19) показывают, что свойства *РП* играют существенную роль при определении характеристик *ОИП*. Возможны следующие две ситуации.

а. *РП* практически безынерционный (быстродействие *РП* не ниже быстродействия *ЭИП*). При этом

$$\tilde{\tilde{s}} = \bar{\tilde{s}} = s = s(t;\ \alpha,\ \beta,\ \ldots,\ \nu); \tag{5.20}$$

$$\tilde{\tilde{y}}_0 = \bar{\tilde{y}}_0 = H(t;\ \tilde{T}_1,\ \ldots,\ \tilde{T}_n). \tag{5.21}$$

Пренебрегая в выражении (5.19) параметрами *РП*, получим

$$\tilde{\tilde{y}}_0 = \tilde{y}_0(t;\ \alpha,\ \beta,\ \ldots,\ \nu;\quad T_1,\ \ldots,\ T_n),$$

что в сопоставлении с (5.21) дает

$$H(t;\ \tilde{T}_1,\ \ldots,\ \tilde{T}_n) = \tilde{y}_0(t;\ \alpha,\ \beta,\ \ldots,\ \nu;\quad T_1,\ \ldots,\ T_n). \tag{5.22}$$

Уравнение (5.22) позволяет найти оценки параметров *ОИП* $\tilde{T}_i$, а также установить соотношение между погрешностями определения параметров *ОИП* $\delta T_i = \tilde{T}_i - T_i$ и параметрами *ГХИС* α, β, ..., ν.

Таким образом, определение динамических характеристик *ОИП* в схеме рис. 4.12 распадается на ряд этапов:

выбор *ГХИС* (установление требований к параметрам α, β, ..., ν);

оценивание погрешности $\bar{y}_0$ (как оценки характеристики *ОИП*) из-за неидеальности s, т. е. отличия от s_0;

аппроксимация характеристики (при необходимости выразить ее в аналитической форме) заданным звеном или рядом звеньев;

оценивание погрешностей найденных параметров характеристики.

Задачи первых двух этапов могут быть решены с использованием § 3.2; 3.3. Задача третьего этапа решается известными методами математической теории аппроксимации. При ее решении могут оказаться полезными также методы определения характеристик средств измерений, в частности методы, изложенные в § 3.4. Задача последнего этапа может быть решена известными способами оценивания точности аппроксимации (см. § 3.3—3.5).

б. *РП* инерционный (*РП* по быстродействию уступает *ЭИП*, но превосходит *ОИП*).

В этом случае вместо выражений (5.20) и (5.21) получим

$$\tilde{\tilde{s}} = s(t;\ \tilde{\alpha},\ \tilde{\beta},\ \ldots,\ \tilde{\nu});\quad \tilde{\tilde{y}}_0 = H\left(t;\ \tilde{\tilde{T}}_1,\ \ldots,\ \tilde{\tilde{T}}_n\right).$$

Таким образом, для установления соотношения вида (5.22) и решения на его основе перечисленных выше задач требуется вначале перейти от экспериментальных данных $\tilde{s}$ и $\tilde{y}_0$ к промежуточным данным $\bar{s}$ и $\bar{y}_0$. Переходы $\tilde{s} \to \bar{s}$ и $\tilde{y}_0 \to \bar{y}_0$ должны осуществляться не на основе решения обратной задачи динамики (которую, как указано выше, следует избегать), а путем решения прямой задачи. Один из возможных подходов состоит в оценивании с помощью характеристики *РП* отклонений $\delta\alpha = \tilde{\alpha} - \alpha$; $\delta\beta = \tilde{\beta} - \beta$, ...; $\delta\nu = \tilde{\nu} - \nu$. Это можно сделать, раскладывая динамическую погрешность *РП* в ряд и ограничиваясь первым членом. Аналогично должны быть получены

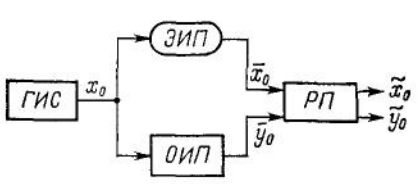


Рис. 5.2. Верхнее звено поверочной схемы с эталонным измерительным преобразователем и генератором произвольного типового испытательного сигнала

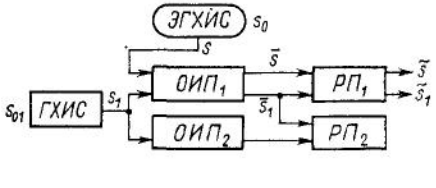


Рис. 5.3. Верхнее звено поверочной схемы с эталонным генератором характеристического испытательного сигнала

оценки погрешностей $\delta T_1, \ldots, \delta T_n$, с той лишь разницей, что в указанные оценки погрешность *РП* входит дважды — непосредственно и через $\tilde{s}$. Это отличие показывает, что *РП* в данном случае определяет в наибольшей степени точность «передачи» динамических свойств. Как указано выше, целесообразно на всех уровнях схемы иметь *ГХИС*, а также по возможности *РП* одного и того же типа. Соподчиненность средств измерений в такой схеме при необходимости будет установлена либо по их откликам на сигнал $\tilde{s}$, если *ГХИС* аттестован в статическом режиме, либо совокупно по указанным откликам и по статическим свойствам, если схема определения динамических характеристик средства измерений выделена из поверочной схемы.

Вторая разновидность схемы с эталонным преобразователем приведена на рис. 5.2. Как и выше, рассмотрим два варианта.

а. Регистрирующий прибор *РП* практически безынерционный. Аналогично выражениям (5.20) и (5.21) имеем:

$$\tilde{x}_0 = \bar{x}_0 = x_0 = x_0(t;\ \alpha,\ \beta,\ \ldots,\ \nu);$$

$$\tilde{y}_0 = \bar{y}_0 = \bar{y}_0(t;\ \alpha,\ \beta,\ \ldots,\ \nu;\quad T_1,\ \ldots,\ T_n).$$

В этом случае по паре сигналов x_0 и $\bar{y}_0$ требуется определить динамические характеристики образцового измерительного преобразователя *ОИП* (вид модели и параметры T_i) и оценить погрешности найденных параметров. Задача может быть решена с помощью

методов, изложенных в § 3.4. Выбор генератора испытательных сигналов *ГИС* (установление требований к испытательному сигналу x_0) может быть произведен на основе § 3.2—3.5.

б. *РП* слабо инерционный. В этом случае требуется решить ту же, что и в п. «а», задачу, но с усложнением, указанным в п. «б» для предыдущей разновидности схемы.

Вторую типовую схему рассмотрим для вариантов с использованием эталонного генератора испытательного сигнала *ЭГИС* и эталонного генератора характеристического испытательного сигнала *ЭГХИС* по отдельности.

Схема с ЭГХИС (см. рис. 5.3). Для этой схемы в зависимости от свойств образцового измерительного преобразователя *ОИП* и регистрирующего прибора *РП* возможны четыре основные ситуации.

а. $ОИП_1$ по быстродействию существенно превосходит *ГХИС*. Если при этом $РП_1$ практически безынерционный по сравнению с $ОИП_1$, то $\tilde{s} = \bar{s}$, а поскольку в соответствии со свойствами *ЭГХИС* $s = s_0$, то сигнал $\bar{s}$ представляет собой динамическую характеристику $ОИП_1$: $\bar{s} = s\ (t;\ \alpha,\ \beta,\ \ldots,\ \nu)$. Выражая характеристику $ОИП_1$ непосредственно сигналом $\bar{s}$ или при необходимости аппроксимируя ее типовой характеристикой, можно затем оценить погрешность найденной характеристики с помощью методов, изложенных в § 3.3. Из свойств $ОИП_1$ и $РП_1$ следует также:

$$\tilde{s}_1 = \bar{s}_1 = s_1. \qquad (5.23)$$

На основе (5.23) устанавливается отклонение s_1 от s_{01}. Если последнее невелико, то определяется некоторая характеристика (норма) этого отклонения, что представляет собой наиболее существенный момент аттестации *ГХИС*. Если отклонение s_1 от s_{01} велико, т. е. s_1 качественно отличается от s_{01}, то необходимо переопределить s_{01}. При этом может потребоваться аппроксимация s_1 сигналом типовой формы. Далее устанавливается указанная норма отклонения s_1 от переопределенного s_{01}, т. е. по существу норма погрешности аппроксимации, чем и заканчивается аттестация *ГХИС*.

Если $РП_1$ слабо инерционный (по быстродействию уступает $ОИП_1$), то его характеристика ограничивает возможности точного описания свойств $ОИП_1$. Для определения характеристики $ОИП_1$ необходимо с помощью характеристики $РП_1$ перейти от $\tilde{s}$ к $\bar{s}$. Это можно сделать на основе параметрического подхода: задавшись видом функции $\bar{s} = s\ (t;\ \alpha,\ \beta,\ \ldots,\ \nu)$, определить такие параметры $ОИП_1$, чтобы отклик $РП_1$ на сигнал $\bar{s}$ с указанными параметрами совпал в заданных пределах с $\tilde{s}$. Таким образом, параметрический подход позволяет обойтись решением лишь прямой задачи динамики. После установления безынерционности $ОИП_1$ осуществляется аналогичный переход от $\tilde{s}$ к $\bar{s}_1$, после чего используются те же, что и выше, способы аттестации *ГХИС*.

б. $ОИП_1$ слабо инерционный (по быстродействию сравним с *ГХИС*). Этот вариант представляется менее естественным, чем предыдущий, и должен рассматриваться как вынужденный. Его отличие от предыдущего при практически безынерционном $РП_1$ состоит в том, что для определения свойств *ГХИС* необходимо перейти от сигнала $\bar{s}_1$ к s_1 с использованием найденной характеристики $ОИП_1$. Переход может быть произведен тем же способом, что и переход $\tilde{s} \to \bar{s}$ в предыдущем варианте. Остальные действия по аттестации $ОИП_1$ и *ГХИС* аналогичны указанным в п. «а».

Если $РП_1$ слабо инерционный (по быстродействию уступает $ОИП_1$), то обработка данных при определении свойств $ОИП_1$ и *ГХИС* еще более усложняется. Кроме указанного выше перехода $\bar{s}_1 \to s_1$, необходимо вначале перейти от $\tilde{s}$ к $\bar{s}$, используя характеристику $РП_1$. Эти переходы осуществляются с помощью того же параметрического подхода, который приведен в п. «а». В остальном обработка данных остается такой, как описано выше.

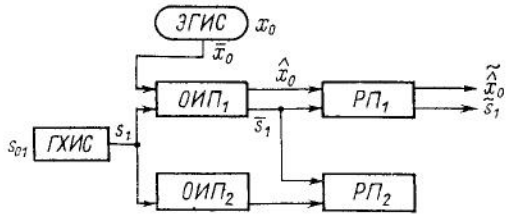


Рис. 5.4. Верхнее звено поверочной схемы с эталонным генератором произвольного типового испытательного сигнала

Следует заметить, что все сказанное сохраняет силу в том случае, когда вместо *ГХИС* используется *ГИС*.

Схема с эталонным генератором испытательных сигналов (*ЭГИС*) (рис. 5.4). Эта схема по форме аналогична приведенной на рис. 5.3, однако в ней при определении характеристики образцового измерительного преобразователя $ОИП_1$ вместо характеристического сигнала s используется испытательный сигнал x_0, как правило, типовой формы. Это обстоятельство усложняет обработку данных при определении характеристики $ОИП_1$ и требует использования методов, изложенных в § 3.4. При найденной характеристике $ОИП_1$ описанные выше способы обработки данных сохраняют силу для всех вариантов, которые определяются сочетаниями свойств $ОИП_1$ и регистрирующего прибора $РП_1$.

Относительно схем, представленных на рис. 5.1—5.4, следует сделать два общих замечания.

Во-первых, не является обязательным использование одного и того же $РП_1$ для регистрации выходных сигналов $ОИП_1$ при определении его характеристики и при исследовании с его помощью свойств *ГХИС*. При использовании для этих целей различных по быстродействию *РП* в анализе схем появляются подварианты, которые представляют собой комбинации вариантов, рассмотренных выше. Содержание подвариантов ясно из изложенного.

Во-вторых, требуется пояснить, как можно произвести сравнение средств измерений по быстродействию, на которое опирается проведенный анализ. Пусть для двух сравниваемых устройств из-

вестны их характеристики (операторы $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_2$) и пусть по существу измерительных задач, решаемых с помощью этих устройств, их погрешности в динамическом режиме должны оцениваться в норме $\mathscr{L}_2$ (с помощью средних квадратических значений). Оценки погрешностей, отличающиеся не более чем на 20—25 %, можно считать, как обычно принято, практически совпадающими. При этих условиях для сравнения средств измерений по быстродействию нужно сопоставить оценки динамических погрешностей этих средств для одного и того же входного сигнала. В качестве сигнала для сравнения целесообразно выбрать испытательный сигнал, который в отличие от рабочих входных сигналов специально предназначен для выявления динамических свойств средств измерений. Быстродействие сравниваемых устройств можно считать практически одинаковым, если выполняется неравенство

$$\left| \|\mathbf{B}_1 x - x\|_{\mathscr{L}_2} - \|\mathbf{B}_2 x - x\|_{\mathscr{L}_2} \right| / \min\left(\|\mathbf{B}_1 x - x\|_{\mathscr{L}_2},\ \|\mathbf{B}_2 x - x\|_{\mathscr{L}_2} \right) \leqslant \leqslant 0{,}25. \tag{5.24}$$

Если это неравенство не выполняется, то при условии

$$\|\mathbf{B}_2 x - x\|_{\mathscr{L}_2} < \|\mathbf{B}_1 x - x\|_{\mathscr{L}_2} \tag{5.25}$$

следует считать, что по быстродействию второе средство измерений превосходит первое.

В выражениях (5.24), (5.25) может быть использована любая другая норма динамической погрешности, которая определяется существом измерительной задачи.

Рассмотренные выше две основные типовые схемы различаются при анализе вследствие того, что свойства измерительных преобразователей *ЭИП* и свойства генераторов *ЭГИС, ЭГХИС* — динамических мер — традиционно принято описывать по-разному. Однако существует возможность единообразного описания. Действительно, генератор предназначен для воспроизведения с требуемой точностью испытательного сигнала. Реальный сигнал на выходе генератора отличается от номинального в пределах, обусловленных погрешностью генератора как меры. Отклонение $\overline{x_0}$ от x_0 (s от s_0) имеет в общем случае регулярную (детерминированную) и нерегулярную составляющие. Если отклонение в целом невелико для основной области применения средства измерений, то естественно описать его с помощью обобщенной характеристики (нормы). Это упрощает описание, аттестацию и поверку генератора. Однако такой подход ограничивает область применения прямых методов определения характеристик сравнительно грубыми устройствами.

Альтернативный подход состоит в описании динамики генератора с помощью оператора аналогично описанию динамики преобразователя. Этот подход основан на том, что в большинстве случаев отклонение реального испытательного сигнала от номинального можно представить как результат искажений последнего определенным динамическим звеном. Оператор этого звена может служить для описания динамики генератора. Указанная возможность имеет

место в первую очередь для регулярной составляющей отклонения. Однако и нерегулярная составляющая в том случае, когда для нее справедлива устойчивая модель со случайными параметрами, может быть описана как результат преобразования некоторого характеристического случайного процесса, например белого шума, динамическим звеном.

Предложенный подход позволил бы резко расширить область применения прямых методов определения характеристик средств измерений, поскольку многие генераторы можно было бы описать как преобразователи характеристических сигналов. Следует отметить, что подобное описание соответствует процессам формирования сигналов во многих генераторах, которые содержат источник характеристического сигнала, например ступенчатого, и динамическое звено (функциональный преобразователь), формирующее из характеристического требуемый испытательный сигнал. Реализация предложенного подхода порождает ряд проблем, в силу чего он требует всестороннего исследования. Однако его преимущества для целей анализа представляются бесспорными.

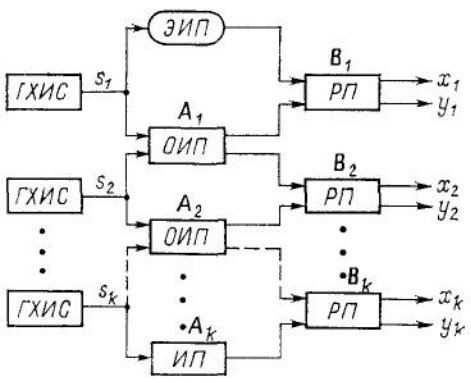


Рис. 5.5. Обобщенная схема соподчиненности средств измерений по динамическим свойствам

Рассмотрим обобщенную схему соподчиненности средств измерений по их динамическим свойствам (рис. 5.5), легко сводимую к типовым реализациям, верхние звенья которых представлены на рис. 5.1—5.4.

Для этой схемы можно записать следующий ряд соотношений:

$$\begin{gathered} x_1 = \mathscr{B}_1 s_1;\ y_1 = \mathscr{B}_1 \mathscr{A}_1 s_1; \\ x_2 = \mathscr{B}_2 \mathscr{A}_1 s_2;\ y_2 = \mathscr{B}_2 \mathscr{A}_2 s_2; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_k = \mathscr{B}_k \mathscr{A}_{k-1} s_k;\ y_k = \mathscr{B}_k \mathscr{A}_k s_k. \end{gathered} \tag{5.26}$$

В предположении, что все образцовые измерительные преобразователи *ОИП* и регистрирующие приборы *РП*, используемые в схеме, представляют собой линейные динамические звенья, можно переписать уравнения (5.26), используя свойство коммутативности операторов $\mathbf{A}_i$ и $\mathbf{B}_i$:

$$\begin{gathered} x_1 = \mathbf{B}_1 s_1;\ y_1 = \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1 s_1; \\ x_2 = \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_2 s_2;\ y_2 = \mathbf{A}_2 \mathbf{B}_2 s_2; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_k = \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{B}_k s_k;\ y_k = \mathbf{A}_k \mathbf{B}_k s_k. \end{gathered} \tag{5.27}$$

Рассмотрим попарно выражения (5.27). Если в каждой паре равенств для x_i и y_i, начиная со второй, применить к обеим частям равенства операторы $\mathbf{A}_i$ и $\mathbf{A}_{i-1}$ соответственно, то получим с учетом коммутативности этих операторов:

$$\begin{aligned} y &= \mathbf{A}_1 x_1; \\ \mathbf{A}_1 y_2 &= \mathbf{A}_2 x_2; \\ &\cdots\cdots \\ \mathbf{A}_{k-1} y_k &= \mathbf{A}_k x_k. \end{aligned} \qquad (5.28)$$



Рис. 5.6. Структурная схема измерительной цепи для определения динамических характеристик образцового измерительного преобразователя

Если обозначить $y_1 = z_1$, $\mathbf{A}_{i-1} y_i = z_i$, $i = 2, \ldots, k$, то выражения (5.28) можно переписать в симметричной форме:

$$\begin{aligned} z_1 &= \mathbf{A}_1 x_1; \\ z_2 &= \mathbf{A}_2 x_2; \\ &\cdots\cdots \\ z_k &= \mathbf{A}_k x_k, \end{aligned}$$

где z_1 входит в число экспериментальных данных, а z_i ($i = 2, \ldots, k$) получаются из экспериментальных данных путем решения прямой задачи динамики. Оператор $\mathbf{A}_{i-1}$, необходимый для вычисления z_i, находится из предыдущего уравнения по известным x_{i-1} и z_{i-1}.

Таким образом, для реализации обобщенной иерархической схемы, представленной на рис. 5.5, требуется определить полные характеристики средства измерений и решать на их основе прямые задачи динамики.

Из проведенного анализа также следует, что реализация схемы при сформулированных выше условиях не требует точного знания испытательных сигналов $s_1, \ldots, s_k$ (при реализации схемы, возглавляемой эталонным генератором характеристического испытательного сигнала *ЭГХИС*, требуется знать s_1); нужны лишь сведения о том, что эти сигналы являются достаточно широкополосными, для того чтобы полностью выявить динамические свойства исследуемых образцовых и рабочих преобразователей. При установлении требований к спектру испытательного сигнала может оказаться полезным описание свойств *ГХИС* как преобразователя. Если при характеристическом сигнале s_0 оператор *ГХИС* обозначен с помощью $\mathbf{S}_k$, то из рассмотрения приведенной ниже измерительной цепи (см. рис. 5.6) следует формулировка задачи: определить требования к операторам $\mathbf{S}_k$ и $\mathbf{B}_k$, выполнение которых обеспечивает определение по сигналу y_k оператора $\mathbf{A}_k$ в нужном диапазоне частот с требуемой точностью. В основе решения задачи может лежать то соображение, что если рассматривать звено с совокупным оператором $\mathbf{R} = \mathbf{S}_k \mathbf{A}_k \mathbf{B}_k$, то в цепи реализуется прямой метод определения характеристики этого звена. Кроме того, на практике часто бывает известной (заданной) характеристика звена с оператором $\mathbf{B}_k$. Это позволяет сформулировать требования непосредственно к характеристике звена с оператором $\mathbf{S}_k$.

Рассмотрим в заключение вопрос о нарастании погрешностей определения характеристик в иерархической схеме, изображенной на рис. 5.5. Пусть Δ_i — разрешающая способность алгоритма определения характеристик (для i-го уровня схемы). Тогда погрешность $\delta\mathbf{A}_1$ нахождения оператора $\mathbf{A}_1$ определяется соотношением:

$$\| \delta\mathbf{A}_1 x_1 \| = \Delta_1.$$

Записывая поочередно соотношения (5.28) с учетом погрешностей, получим

$$\begin{aligned} &\| \delta\mathbf{A}_2 x_2 - \delta\mathbf{A}_1 y_2 \| = \Delta_2; \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\| \delta\mathbf{A}_k x_k - \delta\mathbf{A}_{k-1} y_k \| = \Delta_k. \end{aligned} \qquad (5.29)$$

Из этих соотношений для погрешностей определения операторов могут быть получены только оценки снизу. Поэтому соотношения (5.29) следует рассматривать как общую схему нарастания погрешностей в иерархической схеме определения характеристик средств измерений. На основе этой схемы для конкретных методов определения характеристик, включающих конкретные испытательные сигналы и способы обработки экспериментальных данных могут быть разработаны алгоритмы оценивания погрешностей при «передаче» динамических свойств. Разработка алгоритмов должна базироваться на результатах, представленных в § 3.2—3.5. При этом следует стремиться к тому, чтобы обеспечить по возможности наименьшее нарастание погрешностей в иерархической системе средств измерений. Указанная цель может быть достигнута полностью при использовании для определения характеристик средств измерений на всех уровнях иерархии одних и тех же (наиболее быстродействующих) генераторов испытательного сигнала и регистрирующих приборов.

5.3. ТРЕБОВАНИЯ К ХАРАКТЕРИСТИКАМ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ДЛЯ КОНТРОЛЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СРЕДСТВ ДИНАМИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

Требования к устройствам, используемым для аттестации и контроля средств измерений, по существу представляют собой требования к исходным данным при определении характеристик указан-

ных средств. Последние требования определяются необходимой точностью определения характеристик, которая в свою очередь обусловлена точностью оценивания погрешностей измерений. Иными словами, в этом вопросе, как и при установлении требований к испытательным сигналам, имеется ряд взаимно обусловленных уровней решения задачи. Для целей анализа целесообразно разделить эти уровни, сохраняя связи, т. е. обусловленность требований, только между рассматриваемым уровнем и ближайшим к нему. Таким образом, при установлении требований к средствам контроля характеристик средств измерений будем исходить из требуемой точности определения характеристики как заданной. Естественно, что под требованиями к средствам аттестации и контроля понимаются в первую очередь и главным образом требования к их динамическим свойствам.

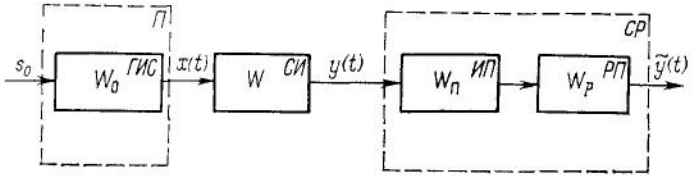


Рис. 5.7. Обобщенная структурная схема устройства для определения и контроля динамических характеристик средств измерений

Рассмотрим обобщенную структурную схему устройства для определения и контроля характеристик средств измерений *СИ* (рис. 5.7), содержащего, кроме исследуемого *СИ*, генератора испытательного сигнала *ГИС* и регистрирующего прибора *РП*, также измерительный преобразователь *ИП*, например измерительный усилитель.

Остановимся вначале на ситуации, когда требования к спектральным и точностным свойствам испытательного сигнала $x(t)$ могут быть разделены. При этом требования к спектру $x(t)$ в принципе могут быть установлены независимо от метода и средств регистрации выходного сигнала *СИ* $y(t)$. Указанные требования суть требования к «частотным свойствам» *ГИС*, которые можно выразить как требования к частотным характеристикам преобразователя *П* характеристического сигнала s_0 в требуемый испытательный сигнал x. Если W_0 обозначает передаточную функцию преобразователя *П*, то

$$X(\omega) = A_0(\omega)\, S_0(\omega), \tag{5.30}$$

где $A_0(\omega) = |W_0(j\omega)|$.

В зависимости от формы испытательных сигналов, которые легче всего воспроизводятся в данной области, устанавливается характеристический сигнал s_0. Для сигналов с ненулевым установившимся

значением, импульсных и периодических соответственно, получаем из (5.30):

$$X(\omega) = A_0(\omega)/\omega; \quad X(\omega) = A_0(\omega); \quad X(\omega) = A_0(\omega)\,\delta(s-\omega). \tag{5.31}$$

Таким образом, требования к $X(\omega)$ переносятся непосредственно на $A_0(\omega)$ и, следовательно, в рассматриваемом случае для решения задачи может быть использован § 3.3. Если речь идет об определении частотных характеристик в заданном ограниченном диапазоне частот, то утверждение о независимости требований к спектру $x(t)$, соответственно к $A_0(\omega)$, от методов и средств регистрации $y(t)$ строго справедливо. При определении совокупности АЧХ и ФЧХ как полной характеристики указанное утверждение не является строгим, поскольку реальные испытательные сигналы не могут обеспечить определение частотных характеристик на всей полуоси частот $[0, \infty)$. Происходит потеря информации, как правило, о «хвосте» АЧХ *СИ*, обусловленная конечной шириной $X(\omega)$, соответственно $A_0(\omega)$, на уровне погрешности. Аналогичная потеря информации происходит в силу того, что спектр $Y(\omega)$ выходного сигнала также не может быть зарегистрирован на всей полуоси вследствие ограниченности полосы пропускания средства регистрации *СР*. Следовательно, при установлении требований к *ГИС* и *СР*, исходя из допускаемой погрешности определения характеристики, выраженной в норме $\mathscr{L}_2$, нужно учитывать сумму энергий потерь:

$$E_\Sigma = \int\limits_{\omega_{r1}}^{\infty} |X(\omega)\, A(\omega)|^2\, d\omega + \int\limits_{\omega_{r2}}^{\infty} |Y(\omega)\, A_1(\omega)|^2\, d\omega, \tag{5.32}$$

где $A(\omega)$ — АЧХ *СИ*, а граничные частоты ω_{r1} и ω_{r2} определяются из условий: $X(\omega) \leqslant \Delta_1$ при $\omega > \omega_{1r}$; $Y(\omega) \leqslant \Delta_2$ при $\omega > \omega_{r2}$, где Δ_1, Δ_2 — погрешности определения $X(\omega)$ и $Y(\omega)$, соответственно.

Если ω_{r1} и ω_{r2} близки друг к другу, то (5.32) можно упростить:

$$E_\Sigma \approx \int\limits_{\omega_r}^{\infty} [S_0(\omega)\, A_0(\omega)\, A(\omega)]^2\, [1 + A_1(\omega)]^2\, d\omega, \tag{5.33}$$

где $\omega_r = \min(\omega_{r1}, \omega_{r2})$, и при использовании гармонического сигнала подынтегральное выражение вместо произведения $X_0(\omega)\, A_0(\omega)$ будет содержать $\int\limits_{\omega-\delta}^{\omega+\delta} S_0(\nu-\omega)\, A_0(\nu)\, d\nu$.

Для других характеристических сигналов получаем из выражения (5.33) в том же порядке, что и в (5.31),

$$E_\Sigma \approx \int\limits_{\omega_r}^{\infty} [A(\omega)/\omega]^2\, [A_0(\omega)\, [1 + A_1(\omega)]]^2\, d\omega;$$

$$E_\Sigma \approx \int\limits_{\omega_r}^{\infty} A^2(\omega)\, [A_0(\omega)[1 + A_1(\omega)]]^2\, d\omega.$$

Учет свойств *СР* может быть упрощен. Пусть установлена связь **между коэффициентом** $k = d/\delta$ (см. § 3.2) и погрешностью определения характеристики для *ГИС* определенной формы. Тогда при удовлетворении (3.69) выбранное k обусловливает определенное значение соответствующей составляющей погрешности. Разность между допускаемой погрешностью определения характеристики и указанной составляющей определяет допускаемую погрешность *СР*. Проверить, не выходит ли погрешность конкретного *СР* за пределы допускаемой погрешности, можно на основе решения прямой задачи динамики для этого средства. Если экспериментатору доступны *СР* различных типов, то указанный путь позволяет выбрать подходящее. Если экспериментатор располагает лишь *СР* определенного типа, то выбор *ГИС* осуществляется по необходимости в несколько этапов. На первом этапе повторяется описанная выше процедура. При отрицательном для данного *СР* результате проверки следует увеличить k, что приведет к уменьшению «генераторной» и соответственно к увеличению «регистраторной» составляющей погрешности определения характеристики. Если удается выбрать *ГИС* той же формы, который позволит удовлетворить (3.69) при новом значении k, то нужно повторить проверку для *СР*. Этап, на котором результат проверки оказывается положительным, является последним. Если не удается найти подходящий *ГИС* той же формы, то необходимо изменить форму испытательного сигнала и снова пройти те же этапы. Поскольку при одной и той же форме $x(t)$ чаще всего остается неизменной также форма $y(t)$, то операцию проверки для *СР* можно упростить, установив зависимости, во-первых, между погрешностью регистрации и параметрами $y(t)$ заданной формы и, во-вторых, между погрешностью регистрации и погрешностью определения характеристики.

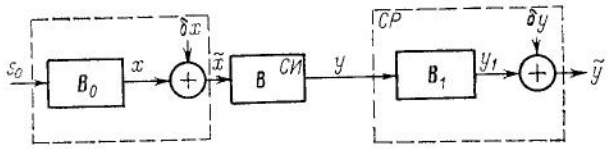


Рис. 5.8. Структурная схема устройства для определения динамических характеристик прямым методом

Описанный выше подход целесообразно использовать и в ситуации, когда невозможно разделить требования к спектральным и точностным свойствам испытательного сигнала. Рассмотрим структурную схему устройства для прямого определения характеристик с учетом возникающих погрешностей (рис. 5.8).

В реальном генераторе характеристического испытательного сигнала *ГХИС* с помощью оператора $\mathbf{B}_0$ осуществляется преобразование характеристического сигнала s_0 : $s = \mathbf{B}_0 s_0$ с погрешностью δs. В результате испытательный сигнал на выходе *ГХИС* $\tilde{x} = \mathbf{B}_0 s_0 + \delta s$. Действительный оператор $\mathbf{B}$ исследуемого средства измерений *СИ* преобразует реальный испытательный сигнал $\tilde{x}$ в выходной сигнал $y = \mathbf{B}\tilde{x}$. В результате регистрации выходного сигнала с помощью средства регистрации *СР* получается оценка $\tilde{y} = \mathbf{B}_1 y + \delta y$, где $\mathbf{B}_1$ — номинальный оператор *СР*; δy — погрешность, учитывающая отклонение реального оператора *СР* от $\mathbf{B}_1$.

На основе исходных данных $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ с помощью конкретного прямого метода находится оценка $\tilde{\mathbf{B}}$ оператора *СИ*, такая, что $\tilde{y} = \tilde{\mathbf{B}} s_0$. В операторной форме погрешность оценки $\delta\mathbf{B} = \tilde{\mathbf{B}} - \mathbf{B}$. Легко показать, что

$$\delta\mathbf{B}s_0 = \delta y + \mathbf{B}\delta x, \tag{5.34}$$

где $\delta y = \tilde{y} - y$; $\delta x = \tilde{x} - s_0$.

Из соотношения (5.34) видно, что погрешность $\delta\mathbf{B}$ зависит от выбранного характеристического сигнала и погрешности его воспроизведения, действительного оператора *СИ* и погрешности определения выходного сигнала. Поэтому отправляясь от требуемой точности определения характеристики (заданной погрешности $\Delta\mathbf{B}$), можно установить требования к δy и δx на основе (5.34). Далее, поскольку

$$\delta x = (\mathbf{B}_0 - \mathbf{I})\, s_0 + \delta s; \quad \delta y = (\mathbf{B}_1 - \mathbf{I})\, \mathbf{B}\,(\mathbf{B}_0 s_0 + \delta s), \tag{5.35}$$

то по установленным Δx и Δy можно с помощью (5.35), в свою очередь, установить требования к $\mathbf{B}_0$, δs и $\mathbf{B}_1$, δy, т. е. требования к *ГХИС* и *СР*. На каждом из рассмотренных этапов приходится устанавливать требования к двум составляющим погрешности (двум характеристикам аппаратуры). Разделить эти составляющие, например δs и $(\mathbf{B}_0 - \mathbf{I})\, s_0$, можно, лишь задаваясь одной из них и проверяя (рассчитывая) другую. Решение задачи на втором этапе осложняется тем, что в выражение для погрешности δy входят характеристики *ГХИС* $\mathbf{B}_0$ и δs. Таким образом, установление требований к характеристикам *ГХИС* и *СР*, при удовлетворении которых обеспечивается требуемая точность определения $\mathbf{B}$, в общем случае выливается в процедуру последовательных приближений. Каждое из приближений к нужным свойствам *ГХИС* находится на основе результатов, полученных в § 3.3. Что касается *СР*, то его требуемые характеристики, как указано выше, определяются путем решения прямой задачи динамики.

Рассмотрим далее косвенный метод определения характеристик в его основном варианте, характеризуемом использованием генератора испытательного сигнала *ГИС* (рис. 5.7). Если используемые в конкретной области измерений испытательные сигналы имеют не очень сложную форму, то, как указано выше, возможно его описание как преобразователя с передаточной функцией W_0. При этом решение задачи остается принципиально таким же, как для прямого метода. Разница состоит лишь в том, что связь погрешности оператора $\delta\mathbf{B}$ с погрешностями исходных данных для косвенного метода сложнее, чем (5.34). Поэтому установление требований

к *ГИС* и *СР* возможно только методом последовательных приближений. При этом базой для решения задачи являются результаты, представленные в § 3.2.

Второй вариант косвенного метода иллюстрируется структурной схемой измерительного устройства, представленной на рис. 5.9. Этот вариант характеризуется тем, что источник испытательного сигнала не является мерой, и поэтому для определения сигнала, действующего на вход исследуемого *СИ*, приходится использовать средство регистрации $СР_1$, включающее в себя в общем случае из-

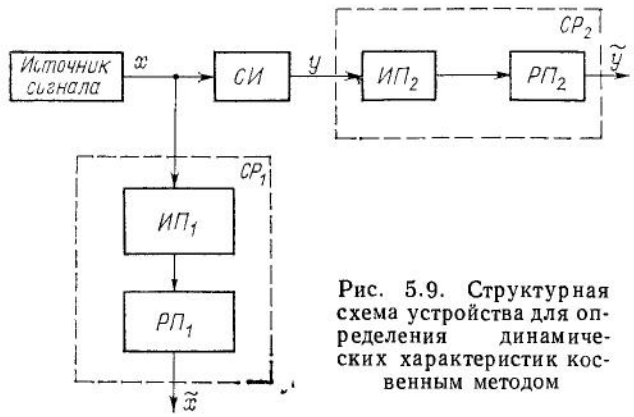


Рис. 5.9. Структурная схема устройства для определения динамических характеристик косвенным методом

мерительный преобразователь $ИП_1$ и регистрирующий прибор $РП_1$. К источнику сигнала должны быть предъявлены два основных требования: обеспечение необходимой широкополосности генерируемого сигнала и кратковременной стабильности формы и параметров сигнала на интервале времени с длительностью, не меньшей времени наблюдений (времени регистрации выходного сигнала *СИ*). Требования к $СР_1$ и $СР_2$ идентичны: они должны обеспечить достаточно точную регистрацию сигналов x и y соответственно.

Установление требований к источнику в отношении широкополосности генерируемого сигнала осложняется тем, что о свойствах сигнала x приходится судить по оценке $\tilde{x}$:

$$\tilde{x} = \mathbf{B}_1 x, \tag{5.36}$$

где $\mathbf{B}_1$ — оператор $СР_1$.

Строго говоря, переход от $\tilde{x}$ к x требует решения обратной задачи динамики: $x = \mathbf{B}_1^{-1}\tilde{x}$, однако вследствие некорректности этой задачи ее следует избегать. Альтернативный подход состоит в подборе на основе априорной информации такого сигнала x, который удовлетворяет уравнению (5.36). При этом требуется лишь решение прямой задачи динамики.

Если полоса пропускания $СР_1$ значительно шире спектра $\tilde{x}$ и частотные характеристики $СР_1$ обладают высоким постоянством, то можно считать $\tilde{x}$ достаточно хорошей оценкой x. Погрешность $\tilde{x}$

следует оценить по частным характеристикам $СР_1$: непостоянству АЧХ в диапазоне частот, содержащем спектр $\tilde{x}$, и нелинейности ФЧХ в том же диапазоне. Для оценивания погрешности можно использовать результаты, полученные в § 4.3. Оценку $\tilde{x}$ можно использовать для проверки того, удовлетворяет ли x требованиям по широкополосности. Сами эти требования устанавливаются аналогично тому, как это описано выше для прямого метода и основного варианта косвенного метода. Требования к ширине полосы пропускания $СР_1$, удовлетворение которых обеспечивает регистрацию x с малыми искажениями, затруднительно установить путем решения формальной задачи. Здесь также требуется использовать априорную информацию об источнике сигнала. Требования к точностным характеристикам $СР_1$ и $СР_2$ устанавливаются исходя из требуемой точности определения характеристики *СИ* аналогично тому, как это делается для других методов. В целом данный вариант косвенного метода менее предпочтителен, чем основной, вследствие того, что определение спектральных свойств сигнала x по свойствам его оценки x обусловлено достоверностью априорной информации.

Все изложенное выше по установлению требований к точностным свойствам средств аттестации и контроля средств измерений относилось к погрешностям этих средств в динамическом режиме. Рассмотрим вопрос об установлении требований непосредственно к характеристикам этих средств. Будем исходить из того, что описанными выше способами установлена допускаемая погрешность средства в динамическом режиме, которая выражена пределом ее нормы в $\mathscr{L}_2$:

$$\|\delta(t)\|_{\mathscr{L}_2} \leqslant \Delta^2. \tag{5.37}$$

Раскрывая левую часть неравенства (5.37), получим

$$\int_0^\infty [A^2(\omega) - 2A(\omega)\cos\Phi(\omega) + 1]\, X^2(\omega)\, d\omega \leqslant \Delta^2, \tag{5.38}$$

где $A(\omega)$, $\Phi(\omega)$ — частотные характеристики средства, а $X(\omega)$ — спектр сигнала на его входе (например, испытательного сигнала для $СР_1$ и выходного сигнала *СИ* для $СР_2$ на схеме рис. 5.9).

Неравенство (5.38) позволяет проверить, удовлетворяют ли частотные характеристики конкретного средства установленным требованиям. Преобразуем левую часть (5.38):

$$E_x - 2\int_0^\infty A(\omega)\, X^2(\omega)\cos\Phi(\omega)\, d\omega + E_y/K^2 \leqslant \Delta^2, \tag{5.39}$$

где E_x, E_y — энергия сигналов x и y соответственно.

Пусть характеристика средства представлена номинальными частотными характеристиками $A_н(\omega)$, $\Phi_н(\omega)$ и пределами ΔA, $\Delta\Phi$ допускаемых отклонений от них. Подставив указанные величины

в выражение (5.39) и предполагая ΔA, $\Delta\Phi$ малыми, получим с точностью до бесконечно малых 2-го порядка:

$$E_x + E_y/K^2 - I_c - \Delta\, AI + \Delta\Phi\, I_s \leqslant \Delta^2, \tag{5.40}$$

где

$$I_c = \frac{2}{K}\int_0^\infty X(\omega)\, Y(\omega)\cos\Phi_н(\omega)\, d\omega;$$

$$I = 2\int_0^\infty X^2(\omega)\cos\Phi_н(\omega)\, d\omega; \quad I_s = \frac{2}{K}\int_0^\infty X(\omega)\, Y(\omega)\sin\Phi_н(\omega)\, d\omega.$$

Соотношение (5.40) позволяет при выбранных номинальных АЧХ и ФЧХ средства определить пределы допускаемых отклонений. В нем оба интеграла и E_x вычисляются точно, а при вычислении E_y можно действительную АЧХ заменить номинальной. Точнее, выражение (5.40) нужно использовать для проверки того, удовлетворяют ли характеристики средства неравенству (5.38). Для выбора средства следует применять соотношение

$$E_x + E_{y_н}/K^2 - I_c + \Delta\, A\,(I_y - I) + \Delta\Phi\, I_s \leqslant \Delta^2, \tag{5.40а}$$

где $E_{y_н}$ — энергия номинального (рассчитанного) выходного сигнала; $I_y = \frac{2}{K}\int_0^\infty X(\omega)\, Y_н(\omega)\, d\omega$.

Во временной области неравенство (5.37) имеет вид:

$$\int_0^\infty \left[\int_0^t g(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau - x(t)\right]^2 dt \leqslant \Delta^2. \tag{5.41}$$

Пусть характеристика средства задана номинальной импульсной характеристикой $g_н(t)$ и пределом Δg допускаемого отклонения от нее. Из выражения (5.41) получаем аналогично (5.40) и (5.40а)

$$\Delta g \leqslant (E_x + E_y/K^2 - I_{xy} - \Delta^2) \Big/ \int_0^\infty x(t)\, I(t)\, dt; \tag{5.42}$$

$$\Delta g \leqslant (E_x + E_y/K^2 - I_{xy} - \Delta^2) \Big/ \int_0^\infty [x(t) - y_н(t)]\, I(t)\, dt, \tag{5.42а}$$

где

$$I_{xy} = 2\int_0^\infty x(t)\, y_н(t)\, dt; \quad I = 2\int_0^t x(\tau)\, d\tau.$$

Неравенство (5.42) может быть также использовано с учетом связи между импульсной и переходной характеристикой для установления допускаемых отклонений переходной характеристики от номинальной.

Если предел Δ допускаемой погрешности задан в норме C, то аналогично предыдущему можно получить следующее условие для Δg:

$$\max\,(I_x\, \Delta g + |\, y_н - x\,|) \leqslant \Delta.$$

5.4. ТРЕБОВАНИЯ К ТОЧНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ

При анализе вопросов данной главы допускаемая погрешность определения характеристик считалась заданной. Поскольку определение характеристик имеет целью, кроме обеспечения единообразия средств измерений, также обеспечить возможность оценивания погрешностей измерений, необходимо рассмотреть вопрос об установлении указанной допускаемой погрешности.

Задача ставится следующим образом. Пусть устройство предназначено для преобразования или регистрации переменного сигнала $x(t)$, т. е. требуемый оператор $\mathbf{B}$ представляет собой оператор K масштабного преобразования. Предположим также, что статическая составляющая погрешности динамических измерений оценена, что позволяет считать $K = 1$. При этих условиях погрешность динамических измерений, или динамическая погрешность, определяется отличием реального оператора средства измерений $\mathbf{B}$ от тождественного:

$$\delta(t) = y - x = (\mathbf{B} - \mathbf{I})\, x. \tag{5.43}$$

Поскольку сигнал x неизвестен, для оценивания погрешностей вместо (5.43) должно быть использовано в качестве определяющего уравнения

$$\delta = y - \mathbf{B}^{-1} y. \tag{5.44}$$

На практике вместо $\mathbf{B}$ имеется его оценка $\widetilde{\mathbf{B}}$, полученная в результате исследований динамических свойств средства измерений. Использование $\widetilde{\mathbf{B}}$ вместо $\mathbf{B}$ в выражении (5.44) приводит к получению оценки погрешности $\widetilde{\delta} = y - \widetilde{\mathbf{B}}^{-1} y$. Разность $\widetilde{\delta} - \delta$, определяющая неточность оценивания погрешности,

$$\delta_\delta = \widetilde{\delta} - \delta = \left(\mathbf{B}^{-1} - \widetilde{\mathbf{B}}^{-1}\right) y. \tag{5.45}$$

Следовательно, погрешность определения оператора устройства $\delta\mathbf{B} = \widetilde{\mathbf{B}} - \mathbf{B}$ обусловливает погрешность δ_δ оценки («погрешность погрешности»).

Таким образом, для установления требований к точности определения $\mathbf{B}$ нужно исходить из требуемой точности оценки погрешности средства измерений. Простой анализ различных соотношений между статической и динамической погрешностями показывает, что в тех случаях, когда необходим учет динамической погрешности, требуемая точность ее оценки не зависит от статической погрешности. Поэтому в качестве допускаемой можно считать, как принято в метрологической практике, относительную погрешность оценки динамической погрешности, равную 20—25 %. При этом задача установления требуемой точности определения динамической характеристики устройства формулируется следующим образом: необходимо определить допускаемую погрешность определения оператора средства измерений $\Delta\mathbf{B}$, такую, что отклонение оценки динамической погрешности $\widetilde{\delta}$, полученной на основе оператора $\widetilde{\mathbf{B}} =$

$= \mathbf{B} + \Delta\mathbf{B}$, от действительной динамической погрешности δ не превосходит $\delta_\delta = 0{,}25\ \delta$.

Конкретизируем задачу для случая, когда оператор $\mathbf{B}$ представлен в форме передаточной функции $W = W(p; \mathbf{T})$, где $\mathbf{T} = (T_1, \ldots T_n)$ — вектор параметров. Для этого случая (5.45) примет вид:

$$\delta_\delta = \max \left| \mathbf{L}^{-1} \{ X(p) [\widetilde{W}(p) - W(p)] \} \right|. \qquad (5.46)$$

Пусть структура передаточной функции определяется безошибочно и отклонение $\widetilde{W}$ от W обусловлено лишь погрешностями δT_i определения параметров:

$$\widetilde{W} = W(p; \mathbf{T} + \delta\mathbf{T}), \qquad (5.47)$$

где $\delta\mathbf{T} = (\delta T_1, \ldots, \delta T_n)$.

Очевидно, с учетом выражения (5.47), что левая часть (5.46) представляет собой функцию погрешностей параметров, в то время как правая часть есть число. Таким образом, задача определения допускаемых погрешностей δT_i из уравнения (5.46) не имеет однозначного решения. Поэтому представляется целесообразным использовать следующий алгоритм, основанный на вариационной идее.

Алгоритм включает в себя два этапа. На первом этапе поочередно определяются максимально возможные для имеющихся исходных данных погрешности δT_{im}. Каждая i-я погрешность находится из уравнения (5.46) в предположении, что коэффициенты $T_1, \ldots, T_{i-1}, T_{i+1} \ldots, T_n$ определены точно, т. е. $\widetilde{W} = W(p; T_1, \ldots, T_{i-1}, T_i + \delta T_i, T_{i+1}, \ldots, T_n)$. Найденные максимальные погрешности δT_{im} представляют собой граничные точки (вершины) эллипсоида рассеяния допускаемых погрешностей, соответствующего уравнению (5.46). Поскольку реализация одновременно всех максимальных значений δT_{im} обусловливает значительно большую, чем заданная, погрешность определения характеристики, то необходимо согласование (оптимизация) значений δT_i, с тем чтобы обеспечить указанную погрешность, не превышающую δ_δ.

На втором этапе согласование δT_i на основе найденных проводится с помощью представления передаточной функции в форме:

$$\widetilde{W} = W(p; T_1 + \alpha_1 \delta T_{1m}, \ \ldots, T_n + \alpha_n \delta T_{nm}), \qquad (5.48)$$

где весовые коэффициенты α_i удовлетворяют условиям: $0 \leqslant \alpha_i \leqslant 1$, $i = 1, \ldots, n$.

Коэффициент α_i может быть выбран как подходящая функция (например, линейная) величины, обратной чувствительности W к изменениям параметра T_i. Подстановка выражений для α_i в (5.48) и нахождение из (5.46) неизвестных коэффициентов дают решение задачи.

Поскольку выражение (5.46) содержит, кроме передаточной функции W и ее оценки $\widetilde{W}$, также выражение входного сигнала $x(t)$, очевидно, что детализация описанного алгоритма требует конкретизации моделей сигналов и средств измерений.

5.5. ПРИМЕРЫ. СПОСОБЫ ОБЕСПЕЧЕНИЯ ЕДИНСТВА ИЗМЕРЕНИЙ ПЕРЕМЕННЫХ ДАВЛЕНИЙ, ПИКОВЫХ УСКОРЕНИЙ И ПУЛЬСАЦИЙ ТЕМПЕРАТУР

Переменные давления. Основой обеспечения единства измерений переменных давлений служат государственный специальный эталон и государственная поверочная схема (см. ГОСТ 8.433—81). Государственный эталон содержит две группы установок, предназначенных соответственно для воспроизведения ступенчатых и гармонических давлений [46]. Первая группа включает в себя установки УУТ-4 (с ударной трубой) и УБК-4 (с быстродействующим клапаном (см. ГОСТ 8.433—81). Упрощенная структурная схема установки УУТ-4, в которой реализован ударно-волновой метод для газовой среды, приведена на рис. 5.10. Основной элемент установки — ударная труба — состоит из камер высокого и низкого давления, которые разделены между собой диафрагмой. Камеры заполнены газом: первая (высокого давления) — азотом, вторая (низкого давления) — воздухом или азотом. После искусственного разрушения диафрагмы газ, находящийся под избыточным давлением в первой камере, поступает во вторую камеру, сжимая находящийся в ней газ. На определенном расстоянии от диафрагмы во второй камере формируется плоская ударная волна, которая распространяется со сверхзвуковой скоростью. Перепад давлений, т. е. разность давления на фронте ударной волны P_2 и начального давления во второй камере P_1, для идеального газа выражается формулой

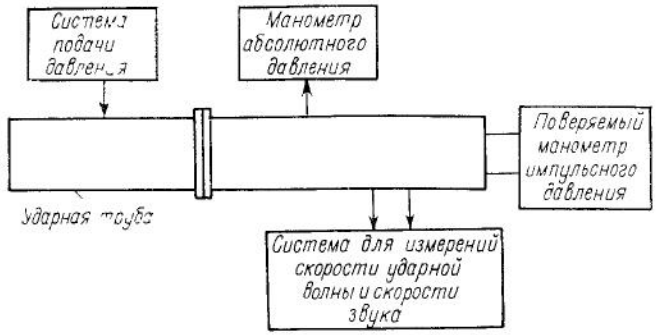


Рис. 5.10. Упрощенная структурная схема установки УУТ-4

$$P_2 - P_1 = 2\gamma P_1 (M^2 - 1)/(\gamma + 1), \qquad (5.49)$$

где $M = D/a$ — число Маха ударной волны; D — скорость распространения фронта ударной волны; a — скорость звука в камере низкого давления; $\gamma = C_P/C_v$ — показатель адиабаты (отношение удельных теплоемкостей газа при постоянном давлении C_P и объеме C_v). Установившееся значение перепада определяется на основе измерений входящих в выражение (5.49) величин. Погрешность определения установившегося значения обусловлена точностью измерений D, P_1, a и точностью определения γ.

Существенным источником погрешностей является также неидеальность рабочего газа. Воздух и азот в камере низкого давления нагреваются при $M = 4$ до 1200 К, что приводит к изменению теплоемкости и уменьшению γ.

В установке УБК-4 реализован метод скачка давления в жидкости [29]. Установка включает в себя две камеры с объемами $2 \cdot 10^3$ и 6 см^3, заполненные жидкостью и разделенные быстродействующим клапаном. В камере малого объема поддерживается атмосферное давление, которое измеряется с помощью образцового манометра. При открывании клапана давление в малой

камере нарастает до уровня, который меньше избыточного на величину, **зависящую** от отношения объемов камер. При отношении $5 \cdot 10^2$ снижение давления относительно избыточного не превышает 0,2 %. Время нарастания давления определяется быстродействием клапана. Осциллограмма переходного давления, полученная с помощью преобразователя типа ЛХ-612, приведена на рис. 5.11. Длительность переходного процесса не превышает 10 мс; время нарастания до первого максимума не более 0,3 мс; частота затухающих колебаний примерно 2 кГц. Падение установившегося давления вследствие утечки жидкости через зазоры поршневой пары клапана пропорционально амплитуде переходного давления. При начальном давлении 3 МПа постоянная времени спада давления составляет 1800 с. Начальное избыточное давление измеряется с помощью образцового манометра класса 0,4.

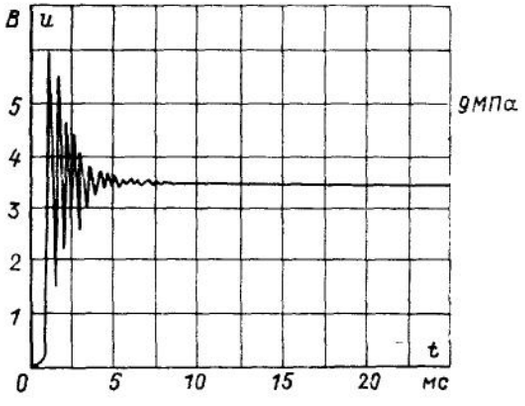


Рис. 5.11. Осциллограмма выходного сигнала установки УБК-4

Вторая группа содержит установки УГПД-9, УГПД-14 и «Фонотрон-4» (см. [47] и ГОСТ 8.433—81), предназначенные для воспроизведения гармонически изменяющихся давлений. В установке УГПД-9 реализован метод переменной глубины в открытой камере. Основной элемент установки — заполненная жидкостью качающаяся трубка, частота и амплитуда угловых колебаний которой задаются с помощью механического привода. Амплитуда воспроизводимого давления $P = \rho g \Delta h/2$, где ρ — плотность жидкости; g — ускорение силы тяжести; Δh — изменение уровня жидкости в трубке.

Установка позволяет воспроизводить гармонические давления с частотами в диапазоне 10^{-3} — 1 Гц и амплитудами от 10^2 до 10^4 Па с погрешностью не более 2 %.

В установке УГПД-14 реализован метод взаимности в замкнутой малой камере [47]. В камеру, где находятся вспомогательный излучатель и обратимый преобразователь, помещается градуируемый образцовый измерительный преобразователь. Коэффициент преобразования образцового преобразователя определяется по формуле:

$$K_{оп} = \sqrt{H \frac{U_1}{U_2} \cdot \frac{U_3}{i}},$$

где H — параметр взаимности, являющийся функцией жесткости камеры и определяемый с помощью грузопоршневого манометра; U_1/U_2 — отношение напряжений на выходах образцового и обратимого преобразователей при работе вспомогательного излучателя; U_3 — напряжение на выходе образцового преобразователя при работе обратимого преобразователя в режиме излучения; i — ток в цепи обратимого преобразователя.

В установке «Фонотрон-4» реализован интерференционно-оптический метод в трубе-резонаторе [47]. В трубе переменной длины, заполненной жидкостью, с помощью пьезоэлектрического излучателя, вмонтированного в уплотненный поршень, создается гармоническое давление. Измерение амплитуды давления производится с помощью интерферометра. Разность хода лучей интерферометра пропорциональна изменению показателя преломления, зависящего от давления в камере. Амплитуда воспроизводимого давления $P = kN$, где k — приращение давления, вызывающее смещение интерференционной картины на одну полосу; N — число целых и дробных долей полос, проходящих перед щелью фотоприемника за четверть периода изменений давления.

Размер единицы давления с помощью прямых измерений от эталона передается рабочим эталонам, образцовым средствам измерений периодического давления и рабочим средствам переменного давления. В качестве рабочих эталонов используются манометры импульсного давления с диапазонами параметров: амплитуда — $1 \cdot 10^4$ — $1 \cdot 10^6$ Па, длительность — $1 \cdot 10^{-5}$—10 с. Образцовыми средствами измерений периодического давления служат манометры ($1 \cdot 10^2$ — $1 \cdot 10^6$ Па, $5 \cdot 10^{-2}$ — $1 \cdot 10^4$ Гц). Рабочие средства измерений переменного давления включают в себя измерительные преобразователи и манометры ($1 \cdot 10^2$ — $1 \cdot 10^6$ Па, $5 \cdot 10^{-2}$ — $1 \cdot 10^4$ Гц).

От рабочих эталонов размер единицы передается с помощью прямых измерений образцовым средствам измерений, образцовым и рабочим генераторам импульсного давления с диапазонами параметров: $1 \cdot 10^4$ — $1 \cdot 10^6$ Па, $1 \cdot 10^{-5}$ — 10 с и $1 \cdot 10^4$ — $1 \cdot 10^6$ Па, $1 \cdot 10^{-3}$ — $1 \cdot 10^{-1}$ с, соответственно. С помощью образцовых генераторов поверяются рабочие средства измерений: измерительные преобразователи и манометры импульсного давления ($1 \cdot 10^4$—$1 \cdot 10^6$ Па, $1 \cdot 10^{-5}$ — 10 с). Образцовые манометры периодического давления используются для поверки путем непосредственных сличений рабочих измерительных преобразователей и манометров периодического давления ($1 \cdot 10^2$ — $1 \cdot 10^6$ Па, $5 \cdot 10^{-2}$ — $1 \cdot 10^4$ Гц) и путем прямых измерений — рабочих генераторов периодического давления ($1 \cdot 10^4$ — $1 \cdot 10^6$ Па, 10 — $1 \cdot 10^3$ Гц).

Таким образом, эталонные установки и поверочная схема обеспечивают воспроизведение единицы давления в динамическом режиме и передачу ее размера рабочим приборам, преобразователям и мерам. Согласование единицы, воспроизводимой специальным эталоном, с единицей, воспроизводимой государственным первичным эталоном, осуществляется за счет использования образцовых манометров, с помощью которых измеряются избыточные постоянные давления в эталонных установках.

Пиковые ускорения при ударном движении. Обеспечение единства измерений пиковых ударных ускорений базируется на созданных эталонных и образцовых средствах измерений и передаче размера единиц от этих средств рабочим приборам — ударным акселерометрам — в соответствии с утвержденной поверочной схемой (см. ГОСТ 8.137—75). Акселерометры разделены на пять групп со следующими диапазонами пиковых ускорений и длительностей нарастания ускорений до пикового значения: $5 \cdot 10^4$ — $7 \cdot 10^5$ м/с^2 и 0,5 — 2 мкс; $2 \cdot 10^4$ — 10^3 м/с^2 и 18—100 мкс; 10^3 — $2{,}5 \cdot 10^4$ м/с^2 и 0,1—1 мс; 50—$1{,}5 \cdot 10^3$ м/с^2 и 1—5 мс; 10 — $2 \cdot 10^3$ м/с^2 и 5—50 мс. В соответствии с этим разделением поверочная схема содержит пять ветвей. Возглавляющий поверочную схему эталон состоит из четырех установок.

Первая эталонная установка содержит сферический волновод, систему ударного возбуждения, систему управления и емкостное измерительное устройство (см. ГОСТ 8.137—75). Вторая установка 9309 [35] состоит из цилиндрического волновода, систем ударного возбуждения и управления, электронно-оптического измерительного устройства и средства измерений пикового напряжения. В этой установке конденсаторы заряжаются от высоковольтного источника и разряжаются с помощью управляемого разрядника на неподвижный индуктор. При взаимодействии полей индуктора и расширенного торца волновода возникают электромагнитные силы, служащие источником ударного движения. Поверяемое средство измерений укрепляется на рабочем стержне, который имеет клеевое соединение с волноводом. Стержень содержит пьезоэлектрический измерительный преобразователь на

расстоянии менее 0,014 длины волны от места установки вторичного эталона—ударного акселерометра. Воздействующее на стержень пиковое ускорение измеряется с помощью электронно-оптической следящей системы.

Третья установка «Импульс-1» [35] состоит из двух соударяющихся тел, устройств для разгона и торможения, средства измерений пиковых усилий и средства измерений пикового напряжения. К раме установки подвешены на держателях рабочее тело и молот, отклоненный от положения равновесия на определенный угол. На одном торце рабочего тела закреплен градуируемый преобразователь. При соударении сферического торца молота со свободным торцом рабочего тела возникает усилие, изменяющееся во времени по закону $F = F_{\text{п}}\sin^2 at$. Пиковое усилие $F_{\text{п}}$ измеряется с помощью упругоконтактного метода. Значение $F_{\text{п}}$ определяется по диаметру отпечатка, создаваемого сферической поверхностью молота на плоском торце рабочего тела, с использованием решения задачи контактной теории упругости [35].

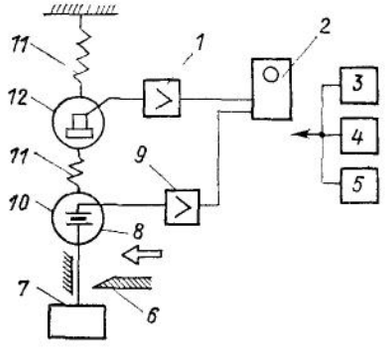


Рис. 5.12. Структурная схема эталонной установки 93103

Четвертая эталонная установка 93103 [35] (рис. 5.12) включает в себя механическую систему с сосредоточенными элементами и параметрическим возбуждением, систему управления, весы и средство измерений пикового напряжения поверяемого преобразователя. Два рабочих тела *10* и *12* подвешены последовательно друг за другом к неподвижной опоре на двух элементах сопротивления (нитях или струнах) *11*, которые растянуты с помощью груза *7*, связанного с нижним телом. При разрыве связи с помощью устройства *6* образуется система с двумя степенями свободы, в которой верхнее тело колеблется с ускорением $a = s\,(\cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t)$, где s, ω_1 и ω_2 зависят от масс тел и груза, коэффициентов упругости элементов сопротивления и ускорения свободного падения.

Выходной сигнал градуируемого преобразователя через согласующий усилитель *1* поступает на осциллограф с запоминанием *2*. Параметры записанного сигнала измеряются с помощью генератора колебаний *3*, контролируемого точным вольтметром *4*. Коэффициенты упругости определяются путем измерений периодов собственных колебаний парциальных систем и взвешивания тел *10* и *12*. Для измерений периодов служит частотомер *5*. Синхронизация осциллографа производится с помощью скачкообразного сигнала, вырабатываемого кварцевым резонатором *8* при разрыве связи с грузом и усиливаемого с помощью усилителя *9*.

В качестве рабочих эталонов применяются группы переменного состава ударных акселерометров для каждой из трех совокупностей диапазонов параметров: $2\cdot10^4$ — 10^6 м/с^2 и 18—100 мкс; 10^3 — $2{,}5\cdot10^4$ м/с^2 и 0,1—1 мс; 10 — $2\cdot10^3$ м/с^2 и 1—50 мс. Образцовые средства измерений 1-го разряда состоят из электронно-оптических акселерометров с цилиндрическим волноводом, упругоконтактных акселерометров с баллистической установкой и мер пикового ускорения. Для наиболее важного для практики диапазона длительностей фронтов ударных ускорений 1—50 мс поверочной схемой предусмотрены образцовые средства измерений 2-го разряда — акселерометры с электродинамической установкой, сличаемые при помощи компаратора с образцовыми мерами пикового ускорения 1-го разряда. На всех остальных ступенях поверочной схемы передача размера единицы производится с помощью прямых измерений.

Пульсации температур потоков воды. Турбулентные пульсации температуры водного потока измеряются с помощью первичных преобразователей, создающих электрический сигнал, пропорциональный температуре потока. В качестве термопреобразователей используются микротермопары, стержневые термометры сопротивления и пленочные термоприемники. Термопреобразователи, как правило, включаются в мостовую измерительную схему, и напряжение разбаланса моста служит в качестве сигнала измерительной информации, который измеряется с помощью электроизмерительных приборов.

Обеспечение единства измерений пульсаций температур основано на хранении и поддержании эталона единицы переменной температуры и передаче размера единицы в соответствии с утвержденной поверочной схемой (см. ГОСТ 8.312—78).

Эталон состоит из следующих средств измерений:

установки для воспроизведения пульсаций температуры водной среды;

термометра сопротивления для измерений и регистрации амплитуды пульсаций температуры;

термометра сопротивления для измерений и регистрации фоновой температуры;

установки для градуировки термометров сопротивления в статическом режиме, включающей в себя образцовый платиновый термометр сопротивления 1-го разряда.

Таким образом, поверочная схема возглавляется, по существу, эталонным измерительным преобразователем (см. § 5.4). Преобразователь является предельно быстродействующим и служит для определения формы и параметров сигнала, воспроизводимого источником пульсаций, который включен в эталонный комплекс. Статические характеристики эталонного преобразователя устанавливаются путем его градуировки с помощью образцового термометра сопротивления 1-го разряда, входящего в состав государственной поверочной схемы (см. ГОСТ 8.080—80), которая служит для обеспечения единства измерений температуры в статическом режиме.

В целом эталонный комплекс представляет собой исходную динамическую меру, которая воспроизводит единицу температуры в динамическом режиме (в установленных границах параметров среды).

Сигнал пульсаций температуры (на установленном постоянном фоне) используется как испытательный сигнал для градуировки образцовых малоинерционных термометров в динамическом режиме. В процессе градуировки, кроме статических характеристик, устанавливаются динамические свойства термометров. Моделью термометра служит инерционное звено 1-го порядка, характеризуемое одним параметром — постоянной времени (показатель тепловой инерции). Этот показатель не должен превышать 1 мс.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Агалецкий П. Н.** Динамические измерения механических величин.— В кн.: Итоги науки и техники. Сер. Метрология и измерительная техника, т. 2.— М.: ВИНИТИ, 1972, с. 7—29.

2. **Азизов А. М., Гордов А. Н.** Точность измерительных преобразователей.— Л.: Энергия, 1975.— 256 с., ил.

3. **Арсеиин В. Я., Иванов В. В.** Восстановление формы сигнала, свободной от искажений, обусловленных аппаратурой и каналом передачи.— Измерительная техника, 1969, № 1, с. 74—79.

4. **Арутюнов В. О., Грановский В. А.** Нормирование и определение динамических свойств средств измерений.— Измерительная техника, 1975, № 12, с. 25—37.

5. **Бакланов В. Ф., Леонов В. В., Скорик Г. С.** Определение коэффициентов передаточной функции измерительной системы по известному входному воздействию и отклику.— Метрология, 1974, № 7, с. 48—61.

6. **Бейтмен Г., Эрдейи А.** Таблицы интегральных преобразований.— М.: Наука, 1968.— 344 с., ил.

7. **Богданов Э. О.** Фоторезисторы и их применение.— М.—Л.: Энергия, 1978.— 151 с., ил.

8. **Бренер М. Д., Солопченко Г. Н.** Об оценке динамических характеристик при поверке нелинейных средств измерений.— Труды ВНИИЭП, 1973, вып. 18, с. 52—62.

9. **Бренер М. Д., Хрумало В. М.** Об оценке динамических параметров типичных инерционных средств измерений.— Труды ВНИИЭП, 1973, вып. 16, с. 93—98

10. **Бренер М. Д., Шкабардня М. С.** О погрешности измерений с помощью светолучевых осциллографов в динамическом режиме.— Метрология, 1980, № 8, с. 22—31.

11. **Быкова Г. М., Северов Л. А.** О динамических характеристиках измерителя угловой скорости вибрационного типа.— Труды метрологических институтов СССР, 1977, вып. 206 (266), с. 50—56.

12. **Вайсбанд М. Д.** Выбор средств для измерений изменяющихся во времени величин с погрешностью, меньшей заданной.— В кн.: Динамические измерения. Тезисы докладов 2-го Всесоюзного симпозиума. — Л.: НПО «ВНИИМ им. Д. И. Менделеева», 1978, с. 29—32.

13. **Василенко Г. И.** Теория восстановления сигналов.— М.: Советское радио, 1979. 272 с., ил.

14. **Васильев В. Г.** Об оценке точности воспроизведения воздействий линейными следящими и регистрирующими системами.— Автоматика и телемеханика, 1958, т. XIX, № 1, с. 26—48.

15. **Вашны Е.** Динамика измерительных цепей.— М.: Энергия, 1969, 288 с.

16. **Волкоиский В. А., Немировский А. С.** Оценка динамических погрешностей и ошибок интегрирования измерительных приборов.— Труды метрологических институтов СССР, 1962, вып. 57 (117), с. 47—67.

17. **Гоноровский И. С.** Радиотехнические цепи и сигналы.— М.: Советское радио, 1967. Ч. 1.— 440 с., нл.

18. **Гордов А. Н.** Измерения температур газовых потоков.— М.— Л.: Машгиз, 1962.— 136 с., ил.

19. **Грановский В. А.** Использование цепных дробей при моделировании динамических свойств измерительных преобразователей.— В кн.: Методы и средства преобразования сигналов. Материалы конференции. — Рига: Институт электроники и вычислительной техники АН ЛатССР, 1976, с. 221 — 224.

20. **Грановский В. А.** Методика оценки погрешностей определения полных динамических характеристик средств измерений.— Измерительная техника, 1977, № 7, с. 24—26.

21. **Грановский В. А.** О пригодности средств измерений для работы в динамическом режиме с погрешностью, не превышающей заданную.— Труды метрологических институтов СССР, 1975, вып. 157 (217), с. 41—48.

22. **Грановский В. А.** Определение полных динамических характеристик средств измерений путем интегрирования входного и выходного сигналов.— Измерительная техника, 1981, № 8, с. 11—14.

23. **Грановский В. А., Довбета Л. И.** О формулировке постулатов теории измерений.— В кн.: Фундаментальные проблемы метрологии. [Материалы Всесоюзного семинара.] — Л.: НПО «ВНИИМ им. Д. И. Менделеева», 1981, с. 80—84.

24. **Грановский В. А., Конопелько Л. А., Этингер Ю. С.** Нормирование и определение динамических погрешностей приборов контроля атмосферы.— Измерительная техника, 1977, № 9, с. 75—77.

25. **Грановский В. А., Кудрявцев О. А.** Оценивание погрешностей прямых динамических измерений.— Метрология, 1981, № 1, с. 3—16.

26. **Грановский В. А., Этингер Ю. С.** Алгоритм определения полных динамических характеристик линейных аналоговых средств измерений с сосредоточенными параметрами.— Метрология, 1978, № 9, с. 3—11.

27. **Денисов А. Ф., Казимянец В. Н., Сольцас Р. Х.** Анализ погрешностей воспроизведения сигналов линейными измерительными системами.— Радиоэлектроника, 1981, т. 17, № 1, с. 49—55.

28. **Дробышев Ю. П.** Оптимизация систем сбора и переработки информации/Автореф. дис. на соиск. учен. степени доктора техн. наук.— Новосибирск, 1970. (СО АН СССР.),— 34 с., ил.

29. **Дунаева В. А., Плотников И. В.** Установка с быстродействующим клапаном для воспроизведения импульсных давлений в жидкости.— Труды метрологических институтов СССР, 1978, вып. 223 (283), с. 76—79.

30. **Желудева Н. А.** Некоторые численные преобразования передаточных функций средств измерений.— Труды ВНИИЭП, 1973, вып. 16, с. 112—117.

31. **Зеленюк В. К., Тартаковский Д. Ф.** Динамические характеристики пленочных измерительных преобразователей.— Измерительная техника, 1973, № 6, с. 18—20.

32. **Земельмаи М. А., Кнюпфер А. П., Кузнецов В. П.** О методах нормирования метрологических характеристик измерительных устройств.— Измерительная техника, 1969, № 1—3.

33. **Ибрагимова Н. Х., Солопченко Г. Н.** Оценка весовой и передаточной функций методом статистической регуляризации.— Труды ВНИИЭП, 1973, вып. 16, с. 86—92.

34. **Иванова А. Г., Берзин С. А.** О методических ошибках традиционного подхода к определению динамических характеристик термоприемников.— Труды метрологических институтов СССР, 1976, вып. 194 (254), с. 20—24.

35. **Измерение параметров** вибрации и удара/В. С. Шкаликов, В. С. Пеллинец, Е. Г. Исакович и др.— М.: Изд-во стандартов, 1980.— 280 с., ил.

36. **Кадук Б. Г., Садовский В. В.** Преобразование Гильберта и анализ сигналов и цепей.— Проблемы технической электродинамики, 1972, вып. 34, с. 3—10.

37. **Казлаускас Е., Паулаускас Ц.** Обзор некоторых способов построения инверсных фильтров, используемых при восстановлении сигналов.— Статистические проблемы управления, 1973, вып. 4, с. 62—74.

38. **Канак Ф. М.** О месте измерений во взаимосвязи эмпирического и теоретического.— В кн.: Гносеологические аспекты измерений. [Материалы

2-го симпозиума по гносеологическим проблемам учения об измерениях в физике.] — Киев: Наукова думка, 1968, с. 79—96.

39. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике для научных работников и инженеров.— М.: Наука, 1978.— 832 с., ил.

40. **Краус М., Вошни Э.** Информационные измерительные системы.— М.: Мир, 1975.— 310 с., ил.

41. **Крылов А. Н.** Некоторые замечания о крешерах и индикаторах.— Известия С.-Петербургской АН, 1909, с. 623—655.

42. **Крылов В. В., Херманис Э. Х.** Модели систем обработки сигналов.— Рига: Зинатне, 1981.— 211 с., ил.

43. **Куликов В. В., Пшеничников В. В.** Алгоритмическая коррекция динамических погрешностей.— Научные труды вузов Поволжья, 1974, т. 7, с. 192—197.

44. **Леонов В. В.** Об определении погрешностей коэффициентов передаточной функции линейной системы.— Радиотехника, т. 30, 1975, № 4, с. 90—92.

45. **Маликов М. Ф.** Основы метрологии.— М.: Изд-во Комитета по делам мер и измерительных приборов при СМ СССР, 1949.— 480 с., ил.

46. **Методы** и средства для определения переходных характеристик преобразователей импульсного давления/И. В. Плотников, В. А. Дунаева, В. А. Ефимов и др.— В кн.: Динамические измерения. Тезисы докладов 2-го Всесоюзного симпозиума.— Л.: НПО «ВНИИМ им. Д. И. Менделеева», 1978, с. 109—111.

47. **Методы** и средства для определения частотных характеристик измерительных преобразователей давления/Ф. Н. Авдеев, Р. М. Долгих,, Л. Б. Ланганс и др.— В кн.: Динамические измерения. [Тезисы докладов 2-го Всесоюзного симпозиума.] — Л.: НПО «ВНИИМ им. Д. И. Менделеева», 1978, с. 106—108.

48. **Методы** определения динамических характеристик аналоговых средств измерений и их программное обеспечение/М. Д. Бренер, А. С. Иванов, Н. И. Серегина и др.— Приборы и системы управления, 1977, № 3, с. 20—23.

49. **Минц М. Б., Ткаченко А. Н.** Магнитоэлектрические веберметры.— М.—Л.: Энергия, 1973.— 112 с., ил.

50. **Морозов В. А.** Линейные и нелинейные некорректные задачи.— В кн.: Итоги науки и техники. Математический анализ.— М.: ВИНИТИ, 1973, с. 129—178.

51. **Мурашов Е. Н.** Исследование некоторых алгоритмов идентификации стационарного линейного объекта по переходной функции.— Метрология, 1972, № 4, с. 67—70.

52. **Нетушил А. В.** Объект индукционного или радиационного нагрева как звено системы автоматического регулирования.— Известия АН СССР. Энергетика и автоматика, 1962, № 2, с. 130—135.

53. **Неуймин Я. Г., Попова И. А., Школьник Б. А.** Оценки динамических погрешностей измерений.— Метрология, 1973, № 1, с. 33—44.

54. **Основные вопросы** оценки динамических погрешностей измерений/Г. И. Кавалеров, С. М. Мандельштам, Г. Н. Солопченко и др.— Приборостроение и автоматический контроль, 1978, вып. 1, с. 19—61.

55. **Основные задачи** метрологического обеспечения динамических измерений/Ю. В. Тарбеев, А. Н. Гордов, В. А. Грановский и др.— Измерительная техника, 1979, № 4, с. 10—13.

56. **Основные понятия** теории динамических измерений/К. П. Широков, В. О. Арутюнов, В. А. Грановский и др.— Измерительная техника, 1975, № 12, с. 9—13.

57. **Оценка** динамической погрешности регистрации кривых намагничивания магнитооптическим методом при использовании адаптивной системы управления скоростью изменения намагничивающего поля/В. Б. Архангельский, М. М. Червинский, С. Ф. Глаголев и др.— В кн.: Динамические измерения. [Тезисы докладов 3-го Всесоюзного симпозиума.] — Л.: НПО «ВНИИМ им. Д. И. Менделеева», 1981, с. 164—168.

58. **Пеллинец В. С.** Измерение ударных ускорений. М.: Изд-во стандартов, 1975.— 288 с., ил.

59. **Поляков Ю. А.** Применение пленочных датчиков для изучения теплообмена в диссоциированном потоке газа.— В кн.: Физическая газодинамика, теплообмен и термодинамика газов высоких температур. М.: Изд-во АН СССР, 1962, с. 251—260.

60. **Попков Ю. С.** Функциональные ряды в теории управляемых динамических систем.— М.: Институт проблем управления, 1976. 60 с.

61. **Светолучевая осциллография**/Под ред. Б. К. Бирюкова. Кишинев: Картя Молдовеняске, 1972.— 224, с., ил.

62. **Светолучевые осциллографы**/В. Хертель, И. Дегенхарт, А. Кюблер и др.— М.: Энергия, 1965.— 456 с., ил.

63. **Симонов М. М., Курбангалеев З. Г.** Синтез регуляризующих алгоритмов восстановления входных воздействий.— В кн.: Динамические измерения. [Тезисы докладов 3-го Всесоюзного симпозиума.] — Л.: НПО «ВНИИМ им. Д. И. Менделеева», 1981, с. 139—143.

64. **Скарборо Дж.** Численные методы математического анализа.— М.: ГТТИ, 1934.— 440 с., ил.

65. **Солодовников В. В., Дмитриев А. Н., Егупов Н. Д.** Ортогональный метод анализа и синтеза линейных систем автоматического управления на основе понятия моментов.— Автоматическое управление и вычислительная техника, 1968, вып. 8, с. 30—86.

66. **Солопченко Г. Н.** Метод статистической регуляризации.— Труды ВНИИЭП, 1970, вып. 5, с. 43—47.

67. **Солопченко Г. Н.** Некорректные задачи измерительной техники.— Измерительная техника, 1974, № 1, с. 51—54.

68. **Тарасов Г. А.** Оценка погрешностей средств измерений в динамическом режиме.— Труды метрологических институтов СССР, 1978, вып. 223 (283), с. 95—101.

69. **Теория** автоматического регулирования. Кн. 1. Математическое описание, анализ устойчивости и качества систем автоматического регулирования/Под ред. В. В. Солодовникова. — М.: Машиностроение, 1967. — 770 с., ил.

70. **Теория** автоматического регулирования. Кн. 2. Анализ и синтез линейных непрерывных и дискретных систем автоматического регулирования/Под ред. В. В. Солодовникова.— М.: Машиностроение, 1967.— 682 с., ил.

71. **Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.** Методы решения некорректных задач.— М.: Наука, 1974.— 224 с., ил.

72. **Тихонов О. Н.** Коррекция результатов измерения по динамическим характеристикам измерительных систем.— Измерительная техника, 1967, № 9, с. 11—14.

73. **Траксел Дж. Г.** Определение динамических характеристик объектов управления.— В кн.: Приспосабливающиеся системы/Под ред. Э. Мишкина и Л. Брауна.— М.: Изд-во иностр. лит., 1963, с. 73—127.

74. **Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н.** Вычислительные методы линейной алгебры.— М.: ГИФМЛ, 1960.— 565 с., ил.

75. **Фейнман Г., Лейтон Р., Сэндс М.** Фейнмановские лекции по физике, вып. 2.— М.: Мир, 1965.— 168 с., ил.

76. **Фертик Н. С.** Передаточные функции и частотные характеристики системы импульсно-фазовой автоподстройки частоты.— Труды метрологических институтов СССР, 1975, вып. 184 (244), с. 98—106.

77. **Функции** с двойной ортогональностью в радиоэлектронике и оптике: Пер. с англ. Под ред. М. К. Размахнина и В. П. Яковлева.— М.: Советское радио, 1971.— 256 с., ил.

78. **Функциональный анализ**/ Под ред. С. Г. Крейна.— М.: Наука, 1972.— 544 с., ил.

79. **Харкевич А. А.** О применении критерия квадратичной погрешности к оценке линейных искажений.— ЖТФ, 1937, т. 7, вып. 5, с. 515—530.

80. **Хургин Я. И., Яковлев В. П.** Финитные функции в физике и технике.— М.: Наука, 1971.— 408 с., ил.

81. Цыпкин Я. З. Основы теории автоматических систем.— М.: Наука, 1977.— 559 с., ил.

82. Чернов В. В., Баженов Д. В. Понятие «динамические измерения».— В кн.: Динамические измерения. Тезисы докладов 1-го Всесоюзного симпозиума. — Л.: ВНИИМ им. Д. И. Менделеева, 1974, с. 7—8.

83. Шкабардня М. С., Мартыненко Н. В. Быстродействующие самопишущие приборы.— М.: Энергия, 1974.— 176 с., ил.

84. Школьник Б. А. Разработка методов и аппаратуры для определения динамических характеристик измерительных преобразователей непрерывных электрических сигналов/Автореф. дис. на соиск. учен. степени канд. техн. наук.— Л.: 1974 (ВНИИМ им. Д. И. Менделеева.) — 23 с., ил.

85. Школьник Б. А. Погрешность определения динамической характеристики по реакции системы на периодический сигнал.— Труды метрологических институтов СССР, 1972, вып. 137 (197), с. 35—38.

86. **Эйкхофф П.** Основы идентификации систем управления.— М.: Мир, 1974.— 688 с., ил.

87. **Astrom K. J.** System identification — a survey.— Automatica, 1971, vol. 34, № 2, п. 123—162.

88. **Balkomb J. D., Demuth H. B., Gyftopoulos E. P.** A cross-correlation method for measuring the impulse response of reactor systems.— Nucl. Sci. Engng., 1961, vol. 11, № 2, p. 159—166.

89. **Bruni C.** Analisi della Approsi mazione ottenibile mediante lo sviluppo in serie di funzioni di Laguerre della impulsiva di sistemi e normali.— La ricerca scientifica, Anno 34, Rediconti A., 1964, vol. 4 № 3, p. 377—403.

90. **Collins P. L., Khatri H. C.** Identification of distributed parameter systems using finite differences.— Trans. of the ASME, 1969, vol. 91, ser. D, № 2, p. 239—245.

91. **Diamessis J. E.** A new method for determining the parameters of physical systems.— PIEEE, 1965, vol. 53, № 2, p. 205—206.

92. **Kuperman J. B.** Approximate linear algebraic equations.— London: Van Nostrand Reinhold Co., 1971, p. 225.

93. **Lal M., Mitra R.** A comparison of transfer function simplification methods.— IEEE Trans., 1974, vol. AC-19, № 5, p. 211—212.

94. **Lannoy F.** Nouvelle methode d'identification a'partir de la réponse temporelle.— Automatisme, 1970, vol. 15, № 10, p. 519—525.

95. **Lepers H.** Integrationsverfahren zur Systemidentifizierung aus gemessenen Systemantvorten.— Regelungstechnik und Prozeβ-Datenverarbeitung, 1972, H. 10, S. 417—422.

96. **Loos H. R.** Zpusob vypostu vstupni veliciny prenaseciho systemu.— Slaboproudy obzor, 1953, vol. 14, № 11, S 458—464; 1954, vol. 15, № 4, S.161—164.

97. **Publication** 51. Recommandations pour les appareils de mesure électriques indicateurs á action directe et leurs accessoires.— Genéve: Bureau Central de la Commission Electrotechnique Internationale, 1973, p. 105.

98. **Recommandation** Internationale 34. Classes de précision des instruments de mesurage.— Paris: Organisation Internationale de Métrologie Légale, 1974, p. 34.

99. **Spraque C. H., Nash R. T.** A simple method for analysis of transient measurement problems.— Adv. Instr., 1970, vol. 25, pt. 1, 518/1—518/10.

100. **Strejc V.** Ausvertung der dynamischen Eigenschaften von Regelstrecken bei gemessenen Ein-und Ausgangssignalen allgemeiner Art.— Automatisierung (DDR), 1960, H. 1, S. 7—11.

101. **Unbehauen H.** Übersicht über Methoden zur Identification (Erkennung) dynamischer Systeme. Regelungstechnik und Prozeβ-Datenverarbeitung, 1973, Bd. 21, H. 1, S. 2—8.

102. **Woschni E.-G.** Eine Naherungslosung des Problems der optimalen bandbreite korrigierter Systeme.— Messen, steuern, regeln, 1971, Bd. 14, H. 6, S 223—225.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3
Введение 5

Глава первая. **ОБЩИЕ ВОПРОСЫ** 7

1.1. Проблемы динамических измерений . . . . . —
1.2. Основные понятия 9
1.3. Входные сигналы и измеряемые величины 12
1.4. Погрешности динамических измерений 20
1.5. Математическое описание динамических режимов средств измерений 21

Глава вторая. **ДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ** . . 28

2.1. Модели средств динамических измерений и их характеристики —
2.2. Динамические характеристики и их классификация 43
2.3. Взаимосвязь динамических характеристик 45
2.4. Нормирование динамических характеристик средств измерений 52
2.5. Примеры. Модели средств динамических измерений электрических, механических и тепловых величин 57

Глава третья. **ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ** 62

3.1. Общая характеристика методов определения динамических свойств средств измерений . . . . . —
3.2. Испытательные сигналы, их свойства и описание 76
3.3. Методы нахождения динамических характеристик с помощью характеристических испытательных сигналов 93
3.4. Методы нахождения динамических характеристик с помощью нехарактеристических детерминированных испытательных сигналов 101
3.5. Методы нахождения динамических характеристик с помощью псевдослучайных испытательных сигналов 116
3.6. Погрешности оценивания динамических характеристик . . . 118
3.7. Примеры. Определение динамических характеристик средств измерений электрических, механических и тепловых величин 120

Глава четвертая. **ПОГРЕШНОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ И ИХ ОЦЕНИВАНИЕ** 131

4.1. Составляющие погрешности динамических измерений и их классификация. Суммирование составляющих . . . . . —
4.2. Динамические погрешности измерений постоянных величин . 142
4.3. Динамические погрешности измерительного преобразования 149
4.4. Динамические погрешности измерений с регистрацией . . . 159
4.5. Коррекция динамических погрешностей измерений 166
4.6. Примеры. Погрешности осциллографирования, регистрации кривых намагничивания и преобразования сигналов ударных ускорений 176

Глава пятая. ВОПРОСЫ ОБЕСПЕЧЕНИЯ ЕДИНСТВА ДИНАМИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ 182

5.1. Выбор средств для динамических измерений с погрешностью, не превышающей заданную . . . . . —

5.2. Передача размеров единиц средствам динамических измерений 183

5.3. Требования к характеристикам средств измерений, используемых для контроля динамических характеристик средств динамических измерений 199

5.4. Требования к точности определения динамических характеристик средств измерений 207

5.5. Примеры. Способы обеспечения единства измерений переменных давлений, пиковых ускорений и пульсаций температур . 209

Список литературы 214

ВАЛЕРИЙ АНАТОЛЬЕВИЧ ГРАНОВСКИЙ

ДИНАМИЧЕСКИЕ ИЗМЕРЕНИЯ: ОСНОВЫ МЕТРОЛОГИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

Редактор *В. Н. Малахова*
Художественный редактор *Ц. Р. Степанович*
Технический редактор *Н. А. Мишева*
Корректор *А. Н. Зимина*
Переплет художника *Г. В. Смирнова*

ИБ № 97

Сдано в набор 06.01.84. Подписано в печать 24.05.84. М-20791. Формат 60×90 1/16. Бумага типографская № 2. Гарнитура литературная. Высокая печать. Усл. печ. л. 14. Усл. кр.-отт. 14,25. Уч.-изд. л. 16,97. Тираж 8000 экз. Зак. 60. Цена 1 р.

Ленинградское отделение Энергоатомиздата
191041, Ленинград, Марсово поле, 1.

Ленинградская типография № 4 ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 191126, Ленинград, Социалистическая ул., 14