DIGITAL SPECTRAL ANALYSIS with applications

S. Lawrence Marple, Jr.

Martin Marietta Aerospace
Baltimore, Maryland

Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 07632

С. Л. Марпл-мл.

ЦИФРОВОЙ СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ и его приложения

Перевод с английского **О. И. ХАБАРОВА**
и канд. физ.-мат. наук **Г. А. СИДОРОВОЙ**

под редакцией
д-ра техн. наук
И. С. РЫЖАКА

МОСКВА «МИР» 1990

ББК 32.841
М28
УДК 621.372(075)

Марпл.-мл. С. Л.

М28 Цифровой спектральный анализ и его приложения: Пер. с англ. — М.: Мир, 1990. — 584 с., ил.
ISBN 5-03-001191-9

Книга американского специалиста посвящена цифровому спектральному анализу с использованием современных методов спектрального оценивания. Такие методы обеспечивают повышенную разрешающую способность при короткой выборке и отсутствии ложных боковых лепестков и благодаря этому могут иметь широкий диапазон приложений в радиолокации, гидролокации, синтезе речи и музыки, обработке изображений и сейсмограмм и многих других областях. Приведены программы, реализующие вычислительные процедуры для каждого из рассматриваемых методов.

Для специалистов, использующих методы спектрального анализа в различных областях науки и техники, а также преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов радиотехнических и радиофизических специальностей.

М $\frac{2302020100-424}{041(01)-90}$ **117—89** **ББК 32.841**

Редакция литературы по электронике

Научное издание

Стэнли Лоренс Марпл-мл.
ЦИФРОВОЙ СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ
И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Зав. редакцией Ю. А. Кузьмин
Научный редактор Т. Г. Хохлова
Мл. редактор И. А. Гревцова
Художник А. И. Чаусов
Художественные редакторы М. Н. Кузьмина, Н. И. Заботина
Технический редактор О. Г. Лапко
Корректор А. Ф. Рыбальченко

ИБ № 7121

Сдано в набор 2.02.90. Подписано к печати 4.09.90. Формат 60×90$^1/_{16}$. Бумага типографская № 1. Печать высокая. Гарнитура Литературная. Объем 18,25 бум. л. Усл. печ. л. 36,50. Усл. кр.-отт. 36,50. Уч.-изд. л. 36,28. Изд. № 8/6526. Тираж 18 000 экз. Зак. 1366. Цена 2 р. 90 коп.

Издательство «Мир» В/О «Совэкспорткнига» Государственного комитета СССР по печати. 129820, ГСП, Москва, И-110, 1-й Рижский пер., 2.

Московская типография № 11 Государственного комитета СССР по печати. 113105, Москва, Нагатинская ул., д. 1.

ISBN 5-03-001191-9 (русск.)
ISBN 0-13-214149-3 (англ.)

© 1987 by S. Lawrence Marple, Jr.
© перевод на русский язык, Хабаров О. И., Сидорова Г. А., 1990

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Во многих областях науки и техники перед исследователем возникает задача, как на основе данных, полученных на конечном интервале времени или пространства (в непрерывной или дискретной форме), сформировать максимально достоверное представление об исходном образе, с которым связаны эти данные, т. е. о его основных характеристиках.

Поскольку «спектр» (от лат. spectrum) по определению означает «образ», то *оценка спектра* по данным *конечной протяженности* также принадлежит к числу указанных задач. История науки и ее многочисленные приложения дают нам много примеров использования оценки спектра для формирования представлений о строении вещества (например, открытие Р. В. Бунзеном спектральной линии натрия), закономерностях явлений, происходящих на Солнце (на основе числа солнечных пятен), строении нефтеносных слоев, приложениях к медицинской диагностике (кардиограммы, электроэнцефалограммы), распознавании речи и изображений и т. д.

Качество и достоверность оценки спектра оказывают решающее влияние на формирование наших представлений об исходном образе. Так, например, указанные оценки спектра натрия, выполненные Р. В. Бунзеном, из-за недостаточной их разрешающей способности не выявили того, что D-линия натрия — это дублет, т. е. две близко расположенные спектральные линии, порожденные особенностями структуры вещества и соответственно представляющие характеризующий их существенный признак.

Бурное развитие цифровой вычислительной техники значительно расширило сферы приложения спектральных методов к обработке информации, сформировав направление *цифрового спектрального анализа,* который в свою очередь оказывает стимулирующее влияние на дальнейший прогресс вычислительных методов и средств их реализации.

В связи со сказанным понятна актуальность данной книги, принадлежащей к широко известной серии книг по обработке сигналов под редакцией А. Оппенгейма и представляющей собой первое в мировой литературе руководство по цифровому спектральному анализу. Она отражает те революционные изменения, которые произошли в нем с момента выхода в начале 1970-х гг. книги Г. Дженкинса и Д. Ваттса «Спектральный анализ и его приложения» благодаря применению новых подходов, получивших название «современных методов спектрального

оценивания». Суть этих методов связана с широким использованием модельных представлений об анализируемых процессах, учитывающих свойственные им внутренние связи, которыми пренебрегали в классическом спектральном анализе. Это в значительной мере способствует преодолению эффектов, обусловленных конечным интервалом записи данных (эффект «окна»), которые при классическом спектральном анализе приводят к маскированию слабых спектральных линий боковыми лепестками более сильных спектральных линий и ограничению разрешающей способности величиной, обратной протяженности записи. Современные методы спектрального оценивания позволяют при определенных условиях преодолевать указанные недостатки классических методов путем экстраполяции свойств данных за пределы интервала их записи.

Предлагаемая советскому читателю книга содержит богатейший материал по различным методам одномерного и многомерного спектрального оценивания, который до сих пор можно было найти лишь в многочисленных публикациях в научных журналах и нескольких тематических сборниках, изданных за рубежом. Достоинством книги является также наличие в ней машинных программ реализации этих методов. Представляется, что ее издание на русском языке весьма своевременно и будет способствовать дальнейшему развитию спектральных методов обработки сигналов и их применению в различных отраслях знаний.

Книга рассчитана на широкую читательскую аудиторию и представляет интерес как для специалистов, использующих методы спектрального анализа в научных исследованиях и многочисленных его приложениях в технике, медицине, биологии, геологии и т. д., так и для преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов вузов.

Предисловие, главы 1—14, 17 и приложения I—V переведены О. И. Хабаровым, главы 15 и 16 — канд. физ.-мат. наук Г. А. Сидоровой.

И. С. Рыжак,
доктор техн. наук, профессор

Суси, Дарси, Ребекке и Мэтью за их любовь и терпение на протяжении последних шести лет

ПРЕДИСЛОВИЕ

Идея написать учебное пособие по цифровому спектральному анализу возникла у автора во время дискуссий на Международной конференции по акустике, речи и обработке сигналов, которую Институт инженеров по электротехнике и радиоэлектронике (IEEE) проводил в 1979 г. в Вашингтоне, фед. окр. Колумбия, США. Именно в то время автору стало ясно, что появилась настоятельная потребность в унифицированном изложении как старых, так и новых методов спектрального оценивания. Объяснялось это несколькими причинами. Примерно два десятилетия прошло с момента публикации в 1968 г. последнего классического учебника по спектральному оцениванию, написанного Дженкинсом и Ваттсом [1*]. За это время в различных прикладных областях были независимо разработаны новые методы спектрального оценивания, что привело к появлению большого числа самых разнообразных терминов, нередко используемых для обозначения одинаковых понятий. Примерно за десятилетие до публикации данного учебного пособия резко возрос интерес к методам спектрального оценивания в среде специалистов по цифровой обработке сигналов, что, по всей видимости, было связано с появлением методов с улучшенным спектральным разрешением, особенно в случае использования коротких последовательностей данных. Читатель, который нерегулярно знакомится с технической литературой последних лет, сталкивается с многочисленными заявлениями о рабочих характеристиках, достигаемых с помощью тех или иных методов спектрального оценивания. Поэтому вполне настало время, чтобы «рассеять дым» и дать более объективный обзор современного состояния области спектрального анализа. Первая попытка такой унификации была предпринята автором совместно с С. М. Кеем в обзорной статье, которая была опубликована в ноябрьском номере журнала *Proceedings of the IEEE* за 1981 г.[1]).

После публикации этой статьи автор получил множество писем с просьбой выслать машинные программы для различных методов спектрального оценивания. Ответом на них явилось включение в данную книгу многочисленных распечаток (листингов) программ. Да и сама эта книга не только дала возможность глубже, чем это было возможно в рамках журнальной статьи, изложить тонкие вопросы, касающиеся описываемых методов, но позволила также затронуть и более новые

[1]) С. М. Кей, С. Л. Марпл-мл. Современные методы спектрального анализа: Обзор, ТИИЭР, 1981, № 11 — *Прим. ред.*

вопросы, которые не были включены в упомянутую статью.

Спектральное оценивание вот уже в течение нескольких десятилетий относится к числу традиционных областей исследования статистиков. Появление же два десятилетия назад цифровых алгоритмов быстрого преобразования Фурье (БПФ) значительно расширило роль спектрального оценивания и превратило его из средства узкоспециализированных научных исследований в средство решения многих практических задач. Следствием этого явился тот всевозрастающий интерес, который проявляется специалистами по цифровой обработке сигналов к результатам исследований и приложениям методов спектрального оценивания.

Цель данной книги — дать достаточно полный обзор существующих методов спектрального оценивания и их практических реализаций. Это означает, что читатель не встретится в книге с глубоким статистическим анализом излагаемого материала, что, как правило, свойственно большинству теоретических руководств по спектральному оцениванию. Практика применения методов спектрального оценивания с использованием конечных наборов данных не составляет собой некую точную науку: она в значительной мере основывается на результатах экспериментов и обычно требует использования тех или иных конкретных компромиссов. К сожалению, имеется очень мало статистических руководств, пригодных для нужд практики, поскольку большинство подходов к статистическому анализу основывается на использовании весьма ограничительных допущений о свойствах данных (например, на том, что шумовая компонента является белой и гауссовской), в силу чего результаты обычно применимы только в асимптотическом смысле, т. е. в предположении, что размер совокупности данных может расти до бесконечности. Именно поэтому практика спектрального оценивания в большей мере базируется на некоем эмпирическом опыте, а не на солидной теоретической основе. Не удивительно поэтому, что публикации новых методов спектрального оценивания нередко сопровождаются субъективными описаниями достигаемых на их основе характеристик, ожидающихся в результате ограниченного числа испытаний, т. е. описаниями, где больше внимания уделяется хорошему визуальному впечатлению, производимому спектральными оценками при их графическом отображении, чем их статистическим свойствам. В данной книге абсолютно ничего не говорится об относительном превосходстве того или иного метода спектрального оценивания над другими методами. Для всех методов даются алгоритмы, необходимые для вычисления спектральных оценок, и обсуждаются компромиссы, которые необходимо учитывать при их практической реализации. Читатель должен самостоятельно решить, ка-

кой из описанных в книге методов лучше всего подходит для его нужд. Более подробное изложение многих из описанных здесь методов и их статистических основ дано в книге С. М. Кея *Modern Spectral Estimation* («Современные методы спектрального оценивания»), опубликованной Prentice-Hall в 1987 г.

Одна из причин интереса, проявляемого к некоторым из описанных в данной книге методов, — та достаточно высокая разрешающая способность, которой с их помощью можно достичь при использовании последовательностей данных, содержащих очень малое число отсчетов. Именно поэтому основное внимание в книге уделяется характеристикам каждой спектральной оценки для случая коротких последовательностей данных. Короткая последовательность данных — это последовательность, при использовании которой требуемое спектральное разрешение имеет тот же порядок, что и величина, обратная длине этой последовательности. Еще одна тема, которой в книге уделяется много внимания, — быстрые алгоритмы. Быстрый алгоритм — это некоторая неочевидная вычислительная процедура, которая в вычислительном отношении более эффективна, чем та или иная очевидная процедура. Точно так же, как разработка алгоритма БПФ обеспечила практическую реализацию методов классического спектрального анализа, так и разработка новых быстрых алгоритмов ведется с целью уменьшения объема вычислений, требуемых большинством методов спектрального оценивания. Без быстрых алгоритмов практическая реализация многих экзотических методов спектрального оценивания оказалась бы просто невозможной из-за требуемых ими больших вычислительных затрат.

В данной книге в основном рассматриваются методы спектрального оценивания дискретно-временны́х и дискретно-пространственных последовательностей, которые получаются в результате дискретизации сигналов, непрерывно изменяющихся во времени или пространстве. Как правило, полагается, что используется равномерная (эквидистантная) дискретизация. Предполагается также, что спектральный анализ выполняется с помощью цифровой ЭВМ или цифровых устройств. В литературе обычно проводится строгое разграничение между цифровыми и дискретными сигналами. Дискретные сигналы — это сигналы, представляемые в виде счетных последовательностей, амплитуды которых являются непрерывными функциями. Цифровые сигналы — это сигналы, у которых и время (или пространственная переменная), и амплитуда дискретны. Название книги «Цифровой спектральный анализ» было выбрано только лишь с той целью, чтобы указать, что для вычисления спектральных оценок *дискретных* последовательностей данных должны применяться *цифровые* средства их обработки.

Для чтения данной книги необходимо знакомство с теорией линейных систем с дискретным временем и теорией преобразований в объеме, скажем, такой книги, как *Signals and Systems* («Сигналы и системы») Оппенгейма и Уиллски (Prentice-Hall, 1983), вводным курсом теории вероятностей и статистики в объеме, скажем, книги *Probability, Random Variables and Stochastic Processes* («Вероятность, случайные переменные и стохастические процессы») Папулиса (McGraw-Hill, 1984) и линейной алгеброй в объеме, скажем, книги *Applied Linear Algebra* («Прикладная линейная алгебра») Нобля и Даньелла (Prentice-Hall, 1977). В книгу включены задачи для самостоятельного решения, благодаря чему ее можно использовать в качестве основы аспирантского курса первого года обучения. Материал каждой главы организован таким образом, чтобы облегчить практическую реализацию каждого метода спектрального оценивания. Поэтому в начале каждой главы помещена краткая сводка теоретических результатов по описываемому в ней методу спектрального оценивания, а в конце — соответствующие машинные программы. Сделано это для того, чтобы те читатели, которых интересует только применение какого-либо метода, познакомились бы с ним с минимальными затратами времени. После вводного раздела излагаются более тонкие теоретические вопросы, к изучению которых читатель может, при желании, приступить после испытания машинных программ, чтобы углубить знакомство с избранной спектральной оценкой.

После исторического введения, которому посвящена гл. 1, в гл. 2—4 излагаются необходимые теоретические основы и дан обзорный материал по теории линейных систем, преобразованиям Фурье, матричной алгебре, случайным процессам и статистике. В гл. 5 описаны классические методы спектрального оценивания в том виде, в котором они используются сегодня. В гл. 6 дан обзор параметрических методов моделирования, используемых для спектрального оценивания. В гл. 7—10 описаны методы спектрального оценивания, основанные на применении процедур авторегрессии (АР), скользящего среднего (СС) и авторегрессии — скользящего среднего (АРСС). Метод Прони, тесно связанный с АР-подходом, рассмотрен в гл. 11. В гл. 12 описаны непараметрические методы спектрального оценивания, включая метод минимальной дисперсии, в гл. 13 обсуждаются оценки, основанные на разложении по собственным функциям или собственным векторам. Глава 14, в которой суммированы результаты по всем методам, описанным в гл. 5—13, может служить отправной точкой для тех читателей, которых интересует выбор метода спектрального оценивания, пригодного для их конкретных приложений. В этом им поможет помещенная в этой главе сводная таблица, в которой кратко охарактеризо-

ваны все описанные в книге методы спектрального оценивания. Обобщения многих из методов, представленных в гл. 5—13, на многоканальное и многомерное спектральное оценивание, рассматриваются соответственно в гл. 15 и 16.

При цифровой обработке сигналов часто приходится иметь дело с комплекснозначными данными. Выходные данные алгоритма БФП, процессы комплексной демодуляции и обработка синфазной и квадратурной составляющих сигналов — вот три примера источников, порождающих комплекснозначные данные. Именно по этой причине все машинные программы, помещенные в этой книге, написаны для обработки комплекснозначных данных. Читатели, которые имеют дело только с действительнозначными данными, могут с помощью соответствующей модификации преобразовать любой из подобных алгоритмов для обработки действительнозначных данных. Подробности такого преобразования см. в приложении IV книги.

Необходимо очень внимательно следить за тем, чтобы все выражения для спектральных оценок имели правильные масштабные множители, так как это гарантирует получение оценок спектральной плотности мощности в единицах мощности на герц. Не следует забывать также и о зависимости оценок от интервала дискретизации и числа отсчетов. В некоторых книгах приводятся нормированные выражения для спектральных оценок, в которых все эти важные зависимости опущены для упрощения математического описания.

Многие из работ, указанных в списках литературы в конце каждой главы, содержатся в выпущенных издательством IEEE Press сборниках *Modern Spectrum Analysis I* («Современный спектральный анализ, I») под редакцией Д. Дж. Чайлдерса в 1978 г. и *Modern Spectrum Analysis II* («Современный спектральный анализ, II») под редакцией С. Кеслера в 1986 г. В этих двух выпусках можно найти дополнительный материал, касающийся большинства методов, описанных в книге.

В заключение автору хотелось бы выразить благодарность за весьма значительный вклад и сотрудничество своему коллеге Стивену М. Кею из Род-Айлендского университета. Много ценных замечаний по рукописи высказали Г. Наттолл, Стивен У. Ланг, Томас У. Паркс, Хризостомос Никиас, Мос Кавех, Джеймс Х. Маклеллан, Дейвид Шайбнер, Марк П. Миньоле и Роберт Дж. Карри. Автор также выражает благодарность руководству фирм Schlumberger Well Service и Martin Marietta Aerospace за предоставленную возможность работы на печатающих устройствах TEX, принадлежащих этим фирмам.

Стэнли Лоренс Марпл-мл.
Балтимор, шт. Мэриленд

Глава 1
ВВЕДЕНИЕ

Спектральный анализ — это один из методов обработки сигналов, который позволяет охарактеризовать частотный состав измеряемого сигнала. Преобразование Фурье является математической основой, которая связывает временной или пространственный сигнал (или же некоторую модель этого сигнала) с его представлением в частотной области. Методы статистики играют важную роль в спектральном анализе, поскольку сигналы, как правило, имеют шумовой или случайный характер. Если бы основные статистические характеристики сигнала были известны точно или же их можно было бы без ошибки определить на конечном интервале этого сигнала, то спектральный анализ представлял бы собой отрасль точной науки. Однако в действительности по одному-единственному отрезку сигнала можно получить только некоторую *оценку* его спектра. Поэтому практика спектрального анализа после 1880-х гг. постепенно стала превращаться в некое ремесло достаточно субъективного характера, которое наряду с использованием научного подхода требовало также определенного уровня эмпирического искусства.

Трудность задачи спектрального оценивания иллюстрируется рис. 1.1, на котором показаны две типичные спектральные оценки, полученные в результате обработки одной и той же конечной выборочной последовательности с помощью двух различных методов спектрального оценивания. Оба графика на этом рисунке характеризуют распределение интенсивности сигнала по частоте. Точное значение термина «интенсивность» сигнала, выраженное в единицах энергии или в единицах энергии на единицу времени (мощности), будет дано в гл. 2 и 4. Единицы измерения частоты, принятые в данной книге, — это герцы для временны́х сигналов и циклы на метр (волновое число) для пространственных сигналов. Интенсивность сигнала $P(f)$ на частоте f обычно выражается в децибелах относительно максимальной спектральной интенсивности $P_{\text{макс}}$ для всех частот и вычисляется в соответствии с выражением $10\lg[P(f)/P_{\text{макс}}]$. Следовательно, максимальной интенсивности соответствует уро-

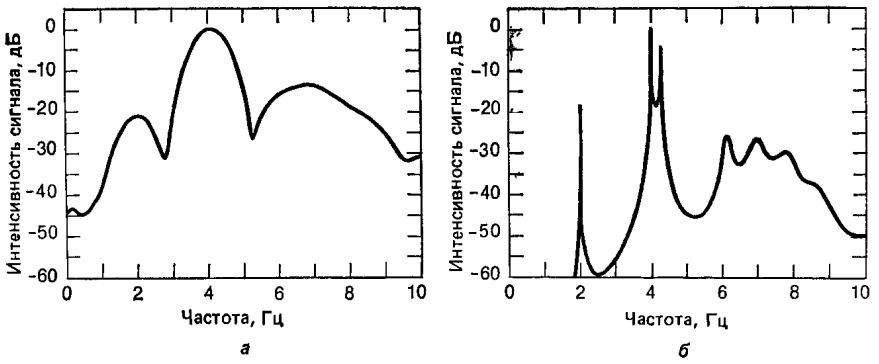


Рис. 1.1. Две различные спектральные оценки, полученные по одной и той же совокупности измеренных данных.

вень 0 дБ. Значительное различие между двумя спектральными оценками, приведенными на рис. 1.1, можно объяснить различием допущений, принятых относительно данных, а также способом усреднения, использованного для учета статистического влияния шума, присутствующего в анализируемых данных. В ситуации, когда априори характеристики сигнала не известны, трудно сказать, какая из двух приведенных спектральных характеристик с большей достоверностью изображает истинный спектр анализируемого сигнала. На первый взгляд оценка на рис. 1.1, *б* имеет более высокое разрешение, чем оценка на рис. 1.1, *а*, однако это может быть обусловлено каким-то ухищрением при обработке, использованным для получения оценки, представленной на рис. 1.1, *б*, а не действительным наличием тонких деталей, которые существуют в этом спектре. Такого рода неопределенности, очень часто возникающие на практике, иллюстрируют субъективный характер спектрального анализа.

Классические методы спектрального оценивания обстоятельно изложены в различных учебных руководствах, к числу наилучших из которых следует, по всей видимости, отнести книги Блэкмана и Тьюки [6] и Дженкинса и Ваттса [14]. После публикации этих и близких по тематике книг стал расти интерес к альтернативным методам спектрального оценивания, обладающим лучшими характеристиками при использовании последовательностей данных ограниченной длины, с которыми очень часто приходится иметь дело на практике. В частности, стали появляться новые методы спектрального оценивания, которые имеют очевидное преимущество по частотному разрешению по сравнению с классическим спектральным оцениванием.

Например, для изучения характеристик внутриимпульсной модуляции в радиолокаторах в пределах длительности очень короткого радиолокационного импульса можно осуществить лишь несколько временны́х отсчетов. В случае гидролокатора можно сделать большее число подобных отсчетов, но движение цели заставляет ограничиваться короткими интервалами наблюдения, с тем чтобы гарантировать неизменность статистик цели на интервале анализа. В данной книге основное внимание уделено новым, или «современным», методам спектрального оценивания, которые были разработаны в течение примерно 15 последних лет. В этом смысле книга как бы дополняет материал по классическим методам спектрального оценивания, содержащийся в ранее вышедших книгах. Все описанные в ней методы предполагают использование выборочных цифровых данных, что отличает ее от некоторых ранее опубликованных учебников, в которых рассматриваются только непрерывные данные.

Цель каждой главы этой книги — обеспечить читателю понимание тех допущений, которые положены в основу того или иного метода или методов. В начале каждой главы дается краткое описание метода (или методов), которому посвящена эта глава, что позволяет читателю быстро реализовать соответствующую спектральную оценку, не обращаясь к более тонким теоретическим вопросам, излагаемым в данной главе. Приводится также ряд полезных рекомендаций практического характера, но никаких попыток сравнительной классификации описываемых методов спектрального оценивания в книге не делается. В книге помещен целый ряд машинных программ спектрального оценивания; пользователю следовало бы, вероятно, опробовать некоторые из них на своих экспериментальных данных, что позволило бы составить более глубокое представление об измеряемом процессе по каким-либо конкретным особенностям, общим для всех выбранных оценок. Для обеспечения общности изложение материала ведется применительно к комплекснозначным сигналам, поскольку использование таких сигналов становится общепринятой практикой в системах цифровой обработки сигналов. В приложении 2.Б описаны два типичных источника комплекснозначных сигналов.

Высветить перспективу развития спектрального анализа можно, обратившись к его историческим корням. Дальнейшее представление о путях его становления можно получить, рассматривая некоторые конкретные вопросы спектрального оценивания. Обеим этим темам посвящены остальные разделы этой главы. Завершает главу краткий подраздел, где даны рекомендации относительно пользования материалом данной книги.

1.1. Историческая перспектива

С древнейших времен у людей возникло представление о циклических, или повторяющихся, процессах, т. е. иными словами, сформировались те фундаментальные понятия, которые лежат в основе современных методов спектрального оценивания. Без выполнения точного математического анализа древние цивилизации не смогли бы составлять календари и измерять время по результатам своих наблюдений *периодичностей* в длительности суток и года, сезонных изменений, фаз Луны и движения других небесных тел, таких как планеты. В VI веке до нашей эры Пифагор установил соотношение между периодичностью чисто синусоидальных колебаний, соответствующих музыкальным звукам, порождаемым струной постоянного натяжения, и числом, характеризующим длину этой струны. Пифагор считал, что сущность гармонии выражается в числах. Он распространил это эмпирическое соотношение на описание *гармонического* движения небесных тел, описав его как «музыку сфер».

Математические основы современных методов спектрального оценивания берут свое начало в XVII веке в работах Исаака Ньютона, который в результате наблюдений установил, что солнечный свет, прошедший через стеклянную призму, разлагается на многоцветную полосу, что каждому цвету соответствует своя длина волны и что белый солнечный свет содержит все длины волн. Именно Ньютон был первым, кто применил в 1671 г. слово spectrum («спектр») [21] в качестве научного термина, для описания полосы цветов солнечного света. Это слово является вариантом латинского слова specter, означающего «образ» или «признак». Прилагательное от spectrum имеет форму spectral («спектральный»). Следовательно, предпочтительнее употреблять термин spectral estimation («спектральное оценивание)», а не термин spectrum estimation («оценивание спектра»). В своих «Принципах» [22] Ньютон дал первую математическую трактовку периодичности волнового движения, которое экспериментально наблюдал Пифагор.

Решение волнового уравнения для колеблющейся музыкальной струны было получено в 1738 г. Даниилом Бернулли [5], который исследовал общее решение для смещения $u(x, t)$ струны в точке x в момент времени t (концевым точкам струны соответствуют $x=0$ и $x=\pi$). Это общее решение имеет вид

$$u(x, t)=\sum_{k=1}^{\infty} \sin kx\,(A_k \cos kct + B_k \sin kct), \qquad (1.1)$$

где c — физическая количественная характеристика материала струны, определяющая скорость бегущих по струне волн.

В 1755 г. Леонард Эйлер [10] показал, что коэффициенты A_k и B_k ряда, определяемого выражением (1.1) и впоследствии названного *рядом Фурье,* являются решениями следующих уравнений:

$$A_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u(x,\ 0)\sin kx\,dx,$$
$$B_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u(x,\ 0)\cos kx\,dx. \tag{1.2}$$

В 1822 г. французский инженер Жан Батист Жозеф Фурье в своей диссертации «Аналитическая теория тепла» [11] обобщил результаты, полученные для волнового уравнения, показав, что любую произвольную функцию $u(x)$, даже обладающую конечным числом разрывов, можно представить в виде бесконечной суммы синусных и косинусных членов

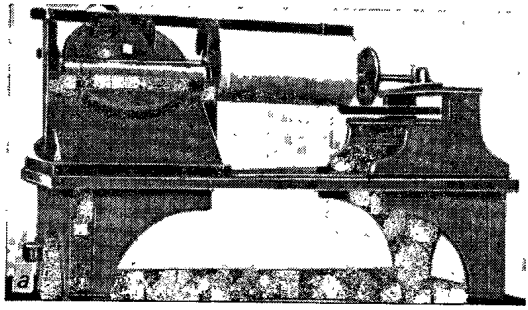
$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos k\alpha x + B_k \sin k\alpha x). \tag{1.3}$$

Раздел математики, устанавливающий соотношение между функцией $u(x)$ (или ее отсчетами) и коэффициентами A_k и B_k, стали называть *гармоническим анализом* вследствие связи функции с синусными и косинусными членами этой суммы.

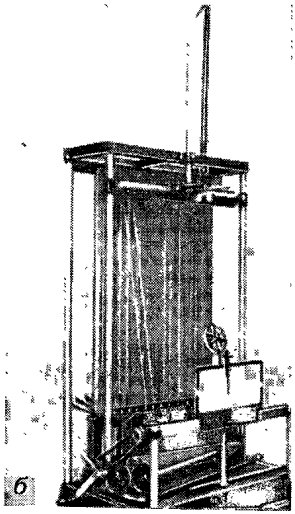
Начиная с середины XIX века на основе гармонического анализа были разработаны практические методы изучения таких феноменологических данных, как звук, погода, активность солнечных пятен, девиация магнитного компаса, течения рек и изменения высоты приливов. Во многих из этих явлений основной период был либо замаскирован шумом из-за погрешностей измерений, либо был необнаружим визуально. Кроме того, нередко присутствовали вторичные периодические компоненты, гармонически не связанные с основной периодической компонентой. Все это несколько затрудняло получение оценок различных периодичностей. Ручное вычисление коэффициентов ряда Фурье с помощью прямых расчетов или графических методов оказалось исключительно трудоемким делом и, как правило, ограничивалось применением к очень небольшим совокупностям данных. Для облегчения анализа были разработаны механические гармонические анализаторы. В основу этих счетных машин были положены механические интеграторы, или планиметры, поскольку они позволяют определять площадь области под кривыми вида $u(x)\sin kx$ и $u(x)\cos kx$ на интервале $0 \leqslant x \leqslant \pi$, тем самым обеспечивая расчет коэффициентов ряда Фурье. Английский физик Уильям Томсон (он же лорд Кельвин, именем которого названа абсолютная температурная шкала) создал первый механический гармонический анализатор,

основанный на изобретенном его братом Джеймсом Томсоном планиметре, обрабатывавшем произведения двух функций, т. е. вычислявшем величину интеграла $\int u(\theta)\phi(\theta)d\theta$, который после некоторых изменений был приспособлен для вычисления косинусных и синусных функций. На рис. 1.2, *а* и 1.2, *д* показаны различные варианты практической реализации этого прибора. Отслеживающий штифт вручную перемещается вдоль графического изображения анализируемой кривой, а значения коэффициентов считываются с интегрирующих цилиндров. Один интегрирующий цилиндр позволяет рассчитывать коэффициенты только до третьей гармоники. Этот анализатор использовался Британским метеорологическим ведомством для анализа графических записей суточных изменений температуры и атмосферного давления. Из-за своих размеров и веса этот прибор, по свидетельству очевидцев тех лет, практически не выносился из помещения, в котором он был первоначально установлен. Последующие усовершенствования гармонических анализаторов были осуществлены О. Хенрики [13] (см. рис. 1.2, *д*), А. Шарпом [36], Дж. Ю. Юлом [47] и американскими физиками Альбертом А. Майкельсоном (имя которого стало широко известным в связи с проведенным им измерением скорости света) и У. Стрэттоном [20]. Отличительная особенность гармонического анализатора Майкельсона — Стрэттона, в котором применялись спиральные пружины, состояла в том, что он мог не только одновременно обрабатывать 80 гармоник, но и выполнять роль синтезатора (вычислять обратное преобразование Фурье), поскольку позволял суммировать составляющие ряда Фурье. Майкельсон использовал эту счетную машину в своих оптических исследованиях, за которые вспоследствии был удостоен Нобелевской премии. В качестве синтезатора эта машина позволяла суммировать интерференционные полосы, соответствующие простым гармоническим кривым, а в качестве анализатора — разлагать кривую видности на гармонические составляющие, характеризуя тем самым распределение интенсивности света в наблюдаемом источнике.

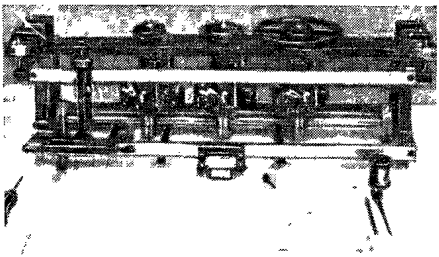
Результаты гармонического анализа, получаемые в то время, иногда использовались для синтеза периодического колебания по гармоническим составляющим для целей предсказания (т. е. представления последовательности данных моделью в виде ряда Фурье). Одно из самых первых подобных применений связано с прогнозированием высоты приливов. Используя прямые ручные вычисления, Уильям Томсон выполнил гармонический анализ записей мареографа в портах Великобритании, начиная с записей 1866 г.; к 1872 г. он разработал машину для прогноза высоты приливов, в которой использовались значения коэффициентов, определяемых с помощью его метода гармони-



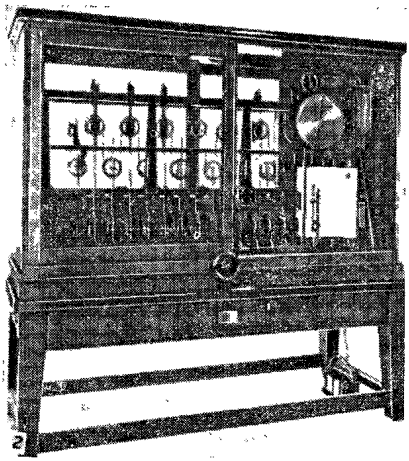
а



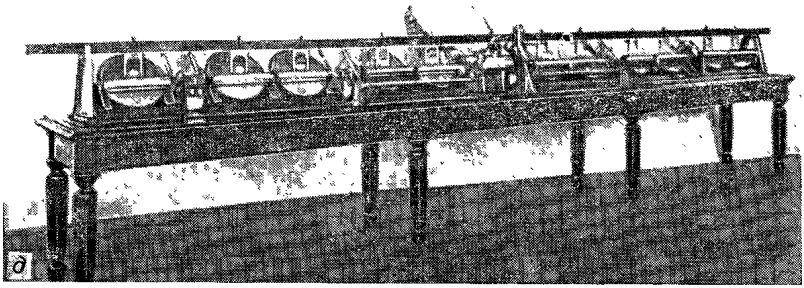
б



в



г



д

ческого анализа. Более поздние модификации этой машины (см. рис. 1.2, *г*) могли объединять до 10 гармонических составляющих приливной волны, которые с помощью рычажно-шкивного механизма вводились как функции порта, для которого осуществлялся прогноз. Устройство Томсона для прогноза высоты приливов представляло собой достаточно большую машину с размерами основания 3 на 6 футов (около 0,9 на 1,8 м). Примерно за четыре часа работы она вычерчивала кривые высоты приливов на год вперед для одной морской гавани. Устройство для прогноза высоты приливов, построенное в 1882 г. Уильямом Феррелом и находящееся сейчас в экспозиции Смитсоновского музея в Вашингтоне, фед. окр. Колумбия (США), использовалось береговой и геодезической службой США для составления таблиц высоты приливов в период с 1883 по 1910 г.

И хотя механические гармонические анализаторы и оказались полезными для оценивания свойств временны́х рядов с *очевидными* периодичностями (плавно изменяющихся временных последовательностей при наличии слабого шума или при его полном отсутствии), численные методы гармонического анализа (подгонка рядов Фурье) все еще требовались для оценивания *скрытых* периодичностей в сильно зашумленных данных (описываемых в литературе тех лет как данные с «нерегулярными флюктуациями») или для оценивания характеристик сигналов с негармоническим соотношением периодов. Из большого числа ученых, которые в своей работе использовали гармонический анализ, наиболее глубокое влияние на формирование того, что теперь считается классическими методами спектрального оценивания, оказал А. Шустер [30—32, 34, 35]. Он, в частности, предложил, чтобы график для квадрата огибающей $S_k = A^2_k + B^2_k$ коэффициентов преобразования Фурье (величина, впервые введенная Стоксом [38])

$$A_k = \frac{2}{nT_0}\int_{\tau}^{\tau+nT_0} u(t)\cos kt\,dt,$$
$$B_k = \frac{2}{nT_0}\int_{\tau}^{\tau+nT_0} u(t)\sin kt\,dt \qquad (1.4)$$

Рис. 1.2. Механические гармонические анализаторы и синтезаторы XIX века, позволявшие вычислять прямое и обратное преобразования Фурье: *а* — первый гармонический анализатор Кельвина (1876 г.); *б* — гармонический анализатор и синтезатор Майкельсона — Стрэттона (1898 г.); *в* — гармонический анализатор Хенрики — Коради (1894 г.); *г* — гармонический анализатор Кельвина для прогнозирования высоты приливов (около 1890 г); *д* — первая действующая модель 7-дискового гармонического анализатора Кельвина, вычислявшая среднее значение и 6 гармоник (1878 г.). (Фотографии любезно предоставлены Музеем науки, Лондон, Великобритания.)

вычислялся на отрезке из n целых периодов T_0, где следует положить $k=2\pi/T_0$. (Здесь использованы обозначения Шустера.) Шустер назвал свой метод — методом *периодограмм* [31]. Периодограмма могла бы в принципе вычисляться и на некотором континууме периодов (обратных частот), и в своей статье Шустер указал многочисленные трудности, связанные с вычислением периодограммы, и характерные ее особенности. Изменяя начало отсчета времени τ, Шустер получал образцы периодограммы с различными нерегулярными изменениями, причем эти периодограммы иногда содержали ложные пики (Шустер называл их «случайными периодичностями») там, где в действительности никакой периодичности не существовало. Шустер из своего опыта гармонического анализа оптических спектров [29, 33] знал, что усреднение значений S_k, полученных для различных отрезков последовательности данных (при фиксированном периоде T_0) необходимо для сглаживания периодограммы (получения «средней периодограммы» в его терминологии) и устранения ложных пиков. И хотя Шустер установил необходимость усреднения, практическая его реализация требовала вычислительных средств, далеко выходящих за рамки имеющихся в те годы технических возможностей. Процитируем одну из статей Шустера того времени (см. [31], с. 25):

> «Периодограмма в том виде, как она определена уравнениями [1.4], обнаруживает нерегулярное поведение, а ее форма зависит также от τ. При оптическом анализе света нам мог бы помочь тот факт, что глаз человека воспринимает результат усреднения на некотором большом числе соседних периодов, а также результат усреднения (относительно времени) интенсивности излучения на любом отдельном периоде. ...Если бы мы придерживались этой оптической аналогии, то нам следовало бы изменять время τ ...непрерывно и брать среднее значение величины $r=\sqrt{A^2+B^2}$, получаемой таким путем для *каждого* значения k..., но это потребовало бы почти неприемлемых затрат труда».

Глубокий теоретический анализ статистических основ усреднения был выполнен лишь спустя тридцать лет в работе Н. Винера, и примерно пятьдесят лет отделяло эти слова Шустера от практической реализации методов статистического усреднения, основанных на алгоритмах быстрого преобразования Фурье, и появления цифровых вычислительных машин, значительно облегчивших бремя «неприемлемо» больших вычислительных затрат.

Шустер понимал также, что боковые лепестки (которые он называл «ложными периодичностями») вокруг главных лепестков в периодограмме являются неотъемлемой особенностью

любого метода анализа Фурье записей данных конечной длины. Понимание Шустером причин появления боковых лепестков объяснялось тем, что он мог увидеть здесь аналогию с появлением дифракционных полос в оптическом спектроскопе из-за ограниченной пространственной апертуры («ограниченной разрешающей силы») этого прибора. Шустер отмечал, что многие исследователи его времени ошибочно утверждали, что все максимумы в периодограмме обусловлены скрытыми периодичностями, тогда как на самом деле это были просто боковые лепестки, а вовсе не истинные периодичности. Помимо причин появления ложных периодичностей Шустер понимал также и причины периодограммных оценок в тех случаях, когда интервал измерений не был точно целочисленным кратным анализируемого периода. Многие ученые во времена Шустера полагали, что спектр белого света можно рассматривать как некоторую совокупность из очень близких монохроматических спектральных линий (аналогично спектру белого шума, который тогда рассматривался как совокупность гармонических частотных составляющих), но Шустер смог экспериментально показать, что белому свету соответствует континуум частот. Впоследствии Винер смог обобщить эту аналогию с белым светом на стохастические процессы типа белого шума.

Шустер применил периодограмму для отыскания скрытых периодичностей в записях метеорологических наблюдений, записях магнитного склонения и рядах чисел солнечных пятен. Анализ периодограммы ряда чисел солнечных пятен [35] представляет для нас определенный практический интерес, поскольку эти числа будут использоваться в данной книге в качестве некоторого «пробного камня» для описываемых методов спектрального оценивания; (см. следующий подраздел, где дана более подробная информация относительно наблюдения и регистрации солнечных пятен). Шустер выполнил предварительную обработку среднемесячных значений числа солнечных пятен за период с 1749 по 1894 г. Периодограммный анализ позволил дать оценку цикла солнечных пятен, равную 11,125 года. Это число легло в основу того 11-летнего цикла солнечных пятен, которое упоминается в литературе по астрономическим вопросам.

Вообще говоря, периодограмма временно́го ряда, состоящего из синусоиды с частотой f_0 герц и «наложенных на нее нерегулярных флюктуаций» (аддитивного шума), должна иметь пик в точке, соответствующей периоду $T_0 = 1/f_0$. Однако многие исследователи начала нашего столетия считали, что периодограммы, вычисленные по зашумленным данным, будут иметь значительные погрешности и вообще не будут содержать каких-либо доминирующих пиков, которые могли бы свидетельст-

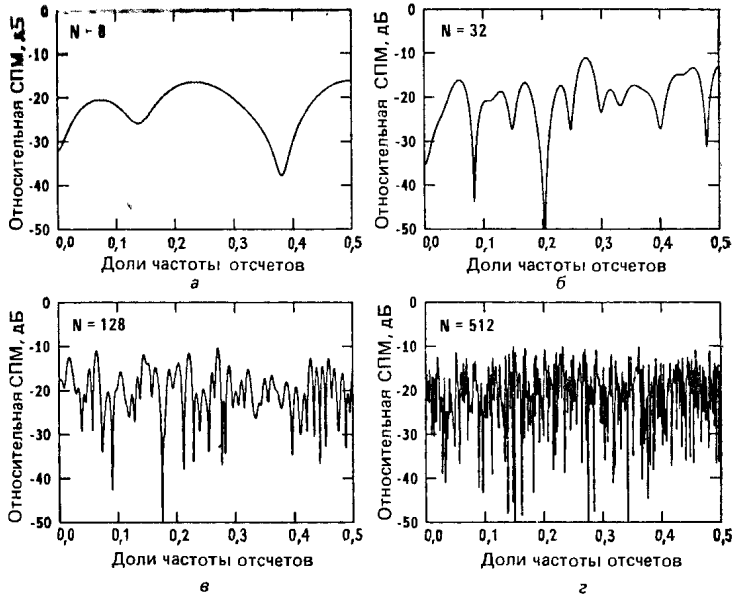


Рис. 1.3. Периодограммы белого гауссова шума при различной длине используемой записи данных: (*а*) $N=8$; (*б*) $N=32$; (*в*) $N=128$; (*г*) $N=512$. Нетрудно видеть, что с ростом длины записи данных периодограмма не уплощается, а начинает все сильнее и сильнее флюктуировать. (СПМ — спектральная плотность мощности.)

вовать о наличии периодичностей в анализируемых данных. Причем это считалось справедливым даже тогда, когда длина записи данных существенно возрастала. Примеры таких периодограмм показаны на рис. 1.3, из которого видно, что с использованием все большего и большего числа отсчетов данных периодограмма начинает все сильнее и сильнее флюктуировать. Все это привело к тому, что на несколько десятилетий интерес к периодограммам значительно ослабел, и это, к сожалению, в основном можно объяснить лишь тем, что большинство исследователей пренебрегало усреднением, использовать которое предлагал Шустер. Слуцкий [37] и несколько позднее Даньелл [9] независимо установили, что флюктуации периодограммы белого шума имеют ту же величину, что и среднее значение самой этой периодограммы. Эти флуктуации оказывались в основном некоррелированными для соседних частот (см. приложение 4.А, где дан анализ этого независимо от длины отрезка временного ряда, доступного для анализа). Слуцкий и Даньелл высказали предположение, что флюктуации периодограммы можно уменьшить посредством ее усреднения по

соседним частотам. Эта идея лежит в основе одного из методов сглаживания периодограммы, который описан в гл. 5.

Спад интереса к периодограммам привел к появлению существенно отличного метода анализа, который в 1927 г. был предложен английским статистиком Дж. Юлом. Для отыскания одной-двух периодичностей в исследуемых данных Юл прибег к моделированию временного ряда, основанному на линейном регрессионном анализе [48]. Юла интересовала главным образом более высокая точность определения основной периодичности в ряде чисел солнечных пятен и отыскание в нем дополнительных периодичностей. Интуитивно Юл понимал, что гипотеза о «суперпозиции нерегулярных флюктуаций» (аддитивном шуме) для периодограммы Шустера в случае солнечных пятен могла оказаться неверной. Юл считал, что описывать числа солнечных пятен эффективнее другой моделью временно́го ряда для этого физического явления, а именно рекурсивным гармоническим процессом, порождаемым некоторым шумовым процессом, или «возмущениями», как Юл называл отдельные отсчеты шума. Используя простое тригонометрическое тождество

$$\sin(kx) = 2\cos(x)\sin([k-1]x) - \sin([k-2]x)$$

с подстановкой $x = 2\pi fT$, можно записать следующее однородное уравнение в конечных разностях, определяющее изменение отдельной гармоники в дискретном времени:

$$u(k) - au(k-1) + u(k-2) = 0.$$

Здесь $u(k) = \sin(2\pi fkT)$ — гармоническая составляющая, T — интервал отсчетов, f — частота гармоники, а $a = 2\cos(2\pi fT)$ — коэффициент, характеризующий гармонику. Юл предположил, что если числа солнечных пятен содержат только одну периодическую составляющую, то последовательность чисел солнечных пятен могла бы порождаться процессом вида

$$u(k) = au(k-1) - u(k-2) + \varepsilon(k), \qquad (1.5)$$

где $\varepsilon(k)$ — некоторое малое случайное импульсное «возмущение», соответствующее каждому значению временно́го индекса k. Уравнение (1.5) Юл назвал «уравнением гармонической кривой». Таким образом, Юл заложил основу именно того, что впоследствии стало называться параметрическим подходом к спектральному анализу: иными словами, подходом, при котором данные измерений рассматриваются как выход некоторой модели временно́го ряда. С помощью метода наименьших квадратов Юл определил значение параметра a, проанализировав для этой цели среднегодовые значения чисел солнечных пятен при удаленном выборочном среднем значении за период с

1749 по 1824 г. По его оценке, этот параметр имел значение $a=1{,}62374$, откуда для $T=1$ год он получил оценку периода цикличности солнечных пятен, равного $1/f=10{,}08$ лет. Тем не менее, не удовлетворившись этим результатом, Юл далее подверг числа солнечных пятен фильтрации, используя для этой цели скользящее среднее на интервале 3 года; повторная оценка по методу наименьших квадратов на основе этой фильтрованной последовательности дала период, равный $1/f=11{,}43$ года. Затем Юл попытался обнаружить в последовательности чисел солнечных пятен наличие двух периодичностей, аппроксимируя по методу наименьших квадратов исходные данные с помощью симметричного разностного уравнения пятого порядка. Он получил периоды 11,95 и 1,42 года на цикл, однако отказался от двухпериодной модели, так как квадратичная ошибка для этой модели не уменьшилась, а возросла.

Не удовлетворенный полученными результатами, Юл внимательно проанализировал структуру своего «уравнения гармонической кривой» и решил обобщить подход на основе разностного уравнения и применить регрессионный анализ по методу наименьших квадратов к модели вида

$$u(k)=b(1)\,u(k-1)+b(2)\,u(k-2)+\varepsilon(k), \qquad (1.6)$$

где b (1) и b (2) принимают произвольные значения. Строго говоря, уравнение (1.6) представляет собой уравнение авторегрессии (т. е. регрессии самого на себя), и это был первый случай, когда авторегрессия по методу наименьших квадратов применялась для целей спектрального анализа. Решением уравнения регрессии (1.6) по методу наименьших квадратов является затухающая синусоида. Используя уравнение (1.6), Юл нашел, что период затухающей синусоиды, составляет 10,60 лет для нефильтрованной последовательности чисел солнечных пятен и 11,164 лет для фильтрованной. И хотя Юл не смог придать затуханию какого-либо физического смысла (если таковой и был), он чувствовал, что эти оценки периода были все же вполне приемлемыми. Уолкер [43] также использовал метод Юла для исследования затухающих синусоидальных временных рядов. Нормальное уравнение, возникающее при анализе по методу наименьших квадратов, в честь этих пионеров регрессионного моделирования было названо уравнением *Юла — Уолкера*. Интересно заметить, что Уолкер, а также Олтер [1] предвидели возможность эмпирических методов спектрального оценивания, позднее предложенного Тьюки. В своей статье, опубликованной в 1931 г., Уолкер писал ([43], с. 524):

«Некоторый свет проливается этим (регрессионным) анализом на использование некоторого ряда сериальных коэффи-

циентов корреляции[1]), т. е. «периодограммы корреляции», в качестве замены обычной периодограммы Фурье — Шустера в тех случаях, когда не возникает вопроса о затухающих колебаниях».

Методы, использованные Юлом, напоминают еще одну гораздо более старую процедуру подгонки данных, применявшуюся в конце XVIII века бароном де Прони [24]. Прони исследовал метод аппроксимации с помощью экспоненциальной модели некоторой совокупности данных, характеризующих соотношение между давлением и объемом газов, причем в его процедуре использовалась точная регрессионная подгонка данных, лучшая чем в методе наименьших квадратов. Коэффициенты регрессии использовались в качестве коэффициентов некоторого полинома, корни которого являлись модельными экспонентами. Амплитуда каждой экспоненциальной компоненты отыскивалась в результате повторого прохода по данным.

1930 год явился поворотным для спектрального анализа: в этом году Н. Винер опубликовал свою классическую статью «Обобщенный гармонический анализ» [44], в которой спектральный анализ трактовался на основе теории случайных процессов и был заложен твердый статистический фундамент. В этой статье изложен ряд важных результатов, к которым относятся точные статистические определения *автокорреляции* и *спектральной плотности мощности* (СПМ) для стационарных случайных процессов. Показано, что эти две функции, характеризующие случайный процесс, связаны непрерывным преобразованием Фурье; это соотношение базируется на широко известной сейчас теореме Винера — Хинчина, названной так в честь Н. Винера и А. Я. Хинчина, советского математика, независимо получившего этот результат [17]. Использование преобразования Фурье, а не ряда Фурье, применяемого в традиционном гармоническом анализе, позволило Винеру определить спектры в виде некоторого *континуума* частот, а не в виде набора частот *дискретных* гармоник. Белый шум, как было показано Винером, имеет равномерную спектральную плотность, т. е. содержит равновеликие компоненты на всех частотах. К этому результату он пришел на основе исследования броуновского движения и шустеровских оптических аналогов. К другим ранним статистическим подходам к спектральному анализу относятся работы Бартлетта [2—4] и Кендалла [16].

Уравнение регрессии Юла можно рассматривать как уравнение предсказания сигнала по некоторой линейной комбинации предшествующих отсчетов смеси этого сигнала с аддитив-

[1]) Автокорреляцию иногда называют сериальной корреляцией, (см., например, [22]). — *Прим. ред.*

ным шумом, тем самым переходя к так называемой задаче линейного предсказания. В рамках вероятностного подхода, разработанного Хинчиным и Слуцким, шведский математик Х. Вольд [45] предложил унифицированную модель на основе стохастического линейного разностного уравнения для дискретно-временны́х рядов. Вольд ввел в употребление термины «скользящее среднее» для моделей временно́го ряда, первоначально описанных Слуцким (который использовал термин «скользящее суммирование»), и «линейная авторегрессия» для моделей временно́го ряда, первоначально описанных Юлом. Он также первым назвал соотношение между авторегрессионными параметрами и автокорреляционной последовательностью «уравнением Юла — Уолкера». В своей монографии, вышедшей в 1938 г., Вольд приводит также очень важную теорему разложения (теорема 7) для стационарного временного ряда, согласно которой любой стационарный случайный процесс можно записать в виде суммы детерминированной компоненты и одностороннего процесса скользящего среднего, порождаемого белым шумом. Эта теорема позволила советскому математику А. Н. Колмогорову [18] сформулировать и решить задачу линейного предсказания. Вычислять спектр по коэффициентам авторегрессии было в 1948 г. предложено Бартлеттом ([3], с. 686), который использовал спектральную плотность мощности авторегрессии второго порядка. Уравнения, возникающие в задаче линейного предсказания, и уравнения Юла — Уолкера имеют специальную структуру, которую первым изучал немецкий математик О. Тёплиц [41]. Эта структура исследовалась Н. Левинсоном, коллегой Н. Винера, который разработал весьма эффективную вычислительную процедуру решения уравнения Юла — Уолкера [19]. Развитие концепции линейного предсказания применительно к цифровым сейсмическим данным было предложено группой геофизического анализа (GAG) Массачусетского технологического института (MIT) в 1950-х гг. Эта работа и в особенности то, что было сделано Эндерсом Робинсоном [26], оказали глубокое воздействие на развитие современных цифровых методов спектрального анализа и обработки сигналов.

Если, скажем, Норберта Винера можно считать пионером современного *теоретического* спектрального анализа, то Джона Тьюки следовало бы назвать пионером современного *экспериментального* спектрального анализа. В статье, написанной в 1949 г. в Вудс-Холе, шт. Массачусетс, Тьюки использовал оценки корреляции, получаемые по конечным временны́м последовательностям, заложив тем самым экспериментальные основы спектрального анализа. Его процедура включает также соответствующее планирование эксперимента по сбору данных и ис-

пользование приближенного статистического распределения для спектральной оценки. Ставшее уже классическим подробное описание этой процедуры было им опубликовано совместно с Блэкманом в 1958 г. [6]. Многие из терминов современного спектрального анализа, такие как aliasing («наложение»), windowing («обработка с помощью окна, или взвешивание»), prewhitening («предварительное отбеливание»), tapering («обработка с помощью спадающего к краям окна»), smoothing («сглаживание»), decimation («децимация, или прореживание») и т. п., можно связать с именем Дж. Тьюки.

Последующий существенный вклад в развитие цифровых методов спектрального анализа представлял собой весьма эффективные алгоритмы, предназначенные для вычисления дискретного преобразования Фурье, являющегося версией преобразования Фурье, применимого при цифровой обработке данных. И хотя разработку алгоритмов быстрого преобразования Фурье (БПФ) можно связать с именами многих исследователей (см. исторический обзор Хайдемана и др. [12]), главное внимание всех работающих в области цифровой обработки было привлечено к краткой статье Джима Кули и Джона Тьюки [8], посвященной практике эффективного вычисления преобразования Фурье. Возможно, именно БПФ более чем какие-либо другие методы существенно расширило область применения методов спектрального анализа как средства обработки сигналов.

Главную причину сегодняшнего интереса к методам спектрального оценивания, обеспечивающим высокое разрешение при использовании временны́х или пространственных последовательностей ограниченной длины, можно, по всей видимости, связать с работой Джона Берга [7]. Полученная им спектральная оценка высокого разрешения, описанная в контексте формального математического аппарата метода максимальной энтропии, стали тем инструментом, который был положен в основу разработки параметрических, или модельных, подходов к спектральному оцениванию с высоким разрешением. Метод максимальной энтропии тесно связан с авторегрессионным спектральным анализом. Использовать авторегрессионные методы спектрального оценивания независимо предлагали еще Бартлетт [3] и Парзен [23], но лишь после публикации работы Берга был проявлен заметный интерес к этому методу спектрального оценивания.

Примерно так же, как появление БПФ резко повысило эффективность классических методов спектрального оценивания, так и разработка быстрых вычислительных алгоритмов продолжает оказывать подобное же влияние на более новые методы спектрального оценивания. Быстрые алгоритмы сделали возможным практическое осуществление многих методов спект-

рального оценивания в реальном времени. Примерно в течение последнего десятилетия одну из важных тем исследований составлял поиск быстрых алгоритмов для подгонки линейных параметрических моделей по методу наименьших квадратов к отсчетам данных. К числу первых значительных вкладов в эту область следует отнести работу сотрудников Станфордского университета Морфа и Кайлата.

Дополнительный материал относительно истории развития методов спектрального оценивания можно найти в обзорной статье Робинсона [27].

1.2. Солнечные пятна

Последовательность чисел солнечных пятен вследствие интереса к ним с точки зрения истории развития методов спектрального оценивания будет неоднократно использоваться в данной книге в качестве некоего «пробного камня» для описываемых в ней методов спектрального оценивания. В связи с этим уместно кратко упомянуть об источниках сведений о них. Солнечные пятна наблюдаются невооруженным глазом начиная примерно с 300 г. нашей эры, о чем могут свидетельствовать упоминания о них в старых китайских летописях той эпохи. Наблюдения солнечных пятен с помощью оптических телескопов ведутся в Европе начиная с 1610 г. нашей эры. Систематические наблюдения солнечных пятен в том виде, как они ведутся сегодня, начались в 1835 г. В 1843 г. Гофрат Генрих Швабе обнаружил циклическую закономерность смены минимумов и максимумов числа пятен на поверхности Солнца.

Для количественной оценки результатов наблюдений Рудольф Вольф ввел в 1848 г. *относительное* число пятен R в качестве меры активности солнечных пятен, с помощью которого он хотел учесть тот факт, что солнечные пятна имеют тенденцию появляться группами. Определение числа R производится по результатам ежесуточных наблюдений, полученных ручным способом. По сути дела, для этой цели используются два различных измерения. В первом из них подсчитывается общее число s отдельных солнечных пятен независимо от их размера, во втором подсчитывается число групп солнечных пятен g. Первоначально в качестве относительного числа солнечных пятен Вольф просто использовал взвешенную сумму $R=10g+s$, произвольно выбранные веса слагаемых которой отражали относительную важность нового пятна. Повышение активности солнечных пятен наблюдалось в тех случаях, когда новое пятно появлялось в области, где раньше не было солнечных пятен (таким образом формировалась группа), а не в области, где до этого уже существовала группа пятен. Заметим, что размер

площади отдельных пятен не определялся, а это могло бы, по всей видимости, дать более чувствительную меру, но это объяснялось ограниченными измерительными возможностями во времена Вольфа. Впоследствии анализ показал, что *среднегодовые* значения числа R почти линейно связаны со *среднегодовыми* значениями площадей солнечных пятен.

Так как для получения одного *среднесуточного* значения относительного числа солнечных пятен обычно используется от 10 до 50 наблюдателей, должна вводиться поправка на тип применяемых наблюдательных приборов (например, на степень увеличения), их географическое расположение, местные условия (например, на типичные атмосферные и погодные условия) и на самих наблюдателей (т. е. на применяемые ими методы подсчета и их индивидуальные особенности). Таким образом, получаемое каждым наблюдателем значение числа R определяется в соответствии с выражением $R=k(10g+s)$, где k — масштабирующий коэффициент, учитывающий особенности расположения данного наблюдателя и используемых им приборов. Для наблюдательных приборов Вольфа и их расположения $k=1$. Нетрудно видеть, что относительные числа солнечных пятен носят несколько субъективный характер, поскольку коэффициент k представляет собой переменную величину, значение которой должно эмпирически определяться для каждого наблюдателя. К тому же среднесуточное значение числа R является некоторой функцией числа действительно используемых наблюдателей. Кроме того, погодные условия и дни, «забракованные» наблюдателями, также могут привести к флюктуациям среднесуточных значений числа солнечных пятен.

К своим наблюдениям Вольф приступил в 1848 г., но сначала он проанализировал архивные записи, с тем чтобы получить оценки относительного числа солнечных пятен на период времени до 1848 г. [46]. В настоящее время мы располагаем ежесуточными записями числа солнечных пятен начиная с 1818 г., оценками среднемесячных и среднегодовых значений относительного числа солнечных пятен, вычисленными соответственно начиная с 1749 по 1700 г., и записями (эпохами) максимумов и минимумов активности солнечных пятен, которые отмечаются в наблюдениях начиная с 1610 г. Заметим, что при анализе архивных записей Вольф руководствовался допущением о 11,1-летнем цикле активности солнечных пятен. Современные исследования позволяют дать оценку среднегодовых значений числа солнечных пятен до 1500 г. нашей эры и основаны на анализе корреляции активности солнечных пятен с земными метеорологическими данными, климатическими изменениями, данными радиоуглеродной хронологии и дендрохронологии (изучением годовых колец деревьев), а также с результатами палео-

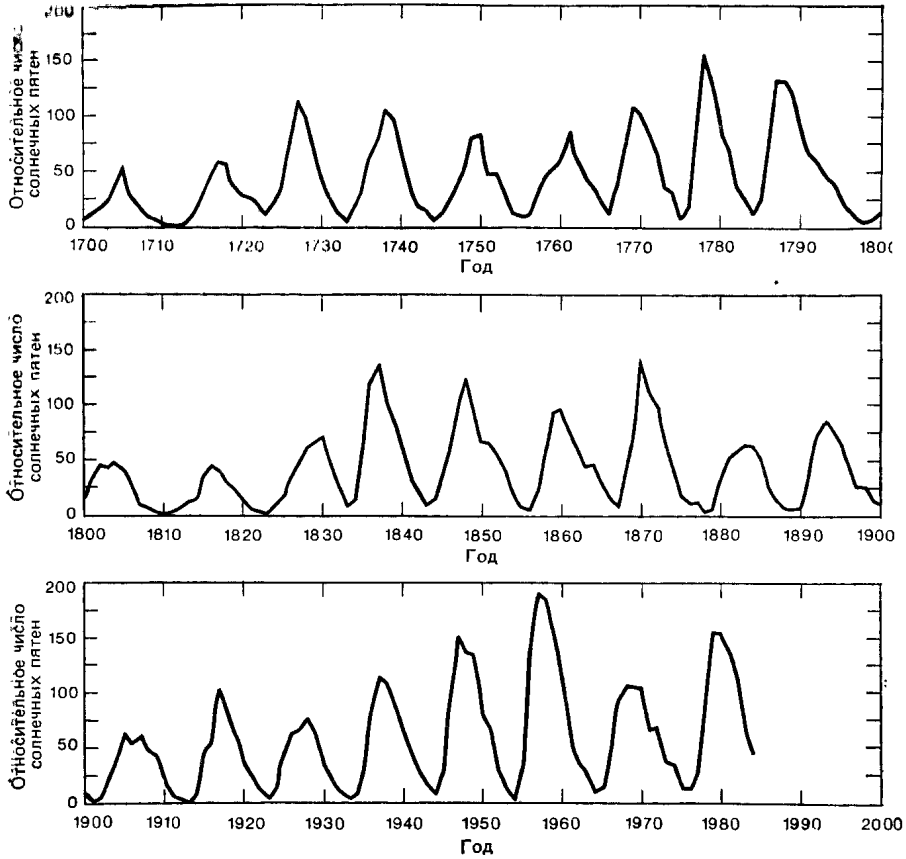


Рис. 1.4. График, характеризующий изменение среднегодовых значений относительного числа солнечных пятен начиная с 1700 г.

магнитных исследований [28]. Обнаружено, например, что вариации среднегодовых температур и среднегодовых магнитных склонений имеют примерно 19- и 22-летние циклы, т. е. примерно вдвое превышают основной цикл активности селнечных пятен.

В приложении I помещенном в конце книги, приведены среднемесячные и среднегодовые значения числа Вольфа R с 1700 по 1984 г. Эти данные графически представлены на рис. 1.4. В наши дни непрерывную регистрацию чисел Вольфа ведет Швейцарская федеральная обсерватория в Цюрихе, и ее записи служат международным источником информации об относительном числе солнечных пятен R.

Ключ к получению приемлемых и значимых оценок числа солнечных пятен — усреднение. Для получения среднесуточного

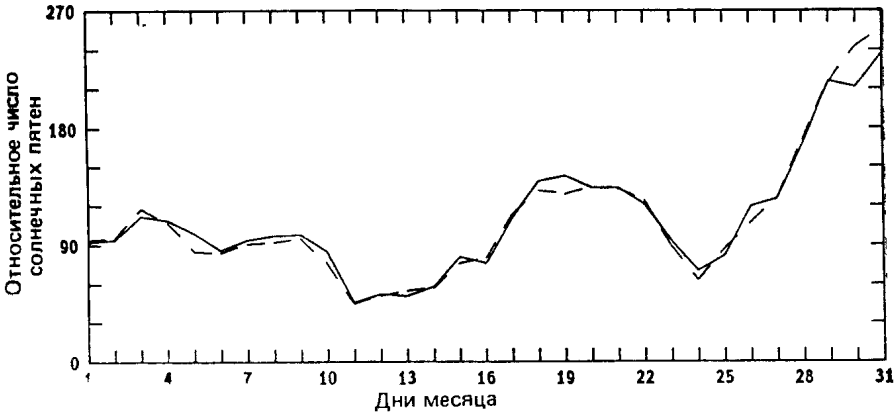


Рис. 1.5. График, характеризующий изменение среднесуточных значений относительного числа солнечных пятен для января 1982 г. (Непрерывная линия соответствует данным Швейцарской федеральной обсерватории, штриховая — данным Американской ассоциации наблюдателей переменных звезд (AAVSO).

значения этого числа используется большое количество наблюдателей, расположенных в различных географических районах. Однако, как следует из рис. 1.5, одного лишь суточного усреднения недостаточно. Для сравнения на этом рисунке показаны две кривые, характеризующие изменение значения среднесуточного числа Вольфа для одного из типичных месяцев; одна из этих кривых построена по данным Швейцарской федеральной обсерватории в Цюрихе и соответствует изменению так называемого международного относительного числа солнечных пятен R_I, вторая кривая построена по данным Американской ассоциации наблюдателей переменных звезд (AAVSO) и соответствует числу R_A. Нетрудно видеть, что активность солнечных пятен может очень сильно меняться на одномесячном интервале. И хотя обе кривые, представленные на этом рисунке, в целом достаточно хорошо совпадают, между ними все же есть незначительные различия, что отчасти связано с периодом вращения Солнца, которое не имеет, как известно, единого постоянного периода вращения. Так, на экваторе оно вращается быстрее, чем в высокоширотных (т. е. приполярных) областях. Средний период вращения Солнца на экваторе изменяется примерно от 25 до 27 суток, а на широте 60° он равен примерно 31 суткам. К тому же сами солнечные пятна меняются на интервалах от нескольких часов до нескольких месяцев. Различия между аналогичными кривыми для среднемесячных значений числа Вольфа иллюстрирует рис. 1.6. Месячный интервал — это, по-видимому, тот минимальный интервал усреднения, при

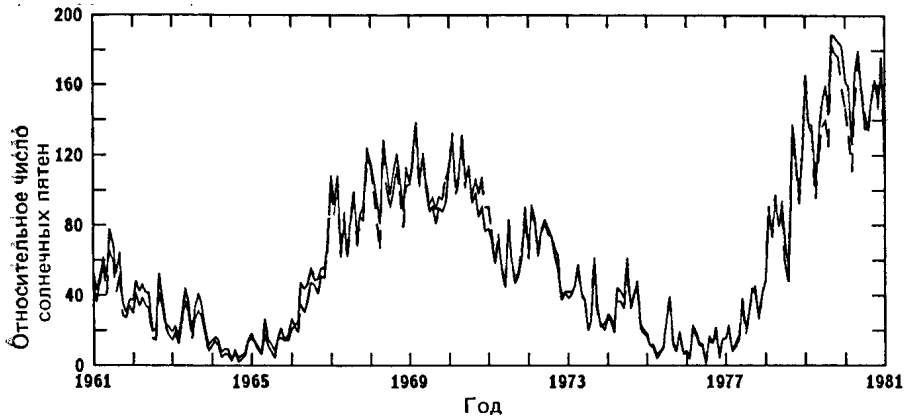


Рис. 1.6. График, характеризующий изменение среднемесячных значений относительного числа солнечных пятен для 1961—1983 гг. (Непрерывная линия соответствует данным Швейцарской федеральной обсерватории, штриховая — данным Американской ассоциации наблюдателей переменных звезд (AAVSO).

котором начинают получаться устойчивые оценки числа солнечных пятен. Получение наиболее устойчивых оценок обеспечивает усреднение на годовом интервале.

1.3. Контрольный случай

Хотя данные о числе солнечных пятен и представляют собой пример классического временно́го ряда, способа для определения истинного спектра по такой сравнительно короткой последовательности данных, к сожалению, не существует. Поэтому, для того чтобы охарактеризовать поведение каждой спектральной оценки при использовании короткой последовательности данных, было предложено использовать искусственно синтезированную последовательность данных с заранее известными свойствами. Эта тест-последовательность данных содержит 64 отсчета некоторого комплекснозначного процесса, состоящего из четырех комплексных синусоид и комплексного аддитивного окрашенного шума. Вещественная и мнимая составляющие этого процесса показаны на рис. 1.7 с той лишь целью, чтобы подчеркнуть дискретный характер этих данных. В приложении II, помещенном в конце книги, представлена распечатка значений отсчетов. Эта тест-последовательность используется также для того, чтобы дать читателю средство для быстрой проверки правильности реализации процедур всех спектральных оценок, для которых в книге приведены машинные программы. Для всех подобных программ приводятся также

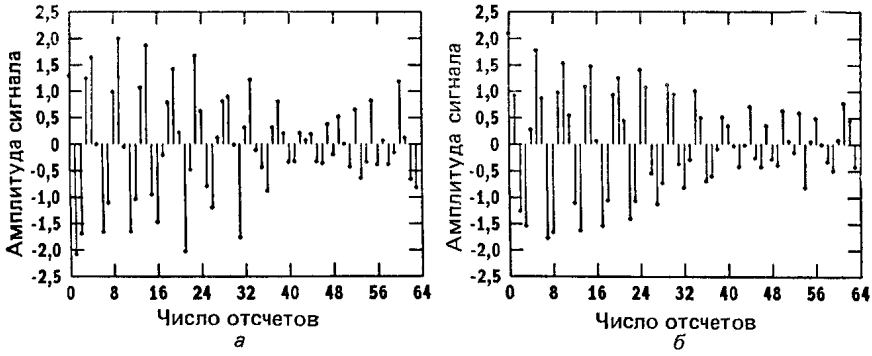


Рис. 1.7. Тест-последовательность комплексных данных: *а* — действительная часть; *б* — мнимая часть.

распечатки соответствующих выходных параметров для случая, когда на вход этих программ подается тест-последовательность данных. Читатели могут сравнить свои графики спектральных оценок с соответствующими графиками, которые приводятся в начальных разделах каждой главы.

Истинный спектр тест-последовательности, вычисленный с помощью аналитических средств, показан на рис. 1.8. На этом рисунке по оси абсцисс отложены доли частоты отсчетов, т. е. истинная частота f в герцах нормирована посредством деления на частоту отсчетов $f_s = 1/T$, где T — интервал отсчетов данных. Согласно теореме отсчетов для сигналов (см. гл. 2), относительные частоты должны лежать в интервале от —0,5 до 0,5. Частоты двух синусоид в этом спектре выбраны очень близкими друг к другу (на рис. 1.8 им соответствуют относительные частоты 0,2 и 0,21), с тем чтобы проверить разрешающую способность той или иной спектральной оценки. Мощность двух более слабых синусоидальных сигналов с относительными частотами 0,1 и —0,15 на 20 дБ меньше мощности двух более сильных синусоидальных сигналов. Эти слабые синусоидальные сигналы используются для испытания способности спектральных оценок обеспечивать обнаружение слабых компонент сигнала на фоне сильных сигналов. Окрашенный шумовой процесс был сформирован посредством пропускания двух независимо генерируемых процессов типа белого шума с нулевыми средними значениями через идентичные фильтры скользящего среднего (см. гл. 6 и 10) для раздельного получения вещественной и мнимой составляющих шумового процесса, использованного для получения тест-данных. Оба фильтра имели одинаковые частотные характеристики типа приподнятой косинусоиды; они показаны на рис. 1.8 между относительными частотами 0,2 и 0,5

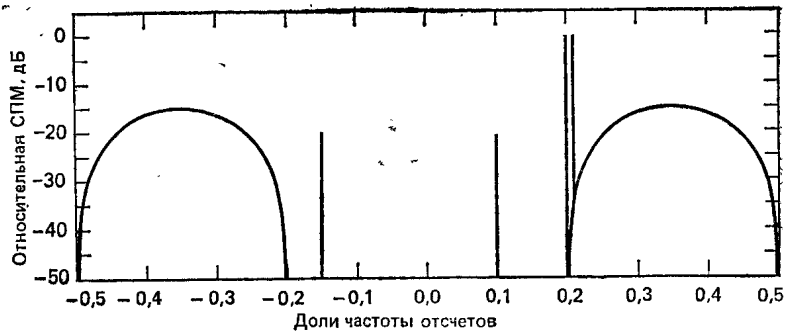


Рис. 1.8. Истинный спектр процесса, соответствующего тест-последовательности данных.

(центральная частота 0,35) и —0,2 и —0,5 (центральная частота —0,35). Хотя форма спектра окрашенного шумового процесса одинакова на положительных и отрицательных частотах истинного спектра тест-последовательности, показанного на рис. 1.8, эта симметрия не будет видна в спектральных оценках, приводимых в последующих главах книги, так как вещественная и мнимая составляющие этого окрашенного шумового процесса генерировались независимо, т. е. являются некоррелированными. Высота линий, характеризующих синусоидальные составляющие спектра, выбрана так, чтобы отображать мощность каждой синусоиды относительно *полной* мощности окрашенного шумового процесса. Следовательно, мощность каждой из сильных синусоид превышает мощность шума, а мощность каждой из двух слабых синусоид меньше мощности шума.

1.4. Проблемы в области спектрального оценивания

Интерес к альтернативным методам спектрального анализа поддерживается тем улучшением характеристик, которое они обещают, а именно более высоким частотным разрешением, повышенной способностью к обнаружению слабых сигналов или же сохранением «достоверности» формы спектра при меньшем числе используемых параметров. Аналитически описать характеристики большинства методов в случае ограниченного времени анализа (т. е. в случае короткой записи данных) весьма затруднительно; именно поэтому в литературе можно найти лишь очень малое количество эмпирических результатов. Это обусловило появление ряда проблем в области современного спектрального оценивания, некоторые из них кратко освещены ниже.

1.4.1. Разрешение

Спектральное разрешение относится к числу главных проблем современного спектрального оценивания, в особенности применительно к анализу коротких последовательностей данных. При этом, то что понимается под термином «разрешение» носит весьма субъективный характер. Одно из ранних определений принадлежит Рэлею [25], которое исходит из следующего рабочего определения для разрешения оптических телескопов с ограниченной пространственной апертурой:

> «Подобно тому как оптическая сила телескопа измеряется близостью двойных звезд, которые он может разрешить, так и оптическую силу спектроскопа следует измерять близостью самых близких двойных линий в спектре, которые он может разрешить».

Аналогичные определения можно сформулировать и для разрешения сигналов с ограниченной временной апертурой (т. е. длительностью); формальные определения разрешающей способности даны ниже в гл. 2 и 5. В литературе принято характеризовать относительные величины разрешающей способности двух спектральных оценок на основе визуальных впечатлений. Рассмотрим две спектральные оценки, показанные на рис. 1.9.

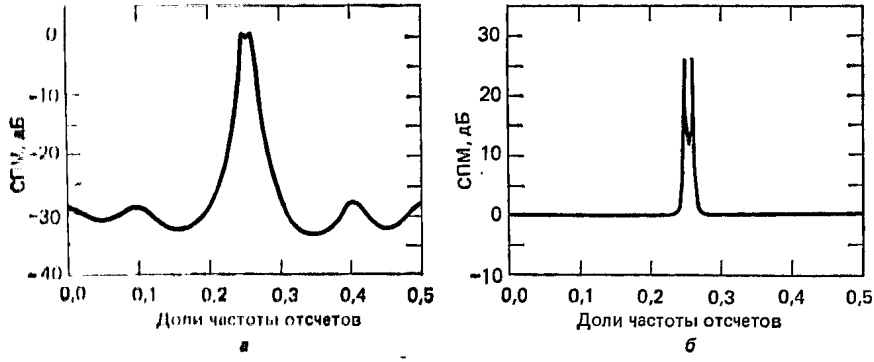


Рис. 1.9. Визуально-воспринимаемое усиление спектрального разрешения: *а* — исходный спектр; *б* — «обостренный» спектр, полученный за счет отображения исходного спектра с помощью $1/(1-x)$.

Спектральная оценка на рис. 1.9, *а* имеет единичный нормированный максимум с двумя слабо различимыми пиками, что должно указывать на присутствие двух спектральных составляющих. Если теперь сформировать новую спектральную функцию

$$P_B(f) = \frac{1}{1 - P_A(f)},$$

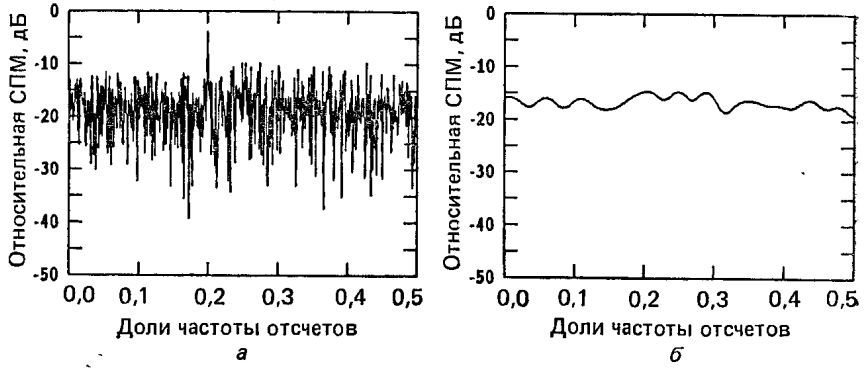


Рис. 1.10. *а* — Несглаженная периодограмма, позволяющая обнаружить синусоидальную составляющую; *б* — сглаженная периодограмма, в которой невозможно обнаружить синусоидальную составляющую.

которая показана на рис. 1.9, *б*, то она будет выглядеть как спектр с «более высоким» разрешением. На самом же деле оба приведенных спектра несут в себе одну и ту же информацию, а это означает, что одного лишь визуального сравнения спектральных оценок, конечно же, недостаточно для суждения о характеристиках разрешения [15].

1.4.2. Обнаружимость сигналов

Использование спектрального оценивания для обнаружения присутствия сигналов приводит к возникновению другой проблемы. Рассмотрим периодограммы, показанные на рис. 1.10. Обе они соответствуют одной и той же 1024-точечной реализации некоторого процесса, состоящего из аддитивной смеси одной синусоиды и белого шума при отношении сигнал/шум, равном —17 дБ. Периодограмма на рис. 1.10, *а* получена непосредственно по всем 1024 отсчетам, и в ней над уровнем шума отчетливо обнаружена синусоида с относительной частотой 0,2. На рис. 1.10, *б* представлена сглаженная периодограмма, полученная в результате разбиения исходной последовательности на 32 сегмента по 32 отсчета в каждом и последующего усреднения периодограмм этих сегментов. На этой оценке более очевидна уплощенная спектральная характеристика белого шума, но отклик, обусловленный присутствием синусоиды, здесь не обнаружим. Можно показать, что обнаружимость сигнала по несглаженной периодограмме превышает обнаружимость этого сигнала по сглаженной периодограмме в число раз, равное примерно корню квадратному из числа сегментов, или на $10\lg\sqrt{32}\simeq 7{,}5$ дБ в рассматриваемом случае. С точки зрения отображения пол-

ного спектра лучше сглаженная спектральная оценка, показанная на рис. 1.10, *б*, но с точки зрения обнаружимости сигнала — лучше несглаженная оценка. Таким образом, аргументы в пользу выбора той или иной спектральной оценки будут зависеть от того, интересует ли нас гладкая оценка в пределах всего диапазона анализируемых частот или же нам важна более высокая степень обнаружимости сигнала на некоторых конкретных его участках. Поэтому алгоритмы спектрального оценивания вовсе не обязательно являются также и хорошими алгоритмами обнаружения.

1.4.3. О перепутывании оценивания параметров со спектральным оцениванием

Задача спектрального оценивания подразумевает оценивание некоторой *функции* частоты. О характеристиках спектральной оценки судят по тому, насколько хорошо она согласуется с известным спектром тест-сигнала в некоторой непрерывной области частот. Имеются приложения, где основной интерес представляет лишь локальное поведение спектральной оценки в некоторых заданных диапазонах частот. Примером такого применения может служить оценивание частоты синусоиды в белом шуме, результаты которого представлены на рис. 1.10. Нетрудно видеть, что в качестве *спектральной оценки* лучше использовать оценку на рис. 1.10, *б*, так как она ближе к плоскому спектру белого шума. В качестве же *оценки частоты синусоиды* лучше использовать оценку на рис. 1.10, *а*, так как она позволяет более точно определить частоту этой синусоиды. К сожалению, эти оценки нередко путают в литературе, поскольку многие задачи *оценивания параметров* излагаются в контексте спектрального оценивания, даже если функция спектральной оценки и не является искомой количественной величиной.

Задача оценивания параметров и задача спектрального оценивания требуют различного статистического подхода, хотя обе они часто перекрываются в некоторых частных случаях. Поэтому о характеристиках *спектральной* оценки нельзя полностью судить по ее характеристикам как оценки *параметров*. Так, например, сравнение оценок, представленных на рис. 1.10, показывает, что сглаженная периодограмма является хорошей *спектральной* оценкой, но плохой оценкой *параметра*, которым в данном случае является частота синусоиды.

1.4.4. Одной оценки недостаточно

Спектральная оценка, получаемая по конечной записи данных, характеризует некоторое предположение относительно той истинной спектральной функции, которая была бы получена, если

бы в нашем распоряжении имелась запись данных бесконечной длины. Именно поэтому поведение и характеристики спектральных оценок должны описываться с помощью статистических терминов. Общепринятыми статистическими критериями качества оценки являются ее смещение и дисперсия. Аналитическое определение этих величин обычно наталкивается на определенные математические трудности, поэтому на практике просто совмещают графики нескольких реализаций спектральной оценки и визуально определяют смещение и дисперсию как функции частоты. Те области совмещенных графиков спектральных оценок, где экспериментально определенное значение дисперсии велико, будут свидетельствовать о том, что спектральные особенности, видимые в спектре отдельной реализации, не могут считаться статистически значимыми. С другой стороны, особенности совмещенных спектров в тех областях, где эта дисперсия мала, с большой достоверностью могут быть соотнесены с действительными частотными составляющими анализируемого сигнала. Однако в случае коротких записей данных часто не удается получить несколько спектральных оценок, да и сам статистический анализ отдельных спектральных оценок, полученных по коротким записям данных, в общем случае представляет собой весьма трудную проблему. По этой причине читатель должен очень тщательно делать свои выводы относительно сравнения различных спектральных оценок, получаемых при использовании тест-последовательности данных, описанной в разд. 1.3.

1.4.5. Общая картина

Из формального определения спектра, которое дано в гл. 4, следует, что спектр является некоторой функцией одних лишь статистик второго порядка, относительно которых в свою очередь предполагается, что они остаются неизменными, или *стационарными,* во времени. Следовательно, такой спектр не передает полной статистической информации об анализируемом случайном процессе, а значит, дополнительная информация может содержаться в статистиках третьего и более высокого порядков. Кроме того, многие обычные сигналы, которые приходится анализировать на практике, не являются стационарными, поэтому методы, описанные в этой книге, могут оказаться неприменимыми к полной записи данных. Однако короткие сегменты данных, получаемые на практике из более длинной записи данных, можно считать локально стационарными, а это позволяет использовать описанные в книге методы спектрального оценивания. Анализируя изменения спектральных оценок от одного та-

кого сегмента к другому, можно затем составить представление и об изменяющихся во времени статистиках сигналов, т. е. нестационарных.

1.5. Как пользоваться этой книгой

Материал этой книги организован таким образом, чтобы читатель мог без труда реализовать многие из описанных в ней спектральных оценок. Каждая глава начинается небольшим вводным разделом, где указываются алгоритмы конкретных оценок, рассматриваемых в данной главе, включая краткую запись этапов реализации этих алгоритмов. В приложениях к главам помещены написанные на Фортране подпрограммы машинной реализации этих алгоритмов. Читатель может остановиться после вводного раздела, для того чтобы сначала «набить руку» при работе с тем или иным алгоритмом, описанным в каждой главе, а уже затем перейти к более глубокому изучению дальнейшего материала для усвоения более тонких теоретических и математических деталей. В распечатках подпрограмм указаны номера уравнений, приведенных в тексте глав, для того чтобы облегчить понимание логики построения соответствующих машинных программ. Все подпрограммы предназначены для обработки комплекснозначных данных, а в описании, которым сопровождается каждая из них, указываются средства, позволяющие преобразовать ее для обработки действительнозначных данных.

Для тех читателей, которые желали бы получить помощь при выборе метода спектрального оценивания, полезной окажется сводная таблица, приведенная в гл. 14. В этой таблице перечислены все основные алгоритмы спектрального оценивания, а также указаны разделы книги, где они описаны.

По своей тематике главы книги образуют четыре основные группы; это главы, в которых изложен вводный вспомогательный материал, главы, в которых кратко описаны одномерные одноканальные спектральные оценки; и главы, в которых описаны спектральные оценки для многоканальных и для двумерных последовательностей данных. Вводный материал (гл. 2—4) содержит математические основы, необходимые для изложения последующего материала; здесь же дано определение спектральной плотности мощности (СПМ). Спектральные оценки сгруппированы в соответствии с тремя классами: классические спектральные оценки (гл. 5), параметрические спектральные оценки (гл. 6—11) и непараметрические спектральные оценки (гл. 12 и 13). Многоканальные и двумерные спектральные оценки описаны соответственно в гл. 15 и 16. Многоканальным называется спектральный анализ векторных данных (например,

получаемых от некоторой решетки датчиков), которые являются функцией некоторой скалярной величины (например, времени). Многомерным называется спектральный анализ скалярных данных (например, данных изображения), которые являются функцией некоторого вектора (например, двух пространственных координат).

Литература

[1] *Alter D.* A Group or Correlation Periodogram, with Application to the Rainfall of the British Isles. Mon. Weather Rev., vol. 56, pp. 263—266, 1927.

[2] *Bartlett M. S.* On the Theoretical Specification of Sampling Properties of Autocorrelated Time-Series. J. R. Stat. Soc., ser. B, vol. 8, pp. 27—41, 1946.

[3] *Bartlett M. S.* Smoothing Periodograms from Time-Series with Continuous Spectra. Nature, London, vol. 161, pp. 686—687, May 1948.

[4] *Bartlett M. S.* Periodogram Analysis and Continuous Spectra. Biometrika, vol. 37, pp. 1—16, June 1950.

[5] *Bernoulli D.* Hydrodynamica. Basel, Switzerland, 1738.

[6] *Blackman R. B., Tukey J. W.* The Measurements of Power Spectra from the Point of View of Communications Engineering. Bell Syst. Tech. J., vol. 33, pp. 185—282, 485—569, 1958; also republished by Dover Publications, New York, 1959.

[7] *Burg J. P.* Maximum Entropy Spectral Analysis. Proceedings 37th Meeting of Society of Exploration Geophysicists, Oklahoma City, Okla., October 1967. (См. также: Modern Spectrum Analysis, D. G. Childers, ed., IEEE Press Selected Reprint Series, New York, 1978.)

[8] *Cooley J. W., Tukey J. W.* An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series. Math. Comput., vol. 19, pp. 297—301, April 1965.

[9] *Daniell P. J.* Discussion of «On the Theoretical Specification and Sampling Properties of Autocorrelated Time-Series». J. R. Stat. Soc., ser. B, vol. 8, pp. 88—90, 1946.

[10] *Euler L.* Institutiones Calculi Differentialis. St. Petersburg, Russia, 1755.

[11] *Fourier J. B. J.* Théorie analytique de la chaleur (Аналитическая теория тепла). Paris, France, 1822.

[12] *Heideman M. T., Johnson D. H., Burrus C. S.* Gauss and the History of the Fast Fourier Transform. IEEE Acoust. Speech, and Signal Process. Magazine, vol. 1, pp. 14—21, October 1984.

[13] *Henrici O.* On a New Harmonic Analyser. Philos. Mag., vol. 38, pp. 110—121, 1894.

[14] *Jenkins G. M., Watts D. G.* Spectral Analysis and Its Applicationa. Holden-Day, Inc., San Francisco, 1968. [Имеется русский перевод: *Дженкинс Г., Ваттс Д.* Спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1971, вып. 1; 1972, вып. 2.]

[15] *Kay C. M., Demeure C.* The High-Resolution Spectrum Estimator — A Subjective Entity. Proc. IEEE, vol. 72, pp. 1815—1816, December 1984. [Имеется русский перевод: *Кей С., Демюр С.* Оценивание спектра с высоким разрешением как субъективное средство. ТИИЭР, 1984, т. 72, № 12, с. 171—173.]

[16] *Kendall M. G.* On the Analysis of Oscillatory Time Series. J. R. Stat. Soc., vol. 108, p. 93, 1945.

[17] *Khintchine A. J.* Korrelationtheorie der Stationären Stochastischen Prozesse. Math. Ann., vol. 208, pp. 604—615, 1934.

[18] *Kolmogoroff A. N.* Sur l'interpolation et l'extrapolation des suites stationnaires. C. R. Acad. Sci., vol. 208, p. 2043, 1939.

[19] *Levinson N.* The Wiener (Root Mean Square) Error Criterion in Filter Design and Prediction. J. Math. Phys., vol. 25, pp. 261—278, 1947.
[20] *Michelson A. A., Stratton S. W.* A New Harmonic Analyser. Philos., Mag., vol. 45, pp. 85—91, 1898.
[21] *Newton I.* Phil. Trans., vol. VI, 1671, p. 3076; «Comparing the length of this coloured spectrum with its breadth...» (см. с. 3076, начиная со слов: «Сравнение длины этого окрашенного спектра с его шириной...»).
[22] *Newton I.* Pricipia. London, England, 1687; Optics. London, England, 1704.
[23] *Parzen E.* On Consistent Estimates of the Spectrum of a Stationary Time Series. Ann. Math. Stat., vol. 28, pp. 329—348, 1957.
[24] *de Prony, Baron (Gaspard Riche).* Essai expérimental et analytique: sur les lois des la dilatabilité de fluides élastiques et sur celles de la force expansive de la vapeur de l'eau et de la vapeur de l'alkool, a différentes températures. J. Ec. Polytech., vol. 1, cahier 2, pp. 24—76, 1795.
[25] *Rayleigh J. W.* Investigations in Optics, with Special References to the Spectroscope. Phylos. Mag. J. Sci., vol. 8, no. 49, pp. 261—274, October 1879.
[26] *Robinson E. A.* Predictive Decomposition of Time Series with Applications to Seismic Exploration. MIT Geophysical Analysis Group (GAG), Cambridge, Mass., 1954; Geophysics, vol. 32, pp. 418—484, 1967.
[27] *Robinson E. A.* A Historical Perspective of Spectrum Estimation. Proc. IEEE, vol. 70, pp. 885—907, September 1982. [Имеется русский перевод: *Робинсон Э. А.* История развития теории спектрального оценивания. ТИИЭР, 1982, т. 70, № 9, с. 6—33.]
[28] *Schove D. J.*, ed., Sunspot Cycles. Hutchinson & Ross Publishing Co., Stroudsburg, Pa., 1983.
[29] *Schuster A.* On Interference Phenomenon. Phylos. Mag., vol. 37, pp. 509—545, June 1894.
[30] *Schuster A.* On Lunar and Solar Periodicities of Earthquakes. Proc. R. Soc. London, vol. 61, pp. 455—465, 1897.
[31] *Schuster A.* On the Investigation of Hidden Periodicities with Application to a Supposed Twenty-Six-Day Period of Meteorological Phenomena. Terr. Mag., vol. 3, no. 1, pp. 13—41, March 1898.
[32] *Schuster A.* The Periodogram of Magnetic Declination as Obtained from the Records of the Greenwich Observatory during the Years 1871—1895. Trans. Cambridge Phylos. Soc., vol. 18, pp. 107—135, April 1900.
[33] *Schuster A.* The Theory of Optics. Cambridge University Press, London, 1904.
[34] *Schuster A.* The Periodogram and Its Optical Analogy. Proc. R. Soc. London, ser. A, vol. 77, pp. 136—140, 1905; см. там же: On Sun Spot Periodicities. Preliminary Notice, pp. 141—145.
[35] *Schuster A.* On the Periodicities of Sunspots. Phylos. Trans. R. Soc. London, ser. A, vol. 206, pp. 69—100, 1906.
[36] *Sharp A.* Harmonic Analyser, Giving Direct Readings of the Amplitude and Epoch of the Various Constituent Simple Harmonic Terms. Phylos. Mag., vol. 38, pp. 121—125, 1894.
[37] *Слуцкий Е. Е.* Сложение случайных причин как источник циклических процессов. Вопросы конъюнктуры, 1927, т. 3, № 1. [Имеется английский перевод: *Slutsky E. E.* The Summation of Random Causes as the Source of Cyclic Processes. Econometrica, vol. 5, p. 105, 1937.]
[38] *Stokes G. G.* Comments on the «Preliminary Report to the Committee on Solar Physics on a Method of Detecting the Unknown Inequalities of a Series of Observations. Proc. R. Soc. London, vol. 29, pp. 122—123, 29 May 1879.
[39] *Thomson W. (Lord Kelvin).* On an Instrument for Calculating the Integral

of the Product of Two Functions. Proc. R. Soc. London, vol. 24, pp. 266—268, 1876.
[40] *Thomson W. (Lord Kelvin).* Harmonic Analyser. Proc. R. Soc. London, vol. 27, pp. 371—373, 1878.
[41] *Toeolitz O.* Zur der Quadratischen und Bilinearen Formen. von. Unendlichvielen Veränderlichen. Math. Ann., vol. 70, pp. 351—376, 1911.
[42] *Tukey J. W.* The Sampling Theory of Power Spectrum Estimates. Proceedings Symposium on Applied Autocorrelation Analysis of Physical Problems, U.S. Office of Naval Research (NAVEXOS-P-725), pp. 47—67, 1949; перепечатано в J. Cycle Res., vol. 6, pp. 31—52, 1957.
[43] *Walker G.* On Periodicity in Series of Related Terms. Proc. R. Soc. London, ser. A, vol. 131, pp. 518—532, 1931.
[44] *Wiener N.* Generalized Harmonic Analysis. Acta Math., vol. 55, pp. 117—258, 1930.
[45] *Wold H. O. A.* A Study in the Analysis of Stationary Time Series, dissertation, Uppsala University, 1938; опубликовано изд-вом Almqvist & Wiksell Forlag, Stockholm, 1954.
[46; *Wolf R.* Tafel der Relativzahlen. Astron. Mitteil. Eidgen. Sternwarte, Zurich, no. 24, vol. 111, 1868.
[47] *Yule G. U.* On a Simple Form of Harmonic Analyses. Phylos. Mag., vol. 39, pp. 367—374, 1895.
[48] *Yule G. U.* On a Method of Investigation Periodicities in Disturbed Series, with Spesial Reference to Wolfer's Sunspot Numbers. Phylos. Trans. R. Soc. London, ser. A, vol. 226, pp. 267—298, 1927.

Глава 2
ОБЗОР ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ И ТЕОРИИ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

2.1. Введение

Поскольку эта глава носит обзорный характер, то предполагается, что читатель уже знаком с линейными системами и теорией преобразования Фурье в объеме какого-либо вводного курса по системам с непрерывным и дискретным временем.[1] За более подробной информацией относительно материала, изложенного в этой главе, можно обратиться к работам, указанным в списке литературы, приведенном в конце главы. В этой главе будут также введены многие из условных обозначений, которые используются в данной книге.

Основные понятия теории линейных систем представлены здесь раздельно для сигналов с непрерывным (разд. 2.3) и дискретным (разд. 2.4) временем. Раздел 2.5 посвящен теории преобразования Фурье для сигналов с непрерывным временем. Хотя теория преобразования Фурье для сигналов с дискретным временем часто излагается в литературе независимо от теории этого преобразования для сигналов с непрерывным временем, в разд. 2.6 и 2.7 показано, что преобразование с дискретным временем может рассматриваться как частный случай преобразования с непрерывным временем. Это позволяет установить связь между преобразованием Фурье с непрерывным временем (НВПФ) и рядом Фурье с дискретным временем (ДВРФ) для конечной последовательности отсчетов сигнала с непрерывным временем. Это вполне согласуется с тем, что большинство осуществляемых на практике процедур представляет собой обработку последовательностей отсчетов, получаемых в результате равномерной дискретизации сигнала, непрерывно изменяющегося во времени или в пространстве. Используемое в книге определение преобразования Фурье с дискретным временем несколько отличается от принятого в литературе определения дискретного преобразования Фурье (ДПФ). Это различие обусловлено включением в определение ДВПФ интервала дискретизации (т. е. интервала отсчетов) в качестве масштабного множителя, что позволит нам в дальнейшем получать спектральные оценки в соответствующих единицах измерения мощности. Всем этим вопросам посвящены разд. 2.8 и 2.9. В разд. 2.10 суммиро-

[1] См., например, [12*, 13*]. — *Прим. ред.*

ваны результаты для быстрого преобразования Фурье — весьма эффективного алгоритма, предназначенного для вычисления ДПФ. Наконец, в разд. 2.11 обсуждается важное понятие произведения времени на ширину полосы (частот), которое лежит в основе меры разрешающей способности.

При изложении материала в данной главе полагается, что сигнал является детерминированной функцией. Дополнительный математический аппарат, требуемый для описания случайных сигналов, приводится в гл. 4.

2.2. Обозначения, используемые при описании сигнала

Непрерывный сигнал — это любое действительное или комплексное колебание во времени $f(t)$, определяемое как некоторая функция непрерывной действительной временно́й переменной t; или же любое действительное или комплексное пространственное колебание $g(s)$, определяемое как некоторая функция действительной пространственной переменной s. Непрерывные сигналы часто называют *аналоговыми* сигналами, если они могут принимать континуум значений при любом значении переменных t и s. Если не будет оговорено особо, то все рассматриваемые в книге сигналы будут предполагаться комплексными величинами. Это обусловлено тем, что комплексные данные начинают все шире использоваться в практике цифровой обработки сигналов. Так, например, комплексные данные представляют собой естественный выход комплексного процесса демодуляции (см. приложение 2.А). Некоторые сигналы, например те, которые применяются в радиолокации и связи, имеют синфазную и квадратурную составляющие, что также вполне естественно приводит к их комплексному представлению.

Дискретный сигнал — это произвольная функция $f[n]$, представляющая собой некоторую последовательность действительных или комплексных чисел, определенную при всех целочисленных значениях n. Непрерывная функция времени $f(t)$, дискретизуемая с равномерным интервалом T секунд, или непрерывная пространственная функция $g(s)$, дискретизуемая с равномерным интервалом S метров (или каких-либо других подходящих пространственных единиц измерения), будут соответственно порождать дискретные последовательности $f[n]=f(nT)$ и $g[n]=g(nS)$. Заметим, что для различения обозначений непрерывных и дискретных функций используются соответственно круглые () и квадратные [] скобки. Круглые скобки — это отрезки гладкой непрерывной линии, тогда как каждая квадратная скобка образована из трех отдельных — дискретных — отрезков прямой линии. Использование этих символов позволяет устранить неопределенность между непрерывными и дискрет-

ными функциями, обозначаемыми одинаковыми буквенными символами.

Непрерывный или дискретный сигнал, величина которого при любом значении времени t или пространственной переменной s может принимать не континуум, а только некоторое конечное число значений, называют *цифровым* сигналом. На практике дискретные сигналы — это, как правило, и цифровые сигналы. Для формирования цифровых отсчетов сигналов (квантования) применяются аналого-цифровые преобразователи (АЦП), а для хранения значений данных в цифровых вычислительных машинах используются регистры с конечной длиной слова.

2.3. Непрерывные линейные системы

Линейная система — непрерывная или дискретная — это просто система, к которой применим принцип суперпозиции (т. е. наложения) реакций (или откликов). Следовательно, отклик некоторой линейной системы на сумму двух входных сигналов будет просто суммой откликов этой системы на каждый отдельный входной сигнал. Линейная система будет *инвариантной во времени*, если вход $x(t)$ порождает выход $y(t)$, а вход $x(t-t_0)$ порождает выход $y(t-t_0)$ при любом временно́м (или пространственном) сдвиге t_0.

Специальным входным сигналом является *единичная импульсная функция* $\delta(t)$, которую называют также *непрерывной дельта-функцией*.[1] Единичная импульсная функция может рассматриваться как некоторый входной сигнал нулевой ширины и бесконечной высоты

$$\delta(t)=\begin{cases}\infty & \text{при } t=0;\\ 0 & \text{при } t\neq 0,\end{cases} \tag{2.1}$$

но конечной площади

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,dt=1. \tag{2.2}$$

Импульсная функция обладает селектирующим свойством

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}f(t-\tau)\,\delta(\tau)\,d\tau=f(t) \tag{2.3}$$

в том смысле, что она может локализовать, или воспроизводить, какое-либо конкретное значение функции $f(t)$ при условии, что эта функция непрерывна по t. *Заметим, что импульс-*

[1] Название «непрерывная дельта-функция», использованное автором, несколько неточно определяет эту сингулярную функцию, предназначенную для обозначения точечной локализации (см., например, [13*], т. 2, гл. 11). — *Прим. ред.*

ная функция $\delta(t)$ *имеет строгий математический смысл только в том случае, когда она используется под знаком интеграла.* Например, произведение непрерывной и импульсной функций $f(t)\delta(t)$ можно интерпретировать как произведение $f(0)\delta(t)$ по той причине, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)\,[f(\tau)\,\delta(\tau)]\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} [g(t-\tau)\,f(\tau)]\,\delta(\tau)\,d\tau = g(t)\,f(0). \tag{2.4}$$

Таким образом, произведение функции $f(t)$ с импульсной функцией дает значение («отсчет») этой функции в момент времени $t=0$.

Выходной отклик $g(t)$ линейной инвариантной во времени (ЛИВ) системы на произвольный входной сигнал $f(t)$ определяется *непрерывным интегралом свертки*

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\,f(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\,f(\tau)\,d\tau, \tag{2.5}$$

где $h(t)$ — непрерывная импульсная характеристика этой системы, т. е. иными словами, ее отклик в том случае, когда в качестве входного сигнала используется импульсная функция:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau. \tag{2.6}$$

Используя для краткой записи операции свертки символ «★», выражение (2.5) можно записать в следующем виде:

$$g(t) = h(t) \star f(t). \tag{2.7}$$

Если входное воздействие непрерывной ЛИВ-системы с импульсной характеристикой $h(t)$ имеет форму комплексной экспоненты, т. е. $f(t)=\exp(st)$, где s — произвольная комплексная величина, то выход $g(t)$ будет иметь форму

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\exp(s\,[t-\tau])\,d\tau = H(s)\exp(st), \tag{2.8}$$

где

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\exp(-s\tau)\,d\tau. \tag{2.9}$$

Функция $H(s)$ называется *непрерывной системной функцией;* ее можно также рассматривать как *преобразование Лапласа* от импульсной характеристики. Член $\exp(st)$ называют собственной функцией линейной системы, поскольку и вход, и выход пропорциональны этому члену. Тогда функция $H(s)$ является *собственным значением* этой системы, так как она играет роль комплексного масштабного множителя при собственной функции.

2.4. Дискретные линейные системы

Вывод соответствующих соотношений для дискретных линейных систем можно провести аналогично их выводу для непрерывных линейных систем. Специальным входным сигналом для дискретных систем является *единичная импульсная функция* $\delta[n]$, называемая также *дискретной дельта-последовательностью*.[1] Она просто определяется как

$$\delta[n]=\begin{cases}1 & \text{при } n=0;\\ 0 & \text{при } n\neq 0.\end{cases} \tag{2.10}$$

В отличие от случая с непрерывным временем при определении $\delta[n]$ отсутствуют какие-либо аналитические трудности. Любую произвольную последовательность $f[n]$ можно записать в виде взвешенной суммы дискретных импульсных функций

$$f[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]\,\delta[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f[n-k]\,\delta[k]. \tag{2.11}$$

Пусть $h[n]$ — *дискретная импульсная характеристика* дискретной линейной системы, возбуждаемой единичной импульсной функцией. Тогда выходной отклик $g[n]$ на произвольную входную последовательность $f[n]$ будет определяться следующей *дискретной сверткой*:

$$g[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[n-k]\,f[k]=h[n]\star f[n]. \tag{2.12}$$

Заметим, что в зависимости от того, круглые или квадратные скобки использованы при записи функций, объединяемых оператором «$\star$», будет соответственно подразумеваться операция дискретной или непрерывной свертки.[2] *Каузальной дискретной системой* является система, выход которой в момент времени n зависит только от входа $f[k]$, где $k\leqslant n$, а это означает $h[k]=0$ при $k<0$.

Если входом дискретной линейной системы с импульсной характеристикой $h[n]$ является экспоненциальная последовательность $f[n]=z^n$, где z — произвольная комплексная величина, то выходной отклик этой системы будет определяться выражением

$$g[n]=H(z)\,z^n, \tag{2.13}$$

где

$$H(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\,z^{-n}=\mathcal{Z}\{h[n]\}. \tag{2.14}$$

---

[1] Эту функцию также называют *функцией единичного отсчета* (см., например, [13*], т. 1, гл. 9). — *Прим. ред.*

[2] Более точно: свертка соответственно в дискретном или непрерывном времени (см., например, [13*], т. 1, гл. 9 и 10). — *Прим. ред.*

Следовательно, z^n — это собственная функция дискретной линейной системы, а $H(z)$ — *дискретная системная функция*, которая определена для тех значений z, при которых сумма в (2.14) сходится. Функцию $H(z)$ можно рассматривать как двустороннее *z-преобразование* последовательности $h[n]$. Для обозначения операции z-преобразования далее будет использоваться символ $\mathscr{Z}$. Заметим, что $H(z)$ — это некоторая непрерывная функция z, даже если она и была определена по дискретной последовательности. Функция $H(z)$ имеет вид полинома, в котором степени z^{-1} соответствуют последовательным значениям индекса времени (например, $h[n]$ связано с членом z^{-n}). В этом смысле z^{-1} можно рассматривать как оператор задержки на один отсчет.

Таблица 2.1. Свойства z-преобразования

Свойство	Функция дискретного времени	z-преобразование
Определения	$f[n]$, $g[n]$	$F(z)$, $G(z)$
Линейность	$af[n]+bg[n]$	$aF(z)+bG(z)$
Сдвиг	$f[n-m]$	$z^{-m}F(z)$
Масштабирование	$a^{-n}f[n]$	$F(az)$, $a>0$
Сопряжение	$f^*[n]$	$F^*(z^*)$
Обращение времени	$f[-n]$	$F(1/z)$
	$f^*[-n]$	$F^*(1/z^*)$
Свертка	$f[n]\bigstar g[n]$	$F(z)G(z)$

Ряд важных свойств z-преобразования перечислен в табл. 2.1. Заметим, что указанные в этой таблице свойства справедливы только для общей области сходимости функций $F(z)$ и $G(z)$. Доказательства этих свойств даны в книгах Оппенгейма и Шафера [11] и Оппенгейма и Уиллоки [12].

Один важный класс дискретных системных функций образуют функции с рациональными z-преобразованиями, т. е. с преобразованиями, которые представляют собой отношения полиномов от z. Пусть некоторая каузальная дискретная линейная система описывается следующим линейным разностным уравнением с постоянными коэффициентами

$$\sum_{k=0}^{P} a[k]\,y[n-k] = \sum_{k=0}^{Q} b[k]\,x[n-k], \tag{2.15}$$

которое связывает входную и выходную последовательности $x[n]$ и $y[n]$, где $n \geqslant 0$. Последовательности $a[0], \ldots, a[P]$ и

$b[0], \ldots, b[Q]$ полностью характеризуют эту систему.[1] Без потери общности можно положить $a[0]=1$. Если заданы некоторое множество начальных условий для входной и выходной последовательностей при $n<0$ и входная последовательность $x[n]$ при $n\geqslant 0$, то нетрудно вычислить выходную последовательность $y[n]$ при $n\geqslant 0$. При нулевых начальных условиях z-преобразование, соответствующее уравнению (2.15), будет иметь следующий вид:

$$Y(z)\sum_{k=0}^{P} a[k]z^{-k}=X(z)\sum_{k=0}^{Q} b[k]z^{-k}, \tag{2.16}$$

где было использовано свойство свертки, указанное в табл. 2.1. Следовательно, системная функция $H(z)$, связывающая вход и выход, будет определяться выражением

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{k=0}^{Q} b[k]z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{P} a[k]z^{-k}}, \tag{2.17}$$

которое является рациональной функцией от z^{-1}. Одна из эквивалентных факторизованных форм функции $H(z)$ имеет вид

$$H(z)=\frac{b[0]\prod_{k=1}^{Q}(1-z_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{P}(1-p_k z^{-1})}, \tag{2.18}$$

так что $b[0]$ можно рассматривать как коэффициент, масштабирующий усиление. Корни $z_1, \ldots, z_Q$ полинома в числителе и корни $p_1, \ldots, p_P$ знаменателя называются соответственно *нулями* и *полюсами* функции $H(z)$. Можно показать [12], что для устойчивой системы все полюсы должны удовлетворять условию $|p_k|<1$. *Минимально-фазовой* линейной системой называется каузальная система, у которой все полюсы и нули системной функции $H(z)$ лежат внутри единичной окружности в z-плоскости, т. е., иными словами, $|z_k|<1$ и $|p_k|<1$.

Системную функцию (2.17) можно также записать в форме разложения на элементарные дроби. Если положить, что $Q\leqslant P$,

[1] В разностных уравнениях с постоянными коэффициентами последние различают по их индексам, т. е. пишут a_i или b_i, а не с помощью обозначений $a[i]$ или $b[i]$, принятых автором, что может создать ошибочное представление об их зависимости от времени (см. [13*], т. 1, гл. 7). — *Прим. ред.*

а кратные полюсы отсутствуют, то

$$H(z)=\sum_{k=1}^{P}\frac{r[k]}{1-p_k z^{-1}}=\sum_{k=1}^{P}\frac{r[k]\,z}{z-p_k}. \qquad (2.19)$$

Вычеты $r[k]$, $k=1, \ldots, P$ можно вычислить, используя теорему о вычетах

$$r[k]=\left[\frac{H(z)(z-p_k)}{z}\right]_{z=p_k}. \qquad (2.20)$$

Наличие кратных полюсов требует несколько более сложного подхода. Используя обратное z-преобразование, соответствующее функции (2.19), можно показать [11], что импульсная характеристика дискретной системы при нулевых начальных условиях представляет собой сумму дискретных экспонент:

$$h(n)=\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{P} r[k]\,p_k^n, & n\geqslant 0;\\ 0, & n<0.\end{cases} \qquad (2.21)$$

2.5. Преобразование Фурье с непрерывным временем

Хотя преобразование Лапласа $H(s)$ позволяет выполнить общий анализ поведения непрерывной линейной системы при произвольном экспоненциальном входном воздействии, часто наибольший интерес представляет оценка ее поведения относительно оси мнимой переменной, т. е. при $s=j2\pi f$. В этом случае преобразование Лапласа сводится к некоторой функции от f, определяемой выражением

$$H(f)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\exp(-j2\pi ft)\,dt=\mathcal{F}\{h(t)\}. \qquad (2.22)$$

В этой форме функция $H(f)$ называется *преобразованием Фурье с непрерывным временем* (или *непрерывно-временным преобразованием Фурье*, НВПФ). Для обозначения операции НВПФ мы будем далее использовать символ $\mathcal{F}$. Переменная f в комплексной синусоиде $\exp(-j2\pi f)$ соответствует частоте, измеряемой в герцах, если переменная t измеряется в единицах времени (в секундах). При обработке пространственных сигналов вместо временной переменной t используется пространственная переменная x, а вместо частоты f — волновое число k, измеряемое в циклах на пространственную единицу. По сути дела, НВПФ идентифицирует частоты и амплитуды тех комплексных синусоид, на которые разлагается некоторое произвольное коле-

бание. *Обратное преобразование Фурье* определяется выражением

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) \exp(j2\pi ft)\, df = \mathcal{F}^{-1}\{H(f)\}. \qquad (2.23)$$

Для обозначения операции обратного преобразования Фурье с непрерывным временем далее будет использоваться символ $\mathcal{F}^{-1}$. Выражения (2.22) и (2.23) образуют пару преобразований Фурье с непрерывным временем (пару НВПФ).

Существование прямого и обратного преобразований Фурье с непрерывным временем для данной функции определяется целым рядом условий. Одно из достаточных условий состоит в том, что сигнал $h(t)$ должен быть абсолютно интегрируемым в смысле

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt < \infty. \qquad (2.24)$$

Одно менее ограничительное достаточное условие существования НВПФ состоит в том, что сигнал должен иметь конечную энергию, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|^2 dt < \infty.$$

Другие достаточные условия существования НВПФ применимы к сигналам, которые могут быть представлены в форме $h(t) = a(t)\sin(2\pi ft+\theta)$. Функция $a(t)$ должна быть затухающей, т. е. $a(t+k)<a(t)$ при $k>0$, а $h(t)$ должна удовлетворять условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{h(t)}{t}\right| dt < \infty. \qquad (2.25)$$

Если допускается применение теории распределений (тема, выходящая за рамки математических вопросов, затрагиваемых в данной книге), то может быть определено НВПФ даже и для незатухающих периодических сигналов.

Ряд ключевых (основных) свойств и функций, реализуемых непрерывным преобразованием Фурье, которые будут часто использоваться в книге, приведен в табл. 2.2. Вывод соотношений, помещенных в этой таблице, в частности тех из них, в которых использованы импульсные функции, можно найти в стандартных учебных пособиях; см., например, Бригхэм [4], Рабинер и Голд [16], Оппенгейм и Шафер [11], Брейсуэлл [3]. Заметим, что прямоугольное окно определяется выражением

$$w(x) = \begin{cases} 1, & |x|<1; \\ 1/2, & |x|=1; \\ 0, & |x|>1, \end{cases} \qquad (2.26)$$

Таблица 2.2. Основные свойства НВПФ и функции

Свойство, функция	Функция	Преобразование
Линейность	$ag(t)+bh(t)$	$aG(f)+bH(f)$
Сдвиг по времени	$h(t-t_0)$	$H(f)\exp(-j2\pi ft_0)$
Сдвиг по частоте (модуляция)	$h(t)\exp(j2\pi f_0 t)$	$H(f-f_0)$
Масштабирование	$(1/\lvert\alpha\rvert)h(t/\alpha)$	$H(\alpha f)$
Теорема свертки во временной области	$g(t)\bigstar h(t)$	$G(f)\cdot H(f)$
Теорема свертки в частотной области	$g(t)\cdot h(t)$	$G(f)\bigstar H(f)$
Функция окна	$Aw(t/T_0)$	$2AT_0\,\mathrm{sinc}(2T_0 f)$
Функция sinc	$2AF_0\,\mathrm{sinc}(2F_0 t)$	$Aw(f/F_0)$
Импульсная функция	$A\delta(t)$	A
Функция отсчетов	$Ш_T(t)$	$FШ_F(f)$, $F=1/T$

а *функции* sinc — выражением

$$\mathrm{sinc}(x)=\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}. \tag{2.27}$$

В разд. 2.6 нас, в частности, будет интересовать функция *отсчетов* (или *дискретизирующая*), определяемая выражением

$$Ш_W(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-nW), \tag{2.28}$$

преобразование которой также является функцией отсчетов. По причинам, которые будут объяснены в следующем разделе, эту функцию иногда также называют функцией, *осуществляющей периодическое продолжение.*

Другое важное свойство устанавливается *теоремой Парсеваля* для двух функций $g(t)$ и $h(t)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)h^*(t)\,dt=\int_{-\infty}^{\infty} G(f)H^*(f)\,df. \tag{2.29}$$

Если положить $g(t)=h(t)$, то теорема Парсеваля сводится к *теореме для энергии*

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|^2\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}|H(f)|^2\,df, \tag{2.30}$$

поскольку в левой части в (2.30) стоит полная энергия E сигнала $h(t)$. Выражение (2.30) — это, по сути дела, просто формулировка закона сохранения энергии в двух областях (временной и частотной). Таким образом, функция

$$S(f)=|H(f)|^2 \tag{2.31}$$

описывает распределение энергии по частоте для детерминированного сигнала $h(t)$ и поэтому называется спектральной плотностью энергии (СПЭ) детерминированного сигнала $h(t)$.

Применительно к детерминированным сигналам в литературе по линейным системам помимо $S(f)$ используются еще два других определения спектральной плотности. Если $h(t)$ — импульсная характеристика некоторого фильтра, то ее НВПФ

$$H(f)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\exp(-j2\pi ft)dt \qquad (2.32)$$

называется *частотной характеристикой* этого фильтра. В общем случае функция $H(f)$ представляет собой комплексную функцию, поэтому в полярных координатах ее можно записать

$$H(f)=|H(f)|\exp(j\theta(f)), \qquad (2.33)$$

где действительные функции $|H(f)|$ и $\theta(f)$ определяются выражениями

$$|H(f)|=[\mathrm{Re}\{H(f)\}^2+\mathrm{Im}\{H(f)\}^2]^{1/2},$$
$$\theta(f)=\mathrm{arctg}[\mathrm{Im}\{H(f)\}/\mathrm{Re}\{H(f)\}].$$

Функция $|H(f)|$ называется *амплитудным спектром* импульсной характеристики $h(t)$, а функция $\theta(f)$ — ее фазовым спектром.[1)]

2.6. Операции дискретизации и взвешивания

В разд. 2.7 дискретно-временно́й ряд Фурье (ДВРФ) введен как частный случай непрерывно-временно́го преобразования Фурье (НВПФ), при этом были использованы две базовые операции обработки сигналов — взятие отсчетов (*дискретизация*) и *взвешивание* с помощью окна. В этом разделе рассматривается влияние этих операций на сигнал и его преобразование, что упростит изложение материала в разд. 2.7. Основной результат, который представлен в данном разделе, — это теорема отсчетов, определяющая условия, при которых непрерывный сигнал, дискретизованный по временно́й или пространственной переменной, может быть восстановлен по своим отсчетам без потери какой-либо информации о нем. В последующем изложении полагается, что сигналы являются функциями времени, хотя выводы соответствующих соотношений можно аналогичным образом провести и для сигналов, которые являются функциями пространственной переменной (см. приложение 2.Б).

[1)] Применительно к фильтрам (а не сигналам) $|H(f)|$ — называется амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) и $\theta(f)$ — фазочастотной характеристикой (ФЧХ) (см., например, [12*], с. 152, [13*], т. 2, гл. 15). — *Прим. ред.*

Таблица 2.3. Взвешивание и дискретизирующие функции

Операция	Функция времени	Преобразование
Взвешивание во временно́й области (ширина окна NT с)	$\mathrm{TW}=w(2t/NT-1)$	$\mathscr{F}\{\mathrm{TW}\}=NT\,\mathrm{sinc}(NTf)\times$ $\times\exp(-j\pi NTf)$
Взвешивание в частотной области (ширина окна $1/T$ Гц)	$\mathscr{F}^{-1}\{\mathrm{FW}\}=\frac{1}{T}\mathrm{sinc}(t/T)$	$\mathrm{FW}=w(2Tf)$
Отсчеты по времени (с интервалом T с)	$\mathrm{TS}=T\text{Ш}_T(t)$	$\mathscr{F}\{\mathrm{TS}\}=\text{Ш}_{1/T}(f)$
Отсчеты по частоте (с интервалом $1/NT$ Гц)	$\mathscr{F}^{-1}\{\mathrm{FS}\}=\text{Ш}_{NT}(t)$	$\mathrm{FS}=\frac{1}{\mathrm{NT}}\text{Ш}_{1/NT}(f)$

В табл. 2.3 перечислены функции, с помощью которых осуществляются взвешивание и отсчеты и которые будут использоваться ниже. При *равномерных отсчетах* с *интервалом* T секунд *частота* отсчетов (или скорость отсчетов) F равна $1/T$ герц. Заметим, что взвешивающая функция и функция отсчетов во временно́й области обозначаются соответственно буквами TW (time windowing) и TS (time sampling), а в частотной области для этой цели используются соответственно обозначения FW (frequency windowing) и FS (frequency sampling).

Предположим, что берутся отсчеты непрерывного действительнозначного сигнала $x(t)$ с ограниченным спектром, верхняя частота которого равна F_0 герц, так что НВПФ сигнала $x(t)$ равно нулю при $|f|>F_0$. НВПФ действительного сигнала $x(t)$ — это всегда симметричная функция с полной шириной спектра, равной $2F_0$, Гц; см. рис. 2.1, *а*. Отсчеты сигнала $x(t)$ могут быть получены посредством умножения этого сигнала на функцию отсчетов:

$$x_S(t)=x(t)\cdot\mathrm{TS}=T\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\,\delta(t-nT). \qquad (2.34)$$

Напомним читателю, что приведенное в (2.34) произведение $x(t)$ с последовательностью импульсных функций должно рассматриваться подобно выражению (2.4). В соответствии с теоремой свертки в частотной области, НВПФ сигнала $x(t)$ — это просто свертка спектра сигнала $x(t)$ и преобразования Фурье функции отсчетов по времени (TS):

$$X_S(f)=X(f)\star\mathscr{F}\{\mathrm{TS}\}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(f-kF). \qquad (2.35)$$

Свертка $X(f)$ с преобразованием Фурье функции отсчетов

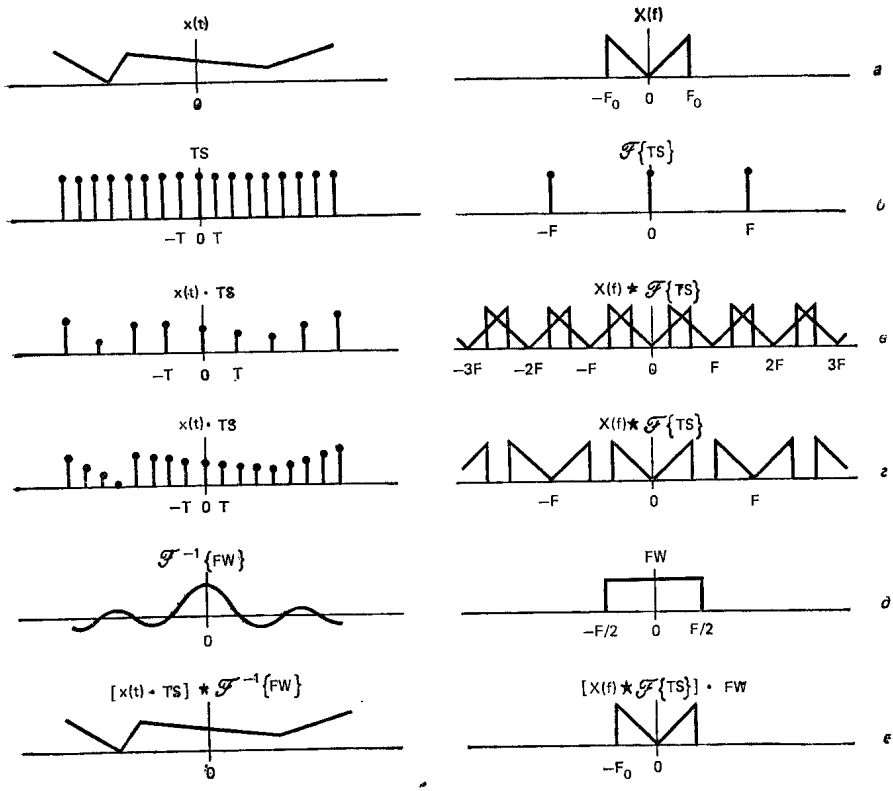


Рис. 2.1. Иллюстрация теоремы отсчетов во временно́й области для действительного сигнала с ограниченным спектром: *а* — исходная функция времени с ограниченным спектром и ее преобразование Фурье; *б* — функция отсчетов по времени и ее преобразование Фурье; *в* — временны́е отсчеты исходной функции и ее преобразование Фурье; *в* — временны́е отсчеты исходной функции и ее периодическое продолженное преобразование Фурье для случая $F_0 > 1/2T$; *г* — временны́е отсчеты исходной функции и ее периодически продолженное преобразование Фурье для случая $F_0 < 1/2T$; *д* — частотное окно (идеальный фильтр нижних частот) и его преобразование Фурье (функция sinc); *е* — исходная функция времени, восстановленная посредством операции свертки с функцией sinc.

$\mathcal{F}\{TS\} = Ш_{1/T}(f)$ просто *периодически* продолжает $X(f)$ с частотным интервалом $1/T$ Гц, соответствующим частотному интервалу между импульсными функциями. Поэтому $X_S(f)$ представляет собой периодически продолженный спектр $X(f)$. Именно по этой причине функцию $Ш(f)$ часто называют *функцией периодического продолжения.* В общем случае отсчеты в одной области (например, временно́й) приводят к периодическому продолжению в области преобразования (например, частот-

ной). Если частота отсчетов выбрана достаточно низкой, так что $F<2F_0$, то периодически продолженные спектры будут перекрываться с соседними, как показано на рис. 2.1, *в*. Это перекрытие — одна из форм искажения и носит название эффекта *наложения* в частотной области. Если частота отсчетов повышается так, что $F\geqslant 2F_0$, то перекрытие спектров будет отсутствовать, что показано на рис. 2.1, *г*. Частота отсчетов $F_N=2F_0$ получила название *частоты отсчетов Найквиста*, или *частоты сворачивания*.

Для того чтобы восстановить исходный временно́й сигнал по его отсчетам, т. е. осуществить *интерполяцию* некоторого континуума значений между этими отсчетами, можно пропустить дискретизованные данные через идеальный фильтр нижних частот (ФНЧ), обладающий прямоугольной частотной характеристикой, показанной на рис. 2.1, *д*. В результате (см. рис. 2.1, *е*)

$$X(f)=X_s(f)\cdot \mathrm{FW}=[X(f)\star \mathcal{F}\{\mathrm{TS}\}]\cdot \mathrm{FW} \qquad (2.36)$$

восстанавливается исходное НВПФ. Используя теоремы о свертке во временно́й и частотной областях, получаем

$$x(t)=x_s(t)\star \mathcal{F}^{-1}\{\mathrm{FW}\}=[x(t)\cdot \mathrm{TS}]\star \mathcal{F}^{-1}\{\mathrm{FW}\}=$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\,\mathrm{sinc}\,([t-nT]/T). \qquad (2.37)$$

Выражение (2.37) представляет собой математическую запись *теоремы отсчетов во временно́й области*[1)], которая утверждает, что с помощью интерполяционной формулы (2.37) действительный сигнал с ограниченным спектром может быть точно восстановлен по *бесконечному* числу известных временны́х отсчетов, взятых с частотой $F\geqslant 2F_0$. Аналогичный подход может быть использован и в случае комплексных сигналов с ограниченным спектром с шириной спектра, равной $2F_0$ герц.

Дуальной к теореме (2.37) является *теорема отсчетов в частотной области*. Теперь вместо сигнала с ограниченным спектром рассмотрим действительный сигнал с ограниченной длительностью, т. е. некоторый сигнал $x(t)$, который равен нулю при $|t|>T_0$. Если будем выполнять дискретизацию не во временно́й, а в частотной области с частотными интервалами $F\leqslant 1/2T_0$ (в противном случае будет возникать *наложение во времени*), то получим периодическое продолжение неперекрывающихся сигналов с ограниченной длительностью. Применение идеального прямоугольного временно́го окна будет восстанав-

[1)] Теорема отсчетов в ряде случаев называется теоремой Уиттекера, Котельникова и Шеннона (УКШ) — в честь ученых, ее сформулировавших и доказавших (см., например, [14*]). — *Прим. ред.*

ливать ограниченный по длительности исходный сигнал; в частотной области это будет соответствовать некоторой операции фильтрации, используемой для восстановления исходного преобразования. Операции во временно́й области, характеризующие теорему отсчетов в частотной области, описываются выражением

$$x(t)=[x(t)\star\mathcal{F}^{-1}\{\mathrm{FS}\}]\cdot\mathrm{TW}, \tag{2.38}$$

а операции получения соответствующих преобразований — выражением

$$\begin{aligned}X(f)&=[X(f)\cdot\mathrm{FS}]\star\mathcal{F}\{\mathrm{TW}\}=\\&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(n/2T_0)\,\mathrm{sinc}\,(2T_0[f-n/2T_0])=\\&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(nF)\,\mathrm{sinc}\,([f-nF]/F),\end{aligned} \tag{2.39}$$

описывающим процедуру интерполяции ОД-сигнала, при которой $F=1/2T_0$. Таким образом, НВПФ $X(f)$ некоторого сигнала с ограниченной длительностью может быть однозначно восстановлено по равномерным (эквидистантным) отсчетам спектра такого сигнала, если выбранный интервал отсчетов по частоте удовлетворяет условию $F\leqslant 1/2T_0$ герц.

2.7. Соотношение между непрерывными и дискретными преобразованиями

Для того чтобы по отсчетам данных получить спектральные оценки в соответствующих единицах измерения энергии или мощности, необходимо использовать несколько отличающиеся определения и терминологию по сравнению с обычными определениями для дискретного преобразования Фурье, приводимыми в большинстве учебных пособий по цифровой обработке сигналов. Пара преобразований для обычного определения ДПФ N-точечной временно́й последовательности $x[n]$ и соответствующей ей N-точечной последовательности преобразования Фурье $X[k]$ дается выражениями

$$X[k]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\exp(-j2\pi kn/N), \tag{2.40}$$

$$x[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X[k]\exp(j2\pi kn/N). \tag{2.41}$$

В данной книге используется пара *дискретно-временны́х рядов Фурье* (ДВРФ)

$$X[k] = T \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp(-j2\pi kn/N),$$

$$x[n] = \frac{1}{NT} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \exp(j2\pi kn/N),$$

определенных для $0 \leqslant k \leqslant N-1$ и $0 \leqslant n \leqslant N-1$, поскольку в них в явном виде введена зависимость от интервала отсчетов T. В этом разделе будут обоснованы выбранные наименование и определение ДВРФ, а также и других форм преобразования Фурье. Операции взвешивания и взятия отсчетов, введенные в разд. 2,6, будут указывать на прямую связь НВПФ с ДВРФ и другими преобразованиями Фурье. Более подробную информацию о выводе некоторых соотношений, принятых в этом разделе и не являющихся широко используемыми, можно найти в книгах Бригхэма [4], Блумфилда [2], Папулиса [15], Жекини и Явуза [8] и Оппенгейма и Уиллски [12].

ДВРФ можно рассматривать как некоторую аппроксимацию НВПФ, основанную на использовании конечного числа отсчетов данных. Для того чтобы показать точный характер этого соотношения, нам потребуется последовательность из четырех линейных операций. К ним относятся *взвешивание* во временно́й и в частотной областях и *взятие отсчетов* как во временно́й, так и в частотной областях. Как уже было показано в разд. 2.6, если операция взвешивания выполняется в одной из этих областей, то, согласно теореме свертки, ей будет соответствовать выполнение операции фильтрации (свертки) в другой области с функцией sinc. Точно также, если дискретизация выполняется в одной области, то в другой выполняется операция периодического продолжения. Так как взвешивание и взятие отсчетов являются линейными и коммутативными операциями, то возможно много способов их упорядочения, т. е. последовательности выполнения, все из которых дают одинаковый конечный результат, хотя промежуточные результаты будут при этом различны. На рис. 2.2 показаны две возможные последовательности выполнения этих четырех операций. Рассмотрим сначала последовательность, обозначенную цифрами 1, 2, 4, 6 и 8. Исходная функция непрерывного времени $x(t)$ и ее преобразование $X(f)$ не ограничены и могут быть в общем случае непериодическими, не ограниченными по спектру и по длительности. Если положить, что N отсчетов $x(t)$ во времени взяты с равномерными интервалами T секунд, то первая операция FW ограничивает ширину спектра этого сигнала частотами $\pm 1/2T$ герц (взвеши-

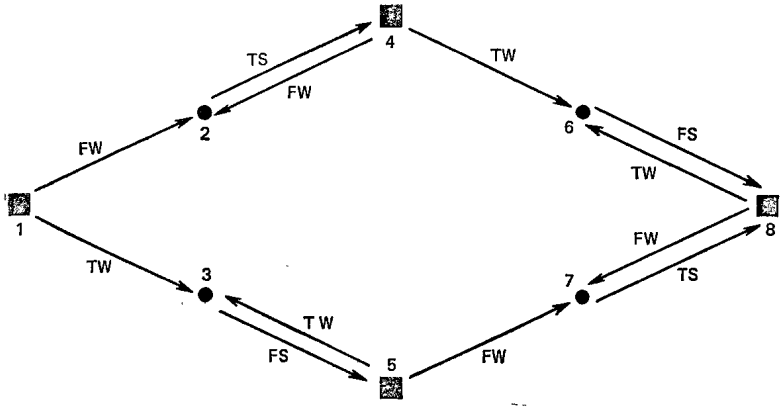


Рис. 2.2. Две возможные последовательности из двух операций взвешивания и двух операций взятия отсчетов, связывающие НВПФ и ДВРФ: FW — применение окна в частотной области; TW — применение окна во временно́й области; FS — взятие отсчетов в частотной области; TS — взятие отсчетов во временной области; *1* — преобразование Фурье с непрерывным временем (НВПФ), уравнение (2.22); обратное НВПФ, уравнение (2.23); *4* — преобразование Фурье с дискретным временем (ДВПФ), уравнение (2.49); обратное ДВПФ, уравнение (2.50); *5* — ряд Фурье с непрерывным временем (НВРФ), уравнение (2.46); обратный НВРФ, уравнение (2.47); *8* — ряд Фурье с дискретным временем (ДВРФ), уравнение (2.53); обратный ДВРФ, уравнение (2.54).

вает в частотной области). Вторая операция TS означает взятие временны́х отсчетов с интервалами T (секунд) полученного в результате первой операции ОС-сигнала. Третья операция TW ограничивает длительность сигнала, полученного в результате второй операции, N отсчетами. Четвертая операция FS означает взятие отсчетов по частоте с интервалами $1/NT$ герц, что приводит к периодическому продолжению исходных N временны́х отсчетов. Используя приведенные в табл. 2.3 определения функций, описывающих эти операции, получаем последовательность операций во временно́й и частотной областях, которые даются следующими выражениями:

$$x_{\text{ДВРФ}} = (((x(t) \star \mathcal{F}^{-1}\{\text{FW}\}) \cdot \text{TS}) \cdot \text{TW}) \star \mathcal{F}^{-1}\{\text{FS}\}, \qquad (2.42)$$

$$X_{\text{ДВРФ}} = (((X(f) \cdot \text{FW}) \star \mathcal{F}\{\text{TS}\}) \star \mathcal{F}\{\text{TW}\}) \cdot \text{FS}. \qquad (2.43)$$

Операции взятия отсчетов между узлами 2—4 и 6—8 обратимы при применении соответственно теоремы отсчетов во временно́й и частотной областях; соответствующие операции обозначены буквами FW и TW, которые поставлены на обратных стрелках между узлами 4—2 и 8—6. Другой возможный путь, показанный на рис. 2.2, использует последовательность узлов 1, 3, 5, 7 и 8; в этом случае пара операций взвешивания во временно́й области и взятия отсчетов в частотной области заменена

парой операций взвешивания в частотной и взятия отсчетов во временно́й областях.

В результате выполнения операций взвешивания и взятия отсчетов в узлах 1, 4, 5 и 8 будут иметь место четыре различных типа соотношений Фурье, а именно, непрерывно-временно́е преобразование Фурье (НВПФ), дискретно-временно́е преобразование Фурье (ДВПФ), непрерывно-временной ряд Фурье (НВРФ) и дискретно-временной ряд Фурье (ДВРФ). Между *преобразованием* Фурье и *рядом* Фурье имеют место качественные отличия: узлы, в которых функция в частотной области непрерывна, относятся к преобразованиям Фурье; узлы, в которых функция в частотной области дискретна, относятся к рядам Фурье. Заметим, что исторически сложившаяся терминология дискретного преобразования Фурье, базирующегося на выражениях (2.40) и (2.41), не соответствует используемой нами.

Операции ограничения спектра и длительности, требуемые для обеспечения связи между ДВРФ и НВПФ, показывают,что ДВРФ представляет собой измененный вариант исходного непрерывно-временного сигнала $x(t)$ и преобразования $X(f)$. Ограничение спектра (bandlimiting, BL) создает в узле 2 фильтрованную функцию времени вида

$$x_{BL}(t) = x(t) \star \mathcal{F}^{-1}\{\mathrm{FW}\}, \tag{2.44}$$

а ограничение длительности (time limiting, TL) создает в узле 3 фильтрованную функцию преобразования (фильтрованный спектр) вида

$$X_{TL}(f) = X(f) \star \mathcal{F}\{\mathrm{TW}\}. \tag{2.45}$$

Отсчеты этих функций обозначаются как $x_{BL}[n] = x_{BL}(nT)$ и $X_{TL}[k] = X_{TL}(k/NT)$.

Анализ последовательностей выполнения операций взвешивания и взятия отсчетов, указанных на рис. 2.2, позволяет отметить еще два интересных факта. В узле 5 операции взвешивания во временно́й и отсчетов в частотной областях порождают *непрерывно-временной ряд Фурье* (НВРФ). Соотношения Фурье связывают в этом узле непрерывно-временну́ю функцию с периодом NT секунд с линейчатым спектром. Используя указанные в табл. 2.2 свойства и приведенные в табл. 2.3 определения функций, можно получить следующую пару преобразований Фурье для этого случая:

$$X_{TL}[k] = \int_0^{NT} x(t) \exp(-j2\pi kt/NT)\, dt, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\infty; \tag{2.46}$$

$$x(t) = \frac{1}{NT} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_{TL}[k] \exp(j2\pi kt/NT), \quad 0 \leqslant t \leqslant NT. \tag{2.47}$$

Заметим, что выражение (2.47) определяет некоторую периодическую функцию, которая совпадает с заданной в узле 1 исходной временно́й функцией только на интервале времени длительностью от 0 до NT. Выражение (2.47) представляет собой традиционную запись ряда Фурье некоторого периодического сигнала. В самых первых работах выражение (2.47) рассматривалось как основа *гармонического анализа.* Теорема о энергии для НВРФ имеет следующий простой вид:

$$\int_0^{NT} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{NT} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X_{TL}[k]|^2. \tag{2.48}$$

Это выражение характеризует энергию сигнала на периоде NT секунд.

В узле 4 взвешивание в частотной и взятие отсчетов во временно́й областях порождают *дискретно-временно́е преобразование Фурье* (ДВПФ), которое характеризуется периодической функцией *спектра* в частотной области с периодом $1/T$ герц. Для дискретно-временно́й последовательности $x[n]$ и непрерывного периодического по частоте спектра $X(f)$ можно записать следующую пару преобразований Фурье:

$$X(f) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{BL}[n] \exp(-j2\pi fnT), \quad -1/2T \leqslant f \leqslant 1/2T, \tag{2.49}$$

$$x_{BL}[n] = \int_{-1/2T}^{1/2T} X(f) \exp(j2\pi fnT)\, df, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\infty. \tag{2.50}$$

Заметим, что выражение (2.49) определяет некоторую периодическую функцию, совпадающую с заданной в узле 1 исходной преобразованной функцией только на интервале от $-1/2T$ до $1/2T$ герц. Теорема о энергии для этого ДВПФ имеет вид

$$T \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_{BL}[n]|^2 = \int_{-1/2T}^{1/2T} |X(f)|^2 df. \tag{2.51}$$

и характеризует энергию на периоде частоты $1/T$ герц. Выражение (2.49) связано с z-преобразованием некоторой дискретной последовательности соотношением

$$X(f) = TX(z)|_{z=\exp(j2\pi fT)}, \tag{2.52}$$

где $X(z)$—z-преобразование последовательности $x_{BL}[n]$. Предполагается, что область сходимости этого z-преобразования включает единичную окружность. Таким образом, ДВПФ — это просто z-преобразование, вычисленное на единичной окружности в z-плоскости и помноженное на T. Дискретно-временно́е

преобразование Фурье будет очень часто использоваться в этой книге.

Независимо от того, какая из двух последовательностей четырех операций выбрана, окончательный результат в узле 8 будет одним и тем же. В этом узле порождается *дискретно-временной ряд Фурье* (ДВРФ), которому соответствует следующая пара преобразований:

$$X_{TL}[k] = T \sum_{n=0}^{N-1} x_{BL}[n] \exp(-j2\pi kn/N), \quad k = -\frac{N}{2}, \ \ldots, \ \frac{N}{2} - 1, \tag{2.53}$$

$$x_{BL}[n] = \frac{1}{NT} \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} X_{TL}[k] \exp(j2\pi kn/N), \quad n = 0, \ \ldots, \ N-1, \tag{2.54}$$

которые получаются в результате использования свойств, указанных в табл. 2.3. Теорема о энергии для этого ДВПФ просто имеет вид

$$T \sum_{n=0}^{N-1} |x_{BL}[n]|^2 = \frac{1}{NT} \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} |X_{TL}[k]|^2, \tag{2.55}$$

и характеризует энергию последовательности из N отсчетов данных.

Обе последовательности $x_{BL}[n]$ и $X_{TL}[k]$ периодичны по модулю N, поэтому при $-N/2 \leqslant k \leqslant 1$ справедливо равенство $X_{TL}[-k] = X_{TL}[N-k]$. Выражение (2.54) можно далее записать в эквивалентной форме

$$x_{BL}[n] = \frac{1}{NT} \sum_{n=0}^{N-1} X_{TL}[k] \exp(j2\pi kn/N), \tag{2.56}$$

где $0 \leqslant n \leqslant N-1$. Выражения (2.53) и (2.54) образуют пару дискретно-временных рядов Фурье, относящихся к исходной паре: непрерывно-временной функции $x(t)$ и непрерывно-частотной функции $X(f)$. Существенное различие между выражениями для ДВРФ и обычными выражениями для ДПФ вида (2.40) и (2.41) заключается в наличии величины T, характеризующей интервал отсчетов по времени (в секундах). Множитель $1/NT$, характеризует интервал отсчетов по частоте (в герцах). Указанные множители необходимы для того, чтобы выражения (2.53) и (2.54) являлись в действительности аппроксимацией интеграла преобразования в области интегрирования

$$\sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp(-j2\pi nfT)\, T \approx \int_0^{NT} x(t) \exp(-j2\pi ft)\, dt. \tag{2.57}$$

Здесь T и $1/NT$ являются масштабными множителями ДВРФ относительно частоты отсчетов, что обеспечивает корректность масштабов при вычислении энергии и мощности.

Исходя из рис. 2.2, можно установить требуемое точное соотношение ДВРФ временно́й последовательности или ДВРФ последовательности преобразований и соответственно исходной непрерывно-временно́й функции или исходной функции непрерывного преобразования. Если ширина спектра $x(t)$ ограничена частотой $1/T$ герц, то ДВРФ временно́й последовательности будет сохранять исходные значения $x(t)$ в отсчетных точках, однако ДВРФ последовательности преобразований будет состоять из отсчетов некоторого «размытого» варианта исходного преобразования $X(f)$; см. выражение (2.44). С другой стороны, если длительность $x(t)$ фактически ограничена интервалом NT секунд, то ДВРФ последовательности преобразований сохраняет исходные значения $X(f)$ в отсчетных точках, однако ДВРФ временно́й последовательности будет состоять из отсчетов некоторого «размытого» варианта исходного сигнала $x(t)$; см. выражение (2.43). Эффекты размытия можно ослабить за счет уменьшения T (так что $1/T$ будет соответствовать более широкой полосе) или увеличения N (так что NT будет соответствовать большей длительности), в результате чего ДВРФ будет точнее аппроксимировать НВПФ. Заметим, что ДВРФ будет идентичным НВПФ только в случае периодических сигналов, которые можно представить в виде суммы из комплексных синусоид с частотами k/NT герц, где $k=0, \ldots, N-1$.

2.8. Масштабирование для определения мощности

По аналогии с определением (2.31) для спектральной плотности энергии непрерывно-временно́го преобразования Фурье можно, используя теорему о энергии (2.51), записать следующее выражение для спектральной плотности энергии дискретно-временно́го преобразования Фурье (ДВПФ):

$$S_{\text{ДВПФ}}(f) = |X(f)|^2 = \left| T \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{BL}[n] \exp(-j2\pi fnT) \right|^2, \quad (2.58)$$

определенное при $-1/2T \leqslant f \leqslant 1/2T$. Используя теорему о энергии (2.48), можно получить следующее выражение для спектральной плотности энергии непрерывно-временно́го ряда Фурье (НВРФ):

$$S_{\text{НВРФ}}[k] = |X_{TL}[k]|^2 = \left| \int_0^{NT} x(t) \exp(-j2\pi kt/NT) dt \right|^2, \quad (2.59)$$

определенное при $-\infty < k < \infty$. Используя теорему о энергии (2.55), можно также получить следующее выражение для спект-

ральной плотности энергии дискретно-временно́го ряда Фурье (ДВРФ):

$$S_{\text{ДВРФ}}[k] = |X_{TL}[k]|^2 = \left| T \sum_{n=0}^{N-1} x_{BL}[n] \exp(-j2\pi kn/N) \right|^2, \quad (2.60)$$

определенное при $0 \leqslant k \leqslant N-1$.

И НВРФ, и ДВРФ определяют периодические функции времени с периодом NT секунд. Мощность равна энергии, отнесенной к единице времени. Поэтому, поделив спектральные плотности энергии (СПЭ), определяемые выражениями (2.59) и (2.60), на NT, получим следующие выражения для детерминированной *спектральной плотности мощности* (СПМ):

$$P_{\text{НВРФ}}[k] = \frac{1}{NT} S_{\text{НВРФ}}[k], \quad (2.61)$$

где $-\infty < k < \infty$, и

$$P_{\text{ДВРФ}}[k] = \frac{1}{NT} S_{\text{ДВРФ}}[k] = \frac{T}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x_{BL}[n] \exp(-j2\pi kn/N) \right|^2, \quad (2.62)$$

где $0 \leqslant k \leqslant N-1$. Обе эти плотности выражаются в единицах мощности на 1 Гц. Далее можно получить выражения для полной мощности P, выделяемой за один период, путем определения *площади* под кривой СПМ

$$P_{\text{НВРФ}} = F \sum_{k=-\infty}^{\infty} P_{\text{НВРФ}}[k],$$

$$P_{\text{ДВРФ}} = F \sum_{k=0}^{N-1} P_{\text{ДВРФ}}[k],$$

где $F = 1/NT$ — интервал дискретных отсчетов по частоте в герцах. В некоторых учебниках «спектр» ДВРФ определяется как

$$F \cdot P_{\text{ДВРФ}}[k] = \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_{BL}[n] \exp(-j\,2\pi kn/N) \right|^2, \quad (2.63)$$

поскольку эта величина не зависит от интервала отсчетов T. Величина, определяемая выражением (2.63) при каждом значении индекса k, будет точно равна мощности синусоиды с частотой k/NT герц (см. ниже разд. «Задачи»). Однако в отличие от выражения (2.62) выражение (2.63) не представляет собой корректно промасштабированную функцию СПМ.

2.9. Дополнение нулями

С помощью процесса, называемого *дополнением нулями*, дискретно-временно́й ряд Фурье может быть изменен для интерполяции между N значениями исходного преобразования. Пусть имеющиеся отсчеты данных $x[0], \ldots, x[N-1]$ дополнены нулевыми значениями $x[N], \ldots, x[2N-1]$. ДВРФ этой дополненной нулями $2N$-точечной последовательности данных будет определяться выражением

$$X[k] = T \sum_{n=0}^{2N-1} x[n] \exp(-j2\pi nk/2N) = T \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp(-j2\pi nk/2N), \tag{2.64}$$

где верхний предел суммы в правой части изменен таким образом, чтобы учесть наличие введенных нулевых отсчетов. Пусть $k=2l$, так что

$$X[l] = T \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp(-j2\pi nl/N), \tag{2.65}$$

где $l=0, 1, \ldots, N-1$, определяет четные значения $X[k]$. Следовательно, при четных значениях индекса k $2N$-точечный дискретно-временно́й ряд Фурье сводится к N-точечному дискретно-временно́му ряду. Нечетные значения индекса k соответствуют интерполированным значениям ДВРФ, расположенным между значениями исходного N-точечного ДВРФ.

По мере того как все большее число нулей добавляется в исходную N-точечную последовательность, можно получить еще большее число интерполированных значений. Влияние дополнительных нулей на интерполирование иллюстрирует рис. 2.3. В предельном случае бесконечного числа вводимых нулей дискретно-временно́й ряд Фурье может рассматриваться как дискретно-временно́е преобразование Фурье N-точечной взвешенной последовательности данных:

$$X(f) = T \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp(-j2\pi fnT). \tag{2.66}$$

Преобразование, определяемое выражением (2.66), соответствует узлу 6 на рис. 2.2. Заметим, что бытует неправильное мнение о том, что дополнение нулями улучшает разрешение, поскольку оно увеличивает длину последовательности данных. Однако, как следует из рис. 2.3, дополнение нулями *не улучшает* разрешающую способность этого преобразования, полученного по заданной конечной последовательности данных. Дополнение нулями просто позволяет получить интерполированное преобразование более сглаженной формы. Кроме того, оно устраняет неопреде-

решения. В этом разделе анализируются обоснованность указанного эмпирического правила и возможность его использования в качестве некоторой меры разрешения. Результаты этого раздела применимы к случаю детерминированных сигналов конечной энергии. К обсуждению произведения длительности на ширину полосы (частот) мы еще вернемся в гл. 5, где будет показано, что для анализа случайных сигналов конечной мощности необходима модификация с использованием произведения трех величин — статистической устойчивости оценки, длительности и ширины полосы.

Сигнал $x[n]$ не может одновременно быть ограниченным по длительности и по ширине полосы спектра. И хотя любая функция не может быть строго ограниченной по длительности или по полосе, ее все же можно охарактеризовать некоторым интервалом T_e секунд, в котором сосредоточена бóльшая часть ее энергии при представлении во временнóй области, и некоторым интервалом B_e герц, в котором сосредоточена бóльшая часть ее энергии при представлении в частотной области. Для количественного описания *временнóй концентрации* энергии дискретно-временной последовательности отсчетов сигнала и соответствующей *частотной концентрации* ее преобразования предложено несколько различных мер. Две из них рассмотрены ниже.

Эквивалентная длительность T_e дискретно-временного сигнала $x[n]$ определяется как

$$T_e = \frac{T \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]}{x[0]}, \tag{2.67}$$

т. е. иными словами, как «площадь» этого дискретного сигнала, поделенная на его центральное значение. Эквивалентная длительность сигнала равна длительности сигнала с прямоугольной огибающей, высота которого равна значению $x[n]$ в начале координат, т. е. $x[0]$, а площадь равна площади исходного сигнала; см. рис. 2.4, *а* и 2.4, *б*. Заметим, что в общем случае T_e не будет целочисленно кратным интервалу отсчетов T. *Эквивалентная ширина полосы* B_e дискретно-временнóго преобразования Фурье $X(f)$ сигнала $x[n]$ определяется аналогично как

$$B_e = \frac{\int_{-1/2T}^{1/2T} X(f)\, df}{X(0)}, \tag{2.68}$$

см. рис. 2.4, *в* и 2.4, *г*. Эти две меры временнóй и частотной концентраций применимы лишь к действительнозначным симметричным сигналам с максимальным значением в начале координат, интеграл от которых имеет конечное ненулевое значение. Эти условия точно выполняются для весовых функций (окон),

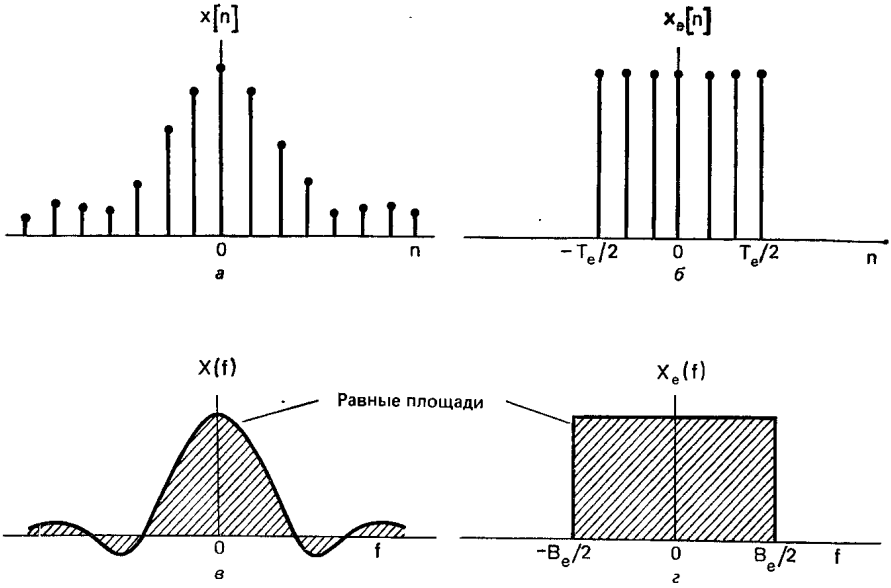


Рис. 2.4. *а* — последовательность отсчетов исходного сигнала; *б* — эквивалентная длительность сигнала с прямоугольной огибающей, имеющего равную с исходным сигналом площадь и высоту, равную высоте исходного сигнала; *в* — преобразование Фурье исходного сигнала; *г* — эквивалентная ширина полосы преобразования Фурье прямоугольной формы, имеющего площадь, равную площади преобразования Фурье исходного сигнала и равную с ним высоту.

которые рассматриваются в гл. 5 в связи с обсуждением классических спектральных оценок.

Из соотношений (2.49) и (2.50) с очевидностью следует, что

$$\begin{aligned} X(0) &= T \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n], \\ x[0] &= \int_{-1/2T}^{1/2T} X(f)\, df, \end{aligned} \tag{2.69}$$

откуда получаем, что произведение длительности и ширины полосы равно

$$T_e B_e = \frac{T \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]}{x[0]} \cdot \frac{\int_{-1/2T}^{1/2T} X(f)\, df}{X(0)} = 1, \tag{2.70}$$

а это означает, что эквивалентная длительность сигнала и эквивалентная ширина его преобразования являются взаимно обратными величинами. Именно это равное единице произведение, в котором T_e полагается равным интервалу наблюдения, и поло-

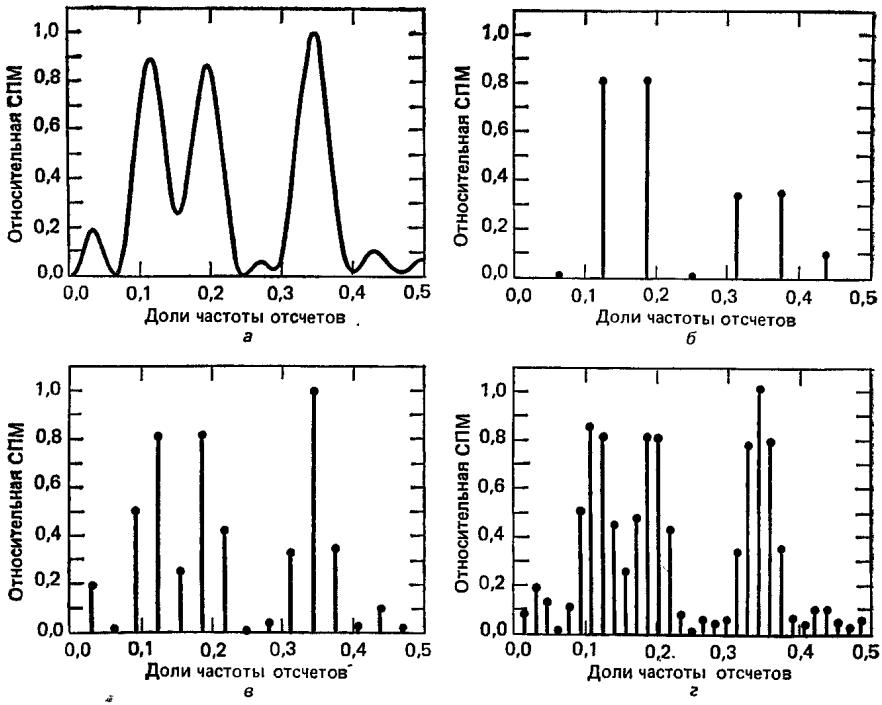


Рис. 2.3. Интерполяция за счет дополнения нулями: *а* — модуль ДВПФ 16-точечной записи данных, содержащих три синусоиды; *б* — модуль ДВРФ той же последовательности данных без дополнения нулями (неопределенности не разрешены); *в* — модуль ДВРФ той же последовательности после двукратного увеличения ее отсчетов за счет дополнения нулями (неопределенности разрешены, так как различимы все три синусоиды); *г* — модуль ДВРФ той же последовательности данных после восьмикратного увеличения числа ее отсчетов за счет дополнения нулями.

ленности, с которыми приходится иногда сталкиваться на практике, имея дело с дискретно-временны́ми рядами Фурье, обусловленными наличием узкополосных компонент сигнала с центральными частотами. Эти частоты лежат между N точками, соответствующими оцениваемым частотам исходного (т. е. не дополненного нулями) дискретно-временно́го ряда Фурье, что иллюстрирует рис. 2.3. При дополнении нулями повышается также и точность оценивания частоты спектральных пиков.

2.10. Быстрое преобразование Фурье

Быстрое преобразование Фурье (БПФ) — это не еще одна разновидность преобразования Фурье, а название целого ряда эффективных *алгоритмов*, предназначенных для быстрого вычис-

ления дискретно-временно́го ряда Фурье. Принципы построения этих алгоритмов обсуждаются в многочисленных работах; см., например, Отнес и Эхонсон [13], Бригхэм [4], Рабинер и Голд [16], Макклеллан и Рэйдер [10], Эллиот и Рао [7], Бергланд [1], Кокран и др. [5]. Поэтому в данном разделе мы лишь кратко остановимся на принципах достижения той вычислительной экономии, которую обеспечивают алгоритмы БПФ. БПФ — это первый из нескольких быстрых вычислительных алгоритмов, которые будут рассмотрены в данной книге применительно к методам спектрального оценивания.

Основная идея БПФ — деление N-точечного ДВРФ на два и более меньших ДВРФ, каждый из которых можно вычислить отдельно, а затем линейно просуммировать с остальными, с тем чтобы получить ДВРФ исходной N-точечной последовательности. Эти ДВРФ меньшего размера можно в свою очередь поделить на еще меньшие ДВРФ соответственно меньших последовательностей. В общем случае вычисление N-точечного ДВРФ требует выполнения $\log_2 N$ шагов с операциями сложения и $N/2$ операциями умножения на каждом шаге. Таким образом, N-точечное БПФ требует выполнения примерно $N \log_2 N$ сложений и $N \log_2(N/2)$ умножений комплексных чисел, что значительно меньше тех N^2 операций, которые необходимы для раздельного вычисления N значений преобразования по N-точечной последовательности данных. Если используется дополнение нулями, то за счет исключения, или *удаления*, вычислительных путей, содержащих одни лишь нулевые значения, можно достичь еще большего уменьшения объема вычислений; более подробно см. об этом в статьях Маркела [9] и Сриниваса и Рао [17].

В приложении 2.В приведена программа на Фортране для алгоритма БПФ с децимацией (прореживанием) по частоте. Более сложные программы БПФ приводятся в гл. 1 сборника «Программы для цифровой обработки сигналов» [6], опубликованного издательством IEEE Press в 1979 г., и в учебнике Макклеллана и Рэйдера [10].

2.11. Разрешение и произведение длительности на ширину полосы

Общепринятое эмпирическое правило, часто используемое при спектральном анализе, гласит, что спектральное разрешение в герцах приближенно равно величине, обратной интервалу времени наблюдения сигнала в секундах. Поскольку расстояние между спектральными линиями ДВРФ равно $1/NT$ Гц, где NT — полный интервал времени наблюдения, каждая «ячейка» разрешения ДВРФ по частоте будет, согласно этому правилу, примерно соответствовать предельной величине спектрального раз-

жено в основу эмпирического правила, упомянутого в начале данного раздела.

Возможно другое определение произведения длительности и ширины полосы, основанное на понятии среднеквадратичной длительности (ширины). Среднеквадратичная ширина является мерой дисперсии (среднеквадратичного отклонения) некоторой функции от ее среднего значения. Для того чтобы получить возможность оперировать с более широким классом функций, чем это возможно при использовании эквивалентных длительности (2.67) и ширины полосы (2.68), можно использовать определения среднеквадратичной ширины для функций вида $|x[n]|^2$ и $|X(f)|^2$. Такой подход позволяет получать значимые среднеквадратичные величины ширины для комплексных функций, осциллирующих функций и функций, которые имеют нулевую интегральную площадь. *Среднеквадратичная длительность* $\tilde{T}_e$ дискретно-временно́го сигнала $x[n]$ определяется как

$$(\tilde{T}_e)^2 = \frac{T \sum_{n=-\infty}^{\infty} (nT)^2 |x[n]|^2}{T \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2}, \tag{2.71}$$

а *среднеквадратичная ширина полосы* $\tilde{B}_e$ дискретно-временно́го преобразования Фурье $X(f)$ сигнала $x[n]$ определяется аналогично как

$$(\tilde{B}_e)^2 = \frac{\int_{-1/2T}^{1/2T} f^2 |X(f)|^2 df}{\int_{-1/2T}^{1/2T} |X(f)|^2 df}. \tag{2.72}$$

В приведенных определениях предполагается, что средние значения $x[n]$ и $X(f)$ соответствуют отсчетам $x[0]$ и $X(0)$, хотя эти определения можно изменить таким образом, чтобы средние значения не соответствовали началу координат.

Поскольку, согласно выражению (2.51), энергия сигнала $x[n]$ и преобразования $X(f)$ определяется как

$$E = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \int_{-1/2T}^{1/2T} |X(f)|^2 df,$$

то произведение среднеквадратичных величин длительности и ширины полосы $(\tilde{T}_e)^2(\tilde{B}_e)^2$ будет равно

$$(\tilde{T}_e)^2(\tilde{B}_e)^2 = \frac{T \sum_{n=-\infty}^{\infty} (nT)^2 |x[n]|^2 \int_{-1/2T}^{1/2T} f^2 |X(f)|^2 df}{E^2}. \tag{2.73}$$

Используя одну из разновидностей неравенства Шварца, а также полагая, что сигнал имеет конечную энергию E и удовлетворяет условию

$$\lim_{n\to\infty} (nT)\,|x[n]|^2 = 0,$$

можно показать [3, 14], что $(\tilde{T}_e)^2(\tilde{B}_e)^2 \geqslant 1/16\pi^2$. Поэтому *произведение среднеквадратичных значений длительности и ширины полосы сигнала удовлетворяет условию*

$$\tilde{T}_e\tilde{B}_e \geqslant \frac{1}{4\pi}. \tag{2.74}$$

Если положить, что $\tilde{T}_e$ примерно равно T_e, то условие (2.74) устанавливает несколько меньшую ширину полосы концентрации энергии, чем условие (2.70).

Ширина полосы B_h на уровне половинной (3-дБ) мощности часто используется на практике в качестве некоторой аппроксимации величины $\tilde{B}_e$, поскольку ее легко измерить. Это — ширина полосы, в которой квадрат величины данного преобразования равен половине квадрата его значения в начале координат, т. е. там, где $|X(\pm B_h/2)|^2 = |X(0)|^2/2$.

Выражения (2.70) и (2.74) устанавливают связь между временно́й концентрацией *одиночного* сигнала и спектральной концентрацией его преобразования. Величина TB количественно не определяет способности разрешать спектральные отклики, обусловленные двумя или более сигналами. Поэтому в литературе появилось множество определений разрешения, большинство из которых касается способности разрешать спектральные отклики двух синусоид, близких по частоте и амплитуде. Эти определения основаны на некоторой мере того, насколько близкими должны быть эти две синусоиды, чтобы их спектральные отклики стали неразрешимыми. Общим во всех этих определениях является допущение о том, что разнесение синусоид по частоте не может быть меньше эквивалентной ширины полосы окна, через которое наблюдаются сегменты (отрезки) этих двух синусоид. Поскольку большинство критериев разрешения касается сигналов, наблюдаемых на некотором временно́м интервале (окне), то для определения эквивалентной ширины полосы, а следовательно, разрешения, чаще всего используется произведение длительности и ширины полосы T_eB_e. Поэтому говорят, что разрешение в герцах приближенно равно величине, обратной времени наблюдения. Некоторые из описанных в этой книге методов спектрального оценивания обеспечивают разрешение, превосходящее эту величину. Именно поэтому следует очень осторожно интерпретировать произведение TB, если оно исполь-

зуется для вывода заключения о величине разрешения. Методы высокого разрешения эффективно экстраполируют измеренный сигнал за пределы интервала наблюдения, поэтому эффективный интервал наблюдения характеризуется бóльшим временем концентрации энергии, чем исходный интервал наблюдения. А это означает, что эффективная величина T_e становится больше, поэтому величина B_e будет меньше, а следовательно, разрешение — соответственно выше.

Литература

[1] *Bergland G. D.* A Guided Tour of the Fast Fourier Transform. IEEE Spectrum, vol. 6, pp. 41—52, July 1969.

[2] *Bloomfield P.* Fourier Analysis of Time Series: An Introduction. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1976.

[3] *Bracewell R.* The Fourier Transform and Its Applications. McGraw-Hill Book Company, New York, 1978.

[4] *Brigham E. O.* The Fast Fourier Transform. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1974.

[5] *Cochran W. T. et al.* What Is the Fast Fourier Transform?. IEEE Trans. Audio Electroacoust., vol. AU-15, pp. 45—55, June 1967.

[6] Digital Signal Processing Committee, ed., Fast Fourier Transform Subroutines, Chapter 1 in Programs for Digital Signal Processing. IEEE Press, New York, 1979.

[7] *Elliott D. F., Rao K. R.* Fast Algorithms — Applications, Analysis, and Application. Academic Press, Inc., New York, 1983.

[8] *Geckinli N. C., Yavuz D.* Discrete Fourier Transformation and Its Applications to Power Spectra Estimation. Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam, 1983.

[9] *Markel J. D.* FFT Pruning. IEEE Trans. Audio Electroacoust., vol. AU-19, pp. 305—311, December 1971.

[10] Number Theory in Digital Signal Processing, J. H. McClellan and C. M. Rader, eds., Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1979.

[11] *Oppenheim A. V., Schafer R. W.* Digital Signal Processing. Prentice-Hall, Inc., Englewoods Cliffs, N. J., 1975. [Имеется русский перевод: *Оппенгейм А. В., Шафер Р. В.* Цифровая обработка сигналов. — М.: Связь. 1979.]

[12] *Oppenheim A. V., Willsky A. S.* Signals and Systems. Prentice-Hall, Inc., Englewoods Cliffs, N. J., 1983.

[13] *Otnes R. K., Enochson L.* Digital Time Series Analysis. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1972.

[14] *Papoulis A.* The Fourier Integral and Its Application. McGraw-Hill Book Company, New York, 1962.

[15] *Papoulis A.* Signal Analysis. McGraw-Hill Book Company, New York, 1977.

[16] *Rabiner L. R., Gold B.* Theory and Application on Digital Signal Processing. Prentice-Hall, Inc., Englewoods Cliffs, N. J., 1975. [Имеется русский перевод: *Рабинер Л., Голд Б.* Теория и применение цифровой обработки сигналов. — М.: Мир, 1978.]

[17] *Sreenivas T. V., Rao P. V. S.* FFT Algorithm for Both Input and Output Pruning. IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., vol. ASSP-27, pp. 291—292, June 1979.

Задачи

1. Доказать, что $\delta(at)=\delta(t)/|a|$, т. е. что
$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(at)\,\phi(t)\,dt=\frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,\phi(t/a)\,dt.$$
2. Доказать, что в случае комплексного выхода устройства комплексной демодуляции действительного сигнала частота отсчетов должна равняться лишь половине частоты отсчетов исходного действительного сигнала.
3. Предположим, что необходимы только первые $N/2$ из N выходных значений преобразования Фурье, получаемых с помощью подпрограммы *FFT* (см. ниже приложение 2.В). Показать, каким образом можно сократить объем вычислений, для того чтобы уменьшить вычислительную сложность этой программы? Какова величина этой экономии?
4. Показать, что
$$\text{Ш}(ax)=\frac{1}{|a|}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(x-\frac{n}{a}\right)$$
и
$$\frac{1}{\tau}f(x)\,\text{Ш}(x/\tau)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n\tau)\,\delta(x-n\tau).$$
5. Задача на факторизацию: задана функция $g(t)$, преобразование Фурье которой $G(f)$ является неотрицательной функцией; найти каузальную функцию, такую что $g(t)=f(t)\ f^*(t)$; это означает, что $G(f)=|F(f)|^2$.
6. Задача на вычисление произведения TB: задана односторонняя экспоненциальная функция
$$x[n]=\begin{cases}A\exp(-\alpha nT), & n\geqslant 0;\\ 0, & n<0,\end{cases}$$
где T — интервал отсчетов, а α — положительная константа. Найти T_e, B_e, T_e, B_e и соответствующие величины произведений длительности на ширину полосы для этой функции. Какое из этих произведений будет меньше? Почему?
7. Найти эквивалентную длительность и эквивалентную ширину полосы окон, определенных в **табл. 5.1.**
8. Задана функция
$$x(t)=\begin{cases}\exp(-0{,}1t)+\exp(-0{,}5t), & 0\leqslant t\leqslant 10\text{ с},\\ 0, & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$
Используя выражение (2.30), вычислить энергию E НВПФ этой функции. Если отчеты $x(t)$ выполняются с интервалом T секунд, начиная с момента $t=0$, то какое значение T необходимо выбрать для того, чтобы выражение (2.51) для энергии ДВПФ аппроксимировало энергию НВПФ с погрешностью не более 1%? Не более 0,01%?
9. Пусть $x[n]=A\exp(-j2\pi nk/N)$. Показать, что выражение (2.63) позволяет определять мощность комплексной синусоиды $x[n]$.
10. Доказать теорему о энергии (2.54) для дискретно-временно́го ряда Фурье.

Приложение 2.А
Источник комплексных сигналов

Хотя большинство сигналов с дискретным временем — это действительные отсчеты сигналов с непрерывным временем, в современных системах обработки сигналов эти действительные отсчеты при некоторой последовательности операций обработки очень часто преобразуются в комплексные отсчеты, поскольку действительные отсчеты умножаются на комплексную синусоиду $\exp(j\omega t)$. Например, одним из системных требований часто является обработка в частотной области. Это означает, что при обработке должен использоваться комплексный ДВРФ

$$X[k] = T \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp(-j2\pi kn/N),$$

в который входят произведения с комплексными синусоидами.

Еще одной распространенной причиной появления комплексных данных является комплексная демодуляция действительных полосовых сигналов, в результате которой получаются комплексные информационные (т. е. модулирующие) сигналы. Рассмотрим показанный на рис. 2.5, *а* симметричный спектр действительного полосового сигнала и спектр требуемого комплексного модулирующего сигнала, центрированного относительно частоты 0 Гц. Этот сигнал имеет ширину полосы B герц и получается в результате формирования произведения $x[n]\exp(j \times 2\pi f_0 nT)$, где f_0 — центральная частота полосового сигнала, и последующей фильтрации результирующего сигнала с помощью фильтра нижних частот (ФНЧ) с действительными коэффициентами и граничными частотами $\pm B/2$ герц, как показано на рис. 2.5, *б*. Поскольку

$$\exp(j2\pi f_0 nT) = \cos(2\pi f_0 nT) + j \sin(2\pi f_0 nT),$$

то процесс комплексной демодуляции можно, например, реализовать на практике с помощью схемы, показанной на рис. 2.5, *в*.

Приложение 2.Б
Обработка в области волновых чисел с помощью линейных пространственных решеток

Комплексная синусоида как функция дискретного времени имеет форму экспоненциальной функции вида $\exp(j2\pi fnT)$, $1 \leqslant n \leqslant N$, которая получается в результате взятия равномерных отсчетов с интервалом T секунд на временной апертуре NT секунд. Спектральный анализ используется для определения частоты синусоиды f по N отсчетам. С аналогичной пространственной задачей приходится сталкиваться при обработке сигналов,

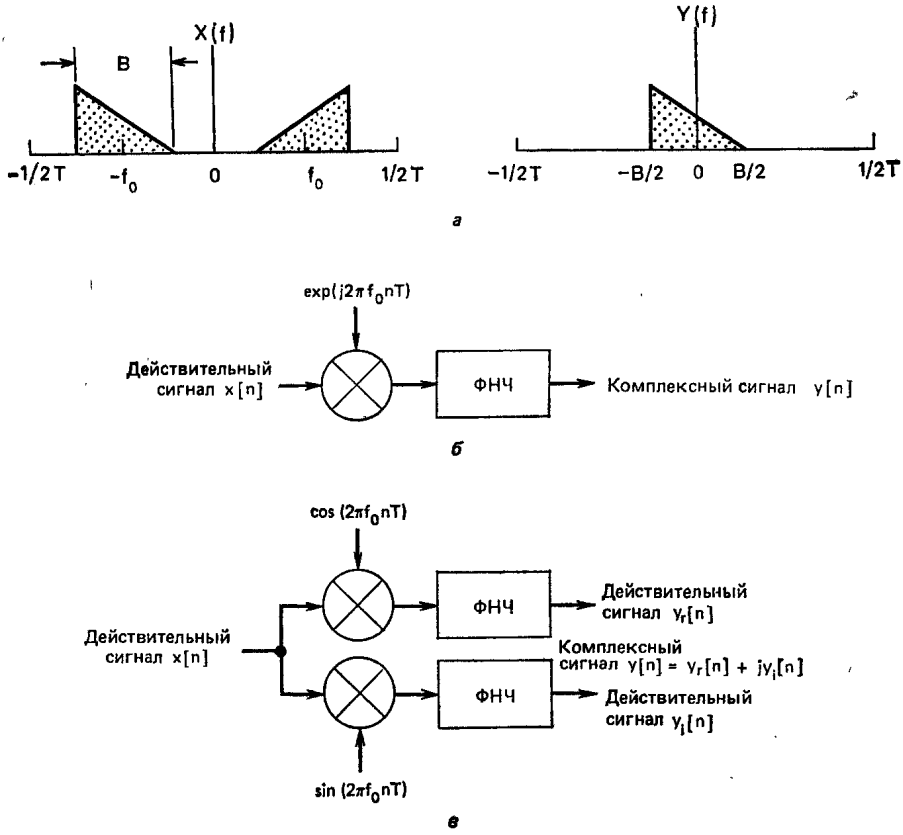


Рис. 2.5. Комплексный процесс демодуляции: *а* — спектры исходного действительного сигнала (слева) и демодулированного комплексного сигнала (справа); *б* — комплексный демодулятор сигнала; *в* — схема реализации комплексного процесса демодуляции.

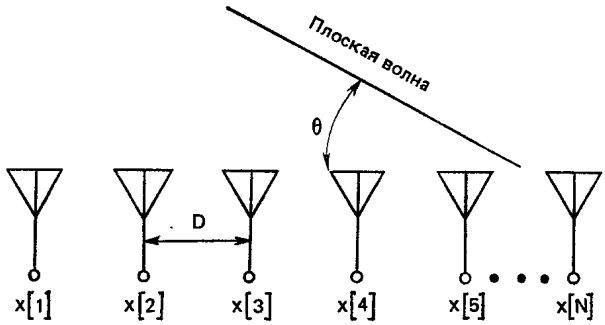


Рис. 2.6. Линейная решетка из N приемных элементов (датчиков), расположенных в пространстве с интервалом D.

получаемых с помощью решетки равномерно разнесенных в пространстве приемных элементов (датчиков), скажем такой, как показана на рис. 2.6. Монохроматическая плоская волна с частотой f, падающая на эту решетку под углом θ, после равномерной дискретизации с интервалом D на пространственной апертуре решетки длиной ND будет иметь форму экспоненциальной функции вида $\exp(j2\pi knD)$, $1 \leqslant n \leqslant N$. Пространственный спектральный анализ используется для определения волнового числа k по отсчетам сигналов N датчиков. Волновое число k и угол падения плоской волны θ связаны следующим соотношением:

$$k = \frac{f}{c} \sin\theta = \frac{1}{\lambda} \sin\theta,$$

где c — скорость распространения плоской волны, а λ — ее длина волны. Таким образом, пространственный спектральный анализ можно использовать для непосредственного нахождения соотношения, связывающего угол падения плоской волны θ с оцениваемым значением волнового числа k.[1)]

Приложение 2.В
Программа быстрого преобразования Фурье (БПФ)

Имеется целый ряд машинных программ БПФ, входящих как в коммерческие пакеты программ, так и описанных в литературе [6, 10]. Однако ради полноты изложения материала в данную книгу была включена простая программа БПФ по основанию 2 с децимацией в частотной области, которая используется в нескольких программах, помещенных в других главах данной книги. Поскольку работа этих программ была уже проверена с применением приведенной здесь подпрограммы FFT, читатели могут (при желании) испробовать их, заменив в них эту подпрограмму своими собственными алгоритмами БПФ.

Для вычисления БПФ используются две подпрограммы на Фортране. Подпрограмма PREFFT вызывается для составления таблицы комплексных экспонент. Параметр MODE устанавливается либо в 0, либо в 1 в зависимости от того, прямой или обратный ДВРФ рассматривается. Подпрограмма PREFFT предназначена также для проверки, является ли введенное число отсчетов степенью числа 2. Если N не является степенью числа 2, то кодом ошибки программа возвращается в начало. После вызова PREFFT может повторно вызываться подпрограмма FFT столько раз, сколько необходимо для обработки требуемого количества N-точечных наборов данных. Подпрограмма FFT пред-

---

[1)] Обычно в качестве волнового числа k принимается $\frac{2\pi}{\lambda}$. — *Прим. ред.*

ставляет собой алгоритм БПФ по основанию 2 с децимацией в частотной области и постепенной заменой массивов (исходный массив входных данных заменяется выходными значениями преобразования по мере их вычисления). При установке параметра MODE в 0 будет вычисляться ДВРФ

$$X[k] = T \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp(-j2\pi kn/N), \qquad (2.B.1)$$

при установке этого параметра в 1 будет вычисляться обратный ДВРФ

$$x[n] = \frac{1}{NT} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \exp(j2\pi kn/N). \qquad (2.B.2)$$

Здесь $0 \leqslant k$, $n \leqslant N-1$. Значения данных и преобразования индексируются числами от 1 до N, а не от 0 до $N-1$, как было определено выше. Для использования этой подпрограммы с действительными данными необходимо перед ее вызовом просто положить мнимую часть равной нулю.

Если 64-точечная тест-последовательность данных, приведенная в приложении II, помещенном в конце книги, используется с параметрами N=64, MODE=0 и T=1,0, то будут вычислены значения, указанные в следующей частичной распечатке выходных данных:

X(1) = (—1,62146; 1,55632);
X(2) = (—1,82918; 1,65053);
X(3) = (—2,06704; 1,76419);
. . .
. . .
. . .
X(62) = (—1,21244; 1,34462);
X(63) = (—1,31569; 1,40536);
X(64) = (—1,45793; 1,48031).

```
C     Эти две подпрограммы составляют таблицу комплексных экспонент (под-
C     программа PREFFT) и вычисляют дискретно-временной ряд Фурье по
C     массиву отсчетов комплексных данных с помощью алгоритма быстрого
C     преобразования Фурье с децимацией в частотной области (подпрограмма
C     FFT).
C
C        Подпрограмма PREFFT (N, MODE, NEXP, W)
C
C     Входные параметры:
C
C        N      — число отсчетов данных, подлежащее обработке (целое чис-
C                 ло, которое должно быть степенью числа 2).
C        MODE   — устанавливается в 0 для вычисления ДВРФ (выражение
C                 (2.B.1)) или в 1 для вычисления обратного ДВРФ (выра-
C                 жение (2.B.2)).
```

```
C
C   Выходные параметры:
C
C      NEXP  — указывает степень числа 2, такую, что N=22**NEXP. Уста-
C              навливается в —1, для того чтобы указать ошибочное усло-
C              вие, если N не является степенью числа 2 (это целое число
C              используется подпрограммой FFT).
C      W     — массив комплексных экспонент.
C
C   Примечание:
C
C      Размеры. GE. N внешнего массива W должны указываться вызываю-
C      щей программой.
C
C
      COMPLEX W(1), C1, C2
      NEXP=1
5     NT=2**NEXP
      IF (NT .GE. N) GO TO 10
      NEXP=NEXP+1
      GO TO 5
10    IF (NT .EQ. N) GO TO 15
      NEXP=-1                  ! Ошибка: N не есть степень числа 2
      RETURN
15    S=8.*ATAN(1.)/FLOAT(NT)
      C1=CMPLX(COS(S), — SIN(S))
      IF(MODE .NE. 0) C1=CONJG(C1)
      C2=(1.,0.)
      DO 20 K=1, NT
         W(K)=C2
20       C2=C2*C1
      RETURN
      END


      Подпрограмма FFT (N, MODE, T, NEXP, W, X)
C
C   Входные параметры:
C
C      N, MODE, NEXP, W — см. список параметров для подпрограммы
C                         PREFFT.
C      T                — интервал отсчетов в секундах.
C      X                — массив из N отсчетов комплексных данных от
C                         X(1) до X(N).
C
C   Выходные параметры:
C
C      X — N комплексных значений преобразования замещают исходные от-
C          счеты данных с индексами от k=1 до k=N, представляющими
C          частоты (k—1)/NT герц.
C
C   Примечание:
C
C      Размеры .GE. N внешнего массива X должны указываться вызываю-
C      щей программой.
C
```

```
      COMPLEX X(1), W(1), C1, C2
      MM=1
      LL=N
      DO 70 K=1, NEXP
         NN=LL/2
         JJ=MM+1
         DO 40 I=1, N, LL
            KK=I+NN
            C1=X(I)+X(KK)
            X(KK)=X(I)-X(KK)
            X(I)=C1
         IF(NN .EQ. 1) GO TO 70
         DO 60 J=2, NN
            C2=W(JJ)
            DO 50 I=J, N, LL
               KK=I+NN
               C1=X(I)+X(KK)
               X(KK)=(X(I)-X(KK))*C2
               X(I)=C1
            JJ=JJ+MM
         LL=NN
         MM=MM*2
         CONTINUE
      NV2=N/2
      NM1=N-1
      J=1
      DO 90 I=1, NM1
         IF (I .GE. J) GO TO 80
         C1=X(J)
         X(J)=X(I)
         X(I)=C1
         K=NV2
         IF (K .GE. J) GO TO 90
         J=J-K
         K=K/2
         GO TO 85
         J=J+K
      IF (MODE .EQ. 0) S=T
      IF (MODE .NE. 0) S=1./(T*FLOAT(N))
      DO 100 I=1,N
         X(I)=X(I)*S
      RETURN
      END
```

Глава 3
ОБЗОР МАТРИЧНОЙ АЛГЕБРЫ

3.1. Введение

Необходимые средства для описания математических соотношений, с которыми приходится иметь дело при рассмотрении многих методов спектрального оценивания, обеспечивает линейная алгебра и в особенности матричные операции. Матрицы представляют собой удобный и емкий метод систематизации подробных алгебраических и численных соотношений, которые часто встречаются при спектральном анализе. Особенно полезным для многих обсуждаемых в книге методов спектрального оценивания является материал раздела, посвященного тёплицевым матрицам. В данной главе вводятся основные матричные обозначения и операции матричной алгебры, которые будут часто использоваться в последующих главах книги. Предполагается, что часть читателей знакома с линейной алгеброй, поэтому большинство результатов приводится без доказательств. Доказательства и другую информацию читатель может получить в других работах, список которых приведен в конце главы, в частности в книге Ноубла и Даньела [19][1].

3.2. Основы матричной алгебры

Матрицей называется некоторая совокупность действительных или комплексных чисел, записанных в виде прямоугольной таблицы

$$\mathbf{A}=\{a[i,\ j]\}=\begin{pmatrix} a[1,\ 1] & a[1,\ 2] & \dots & a[1,\ n] \\ a[2,\ 1] & a[2,\ 2] & \dots & a[2,\ n] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a[m,\ 1] & a[m,\ 2] & \dots & a[m,\ n] \end{pmatrix}, \qquad (3.1)$$

состоящей из m строк и n столбцов. Величины, составляющие матрицу, например $a[i, j]$, называются элементами матрицы.

[1] Читателю можно рекомендовать прекрасные отечественные монографии и руководства по теории матриц, например, [3*—8*]. — *Прим. ред.*

Если матрица состоит из mn элементов, то говорят, что размерность, или размер, матрицы равен $m \times n$. Здесь $a[i, j]$ обозначает элемент матрицы, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца, где $1 \leqslant i \leqslant m$ и $1 \leqslant j \leqslant n$. Матрицы в данной книге будут обозначаться полужирными прописными буквами.

Блочной (клеточной) матрицей называется матрица, элементы которой сами являются матрицами:

$$\underline{\mathbf{A}} = \{\mathbf{A}[i, j]\} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}[1, 1] & \dots & \mathbf{A}[1, q] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}[p, 1] & \dots & \mathbf{A}[p, q] \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Каждый матричный элемент $\underline{\mathbf{A}}[i, j]$ имеет одну и ту же размерность $m \times n$. Говорят, что *блочная размерность матрицы* $\underline{\mathbf{A}}$ равна $p \times q$. Тогда *скалярная размерность* матрицы $\underline{\mathbf{A}}$ равна $pm \times qn$. Блочные матрицы будут обозначаться подчеркнутыми снизу полужирными прописными буквами. Определение блочной матрицы понадобится нам впоследствии при описании методов многоканального и двумерного спектрального оценивания.

Вектор-строка — это $(1 \times n)$-матрица вида

$$\mathbf{b} = (b[1]\ b[2]\ \dots\ b[n]),$$

обозначаемая полужирной строчной буквой. *Вектор-столбец* — это $(m \times 1)$-матрица вида

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c[1] \\ \vdots \\ c[m] \end{pmatrix},$$

также обозначаемая полужирной строчной буквой. *Блочный вектор-столбец* — это просто блочная матрица блочной размерности $p \times 1$ (и скалярной размерности $pm \times n$) вида

$$\underline{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}[1] \\ \vdots \\ \mathbf{C}[p] \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

обозначаемая подчеркнутой снизу полужирной строчной буквой.

Говорят, что матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ равны друг другу, если они имеют одинаковое число строк и одинаковое число столбцов и если $a[i, j] = b[i, j]$ для всех i и j. Сумма или разность двух $(m \times n)$-

матриц **A** и **B** образует новую матрицу **C**

$$\mathbf{C}=\mathbf{A}\pm\mathbf{B}, \tag{3.4}$$

которая получается посредством суммирования или вычитания соответствующих элементов:

$$c[i,\ j]=a[i,\ j]\pm b[i,\ j],$$

где $1\leqslant i\leqslant m$, $1\leqslant j\leqslant n$. Заметим, что матричное сложение обладает свойствами ассоциативности и коммутативности. Умножение матрицы **A** на скаляр α определяется выражением

$$\alpha\mathbf{A}=\{\alpha a[i,\ j]\}. \tag{3.5}$$

Две матрицы **A** и **B** можно умножить друг на друга, с тем чтобы их произведение **AB** давало некоторую результирующую матрицу **C** тогда и только тогда, когда число столбцов матрицы **A** равно числу строк матрицы **B**. Элемент (i, k) произведения матриц **AB** получается посредством умножения элементов i-й строки матрицы **A** на элементы k-го столбца матрицы **B**. Иными словами, если $\mathbf{A}=\{a[i, j]\}$ — матрица размером $m\times n$, а $\mathbf{B}=\{b[j, k]\}$ — матрица размером $n\times p$, то матрица $\mathbf{C}=\mathbf{AB}$ будет матрицей размером $m\times p$ с элементами

$$c[i,\ k]=\sum_{j=1}^{n} a[i,\ j]\,b[j,\ k]. \tag{3.6}$$

Заметим, что умножение матриц ассоциативно, но в общем случае не коммутативно ($\mathbf{AB}\neq\mathbf{BA}$). Заметим также, что $\mathbf{AB}=0$, где 0 — нулевая матрица (т. е. матрица, состоящая из одних лишь нулевых элементов), не обязательно означает, что либо $\mathbf{A}=0$, либо $\mathbf{B}=0$. Соотношение $\mathbf{AB}=\mathbf{AC}$ также не обязательно означает, что $\mathbf{B}=\mathbf{C}$.

Транспозицией $(m\times n)$-матрицы **A** называется $(n\times m)$-матрица $\mathbf{A}^T$ (транспонированная), получаемая в результате замены строк столбцами матрицы **A**:

$$\mathbf{A}^T=\begin{pmatrix} a[1,\ 1] & a[2,\ 1] & \dots & a[m,\ 1] \\ a[1,\ 2] & a[2,\ 2] & \dots & a[m,\ 2] \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a[1,\ n] & a[2,\ n] & \dots & a[m,\ n] \end{pmatrix}, \tag{3.7}$$

так что (i, j)-элемент матрицы $\mathbf{A}^T$ — это просто (j, i)-элемент матрицы **A**. Для обозначения операции транспонирования матрицы будет использоваться надстрочный верхний индекс «T». Можно показать, что результатом транспонирования суммы

двух матриц является сумма транспонированных матриц:

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T=\mathbf{A}^T+\mathbf{B}^T, \tag{3.8}$$

а результатом транспонирования произведения двух матриц является произведение транспонированных матриц:

$$(\mathbf{AB})^T=\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T. \tag{3.9}$$

Использование надстрочного символа «*» для обозначения комплексной сопряженности матрицы $\mathbf{A}^*$ означает, что ее (i, j)-элемент является комплексно-сопряженным по отношению к (i, j)-элементу матрицы $\mathbf{A}$. Тогда *эрмитово транспонированной* (или *эрмитово сопряженной*) матрицей, соответствующей комплексной $(m\times n)$-матрице $\mathbf{A}$, называется $(n\times m)$-матрица $\mathbf{A}^H$, получаемая в результате комплексного сопряжения всех элементов матрицы $\mathbf{A}$ и последующей их транспозиции [т. е. $\mathbf{A}^H=(\mathbf{A}^T)^*=(\mathbf{A}^*)^T$]:

$$\mathbf{A}^H=\begin{Vmatrix} a^*[1,\ 1] & a^*[2,\ 1] & \dots & a^*[m,\ 1] \\ a^*[1,\ 2] & a^*[2,\ 2] & \dots & a^*[m,\ 2] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^*[1,\ n] & a^*[2,\ n] & \dots & a^*[m,\ n] \end{Vmatrix}. \tag{3.10}$$

Для обозначения операции эрмитова сопряжения будет использоваться надстрочный индекс «H». Аналогично транспонированным матрицам можно показать, что

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^H=\mathbf{A}^H+\mathbf{B}^H, \tag{3.11}$$

$$(\mathbf{AB})^H=\mathbf{B}^H\mathbf{A}^H. \tag{3.12}$$

Блочной эрмитово транспонированной (или *эрмитово сопряженной*) матрицей, соответствующей комплексной блочной $(p\times q)$-матрице $\mathbf{A}$, называется блочная $(q\times p)$-матрица $\underline{\mathbf{A}}^H$, получаемая в результате эрмитова сопряжения всех элементов матрицы $\underline{\mathbf{A}}$:

$$\underline{\mathbf{A}}^H=\begin{Vmatrix} \mathbf{A}^H[1,\ 1] & \dots & \mathbf{A}^H[p,\ 1] \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}^H[1,\ q] & \dots & \mathbf{A}^H[p,\ q] \end{Vmatrix}. \tag{3.13}$$

Так как использование полужирных строчных букв для обозначения вектор-столбцов и вектор-строк может привести к некоторой путанице, полужирные строчные буквы будут использоваться только для обозначения вектор-столбцов. Следовательно,

говоря «вектор», мы будем всегда подразумевать под этим вектор-столбец, исключая, конечно, те случаи, где ясно говорится о вектор-строке. Заметим, что вектор-строку всегда можно получить посредством простой транспозиции вектор-столбца:

$$\mathbf{c}^T = (c[1] \ \ldots \ c[m]). \tag{3.14}$$

Весьма часто нам придется иметь дело с величиной, определяемой *внутренним произведением* двух $(n\times 1)$-векторов,

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w[1] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ w[n] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v[1] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v[n] \end{pmatrix},$$

которая определяется как скаляр (скалярное произведение)

$$\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{j=1}^{n} w^*[j]\, v[j]. \tag{3.15}$$

Заметим, что это произведение можно определить с помощью обычного правила умножения матриц как

$$\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{w}^H \mathbf{v}. \tag{3.16}$$

Аналогичным образом можно определить *внешнее произведение* $\mathbf{w}\mathbf{v}^H$ двух $(m\times 1)$-векторов $\mathbf{w}$ и $\mathbf{v}$ в форме квадратной $(m\times m)$-матрицы[1)]

$$\mathbf{w}\mathbf{v}^H = \begin{pmatrix} w[1]\,v^*[1] & w[1]\,v^*[2] & \ldots & w[1]\,v^*[m] \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ w[m]v^*[1] & w[m]\,v^*[2] & \ldots & w[m]\,v^*[m] \end{pmatrix}. \tag{3.17}$$

Смысл термина «длина» вектора можно выразить с помощью любой из следующих векторных норм:

$$\|\mathbf{v}\|_1 = \sum_{i=1}^{m} |v[i]|, \tag{3.18}$$

$$\|\mathbf{v}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{m} |v[i]|^2 \right)^{1/2} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle^{1/2}. \tag{3.19}$$

каждая из которых является неотрицательной скалярной величиной.

[1)] Внешнее произведение векторов $\mathbf{w}$ и $\mathbf{v}$ в математической литературе обозначают $\mathbf{w}\wedge\mathbf{v}$ (см., например, [7*], § 25, с. 260). — *Прим. ред.*

3.3. Специальные векторные и матричные структуры

В этом разделе описаны различные специальные векторы и матрицы, с которыми приходится часто иметь дело при спектральном оценивании. Читателю было бы полезно познакомиться с приведенными здесь обозначениями, поскольку они широко используются в последующих главах книги.

Нулевой $(m\times 1)$-вектор, состоящий из m нулевых элементов, обозначается как

$$\mathbf{0}_m = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.20}$$

Последовательность $\exp(j2\pi fmT)$ представляет собой комплексную синусоиду с частотой f, дискретизованную с интервалом T секунд. Комплексный синусоидальный вектор $\mathbf{e}_m(f)$ с частотой f определяется как $(m+1)$-вектор-столбец вида

$$\mathbf{e}_m(f) = \begin{bmatrix} 1 \\ \exp(j2\pi fT) \\ \cdot \\ \cdot \\ \exp(j2\pi fmT) \end{bmatrix}, \tag{3.21}$$

где m — наибольший временно́й индекс. Дискретно-временно́е (ДВ) преобразование Фурье (ДВПФ) для N отсчетов данных можно, например, записать как масштабированное внутреннее скалярное произведение векторов

$$X(f) = T\mathbf{e}_{N-1}^H(f)\,\mathbf{x}, \tag{3.22}$$

где вектор данных $\mathbf{x}$ определяется выражением

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x[0] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x[N-1] \end{bmatrix}.$$

Матрица, у которой число строк (n) равно числу столбцов, называется квадратной матрицей размером $n\times n$. Элементы $a[i,i]$, $i=1,\ldots,n$, лежат на *основной*, или *главной*, *диагонали*

квадратной матрицы **A**, а элементы $a[i, n+1-i]$ — на ее *кросс-диагонали*[1].

Симметричной матрицей **S** называется такая квадратная матрица, для которой

$$\mathbf{S}^T = \mathbf{S}, \tag{3.23}$$

а это означает, что элементы $s[i, j] = s[j, i]$ симметричны относительно главной диагонали. Примером может служить следующая симметричная (4×4)-матрица:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} s[1,1] & s[1,2] & s[1,3] & s[1,4] \\ s[1,2] & s[2,2] & s[2,3] & s[2,4] \\ s[1,3] & s[2,3] & s[3,3] & s[3,4] \\ s[1,4] & s[2,4] & s[3,4] & s[4,4] \end{pmatrix}. \tag{3.24}$$

Эрмитовой матрицей называется квадратная комплексная $(n\times n)$-матрица **G**, обладающая свойством комплексно-сопряженной симметрии

$$\mathbf{G}^H = \mathbf{G}. \tag{3.25}$$

Диагональной матрицей **D** называется квадратная матрица, все элементы которой равны нулю, за исключением элементов, расположенных на главной диагонали (некоторые из которых также могут быть равны нулю):

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d[1] & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d[2] & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & d[n] \end{pmatrix}. \tag{3.26}$$

Для более компактной записи диагональной матрицы будет использоваться сокращенное обозначение $\mathrm{diag}(d[1], \dots, d[n])$.

---

[1] Удобнее записывать $a\,[i,\ n-(i-1)]$. Смысл этой записи наглядно иллюстрируется на матрице

$$\begin{pmatrix} a\,[1,1] & a\,[1,2] & a\,[1,3] \\ a\,[2,1] & a\,[2,2] & a\,[2,3] \\ a\,[3,1] & a\,[3,2] & a\,[3,3] \end{pmatrix}$$

$i=1\to a[1,3]$; $i=2\to a[2,2]$; $i=3\to a[3,1]$; указанные элементы располагаются на диагонали, которая в ряде руководств называется второй диагональю (см., например, [6*], с. 122). — *Прим. ред.*

Единичной матрицей **I** называется диагональная матрица, у которой все диагональные элементы равны единице:

$$\mathbf{I}=\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}. \tag{3.27}$$

Если в каком-либо матричном уравнении необходимо указать размер единичной матрицы, то для этой цели можно будет использовать подстрочный индекс. Таким образом, $\mathbf{I}_m$ будет обозначать единичную $(m\times m)$-матрицу. Для любой $(m\times n)$-матрицы **A** справедливо равенство

$$\mathbf{I}_m\mathbf{A}=\mathbf{A}\mathbf{I}_n=\mathbf{A}.$$

Если подстрочный индекс у матрицы **I** опущен, то из контекста будет ясно, какая размерность этой матрицы требуется.

С единичной матрицей близко связана *матрица отражения* **J**[1] (иногда называемая *матрицей замещения*, или *обменной матрицей*)

$$\mathbf{J}=\begin{pmatrix}0 & \dots & 0 & 1\\ 0 & \dots & 1 & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 1 & \dots & 0 & 0\end{pmatrix}, \tag{3.28}$$

единичные элементы в которой расположены на кроссдиагонали. Матрица **J** обращает, или изменяет на обратный, порядок строк или столбцов матрицы или вектора. Умножение слева $(m\times n)$-матрицы **A** на матрицу $\mathbf{J}_m$, где подстрочный индекс m обозначает размер матрицы отражения, приводит к обращению порядка следования строк (отражение относительно центральной горизонтальной оси):

$$\mathbf{J}_m\mathbf{A}=\begin{pmatrix}a[m,\ 1] & a[m,\ 2] & \dots & a[m,\ n]\\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ a[2,\ 1] & a[2,\ 2] & \dots & a[2,\ n]\\ a[1,\ 1] & a[1,\ 2] & \dots & a[1,\ n]\end{pmatrix}, \tag{3.29}$$

[1] Такая матрица иногда называется матрицей перестановок (см., [6*], с. 122). — *Прим. ред.*

а умножение этой матрицы справа на матрицу $\mathbf{J}_n$ приводит к обращению порядка следования столбцов (отражение относительно центральной вертикальной оси):

$$\mathbf{AJ}_n = \begin{pmatrix} a[1, n] & \dots & a[1, 2] & a[1, 1] \\ a[2, n] & \dots & a[2, 2] & a[2, 1] \\ \vdots & & & \\ a[m, n] & \dots & a[m, 2] & a[m, 1] \end{pmatrix}. \tag{3.30}$$

Как и в случае единичной матрицы, подстрочный индекс, указывающий размер матрицы J, часто будет опускаться в тех случаях, когда он ясен из контекста того или иного матричного уравнения. Аналогично действию на матрицы, произведение **Jc** будет обращать порядок следования элементов вектор-столбца **c**, а произведение $\mathbf{c}^T\mathbf{J}$ — порядок следования элементов вектор-строки $\mathbf{c}^T$. Нетрудно показать, что $\mathbf{J}^T=\mathbf{J}$ и $\mathbf{J}^2=\mathbf{JJ}=\mathbf{I}$.

Персимметричной матрицей **P**[1] называется квадратная $(n\times n)$-матрица, симметричная относительно своей кроссдиагонали, что можно проиллюстрировать с помощью следующей (4×4)-матрицы:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p[1, 1] & p[1, 2] & p[1, 3] & p[1, 4] \\ p[2, 1] & p[2, 2] & p[2, 3] & p[1, 3] \\ p[3, 1] & p[3, 2] & p[2, 2] & p[1, 2] \\ p[4, 1] & p[3, 1] & p[2, 1] & p[1, 1] \end{pmatrix}. \tag{3.31}$$

Таким образом, $p[i, j]=p[n-j+1, n-i+1]$. Нетрудно показать, что $\mathbf{P}^T=\mathbf{JPJ}$ и $\mathbf{P}=\mathbf{JP}^T\mathbf{J}$.

Центросимметричной матрицей **R** называется квадратная $(n\times n)$-матрица, такая, что $r[i, j]=r^*[n-i+1, n-j+1]$. Специальный класс центросимметричных матриц образуют дважды симметричные матрицы, т. е. матрицы, эрмитовы относительно главной диагонали и персимметричные относительно кроссдиагонали, что можно проиллюстрировать с помощью следующей комплексной (4×4)-матрицы:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} r[1, 1] & r^*[2, 1] & r^*[3, 1] & r^*[4, 1] \\ r[2, 1] & r[2, 2] & r^*[3, 2] & r^*[3, 1] \\ r[3, 1] & r[3, 2] & r[2, 2] & r^*[2, 1] \\ r[4, 1] & r[3, 1] & r[2, 1] & r[1, 1] \end{pmatrix}. \tag{3.32}$$

В этом частном случае $r[i, j]=r^*[j, i]=r[n-j+1, n-i+1]=$

[1] См., например, [6*], с. 122. — *Прим. ред.*

$=r^*[n-i+1,\ n-j+1]$. Нетрудно показать, что $\mathbf{R}=\mathbf{JRJ}$, если $\mathbf{R}$ — вещественная матрица, и $\mathbf{R}=\mathbf{JR}^*\mathbf{J}$, если $\mathbf{R}$ — комплексная матрица. Когда размер центросимметричной матрицы является величиной четной ($n=2r$), ее можно представить в форме

$$\mathbf{R}_{\text{четн}}=\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\\ \mathbf{JB}^*\mathbf{J} & \mathbf{JA}^*\mathbf{J}\end{pmatrix}, \tag{3.33}$$

где $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — $(r\times r)$-матрицы общего вида неспециальной структуры. Аналогичным образом, когда размер центросимметричной матрицы является величиной нечетной ($n=2r+1$), ее можно представить в форме

$$\mathbf{R}_{\text{нечет}}=\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{x} & \mathbf{B}\\ \mathbf{x}^H & \alpha & \mathbf{x}^H\mathbf{J}\\ \mathbf{JB}^*\mathbf{J} & \mathbf{Jx} & \mathbf{JA}^*\mathbf{J}\end{pmatrix}, \tag{3.34}$$

где $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — $(r\times r)$-матрицы общего вида, $\mathbf{J}$ — $(r\times r)$-матрица отражения, $\mathbf{x}$ — вектор-столбец размерности r, а α — вещественный скаляр.

Применительно к спектральному оцениванию очень важной является *тёплицева матрица* $\mathbf{T}$ (названная в честь немецкого математика О. Тёплица). Эта матрица обладает тем свойством, что все ее элементы, расположенные на любой диагонали, идентичны, т. е. $t[i,j]=t[i-j]$. Тёплицева матрица не обязательно квадратная матрица. Примером тёплицевой (5×4)-матрицы может служить следующая матрица:

$$\mathbf{T}=\begin{pmatrix}t[0] & t[-1] & t[-2] & t[-3]\\ t[1] & t[0] & t[-1] & t[-2]\\ t[2] & t[1] & t[0] & t[-1]\\ t[3] & t[2] & t[1] & t[0]\\ t[4] & t[3] & t[2] & t[1]\end{pmatrix}. \tag{3.35}$$

Заметим, что квадратная тёплицева матрица является частным случаем персимметричной матрицы,

$$\mathbf{T}=\mathbf{JT}^T\mathbf{J}. \tag{3.36}$$

Если квадратная тёплицева матрица является также и эрмитовой матрицей, т. е. если $t^*[k]=t[-k]$, то $\mathbf{T}=\mathbf{JT}^*\mathbf{J}$. Следовательно, эрмитова тёплицева матрица является центросимметричной матрицей.

С тёплицевой матрицей близко связана *ганкелева матрица* $\mathbf{H}$, которая обладает тем свойством, что все элементы, расположенные на любой ее кроссдиагонали, идентичны, т. е. $h[i,j]=h[i+j-n-1]$. Ганкелева матрица — необязательно квад-

ратная матрица. Примером ганкелевой (4×5)-матрицы может служить следующая матрица:

$$\mathbf{H}=\begin{pmatrix} h[-4] & h[-3] & h[-2] & h[-1] & h[0] \\ h[-3] & h[-2] & h[-1] & h[0] & h[1] \\ h[-2] & h[-1] & h[0] & h[1] & h[2] \\ h[-1] & h[0] & h[1] & h[2] & h[3] \end{pmatrix}. \qquad (3.37)$$

Заметим, что квадратная ганкелева $(n\times n)$-матрица является частным случаем эрмитовой матрицы, т. е. $\mathbf{H}^H=\mathbf{H}$. Ганкелевы матрицы могут быть связаны с тёплицевыми матрицами (см. раздел «Задачи»).

Циркулянтной (или *циклической*) матрицей $\mathbf{C}$ называется комплексная $(n\times n)$-матрица, элементы которой могут принимать только n различных значений. Если элементы этой матрицы удовлетворяют условию:

$$c_R[i,\ j]=\begin{cases} c_R[j-i], & j-i\geqslant 0; \\ c_R[n-j+1], & j-i<0, \end{cases} \qquad (3.38)$$

где $1\leqslant i, j\leqslant n$, то такая матрица называется *правоциркулянтной матрицей* $\mathbf{C}_R$; примером такой матрицы может служить правоциркулянтная (4×4)-матрица

$$\mathbf{C}_R=\begin{pmatrix} c_R[0] & c_R[1] & c_R[2] & c_R[3] \\ c_R[3] & c_R[0] & c_R[1] & c_R[2] \\ c_R[2] & c_R[3] & c_R[0] & c_R[1] \\ c_R[1] & c_R[2] & c_R[3] & c_R[0] \end{pmatrix}. \qquad (3.39)$$

Заметим, что каждая строка этой матрицы образована из соседней верхней строки посредством сдвига вправо на один элемент и перенесения крайнего правого элемента на место левого крайнего элемента. Аналогичным образом можно определить *левоциркулянтную матрицу* $\mathbf{C}_L$, элементы которой удовлетворяют условию

$$c_L[i,\ j]=\begin{cases} c_L[n+1-i-j], & j+i\leqslant n+1; \\ c_L[2n+1-i-j], & j+i>n+1. \end{cases} \qquad (3.40)$$

Примером левоциркулянтной (4×4)-матрицы может служить матрица

$$\mathbf{C}_L=\begin{pmatrix} c_L[3] & c_L[2] & c_L[1] & c_L[0] \\ c_L[2] & c_L[1] & c_L[0] & c_L[3] \\ c_L[1] & c_L[0] & c_L[3] & c_L[2] \\ c_L[0] & c_L[3] & c_L[2] & c_L[1] \end{pmatrix}. \qquad (3.41)$$

Заметим, что каждая строка этой левоциркулянтной матрицы

получается из соседней верхней строки посредством ее сдвига влево на один элемент и перенесения крайнего левого элемента на место крайнего правого элемента этой строки. Правоциркулянтная и левоциркулянтная матрицы являются частными случаями соответственно тёплицевой матрицы и ганкелевой матрицы. Еще один интересный способ определения циркулянтной матрицы основан на использовании квадратной $(n\times n)$-*матрицы сдвига*

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}, \tag{3.42}$$

элементы которой удовлетворяют условию $p[i, i+1]=1$ при $1\leqslant i\leqslant n-1$, $p[n, 1]=1$ и равны нулю в остальных случаях. Тогда правоциркулянтная матрица будет определяться следующим выражением:

$$\mathbf{C}_R=\sum_{m=0}^{n-1} c_R[m]\,\mathbf{P}^m, \tag{3.43}$$

где $\mathbf{P}^m$ — означает возведение матрицы в степень m, т. е. умножение матрицы $\mathbf{P}$ саму на себя m раз. Заметим, что $\mathbf{P}^0=\mathbf{I}$. Для левоциркулянтной матрицы будем иметь следующее представление:

$$\mathbf{C}_L=\left(\sum_{m=0}^{n-1} c_L[m]\,\mathbf{P}^m\right)\mathbf{J}. \tag{3.44}$$

Еще одной матричной формой, применяемой при спектральном оценивании, является $(m\times n)$-матрица Вандермонда $\mathbf{V}$, элементы которой определяются выражением

$$v[i, j]=x_j^{i-1}, \quad 1\leqslant i\leqslant m, \ 1\leqslant j\leqslant n. \tag{3.45}$$

т. е. являются степенями параметров $x_1, \dots, x_n$. Следовательно, $(m\times n)$-матрица Вандермонда будет иметь следующий вид:

$$\mathbf{V}=\begin{pmatrix}1 & 1 & \dots & 1\\ x_1 & x_2 & \dots & x_n\\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2\\ \cdot & \cdot & & \cdot\\ \cdot & \cdot & & \cdot\\ \cdot & \cdot & & \cdot\\ x_1^{m-1} & x_2^{m-1} & \dots & x_n^{m-1}\end{pmatrix}. \tag{3.46}$$

Верхней треугольной (или *верхнетреугольной*) матрицей **U** называется квадратная $(n\times n)$-матрица, элементы которой, расположенные под главной диагональю, равны нулю, т. е. $u[i, j]=0$ при $j<i$. Примером (3×3)-матрицы этого типа является матрица.

$$\mathbf{U}=\begin{pmatrix} u[1,\ 1] & u[1,\ 2] & u[1,\ 3] \\ 0 & u[2,\ 2] & u[2,\ 3] \\ 0 & 0 & u[3,\ 3] \end{pmatrix}. \tag{3.47}$$

Нижней треугольной (или *нижнетреугольной*) матрицей **L** называется квадратная $(n\times n)$-матрица, элементы которой, расположенные над главной диагональю, равны нулю, т. е. $l[i, j]=0$ при $j>i$. Примером (3×3)-матрицы этого типа может служить матрица

$$\mathbf{L}=\begin{pmatrix} l[1,\ 1] & 0 & 0 \\ l[2,\ 1] & l[2,\ 2] & 0 \\ l[3,\ 1] & l[3,\ 2] & l[3,\ 3] \end{pmatrix}. \tag{3.48}$$

3.4. Обращение матриц

Квадратная $(n\times n)$-матрица $\mathbf{A}^{-1}$, такая что $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{I}$, если она существует, называется матрицей, обратной квадратной матрице **A**, — *обратной матрицей*. Квадратная матрица, обладающая обратной матрицей, называется *невырожденной* (или *несингулярной*). Если же она не обладает обратной матрицей, то называется *вырожденной* (или *сингулярной*). Если **A**, **B** и произведение **AB** — невырожденные матрицы, то справедливо тождество

$$(\mathbf{AB})^{-1}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}, \tag{3.49}$$

которое часто будет использоваться в дальнейшем.

Набор $(n\times 1)$-векторов $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ называют *линейно зависимыми*, если существуют числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, не все равные нулю, такие что

$$\alpha_1\mathbf{v}_1+\alpha_2\mathbf{v}_2+\ldots+\alpha_n\mathbf{v}_n=0; \tag{3.50}$$

в противном случае эти векторы называются *линейно независимыми*. Если столбцы прямоугольной $(m\times n)$-матрицы **A** рассматриваются как отдельные $(m\times 1)$-векторы, то *ранг по столбцам* матрицы **A** равен числу линейно независимых вектор-столбцов. Аналогично если строки матрицы рассматривать как отдельные $(1\times n)$-векторы, то *ранг по строкам* матрицы будет равен числу ее линейно независимых вектор-строк. Можно показать (см. Ноубл и Даньел [19]), что для любой матрицы ранг

по строкам равен ее рангу по столбцам, поэтому для каждой матрицы вполне достаточно указать одно из этих ранговых чисел. Квадратная $(m\times m)$-матрица $\mathbf{A}$ будет невырожденной тогда и только тогда, когда ее ранг равен m (т. е. когда эта матрица обратима). Матрицу *единичного ранга* можно записать в форме внешнего произведения векторов $\mathbf{v}\mathbf{w}^H$, поскольку каждый столбец умножается на вектор $\mathbf{v}$, а каждая строка умножается на вектор $\mathbf{w}^H$.

Еще одним признаком вырожденности квадратной $(n\times n)$-матрицы $\mathbf{A}$ может служить скалярное число, называемое *определителем* (детерминантом) матрицы и обозначаемое $\det\mathbf{A}$. Он определяется выражением

$$\det\mathbf{A}=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a[1,\ j]\,A_{1j}, \tag{3.51}$$

где $a[1, j]$ — элемент из верхней строки матрицы $\mathbf{A}$, а A_{1j} — определитель $(n-1)\times(n-1)$-матрицы, образованной в результате отбрасывания первой строки и j-го столбца $(n\times n)$-матрицы $\mathbf{A}$. Определение (3.51) является рекурсивным определением, при записи которого был учтен тот факт, что (1×1)-матрица, т. е. одиночный элемент, имеет определитель, равный этому элементу. Более подробные сведения о вычислении определителей приводятся в стандартных учебниках по линейной алгебре, например в разд. 6.5 книги Ноубла и Даньела [19].

Квадратная $(n\times n)$-матрица $\mathbf{A}$ будет вырожденной тогда и только тогда, когда $\det\mathbf{A}=0$. Таким образом, если $\det\mathbf{A}\neq0$, то матрица $\mathbf{A}$ обратима. Можно также показать, что определитель произведения двух квадратных $(n\times n)$-матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ равен произведению определителей этих матриц, т. е.

$$\det\mathbf{AB}=\det\mathbf{A}\det\mathbf{B}. \tag{3.52}$$

Кроме того, если $\mathbf{A}$ — эрмитова матрица $(\mathbf{A}^H=\mathbf{A})$, то определитель $\det\mathbf{A}$ является действительным числом.

В исследованиях по спектральному анализу часто используются две леммы об обращении матриц. Если $\mathbf{A}$ — невырожденная $(n\times n)$-матрица, $\mathbf{C}$ — невырожденная $(m\times m)$-матрица, $\mathbf{B}$ — $(n\times m)$-матрица и $\mathbf{D}(m\times n)$-матрица, то расширенная (или пополненная) матрица $\mathbf{A}+\mathbf{BCD}$ будет иметь обратную матрицу вида

$$(\mathbf{A}+\mathbf{BCD})^{-1}=\mathbf{A}^{-1}-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\,(\mathbf{DA}^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{C}^{-1})^{-1}\mathbf{DA}^{-1} \tag{3.53}$$

если существует матрица, обратная матрице $\mathbf{DA}^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{C}^{-1}$. Это соотношение известно под названием *леммы об обращении расширенной матрицы*. Представляет интерес одна частная форма этой леммы. Если $\mathbf{C}$ — единичный скаляр, т. е. (1×1)-матрица,

$\mathbf{B}$ — $(n\times 1)$-вектор-столбец $\mathbf{v}$, а $\mathbf{D}$ — сопряженная $(1\times n)$-вектор-строка $\mathbf{w}^H$, то

$$(\mathbf{A}+\mathbf{v}\mathbf{w}^H)^{-1}=\mathbf{A}^{-1}-\frac{(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{v})(\mathbf{w}^H\mathbf{A}^{-1})}{1+\mathbf{w}^H\mathbf{A}^{-1}\mathbf{v}} \tag{3.54}$$

представляет собой матрицу, обратную матрице, образованной за счет расширения матрицы $\mathbf{A}$ матрицей единичного ранга $\mathbf{v}\mathbf{w}^H$.

Пусть $(n\times n)$-матрица $\mathbf{Y}$ разбита на подматрицы $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ следующим образом:

$$\mathbf{Y}=\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{D}\\ \mathbf{C} & \mathbf{B}\end{pmatrix}, \tag{3.55}$$

где $\mathbf{A}$ — это $(m\times m)$-матрица, $\mathbf{B}$ — $(n-m)\times(n-m)$-матрица, $\mathbf{C}$ — это $(n-m)\times m$-матрица и $\mathbf{D}$ — $m\times(n-m)$-матрица. Тогда матрица, обратная матрице $\mathbf{Y}$, будет определяться выражением

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}^{-1}&=\begin{pmatrix}\mathbf{A}^{-1}+\mathbf{A}^{-1}\mathbf{D}\Delta^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{D}\Delta^{-1}\\ -\Delta^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} & \Delta^{-1}\end{pmatrix}=\\ &=\begin{pmatrix}\Lambda^{-1} & -\Lambda^{-1}\mathbf{D}\mathbf{B}^{-1}\\ -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}\Lambda^{-1} & \mathbf{B}^{-1}+\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}\Lambda^{-1}\mathbf{D}\mathbf{B}^{-1}\end{pmatrix},\end{aligned} \tag{3.56}$$

в котором по выбору полагается, что либо существуют матрицы, обратные матрицам $\mathbf{A}$ и $\Delta=\mathbf{B}-\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{D}$, либо существуют матрицы, обратные матрицам $\mathbf{B}$ и $\Lambda=\mathbf{A}-\mathbf{D}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}$. Матрицы Δ и Λ называются *дополнениями Шура* матрицы $\mathbf{A}$. Соотношение (3.56) известно под названием *леммы об обращении блочной матрицы*. В частном случае, когда $\mathbf{Y}$ — $(n\times n)$-матрица, $\mathbf{A}$ — $(n-1)\times(n-1)$-матрица, $\mathbf{D}=\mathbf{v}$ — $(n-1)$-вектор-столбец, $\mathbf{C}=\mathbf{w}^H$ — $(n-1)$-вектор-строка, а $\mathbf{B}=\alpha$ — (1×1)-матрица, т. е. скаляр, то

$$\mathbf{Y}^{-1}=\begin{pmatrix}\mathbf{A}^{-1}+\beta\mathbf{A}^{-1}\mathbf{v}\mathbf{w}^H\mathbf{A}^{-1} & -\beta\mathbf{A}^{-1}\mathbf{v}\\ -\beta\mathbf{w}^H\mathbf{A}^{-1} & \beta\end{pmatrix}, \tag{3.57}$$

где скаляр $\beta=(\alpha-\mathbf{w}^H\mathbf{A}^{-1}\mathbf{v})^{-1}$. Таким образом, несложно вычислить обращение матрицы, формируемой добавлением к исходной матрице дополнительных краевых строки и столбца (или вычеркиванием строки и столбца). Матрицы, полученные таким образом, называются *окаймленными матрицами*.

В табл. 3.1 перечислены формы обратных матриц для ряда матриц специального вида, описанных в разд. 3.3. Доказательство многих из них не вызывает затруднений. Так, например, для доказательства того, что обращение персимметричной матрицы $\mathbf{P}$ также является персимметричной матрицей, сначала для записи соотношения $\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1}=\mathbf{P}\mathbf{J}\mathbf{J}\mathbf{P}^{-1}=\mathbf{I}$ используем тот факт, что

Таблица 3.1. Структура обратных матриц

Тип матрицы	Тип обратной матрицы
Эрмитова (симметричная)	Эрмитова (симметричная)
Персимметричная	Персимметричная
Центросимметричная	Центросимметричная
Тёплицева	Персимметричная
Ганкелева	Симметричная
Правоциркулянтная	Правоциркулянтная
Левоциркулянтная	Левоциркулянтная
Треугольная	Треугольная

$\mathbf{JJ}=\mathbf{I}$, а затем с помощью операции умножения слева и справа на матрицу $\mathbf{J}$ получим

$$\mathbf{J}(\mathbf{PJJP}^{-1})\mathbf{J}=\mathbf{P}^T(\mathbf{JP}^{-1}\mathbf{J})=\mathbf{I}.$$

что дает

$$\mathbf{JP}^{-1}\mathbf{J}=(\mathbf{P}^{-1})^T. \tag{3.58}$$

Было использовано свойство $(\mathbf{P}^T)^{-1}=(\mathbf{P}^{-1})^T$.

3.5. Нормальные уравнения метода наименьших квадратов

Матричная алгебра обеспечивает возможности представления в сжатой форме системы линейных уравнений, получаемых при анализе по методу наименьших квадратов. Рассмотрим аппроксимацию $\hat{y}[n]$ комплексной последовательности $y[n]$ с помощью линейной суммы из m комплексных последовательностей $x_1[n]$, $x_2[n]$, ..., $x_m[n]$:

$$\hat{y}[n]=a_1x_1[n]+a_2x_2[n]+\ldots+a_mx_m[n], \tag{3.59}$$

где $1\leqslant n\leqslant N$. Предполагается, что $N>m$, поэтому уравнение (3.59) соответствует переопределенной системе уравнений. Один из возможных методов однозначного нахождения значений неизвестных параметров $a_1,\ldots,a_m$ основан на минимизации действительной суммы квадратичных ошибок

$$E=\sum_{n=1}^{N}|e[n]|^2, \tag{3.60}$$

где $e[n]=y[n]-\hat{y}[n]$ есть комплексная ошибка между истинным значением отсчета $y[n]$ и его линейной аппроксимацией $\hat{y}[n]$.

Уравнения для N ошибок можно записать в виде

$$\mathbf{y}-\mathbf{Xa}=\mathbf{e}, \tag{3.61}$$

где $(N\times m)$-матрица данных $\mathbf{X}$, $(m\times 1)$-вектор-столбец $\mathbf{a}$ и $(N\times 1)$-вектор-столбцы $\mathbf{y}$ и $\mathbf{e}$ определяются следующим образом:

$$\mathbf{X}=\begin{pmatrix} x_1[1] & \dots & x_m[1] \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ x_1[N] & \dots & x_m[N] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_m \end{pmatrix}$$

и

$$\mathbf{y}=\begin{pmatrix} y[1] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y[N] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}=\begin{pmatrix} e[1] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e[N] \end{pmatrix}.$$

Вводя $N\times(m+1)$-матрицу $\mathbf{Z}=[\mathbf{yX}]$, вектор ошибки $\mathbf{e}$ можно записать в следующем виде:

$$(\mathbf{y}\ \ \mathbf{X})\begin{pmatrix} 1 \\ -\mathbf{a} \end{pmatrix}=\mathbf{Z}\begin{pmatrix} 1 \\ -\mathbf{a} \end{pmatrix}=\mathbf{e}. \tag{3.62}$$

Квадратичную ошибку $\mathbf{E}$ можно далее записать как

$$\mathbf{E}=\mathbf{e}^H\mathbf{e}=\mathbf{y}^H\mathbf{y}-\mathbf{y}^H\mathbf{X}\mathbf{a}-\mathbf{a}^H\mathbf{X}^H\mathbf{y}+\mathbf{a}^H\mathbf{X}^H\mathbf{X}\mathbf{a}, \tag{3.63}$$

где внутреннее произведение векторов $\mathbf{y}^H\mathbf{y}$ дает скаляр, произведение матрицы и вектора $\mathbf{X}^H\mathbf{y}$ дает $(m\times 1)$-вектор-столбец, а произведение матриц $\mathbf{X}^H\mathbf{X}$ дает квадратную $(m\times m)$-матрицу.

Прежде чем приступать к минимизации ошибки $\mathbf{E}$, заметим сначала, что уравнение (3.63) можно переписать в виде .

$$\begin{aligned}\mathbf{E}=\mathbf{y}^H\mathbf{y}-\mathbf{y}^H\mathbf{X}(\mathbf{X}^H\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^H\mathbf{y}+\\ +(\mathbf{X}^H\mathbf{y}-\mathbf{X}^H\mathbf{X}\mathbf{a})^H(\mathbf{X}^H\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}^H\mathbf{y}-\mathbf{X}^H\mathbf{X}\mathbf{a}),\end{aligned} \tag{3.64}$$

т. е. дополнив его до «полного квадрата». В уравнении (3.64) только последний член в правой части зависит от вектора неизвестных параметров $\mathbf{a}$. Вследствие эрмитовой симметрии этого члена он всегда будет действительным и положительным. Для минимизации квадратичной ошибки $\mathbf{E}$ этот член должен быть обращен в нуль. Для этого вектор $\mathbf{a}$ необходимо выбрать так, чтобы выполнялось равенство

$$\mathbf{X}^H\mathbf{y}-\mathbf{X}^H\mathbf{X}\mathbf{a}=\mathbf{0}_m,$$

где $\mathbf{0}_m$ — вектор из m нулевых элементов. Следовательно, вектор $\mathbf{a}$, минимизирующий квадратичную ошибку, ищется посредством решения следующей системы m уравнений:

$$\mathbf{X}^H\mathbf{X}\mathbf{a}=\mathbf{X}^H\mathbf{y}. \tag{3.65}$$

Подставляя (3.65) в (3.63), получаем выражение для минимальной квадратичной ошибки

$$\mathbf{E}_{\min} = \mathbf{y}^H\mathbf{y} - \mathbf{y}^H\mathbf{X}\mathbf{a}. \tag{3.66}$$

Уравнения (3.65) и (3.66) можно объединить в одну общую систему $m+1$ уравнений, которая имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y}^H\mathbf{y} & \mathbf{y}^H\mathbf{X} \\ \mathbf{X}^H\mathbf{y} & \mathbf{X}^H\mathbf{X} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -\mathbf{a} \end{pmatrix} = (\mathbf{y}\ \ \mathbf{X})^H(\mathbf{y}\ \ \mathbf{X})\begin{pmatrix} 1 \\ -\mathbf{a} \end{pmatrix} = \\ = \mathbf{Z}^H\mathbf{Z}\begin{pmatrix} 1 \\ -\mathbf{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{\min} \\ \mathbf{0}_m \end{pmatrix}. \tag{3.67}$$

Уравнение (3.67) имеет форму *нормальных уравнений* метода наименьших квадратов. Заметим, кстати, что произведение $\mathbf{Z}^H\mathbf{Z}$ образует эрмитову матрицу.

Выражение (3.63) для квадратичной ошибки представляет собой частный случай матричного квадратного уравнения в общей форме

$$\mathbf{E} = r - \mathbf{r}^H\mathbf{a} - \mathbf{a}^H\mathbf{r} + \mathbf{a}^H\mathbf{R}\mathbf{a}, \tag{3.68}$$

где r — известный положительный скаляр, $\mathbf{r}$ — известный $(m\times 1)$-вектор-столбец, а $\mathbf{R}$ — известная эрмитова $(m\times m)$-матрица. Нормальные уравнения, решением которых является $(m\times 1)$-вектор $\mathbf{a}$, минимизирующий положительную действительную скалярную величину $\mathbf{E}$, имеют вид

$$\begin{pmatrix} r & \mathbf{r}^H \\ \mathbf{r} & \mathbf{R} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -\mathbf{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{\min} \\ \mathbf{0}_m \end{pmatrix} \tag{3.69}$$

и непосредственно следуют из (3.67) после подстановки r вместо $\mathbf{y}^H\mathbf{y}$; $\mathbf{r}$ вместо $\mathbf{X}^H\mathbf{y}$ и $\mathbf{R}$ вместо $\mathbf{X}^H\mathbf{X}$.

3.6. Решение линейных уравнений

Многие методы спектрального оценивания требуют решения системы линейных уравнений, которую можно записать в форме следующего матричного уравнения:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \tag{3.70}$$

где $\mathbf{A}$ — некоторая произвольная квадратная $(n\times n)$-матрица, $\mathbf{b}$ — произвольный $(n\times 1)$-вектор-столбец, а $\mathbf{x}$ — $(n\times 1)$-вектор неизвестных величин, значения которых необходимо определить. Один из очевидных методов решения уравнения (3.70) относительно вектора $\mathbf{x}$ состоит в умножении обеих частей уравнения слева на обратную матрицу $\mathbf{A}^{-1}$ (в предположении, что она существует), что дает

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}. \tag{3.71}$$

Однако такой подход, как правило, не приемлем на практике либо из-за своей очень низкой вычислительной эффективности, либо из-за недостаточной устойчивости большинства численных методов решения линейных уравнений. Если обратная матрица не существует, то ранг k матрицы **A** будет меньше, чем n. *Нуль-пространством* матрицы **A** является линейное подпространство ненулевых векторов **x**, удовлетворяющих уравнению $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$. Размерность нуль-пространства равна $n-k$[1].

Если $(n\times n)$-матрица **A** — треугольная и невырожденная (т. е. ее диагональные элементы отличны от нуля), то система линейных уравнений, содержащая матрицу **A**, может быть решена с помощью *метода обратной* подстановки[2] с использованием вычислительных операций, количество которых пропорционально n^2. Рассмотрим случай верхнетреугольной (3×3)-матрицы; уравнение будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} a[1,1] & a[1,2] & a[1,3] \\ 0 & a[2,2] & a[2,3] \\ 0 & 0 & a[3,3] \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x[1] \\ x[2] \\ x[3] \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b[1] \\ b[2] \\ b[3] \end{pmatrix}. \qquad (3.72)$$

Рассматривая нижнюю строку, видим, что $a[3,3]x[3]=b[3]$. Решая это уравнение получим $x[3]=b[3]/a[3,3]$. Если полученное $x[3]$ подставить обратно в матричное уравнение, то во второй строке будет содержаться только одно неизвестное $x[2]$, которое можно найти, решая уравнение $a[2,2]x[2]+a[2,3]x[3]=b[2]$. Продолжая обратную подстановку, мы в конце концов определим все неизвестные компоненты вектора x.

В случае невырожденной $(n\times n)$-матрицы общего вида для решения уравнения $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ можно применить *метод исключения Гаусса*, представляющий собой трехэтапную процедуру. Сначала матрица **A** единственным образом представляется в виде произведения верхнетреугольной матрицы **L** и нижнетреугольной матрицы **U** (с единичными элементами на диагонали)

$$\mathbf{A}=\mathbf{LU}. \qquad (3.73)$$

После разложения на множители (факторизации) выполняются два этапа «обратной» подстановки, включая решение уравнения

---

[1] Если матрица **A** осуществляет линейное преобразование некоторой совокупности векторов **L**, то *ядром* линейного преобразования **A** называется совокупность всех векторов **L**, переводящихся преобразованием **A** в нулевой вектор **0**. Размерность ядра обозначается d и называется *дефектом* линейного преобразования (матрицы **A**), $d=n-k$, где k — ранг матрицы **A** (см. [8*], с. 129). — *Прим. ред.*

[2] Относительно метода обратной подстановки (см., например, [6*], с. 182). Следует отметить (см. там же), что случаю нижнетреугольной матрицы соответствует метод прямой подстановки. — *Прим. ред.*

с матрицей **L** относительно вектора **y**:

$$\mathbf{L}\mathbf{y} = \mathbf{b}, \tag{3.74}$$

и затем последующее решение уравнения с матрицей **U** относительно вектора **x**:

$$\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{y}. \tag{3.75}$$

Количество вычислений, требуемое этим методом, пропорционально n^3, а объем памяти — n^2.

Если матрица **A** — квадратная и эрмитова, то тогда применяется специальная форма факторизации с треугольными матрицами

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}\mathbf{R}^H, \tag{3.76}$$

где **R** — нижнетреугольная матрица с ненулевыми действительными элементами на главной диагонали. Этот метод факторизации матрицы называется *разложением Холецкого*[1]. Благодаря эрмитовой симметрии матрицы **A** число вычислений, требуемое для решения системы эрмитовых уравнений методом Холецкого, составляет примерно половину объема вычислений, требуемых методом исключения Гаусса, поскольку рассчитывать необходимо не две матрицы **L** и **U**, а только одну матрицу **R**. В приложении 3.А приведена написанная на Фортране программа CHOLESKY, предназначенная для решения методом Холецкого системы линейных уравнений, содержащих комплексные величины. Заметим, что, хотя этот алгоритм, как правило, имеется во многих библиотеках стандартных машинных программ, очень редко можно отыскать его версию, написанную для работы с комплексными величинами.

Решение системы линейных уравнений в случае циркулянтной матрицы рассмотрено в следующем разделе. Требуемое им число операций пропорционально величине $n \log_2 n$. Количество вычислительных операций, требуемое для решения системы линейных уравнений в случае тёплицевой и ганкелевой матриц пропорционально n^2. Раздел 3.8 посвящен подробному обсуждению тёплицева случая.

3.7. Характеристические свойства матриц и разложение по сингулярным числам

3.7.1. Предварительные сведения

В разд. 2.3 было показано, что экспонента $\exp(j2\pi ft)$ является собственной функцией линейной системы. Линейная система, оставляющая неизменной на выходе форму экспоненциального

[1] Этот метод иногда называется *методом квадратного корня* (см., например, [6*], с. 176). — *Прим. ред.*

сигнала, поданного на ее вход, изменяет лишь величину его комплексной амплитуды. Аналогично, если ненулевой вектор $\mathbf{q}$ в результате линейного преобразования, описываемого квадратной $(n\times n)$-матрицей $\mathbf{A}$, остается неизменным и лишь изменяет свой масштаб в λ раз, т. е.

$$\mathbf{Aq}=\lambda\mathbf{q}, \tag{3.77}$$

то говорят, что он является *собственным вектором* матрицы $\mathbf{A}$. Скаляр λ, соответствующий этому собственному вектору, называется *собственным значением*. Полином $f(\lambda)=\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})$ порядка n называется *характеристическим полиномом* (многочленом) матрицы $\mathbf{A}$; n корней уравнения $f(\lambda)=0$ порождают n собственных значений λ_i:

$$f(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i-\lambda)=\sum_{k=0}^{n}\gamma_k\lambda^k=0. \tag{3.78}$$

Собственные значения и соответствующие собственные векторы вместе образуют *собственную систему* матрицы $\mathbf{A}$. Множество собственных значений в математике принято называть *спектром* матрицы $\mathbf{A}$, который, однако, не следует путать с определениями спектра, данными в гл. 2 и 4. Всегда существуют по крайней мере один собственный вектор, соответствующий каждому отдельному собственному значению, и собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям, линейно независимые друг от друга. Коэффициент γ_n наивысшего порядка в (3.78) равен $(-1)^n$, и можно показать, что коэффициент наинизшего порядка γ_0 удовлетворяет условию

$$\gamma_0=\det\mathbf{A}=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i. \tag{3.79}$$

Определяя след матрицы как сумму элементов главной диагонали

$$\operatorname{tr}\mathbf{A}=\sum_{i=1}^{n}a[i,\ i], \tag{3.80}$$

можно также показать, что

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\operatorname{tr}\mathbf{A} \tag{3.81}$$

и

$$\gamma_{n-1}=(-1)^{n-1}\operatorname{tr}\mathbf{A}. \tag{3.82}$$

Главными собственными векторами называются собственные векторы, соответствующие наибольшему по величине собственному значению матрицы $\mathbf{A}$. Матрица $k\mathbf{A}$, где k — скаляр, имеет

собственные значения $k\lambda_i$. Матрица $\mathbf{A}^p$, где p — положительное целое число, имеет собственные значения $\lambda_i{}^p$. Если матрица $\mathbf{A}$ невырожденна, то обратная ей матрица $\mathbf{A}^{-1}$ имеет собственные значения $1/\lambda_i$. Матрица $\mathbf{A}+k\mathbf{I}$ имеет собственные значения λ_i+k. Матрица $\mathbf{P}$ размером $n\times n$, такая что $\mathbf{P}^H\mathbf{P}=\mathbf{P}\mathbf{P}^H$, называется *ортогональной* матрицей. Кроме того, если $\mathbf{P}$ обладает тем свойством, что $\mathbf{P}^H\mathbf{P}=\mathbf{P}\mathbf{P}^H=\mathbf{I}$, то она называется *ортонормальной*, или *унитарной*, матрицей. Так как $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}=\mathbf{I}$, то $\mathbf{P}^{-1}=\mathbf{P}^H$. Если $\mathbf{P}$ — унитарная матрица, то $|\det\mathbf{P}|=1$, и все модули ее собственных значений равны 1[1].

Предположим, что $(n\times n)$-матрица $\mathbf{Q}$ составлена из n столбцов собственных векторов с $\mathbf{q}_1$ по $\mathbf{q}_n$ квадратной $(n\times n)$-матрицы $\mathbf{A}$, а диагональная $(n\times n)$-матрица $\mathbf{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ составлена из n различных собственных значений матрицы $\mathbf{A}$. В этом случае матрица $\mathbf{A}$ будет иметь набор линейно независимых собственных векторов тогда и только тогда, когда ее можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{A}=\mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^{-1},\quad \mathbf{\Lambda}=\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}, \tag{3.83}$$

где $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{\Lambda}$ — невырожденные матрицы.

Если невырожденная матрица $\mathbf{A}$ обладает также эрмитовой симметрией, то она будет иметь единственное разложение

$$\mathbf{A}=\mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^{-1}=\mathbf{A}^H=(\mathbf{Q}^{-1})^H\mathbf{\Lambda}^H\mathbf{Q}^H, \tag{3.84}$$

где полагается, что $\mathbf{Q}^{-1}=\mathbf{Q}^H$ и $\mathbf{\Lambda}=\mathbf{\Lambda}^H$. Это означает, что эрмитова матрица имеет действительные собственные значения и что если все собственные значения различны, то собственные векторы будут образовывать ортонормальный базис, поскольку $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^H=\Sigma\mathbf{q}_i\mathbf{q}_i^H=\mathbf{I}$, т. е. $\mathbf{Q}$ — унитарная матрица. Следовательно, эрмитовы матрицы можно диагонализировать с помощью унитарного преобразования

$$\mathbf{A}=\mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^H. \tag{3.85}$$

Другое представление для эрмитовой матрицы $\mathbf{A}$, базирующееся на уравнении (3.85), основано на записи матрицы $\mathbf{A}$ в виде разложения внешнего произведения по ее собственным векторам и собственным значениям

$$\mathbf{A}=\sum_{i=0}^{n}\lambda_i\mathbf{q}_i\mathbf{q}_i^H. \tag{3.86}$$

Выражение (3.86) в математике называется спектральным представлением (или спектральным разложением) матрицы $\mathbf{A}$,

---

[1] В случае комплексной унитарной матрицы модуль ее определителя равен единице (см., например, [8*], с. 49). — *Прим. ред.*

и его не следует путать со спектральным оцениванием. Используя соотношение

$$\mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{Q}^H)^{-1}\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{Q}^H. \tag{3.87}$$

получаем

$$\mathbf{A}^{-1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i}\mathbf{q}_i\mathbf{q}_i^H, \tag{3.88}$$

где предполагается, что все собственные значения отличны от нуля.

Квадратичная форма, соответствующая эрмитовой матрице **A**, является действительной скалярной величиной $\langle \mathbf{x}, \mathbf{Ax}\rangle = \mathbf{x}^H\mathbf{Ax} = \Sigma_i\Sigma_j a_{ij}x_i^*x_j$. Квадратичная форма называется *положительно определенной*, если $\langle \mathbf{x}, \mathbf{Ax}\rangle > 0$ для всех ненулевых векторов **x**, и *положительно полуопределенной*, если $\langle \mathbf{x}, \mathbf{Ax}\rangle \geqslant 0$ для всех **x**[1]. Говорят, что матрица **A** является положительно определенной или полуопределенной, если соответствующая ей квадратичная форма является положительно определенной или полуопределенной. Эрмитова матрица тогда и только тогда является положительно определенной, когда все ее собственные значения положительны; если же все ее собственные значения неотрицательны, то эрмитова матрица называется положительно полуопределенной.

Отношение Рэлея $R(\mathbf{x})$ эрмитовой матрицы **A** — это скаляр, который определяется выражением

$$R(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^H\mathbf{Ax}}{\mathbf{x}^H\mathbf{x}}. \tag{3.89}$$

Обозначая минимальное и максимальное собственные значения матрицы **A** через $\lambda_{\min}$ и $\lambda_{\max}$, а связанные с ними ортонормальные собственные векторы через $\mathbf{x}_{\min}$ и $\mathbf{x}_{\max}$, можно показать (см. книгу Ноубла и Даньелла [19]), что

$$\begin{aligned} &\lambda_{\min} \leqslant R(\mathbf{x}) \leqslant \lambda_{\max} \quad \text{для всех } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \\ &\lambda_{\min} = \min_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} R(\mathbf{x}) = R(\mathbf{x}_{\min}), \\ &\lambda_{\max} = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} R(\mathbf{x}) = R(\mathbf{x}_{\max}). \end{aligned} \tag{3.90}$$

Некоторые из методов, обсуждаемых далее в книге, требуют вычисления минимального или максимального собственных значений эрмитовой матрицы **A**. Одним из методов, используемых для отыскания этих собственных значений, является степенной

[1] В отечественных математических руководствах такая квадратичная форма и соответствующая ей матрица называются *неотрицательно определенными* (см., например, [6*], с. 84). — *Прим. ред.*

метод.[1]) Например, задав некоторый начальный вектор $\mathbf{x}_0$ последовательности итераций на основе линейного уравнения

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k \tag{3.91}$$

и нормируя на каждом шаге

$$\mathbf{x}_{k+1} = \frac{\mathbf{y}_{k+1}}{\sigma_{k+1}}, \quad \sigma_{k+1} = \mathbf{y}_{k+1}^H \mathbf{y}_{k+1}, \tag{3.92}$$

обеспечим сходимость к $\mathbf{x}_k$. Число σ_k, получаемое после последнего шага, и будет максимальным собственным значением, а $\mathbf{x}_k$ — соответствующим ему собственным вектором. Сходимость процесса решения обеспечивается в том случае, когда $\mathbf{x}_0$ не ортогонален собственному вектору, соответствующему максимальному собственному значению. Для того чтобы получить минимальное собственное значение и соответствующий ему собственный вектор, в линейном уравнении используется обратная матрица $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}_k, \tag{3.93}$$

которое удобнее решать относительно $\mathbf{y}_k$, записав в виде

$$\mathbf{A}\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{x}_k. \tag{3.94}$$

Для устранения собственных значений по мере их вычисления можно использовать процесс понижения порядка, что возможно благодаря соотношению (3.86),

$$\mathbf{A} = -\sigma \mathbf{x}\mathbf{x}^H \tag{3.95}$$

и повторять этот процесс для отыскания других собственных значений.

3.7.2. Разложение по сингулярным числам (РСЧ)

В предыдущем разделе было показано, что эрмитова $(n \times n)$-матрица может быть представлена с помощью унитарной $(n \times n)$-матрицы, составленной из собственных векторов, и диагональной $(n \times n)$-матрицы, содержащей собственные значения. Этот результат можно обобщить на произвольную комплексную $(m \times n)$-матрицу $\mathbf{A}$ ранга k. *Теорема разложения по сингулярным* (или *особым*) *числам* [10, 13, 15] утверждает, что существуют положительные действительные числа $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \ldots \geqslant \sigma_k > 0$ (так называемые *сингулярные* числа матрицы $\mathbf{A}$), унитарная $(m \times m)$-матрица $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m]$ и унитарная $(n \times n)$-матрица

[1]) Степенной метод относится к итерационным методам решения проблемы собственных значений (см., например, [11*], с. 493). — *Прим. ред.*

$\mathbf{V}=[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]$, такие что матрица $\mathbf{A}$ может быть представлена в следующем виде:

$$\mathbf{A}=\mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^H=\sum_{i=1}^{k}\sigma_i\mathbf{u}_i\mathbf{v}_i^H, \tag{3.96}$$

где $(m\times n)$-матрица Σ имеет следующую структуру

$$\Sigma=\begin{pmatrix}\mathbf{D} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}, \tag{3.97}$$

а $\mathbf{D}=\operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ — диагональная $(k\times k)$-матрица. Заметим, что если $\mathbf{A}^H=\mathbf{V}\Sigma^H\mathbf{U}^H$, $\mathbf{U}^H\mathbf{U}=\mathbf{I}$, $\mathbf{V}^H\mathbf{V}=\mathbf{I}$, то

$$\mathbf{A}^H\mathbf{A}=\mathbf{V}(\Sigma^H\Sigma)\mathbf{V}^H, \quad \mathbf{A}\mathbf{A}^H=\mathbf{U}(\Sigma\Sigma^H)\mathbf{U}^H \tag{3.98}$$

и

$$\mathbf{A}^H\mathbf{A}\mathbf{v}_i=\sigma_i^2\mathbf{v}_i, \quad \mathbf{A}\mathbf{A}^H\mathbf{u}_i=\sigma_i^2\mathbf{u}_i, \tag{3.99}$$

где $1\leqslant i\leqslant k$. Произведения матриц $\Sigma^H\Sigma$ и $\Sigma\Sigma^H$ являются диагональными матрицами размером соответственно $n\times n$ и $m\times m$ с диагональными элементами σ_i^2. Произведения матриц $\mathbf{A}^H\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}\mathbf{A}^H$ — эрмитовы матрицы размером соответственно $n\times n$ и $m\times m$. Поэтому столбцы матрицы $\mathbf{U}$ являются ортонормальными собственными векторами матрицы $\mathbf{A}\mathbf{A}^H$, а столбцы $\mathbf{V}$ — ортонормальными собственными векторами матрицы $\mathbf{A}^H\mathbf{A}$. Кроме того, обе матрицы $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ имеют одинаковые собственные значения σ_i^2, $1\leqslant i\leqslant k$. Следовательно, сингулярные числа — это просто положительные значения квадратных корней из ненулевых собственных значений матриц $\mathbf{A}^H\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}\mathbf{A}^H$.

Используя свойства унитарности матриц $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$, из (3.69) можно получить следующие соотношения:

$$\mathbf{A}\mathbf{V}=\mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^H\mathbf{V}=\mathbf{U}\Sigma, \quad \mathbf{U}^H\mathbf{A}=\mathbf{U}^H\mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^H=\Sigma\mathbf{V}^H \tag{3.100}$$

или

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_i=\sigma_i\mathbf{u}_i, \quad \mathbf{A}^H\mathbf{u}_i=\sigma_i\mathbf{v}_i, \tag{3.101}$$

где $1\leqslant i\leqslant k$. Уравнения (3.101) определяют пару соотношений между собственными векторами $\mathbf{u}_i$ и $\mathbf{v}_i$, которые имеют одно общее сингулярное число σ_i. Собственные векторы, которые соответствуют нулевым сингулярным числам, т. е. $\mathbf{u}_i$, $k+1\leqslant i\leqslant m$, и $\mathbf{v}_i$, $k+1\leqslant i\leqslant n$, соотношениями вида (3.100) и (3.101) не связаны.

Псевдообратная матрица Мура — Пенроуза $\mathbf{A}^{\#}$, соответствующая $(m\times n)$-матрице $\mathbf{A}$ ранга k, однозначно определяется

через компоненты разложения по сингулярным числам как матрица вида

$$\mathbf{A}^{\#} = \mathbf{V}\boldsymbol{\Sigma}^{\#}\,\mathbf{U}^{H} = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i^{-1}\mathbf{v}_i\mathbf{u}_i^{H}, \tag{3.102}$$

где

$$\Sigma^{\#} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.103}$$

Псевдообратная матрица $\mathbf{A}^{\#}$ позволяет получить *решение по методу наименьших квадратов* $\mathbf{x}=\mathbf{A}^{\#}\mathbf{b}$ *с минимальной нормой* для задачи отыскания $(n\times 1)$-вектора $\mathbf{x}$, который одновременно минимизирует ошибку, определяемую квадратным уравнением $\|\mathbf{Ax}-\mathbf{b}\|_2$ для некоторого заданного $(m\times 1)$-вектора $\mathbf{b}$, и длину искомого вектора $\|\mathbf{x}\|_2$. Ограничение минимальной длины необходимо для того, чтобы гарантировать единственность решения в тех случаях, когда более одного вектора $\mathbf{x}$ будут минимизировать $\|\mathbf{Ax}-\mathbf{b}\|_2$. Если $m=n$ и ранг матрицы $\mathbf{A}$ равен n (т. е. она невырожденна), то псевдообратная матрица превращается в обычную квадратную матрицу, обратную $\mathbf{A}$, т. е. $\mathbf{A}^{\#}=\mathbf{A}^{-1}$. Если $m>n$ и $\operatorname{rank}\mathbf{A}=n$, то $\mathbf{A}^{\#}=(\mathbf{A}^H\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^H$ и $\mathbf{x}=(\mathbf{A}^H\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^H\mathbf{b}$. Это — обычное решение системы переопределенных уравнений по методу наименьших квадратов (см. разд. 3.5). Если $n>m$ и $\operatorname{rank}\mathbf{A}=m$, то $\mathbf{A}^{\#}=\mathbf{A}^H(\mathbf{A}\mathbf{A}^H)^{-1}$ и $\mathbf{x}=\mathbf{A}^H(\mathbf{A}\mathbf{A}^H)^{-1}\mathbf{b}$. Это решение часто называют решением с минимальной нормой для системы недоопределенных уравнений, поскольку решение с псевдообратной матрицей будет давать вектор $\mathbf{x}$ минимальной длины.

Вычисление псевдообратной матрицы $\mathbf{A}^{\#}$ непосредственно по РСЧ-компонентам [уравнение (3.98)] обладает двумя преимуществами перед прямым вычислением матрицы $\mathbf{A}^{\#}$ в форме либо $(\mathbf{A}^H\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^H$ в случае $m>n$, либо $\mathbf{A}^H(\mathbf{A}\mathbf{A}^H)^{-1}$ в случае $n>m$. Во-первых, РСЧ помогает определить ранг матрицы $\mathbf{A}$ по количеству значимых сингулярных чисел. Во-вторых, точность, предъявляемая к вычислению матрицы $\mathbf{A}^{\#}$ при использовании РСЧ, примерно вдвое ниже точности, требуемой при расчете этой матрицы с помощью соотношений $(\mathbf{A}^H\mathbf{A})^{-1}$ или $(\mathbf{A}\mathbf{A}^H)^{-1}$. В приложении приведена написанная на Фортране программа CSVD, предназначенная для расчета РСЧ комплексной прямоугольной матрицы.

3.7.3. Анализ характеристических свойств некоторых специальных матриц

Нетрудно показать, что треугольная матрица $\mathbf{A}$ имеет определитель вида

$$\det\mathbf{A} = \prod_{i=1}^{n} a[i,\ i]. \tag{3.104}$$

Сравнивая это выражение с выражением (3.79), можно видеть, что произведение собственных значений треугольной матрицы — это просто произведение ее диагональных элементов.

Собственные векторы и собственные значения циркулянтной матрицы связаны с ДВ-рядом Фурье (ДВРФ); см. [5, 18]. Напомним (см. разд. 2.7), что ДВРФ $X[0], \ldots, X[n-1]$ для n-точечной последовательности $x[0], \ldots, x[n-1]$ для $T=1$ определяется выражением

$$X[k]=\sum_{i=0}^{n-1} x[i]\exp(-j2\pi ik/n),$$
$$k=0, \ \ldots, \ n-1, \tag{3.105}$$

которое можно записать в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} X[0] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X[n-1] \end{pmatrix} = \mathbf{Q}_{\text{ДВРФ}} \begin{pmatrix} x[0] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x[n-1] \end{pmatrix}, \tag{3.106}$$

где элементами матрицы $\mathbf{Q}_{\text{ДВРФ}}$ являются значения экспоненты

$$q_{\text{ДВРФ}}[i, \ k]=\exp(-j2\pi ik/n), \quad 0\leqslant i, \ k\leqslant n-1. \tag{3.107}$$

Правоциркулянтную матрицу $\mathbf{C}_R$ можно факторизовать путем разложения на собственные множители

$$\mathbf{C}_R=\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\,\mathbf{Q}_{\text{ДВРФ}}\right)\Lambda_{\text{ДВРФ}}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\,\mathbf{Q}^{H}_{\text{ДВРФ}}\right), \tag{3.108}$$

где диагональная матрица $\Lambda_{\text{ДВРФ}}$ собственных значений дается выражением

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda_{n-1} \end{pmatrix} = \mathbf{Q}_{\text{ДВРФ}} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_{n-1} \end{pmatrix}. \tag{3.109}$$

Таким образом, собственные значения произвольной циркулянтной матрицы представляют собой ДВРФ с циркулянтными элементами $c_0, \ldots, c_{n-1}$. Столбцы матрицы $\mathbf{Q}_{\text{ДВРФ}}$ формируют собственные векторы. Нормированные собственные векторы $\mathbf{q}_k$ со-

ставлены из последовательных степеней n корней из единицы

$$q_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{vmatrix} 1 \\ w_n^k \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ w_n^{(n-1)k} \end{vmatrix}, \quad w_n = \exp(j2\pi/n). \tag{3.110}$$

Если использовать не *прямой*, а *обратный* ДВРФ, то аналогичные соотношения можно записать и для левоциркулянтной матрицы $\mathbf{C}_L$. Заметим, что разложение (3.108) для матрицы $\mathbf{C}_R$ обеспечивает эффективное решение линейных уравнений вида $\mathbf{C}_R\mathbf{x}=\mathbf{y}$ с помощью алгоритмов БПФ.

Собственные векторы центросимметричной матрицы **C** обладают свойством либо сопряженной, либо антисопряженной симметрии [3]. Вектор **v** обладает свойством сопряженной симметрии, если $\mathbf{Jv}=\mathbf{v}^*$, где **J** — матрица отражения. Вектор **v** антисопряженно симметричен, если $\mathbf{Jv}=-\mathbf{v}^*$. Отсюда получаем, что центральный элемент вектора нечетной размерности должен быть действительным, если этот вектор сопряженно симметричен, или же быть равным нулю, если этот вектор антисопряженно симметричен. В случае однозначно определенных собственных значений квадратная центросимметричная матрица *четной* размерности n будет иметь $n/2$ сопряженно симметричных ортонормальных собственных векторов $\mathbf{v}_i$, $i=1,\ldots,n/2$, с соответствующими собственными значениями σ_i, вида

$$\mathbf{v}_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbf{y}_i \\ \mathbf{J}\mathbf{y}_i^* \end{pmatrix}, \tag{3.111}$$

где $\mathbf{y}_i$ — ортонормальные собственные векторы матрицы $\mathbf{A}+\mathbf{JB}$, т. е.

$$(\mathbf{A}+\mathbf{JB})\,\mathbf{y}_i = \sigma_i \mathbf{y}_i, \tag{3.112}$$

где матрицы **A** и **B** определены в (3.33). Она будет также иметь $n/2$ антисопряженно симметричных ортонормальных собственных векторов $\mathbf{w}i$, $i=1,\ldots,n/2$, с соответствующими собственными значениями λ_i вида

$$\mathbf{w}_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbf{z}_i \\ -\mathbf{J}\mathbf{z}_i^* \end{pmatrix}, \tag{3.113}$$

где $\mathbf{z}_i$ — ортонормальные собственные векторы матрицы $\mathbf{A}-\mathbf{JB}$, т. е.

$$(\mathbf{A}-\mathbf{JB})\,\mathbf{z}_i = \lambda_i \mathbf{z}_i. \tag{3.114}$$

Если квадратная центросимметричная матрица имеет *нечетную* размерность n и структуру, определяемую выражением (3.34),

то она будет иметь $(n+1)/2$ сопряженно симметричных ортонормальных собственных векторов $\mathbf{v}_i$, $i=1,\ldots,(n+1)/2$, с соответствующими собственными значениями σ_i

$$\mathbf{v}_i=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\mathbf{y}_i\\ 2\beta_i\\ \mathbf{J}\mathbf{y}_i^*\end{pmatrix}, \tag{3.115}$$

где вектор $\mathbf{y}_i$ и действительный скаляр β_i являются ортонормальными собственными векторами расширенной матрицы

$$\begin{pmatrix}\mathbf{A}+\mathbf{JB} & \sqrt{2}\,\mathbf{x}\\ \sqrt{2}\,\mathbf{x}^H & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{y}_i\\ \beta_i\end{pmatrix}=\sigma_i\begin{pmatrix}\mathbf{y}_i\\ \beta_i\end{pmatrix}, \tag{3.116}$$

и $(n-1)/2$ антисопряженно симметричных ортонормальных собственных векторов $\mathbf{w}_i$, $i=1,\ldots,(n-1)/2$, с соответствующими собственными значениями λ_i вида

$$\mathbf{w}_i=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\mathbf{z}_i\\ 0\\ -\mathbf{J}\mathbf{z}_i^*\end{pmatrix}, \tag{3.117}$$

где $\mathbf{z}_i$ — ортонормальные собственные векторы матрицы $\mathbf{A}-\mathbf{JB}$, т. е.

$$(\mathbf{A}-\mathbf{JB})\,\mathbf{z}_i=\lambda_i\mathbf{z}_i. \tag{3.118}$$

Доказательство приведенных выше соотношений основано на использовании того факта, что центросимметричная матрица $\mathbf{R}$ ортогонально подобна матрицам $\mathbf{A}-\mathbf{JB}$ и $\mathbf{A}+\mathbf{JB}$, т. е. если $\mathbf{R}_n$ имеет четную размерность, то ортогонально подобная матрица

$$\mathbf{Q}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\mathbf{I} & -\mathbf{J}\\ \mathbf{I} & \mathbf{J}\end{pmatrix},\quad \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T=\mathbf{I} \tag{3.119}$$

преобразует центросимметричную матрицу к виду

$$\mathbf{Q}\mathbf{R}\mathbf{Q}^H=\begin{pmatrix}\mathbf{A}-\mathbf{JB} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{A}+\mathbf{JB}\end{pmatrix}, \tag{3.120}$$

а если $\mathbf{R}_n$ имеет нечетную размерность, то ортогонально симметричная матрица

$$\mathbf{Q}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{0} & -\mathbf{J}\\ \mathbf{0} & \sqrt{2} & \mathbf{0}\\ \mathbf{I} & 0 & \mathbf{J}\end{pmatrix} \tag{3.121}$$

преобразует ее к виду

$$\mathbf{Q}\mathbf{R}\mathbf{Q}^H=\begin{pmatrix}\mathbf{A}-\mathbf{JB} & 0 & 0\\ \mathbf{0} & \alpha & \sqrt{2}\,\mathbf{x}^H\\ 0 & \sqrt{2}\,\mathbf{x} & \mathbf{A}+\mathbf{JB}\end{pmatrix}. \tag{3.122}$$

3.8. Тёплицева матрица

При рассмотрении различных методов спектрального оценивания нам часто придется иметь дело с тёплицевыми матрицами. Вследствие важности матриц этого типа данный раздел полностью посвящен подробному обсуждению вопросов, в основном касающихся вычисления обратной тёплицевой матрицы, решения тёплицевых линейных уравнений и анализу характеристических свойств тёплицевой матрицы. Особая структура тёплицевой матрицы приводит к весьма эффективным («быстрым») вычислительным алгоритмам для всех этих упомянутых случаев.

3.8.1. Обратная тёплицева матрица

Обращение квадратной неэрмитовой тёплицевой матрицы впервые рассматривалось в работе [22, 24]. В данной книге через $\mathbf{T}_M$ мы будем обозначать квадратную тёплицеву $(M+1)\times(M+1)$-матрицу, старший элемент которой равен $t[M]$:

$$\mathbf{T}_M=\begin{pmatrix} t[0] & t[-1] & \dots & t[-M] \\ t[1] & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t[-1] \\ t[M] & \dots & t[1] & t[0] \end{pmatrix}. \tag{3.123}$$

Заметим, что в общем случае $t[k]\neq t[-k]$, $k=1,\dots, M$. Пусть $\mathbf{U}_M$ — матрица, обратная матрице $\mathbf{T}_M$:

$$\mathbf{U}_M=\mathbf{T}_M^{-1}=\begin{pmatrix} u[0,\ 0] & \dots & u[0,\ M] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u[M,\ 0] & \dots & u[M,\ M] \end{pmatrix}. \tag{3.124}$$

Поскольку тёплицева матрица персимметрична, ее обратная матрица также должна быть персимметричной. Однако обратная матрица не является тёплицевой, хотя, как будет показано ниже, и образована из сумм произведений треугольных тёплицевых матриц.

Для того чтобы получить полную обратную матрицу $\mathbf{U}_M$, необходимо лишь решить уравнение

$$\begin{pmatrix} t[0] & t[-1] & \dots & t[-M] \\ t[1] & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t[-1] \\ t\ M & \dots & t[1] & t[0] \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u[0,\ 0] \\ u[1,\ 0] \\ \vdots \\ u[M,\ 0] \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.125}$$

относительно первого столбца этой обратной матрицы и уравнение

$$\begin{pmatrix} t[0] & t[-1] & \dots & t[-M] \\ t[1] & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t[-1] \\ t[M] & \dots & t[1] & t[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u[0, M] \\ \vdots \\ u[M-1, M] \\ u[M, M] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.126}$$

относительно последнего ее столбца. Ниже будет показано, что остальные элементы матрицы $\mathbf{U}_M$ можно определить, используя свойство персимметрии.

Для уравнений (3.125) и (3.126) можно получить другие представления, если поделить векторы с обеих сторон от знака равенства в (3.125) на $u[0, 0]$ (которое полагается отличным от нуля), использовать подстановку $a_M[k] = u[k, 0]/u[0, 0]$, $k = 1, \dots, M$, и положить $\rho_M{}^a = 1/u[0, 0]$, что дает

$$\begin{pmatrix} t[0] & t[-1] & \dots & t[-M] \\ t[1] & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t[-1] \\ t[M] & \dots & t[1] & t[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a_M[1] \\ \vdots \\ a_M[M] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_M^a \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3.127}$$

а также поделить векторы с обеих сторон от знака равенства в (3.126) на $u[M, M]$ (которое полагается отличным от нуля), использовать подстановку $b_M[k] = u[M-k, M]/u[M, M]$, $k = 1, \dots, M$, и положить $\rho_M{}^b = 1/u[M, M]$, что дает

$$\begin{pmatrix} t[0] & t[-1] & \dots & t[-M] \\ t[1] & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t[-1] \\ t[M] & \dots & t[1] & t[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_M[M] \\ \vdots \\ b_M[1] \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \rho_M^b \end{pmatrix}. \tag{3.128}$$

Поскольку матрица $\mathbf{U}_M$ персимметрична, то $u[0, 0] = u[M, M]$, и поэтому комплексные скаляры $\rho^a{}_M = \rho^b{}_M = \rho_M$. Уравнения (3.127) и (3.128) оказываются полезными при использовании их совместно с нормальными уравнениями авторегрессионного процесса; см. гл. 6 и 7.

Решить приведенные выше уравнения относительно $a_M[k]$ и $b_M[k]$ можно с помощью некоторой рекурсивной[1] алгоритмической процедуры, которая последовательно определяет значения

[1] Рекурсией называется способ задания функциональной зависимости, при котором значения определяемой зависимости выражаются известным образом через значения той же функциональной зависимости для меньших значений аргументов или индексов (см., например, [10*], с. 61). — *Прим. ред.*

этих коэффициентов при каждом значении m, начиная с $m=1$ и рекурсивно продолжая до $m=M$. Первый такой рекурсивный алгоритм был разработан Левинсоном [16] применительно к решению нормальных уравнений линейного предсказания стационарного процесса с дискретным временем. Затем он был переоткрыт Дербином [8] применительно к задаче построения авторегрессионной модели для заданной корреляционной последовательности. Основными компонентами, используемыми в этой рекурсии, являются следующие разбиения (блочное представление) матрицы, которые зависят от весьма специфической структуры тёплицевой матрицы:

$$\mathbf{T}_m = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_{m-1} & \mathbf{J}\mathbf{s}_m \\ \mathbf{r}_m^T\mathbf{J} & t[0] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t[0] & \mathbf{s}_m^T \\ \mathbf{r}_m & \mathbf{T}_{m-1} \end{pmatrix}, \tag{3.129}$$

где $(m-1)\times 1$-мерные вектор-столбцы $\mathbf{r}_m$ и $\mathbf{s}_m$ определяются выражениями

$$\mathbf{r}_m = \begin{pmatrix} t[1] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ t[m] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{s}_m = \begin{pmatrix} t[-1] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ t[-m] \end{pmatrix}, \tag{3.130}$$

а $\mathbf{J}$ — $(m-1)\times(m-1)$-матрица отражения. Согласно принципу индукции, предположим, что вектор, образованный из коэффициентов $a_m[k]$, может быть получен как линейная комбинация векторов, образованных из коэффициентов $a_{m-1}[k]$ и $b_{M-1}[k]$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ a_m[1] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_m[m-1] \\ a_m[m] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a_{m-1}[1] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m-1}[m-1] \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ b_{m-1}[m-1] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{m-1}[1] \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{3.131}$$

где векторы в правой части этого равенства дополнены нулями, а α — скаляр, подлежащий определению. Заметим, что $a_m[m]=\alpha$. Из уравнения (3.131) следует, что первый столбец обратной матрицы порядка m является линейной комбинацией первого и последнего столбцов обратной матрицы порядка $m-1$. Определяя вектор-столбцы

$$\mathbf{a}_m = \begin{pmatrix} a_m[1] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_m[m] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_m = \begin{pmatrix} b_m[1] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m[m] \end{pmatrix}, \tag{3.132}$$

можно представить уравнение (3.131) в более сжатой форме

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{a}_{m-1} \\ 0 \end{pmatrix} + a_m[m] \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{J}\mathbf{b}_{m-1} \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{3.133}$$

Для того чтобы определить скаляр $a_m[m]$, необходимо обе части уравнения (3.133) умножить слева на матрицу $\mathbf{T}_m$ и подставить соответствующие блочные представления матрицы $\mathbf{T}_m$ из (3.129), что дает

$$\mathbf{T}_m \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_{m-1} & \mathbf{J}\mathbf{s}_m \\ \mathbf{r}_m^T\mathbf{J} & t[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{a}_{m-1} \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_m[m] \begin{pmatrix} t[0] & \mathbf{s}_m^T \\ \mathbf{r}_m & \mathbf{T}_{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{J}\mathbf{b}_{m-1} \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{3.134}$$

Отсюда, используя (3.127) и (3.128), получаем

$$\begin{pmatrix} \rho_m \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{m-1} \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ \Delta_m \end{pmatrix} + a_m[m] \begin{pmatrix} \nabla_m \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ \rho_{m-1} \end{pmatrix}, \tag{3.135}$$

где

$$\Delta_m = \mathbf{r}_m^T\mathbf{J} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{a}_{m-1} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{m} t[k]\, a_{m-1}[m-k], \qquad a_{m-1}[0] = 1, \tag{3.136}$$

$$\nabla_m = \mathbf{s}_m^T \begin{pmatrix} \mathbf{J}\mathbf{b}_{m-1} \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{m} t[-k]\, b_{m-1}[m-k], \quad b_{m-1}[0] = 1. \tag{3.137}$$

Заметим, что Δ_m и ∇_m требуют значения коэффициентов только до порядка $m-1$. Для того чтобы обеспечить в (3.135) выполнение равенства, нижний элемент в правой части этого уравнения должен быть равен нулю:

$$\Delta_m + a_m[m]\,\rho_{m-1} = 0, \tag{3.138}$$

откуда

$$a_m[m] = -\Delta_m/\rho_{m-1}. \tag{3.139}$$

Верхний элемент в обеих частях уравнения (3.135) будет в этом случае равен

$$\rho_m = \rho_{m-1} + a_m[m]\,\nabla_m = \rho_{m-1} - \Delta_m\nabla_m/\rho_{m-1}. \tag{3.140}$$

По аналогии с выводом уравнения (3.133) можно также, ис-

пользуя принцип индукции, получить следующее уравнение для вектора $\mathbf{b}_m$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{b}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{b}_{m-1} \\ 0 \end{pmatrix} + b_m[m] \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{J}\mathbf{a}_m \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{3.141}$$

После умножения обеих частей этого уравнения слева на матрицу $\mathbf{T}_m$ получим

$$\begin{pmatrix} \rho_m \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{m-1} \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ \nabla_m \end{pmatrix} + b_m[m] \begin{pmatrix} \Delta_m \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ \rho_{m-1} \end{pmatrix}, \tag{3.142}$$

где Δ_m и ∇_m определены выше выражениями (3.136) и (3.137). И снова для выполнения равенства в уравнении (3.142) необходимо иметь

$$b_m[m] = -\nabla_m/\rho_{m-1}. \tag{3.143}$$

Определяя отсюда ∇_m и подставляя его в уравнение (3.140), получаем

$$\rho_m = \rho_{m-1} + a_m[m](-\rho_{m-1} b_m[m]) = \rho_{m-1}(1 - a_m[m]\, b_m[m]). \tag{3.144}$$

Заметим, что из (3.127) следует $t[0] = \rho_0$ при $m = 0$. Это значение используется для инициализации рекурсии. Комплексный скаляр ρ_m связан с определителем тёплицевой матрицы выражением

$$\det \mathbf{T}_m = \prod_{k=0}^{m} \rho_k = \rho_0^{m+1} \prod_{k=1}^{m} (1 - a_k[k]\, b_k[k])^{m+1-k}. \tag{3.145}$$

Для того чтобы показать это, используем выражения (3.52) и (3.144) и заметим, что следующее произведение матриц произвольного вида

$$\mathbf{T}_m \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{b}_m \\ \mathbf{0}_m^T & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_{m-1} & \mathbf{J}\mathbf{s}_m \\ \mathbf{r}_m^T \mathbf{J} & t[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{b}_m \\ \mathbf{0}_m^T & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_{m-1} & \mathbf{0}_m \\ \mathbf{r}_m^T \mathbf{J} & \rho_m \end{pmatrix} \tag{3.146}$$

имеет определитель $\det \mathbf{T}_m = \rho_m \det \mathbf{T}_{m-1}$, поскольку $\det \mathbf{AB} = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}$ (см. (3.52)). Применительно к элементам, определяемым выражениями (3.133) и (3.141), имеем следующие рекуррентные соотношения:

$$a_m[k] = a_{m-1}[k] + a_m[m]\, b_{m-1}[m-k], \tag{3.147}$$

$$b_m[k] = b_{m-1}[k] + b_m[m]\, a_{m-1}[m-k] \tag{3.148}$$

для $k=1,\ldots,m-1$. Таким образом, шесть уравнений (3.136), (3.137), (3.139), (3.140), (3.143) и (3.148) образуют замкнутую систему рекурсивных уравнений ($m=0,\ldots,M$), необходимых для определения векторов $\mathbf{a}_m$ и $\mathbf{b}_m$. По сути дела, это обеспечивает лишь получение первого и последнего столбцов матрицы, обратной тёплицевой. Заметим, что, для того чтобы эта рекурсия работала, подматрицы $\mathbf{T}_0, \mathbf{T}_1, \ldots, \mathbf{T}_M$ должны быть обратимыми ($\det \mathbf{T}_n=\rho_n\neq 0$). Количество вычислительных операций, требуемых для расчета обновлений векторов в соответствии с (3.133) и (3.141), а также внутренних (скалярных) произведений векторов (3.136) и (3.137) на каждом шаге вычислений пропорционально M, а полное количество вычислительных операций, требуемое этим алгоритмом, пропорционально M^2.

Для того чтобы вычислить остальные элементы обратной матрицы, заметим сначала, что матрица, обратная тёплицевой, может быть записана в виде следующего разбиения (т. е. в блочной форме):

$$\mathbf{U}_M=\frac{1}{\rho_M}\begin{pmatrix}1 & -\mathbf{b}_M^T\\ \mathbf{a}_M & \rho_M\mathbf{U}_{M-1}+\mathbf{a}_M\mathbf{b}_M^T\end{pmatrix}. \tag{3.149}$$

(Относительно доказательства см. разд. «Задачи» в конце главы.) Так как обратная матрица персимметрична, т. е.

$$\mathbf{J}\mathbf{U}_M^T\mathbf{J}=\mathbf{U}_M, \tag{3.150}$$

то уравнение (3.149) можно также записать в следующей форме:

$$\mathbf{U}_M=\frac{1}{\rho_M}\begin{pmatrix}\rho_M\mathbf{U}_{M-1}+\mathbf{J}\mathbf{b}_M\mathbf{a}_M^T\mathbf{J} & \mathbf{J}\mathbf{b}_M\\ \mathbf{a}_M^T\mathbf{J} & 1\end{pmatrix}. \tag{3.151}$$

Из (3.149) и (3.151) можно определить следующие соотношения для элементов $u_M[j,k]$ матрицы порядка M, обратной тёплицевой:

$$\begin{aligned}
u_M[0,\ 0]&=u_M[M,\ M]=1/\rho_m,\\
u_M[0,\ k]&=u_M[M-k,\ M]=b_M[k]/\rho_M,\quad 1\leqslant k\leqslant M,\\
u_M[j,\ 0]&=u_M[M,\ M-j]=a_M[j]/\rho_M,\quad 1\leqslant j\leqslant M,\\
u_M[j+1,\ k+1]&=u_{M-1}[j,\ k]+a_M[j+1]\,b_M[k+1]/\rho_M,\\
&\qquad 0\leqslant j,\ k\leqslant M-1,\\
u_M[j,\ k]&=u_{M-1}[j,\ k]+b_M[M-j]\,a_M[M-k]/\rho_M,\\
&\qquad 0\leqslant j,\ k\leqslant M-1.
\end{aligned}$$

Объединяя последние два из этих выражений, можно исключить элемент $u_{M-1}[j,k]$; в результате получаем выражение

$$u_M[j+1,\ k+1]=u_M[j,\ k]+\frac{1}{\rho_M}\times$$
$$\times(a_M[j+1]\,b_M[k+1]-b_M[M-j]\,a_M[M-k]), \tag{3.152}$$

которое справедливо при $0 \leqslant j, k \leqslant M-1$. Рекурсивное уравнение (3.152) позволяет вычислить все элементы обратной матрицы по известным лишь векторам $\mathbf{a}_M$ и $\mathbf{b}_M$. С помощью этого уравнения можно также получить следующее выражение:

$$\mathbf{T}_M^{-1} = \frac{1}{\rho_M}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_M[1] & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_M[M] & \dots & a_M[1] & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b_M[1] & \dots & b_M[M] \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b_M[1] \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} - \\ - \frac{1}{\rho_M}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_M[M] & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ b_M[1] & \dots & b_M[M] & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a_M[M] & \dots & a_M[1] \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_M[M] \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.153}$$

А это означает, что, хотя матрица, обратная тёплицевой матрице общего вида, и не является тёплицевой, ее все же можно разбить на сумму произведений верхней и нижней треугольных тёплицевых матриц.

Особый интерес представляет матрица, обратная эрмитовой тёплицевой матрице $\mathbf{H}_M$, которая в случае комплексных данных имеет следующий вид:

$$\mathbf{H}_M = \begin{pmatrix} t[0] & t^*[1] & \dots & t^*[M] \\ t[1] & t[0] & \dots & t^*[M-1] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t[M] & t[M-1] & \dots & t[0] \end{pmatrix}. \tag{3.154}$$

Заметим, что $\mathbf{H}^H = \mathbf{H}$. В данном случае векторы

$$\mathbf{s}_M = \mathbf{r}_M^*, \tag{3.155}$$

входящие в уравнение (3.129), связаны свойством комплексной симметрии, поэтому за счет упрощения рекурсий уменьшается количество вычислений, необходимых для определения обратной матрицы. В частности, нетрудно показать, что векторы

$$\mathbf{b}_M^* = \mathbf{a}_M \tag{3.156}$$

и скаляры

$$\nabla_M^* = \Delta_M \tag{3.157}$$

связаны комплексно-сопряженными соотношениями. Скалярный

член ρ_M, который теперь удовлетворяет уравнению

$$\rho_M = \rho_{M-1}(1 - |a_M[M]|^2), \tag{3.158}$$

является действительным и положительным. Это означает, что

$$\det \mathbf{H}_M = \rho_0 \prod_{k=1}^{M} (1 - |a_k[k]|^2) > 0. \tag{3.159}$$

За счет использования соотношений (3.156)—(3.158) количество вычислений, требуемых для определения вектора $\mathbf{a}_M$, в «эрмитовом» случае, уменьшается примерно вдвое по сравнению с «неэрмитовым» случаем. В приложении 3.8 приведена написанная на Фортране программа LEVINSON, предназначенная для вычисления коэффициентов $\mathbf{a}_M$ и скаляра ρ_M в случае эрмитовой тёплицевой матрицы.

Аналогично выражению (3.153) для обращения тёплицевой матрицы в общем случае можно записать следующее выражение для обращения эрмитовой тёплицевой матрицы:

$$\mathbf{H}_M^{-1} = \frac{1}{\rho_M} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_M[1] & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_M[M] & \dots & a_M[1] & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_M^*[1] & \dots & a_M^*[M] \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_M^*[1] \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} -$$

$$- \frac{1}{\rho_M} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_M^*[M] & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_M^*[1] & \dots & a_M^*[M] & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a_M[M] & \dots & a_M[1] \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_M[M] \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.160}$$

3.8.2. Разложение на тёплицевы треугольные матрицы

Алгоритм Левинсона позволяет также определять элементы, необходимые для эффективного разложения матрицы, обратной эрмитовой тёплицевой матрице, на треугольные матрицы по методу Холецкого [1, 21]. Поскольку процедура вычисления всех векторов решений низкого порядка $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_M$ является составной частью этого алгоритма, можно определить произведение матриц

$$\mathbf{T}_M \mathbf{A}_M = \mathbf{Q}_M, \tag{3.161}$$

где $\mathbf{T}_M$ — эрмитова тёплицева матрица, а $\mathbf{A}_M$ — нижнетреуголь-

ная матрица, составленная из векторов $\mathbf{a}_m$, $m=0,\ldots,M$:

$$\mathbf{A}_M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_M[1] & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ a_M[2] & a_{M-1}[1] & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_M[M-1] & a_{M-1}[M-2] & \ldots & 1 & 0 \\ a_M[M] & a_{M-1}[M-1] & \ldots & a_1[1] & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.162)$$

Используя уравнение (3.127), можно показать, что матрица $\mathbf{Q}_M$ в правой части уравнения (3.161) представляет собой треугольную матрицу следующего вида:

$$\mathbf{Q}_M=\begin{pmatrix} \rho_M & x & \ldots & x & x \\ 0 & \rho_{M-1} & \ldots & x & x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \rho_1 & x \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \rho_0 \end{pmatrix}, \quad (3.163)$$

где x обозначает ненулевые недиагональные элементы, конкретные значения которых нас сейчас не интересуют. Если обе части уравнения (3.161) умножить слева на матрицу, эрмитово сопряженную матрице $\mathbf{A}_M$, то получим

$$\mathbf{A}_M^H\mathbf{T}_M\mathbf{A}_M=\mathbf{A}_M^H\mathbf{Q}_M=\mathbf{P}_M, \quad (3.164)$$

где $\mathbf{P}_M$ — диагональная матрица следующего вида:

$$\mathbf{P}_M=\begin{pmatrix} \rho_M & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{M-1} & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \rho_1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \rho_0 \end{pmatrix}, \quad (3.165)$$

которая получается в результате перемножения двух верхнетреугольных матриц. Альтернативным разложению (3.161) является факторизация обратной эрмитовой тёплицевой матрицы посредством треугольных матриц следующего вида:

$$\mathbf{T}_M^{-1}=\mathbf{A}_M\mathbf{P}_M^{-1}\mathbf{A}_M^H. \quad (3.166)$$

3.8.3. Решение тёплицевых линейных уравнений

Алгоритм Левинсона лежит также в основе алгоритмов, предназначенных для решения систем линейных уравнений, содержащих тёплицеву и эрмитову тёплицеву матрицы. Рассмотрим общие тёплицевы линейные уравнения следующего вида:

$$\mathbf{T}_M \mathbf{x}_M = \mathbf{z}_M, \tag{3.167}$$

где $\mathbf{z}_M$ — известный $(M+1)$-вектор-столбец

$$\mathbf{z}_M = \begin{pmatrix} z[0] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z[M] \end{pmatrix} \tag{3.168}$$

и $\mathbf{x}_M$ — неизвестный $(M+1)$-мерный вектор-столбец

$$\mathbf{x}_M = \begin{pmatrix} x_M[0] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_M[M] \end{pmatrix}, \tag{3.169}$$

который необходимо определить. Решение для $\mathbf{x}_M$ может быть осуществлено на основе рекурсивного алгоритма Левинсона, если заметить, что вектор решения $\mathbf{x}_M$ порядка m для линейных уравнений

$$\mathbf{T}_m \mathbf{x}_m = \mathbf{z}_m, \tag{3.170}$$

где $m \leqslant M$, и $\mathbf{z}_m$ — $(m+1)$-мерный вектор, образованный из первых $m+1$ элементов вектора $\mathbf{z}_M$, можно рекурсивно вычислить по вектору решений $\mathbf{x}_{m-1}$ порядка $m-1$ с помощью следующего уравнения:

$$\mathbf{x}_m = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{m-1} \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_m \begin{pmatrix} \mathbf{J}\mathbf{b}_m \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{3.171}$$

где α — некоторый скаляр, который необходимо определить, а $\mathbf{b}_m$ — вектор, определенный в (3.132). Для того чтобы показать справедливость (3.171), просто умножим обе его стороны слева на матрицу $\mathbf{T}_m$ и используем разбиение (3.129), что дает

$$\mathbf{z}_m = \begin{pmatrix} \mathbf{z}_{m-1} \\ \beta_m \end{pmatrix} + \alpha_m \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ \rho_m \end{pmatrix}, \tag{3.172}$$

где

$$\beta_m = \mathbf{r}_m^T \mathbf{J} \mathbf{x}_{m-1} = \sum_{k=0}^{m-1} x[k]\, t[m-k]. \tag{3.173}$$

Указанное равенство выполняется при

$$\alpha_m = (z[m] - \beta_m)/\rho_m. \tag{3.174}$$

Таким образом, начиная с нулевого порядка.

$$t[0]\, x[0] = z[0], \tag{3.175}$$

вектор решения модифицируется в соответствии с уравнением (3.171) на каждом шаге алгоритма Левинсона для $1 \leqslant m \leqslant M$. В случае эрмитовой матрицы используется подстановка $\mathbf{a}_m^* = \mathbf{b}_m$. В приложении 3.Г приведена написанная на Фортране программа TOEPLITZ, предназначенная для решения системы линейных уравнений для случая комплексной тёплицевой матрицы общего вида. Этот алгоритм требует $3M^2$ операций умножения и сложения и памяти объемом $6M$ (или $5M$, если вектором решения является вектор в правой части уравнения). В приложении 3.Д приведена написанная на Фортране программа HERMTOEP, предназначенная для решения системы линейных уравнений для случая эрмитовой тёплицевой матрицы. В эрмитовом случае количество вычислительных операций уменьшается до $2M^2$, а объем памяти — до $4M$ (или до $3M$, если используются операции замещения). Цибенко [6] установил, что алгоритмы на основе алгоритма Левинсона обладают сравнимой численной устойчивостью с менее вычислительно-эффективным способом решения системы линейных уравнений на основе метода факторизации Холецкого. Ряд других вопросов, касающихся практической реализации численных методов решения систем линейных уравнений, обсуждается в работах [4, 9, 20, 13, 25, 26].

Хотя рекурсивный алгоритм Левинсона вполне относится к числу наиболее широко известных алгоритмов для быстрого численного решения тёплицевых линейных уравнений на ЭВМ или микропроцессорах, это ни в коем случае не означает, что он является единственным быстрым алгоритмом. С помощью сверхбольших интегральных схем (СБИС) был реализован алгоритм [14], основанный на алгоритме Шура[1]), который позволяет использовать преимущества систем обработки с параллельно работающими процессорами. Операции вычисления скалярного произведения в алгоритме Левинсона [уравнения (3.136),

[1]) Шуром доказана теорема, что для любой матрицы существует ортонормированный базис, в общем случае комплексный, при переходе к которому матрица будет верхнетреугольной (см., например, [6*], с. 63). — *Прим. ред.*

(3.137) и (3.171)] будут требовать $\log_2 M$ последовательных применений M параллельных процессоров, поскольку только половина операций сложения может быть выполнена на каждом шаге, что дает общую пропускную способность такой системы, равную $M \log_2 M$ рабочих циклов. Общее количество вычислительных операций, требуемых алгоритмом Шура, пропорционально M^2, однако его структура проще алгоритма Левинсона и позволяет устранить операции вычисления скалярного произведения и, следовательно, при использовании M параллельных процессоров требуется M рабочих циклов.

3.8.4. Характеристические свойства тёплицевых матриц

Несмотря на то что тёплицева матрица имеет весьма специфическую структуру, изучено не так уж много свойств собственных значений и собственных векторов конечномерных тёплицевых матриц [7, 17]. Пусть

$$A(z) = \sum_{k=0}^{M} v[k]\, z^{-k} \tag{3.176}$$

— характеристический полином, формируемый из элементов $v[k]$ собственного вектора тёплицевой $(M+1)\times(M+1)$-матрицы $\mathbf{T}_M$. Если $\mathbf{T}_M$ — эрмитова матрица, то она является частным случаем центросимметричной матрицы. Ее собственные векторы будут либо сопряженно симметричными, либо антисопряженно симметричными (см. подразд. 3.7.3), а это означает, что полином $A(z)$ будет также либо сопряженно симметричным, либо антисопряженно симметричным. Применительно к этому полиному можно показать, что такой симметрией обладают корни, являющиеся взаимообратными парами [17]. Таким образом, если z_i — один из корней, то корнем будет также и $1/z_i$. Если z_i лежит внутри единичной окружности, то $1/z_i$ будет расположен вне ее. Если z_i лежит на единичной окружности, то $1/z_i = z_i^*$ будет его комплексно-сопряженным корнем (и также будет лежать на единичной окружности). Если коэффициенты полинома $A(z)$ действительны, то комплексные нули являются комплексно-сопряженными парами.

Если *максимальное* собственное значение матрицы $\mathbf{T}_M$ значительно отличается от других ее собственных значений, то можно показать (см. разд. «Задачи»), что корни полинома, образованного из собственного вектора, соответствующего максимальному собственному значению, лежат на единичной окружности. То же справедливо и для собственного вектора, соответствующего минимальному собственному значению, если оно также существенно отличается от других собственных значений. Корни

полинома, образованного из остальных собственных векторов, могут лежать, а могут и не лежать на единичной окружности; то же справедливо, если максимальное или минимальное собственные значения не единственны.

Из выражений (3.79) и (3.145) получаем, что собственные значения тёплицевой матрицы λ_k и элементы ρ_k связаны соотношением

$$\det \mathbf{T}_M = \prod_{k=0}^{M} \rho_k = \prod_{k=0}^{M} \lambda_k. \tag{3.177}$$

След тёплицевой $(M+1)\times(M+1)$-матрицы $\mathbf{T}_M$ просто равен $(M+1)t[0]$. Используя далее (3.81), получаем

$$t[0] = \frac{1}{M+1} \sum_{k=0}^{M} \lambda_k. \tag{3.178}$$

Как будет показано в гл. 6, элемент $t[0]$ соответствует члену автокорреляционной последовательности некоторого случайного процесса с нулевым временным сдвигом, т. е. полной мощности этого процесса. Таким образом, среднее собственных значений характеризует полную мощность процесса.

Можно определить асимптотическое поведение собственных значений тёплицевых матриц, связав их с собственными значениями некоторой циркулянтной матрицы, для которой известна аналитическая структура собственных значений. Например, трехдиагональную тёплицеву (4×4)-матрицу

$$\begin{pmatrix} t[0] & t[-1] & 0 & 0 \\ t[1] & t[0] & t[-1] & 0 \\ 0 & t[1] & t[0] & t[-1] \\ 0 & 0 & t[1] & t[0] \end{pmatrix} \tag{3.179}$$

можно аппроксимировать циркулянтной матрицей

$$\begin{pmatrix} t[0] & t[-1] & 0 & t[1] \\ t[1] & t[0] & t[-1] & 0 \\ 0 & t[1] & t[0] & t[-1] \\ t[-1] & 0 & t[1] & t[0] \end{pmatrix}, \tag{3.180}$$

просто добавляя соответствующие элементы в противоположных углах. Поскольку размер (4×4)-матрицы можно увеличить до $(n\times n)$, то две матрицы становятся ближе друг к другу в том смысле, что у них совпадает n^2 элементов во всех позициях, кроме двух угловых. При $n\to\infty$ матрицы становятся асимптотически эквивалентными. Более подробные сведения об асимптотическом поведении собственных значений тёплицевых матриц со структурой такого вида можно найти в работах [11, 12].

В последующих главах книги описано несколько методов спектрального оценивания, которые требуют вычисления минимального или максимального собственных значений тёплицевой матрицы и связанных с ними собственных векторов. Для определения этих собственных значений можно применить классический метод степеней, при этом за счет использования свойств тёплицевой матрицы удается несколько снизить вычислительные затраты. Собственный вектор, связанный с минимальным собственным значением, является приближением некоторой последовательности векторов $\mathbf{v}(k)$, которые ищутся как решения уравнения

$$\mathbf{v}(k+1)=\mathbf{T}^{-1}\mathbf{v}(k), \quad k=0,\ 1,\ \ldots, \tag{3.181}$$

начиная с некоторого начального приближенного значения, выбранного в качестве $\mathbf{v}(0)$. Уравнение (3.181) можно переписать в виде

$$\mathbf{T}\mathbf{v}(k+1)=\mathbf{v}(k), \tag{3.182}$$

из которого получают систему линейных уравнений для неизвестного вектора $\mathbf{v}(k+1)$. Для решения уравнения (3.182) можно использовать программу, помещенную в приложении 3.В (в случае эрмитовой тёплицевой матрицы) или в приложении 3.Г (в случае неэрмитовой тёплицевой матрицы). Эти программы написаны на Фортране, и требуемое ими количество вычислений на одну итерацию пропорционально M^2. После каждой итерации уравнения (3.182) вектор решения $\mathbf{v}(k)$ нормируется относительно корня квадратного из его величины $\mathbf{v}^H(k)\mathbf{v}(k)$, с тем чтобы получить вектор единичной длины. Обычно достаточно всего нескольких итераций, для того чтобы этот вектор сошелся к собственному вектору, соответствующему минимальному собственному значению, которое определяется отношением Рэлея:

$$\lambda_{\min}=\frac{\mathbf{v}^H(k)\,\mathbf{T}\mathbf{v}(k)}{\mathbf{v}^H(k)\,\mathbf{v}(k)}. \tag{3.183}$$

Сходимость может оказаться невысокой, если $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}\gg 1$. В приложении 3.Е приведена написанная на Фортране программа MINEIGVAL, предназначенная для определения минимального собственного значения эрмитовой тёплицевой матрицы с использованием этого подхода.

Аналогичным образом можно найти максимальное собственное значение, итерируя матричное уравнение

$$\mathbf{T}\mathbf{v}(k)=\mathbf{v}(k+1) \tag{3.184}$$

до тех пор, пока не будет достигнута сходимость. Все, что здесь требуется, — это простое умножение матрицы на вектор, поэтому вычислительные затраты будут пропорциональны M^2.

Литература

[1] *Burg J. P.* A New Analysis Technique for Time Series Analisis. NATO Advanced Study Institute on Signal Processing with Emphasis on Underwater Acoustics, Enschede, The Netherlands, August 1968. См. также сб.: Modern Spectrum Analisis, D. G. Childers, ed., IEEE Press, New York, 1978, p. 48.

[2] *Businger P. A., Golub G. H.* Singular Value Decomposition of a Complex Matrix. Commun. ACM, vol. 12, pp. 564—565, 1969.

[3] *Cantoni A., Butler P.* Eigenvalues and Eigenvectors of Symmetric Centrosymmetric Matrices. Linear Algebra and Its Applications, vol. 13, pp. 275—288, March 1976.

[4] *Carayannis G., Kalouptsidis N., Manolakis D. G.* Fast Recursive Algorithms for a Class of Linear Equations. IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., vol. ASSP-30, pp. 227—239, April 1982.

[5] *Cornyn J. J., Jr.* Direct Methods for Solving Systems of Linear Equations Involving Toeplitz or Hankel Matrices. Naval Research Laboratory (NRL) Memorandum Report 2920, October 1974 (availible from NTIS, AD/A-002 931).

[6] *Cybenco G. G.* The Numerical Stability of the Levinson—Durbin Algorithm for Toeplitz Systems of Equations. SIAM J. Sci. Stat. Comput., vol. 1, pp. 303—319, September 1980.

[7] *Datta L., Morgera S. D.* Comments and Corrections «On the Eigenvectors of Symmetric Toeplitz Matrices» IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., vol. ASSP-32, pp. 440—441, April 1984; reply by Makhoul, vol. ASSP-33, pp. 737—738, June 1985.

[8] *Durbin J.* The Fitting of Time Series Models. Rev. Inst. Int. Stat., vol. 28, pp. 233—244, 1960.

[9] *Farden D. C.* Solution of a Toeplitz Set of Linear Equations. IEEE Trans. Antennas Propag., vol. AP-24, pp. 906—907, November 1976.

[10] *Forsythe G. E., Malcolm M. A., Moler C. B.* Computer Methods for Mathematical Computations. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1977.

[11] *Gray R. M.* On the Asymptotic Eigenvalue Distribution of Toeplitz Matrices. IEEE Trans. Inf. Theory, vol. IT-18, pp. 725—730, November 1972.

[12] *Grenander O., Szegö G.* Toeplitz Forms and Their Applications. University of California Press, Berkeley, Calif., 1958. [Имеется русский перевод: *Гренандер У., Сегё Г.* Тёплицевы формы и их приложения. — М.: ИЛ, 1961.]

[13] *Klema V. C., Laub A. J.* The Singular Value Decomposition: Its Computation and Some Applications. IEEE Trans. Autom. Control, vol. AC-25, pp. 164—176, April 1980.

[14] *Kung Sun-Yuan, Yu Hen Hu.* A Highly Concurrent Algorithm and Pipelined Architecture for Solving Toeplitz Systems. IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., vol. ASSP-31, pp. 66—75, February 1983.

[15] *Lawson C. L., Hanson R. J.* Solving Least Squares Problems. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1974.

[16] *Levinson N.* The Wiener RMS (Root Mean Square) Error Criterion in Filter Design and Prediction. J. Math. Phys., vol. 25, pp. 261—278, January 1947.

[17] *Makhoul J.* On the Eigenvectors of Symmetric Toeplitz Matrices. IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., vol. ASSP-29, pp. 868—872, August 1981.

[18] *McClellan J. H., Parks T. W.* Eigenvalue and Eigenvector Decomposition of the Discrete Fourier Transform. IEEE Trans. Audio Electroacoust., vol. AU-20, pp. 66—74, March 1972. See also comments in vol. AU-21, p. 65, February 1973.

[19] *Noble B., Daniell J. W.* Applied Linear Algebra, 2nd ed. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1977.

[20] *Roebuck P. A., Barnett S.* A Survey of Toeplitz and Related Matrices. Int. J. Syst. Scie., vol. 9, pp. 921—934. 1978.

[21] *Therrien C. W.* On the Relation between Triangular Matrix Decomposition and Linear Prediction. Proc. IEEE, vol. 71, pp. 1459—1460, December 1983.
[22] *Trench W. F.* An Algorithm for the Inversion of Finite Toeplitz Matrices. J. Soc. Ind. Appl. Math., vol. 12, pp. 515—522, September 1964.
[23] *Yarlagadda R., Suresh Babu B. N.* A Note on the Application of FFT to the Solution of a System of Toeplitz Normal Equations. IEEE Trans. Circuits Syst., vol. CAS-27, pp. 151—154, February 1980.
[24] *Zohar Sh.* Toeplitz Matrix Inversion: The Algorithm of W. F. Trench. J. Assoc. Comput. Mach., vol. 16, pp. 592—601, October 1969.
[25] *Zohar Sh.* The Solution of a Toeplitz Set of Linear Equations. J. Assoc. Comput. Mach., vol. 21, pp. 272—276, April 1974.
[26] *Zohar Sh.* FORTRAN Subroutines for the Solution of Toeplitz Sets of Linear Equations. IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., vol. ASSP-27, pp. 656—658, December 1979. See also corrections in: vol. ASSP-28, p. 601, October 1980; vol. ASSP-29, p. 1212, December 1981.

Задачи

1. Доказать, что матрица, обладающая свойствами симметрии и персимметрии, обладает также и свойством центральной симметрии и что обратное утверждение неверно. Построить такую матрицу. Доказать также, что матрица, обладающая любыми двумя из свойств симметрии, персимметрии и центральной симметрии, обладает и третьим из этих свойств.
2. Доказать, что $(\mathbf{AB})^H = \mathbf{B}^H\mathbf{A}^H$.
3. Записать выражение для внутреннего произведения блочных векторов.
4. Показать, что если $\mathbf{H}$ — матрица Ганкеля, то $\mathbf{JH}$ и $\mathbf{HJ}$ — тёплицевы матрицы.
5. Доказать, что если $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{AB}$ — невырожденные матрицы, то $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.
6. Доказать, что матрица, обратная диагональной матрице, также диагональна и имеет элементы вида $1/d[i]$.
7. Показать, что если $\mathbf{A}$ — квадратная $(n\times n)$-матрица, а $\mathbf{x}$ — $(n\times 1)$-вектор-столбец, то $\mathbf{x}^H\mathbf{A}\mathbf{x}$ — неотрицательный скаляр.
8. Доказать, что $(\mathbf{A}^H)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^H$.
9. Доказать, что если $\mathbf{A}$ — симметричная матрица, то $\mathbf{A}^{-1}$ — симметричная матрица (если она, конечно, существует). Доказать, что если $\mathbf{A}$ — персимметричная матрица, то и $\mathbf{A}^{-1}$ — персимметричная матрица. Доказать, что если $\mathbf{A}$ — тёплицева матрица, то $\mathbf{A}^{-1}$ — персимметричная матрица. Доказать, что если $\mathbf{A}$ — матрица Ганкеля, то $\mathbf{A}^{-1}$ — симметричная матрица. Доказать, что если $\mathbf{A}$ — центросимметричная матрица, то и $\mathbf{A}^{-1}$ — центросимметричная матрица.
10. Показать, что верхнетреугольная матрица $\mathbf{A}$ с ненулевыми диагональными элементами имеет линейно-независимые вектор-столбцы, а следовательно, является невырожденной матрицей.
11. Показать, что если ранг матрицы $\mathbf{A}$ равен n, то ранг матрицы $\mathbf{A}^H$ также равен n.
12. Показать, что определитель квадратной матрицы Вандермонда

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_1 & \dots & x_n \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ x_1^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

определяется выражением

$$\det \mathbf{V} = \prod_{i \neq j} (x_j - x_i).$$

13. Пусть симметричная трехдиагональная тёплицева $(n \times n)$-матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} b & a & 0 & \dots & 0 \\ a & b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & a & \ddots & \ddots & a \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a & b \end{pmatrix}.$$

Показать, что она имеет собственные значения $\lambda_k = a + 2b \cos(k\pi/n+1)$, $k = 1, \dots, n$, и соответствующие им собственные векторы вида

$$\mathbf{v}_k = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \begin{pmatrix} \sin(k\pi/n+1) \\ \vdots \\ \sin(kn\pi/n+1) \end{pmatrix}.$$

14. Показать, как с помощью трех операций БПФ можно получить вектор решений **x** линейного уравнения $\mathbf{Cx} = \mathbf{b}$, где **C** — циркулянтная матрица. Как осуществить переход к левоциркулянтной или правоциркулянтной матрицам при использовании прямого или обратного БПФ?
15. Показать, что если **C** — центросимметричная матрица, то $\mathbf{JC} = \mathbf{CJ}$.
16. Доказать справедливость соотношения (3.149). [Подсказка: использовать разбиения (блочные представления)]

$$\mathbf{T}_M = \begin{pmatrix} t[0] & \mathbf{s}_M^T \\ \mathbf{r}_M & \mathbf{T}_{M-1} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{T}_M^{-1} = \mathbf{U}_M = \begin{pmatrix} h & \mathbf{g}^T \\ \mathbf{F} & \mathbf{E} \end{pmatrix},$$

а затем воспользоваться леммой об обращении матрицы, см. выражение (3.50). Заметим, что $h = u[0, 0] = 1/\rho_M$.
17. Исследовать свойства корней полинома для случая эрмитовой тёплицевой матрицы. Показать, например, что характеристический полином обладает свойством комплексно-сопряженной симметрии и что его корни имеют единичные модули.
18. Модифицировать подпрограммы TOEPLITZ и HERMTOEP таким образом, чтобы запись решения производилась в массив Z, т. е. чтобы решение возвращалось в массив Z, исключая тем самым необходимость обращения к массиву X.

19. Было показано, что алгоритм Левинсона позволяет решить уравнения вида

$$\mathbf{T}_M \begin{pmatrix} \mathbf{J}\mathbf{b}_M \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_M \\ \rho_M \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{T}_M \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{a}_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_M \\ \mathbf{0}_M \end{pmatrix}.$$

Используя выражение (3.129), показать справедливость следующих соотношений:

$$t[0] + \mathbf{s}_M^T \mathbf{a}_M = t[0] + \mathbf{r}_M^T \mathbf{b}_M = \rho_M,$$

$$\mathbf{r}_M + \mathbf{T}_{M-1}\mathbf{a}_M = \mathbf{J}\mathbf{s}_M + \mathbf{T}_{M-1}\mathbf{J}\mathbf{b}_M = \mathbf{0}_M.$$

20. Задача повышенной трудности: показать, как можно построить алгоритм обращения для треугольных тёплицевых матриц, требующий порядка $O(n \log n)$ вычислительных операций. Показать сначала, что умножение нижнетреугольной (или верхнетреугольной) тёплицевой матрицы на вектор эквивалентно вычислению свертки (или корреляции) последовательностей, образованных из первых столбцов (или строк) этой матрицы и вектора, и что оно может быть выполнено с помощью БПФ.

Приложение 3.А. Программа решения эрмитовых линейных уравнений методом Холецкого

Метод Холецкого, предназначенный для решения эрмитовой системы линейных уравнений, был кратко описан в разд. 3.6. Число требуемых им вычислительных операций пропорционально M^3, где M — размерность матрицы. С помощью процедуры, описанной в приложении IV, помещенном в конце книги, приведенная ниже программа может быть преобразована для обработки действительнозначных данных. В программе используется процедура замены для записи вычисляемых значений в массив B, в результате чего исходная запись входных данных в этом массиве стирается. Для работы программы необходимо хранить только половину элементов матрицы $\mathbf{A}$, элементы другой ее половины определяются по свойству эрмитовой симметрии.

Следующий контрольный пример, в котором для комплексной величины $x+jy$ использовано обозначение $(x; y)$:

$$\begin{bmatrix} (2{,}0;\ 0{,}0) & (0{,}5;\ -0{,}5) & (-0{,}2;\ 0{,}1) \\ (0{,}5;\ 0{,}5) & (1{,}0;\ 0{,}0) & (0{,}3;\ -0{,}2) \\ (-0{,}2;\ -0{,}1) & (0{,}3;\ 0{,}2) & (0{,}5;\ 0{,}0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[1] \\ x[2] \\ x[3] \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (1{,}0;\ 3{,}0) \\ (2{,}0;\ -1{,}0) \\ (0{,}5;\ 0{,}8) \end{bmatrix}$$

будет давать решение

$$\begin{bmatrix} (0{,}9595;\ 5{,}2566) \\ (4{,}4189;\ -7{,}0405) \\ (-5{,}1351;\ 6{,}3514) \end{bmatrix},$$

записываемое в массив *B*. Параметр *EPS* был установлен равным 10^{-15}.

```
      Подпрограмма CHOLESKY (M, EPS, A, B, ISTAT)
C     Эта программа предназначена для решения систем комплексных линей-
C     ных уравнений с симметричной эрмитовой матрицей методом разложе-
C     ния Холецкого. Значения вычисляемого решения постепенно замещают
C     исходное содержимое массива B. Содержимое массива A стирается после
C     вызова этой программы.
C
C                              AX=B
C
C     Входные параметры:
C
C       M      — порядок матрицы (число линейных уравнений).
C       EPS    — «эпсилон» (величина для проверки потери значимости; зави-
C                сит от точности используемой ЭВМ; рекомендуется исполь-
C                зовать значение 1.E-15).
C       A      — массив комплексных элементов матрицы, записываемый
C                в виде столбцов (т. е. A(1, 1) записывается в память как
C                A(1), A(1, 2) — как A(2), A(2, 2) — как A(3) и т. д. Хранит-
C                ся только верхнетреугольная часть матрицы A, поскольку
C                другая часть определяется по свойству эрмитовой симмет-
C                рии).
C       B      — массив комплексных элементов вектора в правой части
C                уравнения.
C
C     Выходные параметры:
C       B      — комплексный вектор решения X, записываемый в память
C                вместо вектора B.
C       ISTAT  — цифровой индикатор состояния в момент выхода из про-
C                граммы:
C                0 для нормального выхода,
C                -1, если матрица вырожденна,
C                +K, если утеряна численная значимость или если обнаруже-
C                на неположительно определенная матрица на шаге K.
C
C     Примечание:
C       Размеры .GE. M(M+1)/2 внешнего массива A и размеры .GE. M мас-
C       сива B должны устанавливаться в вызывающей программе.
C
      COMPLEX A(1), B(1), SUM
C
C     Разложение на треугольную и диагональную форму  ! (3.76)
C
      ISTAT=0
      KPIV=0
      DO 100 K=1,M
         KPIV=KPIV+K
         IND=KPIV
```

```
      LEND=K-1
      TINY=ABS(EPS*REAL(A(KPIV)))
      DO 100 I=K, M
         SUM=(0,0.)
         IF (LEND .EQ. 0) GO TO 40
         LPIV=KPIV
         DO 30 L=1, LEND
            LPIV=LPIV+L-K-1
30          SUM=SUM+REAL(A(LPIV))*A(IND-L)*
                                          CONJG(A(KPIV-L))
40       SUM=A(IND)-SUM
         IF (I .NE. K) GO TO 80
C
C  Проверка на отрицательный центральный элемент и потерю значимости
         IF(REAL(SUM) .GT. TINY) GO TO 90
         IF(REAL(SUM) .GT. 0.) GO TO 70
         ISTAT=-1
         RETURN
70       IF (ISTAT .GT. 0) GO TO 90
         ISTAT=K
90       A(KPIV)=CMPLX(REAL(SUM),0.)
         DPIV=1./REAL(SUM)
         GO TO 100
80       A(IND)=SUM*DPIV
100      IND=IND+I
C
C  Обратный расчет с использованием вектор-столбца промежуточного ре-
C  шения                                                    ! (3.74)
C
      KPIV=1
      DO 200 K=2,M
         KPIV=KPIV+K
         SUM=B(K)
         DO 210 J=1,K-1
210         SUM=SUM-B(K-J)*CONJG(A(KPIV-J))
200      B(K)=SUM
C
C  Обратный расчет с использованием вектор-столбца окончательного реше-
C  ния                                                      ! (3.75)
C
      KPIV=(M*(M+1))/2
      B(M)=B(M)/REAL(A(KPIV))
      DO 300 K=M,2, -1
         KPIV=KPIV-K
         IND=KPIV
         SUM=B(K-1)/REAL(A(KPIV))
         DO 310 J=K,M
            IND=IND+(J-1)
310         SUM=SUM-B(J)*A(IND)
300      B(K-1)=SUM
      RETURN
      END
```

Приложение 3.Б. Программа для определения разложения по комплексным сингулярным числам

Подпрограмма CSVD предназначена для определения разложения по сингулярным числам комплексной матрицы **A**, состоящей из M строк и N столбцов, где $M \geqslant N$. Максимально возможная размерность матрицы **A** устанавливается параметрами *MMAX* и *NMAX*. N действительных сингулярных чисел ($\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \ldots \geqslant \sigma_N$) записываются в память в порядке уменьшения их значений в виде вектора **S**. Подпрограмма позволяет также определять первые *NV* столбцов комплексной унитарной ($N \times N$)-матрицы **V** и первые *NU* столбцов комплексной унитарной ($M \times M$)-матрицы **U**, такой что $\|\mathbf{A}-\mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^H\|_2$ пренебрежимо мало по сравнению с $\|\mathbf{A}\|_2$, где $\boldsymbol{\Sigma}=\mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_N)$ — диагональная матрица из сингулярных чисел. Единственные допустимые значения для *NU* — это 0, N и M. Единственные допустимые значения для *NU* — это 0 и N. При желании к *IP* векторам в столбцах массива A с $(N+1)$-го по $(N+IP)$-й может быть применено преобразование $\mathbf{U}^H$ (предполагается, что *IP* отлично от нуля). Эта процедура может быть использована для отыскания решения по методу наименьших квадратов с минимальным евклидовым расстоянием (псевдообратного решения) для переопределенной системы $\mathbf{AX} \approx \mathbf{B}$. Псевдообратное решение будет определяться при вызове подпрограммы CSVD с $NV=N$ и с *IP* столбцами матрицы **B**, записанными в столбцах массива A с номерами с $N+1$ по $N+IP$. Эффективный ранг r матрицы **A** может быть оценен по сингулярным числам в векторе **S**. Пренебрежимо малые сингулярные числа с номерами с $r+1$ по N обнуляются, и решение будет иметь форму $\mathbf{X}=\mathbf{V}\boldsymbol{\Sigma}^+\mathbf{U}^H\mathbf{B}$, где $\boldsymbol{\Sigma}^+=\mathrm{diag}(\sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-1}, \ldots, \sigma_r^{-1}, 0, \ldots, 0)$, а $\mathbf{U}^H\mathbf{B}$ ставится подпрограммой CSVD на место каждого столбца матрицы **B**, записанного в столбцах массива A с номерами с $N+1$ по $N+IP$.

Константы *ETA* и *TOL*, используемые этой программой, зависят от применяемой ЭВМ. *ETA* — относительная машинная точность, а *TOL* — наименьшее нормированное положительное число, делящееся на *ETA*. Значения этих констант в программе выбраны применительно к ЭВМ типа VAX. Размеры внешних массивов B, C и T выбираются в предположении, что $N \leqslant 100$.

Для контрольной матрицы

$$\mathbf{A}=\begin{vmatrix} (2{,}8;\ -0{,}4) & (1{,}6;\ 0{,}0) \\ (3{,}6;\ -1{,}2) & (2{,}4;\ -1{,}8) \\ (2{,}0;\ 0{,}4) & (2{,}8;\ -4{,}4) \end{vmatrix},$$

где для комплексной величины $x+jy$ использовано обозначение $(x;\ y)$, при $NU=3$, $NV=2$ и $IP=0$ получаем следующие значе-

ния, которые будут записаны в массивах S, U и V:

$$S = \begin{bmatrix} 7{,}5171 \\ 2{,}9687 \end{bmatrix},$$

$$V = \begin{bmatrix} (0{,}61000;\ 0{,}0) & (0{,}79240;\ 0{,}0) \\ (0{,}65719;\ 0{,}44271) & (-0{,}50592;\ -0{,}34081) \end{bmatrix},$$

$$U =$$

$$\begin{matrix} (0{,}36710;\ 0{,}06177) & (0{,}47471;\ -0{,}29045) & (0{,}02914;\ 0{,}74220) \\ (0{,}60797;\ -0{,}11340) & (0{,}34527;\ -0{,}28907) & (-0{,}18073;\ -0{,}61813) \\ (0{,}66622;\ -0{,}18731) & (-0{,}44845;\ 0{,}53517) & (0{,}02582;\ 0{,}18132) \end{matrix}.$$

```
      Подпрограмма CSVD (A, MMAX, NMAX, M, N, IP, NU, NV, S, U, V)
C
C     Разложение по сингулярным числам комплексной (M×N)-матрицы A, где
C     M .GT. N. Сингулярные числа записываются в виде вектора S. Вычисля-
C     ются также первые NU столбцов унитарной (M×M)-матрицы U и первые
C     NV столбцов унитарной (N×N)-матрицы V, которые минимизируют опре-
C     делитель det(A−USV*); см. статью Бусингера и Голуба «Разложение
C     комплексных матриц по сингулярным числам» [2].
C     Помещенный ниже алгоритм печатается с разрешения Американской ас-
C     социации по вычислительной технике (ACM); © ACM, 1969.
C
      COMPLEX A(MMAX,NMAX), U(MMAX,MMAX), V(NMAX,NMAX),
                                                    Q, R
      REAL S(NMAX), B(100),C(100),T(100)
      DATA ETA, TOL/1.2E−7, 2.4E−32/
      NP=N+IP
      N1=N+1
C     Редукция (понижение порядка) Хаусхолдера
      C(1)=0.
      K=1
10    K1=K+1
C     Исключение элементов A(I,K), I=K+1, ..., M
      Z=0.
      DO 20 I=K,M
20       Z=Z+REAL(A(I,K))**2+AIMAG(A(I,K))**2
      B(K)=0.
      IF (Z .LE. TOL) GO TO 70
      Z=SQRT(Z)
      B(K)=Z
      W=CABS(A(K,K))
      Q=(1.,0.)
      IF (W .NE. 0.) Q=A(K,K)/W
      A(K,K)=Q*(Z+W)
      IF (K .EQ. NP) GO TO 70
      DO 50 J=K1,NP
         Q=(0.,0.)
         DO 30 I=K,M
30          Q=Q+CONJG(A(I,K))*A(I,J)
         Q=Q/(Z*(Z+W))
         DO 40 I=K,M
```

```
40            A(I,J)=A(I,J)-Q*A(I,K)
50          CONTINUE
C     Преобразование фазы
        Q=-CONJG(A(K,K))/CABS(A(K,K))
        DO 60 J=K1,NP
60          A(K,J)=Q*A(K,J)
C     Исключение элементов A(K,J), J=K+2, ..., N
70      IF(K .EQ. N) GO TO 140
        Z=0.
        DO 80 J=K1,N
80          Z=Z+REAL(A(K,J))**2+AIMAG(A(K,J)) **2
        C(K1)=0.
        IF (Z .LE. TOL) GO TO 130
        Z=SQRT(Z)
        C(K1)=Z
        W=CABS(A(K,K1))
        Q=(1.,0.)
        IF (W .NE. 0.) Q=A(K, K1)/W
        A(K,K1)=Q*(Z+W)
        DO 110 I=K1,M
          Q=(0.,0.)
          DO 90 J=K1,N
90          Q=Q+CONJG(A(K,J))*A(I,J)
          Q=Q/(Z*(Z+W))
          DO 100 J=K1,N
100         A(I,J)=A(I,J)-Q*A(K,J)
110       CONTINUE
C     Преобразование фазы
        Q=-CONJG(A(K,K1))/CABS(A(K,K1))
        DO 120 I=K1,M
120         A(I,K1)=A(I,K1)*Q
130     K=K1
        GO TO 10
C     Допуск для пренебрежимо малых элементов
140     EPS=0.
        DO 150 K=1,N
          S(K)=B(K)
          T(K)=C(K)
150     EPS=AMAX1(EPS,S(K)+T(K))
        EPS=EPS*ETA
C     Инициализация вычислений U и V
        IF (NU .EQ. 0) GO TO 180
        DO 170 J=1,NU
          DO 160 I=1,M
160         U(I,J)=(0.,0.)
170       U(J,J)=(1.,0.)
180     IF (NV .EQ. 0) GO TO 210
        DO 200 J=1,NV
          DO 190 I=1,N
190         V(I,J)=(0.,0.)
200       V(J,J)=(1.,0.)
C     QR-диагонализация
210   DO 380 KK=1,N
        K=N1-KK
C     Проверка на расщепление
220       DO 230 LL=1,K
            L=K+1-LL
```

```
            IF(ABS(T(L)) .LE. EPS) GO TO 290
            IF(ABS(S(L-1)) .LE. EPS) GO TO 240
230         CONTINUE
C   Сокращение B(L)
240         CS=0.
            SN=1.
            L1=L-1
            DO 280 I=L,K
               F=SN*T(I)
               T(I)=CS*T(I)
               IF(ABS(F) .LE. EPS) GO TO 290
               H=S(I)
               W=SQRT(F*F+H*H)
               S(I)=W
               CS=H/W
               SN=-F/W
               IF (NU .EQ. 0) GO TO 260
               DO 250 J=1,N
                  X=REAL(U(J,L1))
                  Y=REAL(U(J,I))
                  U(J,L1)=CMPLX(X*CS+Y*SN,0.)
250               U(J,I)=CMPLX(Y*CS-X*SN,0.)
260            IF(NP .EQ. N) GO TO 280
               DO 270 J=N1,NP
                  Q=A(L1,J)
                  R=A(I,J)
                  A(L1,J)=Q*CS+R*SN
270               A(I,J)=R*CS-Q*SN
280            CONTINUE
C   Проверка сходимости
290         W=S(K)
            IF(L .EQ. K) GO TO 360
C   Сдвиг начала координат
            X=S(L)
            Y=S(K-1)
            G=T(K-1)
            H=T(K)
            F=((Y-W)*(Y+W)+(G-H)*(G+H))/(2.*H*Y)
            G=SQRT(F*F+1.)
            IF (F .LT. 0.)  G=-G
            F=((X-W)*(X+W)+(Y/(F+G)-H)*H)/X
C   QR-шаг
            CS=1.
            SN=1.
            L1=L+1
            DO 350 I=L1,K
               G=T(I)
               Y=S(I)
               H=SN*G
               G=CS*G
               W=SQRT(H*H+F*F)
               T(I-1)=W
               CS=F/W
               SN=H/W
               F=X*CS+G*SN
```

```
                G=G*CS-X*SN
                H=Y*SN
                Y=Y*CS
                IF (NV .EQ. 0) GO TO 310
                DO 300 J=1,N
                   X=REAL(V(J,I-1))
                   W=REAL(V(J,I))
                   V(J, I-1)=CMPLX(X*CS+W*SN,0.)
300                V(J,I)=CMPLX(W*CS-X*SN,0.)
310             W=SQRT(H*H+F*F)
                S(I-1)=W
                CS=F/W
                SN=H/W
                F=CS*G+SN*Y
                X=CS*Y-SN*G
                IF (NU .EQ. 0) GO TO 330
                DO 320 J=1,N
                   Y=REAL(U(J,I-1))
                   W=REAL(U(J,I))
                   U(J,I-1)=CMPLX(Y*CS+W*SN,0.)
320                U(J,I)=CMPLX(W*CS-Y*SN,0.)
330             IF (N .EQ. NP) GO TO 350
                DO 340 J=N1,NP
                   Q=A(I-1,J)
                   R=A(I,J)
                   A(I-1,J)=Q*CS+R*SN
340                A(I,J)=R*CS-Q*SN
350             CONTINUE
             T(L)=0.
             T(K)=F
             S(K)=X
             GO TO 220
C    Сходимость
360          IF (W .GE. 0.) GO TO 380
             S(K)=-W
             IF(NV .EQ. 0) GO TO 380
             DO 370 J=1,N
370             V(J,K)=-V(J,K)
380          CONTINUE
C    Упорядочение сингулярных чисел
          DO 450 K=1,N
             G=-1
             J=K
             DO 390 I=K,N
                IF (S(I) .LE. G) GO TO 390
                G=S(I)
                J=I
390             CONTINUE
             IF (J. EQ. K) GO TO 450
             S(J)=S(K)
             S(K)=G
             IF (NV .EQ. 0) GO TO 410
             DO 400 I=1,N
                Q=V(I,J)
                V(I,J)=V(I,K)
400             V(I,K)=Q
410          IF (NU .EQ. 0) GO TO 430
```

```
          DO 420 I=1,N
             Q=U(I,J)
             U(I,J)=U(I,K)
420          U(I,K)=Q
430       IF (N .EQ. NP) GO TO 450
          DO 440 I=N1,NP
             Q=A(J,I)
             A(J,I)=A(K,I)
440          A(K,I)=Q
450       CONTINUE
C     Обратное преобразование
          IF (NU .EQ. 0) GO TO 510
          DO 500 KK=1, N
             K=N1-KK
             IF (B(K) .EQ. 0.) GO TO 500
             Q=-A(K,K)/CABS(A(K,K))
             DO 460 J=1,NU
460             U(K,J)=Q*U(K,J)
             DO 490 J=1,NU
                Q=(0.,0.)
                DO 470 I=K,M
470                Q=Q+CONJG(A(I,K))*U(I,J)
                Q=Q/(CABS(A(K,K))*B(K))
                DO 480 I=K,M
480                U(I,J)=U(I,J)-Q*A(I,K)
490             CONTINUE
500          CONTINUE
510       IF (NV .EQ. 0) GO TO 570
          IF (N .LT. 2) GO TO 570
          DO 560 KK=2,N
             K=N1-KK
             K1=K+1
             IF(C(K1) .EQ. 0.) GO TO 560
             Q=-CONJG(A(K,K1))/CABS (A(K,K1))
             DO 520 J=1,NV
520             V(K1,J)=Q*V(K1,J)
             DO 550 J=1,NV
                Q=(0.,0.)
                DO 530 I=K1,N
530                Q=Q+A(K,I)*V(I,J)
                Q=Q/(CABS(A(K,K1))*C(K1))
                DO 540 I=K1,N
540                V(I,J)=V(I,J)-Q*CONJG(A(K,I))
550             CONTINUE
560          CONTINUE
570       RETURN
          END
```

Приложение 3.В. Программа алгоритма Левинсона

Алгоритм Левинсона предназначен для решения уравнения

$$\mathbf{T}_M \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{a}_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_M \\ \mathbf{0}_M \end{pmatrix}$$

в случае, когда $\mathbf{T}_M$ — эрмитова тёплицева матрица, как описано

в подразд. 3.8.1. Количество вычислительных операций при решении этого уравнения методом исключения Гаусса пропорционально M^3, где M — размерность матрицы, а объем требуемой при этом памяти пропорционален M^2. При использовании алгоритма Левинсона требуется только M^2+M операций сложения, M^2+2M операций умножения и M операций деления, а хранить необходимо массив только из $2M$ элементов. С помощью процедуры, описанной в приложении IV, помещенном в конце книги, программа может быть преобразована для обработки действительнозначных данных. В контрольном примере с входными параметрами $M=2$, $T0=3{,}0$, $T(1)=(-2{,}0;\ 0{,}5)$ и $T(2)=(0{,}7;\ -1{,}0)$, где для комплексной величины $x+jy$ использовано обозначение $(x;\ y)$, программа LEVINSON будет давать выходные значения $P=1{,}3221$, $A(1)=(0{,}86316;\ 0{,}03158)$ и $A(2)=(0{,}34737;\ 0{,}21053)$.

```
      Подпрограмма LEVINSON (M, TO, T, P, A, ISTAT)
C     Предназначена для решения системы комплексных линейных уравнений
C                                  TA=P
C     с помощью алгоритма Левинсона. Здесь T — эрмитова тёплицева (M+
C     +1)×(M+1)-матрица, A — вектор-столбец с элементами 1, a(1), ..., a(M),
C     а P — вектор-столбец, верхний элемент которого равен p, а остальные
C     элементы равны нулю.
C
C     Входные параметры:
C
C       M      — число компонентов неизвестного вектора A; размерность A
C                равна M (это — порядок авторегрессионной модели; см. ни-
C                же гл. 7); целочисленный параметр.
C       T0     — действительный скаляр, соответствующий элементу матри-
C                цы t(0); благодаря свойству эрмитовой симметрии этот
C                элемент всегда действителен.
C       T      — массив из M комплексных элементов t(1), ..., t(M) левого
C                столбца тёплицевой матрицы (это — значения автокорреля-
C                ционной последовательности авторегрессионной модели; см.
C                ниже гл. 7).
C     Выходные параметры:
C
C       P      — действительный скаляр, представляющий собой верхний эле-
C                мент вектора в правой части уравнения (это — дисперсия
C                шума, возбуждающего авторегрессионную модель; см. ниже
C                гл. 7).
C       A      — массив из M комплексных элементов вектора решения (это
C                коэффициенты авторегрессионной модели; см. ниже гл. 7).
C       ISTAT  — цифровой индикатор состояния в момент выхода из про-
C                граммы:
C                0 для нормального выхода,
C                1, если P=0 (вырожденная матрица)
C
C     Примечание:
C
C       Размеры .GE. M внешних массивов A и T должны устанавливаться
C       вызывающей программой.
C
```

```
      COMPLEX T(1), A(1), TEMP, SAVE
      REAL TO, P
      P=TO
      ISTAT=0
C     Рассматривать M=0 как частный случай
      IF (M .EQ. 0)  RETURN
C
C     Основная рекурсия Левинсона
C
      K=0
100   K=K+1
      SAVE=T(K)
      IF (K .EQ. 1) GO TO 20
      DO 10 J=1,K-1
10       SAVE=SAVE+A(J)*T(K-1)                    ! (3.136)
20    TEMP=-SAVE/P
      P=P*(1.-REAL(TEMP)**2-AIMAG(TEMP)**2)       ! (3.158)
      IF (P .GT. 0.) GO TO 30
      ISTAT=1
      RETURN
30    A(K)=TEMP                                   ! (3.139)
      IF(K .EQ. 1) GO TO 50
      KHALF=K/2
      DO 40 J=1,KHALF
         KJ=K-J
         SAVE=A(J)
         A(J)=SAVE+TEMP*CONJG(A(KJ))              ! (3.147), (3.156)
         IF (J .EQ. KJ) GO TO 40
         A(KJ)=A(KJ)+TEMP*CONJG(SAVE)             ! (3.147), (3.156)
40       CONTINUE
50    IF (K .LT. M) GO TO 100
      RETURN
      END
```

Приложение 3.Г.
Программа для решения тёплицевых линейных уравнений в общем случае

Эта подпрограмма предназначена для решения системы линейных уравнений (3.167) с тёплицевой матрицей общего вида, описанного в подразд. 3.8.3. Количество вычислительных операций при решении этих уравнений методом исключения Гаусса пропорционально M^3, где M — размерность матрицы, а объем требуемой при этом памяти пропорционален M^2. Данная программа требует только $3M^2+M$ операций сложения, $(5/2)M^2+$ $+(5/2)M$ операций умножения и $3M$ операций деления, а хранить необходимо массив из $6M$ элементов. С помощью процедуры, описанной в приложении IV, помещенном в конце книги, программа может быть преобразована для обработки действительнозначных данных. В соответствии с принятыми в книге обозначениями, порядок матрицы M, задаваемый в качестве входного параметра программы, приводит к получению вектора

решения размерности $M+1$. Для входных параметров $M=2$, $T0=(3{,}0;\ 0{,}0)$, $TC(1)=(-2{,}0;\ 0{,}5)$, $TC(2)=(0{,}7;\ -1{,}0)$, $TR(1)=(-0{,}2;\ -0{,}4)$, $TR(2)=(0{,}3;\ -0{,}6)$, $Z(1)=(1{,}0;\ 3{,}0)$, $Z(2)=(2{,}0;\ -1{,}0)$ и $Z(3)=(0{,}5;\ 0{,}8)$, где для комплексной величины $x+jy$ использовано обозначение $(x; y)$, подпрограмма TOEPLITZ будет давать выходные значения $X(1)=(0{,}23519;\ 1{,}2437)$, $X(2)=(1{,}0303;\ 0{,}53575)$ и $X(3)=(0{,}47335;\ 0{,}24032)$.

```
      Подпрограмма TOEPLITZ (M, T0, TC, TR, Z, X, ISTAT)
C
C     Предназначена для решения системы комплексных линейных уравнений
C                                  TX=Z
C     с помощью одного из вариантов алгоритма Левинсона. Здесь T — комп-
C     лексная несимметричная тёплицева (M+1)×(M+1)-матрица, Z — изве-
C     стный комплексный вектор-столбец из M+1 элементов, а X — вектор ре-
C     шения из M+1 комплексных элементов.
C
C     Входные параметры:
C
C       M     — порядок матрицы T (целое число).
C       T0    — скаляр, соответствующий комплексному элементу матрицы
C               t(0).
C       TC    — массив из M комплексных элементов t(1), ..., t(M) левого
C               столбца тёплицевой матрицы.
C       TR    — массив из M комплексных элементов t(−1), ..., t(−M) верх-
C               ней строки тёплицевой матрицы.
C       Z     — массив из M+1 комплексных элементов вектора, стоящего
C               в правой части уравнения. Элементу Z(k+1) в программе
C               соответствует в подразд. 3.8.3 элемент z(k), k=0, ..., M.
C
C     Выходные параметры:
C
C       X     — массив из M+1 комплексных элементов вектора решения.
C               Элементу X(k+1) в программе соответствует в подразд. 3.8.3
C               элемент x(k), k=0, ..., M.
C       ISTAT — цифровой индикатор состояния в момент выхода из про-
C               граммы:
C               0 для нормального выхода;
C               1, если P=0 (вырожденная матрица).
C
C     Примечание:
C
C       Размеры .GE. M внешних массивов TR, TC и размеры .GE. M+1 мас-
C       сивов X, Z должны указываться в вызывающей программе. Для зада-
C       ния размеров внутренних массивов A и B должно использоваться
C       .GE. M.
C
C
      COMPLEX TC(1), TR(1), X(1), Z(1), A(100), B(100)
      COMPLEX TEMP1, TEMP2, SAVE1, SAVE2, ALPHA, BETA
      COMPLEX P, T0
      P=T0
      ISTAT=1
      IF (P .EQ. (0.0.)) RETURN
C     Рассматривать M=0 как частный случай
      X(1)=Z(1)/T0                                    ! (3.175)
```

```
      IF (M .LE. 0) RETURN
C
C     Основная рекурсия
C
      K=0
100   K=K+1
      SAVE1=TC(K)
      SAVE2=TR(K)
      BETA=X(1)*TC(K)
      IF (K .EQ. 1) GO TO 20
      DO 10 J=1,K-1
         KJ=K-J
         SAVE1=SAVE1+A(J)*TC(KJ)     !  (3.136)
         SAVE2=SAVE2+B(J)*TR(KJ)     !  (3.137)
10       BETA=BETA+X(J+1)*TC(KJ)     !  (3.173)
20    TEMP1=-SAVE1/P
      TEMP2=-SAVE2/P
      P=P*(1.,0.)-TEMP1*TEMP2)       !  (3.140)
      IF (P .EQ. (0.,0.)) RETURN
30    A(K)=TEMP1                     !  (3.139)
      B(K)=TEMP2                     !  (3.143)
      ALPHA=(Z(K+1)-BETA)/P          !  (3.174)
      IF (K .EQ. 1) GO TO 50
      DO 40 J=1,K-1
         KJ=K-J
         SAVE1=A(J)
         A(J)=SAVE1+TEMP1*B(KJ)      !  (3.147)
         B(KJ)=B(KJ)+TEMP2*SAVE1     !  (3.148)
40       CONTINUE
50    X(K+1)=ALPHA
      DO 60 J=1,K
60       X(J)=X(J)+ALPHA*B(K-J+1)    !  (3.171)
      IF (K .LT. M) GO TO 100
      ISTAT=0
      RETURN
      END
```

Приложение 3.Д. Программа для решения эрмитовых тёплицевых линейных уравнений

Эта подпрограмма предназначена для решения системы линейных уравнений (3.167) с эрмитовой тёплицевой матрицей, описанного в подразд. 3.8.3. Данный алгоритм требует $2M^2+2M$ операций сложения, $2M^2+3M$ операций умножения, $2M$ операций деления и объема памяти для хранения массива из $4M$ элементов. Все эти величины меньше аналогичных величин для подпрограммы TOEPLITZ вследствие уменьшения объема вычислений, обусловленного свойством эрмитовой симметрии. С помощью процедуры, описанной в приложении IV, помещенном в конце книги, программа может быть преобразована для обработки действительнозначных данных. В соответствии с принятыми в книге обозначениями порядок матрицы M, задаваемый в качестве входного параметра программы, приво-

дит к получению вектора решения размерности $M+1$. Для входных параметров $M=2$, $T0=(3{,}0;\ 0{,}0)$, $T(1)=(-2{,}0;\ 0{,}5)$, $T(2)=(0{,}7;\ -1{,}0)$, $Z(1)=(1{,}0;\ 3{,}0)$, $Z(2)=(2{,}0;\ -1{,}0)$ и $Z(3)=(0{,}5;\ 0{,}8)$, где для комплексной величины $x+jy$ принято обозначение $(x;\ y)$, подпрограмма HERMTOEP будет давать выходные значения $X(1)=(2{,}2970;\ 1{,}6990)$, $X(2)=(3{,}3185;\ 1{,}2970)$ и $X(3)=(1{,}4928;\ 0{,}94745)$.

Подпрограмма HERMTOEP (M, TO, T, Z, X, ISTAT)

```
C
C   Предназначена для решения системы комплексных линейных уравнений
C                              TX=Z
C   с помощью одного из вариантов алгоритма Левинсона. Здесь T — комп-
C   лексная эрмитова тёплицева (M+1)×(M+1)-матрица, Z — известный
C   комплексный вектор-столбец из M+1 элементов, а X — вектор решения
C   из M+1 комплексных элементов.
C
C   Входные параметры:
C
C     M      — порядок матрицы T (целое число).
C     T0     — скаляр, соответствующий действительному элементу матри-
C              цы t(0) (согласно свойству эрмитовой симметрии, этот член
C              должен быть всегда действительным).
C     T      — массив из M комплексных элементов t(1), ..., t(M) левого
C              столбца тёплицевой матрицы
C     Z      — массив из M+1 комплексных элементов вектора, стоящего
C              в правой части уравнения. Элементу Z(k+1) в программе
C              соответствует в подразд. 3.8.3 элемент z(k), k=0, ..., M.
C
C   Выходные параметры:
C     X      — массив из M+1 комплексных элементов вектора решения.
C              Элементу X(k+1) в программе соответствует в подразд. 3.8.3
C              элемент x(k), k=0, ..., M.
C     ISTAT  — цифровой индикатор состояния в момент выхода из про-
C              граммы:
C              0 для нормального выхода,
C              1, если P=0 (вырожденная матрица).
C
C   Примечание:
C     Размеры .GE. M внешнего массива T и размеры .GE. M+1 массивов X,
C     Z должны указываться в вызывающей программе. Для задания раз-
C     меров внутреннего массива A должно использоваться .GE. M .
C
      COMPLEX T(1), X(1), Z(1), A(100)
      COMPLEX TEMP, SAVE, ALPHA, BETA
      REAL P, T0
      P=T0
      ISTAT=1
      IF (P .EQ. 0.) RETURN
C   Рассматривать M=0 как частный случай
      X(1)=Z(1)/T0                                    ! (3.175)
      IF (M .LE. 0) RETURN
C
C   Основная рекурсия
C
      K=0
```

```
100     K=K+1
        SAVE=T(K)
        BETA=X(1)*T(K)
        IF (K .EQ. 1) GO TO 20
        DO 10 J=1,K-1
           SAVE=SAVE+A(J)*T(K-J)                ! (3.136)
10         BETA=BETA+X(J+1)*T(K-J)              ! (3.173)
20      TEMP=-SAVE/P
        P=P*(1.-REAL(TEMP)**2-AIMAG(TEMP)**2)          ! (3.158)
        IF (P .LE. 0.) RETURN
30      A(K)=TEMP                               ! (3.139)
        ALPHA=(Z(K+1)-BETA)/P                   ! (3.174)
        IF (K .EQ. 1) GO TO 50
        KHALF=K/2
        DO 40 J=1,KHALF
           KJ=K-J
           SAVE=A(J)
           A(J)=SAVE+TEMP*CONJG(A(KJ))          ! (3.147), (3.157)
           IF (J .EQ. KJ) GO TO 40
           A(KJ)=A(KJ)+TEMP*CONJG(SAVE)         ! (3.147), (3.157)
40         CONTINUE
50      X(K+1)=ALPHA
        DO 60 J=1,K
60         X(J)=X(J)+ALPHA*CONJG(A(K-J+1))      ! (3.171)
        IF (K .LT. M) GO TO 100
        ISTAT=0
        RETURN
        END
```

Приложение 3.Е. Программа для определения минимального собственного значения и соответствующего ему собственного вектора эрмитовой тёплицевой матрицы

Эта подпрограмма предназначена для определения минимального собственного значения и соответствующего ему собственного вектора матрицы, имеющей эрмитову тёплицеву структуру. В ее основу положен степенной метод, описанный в подразд. 3.8.4. С помощью процедуры, описанной в приложении IV, помещенном в конце книги, программа может быть преобразована для обработки действительнозначных данных. В соответствии с принятыми в книге обозначениями, выбор в качестве входного параметра значения порядка матрицы, равного M, означает, что в действительности размер этой матрицы равен $(M+1)\times(M+1)$. Для входных параметров $M=2$, $TOL=1\times\times10^{-10}$, $T0=3{,}0$, $T(1)=(-2{,}0;\ 0{,}5)$ и $T(2)=(0{,}7;\ -1{,}0)$, где для комплексной величины $x+jy$ использовано обозначение $(x;\ y)$, подпрограмма MINEIGVAL будет давать выходные значения $EVAL=0{,}48869$, $EVEC(1)=(0{,}13791;\ -0{,}01741)$, $EVEC(2)=$ $=(0{,}21272;\ 0{,}0)$ и $EVEC(3)=(0{,}13791;\ 0{,}01741)$.

Подпрограмма MINEIGVAL (M, T0, TOL, EVAL, EVEC, ISTAT)

```
C
C  Предназначена для отыскания минимального собственного значения и со-
C  ответствующего ему собственного вектора эрмитовой тёплицевой матрицы.
C  Для этой цели используется классический степенной метод и подпрограм-
C  ма быстрого решения тёплицевых уравнений. Собственный вектор нормиру-
C  ется к единичной длине.
C
C  Входные параметры:
C
C     M      — порядок матрицы T (целое число).
C     T0     — скаляр, соответствующий действительному элементу мат-
C              рицы t(0).
C     T      — массив из M комплексных элементов t(1), ..., t(M) левого
C              столбца тёплицевой матрицы.
C     TOL    — действительный скалярный допуск; вывод из подпрограммы
C              осуществляется тогда, когда [EVAL(k)-EVAL(k-1)]/
C              EVAL(k-1)<TOL, где индекс k означает номер итерации.
C
C  Выходные параметры:
C
C     EVAL   — действительный скаляр, обозначающий минимальное собст-
C              венное значение матрицы.
C     EVEC   — массив из M комплексных элементов собственного вектора,
C              соответствующего минимальному собственному значению.
C              Заметим, что EVEC(1) нормирован к 1.
C     ISTAT  — цифровой индикатор состояния в момент выхода из про-
C              граммы:
C              0 для нормального выхода,
C              1, если обнаружена вырожденная матрица.
C
C  Примечание:
C  Размеры .GE. M внешнего массива T и размеры .GE. M+1 массива EVEC
C  должны указываться в вызывающей программе. Для задания размеров
C  внутреннего массива E должно использоваться .GE. M+1. Требуется под-
C  программа HERMTOEP (см. выше приложение 3.Г).
C
      COMPLEX T(1), EVEC(1), E(100), SAVE
M     M1=M+1
      EVAL=10.                    ! Инициализация собственного значения
      DO 10 K=1,M1
10       EVEC(K)=(1.,0.)          ! Инициализация собственного вектора
20    EVALOLD=EVAL
      CALL HERMTOEP (M, T0, T, EVEC, E, ISTAT)  !  (3.182)
      SUM=0.
      SAVE=(0.,0.)
      DO 30 K=1,M1
         SUM=SUM+REAL(E(K))**2+AIMAG(E(K))**2
30       SAVE=SAVE+E(K)*CONJG(EVEC(K))      !  (3.183)
      SUM=1./SUM
      EVAL=REAL(SAVE)*SUM
      DO 40 K=1,M1
40       EVEC(K)=SUM*E(K)
      IF (ABS(EVAL-EVALOLD) .GE. TOL*EVALOLD) GO TO 20
      RETURN
      END
```

Глава 4
ОБЗОР ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

4.1. Введение

Данная глава носит обзорный характер, поэтому в ней предполагается, что читатель уже знаком с теорией вероятностей и теорией случайных процессов. Основная ее цель — формальное введение понятия *спектральной плотности мощности* (СПМ), которая, как будет показано, является статистическим расширением понятия спектральной плотности энергии, о которой говорилось в гл. 2. Кроме того, будет рассмотрено свойство *эргодичности,* которое позволяет заменять усреднение по ансамблю статистически эквивалентным ему усреднением по времени. Обсуждаются также основы классических методов оценивания спектральной плотности мощности, которые описаны в гл. 5. Для более глубокого знакомства с материалами, изложенными в этой главе, настоятельно рекомендуются книги Папулиса [6, 7] и Гарднера [2], а также статья Бриллинджера [1].

4.2. Вероятность и случайные величины

Рассмотрим дискретное событие E, которое принадлежит к конечному множеству возможных исходов некоторого случайного эксперимента. *Вероятность этого события, обозначаемая* $P(E)$, может интуитивно рассматриваться как предел отношения числа произошедших событий E к числу выполненных экспериментов. Следовательно, величина этой вероятности ограничена значениями, лежащими между 0 и 1. *Случайной величиной* x называется некоторая величина, которая случайным образом принимает значения из некоторого континуума возможных значений. Способ задания вероятности, с которой эта величина принимает различные случайные значения, количественно описывается *функцией распределения* вероятностей $F(x) = P(\mathrm{x} \leqslant x)$, т. е. вероятностью того, что случайная величина x принимает значение, меньшее или равное x. *Функция плотности вероятности* (или просто *плотность вероятности*) $p(x)$ равна производной от $F(x)$ и определяется выражением $p(x) = \partial F(x)/\partial x$.

Математическое ожидание случайной величины x, обозначаемое $\mathscr{E}\{x\}$[1], определяется выражением

$$\mathscr{E}\{x\} = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\,dx = \bar{x}. \tag{4.1}$$

Его называют также *средним значением* случайной величины x, или первым моментом x. Математическое ожидание характеризует значение, к которому стремится в вероятностном смысле среднее по числу наблюдений значение случайной величины x в том случае, когда число этих наблюдений возрастает. Математическое ожидание некоторой функции случайной величины, скажем функции $g(x)$, можно вычислить, используя плотность вероятности $p(x)$

$$\mathscr{E}\{g(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,p(x)\,dx. \tag{4.2}$$

Математическое ожидание квадрата модуля x

$$\mathscr{E}\{|x|^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^2\,p(x)\,dx \tag{4.3}$$

называется *средним квадратом*, или *вторым моментом*, случайной величины x. Дисперсией ρ случайной величины x называется средний квадрат отклонения этой величины от ее среднего значения

$$\operatorname{var}\{x\} = \int_{-\infty}^{\infty} |x - \mathscr{E}\{x\}|^2\,p(x)\,dx = \mathscr{E}\{|x|^2\} - |\mathscr{E}\{x\}|^2 = \rho. \tag{4.4}$$

Заметим, что средний квадрат и дисперсия совпадают только для случайной величины с нулевым средним значением. Характеристикой взаимосвязи двух случайных величин служит *ковариация*, которая определяется следующим выражением:

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}\{xy\} &= \mathscr{E}\{(x - \mathscr{E}\{x\})(y^* - \mathscr{E}\{y\}^*)\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathscr{E}\{x\})(y^* - \mathscr{E}\{y\}^*)\,p(x, y)\,dx\,dy = \\ &= \mathscr{E}\{xy^*\} - \mathscr{E}\{x\}\,\mathscr{E}\{y\}^*,\end{aligned} \tag{4.5}$$

где $p(x, y)$ — совместная плотность вероятности случайных величин x и y, а $\mathscr{E}\{xy\}$ обозначает смешанный второй момент этих величин. Заметим, что для упрощения данного обзора мы не будем дальше использовать различные обозначения x и x соответственно для самой случайной величины и ее значения.

При обсуждении оценок различных параметров в последующих главах будет использоваться ряд величин, которые характеризуют поведение этих оценок. Их определения даются в этой главе. *Смещением* $B(\hat{\alpha})$ оценки $\hat{\alpha}$ параметра α называется раз-

[1] В отечественной литературе математическое ожидание обычно обозначается $M(x)$ или $E(x)$. — *Прим. ред.*

ность между истинным значением этого параметра и математическим ожиданием этой оценки:

$$B(\hat{\alpha}) = \alpha - \mathcal{E}\{\hat{\alpha}\}. \tag{4.6}$$

Несмещенной оценкой называется такая, для которой $B(\hat{\alpha}) = 0$. *Средний квадрат ошибки* оценки $\hat{\alpha}$ определяется выражением

$$\mathcal{E}\{|\alpha - \hat{\alpha}|^2\} = \operatorname{var}\{\hat{\alpha}\} + |B(\hat{\alpha})|^2. \tag{4.7}$$

Говорят, что оценка *состоятельна,* если с увеличением числа наблюдений смещение и дисперсия стремятся к нулю. *Оценкой максимального правдоподобия* называется оценка, характеризующая значение оцениваемого параметра, вероятность появления (или наблюдения) которого максимальна. Для определения нижней границы дисперсии несмещенной оценки скалярного параметра часто используется *неравенство Крамера — Рао* (КР). Если для оценивания параметра α используется случайный вектор $\mathbf{x}$, то неравенство КР дается следующим выражением

$$\operatorname{var}\{\hat{\alpha}\} \geqslant \mathcal{E}\left\{\left(\frac{\partial \ln p(\mathbf{x}\,|\,\alpha)}{\partial \alpha}\right)^2\right\}^{-1}, \tag{4.8}$$

характеризующим дисперсию оценки истинного значения параметра α с помощью условной плотности вероятности $p(\mathbf{x}|\alpha)$. Оценка, значение которой достигает *границы* КР, называется *эффективной* оценкой.

В книге будут использоваться две важные плотности вероятности — равномерная и гауссовская. *Равномерное распределение* действительной случайной величины x описывается равномерной (постоянной) плотностью вероятности

$$p(x) = \frac{1}{b-a} \tag{4.9}$$

на конечном действительном интервале $a \leqslant x \leqslant b$. Гауссовское *(нормальное) распределение* действительной случайной величины x, имеющей среднее значение $\bar{x}$ и дисперсию ρ, описывается плотностью вероятности

$$p(x) = [2\pi\rho]^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2\rho}(x-\bar{x})^2\right] \tag{4.10}$$

для $-\infty < x < \infty$. *Многомерная* гауссовская плотность вероятности для некоторого вектора из K случайных величин $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_K]^T$ определяется выражением

$$p(\mathbf{x}) = [(2\pi)^K \det \mathbf{C}_K]^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{C}_K^{-1} (\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}})\right], \tag{4.11}$$

где K-элементный вектор среднего значения $\bar{\mathbf{x}}$ дается выражением

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathscr{E}\{\mathbf{x}\}, \tag{4.12}$$

а ковариационная $(K \times K)$-матрица $\mathbf{C}$ имеет следующий вид:

$$\mathbf{C}_K = \mathscr{E}\{(\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}})^T\} = \begin{pmatrix} \operatorname{var}\{x_1\} & \operatorname{cov}\{x_1x_2\} & \dots & \operatorname{cov}\{x_1x_K\} \\ \operatorname{cov}\{x_2x_1\} & \operatorname{var}\{x_2\} & \dots & \operatorname{cov}\{x_2x_K\} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \operatorname{cov}\{x_Kx_1\} & \operatorname{cov}\{x_Kx_2\} & \dots & \operatorname{var}\{x_K\} \end{pmatrix}. \tag{4.13}$$

Можно также определить гауссовскую плотность вероятности для комплексных случайных величин; см. приложение E в книге Монзиго и Миллера [5]. Пусть $z = x_r + jx_i$ — комплексная случайная величина, действительная (x_r) и мнимая (x_i) части которой являются действительными случайными величинами со средними значениями, равными соответственно $\bar{x}_r$ и $\bar{x}_i$, и одинаковой дисперсией $\rho_z/2$. Случайные величины x_r и x_i предполагаются независимыми, т. е. $\operatorname{cov}\{x_rx_i\} = 0$[1]. Гауссовская плотность вероятности комплексной случайной величины может быть записана как частный случай *двумерной* гауссовской плотности вероятности для двух действительных случайных переменных, для которых

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_r \\ x_i \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \bar{x}_r \\ \bar{x}_i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} \rho_z/2 & 0 \\ 0 & \rho_z/2 \end{pmatrix}. \tag{4.14}$$

Подставляя эти значения в выражение (4.11), после некоторых упрощений получаем (для случая $K=2$)

$$p(z) = p(\mathbf{x}) = [\pi\rho_z]^{-1} \exp\left[-\frac{1}{\rho_z}|z-\bar{z}|^2\right], \tag{4.15}$$

где $\bar{z} = \mathscr{E}\{z\} = \bar{x}_r + j\bar{x}_i$, а $\operatorname{var}\{z\} = \operatorname{var}\{x_r\} + \operatorname{var}\{x_i\} = \rho_z$. Многомерную гауссовскую плотность вероятности для вектора $\mathbf{z}$, состоящего из K комплексных случайных величин, можно записать в виде гауссовской плотности вероятности для $2K$ действительных случайных величин в следующей форме:

$$p(\mathbf{z}) = [\pi^K \det \mathbf{C}_K]^{-1} \exp[-(\mathbf{z}-\bar{\mathbf{z}})^H \mathbf{C}_K^{-1}(\mathbf{z}-\bar{\mathbf{z}})], \tag{4.16}$$

[1] Из некоррелированности случайных величин $\operatorname{cov}\{x_rx_i\} = 0$ независимость следует только в случае гауссовского распределения, в случае же других видов распределений выполнение этого условия не означает независимости. — *Прим. ред.*

где комплексное среднее значение $\bar{\mathbf{z}}$ и эрмитова ковариационная матрица $\mathbf{C}_K$ определяются выражениями

$$\bar{\mathbf{z}} = \mathscr{E}[\mathbf{z}], \tag{4.17}$$

$$\mathbf{C}_K = \mathscr{E}\{(\mathbf{z}-\bar{\mathbf{z}})(\mathbf{z}-\bar{\mathbf{z}})^H\}. \tag{4.18}$$

При выводе соотношения (4.16) предполагалось, что действительные и мнимые компоненты всех комплексных случайных величин z_k в комплексном случайном векторе $\mathbf{z}$ независимы и имеют одинаковые дисперсии, т. е. полагалось, что ковариация $\mathrm{cov}\{\mathrm{Re}[z_k]\,\mathrm{Im}[z_l]\}$ равна нулю при $k=l$ и отлична от нуля при $k\neq l$ и что $\mathrm{var}\{\mathrm{Re}[z_k]\}=\mathrm{var}\{\mathrm{Im}[z_k]\}$.

4.3. Случайные процессы

Дискретный *случайный процесс* можно рассматривать как некоторую совокупность, или *ансамбль,* действительных или комплексных дискретных временны́х (или пространственных) последовательностей, каждую из которых можно было бы наблюдать как результат проведения некоторого эксперимента. Такой ансамбль последовательностей будет обозначаться $x[n;\ i]$, где i — i-я последовательность из этого ансамбля, а n — индекс времени. При заданном значении i, указывающем номер наблюдаемой последовательности ансамбля, будет использоваться сокращенное обозначение $x[n]$. При фиксированном индексе времени n значение наблюдаемого элемента по всем последовательностям ансамбля будет представлять собой некоторую случайную величину. В общем случае эти значения образуют некоторый континуум, тогда как $x[n;\ i]$ дискретно и по n, и по i. Вероятность того, что значения $x[n]$ будут лежать в некотором заданном интервале α, количественно описывается функцией распределения $F(\alpha; n)=P(x[n]\leqslant\alpha)$, в обозначении которой явно отражена зависимость от времени наблюдения. Соответствующая плотность вероятности имеет вид $p(\alpha; n)=\partial F(\alpha; n)/\partial\alpha$.

Среднее, или *ожидаемое, значение* случайного процесса $x[n]$ в момент времени n определяется выражением

$$\bar{x}[n] = \mathscr{E}\{x[n]\}. \tag{4.19}$$

Автокорреляция случайного процесса в два различных момента времени n_1 и n_2 определяется выражением

$$r_{xx}[n_1,\ n_2] = \mathscr{E}\{x[n_1]\,x^*[n_2]\}. \tag{4.20}$$

Это — так называемое «инженерное» определение автокорреляции, впервые предложенное Винером. В статистике термин «автокорреляция» используется для обозначения связанных

величин, которые нормируются, с тем чтобы их значения лежали в интервале между 0 и 1. Автокорреляция центрированного случайного процесса $x[n]$, т. е. с удаленным средним значением, называется *автоковариацией* и определяется выражением

$$c_{xx}[n_1, n_2] = \mathcal{E}\{(x[n_1] - \bar{x}[n_1])(x^*[n_2] - \bar{x}^*[n_2])\}. \quad (4.21)$$

Можно показать, что она удовлетворяет соотношению

$$c_{xx}[n_1, n_2] = r_{xx}[n_1, n_2] - \bar{x}[n_1]\bar{x}^*[n_2]. \quad (4.22)$$

Если среднее значение случайного процесса равно нулю при всех n, то автокорреляция и автоковариация такого процесса совпадают, т. е.

$$c_{xx}[n_1, n_2] = r_{xx}[n_1, n_2].$$

В литературе термины «автокорреляция» и «автоковариация» часто используются как синонимы, но строго идентичны они только для процессов с нулевым средним значением.

При рассмотрении двух различных случайных процессов $x[n]$ и $y[n]$ используются понятия *взаимной корреляции*, которая определяется выражением

$$r_{xy}[n_1, n_2] = \mathcal{E}\{x[n_1]\, y^*[n_2]\}, \quad (4.23)$$

и *взаимной ковариации*, которая определяется выражением

$$\begin{aligned} c_{xy}[n_1, n_2] &= \mathcal{E}\{(x[n_1] - \bar{x}[n_1])(y^*[n_2] - \bar{y}^*[n_2])\} = \\ &= r_{xy}[n_1, n_2] - \bar{x}[n_1]\bar{y}^*[n_2]. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Говорят, что два случайных процесса *не коррелированы*, если $c_{xy}[n_1, n_2] = 0$ при всех значениях n_1 и n_2.

Во всех определениях, которые были даны до сих пор, отражена явная зависимость от индекса времени. Случайный процесс называется *стационарным в широком смысле*, если его среднее значение постоянно при всех значениях индекса времени (иными словами, не зависит от времени), а автокорреляция зависит только от разности индексов времени $m = n_2 - n_1$. Два случайных процесса называются совместно стационарными в широком смысле процессами, если их взаимная корреляция зависит только от разности временны́х индексов. Совместно стационарные процессы должны быть и стационарными по отдельности. Заметим, что стационарность в широком смысле определяется *только* в терминах первого и второго моментов случайных процессов, моменты более высоких порядков не рассматриваются. В частности, стационарный в широком смысле дискретный случайный процесс $x[n]$ статистически характери-

зуется постоянным средним значением

$$\bar{x}[n]=\bar{x}, \tag{4.25}$$

автокорреляционной последовательностью (АКП)

$$r_{xx}[m]=\mathscr{E}\{x[n+m]\,x^*[n]\}, \tag{4.26}$$

которая представляет собой некоторую функцию разности временных индексов m, и *автоковариационной последовательностью*

$$c_{xx}[m]=\mathscr{E}\{(x[n+m]-\bar{x})(x^*[n]-\bar{x}^*)\}=r_{xx}[m]-|\bar{x}|^2. \tag{4.27}$$

Взаимно стационарные в широком смысле дискретные случайные процессы $x[n]$ и $y[n]$ статистически характеризуются *взаимной корреляционной последовательностью* (ВКП)

$$r_{xy}[m]=\mathscr{E}\{x[n+m]\,y^*[n]\}, \tag{4.28}$$

которая представляет собой некоторую функцию разности временных индексов m, и *взаимной ковариационной последовательностью*

$$c_{xy}[m]=\mathscr{E}\{(x[n+m]-\bar{x})(y^*[n]-\bar{y}^*)\}=r_{xy}[m]-\bar{x}\bar{y}^*. \tag{4.29}$$

Отметим следующие полезные свойства АКП и ВКП:

$$\begin{gathered} r_{xx}[0]\geqslant|r_{xx}[m]|,\\ r_{xx}[-m]=r_{xx}^*[m],\\ r_{xx}[0]\,r_{yy}[0]\geqslant|r_{xy}[m]|^2,\\ r_{xy}[-m]=r_{yx}^*[m], \end{gathered} \tag{4.30}$$

которые справедливы при всех целых m. Используя эти свойства, нетрудно показать, что АКП стационарного в широком смысле случайного процесса должна иметь максимум в начале координат (т. е. при $m=0$). Если эрмитова тёплицева автокорреляционная матрица

$$\mathbf{R}_M=\begin{pmatrix} r_{xx}[0] & r_{xx}[-1] & \dots & r_{xx}[-M]\\ r_{xx}[1] & r_{xx}[0] & \dots & r_{xx}[-M+1]\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ r_{xx}[M] & r_{xx}[M-1] & \dots & r_{xx}[0] \end{pmatrix} \tag{4.31}$$

образована из $M+1$ АКП-компонент, то квадратичная форма

$$\mathbf{a}^H\mathbf{R}_M\mathbf{a}=\sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{M}a[m]\,a^*[n]\,r_{xx}[m-n]\geqslant 0 \tag{4.32}$$

должна быть положительно-полуопределенной для любого произвольного $(M\times 1)$-вектора $\mathbf{a}$, если $r_{xx}[m]$ — автокорреляцион-

ная последовательность со всеми присущими ей свойствами. В этом случае говорят, что АКП обладает свойством положительной полуопределенности.

Спектральная плотность мощности (СПМ) определяется как дискретно-временно́е преобразование Фурье (ДВПФ) автокорреляционной последовательности

$$P_{xx}(f) = T \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_{xx}[m] \exp(-j2\pi fmT). \tag{4.33}$$

СПМ, ширина полосы которой полагается ограниченной значениями $\pm 1/2T$ герц, является периодической функцией частоты с периодом $1/T$ герц. Функция СПМ описывает, как мощность случайного процесса распределена по частоте. Для подтверждения избранного для нее названия рассмотрим обратное ДВПФ

$$r_{xx}[m] = \int_{-1/2T}^{1/2T} P_{xx}(f) \exp(j2\pi fmT)\, df, \tag{4.34}$$

вычисляемое при $m=0$

$$r_{xx}[0] = \int_{-1/2T}^{1/2T} P_{xx}(f)\, df. \tag{4.35}$$

В разд. 4.4 показано, что автокорреляция при нулевом временном сдвиге ($m=0$) характеризует *среднюю мощность* случайного процесса. Согласно выражению (4.35), площадь под кривой функции $P_{xx}(f)$ также характеризует среднюю мощность. Поэтому $P_{xx}(f)$ представляет собой функцию плотности (мощность на единицу измерения частоты), которая характеризует распределение мощности по частоте. Пару преобразований Фурье (4.33) и (4.34) часто называют *теоремой Винера — Хинчина* для случая дискретного времени. Поскольку $r_{xx}[-m] = r^*_{xx}[m]$, то СПМ должна быть строго действительной положительной функцией. Если АКП — строго действительная функция, то $r_{xx}[-m] = r_{xx}[m]$ и СПМ можно записать в форме косинус-преобразования Фурье

$$P_{xx}(f) = 2T \sum_{m=0}^{\infty} r_{xx}[m] \cos(2\pi fmT), \tag{4.36}$$

а это означает также, что $P_{xx}(f) = P_{xx}(-f)$, т. е. СПМ — симметричная функция.

Взаимная спектральная плотность мощности (ВСПМ) двух совместно стационарных процессов $x[n]$ и $y[n]$ определяется как ДВПФ взаимной корреляционной последовательности

$$P_{xy}(f) = T \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_{xy}[m] \exp(-j2\pi fmT). \tag{4.37}$$

Поскольку $r_{xy}[-m] \neq r^*_{xy}[m]$, то ВСПМ будет в общем случае комплексной функцией. Однако свойство $P_{xy}(f) = P^*_{yx}(f)$ при этом сохраняется.

Особый интерес представляет случайный процесс с нулевым средним значением $w[n]$, поскольку это — дискретно-временно́й белый шум. Процесс, являющийся белым шумом, не коррелирован сам с собой при любых временны́х сдвигах, за исключением $m=0$, при котором его дисперсия равна ρ_w. АКП для белого шума имеет вид

$$r_{ww}[m] = \rho_w \delta[m], \tag{4.38}$$

где $\delta[m]$ — дискретная дельта-последовательность. Поэтому СПМ АКП белого шума удовлетворяет условию

$$P_{ww}(f) = T\rho_w, \tag{4.39}$$

т. е. постоянна на всех частотах, тем самым подтверждая название «белый шум».

Пусть $y[n]$ — выход дискретной линейной инвариантной во времени (ЛИВ) системы

$$y[n] = x[n] \star h[n], \tag{4.40}$$

где $h[n]$ — фиксированная последовательность, соответствующая импульсной характеристике, а вход $x[n]$ — стационарный в широком смысле дискретный случайный процесс с нулевым средним значением. Выход $y[n]$ этой системы также будет процессом, стационарным в широком смысле, которому, как нетрудно показать (см. разд. «Задачи»), присущи следующие соотношения между автокорреляциями и взаимными корреляциями входного и выходного процессов:

$$\begin{aligned} r_{yx}[m] &= r_{xx}[m] \star h[m] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_{xx}[k-m]\, h[k], \\ r_{xy}[m] &= r_{xx}[m] \star h^*[-m], \\ r_{yy}[m] &= r_{xy}[m] \star h[m] = r_{xx}[m] \star (h^*[-m] \star h[m]) = \\ &= r_{xx}[m] \star \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k+m]\, h^*[k] \right). \end{aligned} \tag{4.41}$$

Обозначая z-преобразования различных корреляционных функций как $\mathrm{P}_{xx}(z) = \mathcal{Z}\{r_{xx}[m]\}$, $\mathrm{P}_{xy}(z) = \mathcal{Z}\{r_{xy}[m]\}$ и $\mathrm{P}_{yy}(z) = \mathcal{Z}\{r_{yy}[m]\}$ и системной функции как $\mathrm{H}(z) = \mathcal{Z}\{h[m]\}$ и применяя далее к соотношениям (4.41) теорему свертки, получаем

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_{xy}(z) &= \mathrm{P}_{xx}(z)\, \mathrm{H}^*(1/z^*), \\ \mathrm{P}_{yy}(z) &= \mathrm{P}_{xy}(z)\, \mathrm{H}(z), \\ \mathrm{P}_{yy}(z) &= \mathrm{P}_{xx}(z)\, \mathrm{H}(z)\, \mathrm{H}^*(1/z^*), \end{aligned} \tag{4.42}$$

где было использовано свойство $\mathcal{Z}\{h^*[-m]\}=H^*(1/z^*)$. Если $h[m]$ — действительно, то $H^*(1/z^*)=H(1/z)$. Используя соотношение (2.52), определение (4.33) и выражения (4.42), получаем, что спектральная плотность мощности $P_{yy}(f)$ выходного процесса связана со спектральной плотностью мощности $P_{xx}(f)$ входного процесса следующим соотношением:

$$P_{yy}(f)=TP_{yy}(z)|_{z=\exp(j2\pi fT)}= \\ =P_{xx}(f)|H(\exp[j2\pi fT])|^2, \tag{4.43}$$

где область определения времени — дискретна, а область определения частоты — непрерывна.

Один частный случай положен в основу методов спектрального оценивания, излагаемых в гл. 6—10. Если входным процессом является белый шум, так что $P_{xx}(z)=\mathcal{Z}\{\rho_w\delta[m]\}=\rho_w$, и выбрана рациональная системная функция вида (2.17), так что коэффициент усиления равен единице ($b[0]=1$), то связь между входом и выходом будет иметь следующий вид:

$$P_{yy}(z)=\rho_w H(z)H^*(1/z^*), \tag{4.44}$$

где

$$H(z)=\frac{1+\sum_{k=1}^{q} b[k]z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{p} a[k]z^{-k}}. \tag{4.45}$$

К двум важным типам случайных процессов, которые используются в данной книге, относятся гауссовский случайный процесс и синусоидальный случайный процесс. Если случайный процесс является стационарным гауссовским процессом, то он при любом индексе времени n будет характеризоваться гауссовской плотностью вероятности вида (4.10) или (4.15) в зависимости от того, является ли он соответственно действительным или комплексным процессом. Последовательные отсчеты $x[n]$, $x[n+1]$, ..., $x[n+M]$ будут характеризоваться совместной плотностью вероятности вида (4.11) или (4.16) в зависимости от того, действительными или комплексными являются эти отсчеты. В случае, например, комплексного процесса с нулевым средним значением вектор отсчетов $\mathbf{x}=(x[n]x[n+1]\ldots x[n+M])^T$, взятых в последовательные моменты времени, будет характеризоваться совместной плотностью вероятности вида

$$p(\mathbf{x})=[\pi^{M+1}\det\mathbf{R}_M]^{-1}\exp[-\mathbf{x}^H\mathbf{R}_M^{-1}\mathbf{x}], \tag{4.46}$$

где ковариационная матрица

$$\mathbf{R}_M = \mathbf{C}_M = \begin{pmatrix} r_{xx}[0] & r_{xx}^*[1] & \dots & r_{xx}^*[M] \\ r_{xx}[1] & r_{xx}[0] & \dots & r_{xx}^*[M-1] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xx}[M] & r_{xx}[M-1] & \dots & r_{xx}[0] \end{pmatrix} \tag{4.47}$$

является эрмитовой тёплицевой автокорреляционной матрицей порядка M и, следовательно, имеет размер $(M+1)\times(M\times 1)$. С этой матрицей мы часто будем иметь дело в последующих главах.

Рассмотрим детерминированный действительный синусоидальный процесс

$$x[n] = A\sin(2\pi fnT + \theta),$$

где T — интервал отсчетов, а амплитуда A, частота f и фаза θ имеют фиксированные значения. Среднее значение и автокорреляционная последовательность будут в этом случае описываться выражениями

$$\begin{aligned} \bar{x}[n] &= A\sin(2\pi fnT+\theta), \\ r_{xx}[n+m,\ n] &= A\sin(2\pi[n+m]T+\theta)\,A\sin(2\pi fnT+\theta) = \\ &= \frac{A^2}{2}[\cos(2\pi fmT) - \cos(2\pi f[2n+m]T+2\theta)]. \end{aligned} \tag{4.48}$$

Среднее значение не постоянно, а автокорреляционная последовательность не является функцией одной лишь разности временны́х индексов m. Следовательно, полностью детерминированную синусоиду нельзя моделировать как стационарный в широком смысле случайный процесс[1]. Если же положить теперь, что фаза является случайной величиной, равномерно распределенной на интервале от 0 до 2π, то синусоидальный процесс будет стационарным, поскольку среднее значение

$$\bar{x} = \int_0^{2\pi} A\sin(2\pi fnT+\theta)\frac{1}{2\pi}d\theta = 0$$

и автокорреляционная последовательность

$$\begin{aligned} r_{xx}[m] &= \int_0^{2\pi} A\sin(2\pi f[n+m]T+\theta)\,A\sin(2\pi fmT+\theta)\frac{1}{2\pi}d\theta = \\ &= \frac{A^2}{2}\cos(2\pi fmT), \end{aligned} \tag{4.49}$$

[1] Следует отличать корреляционный анализ детерминированных процессов (см. [12*], с. 67) от корреляционного анализа случайных процессов. — *Прим. ред.*

не будут зависеть от индекса времени n. Если имеется L действительных синусоид

$$x[n]=\sum_{l=1}^{L}A_l\sin(2\pi f_l nT+\theta_l),$$

каждая из которых имеет фазу, равномерно распределенную на интервале от 0 до 2π и не зависящую от фаз других синусоид, то среднее значение этих L синусоид будет равно нулю, а автокорреляционная последовательность будет описываться выражением

$$r_{xx}[m]=\sum_{l=1}^{L}\frac{A_l^2}{2}\cos(2\pi f_l mT). \tag{4.50}$$

Если процесс состоит из L комплексных синусоид

$$x[n]=\sum_{l=1}^{L}A_l\exp[j(2\pi f_l nT+\theta_l)],$$

то его автокорреляционная последовательность будет иметь форму

$$r_{xx}[m]=\sum_{l=1}^{L}A_l^2\exp(j2\pi f_l mT). \tag{4.51}$$

Если к независимому белому шумовому процессу $w[n]$, имеющему дисперсию ρ_w, добавляются комплексные синусоиды, имеющие случайные фазы, то суммарный процесс $y[n]=x[n]+w[n]$ будет иметь автокорреляционную последовательность следующего вида:

$$\begin{aligned}r_{yy}[m]&=r_{xx}[m]+r_{ww}[m]=\\&=\sum_{l=1}^{L}A_l^2\exp(j2\pi f_l mT)+\rho_w\delta[m].\end{aligned} \tag{4.52}$$

Автокорреляционную матрицу (4.47) для случайного процесса, состоящего из комплексных синусоид и аддитивного белого шума, можно с помощью выражения (4.52) записать в следующей сжатой форме:

$$\mathbf{R}_{yy}=\sum_{l=1}^{L}A_l^2\mathbf{e}_M(f_l)\,\mathbf{e}_M^H(f_l)+\rho_w\mathbf{I}, \tag{4.53}$$

где $\mathbf{I}$ — единичная $(M+1)\times(M+1)$-матрица и

$$\mathbf{e}_M(f_l) = \begin{bmatrix} 1 \\ \exp(j2\pi f_l T) \\ \vdots \\ \exp(j2\pi f_l MT) \end{bmatrix}$$

— вектор комплексных синусоид с частотой f_l.

4.4. Эргодичность: от средних по ансамблю к средним по времени

До сих пор мы в данной главе при определении таких характеристик случайных процессов, как среднее значение, корреляция, ковариация и спектральная плотность мощности, пользовались только статистическим усреднением по ансамблю. Однако на практике обычно не удается получить ансамбль реализаций требуемого процесса, по которому можно было бы вычислить эти статистические характеристики. Желательно оценивать все эти статистические свойства по *одной* выборочной реализации $x(t)$, заменяя усреднение *по ансамблю* усреднением *по времени*. Свойство, требуемое для выполнения такой замены, называется *эргодичностью*[1]. Говорят, что случайный процесс эргодичен, если с вероятностью, равной единице, все его статистические характеристики можно предсказать по одной реализации из ансамбля процесса с помощью усреднения по времени; иными словами, средние значения по времени почти всех возможных реализаций процесса с вероятностью единица сходятся к одной и той же постоянной величине (среднему значению по ансамблю). Заметим, что благодаря свойству эргодичности значительно упрощается математический анализ случайных процессов.

Концепция эргодичности требует принятия допущения о том, что данные стационарны вплоть до момента четвертого порядка. Для того чтобы процесс был стационарным, его статистические характеристики не должны зависеть от выбранной начальной точки отсчета времени. Интуитивно это вполне понятно и приемлемо, поскольку усредненная по времени величина не зависит от времени, а поэтому не пригодна для аппроксимации какого-либо статистически нестационарного параметра, значение которого зависит от времени. Следовательно, если наблюдать отдельную реализацию процесса $x[n]$ в моменты времени

[1] Относительно эргодичности (см., например, [15*], § 17). — *Прим. ред.*

n_1, n_2 и т. д., то в среднем его наблюдаемое значение должно быть равным $\bar{x}$. В предельном случае наблюдения во все моменты времени можно ожидать, что среднее значение будет равно

$$\lim_{M\to\infty}\frac{1}{2M+1}\sum_{n=-M}^{M}x[n]=\mathscr{E}\{x[n]\}=\bar{x}. \tag{4.54}$$

Можно показать, что этот предел, если он существует, сходится к истинному среднему значению тогда и только тогда, когда дисперсия среднего по времени значения (4.54), описываемая выражением

$$\lim_{M\to\infty}\frac{1}{2M+1}\sum_{m=-2M}^{2M}\left(1-\frac{|m|}{2M+1}\right)c_{xx}[m]=0, \tag{4.55}$$

стремится к нулю; здесь $c_{xx}[m]$ — истинное значение ковариации по ансамблю случайного процесса $x[n]$. В этом случае говорят, что процесс $x[n]$ *эргодичен в среднем*. Аналогичным образом можно показать, что, наблюдая значение произведения отсчетов процесса $x[n]$ в два момента времени, разделенные временны́м сдвигом m, скажем $x[n_1+m]x[n_1]$, $x[n_2+m]x[n_2]$ и т. д., можно ожидать, что среднее значение будет равно

$$\lim_{M\to\infty}\frac{1}{2M+1}\sum_{n=-M}^{M}x[n+m]\,x^*[n]=\mathscr{E}\{x[n+m]\,x^*[n]\}=r_{xx}[m]. \tag{4.56}$$

Можно показать, что этот предел действительно сходится к истинному среднему значению тогда и только тогда, когда дисперсия этого среднего по времени значения стремится к нулю, т. е. когда

$$\lim_{M\to\infty}\frac{1}{2M+1}\sum_{m=-2M}^{2M}\left(1-\frac{|m|}{2M+1}\right)c_{zz}[m]=0, \tag{4.57}$$

где $c_{zz}[m]$ — истинное значение ковариации по ансамблю автокорреляционного случайного процесса $z_m[n]=x[n+m]x^*[n]$, т. е. автокорреляционного произведения процесса $x[n]$. Заметим, что $c_{zz}[m]$ включает в себя статистические моменты четвертого порядка процесса $x[n]$. Если указанное условие выполняется, то говорят, что процесс $x[n]$ — *автокорреляционно эргодичен*. Если стационарный процесс $x[n]$ является гауссовским про-

цессом с нулевым средним значением, то нетрудно показать, что $x[n]$ обладает свойствами эргодичности в среднем и автокорреляционной эргодичности (см. Папулис [6]). Несколько труднее вывести условие эргодичности для негауссовских процессов, поэтому ограничимся здесь лишь замечанием о том, что почти все наблюдаемые на практике стационарные процессы являются также и эргодическими процессами. *В связи с этим мы будем далее полагать, что если измеряемый процесс стационарен, то усреднение по ансамблю при определении его среднего значения и автокорреляции можно заменить усреднением по времени.*

Допущение об эргодичности позволяет не только ввести через усреднение по времени определения для среднего значения и автокорреляции, но позволяет также дать подобное определение и для спектральной плотности мощности (СПМ):

$$P_{xx}(f)=\lim_{M\to\infty}\mathscr{E}\left\{\frac{1}{(2M+1)T}\left|T\sum_{n=-M}^{M}x[n]\exp(-j2\pi fnT)\right|^2\right\}. \quad (4.58)$$

Эта эквивалентная форма СПМ получается посредством статистического усреднения модуля ДВПФ взвешенной совокупности данных, поделенного на длину записи данных, для случая, когда число отсчетов данных увеличивается до бесконечности. Статистическое усреднение необходимо здесь потому, что ДВПФ само является случайной величиной, изменяющейся для каждой используемой реализации $x[n]$. Для того чтобы показать, что соотношение (4.58) эквивалентно теореме Винера — Хинчина, представим квадрат модуля ДВПФ в виде произведения двух рядов и изменим порядок операций суммирования и определения математического ожидания, что дает

$$P_{xx}(f)=\lim_{M\to\infty}\mathscr{E}\left\{\frac{T}{2M+1}\sum_{m=-M}^{M}\sum_{n=-M}^{M}x[m]x^*[n]\times\right.$$
$$\left.\times\exp(-j2\pi f[m-n]T)\right\}=$$
$$=\lim_{M\to\infty}\frac{T}{2M+1}\sum_{m=-M}^{M}\sum_{n=-M}^{M}r_{xx}[m-n]\exp(-j2\pi f[m-n]T). \quad (4.59)$$

Используя известное выражение

$$\sum_{m=-M}^{M}\sum_{n=-M}^{M}r_{xx}[m-n]=\sum_{m=-2M}^{2M}(2M+1-|m|)r_{xx}[m], \quad (4.60)$$

соотношение (4.59) можно свести к следующему:

$$P_{xx}(f) = \lim_{M\to\infty} \frac{T}{2M+1} \sum_{m=-2M}^{2M} (2M+1-|m|) r_{xx}[m] \exp(-j2\pi fmT) =$$

$$= \lim_{M\to\infty} T \sum_{m=-2M}^{2M} \left(1 - \frac{|m|}{2M+1}\right) r_{xx}[m] \exp(-j2\pi fmT) =$$

$$= T \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_{xx}[m] \exp(-j2\pi fmT). \qquad (4.61)$$

Заметим, что на последнем этапе вывода выражения (4.61) использовалось допущение о том, что автокорреляционная последовательность «затухает», так что

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} |m| r_{xx}[m] < \infty, \qquad (4.62)$$

поскольку в противном случае ДВПФ автокорреляционной последовательности не будет с ростом длины записи данных стремиться к истинной СПМ, т. е. усредненной по ансамблю, даже несмотря на эргодичность самой автокорреляционной последовательности. Так, например, это условие нарушается для случайных процессов с ненулевым средним значением и для процессов с синусоидальными компонентами, хотя использование импульсных функций позволяет исправить положение и в этих случаях. Таким образом, при выполнении условия (4.62) два выражения (4.33) и (4.58) для СПМ будут эквивалентными.

Взаимосвязь этих двух определений СПМ наглядно показана рис. 4.1 с помощью треугольной диаграммы. Метод определения СПМ на основе автокорреляционного подхода называется *косвенным,* так как случайный процесс $x[n]$ непосредственно не используется для оценивания СПМ. Метод определения СПМ по формуле (4.58) называется *прямым,* так как процесс $x[n]$ непосредственно используется для расчета СПМ.

Если в выражении (4.58) не учитывать операцию математического ожидания, то получим оценку СПМ

$$\tilde{P}_{xx}(f) = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{(2M+1)T} \left| T \sum_{n=-M}^{M} x[n] \exp(-j2\pi fnT) \right|^2, \qquad (4.63)$$

которая называется *выборочным спектром.* Это — та же первоначальная *периодограмма* Шустера, которая была описана в гл. 1. В приложении 4.А показано, что выборочный спектр не является состоятельной оценкой истинной СПМ. И хотя среднее значение выборочного спектра в пределе стремится к истинной СПМ, дисперсия при этом не стремится к нулю и по своей вели-

Рис. 4.1. Эквивалентные определения спектральной плотности мощности при использовании допущения об эргодичности.

чине будет фактически сравнима со средним значением выборочного спектра. Первые пользователи периодограммы пренебрегали операцией вычисления математического ожидания и в результате получали нереальные спектральные оценки, а ведь еще сам Шустер (см. гл. 1) предупреждал о необходимости выполнения некоторого рода усреднения, или сглаживания, при пользовании периодограммой. Именно по этой причине периодограммный метод постепенно вышел из употребления и вновь стал применяться на практике только где-то в начале 1950-х гг., когда появились достаточно хорошо статистически обоснованные методы сглаживания.

4.5. Понятие энтропии

Понятие меры информации было введено в статистику Клодом Шенноном. Так, например, некоторое событие, которое имеет M возможных исходов x_i с вероятностью $p[x_i]$, характеризующей вероятность появления i-го исхода, содержит в себе информацию, величина которой определяется выражением

$$I[x_i] = \ln(1/p[x_i]) = -\ln p[x_i]. \qquad (4.64$$

Ожидаемое, или среднее, значение этой информации равно *энтропии*, которая определяется следующим выражением:

$$H[x] = \sum_{i=1}^{M} p[x_i]\,I[x_i] = -\sum_{i=1}^{M} p[x_i]\log p[x_i]. \qquad (4.65$$

Энтропия представляет собой некоторую меру «неопределенности», связанную с появлением некоторого события. Чем выше энтропия, тем больше неопределенность появления данного со-

бытия. Энтропия дискретного события будет максимальна в случае равномерного распределения, т. е. в том случае, когда все исходы равновероятны.

Аналогично получаем, что непрерывная случайная величина с непрерывной функцией плотности вероятности $p(x)$ будет иметь энтропию

$$H(x) = -\int_{-\infty}^{\infty} p(x) \ln p(x)\, dx. \tag{4.66}$$

В дискретном случае энтропия $H[x]$ — строго неотрицательная функция, однако в непрерывном случае она может принимать и отрицательные значения. Подставляя в (4.66) гауссовскую плотность вероятности (4.46), получаем энтропию для гауссовского процесса с нулевым средним (см. Смайл и др. [8])

$$H = \frac{1}{2} \ln [\det \mathbf{R}_{xx}]. \tag{4.67}$$

величина которой может расходиться с ростом размерности M матрицы $\mathbf{R}_{xx}$. В этом случае можно использовать удельную энтропию

$$h = \lim_{M \to \infty} \frac{H}{M+1}. \tag{4.68}$$

Можно показать (Смайл и др. [8]), что удельная энтропия гауссовского процесса с нулевым средним и шириной полосы частот $B = 1/2T$ определяется выражением

$$h = \frac{1}{2} \ln (2B) + \frac{1}{4B} \int_{-B}^{B} \ln [P_{xx}(f)]\, df. \tag{4.69}$$

Этот результат будет использоваться нами в гл. 7 при обсуждении метода максимальной энтропии.

Литература

[1] *Brillinger D. R.* Fourier Analysis of Stationary Processes. Proc. IEEE, vol. 62, pp. 1628—1643, December 1974. [Имеется русский перевод: *Бриллинджер Д. Р.* Фурье-анализ стационарных процессов. ТИИЭР, 1974, т. 62, № 12, с. 15—33.]

[2] *Gardner W. A.* Introduction to Random Processes. Macmillan Publishing Company, 1985.

[3] *Jenkins G. M., Watts D. G.* Spectral Analysis and Its Applications. Holden-Day, Inc., San Francisco, 1968. [Имеется русский перевод: *Дженкинс Г., Ваттс Д.* Спектральный анализ и его приложения. — М.: Мир, 1971, вып. 1; 1972, вып. 2.]

[4] *Kay S. M.* Modern Spectral Estimation. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1987.

[5] *Monzingo R. A., Miller T. W.* Introduction to Adaptive Arrays. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1980.

[6] *Papoulis A.* Signal Analysis. McGraw-Hill Book Company, New York, 1977.
[7] *Papoulis A.* Probability, Random Variables, and Stochastic Processes, 2nd ed. McGraw-Hill Book Company, New York, 1984.
[8] *Smylie D. E., Clarke G. K. C., Ulrych T. J.* Analysis of Irregularities in the Earth's Rotation, in Methods in Computational Physics, R. Alder et al., eds., vol. 13, pp. 391—430, Academic Press, Inc., New York, 1973.

Задачи

1. Пусть $x[n]=A\sin(2\pi fnT+\theta)$ — синусоидальный процесс. Используя выражение (4.56), определить временну́ю автокорреляцию в предельном случае $M\to\infty$. Является ли эта синусоида эргодическим процессом, т. е. будет ли эта автокорреляция равна величине, определяемой выражением (4.49)?
2. Показать, что стационарный в широком смысле процесс имеет комплексно-сопряженную четную автокорреляцию, т. е. $r_{xx}(\tau)=r_{xx}^*(-\tau)$.
3. Пусть $x(t)$ и $y(t)$ — действительные процессы. Доказать, что $P_{xx}(z)=P_{xx}(1/z)$, $P_{xy}(z)=P_{yx}^*(1/z^*)$.
4. Для детерминированных сигналов, описанных в гл. 2, показать, что спектральные плотности энергии входа и выхода линейного фильтра связаны соотношением

$$|Y(f)|^2=|X(f)|^2|H(f)|^2.$$

Используя этот результат и прямое определение спектральной плотности мощности, показать, что спектральные плотности мощности входа и выхода этого фильтра связаны соотношением

$$P_{yy}(f)=P_{x\hat{x}}(f)|H(f)|^2.$$

Этот результат является другим вариантом доказательства соотношения (4.43).
5. Доказать, что если $r[m]$ — действительная последовательность, то спектральная плотность мощности $P_{xx}(f)$ представляет собой действительную четную положительную функцию.
6. Доказать соотношения, определяемые выражениями (4.41).
7. Пусть

$$x[n]=\sum_{l=1}^{L}A_l\sin(2\pi f_lnT+\theta_l)+w[n]$$

— процесс, состоящий из L действительных синусоид, начальные фазы которых равномерно распределены на интервале от 0 до 2π, и белого шумового процесса $w[n]$, имеющего дисперсию ρ_w. Вычислить статистическую автокорреляционную последовательность. Является ли этот процесс эргодическим?
8. Показать, что для процесса, описанного в предыдущей задаче, автокорреляционную матрицу можно записать в виде

$$\mathbf{R}_{xx}=\sum_{l=1}^{L}\frac{A_l^2}{4}[\mathbf{e}_M(f_l)\mathbf{e}_M^H(f_l)+\mathbf{e}_M^*(f_l)\mathbf{e}_M^T(f_l)]+\rho_w\mathbf{I}.$$

Приложение 4.А.
Смещение и дисперсия выборочного спектра

Статистический анализ периодограммы в общем случае оказывается достаточно сложным, поэтому ниже будет рассмотрен специальный случай белого гауссовского процесса с нулевым средним значением. Тем не менее полученные для него результаты могут оказаться полезными при определении поведения спектральных оценок на основе периодограмм и в более общих случаях; см. [3].

Выборочный спектр последовательности конечной длины $x[n]$, $n=0, \ldots, N-1$, описывается выражением

$$\tilde{P}_{xx}(f) = \frac{1}{NT} |X(f)|^2,$$

где $X(f)$ — дискретно-временно́е преобразование Фурье, определяемое выражением

$$X(f) = T \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp(-j2\pi fnT).$$

Это преобразование идентично (см. задачу 1 в гл. 5) дискретно-временно́му преобразованию Фурье от оценки автокорреляционной последовательности

$$\tilde{P}_{xx}(f) = T \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} \hat{r}_{xx}[m] \exp(-j2\pi fmT),$$

где смещенная автокорреляционная оценка

$$\hat{r}_{xx}[m] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-m-1} x[n+m]\, x^*[n]$$

используется при максимальном числе корреляционных сдвигов $[m=0, \ldots, N-1]$.

Среднее значение выборочного спектра будет иметь вид

$$\begin{aligned}\mathscr{E}\{\tilde{P}_{xx}(f)\} &= T \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} \mathscr{E}\{\hat{r}_{xx}[m]\} \exp(-j2\pi fmT) = \\ &= T \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} \left[\frac{N-|m|}{N}\right] r_{xx}[m] \exp(-j2\pi fmT) = \\ &= W(f) \star S_{xx}(f),\end{aligned}$$

где $W(f)$ — ДВПФ окна Бартлетта, которое определяется выражением

$$w[m] = \begin{cases} 1-|m|/N, & |m| \leqslant N-1; \\ 0, & |m| > N-1. \end{cases}$$

Таким образом, среднее значение выборочного спектра представляет собой свертку истинной СПМ с преобразованием Фурье окна Бартлетта. Поэтому выборочный спектр оказывается *смещенным* при конечных значениях N, но *несмещенным*, когда $N \to \infty$, поскольку

$$\lim_{N\to\infty} \mathscr{E}\{\tilde{P}_{xx}(f)\} = P_{xx}(f),$$

что дает истинный спектр.

Автокорреляция периодограммы определяется выражением

$$\mathscr{E}\{\tilde{P}_{xx}(f_1)\tilde{P}_{xx}(f_2)\} = \left(\frac{T}{N}\right)^2 \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1} \mathscr{E}\{x[k]x[l]x[m]x[n]\} \times \exp\{j2\pi T[f_1(k-l)+f_2(m-n)]\}.$$

Дисперсия выборочного спектра включает в себя моменты *четвертого порядка*, значения которых трудно вычислить в общем случае. Однако поскольку $x[k]$ — белый гауссовский процесс, то статистические моменты четвертого порядка представимы в виде суммы моментов второго порядка:

$$\mathscr{E}\{x[k]x[l]x[m]x[n]\} = \begin{cases} \rho_w^2, & k=l \text{ и } m=n \text{ или } k=m \text{ и } l=n, \\ & \text{или } k=n \text{ и } l=m; \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где ρ — дисперсия гауссовского процесса. Это означает, что

$$\mathscr{E}\{\tilde{P}_{xx}(f_1)\tilde{P}_{xx}(f_2)\} = (T\rho_w)^2\left[1+\left(\frac{\sin\pi NT(f_1+f_2)}{N\sin\pi T(f_1+f_2)}\right)^2+\left(\frac{\sin\pi NT(f_1-f_2)}{N\sin\pi T(f_1-f_2)}\right)^2\right].$$

Отсюда следует, что

$$\operatorname{cov}\{\tilde{P}_{xx}(f_1)\tilde{P}_{xx}(f_2)\} = \mathscr{E}\{\tilde{P}_{xx}(f_1)\tilde{P}_{xx}(f_2)\} - \mathscr{E}\{\tilde{P}_{xx}(f_1)\}\mathscr{E}\{\tilde{P}_{xx}(f_2)\}.$$

Поскольку для белого гауссовского процесса $\mathscr{E}\{\tilde{P}_{xx}(f)\} = T\rho_w$, то

$$\operatorname{cov}\{\tilde{P}_{xx}(f_1)\tilde{P}_{xx}(f_2)\} = (T\rho_w)^2\left[\left(\frac{\sin\pi T(f_1+f_2)N}{N\sin\pi T(f_1+f_2)}\right)^2+\left(\frac{\sin\pi T(f_1-f_2)N}{N\sin\pi T(f_1-f_2)}\right)^2\right].$$

Дисперсия на частоте f будет определяться выражением

$$\operatorname{var}\{\tilde{P}_{xx}(f)\} = \operatorname{cov}\{\tilde{P}_{xx}(f)\tilde{P}_{xx}(f)\} = (T\rho_w)^2\left[1+\left(\frac{\sin 2\pi fTN}{N\sin 2\pi fT}\right)^2\right] = P_{xx}^2(f)\left[1+\left(\frac{\sin 2\pi fTN}{N\sin 2\pi fT}\right)^2\right].$$

откуда видно, что ее значение не стремится к нулю ни при каком большом значении N. Следовательно, выборочный спектр *не является состоятельной* оценкой СПМ, так как его дисперсия имеет величину порядка $P^2_{xx}(f)$ при любом значении N, а это означает, что его стандартное отклонение (т. е. среднеквадратичная ошибка) сравнимо по величине со средним значением, которое должно быть оценено.

Выбор гармонических (т. е. целочисленно кратных величине $1/NT$) частот $f_1 = m/NT$ и $f_2 = n/NT$, таких что $m \neq n$, приводит к нулевой ковариации

$$\operatorname{cov}\{\tilde{P}_{xx}(f_1)\,\tilde{P}_{xx}(f_2)\} = 0,$$

а это означает, что значения периодограммы, разделенные по частоте интервалами, целочисленно кратными величине $1/NT$ герц, будут некоррелированными. С ростом числа отсчетов данных N частотный интервал между такими некоррелированными значениями периодограммы постепенно уменьшается. Это обстоятельство, а также то, что значение дисперсии не уменьшается с увеличением N, приводят к тому, что значения периодограммы начинают все быстрее и быстрее флюктуировать (см., например, рис. 1.3).

В общем случае любой небелый процесс $x[n]$ можно получить, пропуская белый шум с дисперсией ρ_w через линейный фильтр с АЧХ вида $|H(f)|^2$. Поскольку истинное значение СПМ $P_{xx}(f)$ и эта АЧХ связаны соотношением

$$P_{xx}(f) = T\rho_w |H(f)|^2,$$

то можно показать, что в данном случае будет справедливо следующее приближенное равенство:

$$\operatorname{var}\{\tilde{P}_{xx}(f)\} \approx |H(f)|^4 \rho_w^2 \left[1 + \left(\frac{\sin 2\pi fTN}{N \sin 2\pi fT}\right)^2\right] \geqslant \mathscr{E}\{\tilde{P}_{xx}(f)\}^2.$$

Таким образом, с ростом N дисперсия выборочного спектра стремится не к нулю, а к некоторой величине, пропорциональной математическому ожиданию квадрата СПМ (т. е. квадрата истинной СПМ), а это делает такую немодифицированную периодограмму *несостоятельной* оценкой СПМ. Иными словами, при любом значении частоты f оценка $\tilde{P}_{xx}(f)$ не сходится в среднем к $P_{xx}(f)$, где $P_{xx}(f) > 0$.

Глава 5
КЛАССИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ СПЕКТРАЛЬНОГО ОЦЕНИВАНИЯ

5.1. Введение

В гл. 4 были введены два формальных, но эквивалентных метода определения спектральной плотности мощности (СПМ). Косвенный метод основан на использовании бесконечной последовательности значений данных для расчета автокорреляционной последовательности, преобразование Фурье которой дает искомую СПМ. Прямой метод определения СПМ основан на вычислении квадрата модуля преобразования Фурье для бесконечной последовательности данных с использованием соответствующего статистического усреднения. Показано, что результирующая функция, получаемая без использования такого усреднения и называемая *выборочным спектром*, оказывается неудовлетворительной из-за статистической несостоятельности получаемых с ее помощью оценок, поскольку среднеквадратичная ошибка таких оценок сравнима по величине со средним значением оценки. В этой главе будут кратко рассмотрены методы усреднения, которые обеспечивают получение гладких и статистически устойчивых спектральных оценок по конечному числу отсчетов данных. Оценки СПМ, основанные на прямом преобразовании данных и последующем усреднении, получили название *периодограмм*. Оценки СПМ, для получения которых по исходным данным сначала формируются корреляционные оценки, получили название ***коррелограммных*** методов спектрального оценивания. Исторические корни происхождения обоих этих названий были затронуты в гл. 1.

В отличие от непрерывно-временно́го представления методов спектрального оценивания, типичного для других учебных пособий, все классические методы, описанные в данной главе, излагаются применительно к дискретно-временны́м последовательностям отсчетов данных. При использовании любого метода оценивания СПМ пользователю приходится принимать множество компромиссных решений, с тем чтобы по конечному количеству отсчетов данных получать статистически устойчивые спектральные оценки с максимально возможным разрешением. К этим компромиссным решениям относятся, в частности, выбор таких функций окна для взвешивания данных и корреляционных функций и таких параметров усреднения во временно́й

и в частотной областях, которые позволяют сбалансировать требования к снижению уровня боковых лепестков, выполнению эффективного усреднения по ансамблю и к обеспечению приемлемого спектрального разрешения. Устойчивые результаты (малые спектральные флюктуации) и хорошая точность (малое смещение относительно истинных спектральных значений на всех частотах) достижимы только тогда, когда произведение T_eB_e, где T_e — полный интервал записи данных, а B_e — эффективное разрешение по частоте, значительно превышает единицу. Все эти компромиссы можно количественно охарактеризовать в случае гауссовских процессов, для которых подробно теоретически изучены статистические характеристики классических спектральных оценок. Однако выбор конкретного метода спектрального оценивания в случае негауссовских процессов зачастую обосновывается только экспериментальными данными. Да и выбор функции окна очень часто основывается на данных экспериментальных, а не теоретических исследований.

Для адекватного описания статистических *характеристик* каждого из рассмотренных в этой главе методов, потребовалось бы несколько таких глав. Поэтому в ней затронуты только основные моменты, касающиеся этих методов. Более подробную информацию по классическим методам спектрального оценивания можно получить в других книгах, включая книги Дженкинса и Ваттса [8], Блэкмана и Тьюки [2], Купманса [10], Юэня и Фрейзера [22] и Гарднера [5]. После краткой сводки основных результатов, данной в разд. 5.2, в трех последующих разделах затрагивается ряд важных вопросов, необходимых для серьезного обсуждения классических спектральных оценок. В разд. 5.3 обсуждается взвешивание — важная компонента всех классических спектральных оценок. В разд. 5.4 показано, что, для того чтобы количественно охарактеризовать статистическую устойчивость этих оценок, произведение длительности на ширину полосы должно быть дополнено третьим членом. Вопросы, касающиеся этого тройного произведения «устойчивость-длительность-ширина полосы», обсуждаются в разд. 5.4. Оценивание корреляционной функции, требуемое для коррелограммного метода спектрального оценивания, описано в разд. 5.5. После этого предварительного материала в разд. 5.6—5.8 соответственно описаны коррелограммный, периодограммный и комбинированный периодограммно-коррелограммный методы оценивания СПМ. Главу завершает разд. 5.9, в котором описано применение этих классических методов для оценивания числа солнечных пятен.

Все описанные в этой главе методы дают оценки, которые обладают аналогичными статистическими характеристиками и в целом выглядят примерно одинаково, если не считать неболь-

ших визуальных различий в тонких деталях формы спектров. Поэтому на практике предпочтение чаще всего отдается тому методу, который оказывается наиболее эффективным в вычислительном отношении. До широкого распространения электронных вычислительных машин в основном применялся коррелограммный метод, о чем кратко упоминается в книге Блэкмана и Тьюки [2]. С появлением алгоритма БПФ и специализированных интегральных схем для обработки сигналов предпочтение стало отдаваться методам, основанным на использовании периодограммы; см. статью Джонса [9].

5.2. Краткая сводка результатов

В соответствии с двумя эквивалентными определениями СПМ, представленными в гл. 4, существуют два основных классических подхода к оцениванию СПМ. Прямой, или *периодограммный*, метод позволяет получать оценку СПМ непосредственно по исходному набору данных. При использовании же косвенного метода сначала должна вычисляться оценка корреляционной последовательности, или коррелограмма, преобразование Фурье которой и дает искомую оценку СПМ.

На рис. 5.1 приведена диаграмма, отображающая основные этапы периодограммного метода, подробно описанного в подразд. 5.7.3. Она предназначена для тех читателей, которые хотели бы сразу приступить к реализации этого метода, особенно глубоко не вдаваясь в содержание данной главы. Машинная программа реализации этого периодограммного метода приведена в приложении 5.В. Применение метода начинается с этапа сбора N отсчетов данных, которые берутся с периодом T секунд на отсчет, с последующим (по желанию) этапом устранения тренда[1]. Если не устранять большие значения отсчетов и другие тренды в данных, то это может привести к получению искаженных или смещенных спектральных оценок. Методы устранения тренда обсуждаются в гл. 14. Для того чтобы получить статистически устойчивую спектральную оценку, имеющиеся данные необходимо разбить на перекрывающиеся (по возможности) сегменты и в последующем усреднить выборочные спектры, полученные по каждому такому сегменту. Параметры этого усреднения изменяются посредством соответствующего выбора значений тех параметров, которые устанавливают число отсчетов на сегмент (NSAMP) и число отсчетов, на которое необхо-

[1] Если анализируется процесс $X(t)=m(t)+n(t)$, где $n(t)$ — стационарный случайный процесс со спектром, ширина которого значительно превышает ширину спектра детерминированной функции $m(t)$, то функция $m(t)$ характеризует отклонение процесса $X(t)$ от стационарности и называется *трендом* (см., например, [16*], с. 52). — *Прим. ред.*

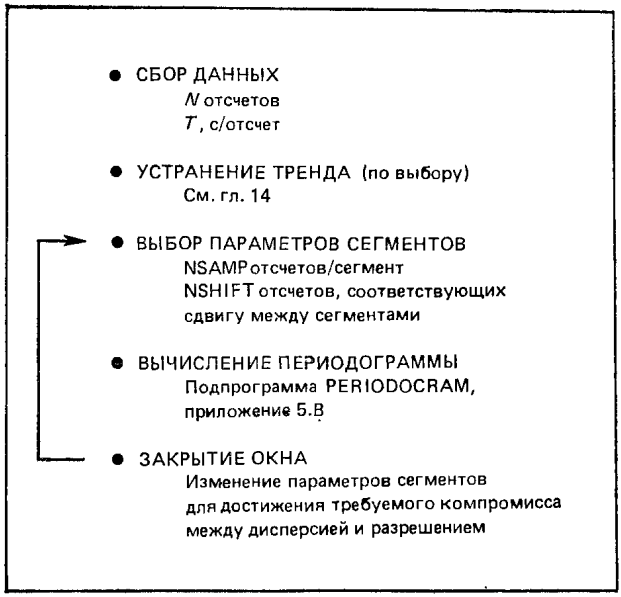


Рис. 5.1. Основные этапы оценивания СПМ с помощью периодограммного метода Уэлча.

димо сдвинуть начало следующего сегмента (NSHIFT). Количество сегментов выбирается в зависимости от требуемой степени гладкости спектральной оценки и требуемого спектрального разрешения. При малом значении параметра NSAMP получается больше сегментов, по которым будет производиться усреднение, а следовательно, будут получаться оценки с меньшей дисперсией, но также и с меньшим разрешением. Увеличение параметра NSAMP повышает спектральное разрешение, но, естественно, за счет увеличения дисперсии из-за меньшего числа усредняемых сегментов. При получении периодограммы, приведенной в приложении 5.В, было использовано окно Хэмминга, с тем чтобы уменьшить боковые лепестки спектральной оценки. Снижать уровень боковых лепестков необходимо для того, чтобы можно было обнаружить слабые компоненты сигнала, которые могут присутствовать в спектре. Другие функции окна, которые могут использоваться для этой цели, обсуждаются в разд. 5.3.

Стрелка возврата, показанная на рис. 5.1, указывает на необходимость нескольких повторных проходов по данным при различных длинах и числах сегментов данных. Это необходимо для исследования данных при различных параметрах частотного разрешения и устойчивости оценки, что позволит получить

больше полезной информации об изучаемом неизвестном процессе. Если полученный спектр содержит много мелких деталей, то, возможно, стóит несколько уменьшить число усредняемых сегментов с целью улучшения разрешения (более длинные сегменты). Все подобные манипуляции могут помочь определить наилучшее соотношение между рабочими параметрами. Процедура, которая начинается с использования низкого разрешения и высокой устойчивости, с последующим переходом к периодограммным оценкам с бóльшим разрешением и более низкой устойчивостью называется *закрытием* (т. е. уменьшением размера) окна. Это название относится к ширине окна, которая устанавливается посредством выбора параметра NSAMP. Закрытие окна достигается за счет уменьшения числа сегментов при одновременном увеличении их длины.

Для иллюстрации поведения периодограммы в случае короткой записи данных рассмотрим тест-последовательность из 64 комплексных отсчетов, о которой говорилось в гл. 1 (разд. 1.3) и распечатка значений которой приведена в конце книги в приложении II. Периодограмма этой последовательности, соответствующая максимальному разрешению и минимальной устойчивости, показана на рис. 5.2, *а*. Она получена для случая только одного сегмента (полной записи данных) без применения окна (т. е. по сути дела, с использованием прямоугольного окна). Заметим, что близкие синусоидальные компоненты (см. рис. 1.8) на ней не разрешены, что, однако, и не удивительно. Величина произведения длительности на ширину полосы, о которой говорилось в гл. 2, указывает на то, что максимально достижимое разрешение составляет в данном случае величину порядка $1/64T$ герц [T — интервал (период) отсчетов] или $(1/64T)/(1/T)=0{,}0156$, если выразить его в относительных долях частоты отсчетов. Две «накрытые» (неразрешенные) синусоиды, соответствующие спектру на рис. 1.8, разнесены по частоте на 0,01, кроме того, слабая синусоида на частоте 0,1 почти затерялась в боковых лепестках спектра сильных синусоид. На рис. 5.2, *б* показана гладкая усредненная периодограмма с низким разрешением, которая была получена посредством разбиения записи данных на три сегмента по 32 отсчета в каждом, взвешенных окном Хэмминга, с перекрытием сегментов, равным 16 отсчетам. На этой периодограмме отчетливо видна слабая синусоида.

На рис. 5.3 приведена диаграмма, отображающая основные этапы коррелограммного метода оценивания СПМ; программа его реализации помещена в приложении 5.Б. Он основан на методе, предложенном Блэкманом и Тьюки [2] и подробно описанном в разд. 5.6. Подобно диаграмме на рис. 5.1, эта диаграмма также предназначена для тех читателей, которые хотели

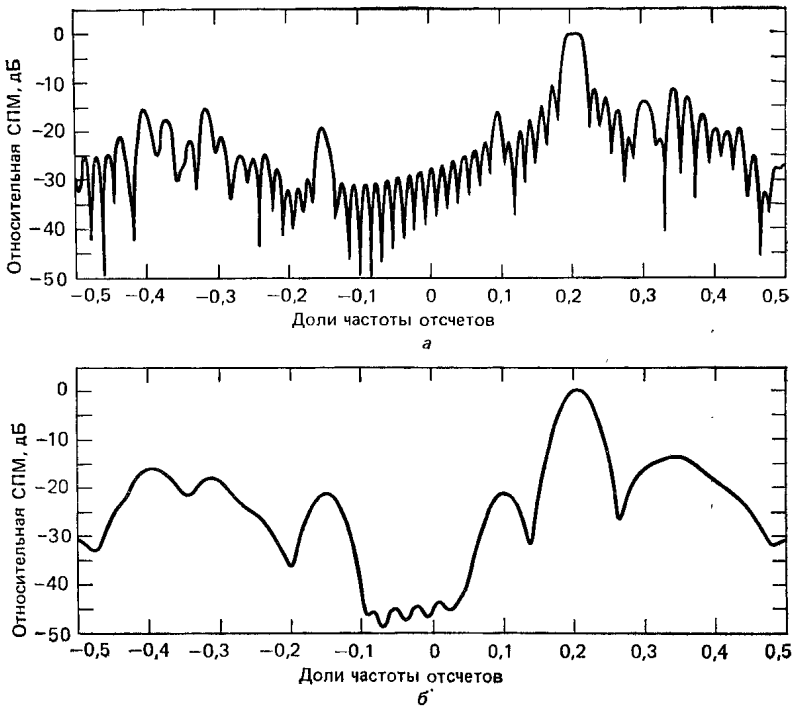


Рис. 5.2. Периодограммные оценки СПМ для 64-точечной тест-последовательности: *а* — один сегмент, окно не применялось; *б* — три сегмента, окно Хэмминга.

бы сразу приступить к реализации этого метода, особенно глубоко не вдаваясь в содержание последующего материала данной главы. Этап устранения тренда предназначен для тех же целей, что и в случае периодограммы. Единственный регулируемый параметр — это длина автокорреляционной последовательности, задаваемая значением параметра LAG, который соответствует наибольшему временно́му сдвигу. Этот параметр служит тем же целям, что и параметр NSAMP в периодограммном методе; его значение определяет степень гладкости и степень разрешения спектральной оценки. Для взаимосвязанного изменения устойчивости и разрешения оценки может быть использована процедура закрытия окна, аналогичная той процедуре, которая была использована в периодограммном методе. Различие здесь лишь в том, что окно теперь применяется к автокорреляционной последовательности, а не к последовательности сегментов данных. С увеличением числа оценок значений автокорреляционной функции растет разрешение и уменьшается устойчивость.

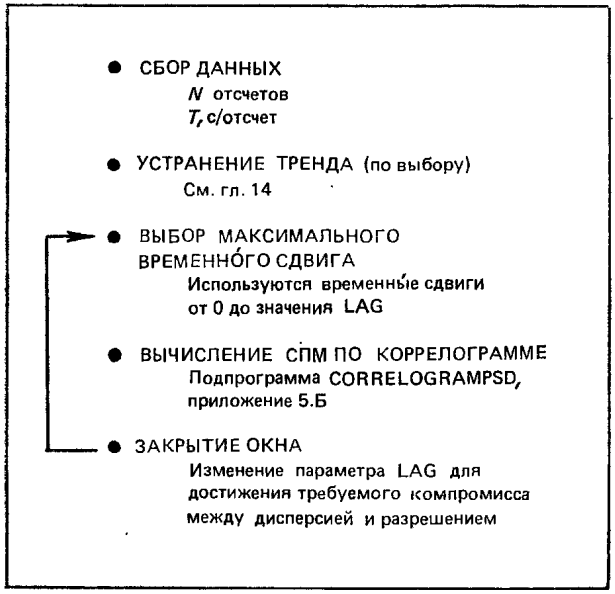


Рис. 5.3. Основные этапы оценивания СПМ с помощью коррелограммного метода Бартлетта.

Примеры оценок СПМ, полученные с помощью этого коррелограммного метода, показаны на рис. 5.4. Снова использовалась та же 64-точечная последовательность комплексных данных. 16 и 32 значения несмещенной автокорреляционной функции были оценены при сдвигах от 0 до $15T$ секунд и до $31T$ секунд. Окно Хэмминга использовалось для взвешивания автокорреляционных оценок. На графиках, представленных на рис. 5.4 в логарифмическом масштабе, отрицательные боковые лепестки заштрихованы. Этот рисунок аналогичен, но не идентичен периодограммной оценке, показанной на рис. 5.2, *б*. Два графика на рис. 5.4 дают полное представление о взаимосвязи между разрешением и гладкостью оценки.

Напомним еще раз, что если не известно, как выбирать компромиссное решение относительно устойчивости и разрешения оценок, то рекомендуется начать с выбора максимальной устойчивости (наиболее гладкой оценки), а это значит — с минимального разрешения, а затем постепенно увеличивать длину сегментов (в случае периодограммы) или число корреляционных членов (в случае коррелограммы). Эта процедура будет увеличивать дисперсию оценки и уменьшать ширину спектральных пиков (повышать разрешение). Никаких строгих правил, устанавливающих момент, когда нужно остановиться, конечно,

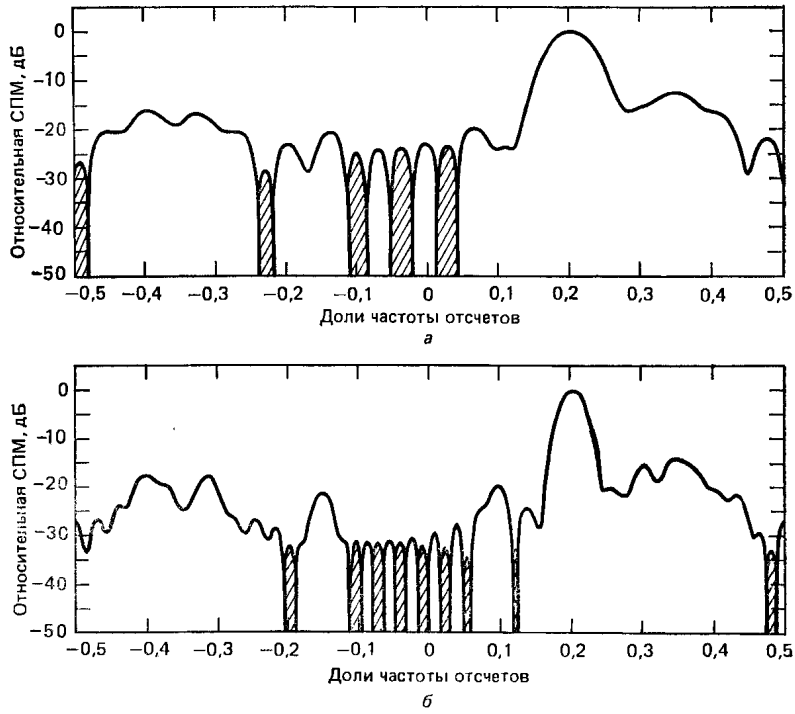


Рис. 5.4. Коррелограммный метод оценки СПМ для 64-точечной тест-последовательности: *а* — 16 значений автокорреляции, окно Хэмминга; *б* — 32 значения автокорреляции, окно Хэмминга. Нанесены только абсолютные значения СПМ, отрицательным значениям СПМ соответствуют заштрихованные области.

не существует, поэтому следует продолжать указанную процедуру до тех пор, пока достигнутое разрешение не позволит передать наиболее тонкие и *важные* детали спектра. В ряде случаев может потребоваться некоторая предварительная информация о сигналах, которые могут присутствовать в спектре, для того чтобы определить, какие детали спектра важны, а какие — нет. Если такая информация отсутствует, то следует остановиться тогда, когда дальнейшее увеличение длины сегментов данных или величины временны́х сдвигов к существенным изменениям в спектральных оценках уже не приводит.

5.3. Окна

Один из важных вопросов, который является общим для всех классических методов спектрального оценивания, связан с применением функции окна. Обработка с помощью окна (windo-

wing) используется для управления эффектами, обусловленными наличием боковых лепестков в спектральных оценках. Эти эффекты обсуждаются в данном разделе. Заметим, что в этой книге термин «взвешивание» (weighting) используется как синоним термина «обработка с помощью окна». Это контрастирует с практикой тех специалистов, которые употребляют термин «окно» (window) только применительно к преобразованиям, связанным с применением весовой функции во временно́й области. Функция $W(f)$ является *частотным окном* в том случае, когда она получена в результате дискретно-временно́го преобразования Фурье (ДВПФ) *окна данных* $w[n]$. Окна данных называются также *обуживающими функциями* (tapering functions), т. е. плавно спадающими к краям. Функция $\Omega(f)$ обозначает *спектральное окно* в том случае, когда она является ДВПФ *корреляционного окна* $\omega[m]$, применяемого к дискретно-временно́й автокорреляционной последовательности. Основное назначение окна данных — уменьшить величину смещения в периодограммных спектральных оценках. Основное назначение корреляционного окна — уменьшить дисперсию коррелограммной оценки СПМ.

Заметим, что имеющуюся конечную запись данных или имеющуюся конечную корреляционную последовательность удобно рассматривать как некоторую часть соответствующей бесконечной последовательности, видимую через применяемое окно. Например, последовательность наблюдаемых данных $x_0[n]$ из N отсчетов математически можно записать как произведение прямоугольной функции единичной амплитуды

$$\text{rect}[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant n \leqslant N-1; \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \tag{5.1}$$

и бесконечной последовательности $x[n]$

$$x_0[n] = x[n] \cdot \text{rect}[n]. \tag{5.2}$$

При этом принимается очевидное допущение о том, что все ненаблюдаемые отсчеты равны нулю независимо от того, так ли это на самом деле или нет. Дискретно-временно́е преобразование Фурье взвешенной окном последовательности, выраженное через преобразования последовательности $x[n]$ и прямоугольного окна $\text{rect}[n]$, равно свертке этих преобразований

$$X_0(f) = X(f) \circledast D_N(f), \tag{5.3}$$

где

$$D_N(f) = T \exp(-j2\pi fT[N-1]) \frac{\sin(\pi fTN)}{\sin(\pi fT)}. \tag{5.4}$$

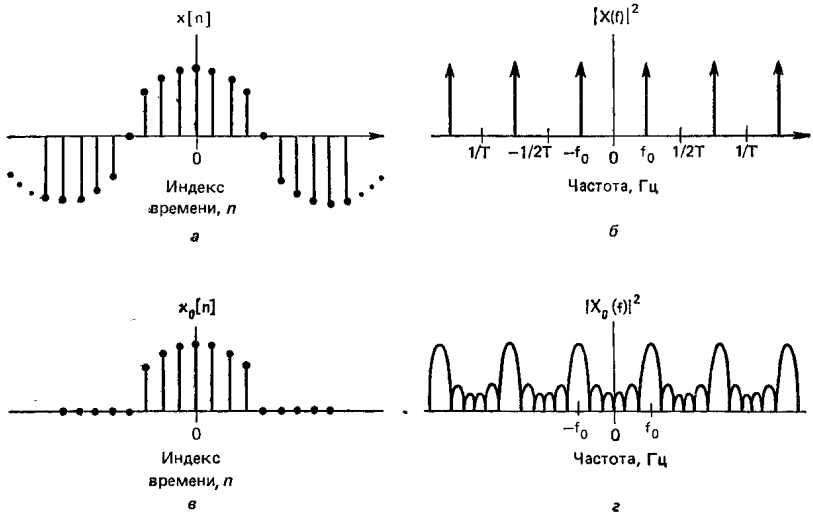


Рис. 5.5. Иллюстрация смещения дискретно-временно́го преобразования Фурье (ДВПФ) вследствие просачивания из-за взвешивания данных: *а* — исходная дискретно-временна́я синусоидальная последовательность; *б* — модуль периодического ДВПФ синусоидальной последовательности; *в* — взвешенная синусоидальная последовательность; *г* — модуль ДВПФ взвешенной последовательности.

Функция $D_N(f)$, называемая *дискретной функцией* sinc, или *ядром Дирихле*, представляет собой ДВПФ прямоугольной функции. Преобразование наблюдаемой конечной последовательности является искаженной версией преобразования бесконечной последовательности. Влияние прямоугольного окна на дискретно-временну́ю синусоиду с частотой f_0 иллюстрирует рис. 5.5, из которого видно, что острые спектральные пики ДВПФ бесконечной синусоидальной последовательности расширились за счет воздействия копий преобразования окна. Таким образом, минимальная ширина спектральных пиков взвешенной окном последовательности ограничена шириной, определяемой главным лепестком преобразования этого окна, и не зависит от исходных данных. Боковые лепестки преобразования окна, иногда называемые просачиванием, будут изменять амплитуды соседних спектральных пиков. Поскольку ДВПФ — периодическая функция, то наложение боковых лепестков от соседних спектральных периодов может привести к дополнительному смещению. Увеличение частоты отсчетов позволяет ослабить эффект наложения боковых лепестков. Аналогичные искажения будут наблюдаться и в случае несинусоидальных сигналов.

Просачивание приводит не только к появлению амплитудных ошибок в спектрах дискретных сигналов, но может также

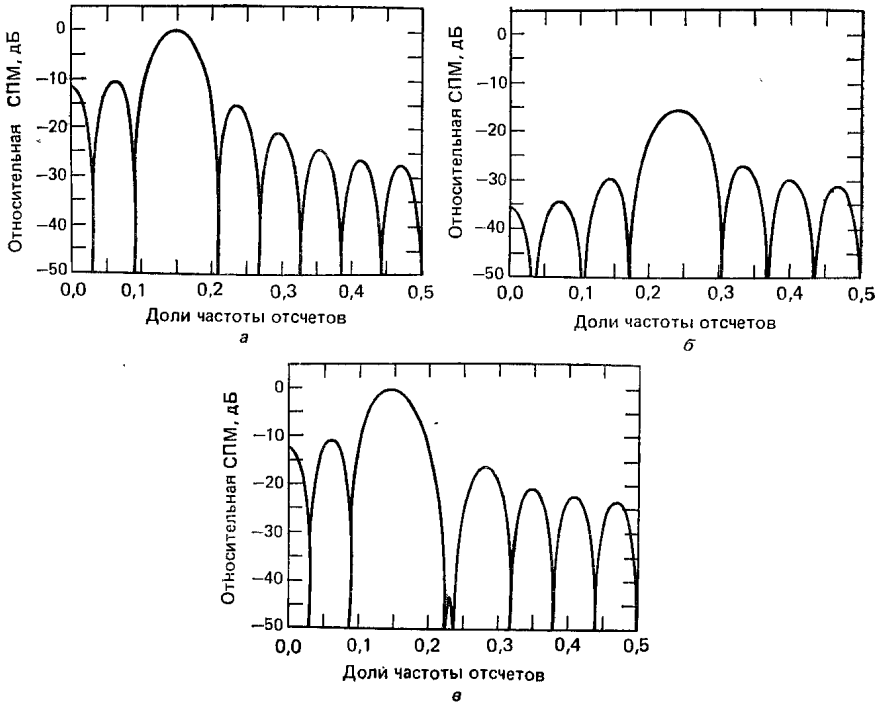


Рис. 5.6. Иллюстрация эффекта взвешивания, маскирующего слабый сигнал близким сильным сигналом: *а* — логарифм модуля ДВПФ сильного синусоидального сигнала (16 отсчетов, амплитуда 1,0, относительная частота (в долях частоты отсчетов) 0,15, начальная фаза 45°); *б* — логарифм модуля ДВПФ слабого синусоидального сигнала (16 отсчетов, амплитуда 0,19, относительная частота 0,24, начальная фаза 162°); *в* — логарифм модуля ДВПФ объединенного сигнала — отклик на слабый сигнал практически подавлен.

маскировать присутствие слабых сигналов и, следовательно, препятствовать их обнаружению. Рассмотрим дискретно-временно́е преобразование Фурье (ДВПФ) 16 отсчетов сигнала, состоящего из двух синусоид, которое показано на рис. 5.6. Мощность более слабой синусоиды в этом сигнале примерно на 17 дБ меньше мощности более сильной синусоиды. В этом экстремальном случае боковые лепестки более сильной синусоиды почти полностью подавляют главный лепесток более слабой синусоиды.

Можно предложить ряд других функций окна, применение которых позволяет снизить уровень боковых лепестков по сравнению с тем их уровнем, который они имеют в случае прямоугольного окна. Снижение уровня боковых лепестков будет уменьшать смещение. Однако это дается ценой расширения

главного лепестка спектра окна, что, естественно, приводит к ухудшению разрешения. Следовательно, должен выбираться какой-то компромисс между шириной главного лепестка и уровнем подавления боковых лепестков. Для классификации функций окна используется несколько показателей для оценки их качества. Ширина полосы частот главного лепестка позволяет судить о частотном разрешении. Для количественной оценки ширины полосы главного лепестка используются два показателя. Традиционным показателем является *ширина полосы на уровне половинной мощности*, т. е. на уровне, который на 3 дБ ниже максимума главного лепестка. В качестве второго показателя используется эквивалентная ширина полосы, определение которой было дано в гл. 2. Два показателя используются и для оценки характеристик боковых лепестков. Один из них — это *пиковый* (или *максимальный) уровень боковых лепестков,* который позволяет судить о том, насколько хорошо окно подавляет просачивание. Второй — это *скорость спадания уровня боковых лепестков,* который характеризует скорость, с которой снижается уровень боковых лепестков, ближайших к главному лепестку. По сути дела, скорость спадания уровня боковых лепестков зависит от числа используемых отсчетов N и с увеличением N стремится к некоторой асимптотической величине, которую принято выражать в децибелах на октаву изменения ширины полосы частот.

В табл. 5.1 даны определения некоторых употребительных дискретно-временны́х функций окна из числа предложенных в разное время для использования при спектральном оценивании; см., например, работы [6, 7, 12]. На рис. 5.7 показаны типичные 51-точечные окна и их частотные характеристики, полученные посредством вычисления модуля ДВПФ каждого окна. В табл. 5.1 определены N-точечные симметричные окна с двумя различными начальными точками отсчета. Для окон данных начальной точкой отсчета является $n=0$. Для корреляционных окон этой точкой является значение $-(N-1)/2$. В качестве корреляционных окон используются только окна нечетной длины, поскольку точка симметрии таких окон приходится на средний элемент окна. В случае корреляционного окна значение этого среднего (или центрального) элемента всегда равно единице. У окон четной длины точка симметрии находится в центре окна точно посередине между двумя элементами. В литературе часто используются и несколько отличные определения функций окна. Например, некоторые авторы предпочитают опускать концевые точки окна с нулевыми значениями. Для операций с дискретно-временны́ми рядами Фурье, не требующих дополнения нулевыми отсчетами (нулями), точка, соответствующая наибольшему временно́му индексу, обычно опускается, с тем чтобы обеспечить

Таблица 5.1. Определения типичных N-точечных дискретно-временны́х окон

Название окна	Дискретно-временна́я функция $w[n]$ или $\omega[m]$	Частотная характеристика $W(f)$ или $\Omega(f)$
Прямоугольное (равномерное)	1	$D_N(f)$
Треугольное (окно Бартлетта)	$1-2\lvert t[n]\rvert$	$(2/N)D^2_N(f/2)$
Косинус-квадрат (окно Ханна)	$\cos^2(\pi t[n]) = 0{,}50 + 0{,}50\cos(2\pi t[n])$	$0{,}50D_N(f) + 0{,}25\left[D_N\left(f-\frac{1}{NT}\right)+D_N\left(f+\frac{1}{NT}\right)\right]$
Приподнятый косинус (окно Хэмминга)	$0{,}54+0{,}46\cos(2\pi t[n])$	$0{,}54D_N(f)+0{,}23\left[D_N\left(f-\frac{1}{NT}\right)+D_N\left(f+\frac{1}{NT}\right)\right]$
Взвешенные косинусы (окно Наттолла, $R=3$)	$\sum_{r=0}^{R} a_r\cos(2\pi r t[n])$	$\sum_{r=0}^{R} 0{,}5\,a_r\left[D_N\left(f-\frac{r}{NT}\right)+D_N\left(f+\frac{r}{NT}\right)\right]$
Усеченное гауссовское ($\alpha=2{,}5$)	$\exp\left[-\frac{1}{2}(2\alpha t[n])^2\right]$	$(\sqrt{2\pi}/2\alpha)\exp\left[-\frac{1}{2}(2\pi fT/\alpha)^2\right] \bigstar D_N(f)$
Равноволновое (окно Чебышёва, $\beta=50$ дБ)	Обратное ДВПФ частотной характеристики	$\cos[(N-1)\arccos\{\alpha\cos(\pi fT)\}]/\mathrm{ch}[(N-1)\,\mathrm{arch}(\alpha)]$, $\alpha=\mathrm{ch}[\mathrm{arch}(10^{\beta/20})/(N-1)]$, β = отношению уровней главного и боковых лепестков, дБ

- T — интервал отсчетов.
- Окно данных $w[n]$ определено в диапазоне индексов времени $0 \leqslant n \leqslant N-1$, где N может быть четным или нечетным.
- Корреляционное окно $\omega[m]$ определено в диапазоне индексов временно́го сдвига $-(N-1)/2 \leqslant m \leqslant (N-1)/2$, где N всегда нечетно.
- Функция $t[n] = (n-[N-1]/2)/[N-1]$ для $w[n]$ и $t[m] = m/N$ для $\omega[m]$.
- Функция $D_N(f) = T\,\mathrm{sinc}(fNT)$ для $w[n]$ и $D_N(f) = T\exp(j2\pi fT)\mathrm{sinc}(fNT)$ для $\omega[m]$.

Таблица 5.2. Характеристики окон, приведенных в табл. 5.1

Окно	Максимальный уровень боковых лепестков, дБ	Асимптотическая скорость спадания боковых лепестков, дБ/октава	Эквивалентная ширина полосы[1])	Ширина полосы по уровню половинной мощности[1])
Прямоугольное	—13,3	—6	1,00	0,89
Треугольное	—26,5	—12	1,33	1,28
Окно Ханна	—31,5	—18	1,50	1,44
Окно Хемминга	—43	—6	1,36	1,30
Окно Наттолла ($r=3$)	—98	—6	1,80	1,70
Гауссовское	—42	—6	1,39	1,33
Равноволновое	—50	0	1,39	1,33

[1]) В элементах, или ячейках, разрешения дискретно-временно́го ряда Фурье (ДВРФ).

корректность периодического продолжения окна [7]. Характеристики окон, описанных в табл. 5.1, приведены в табл. 5.2. Величины, помещенные в этой таблице в колонке «Эквивалентная ширина полосы», нормированы относительно частотного разрешения ДВРФ, равного $1/NT$ герц.

Из всех приведенных в табл. 5.2 окон самый узкий главный лепесток имеет частотная характеристика прямоугольного окна, но зато у него и самый высокий уровень боковых лепестков. Треугольное окно впервые было описано Бартлеттом в связи с проводимым им анализом периодограммных спектральных оценок, и поэтому часто называется его именем. Автокорреляционной функцией прямоугольного окна является треугольное окно, ширина которого равна удвоенной ширине прямоугольного окна. Окно типа «косинус квадрат»[1]) названо в честь австрийского метеоролога Юлиуса фон Ханна. Это окно часто ошибочно называют окном *Хэннинга*. Оно примечательно тем, что его легко реализовать в частотной области всего лишь с помощью трех операций сложения и двух операций сдвига, что, по сути дела, сводится к умножению на коэффициенты 1/2 и 1/4 на каждой частоте. Окно типа приподнятой косинусоиды было введено Р. У. Хэммингом и поэтому часто называется его именем. Множители 0,54 и 0,46 были выбраны для того, чтобы практически полностью устранить максимальный боковой лепесток функции $D_N(f)$. Этот подход можно обобщить на все семейство взвешива-

[1]) Окно типа «косинус квадрат» в литературе также называется «приподнятым косинусом», (см., например, [13*], т. 2, с. 209, [17*], с. 98), тогда как автор использует «приподнятый косинус» как синоним окна Хэмминга, что свидетельствует о неустоявшейся терминологии в этой области. — *Прим. ред.*

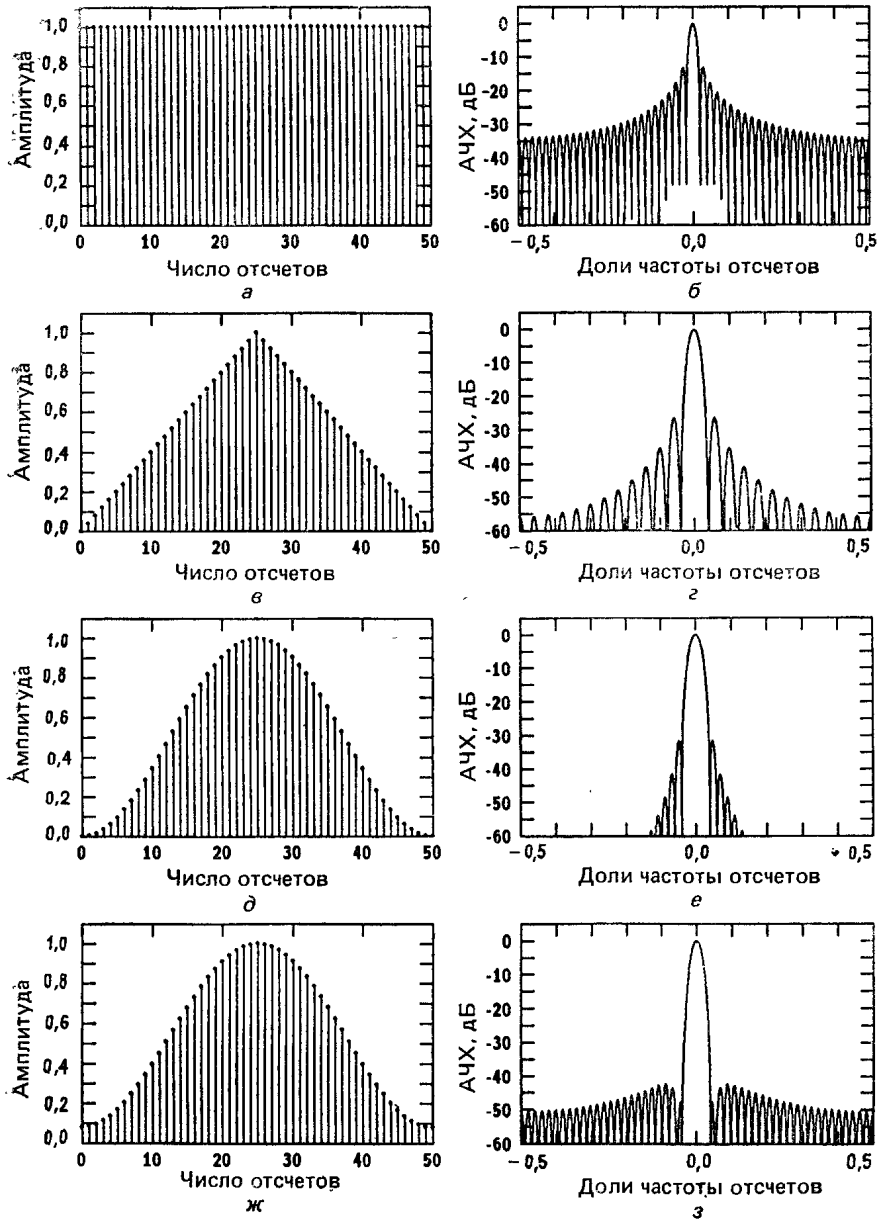


Рис. 5.7. Типичные дискретно-временные функции окна (слева) и логарифм модуля их ДВПФ (справа): *а—б* — прямоугольное окно; *в—г* — треугольное окно; *д—е* — окно Ханна; *ж—з* — окно Хэмминга;

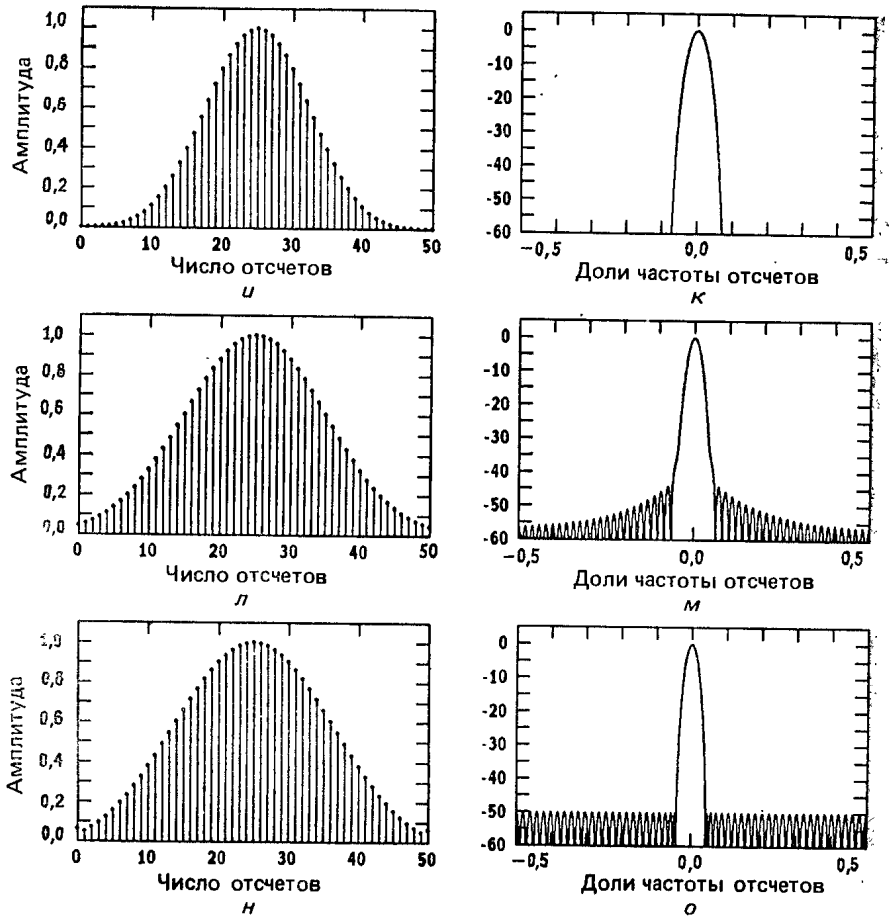


Рис. 5.7. *Продолжение.* *и—к* — окно Наттолла; *л—м* — гауссовское окно; *н—о* — окно Чебышёва.

ющих косинусных окон; см. Наттолл [12], Хэррис [7] и Блэкман и Тьюки [2]. Веса́ косинусов могут быть оптимизированы относительно ряда условий, включая требование минимального уровня боковых лепестков, максимальной скорости их спадания и максимальной гладкости (наибольшее число производных без нарушения непрерывности). Например, окно, показанное на рис. 5.7, *и*, является четырехчленным косинусным окном, которое при $a_0=0{,}3635819$, $a_1=0{,}4891775$, $a_2=0{,}1365995$ и $a_3=0{,}0106411$ имеет минимальный уровень боковых лепестков, равный —98 дБ [12]. Гауссовское окно, которое упоминалось в гл. 2 в разд. «Задачи», имеет наименьшую величину произведения длительно-

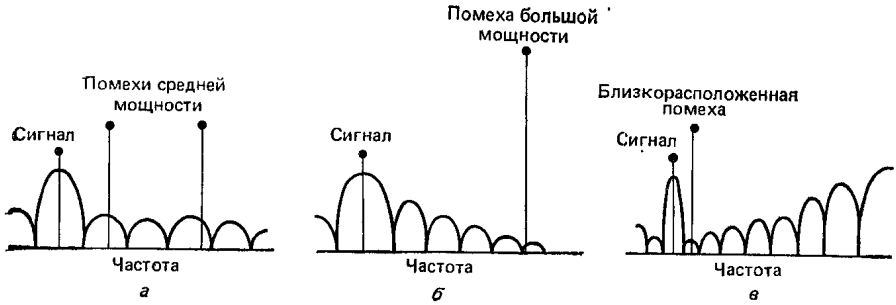


Рис. 5.8. Стратегия выбора окна: *а* — окно со слабо изменяющимся уровнем боковых лепестков при наличии близкой и удаленной помех сравнимого уровня; *б* — окно с быстро спадающим уровнем боковых лепестков при наличии сильной удаленной помехи; *в* — нетрадиционное окно специальной формы с малыми ближними и возрастающими дальними боковыми лепестками при наличии очень близкой помехи.

сти на ширину полосы из всех приведенных функций окна, хотя это не справедливо в случае усеченного гауссовского окна, т. е. когда оно имеет конечную ширину. В гауссовском окне, показанном на рис. 5.7, *л*, использован параметр $\alpha=2{,}5$. У чебышёвского (или равноволнового) окна все боковые лепестки имеют одинаковый уровень. Это окно впервые было использовано в теории антенных решеток и обладает тем свойством, что из всех N-точечных дискретных окон с уровнем боковых лепестков, равным или не превосходящим некоторый заданный уровень, имеет самый узкий главный лепесток. Для окна Чебышёва, показанного на рис. 5.7, *н*, был выбран параметр $\beta=50$ дБ.

Стратегия выбора окна диктуется компромиссом между смещением из-за помех в области близких боковых лепестков и смещением из-за помех в области дальних боковых лепестков. Например, если достаточно сильные компоненты сигнала расположены вблизи и на отдалении от слабой компоненты сигнала, то следует выбирать окно с одинаковым уровнем боковых лепестков около главного лепестка, с тем чтобы обеспечить малое смещение; см. рис. 5.8, *а*. Если же имеется одна сильная компонента, удаленная от слабой компоненты сигнала, как показано на рис. 5.8, *б*, то следует выбирать окно с быстро спадающим уровнем боковых лепестков, причем их уровень в непосредственной близости к главному лепестку в данном случае не имеет большого значения. В том случае, когда необходимо обеспечить высокое разрешение между очень близкими компонентами сигнала и удаленные компоненты отсутствуют, вполне приемлемым может оказаться окно даже с увеличивающимся уровнем боковых лепестков, но зато с очень узким главным лепестком, что иллюстрирует рис. 5.8, *в*. Если динамический

диапазон сигнала ограничен, то характеристики боковых лепестков не имеют особого значения, и поэтому можно выбрать окно, которое проще для численной реализации. Если спектр сигнала относительно гладок, то можно вообще не применять окна. Окна, которые могут сами в некотором смысле регулироваться, или «адаптироваться», к параметрам данных, например такое, как показано на рис. 5.8, *в*, будут использованы в гл. 13 при обсуждении метода спектрального оценивания с минимальной дисперсией.

5.4. Разрешение и произведение «устойчивость×длительность×ширина полосы»

В подразд. 2.11 было введено выражение для произведения длительности на ширину полосы для случая детерминированного сигнала. Было показано, что для временно́го (пространственного) сигнала с длительностью (с апертурой) $T_e=NT$ секунд (метров) произведение длительности на ширину полосы удовлетворяет условию

$$T_e B_e = 1,$$

где B_e — эквивалентная ширина полосы в герцах. Поэтому принято говорить, что разрешение спектральной плотности *энергии*, полученной по конечной последовательности отсчетов *детерминированного* сигнала, равно B_e герц, т. е. приблизительно равно величине, обратной интервалу записи данных. Для того чтобы определить разрешение спектральной плотности мощности, получаемой по конечной последовательности отсчетов *случайного* сигнала, произведение длительности на ширину полосы необходимо несколько видоизменить, с тем чтобы учесть случайный характер сигнала, влияющий на статическое «качество» спектральной оценки.

Одной из подходящих модификаций этого произведения является *произведение «устойчивость×длительность×ширина полосы»* QT_eB_e, где Q — статистический *показатель качества* оценки, определяемый как отношение дисперсии оценки СПМ к квадрату математического ожидания этой оценки

$$Q = \frac{\operatorname{var}\{\hat{P}(f)\}}{[\mathscr{E}\{\hat{P}(f)\}]^2}. \tag{5.5}$$

Показатель качества Q — это, по сути дела, инвертированное отношение сигнал/шум (SNR), которое непосредственно связано со статистической устойчивостью спектральной оценки. Значения Q, много меньшие единицы, соответствуют гладким спектральным оценкам с малыми флюктуациями (малой дисперсией).

Значения Q, много бóльшие единицы, соответствуют весьма зашумленным спектральным оценкам с большими флюктуациями (с большой дисперсией). Эквивалентная ширина полосы B_e, входящая в произведение длительности на ширину полосы, заменяется теперь величиной B_s — *эффективной статистической шириной полосы* (Блэкман и Тьюки [2]), которая в случае спектрального окна $\Omega(f)$ определяется выражением

$$B_s = \frac{\left[\int_{-1/2T}^{1/2T} \Omega(f)\, df\right]^2}{\int_{-1/2T}^{1/2T} \Omega^2(f)\, df}. \tag{5.6}$$

Величина B_s характеризует ширину полосы эквивалентного прямоугольного окна с тем же значением отношения дисперсии к квадрату среднего значения на его выходе, как и у окна $\Omega(f)$ в том случае, когда на вход подан белый шумовой процесс (обсуждение этого вопроса см. в разд. В.8 книги Блэкмана и Тьюки [2]). Следовательно, для случайных сигналов вместо эквивалентной детерминированной ширины полосы B_e необходимо использовать эффективную статистическую ширину полосы B_s. Однако обе эти величины можно связать соотношением $B_s = \alpha B_e$, где коэффициент α равен примерно 0,8 для прямоугольного окна, 1,3 для окна Ханна и 1,4 для окна Хэмминга (см. ниже разд. «Задачи»). Ширина полосы B_s позволяет грубо судить о разрешении спектральной оценки, хотя ширина полосы B_e ближе к величине действительного разрешения (в герцах).

В разд. 5.8 показано, что для гауссовского шумового процесса условие

$$QT_eB_s \geqslant 1 \tag{5.7}$$

применимо ко всем классическим процедурам спектрального оценивания, описанным в этой главе. Если $T_eB_s \simeq 1$, то, как правило, $QT_eB_s > 1$. С другой стороны, если значение произведения T_eB_s выбрано значительно бóльшим единицы, то для всех классических спектральных оценок будет выполняться приближенное равенство

$$QT_eB_s \approx 1. \tag{5.8}$$

Даже если все классические процедуры спектрального оценивания имеют одинаковую статистическую устойчивость (малые флюктуации), каждая оценка будет обладать некоторыми незначительными отличиями от других оценок, получаемых по одной и той же заданной записи данных.

Произведение «устойчивость×длительность×ширина полосы» устанавливает взаимосвязь между тремя фундаментальными параметрами, от которых зависят характеристики спект-

ральных оценок. Для заданной записи данных продолжительностью T_e невозможно получить оценки, которые одновременно обладают высоким разрешением (малыми значениями B_s) и высокой устойчивостью (малыми значениями Q). Например, если необходимо, чтобы дисперсия спектральной оценки составляла десятую часть от ее среднего значения, то $Q=0{,}1$ и достижимое разрешение будет равно $B_s \approx 10/T_e$ герц. Это значение в 10 раз больше эмпирического значения $1/T_e$ для разрешения детерминированного сигнала, о котором говорилось в гл. 2. При этом значении Q лишь изменения оценки СПМ, в $\sqrt{Q}$ раз бо́льшие ее среднего значения, могут с уверенностью рассматриваться как спектральные особенности этой оценки, а не изменения, обусловленные шумом. Этот пример подчеркивает важность принятия такого компромиссного решения, которое не нарушало бы баланс между статистической устойчивостью и разрешением, которые требуются от всех методов спектрального оценивания. Заметим, что увеличение числа отсчетов за счет увеличения частоты дискретизации при неизменном интервале T_e не будет влиять на максимально достижимое разрешение, так как на него влияет только длина записи данных, но не число отсчетов. Значительная часть литературы по классическим методам спектрального оценивания посвящена процедурам, которые позволяют по заданному интервалу записи данных достичь предельной устойчивости (наименьшего значения Q) и заданной величины разрешения; см., например, Дженкинс и Ваттс [8] и Наттолл [13].

Аналитическое определение показателя качества Q для произвольного метода оценивания СПМ применительно к произвольному случайному процессу в общем случае является задачей, не поддающейся строгому математическому решению. Именно поэтому аналитические выкладки, подобные, скажем, тем, что привели нас к неравенству (5.7), как правило, ограничиваются рассмотрением стационарных гауссовских процессов в предположении больших значений произведения T_eB_s и постоянства уровня СПМ в пределах интервала (ячейки) разрешения. Поскольку для гауссовских процессов статистические моменты четвертого порядка можно записать в виде сумм произведений моментов второго порядка (т. е. дисперсий), то анализ дисперсии оценок СПМ значительно упрощается, как показано в приложении 4.А. Несмотря на то что вывод неравенства (5.7) основан на допущении о гауссовости наблюдаемого процесса, оно может на практике служить вполне приемлемой аппроксимацией и для негауссовских процессов. Поэтому его можно использовать в качестве средства выявления процедур спектрального оценивания, которые позволяют получать оценки с хорошей статистической устойчивостью. Разумеется, при этом

могут потребоваться предварительные испытания подобной процедуры, с тем чтобы ее можно было «настроить» на наилучшие характеристики оценок, получаемых по конкретным заданным данным. Как отмечали Блэкман и Тьюки ([2], с. 21), «...Мы в основном должны полагаться на наблюдаемые от испытания к испытанию изменения как на надежный критерий потери устойчивости наших спектральных оценок».

5.5. Оценивание автокорреляции и взаимной корреляции

Автокорреляционная последовательность $r_{xx}[m]$ эргодического процесса была определена выражением (4.56) как предел среднего по времени. На практике эта последовательность, как правило, не известна и поэтому должна оцениваться по имеющейся конечной записи данных. Если имеется N отсчетов данных $x[n]$, $n=0, \ldots, N-1$, то получаем следующее очевидное выражение для дискретно-временно́й оценки автокорреляции:

$$\hat{r}_{xx}[m] = \frac{1}{(N-m)T} \sum_{n=0}^{N-m-1} x[n+m]\, x^*[n]\, T = \\ = \frac{1}{N-m} \sum_{n=0}^{N-m-1} x[n+m]\, x^*[n]. \qquad (5.9)$$

Эта оценка следует из выражения (4.56) после замены $(2M+1)$ на $(N-m)$ и изменения пределов суммирования в соответствии с имеющимися данными. Выражение (5.9) применимо только при положительных значениях индекса временно́го сдвига $0 \leqslant m \leqslant N-1$ (эти сдвиги равны mT секундам). Автокорреляционные оценки при временны́х сдвигах, бо́льших $(N-1)T$, невозможны из-за конечности записи имеющихся данных. При отрицательных значениях индекса корреляционного сдвига $-(N-1) \leqslant m \leqslant 0$ выражение для этой оценки должно быть модифицировано следующим образом:

$$\hat{r}_{xx}[m] = \frac{1}{(N+m)} \sum_{n=-m}^{N-1} x[n+m]\, x^*[n] = \\ = \frac{1}{N-|m|} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x^*[n+|m|]\, x[n]. \qquad (5.10)$$

Нетрудно показать, что оценка автокорреляции (5.10) является сопряженно-симметричной, поскольку удовлетворяет условию $\hat{r}_{xx}[m] = \hat{r}^*_{xx}[-m]$, т. е. обладает тем же свойством, которое присуще и известной автокорреляционной последовательности. При вычислении оценки $\hat{r}_{xx}[m]$ следует использовать только

положительные индексы, поскольку требуемые значения при отрицательных индексах получаются по свойству сопряженной симметрии. Таким образом, $2N-1$ автокорреляционных сдвигов могут быть оценены по N отсчетам данных.

Дискретная последовательность $\hat{r}_{xx}[m]$ формирует *несмещенные* оценки истинной автокорреляции

$$\mathcal{E}\{\hat{r}_{xx}[m]\} = \frac{1}{N-m}\sum_{n=0}^{N-m-1}\mathcal{E}\{x[n+m]\,x^*[n]\} = r_{xx}[m]. \quad (5.11)$$

Как показали Дженкинс и Ваттс [8], зависимость дисперсии этой оценки автокорреляции от числа отсчетов данных в случае гауссовских процессов дается следующим приближенным выражением:

$$\operatorname{var}\{\hat{r}_{xx}[m]\} \approx \frac{N}{(N-m)^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}(r_{xx}^2[k] + r_{xx}[k+m]\,r_{xx}[k-m]) \quad (5.12)$$

Здесь полагается, что $N \gg m$, т. е. индекс временно́го сдвига много меньше числа отсчетов данных. Отметим, что с увеличением индекса временно́го сдвига значение этой дисперсии возрастает. Поскольку при больших временны́х сдвигах усреднение возможно лишь по небольшому числу отсчетов данных, то с увеличением значения индекса временно́го сдвига m статистическая неопределенность оценки автокорреляции возрастает. При увеличении N значение дисперсии стремится к нулю, так что $\hat{r}_{xx}[m]$ является статистически состоятельной оценкой дискретно-временной автокорреляционной последовательности.

Альтернативная оценка автокорреляции имеет следующий вид:

$$\check{r}_{xx}[m] = \begin{cases} \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{n=0}^{N-m-1} x[n+m]\,x^*[n], & 0 \leqslant m \leqslant N-1; \\ \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{n=0}^{N-|m|-1} x^*[n+|m|]\,x[n], & -(N-1) \leqslant m < 0. \end{cases} \quad (5.13)$$

Эта оценка отличается от оценки $\hat{r}[m]$ только нормирующим множителем, т. е.

$$\check{r}_{xx}[m] = \frac{N-|m|}{N}\hat{r}_{xx}[m]. \quad (5.14)$$

При конечном N оценка (5.13) является *смещенной*, поскольку

$$\mathcal{E}\{\check{r}_{xx}[m]\} = \left(1 - \frac{|m|}{N}\right) r_{xx}[m], \quad (5.15)$$

однако при $N \to \infty$ она будет асимптотически несмещенной оценкой. Это смещение формирует треугольное окно относительно истинного значения автокорреляции при нулевом сдвиге. Дисперсия этой оценки дается следующим приближенным выражением:

$$\operatorname{var}\{\check{r}_{xx}[m]\} = \frac{N-|m|}{N} \operatorname{var}\{\hat{r}_{xx}[m]\} \approx$$

$$\approx \frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (r_{xx}^2[k] + r_{xx}[k+m]\, r_{xx}[k-m]). \qquad (5.16)$$

При фиксированном значении временно́го сдвига значение этой дисперсии стремится к нулю, когда число отсчетов возрастает. Для типичных приложений средний квадрат ошибки (сумма дисперсии и квадрата смещения) будет, как правило, больше для оценки $\hat{r}_{xx}[m]$, чем для оценки $\check{r}_{xx}[m]$, особенно в тех случаях, когда максимальное значение временно́го индекса будет приближаться к числу отсчетов данных. Несмещенные оценки автокорреляции могут также давать оценки автокорреляции, которые не являются в действительности автокорреляционными последовательностями. Рассмотрим, например, последовательность данных $x[1]=1$, $x[2]=1{,}1$ и $x[3]=1$. Для трех значений сдвига получаем следующие значения оценки автокорреляции: $\hat{r}_{xx}[0]=1{,}07$; $\hat{r}_{xx}[1]=1{,}1$ и $\hat{r}_{xx}[2]=1$. Заметим, что $\hat{r}_{xx}[0] < \hat{r}_{xx}[1]$, что противоречит первому из свойств в (4.30). Следовательно, несмещенные оценки автокорреляции могут приводить к автокорреляционным матрицам (которые будут рассматриваться в гл. 6), не являющимся положительно-полуопределенными, а это означает, что соответствующее матричное уравнение не имеет решения. В то же время автокорреляционные матрицы, сформированные из смещенных оценок автокорреляции, всегда будут положительно-полуопределенными матрицами. Именно по этой причине предпочтение часто отдается смещенной оценке автокорреляции.

При нулевом временно́м сдвиге обе оценки автокорреляции имеют одинаковые значения:

$$\hat{r}_{xx}[0] = \check{r}_{xx}[0] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2. \qquad (5.17)$$

Эта величина характеризует полную мощность измеряемого сигнала. Следовательно, обе эти оценки сохраняют мощность измеряемого сигнала.

Суммирование, предусматриваемое в выражениях (5.9) и (5.13), можно записать как линейную свертку

$$\sum_{n=0}^{N-m-1} x[n+m]\,x^*[n] = x[n] \bigstar x^*[-n]. \tag{5.18}$$

Следовательно, для вычисления оценок дискретной автокорреляции можно применить эффективные в вычислительном отношении процедуры, в которых операции свертки выполняются с помощью алгоритмов БПФ; более подробную информацию об этом см. в книгах Отнеса и Энохсона [16], Рэйдера [18], Рабинера и Голда [17] (гл. 6) и Оппенгейма и Шафера [15].

Аналогичным образом можно определить оценку взаимной корреляции. Предположим, например, что имеются две последовательности измеренных данных $x[n]$ и $y[n]$, где временной индекс изменяется от $n=0$ до $n=N-1$. Тогда смещенная оценка взаимной корреляции будет определяться следующим выражением:

$$\check{r}_{xy}[m] = \begin{cases} \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{n=0}^{N-m-1} x[n+m]\,y^*[n], & 0 \leqslant m \leqslant N-1; \\ \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{n=0}^{N-|m|-1} x[n]\,y^*[n+|m|], & -(N-1) \leqslant m < 0. \end{cases} \tag{5.19}$$

В выражении для несмещенной оценки взаимной корреляции вместо $1/N$ будет стоять $1/(N-|m|)$. В отличие от оценки автокорреляции значения оценки взаимной корреляции должны теперь вычисляться и при отрицательных значениях временного индекса m, поскольку $\check{r}_{xy}[m] \neq \check{r}_{xy}^*[-m]$. Можно также показать, что смещение и дисперсия смещенных оценок взаимной корреляции ведут себя идентично смещению и дисперсии смещенных оценок автокорреляции.

В приложении 5.А приведена написанная на Фортране подпрограмма CORRELATION, предназначенная для вычисления оценок автокорреляции и взаимной корреляции. Эта машинная программа позволяет вычислять как несмещенные, так и смещенные оценки.

5.6. Коррелограммный метод оценки СПМ

В гл. 4 было показано, что спектральная плотность мощности (СПМ) представляет собой дискретно-временное преобразование Фурье автокорреляционной последовательности

$$P_{xx}(f) = T\sum_{m=-\infty}^{\infty} r_{xx}[m]\exp(-j2\pi fmT). \tag{5.20}$$

Коррелограммный метод оценивания СПМ — это просто подстановка в выражение (5.20) конечной последовательности значений оценки автокорреляции (*коррелограммы*) вместо бесконечной последовательности неизвестных истинных значений автокорреляции. Например, подстановка значений несмещенной оценки автокорреляции $\hat{r}_{xx}[m]$, которые вычислялись при индексах временно́го сдвига с максимальными значениями $\pm L$, дает одну из возможных оценок СПМ

$$\hat{P}_{xx}(f) = T \sum_{m=-L}^{L} \hat{r}_{xx}[m] \exp(-j2\pi fmT), \tag{5.21}$$

определенную для $-1/2T \leqslant f \leqslant 1/2T$. Максимальный индекс временно́го сдвига L, как правило, много меньше числа отсчетов данных N. Использовать максимальное значение $L \simeq N/10$ было предложено Блэкманом и Тьюки [2], которые первыми интенсивно исследовали и популяризировали дискретно-временно́й коррелограммный метод оценивания СПМ. Причина выбора такого максимального значения — стремление устранить большие значения дисперсии, связанные с оценками автокорреляции при больших временны́х сдвигах, поскольку эти значения дисперсии давали менее устойчивую оценку СПМ.

Среднее значение оценки $\hat{P}_{xx}(f)$ определяется выражением

$$\begin{aligned} \mathscr{E}\{\hat{P}_{xx}(f)\} &= T \sum_{m=-L}^{L} \mathscr{E}\{\hat{r}_{xx}[m]\} \exp(-j2\pi fmT) = \\ &= T \sum_{m=-L}^{L} r_{xx}[m] \exp(-j2\pi fmT) = P_{xx}(f) \bigstar D_L(f), \end{aligned} \tag{5.22}$$

где $D_L(f)$ — ядро Дирихле. И хотя эта оценка СПМ вычисляется с использованием несмещенных оценок автокорреляции, она будет смещенной, или «смазанной», оценкой истинной СПМ. Эффект окна при конечной автокорреляционной последовательности приводит к оценке, которая, по сути дела, является сверткой истинной СПМ с преобразованием Фурье дискретно-временно́го прямоугольного окна.

С помощью смещенной оценки автокорреляции $\check{r}_{xx}[m]$ можно сформировать еще одну оценку СПМ

$$\check{P}_{xx}(f) = T \sum_{m=-L}^{L} \check{r}_{xx}[m] \exp(-j2\pi fmT), \tag{5.23}$$

которая определена при $-1/2T \leqslant f \leqslant 1/2T$. Матричная запись этой оценки СПМ имеет следующий вид:

$$\check{P}_{xx}(f) = T\mathbf{e}_L^H(f)\check{\mathbf{R}}_L\mathbf{e}_L(f), \tag{5.24}$$

где

$$\mathbf{e}_L(f) = \begin{pmatrix} 1 \\ \exp(j2\pi fT) \\ \vdots \\ \exp(j2\pi fLT) \end{pmatrix}$$

— вектор комплексных синусоид, а

$$\check{\mathbf{R}}_L = \begin{pmatrix} \check{r}_{xx}[0] & \check{r}^*_{xx}[1] & \dots & \check{r}^*_{xx}[L] \\ \check{r}_{xx}[1] & \check{r}_{xx}[0] & \dots & \check{r}^*_{xx}[L-1] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \check{r}_{xx}[L] & \check{r}_{xx}[L-1] & \dots & \check{r}_{xx}[0] \end{pmatrix} \tag{5.25}$$

— эрмитова тёплицева матрица оценки автокорреляции. Среднее значение оценки СПМ определяется выражением

$$\mathscr{E}\{\check{P}_{xx}(f)\} = T\sum_{m=-L}^{L}\left(1-\frac{|m|}{N}\right) r_{xx}[m]\exp(-j2\pi fmT) =$$

$$= P_{xx}(f) \star \frac{2}{L} D_L^2(f/2). \tag{5.26}$$

Оценка СПМ будет в этом случае иметь смещение, что обусловлено сверткой истинной СПМ с преобразованием дискретно-временно́го треугольного окна. В частном случае $L=N-1$, т. е. когда максимальное значение индекса временно́го сдвига равно уменьшенному на единицу числу имеющихся отсчетов данных, оценка $\check{P}_{xx}(f)$ будет идентична выборочному спектру, вычисляемому по N отсчетам данных (см. разд. «Задачи»). Как известно, выборочный спектр не является статистически устойчивым (см. приложение 4.А), поэтому данный факт может служить еще одним свидетельством в пользу выбора $L \gg N$, при котором получается статистически надежная оценка.

Для уменьшения эффекта просачивания из-за неявно присутствующего прямоугольного или треугольного окна, а следовательно, и для уменьшения смещения оценки следует использовать $(2L+1)$-точечное корреляционное окно $\omega[m]$ нечетной длины на интервале $-L \leqslant m \leqslant L$, симметричное относительно начальной точки отсчета. Наиболее общая форма коррелограм-

много метода оценивания СПМ принимает в этом случае следующий вид:

$$\hat{P}_{BT}(f) = T \sum_{m=-L}^{L} \omega[m]\, \hat{r}_{xx}[m] \exp(-j2\pi f m T), \qquad (5.27)$$

где должна использоваться несмещенная оценка автокорреляции. Подстрочный индекс BT означает, что эта форма оценки СПМ была предложена Блэкманом и Тьюки. Окно здесь нормируется так, чтобы $\omega[0]=1$, поэтому оценка $\hat{r}_{xx}[0]$ будет несмещенной, мощность отсчетов сохраняется, а следовательно, оценка $\hat{P}_{BT}(f)$ будет правильно промасштабирована как оценка СПМ. Если необходимо, чтобы не площадь под кривой BT-оценки СПМ была пропорциональна мощности истинной СПМ, а *пики* этой оценки были пропорциональны мощности импульсов в спектре, то выражение (5.27) следует промасштабировать величиной $F=1/NT$. Среднее значение спектральной BT-оценки определяется выражением

$$\mathcal{E}\{\hat{P}_{BT}(f)\} = T \sum_{m=-L}^{L} \omega[m]\, r_{xx}[m] \exp(-j2\pi f m T) = P_{xx}(f) \bigstar \Omega(f), \qquad (5.28)$$

где $\Omega(f)$ — дискретно-временно́е преобразование Фурье корреляционного окна. Не следует применять корреляционные окна с областями, где $\Omega(f)<0$, поскольку это приводит к получению отрицательных значений оценок СПМ, что противоречит физической сути СПМ, которая всегда должна быть положительной. В связи с этим, например, не следует применять прямоугольное окно, так как оно порождает отрицательные значения СПМ. С увеличением числа значений оценки автокорреляции коррелограммный метод дает асимптотически несмещенные оценки СПМ. Блэкман и Тьюки рекомендовали использовать такое число значений оценки автокорреляций, чтобы стандартное отклонение оценки СПМ не превышало одной трети ее среднего значения, т. е. чтобы $Q=(1/3)^2$. Тогда в соответствии с условием (5.8) получаем $1/B_s \approx T_e Q = T_e/9$. Полагая, что полный корреляционный сдвиг $T_L=(2L+1)T$ примерно равен величине, обратной ширине полосы B_s, получаем $T_L \approx T_e/9$, т. е. число оцениваемых значений автокорреляционной последовательности должно быть равно примерно 10% числа имеющихся отсчетов данных.

Для вычисления оценки СПМ, определяемой выражением (5.27), на сетке из $K+1$ частот $f_i=i/KT$, где $0 \leqslant i \leqslant K$, можно использовать алгоритм БПФ. Значение K здесь произвольно, но обычно $K \gg L$, а это означает, что в оценке СПМ сохранят-

ся тонкие детали спектра. При использовании значений индекса временно́го сдвига от $L+1$ до K отсчеты данных необходимо дополнить нулями. В приложении 5.Б приведена программа CORRELOCRAMPSD, предназначенная для вычисления оценки СПМ по формуле (5.27). Более сложной машинной программой реализации коррелограммного метода оценивания СПМ является программа 2.2, помещенная в книге «Программы для цифровой обработки сигналов» [4], выпущенной издательством IEEE Press в 1979 г.

Коррелограммный метод оценивания взаимной спектральной плотности мощности имеет форму

$$\hat{P}_{xy}(f) = T \sum_{m=-L}^{L} \omega[m]\, \hat{r}_{xy}[m] \exp(-j2\pi f m T). \qquad (5.29)$$

Эта оценка СПМ может иметь большое смещение, если взаимно корреляционная последовательность не имеет максимума в точке нулевого временно́го сдвига (или вблизи нее), относительно которой обычно центрируется корреляционное окно. Это смещение можно минимизировать, совмещая две дискретно-временны́е последовательности таким образом, чтобы пики взаимной корреляции соответствовали точке нулевого временно́го сдвига. В этом случае статистические характеристики оценки взаимной СПМ (5.29) будут аналогичны статистическим характеристикам автоспектральной оценки (5.27). Приведенная в приложении 5.Б программа CORRELOGRAMPSD предназначена для вычисления взаимной СПМ с помощью коррелограммного метода.

5.7. Периодограммные оценки СПМ

Другим формальным определением СПМ, основанным на допущении об эргодичности, является следующая дискретно-временна́я форма:

$$P_{xx}(f) = \lim_{N\to\infty} \mathscr{E}\left\{\frac{1}{(2N+1)T}\left|T\sum_{n=-N}^{N} x[n]\exp(-j2\pi f n T)\right|^2\right\}. \qquad (5.30)$$

Пренебрегая операцией вычисления математического ожидания и полагая, что конечное множество данных $x[0],\ldots,x[N-1]$ содержит N отсчетов, получаем выборочный спектр

$$\tilde{P}_{xx}(f) = \frac{1}{NT}\left|T\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\exp(-j2\pi f n T)\right|^2 =$$

$$= \frac{T}{N}\left|\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\exp(-j2\pi f n T)\right|^2, \qquad (5.31)$$

который может быть вычислен по конечной последовательности данных. Это — исходная немодифицированная форма периодограммной оценки СПМ. В гл. 4 было показано, что выборочный спектр будет давать статистически несостоятельные (т. е. неустойчивые) оценки СПМ, поскольку была опущена операция вычисления математического ожидания, предусматриваемая выражением (5.30). Поэтому для сглаживания периодограммной оценки необходимо применять что-то вроде псевдоусреднения по ансамблю. Предложены три основных типа методов сглаживания. В методе Даньелла [3] периодограмма сглаживается путем усреднения по соседним ячейкам частотного разрешения. В методе Бартлетта [1] производится усреднение по множеству периодограмм, получаемых по сегментам исходной последовательности данных. В методе Уэлча [21] подход Бартлетта применяется к перекрывающимся сегментам и вводится окно данных для уменьшения смещения оценок из-за эффекта просачивания. В литературе описано также много других оптимальных методов сглаживания периодограмм, однако все они оптимальны только применительно к некоторым ограниченным классам сигналов. Три метода, которые описаны в этом разделе, возможно, не всегда оптимальны, но практика доказала их статистическую устойчивость (робастность) для многих классов сигналов.

5.7.1. Периодограмма Даньелла

Даньелл предположил, что для сглаживания быстрых флюктуаций выборочного спектра можно использовать усреднение по соседним спектральным частотам. Если для вычисления выборочного спектра $\tilde{P}_{xx}(f)$ на сетке частот $f_k = k/KT$, $0 \leqslant k \leqslant K-1$, используется алгоритм БПФ, то модифицированная оценка периодограммы на частоте f_i может быть получена посредством усреднения в P точках (значений) с каждой стороны от этой частоты:

$$\hat{P}_D[f_i] = \frac{1}{2P+1} \sum_{n=i-P}^{i+P} \tilde{P}_{xx}[f_n]. \qquad (5.32)$$

Обобщением этого подхода является обработка выборочного спектра с помощью фильтра нижних частот с частотной характеристикой $H(f)$. Периодограмму Даньелла можно в этом случае записать в виде свертки выборочного спектра и частотной характеристики фильтра нижних частот

$$\hat{P}_D(f) = \tilde{P}_{xx}(f) * H(f), \qquad (5.33)$$

Подстрочный индекс D в этих выражениях использован для того, чтобы отличать периодограммную оценку Даньелла от других оценок СПМ.

5.7.2. Периодограмма Бартлетта

Сглаживание выборочного спектра по методу Бартлетта основано на создании псевдоансамбля периодограмм за счет деления последовательности из N отсчетов данных на P неперекрывающихся сегментов по D отсчетов в каждом, так что $DP \leqslant N$. Тогда p-й сегмент будет состоять из отсчетов

$$x^{(p)}[n] = x[pD + n], \tag{5.34}$$

где $0 \leqslant n \leqslant D-1$, а надстрочный индекс (p) обозначает номер сегмента. По каждому сегменту $0 \leqslant p \leqslant P-1$ независимо вычисляется выборочный спектр в диапазоне $-1/2T \leqslant f \leqslant 1/2T$

$$\tilde{P}_{xx}^{(p)}(f) = \frac{1}{DT}\left| T \sum_{m=0}^{D-1} x^{(p)}[m] \exp(-j2\pi f m T)\right|^2, \tag{5.35}$$

для чего может быть использован алгоритм БПФ на некоторой сетке частот. Затем на каждой частоте, представляющей интерес, P отдельных немодифицированных периодограмм усредняются, с тем чтобы получить усредненную периодограмму Бартлетта $\hat{P}_B(f)$

$$\hat{P}_B(f) = \frac{1}{P} \sum_{p=0}^{P-1} \tilde{P}_{xx}^{(p)}(f). \tag{5.36}$$

Смещение среднего значения этой периодограммы определяется выражением

$$\mathcal{E}\{\hat{P}_B(f)\} = \frac{1}{P} \sum_{p=0}^{P-1} \mathcal{E}\{\tilde{P}_{xx}^{(p)}(f)\} = \mathcal{E}\{\tilde{P}_{xx}(f)\}. \tag{5.37}$$

Таким образом, смещение оценки $\hat{P}_B(f)$ обусловлено воздействием окна, которое смещает и выборочный спектр периодограммы каждого отдельного сегмента. Если периодограммы P сегментов статистически независимы (что приближенно выполняется в том случае, когда значения автокорреляции $r_{xx}[m]$ малы при $m > D$), то $\hat{P}_B(f)$ можно рассматривать как выборочное среднее значение некоторой совокупности из P независимых наблюдений выборочного спектра $\tilde{P}_{xx}(f)$. Используя выражение для обобщенной дисперсии, введенное в разд. 5.8, можно показать, что величина дисперсии усредненной периодограммы

Бартлетта обратно пропорциональна числу используемых сегментов, т. е.

$$\operatorname{var}\{\hat{P}_B(f)\} \propto \frac{P_{xx}^2(f)}{P}. \tag{5.38}$$

Следовательно, приближенно можно считать, что устойчивость этой спектральной оценки улучшается как величина, обратная числу сегментов P. Уменьшение дисперсии с увеличением P будет меньше в том случае, когда периодограммы сегментов оказываются статистически зависимыми. Что же касается разрешения, то оно в результате разбиения последовательности данных на сегменты по D отсчетов в каждом, где $D<N$, будет, естественно, уменьшаться, поскольку результирующее эффективное спектральное окно в этом случае имеет более широкий главный лепесток. При фиксированном значении $N=PD$ соблюдается обычное компромиссное соотношение между высоким спектральным разрешением (при максимально возможном значении D) и минимальной дисперсией оценки (при максимально возможном значении P).

5.7.3. Периодограмма Уэлча

Уэлч модифицировал основную схему метода сегментирования и усреднения Бартлетта за счет применения окна данных и использования перекрывающихся сегментов. Перед вычислением периодограммы каждого сегмента этот сегмент обрабатывается с помощью окна данных. Цель применения окна — за счет незначительного ухудшения разрешения ослабить эффекты из-за боковых лепестков и уменьшить смещение оценок. Цель перекрытия сегментов — увеличить число усредняемых сегментов при заданной длине записи данных и тем самым уменьшить дисперсию оценки СПМ. На основе БПФ Уэлч разработал также эффективную вычислительную процедуру для реализации своего метода усреднения периодограмм взвешенных и перекрывающихся сегментов данных, и именно это сделало метод Уэлча самым популярным периодограммным методом спектрального оценивания в наши дни.

Если запись комплексных данных из $x[0], \ldots, x[N-1]$ отсчетов разбита на P сегментов по D отсчетов в каждом со сдвигом S отсчетов между соседними сегментами ($S \leqslant D$), то максимальное число сегментов P будет определяться целой частью числа $(N-D)/S+1$. Взвешенный p-й сегмент будет состоять из

$$x^{(p)}[n] = w[n]\, x[n+pS] \tag{5.39}$$

отсчетов, $0 \leqslant n \leqslant D-1$, а номер сегмента p лежит в интервале $0 \leqslant p \leqslant P-1$. Выборочный спектр взвешенного p-го сегмента в

диапазоне частот $-1/2T \leqslant f \leqslant 1/2T$ определяется выражением

$$\tilde{P}_{xx}^{(p)}(f) = \frac{1}{UDT} X^{(p)}(f)\,[X^{(p)}(f)]^* = \frac{1}{UDT} |X^{(p)}(f)|^2, \qquad (5.40)$$

где

$$X^{(p)}(f) = T \sum_{n=0}^{D-1} x^{(p)}[n] \exp(-j2\pi f n T) \qquad (5.41)$$

— дискретно-временно́е преобразование p-го сегмента, а

$$U = T \sum_{n=0}^{D-1} w^2[n] \qquad (5.42)$$

— энергия дискретно-временного окна. Среднее значение периодограмм взвешенных сегментов дает оценку периодограммы Уэлча $\hat{P}_W(f)$:

$$\hat{P}_W(f) = \frac{1}{P} \sum_{p=0}^{P-1} \tilde{P}_{xx}^{(p)}(f). \qquad (5.43)$$

Множитель U в (5.40) устраняет эффект влияния энергии окна на смещение в оценке СПМ $\hat{P}_W(f)$. Можно показать (см. ниже разд. «Задачи»), что среднее значение периодограммы Уэлча можно записать в следующем виде:

$$\mathcal{E}\{\hat{P}_W(f)\} = \frac{1}{P} \sum_{p=0}^{P-1} \mathcal{E}\{\tilde{P}_{xx}^{(p)}(f)\} = P_{xx}(f) \star |W(f)|^2/U, \qquad (5.44)$$

где

$$W(f) = T \sum_{n=0}^{D-1} w[n] \exp(-j2\pi f n T) \qquad (5.45)$$

— дискретно-временно́е преобразование Фурье окна данных, а $P_{xx}(f)$ — истинная СПМ. Обратное дискретно-временное преобразование Фурье величины (5.44) дает ожидаемое значение эффективной автокорреляционной последовательности периодограммы Уэлча

$$\mathcal{E}\{\hat{r}_{xx}^{W}[m]\} = r_{xx}[m] \cdot \phi[m]/U, \qquad (5.46)$$

где

$$\phi[m] = w[m] \star w^*[-m] = T \sum_{n=0}^{D-m-1} w[n+m]\, w[n] \qquad (5.47)$$

— автокорреляционная последовательность окна данных. Заметим, что $U = \phi[0]$, поэтому $\phi[m]/\phi[0]$ — это, по сути дела, кор-

реляционное окно с единичным значением при нулевом временно́м сдвиге. Полная мощность в исходной последовательности отсчетов данных определяется членом автокорреляционной последовательности, соответствующим нулевому временно́му сдвигу; поскольку

$$\mathscr{E}\{\hat{r}_{xx}^{W}[0]\} = r_{xx}[0]\,\phi[0]/U = r_{xx}[0], \tag{5.48}$$

это означает, что $\hat{r}_{xx}^{W}[0]$ — несмещенная оценка мощности.

Уэлч, в частности, предложил использовать окно Ханна и 50%-ное перекрытие сегментов, которое обеспечивало очень эффективные реализации его метода на основе алгоритма БПФ при вычислении оценки (5.43) на некоторой сетке частот. Кроме того, при 50%-ном перекрытии сегментов все данные используются дважды, за исключением $D/2$ отсчетов на каждом конце исходной N-точечной последовательности данных, а это выравнивает обработку большинства отсчетов данных, поскольку те отсчеты, которые имели малые веса на одном сегменте, получают бо́льшие веса на следующем сегменте. Анализ поведения дисперсии периодограммы Уэлча для гауссовских процессов, проведенный с помощью выражений, которые приводятся в следующем разделе, показал, что минимальная дисперсия для окна Ханна достигается при 65%-ном перекрытии, при этом величина дисперсии увеличивается приблизительно на 8% при использовании 50%-ного перекрытия сегментов. Так же как и дисперсия периодограммы Бартлетта, дисперсия периодограммы Уэлча примерно обратно пропорциональна числу сегментов, т. е.

$$\operatorname{var}\{\hat{P}_W(f)\} \propto \frac{P_{xx}^2(f)}{P}, \tag{5.49}$$

в предположении независимости сегментов (хотя перекрытие сегментов приводит, конечно, к некоторой их взаимозависимости). Благодаря перекрытию по заданной записи данных можно сформировать большее число сегментов, чем в методе Бартлетта, а это уменьшает величину дисперсии периодограммы Уэлча по сравнению с дисперсией периодограммы Бартлетта.

В отличие от корреляционного окна, используемого в коррелограммном методе, достоинства окон данных, используемых при спектральном оценивании, эпизодически становились предметом оживленных дискуссий в литературе. Было показано, что главная цель применения окон данных — уменьшение эффектов смещения из-за боковых лепестков в спектрах с большим динамическим диапазоном амплитуд сигналов. Примеры таких спектров, которые послужили весомым аргументом в пользу обработки данных окном, приводятся в работах Томп-

сона [19] и Ван Схоневелда и Фрейлинга [20]. Значение обработки данных окном с целью управления уровнем боковых лепестков уменьшается в случае уплощения формы спектра (т. е. при уменьшении диапазона амплитуд составляющих сигналов). В ряде опубликованных исследований утверждается, что применение окон данных лишь придает одним отсчетам бóльшую значимость перед другими отсчетами, а также ухудшает разрешение (уширяет главный лепесток частотного окна) без какого-либо компенсирующего уменьшения дисперсии. Эти утверждения, несомненно, верны в отношении выборочного спектра, получаемого сразу по всей последовательности отсчетов сигнала с относительно плоской спектральной характеристикой. Однако по отношению к периодограмме Уэлча они не верны, поскольку перекрытие сегментов как раз и используется для выравнивания обработки (т. е. выравнивания значимости отсчетов) данных, а увеличение числа сегментов — для уменьшения дисперсии оценки СПМ. Не верны они и в отношении спектров сигналов с большим различием амплитуд составляющих.

В случае комплексных данных метод периодограммы Уэлча можно реализовать с помощью программы PERIODOGRAM, приведенной в приложении 5.В. Программа для действительных данных имеется лишь в упоминавшейся выше книге «Программы для цифровой обработки сигналов» [4] (программа 2.1).

Процедура Уэлча для оценивания взаимной спектральной плотности во многом аналогична процедуре оценки автоспектральной плотности. В этом случае N-точечные последовательности $x[n]$ и $y[n]$ сначала сегментируются и взвешиваются, в результате чего получаются последовательности

$$\begin{aligned} x^{(p)}[n] &= w[n]\,x[n+pS], \\ y^{(p)}[n] &= w[n]\,y[n+pS], \end{aligned} \tag{5.50}$$

где $0 \leqslant n \leqslant D-1$, $0 \leqslant p \leqslant P-1$, по которым затем вычисляется выборочный взаимный спектр

$$\tilde{P}_{xy}^{(p)}(f) = \frac{1}{UDT} X^{(p)}(f)\,[Y^{(p)}(f)]^*, \tag{5.51}$$

где

$$\begin{aligned} X^{(p)}(f) &= T \sum_{n=0}^{D-1} x^{(p)}[n] \exp(-j2\pi f n T), \\ Y^{(p)}(f) &= T \sum_{n=0}^{D-1} y^{(p)}[n] \exp(-j2\pi f n T) \end{aligned} \tag{5.52}$$

— дискретно-временны́е преобразования Фурье, а U аналогично величине, определенной в (5.42). Усреднение по периодо-

граммам всех сегментов дает окончательную оценку периодограммы

$$\hat{P}_{xy}(f)=\frac{1}{P}\sum_{p=0}^{P-1}\tilde{P}_{xy}^{(p)}(f). \tag{5.53}$$

В случае гауссовских процессов характеристики среднего значения и дисперсии этой взаимной спектральной оценки во многом сходны с характеристиками аналогичных величин для автоспектральной оценки. Программа PERIODOCRAM, приведенная в приложении 5.В, позволяет вычислять оценки взаимной спектральной плотности в случае комплексных данных.

5.8. Комбинированные периодограммно-коррелограммные оценки

Схемы, объединяющие особенности периодограммного и коррелограммного методов оценивания СПМ, часто предлагаются в литературе с целью унифицировать классические методы оценивания СПМ; (см., например, работы [16, 20]). Одно из наиболее проработанных таких обобщений было предложено Наттоллом и Картером [14] и включает как частные случаи все методы, которые были описаны выше в разд. 5.6 и 5.7. Их обобщение привело к созданию метода, способного заменить популярный периодограммный метод Уэлча, т. к. он обладает сравнимыми статистическими характеристиками, а требует вдвое меньших вычислительных затрат.

Комбинированный периодограммно-коррелограммный метод состоит из четырех этапов. На первом с помощью уравнений (5.39), (5.40) и (5.43) вычисляется обычная периодограмма Уэлча $\hat{P}_w(f)$, при этом допускается произвольный выбор величины перекрытия S сегментов и окна данных $w[n]$. На втором этапе вычисляется обратное ДВПФ для $\hat{P}_w(f)$ с целью получения симметричной оценки автокорреляции $\hat{r}_{xx}^{w}[m]$ для $2D+1$ временны́х сдвигов. Автокорреляционная оценка $\hat{r}_{xx}^{w}[m]$ охватывает значения $|m|\leqslant D$ вследствие воздействия автокорреляционной функции окна $\phi[m]=w[n]\star w[n]$, что проиллюстрировано рис. 5.9, *а* и 5.9, *б* для случая прямоугольного окна. На третьем этапе эта оценка обрабатывается с помощью действительного симметричного корреляционного окна $\omega[m]$ нечетной длины $2L+1$ и получается взвешенная автокорреляционная оценка $\hat{r}_{xx}^{c}[m]=\omega[m]\hat{r}_{xx}^{w}[m]$. Ширина этого корреляционного окна выбирается меньше ширины автокорреляционной функции $\phi[m]$ окна данных ($L<D$). На четвертом этапе вычисляется ДВПФ для $\hat{r}_{xx}^{c}[m]$, что и дает искомую оценку СПМ. Таким

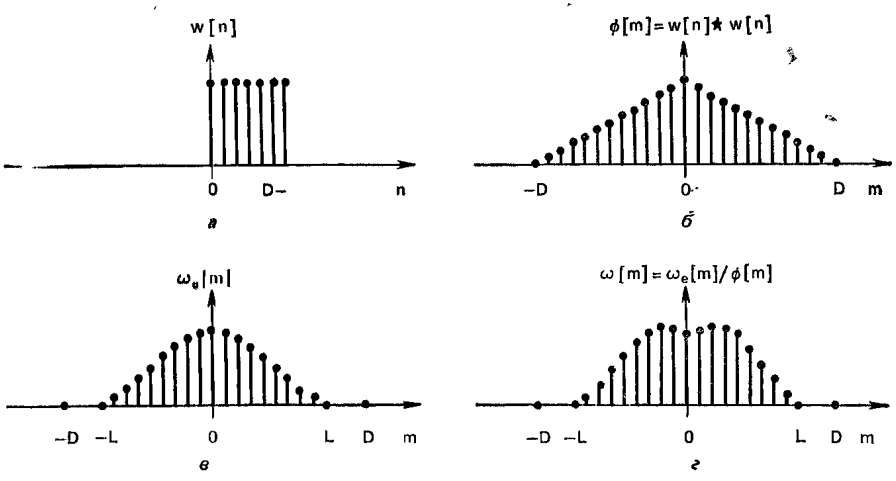


Рис. 5.9. Изменение формы корреляционного окна: *а* — исходное дискретно-временно́е окно данных длиной D (от 0 до $D-1$); *б* — автокорреляционная последовательность этого окна длиной $2D+1$; *в* — требуемая форма эффективного корреляционного окна длиной $2L+1$, $L<D$; *г* — фактическая форма корреляционного окна, применяемого для компенсации эффектов взвешивания окном $\varnothing[m]$.

образом, окончательная оценка СПМ, получаемая комбинированным методом, описывается выражением

$$\hat{P}_C(f) = \hat{P}_W(f) \star \Omega(f), \tag{5.54}$$

где $\Omega(f)$ — преобразование Фурье корреляционного окна $\omega[m]$.

Комбинированное временно́е и корреляционное взвешивание позволяют управлять уровнем боковых лепестков (т. е. подавлять просачивание). Устойчивость оценки обеспечивается за счет применения усреднения по сегментам и частотного сглаживания (корреляционного взвешивания). Ограничивая либо выбор окон, либо степень перекрытия сегментов данных, соответственно получаем в качестве частных случаев периодограммную оценку СПМ Уэлча и оценку СПМ Блэкмана — Тьюки.

Нетрудно показать, что средние значения оценок СПМ и автокорреляции, получаемых с помощью комбинированного метода, удовлетворяют соотношениям

$$\mathcal{E}\{\hat{P}_C(f)\} = P_{xx}(f) \star \Omega_e(f), \tag{5.55}$$

$$\mathcal{E}\{\hat{r}^C_{xx}[m]\} = r_{xx}[m]\,\omega_e[m], \tag{5.56}$$

где *эффективное корреляционное окно* $\omega_e[m]$ и его преобразование Фурье $\Omega_e(f)$ определяются выражениями

$$\Omega_e(f) = \Omega(f) \star |W(f)|^2, \tag{5.57}$$

$$\omega_e[m] = \omega[m]\,\phi[m]/U = \omega[m]\,\phi[m]/\phi[0]. \tag{5.58}$$

Единственное допущение, которое необходимо принять при выводе этих соотношений, — это допущение о стационарности $x[n]$. Для того чтобы оценка $\hat{r}_{xx}{}^{c}[0]$ была несмещенной оценкой полной мощности, необходимо, чтобы $\omega_e[0]=1$. Выбор корреляционного окна $\omega[m]$, такого что $\omega[0]=1$, удовлетворяет этому требованию. Здесь интересно отметить следующее. Пусть требуемое эффективное корреляционное окно выбрано заранее и имеет вид, показанный на рис. 5.9, *в*. Если $D>L$, то выбор окна данных $w[n]$ носит произвольный характер, поскольку его влияние может быть скомпенсировано выбором корреляционного окна $\omega[m]$ следующего вида:

$$\omega[m]=\frac{\omega_e[m]}{\phi[m]/U}, \tag{5.59}$$

где $|m|\leqslant L$. Эффект такого *изменения формы корреляционного окна* проиллюстрирован на рис. 5.9, *г* для случая прямоугольного окна данных. Можно, разумеется, использовать и другие окна данных.

Показано (см. Наттолл [11, 13]), что дисперсия оценки СПМ, получаемой с помощью комбинированного метода, определяется следующим приближенным выражением:

$$\operatorname{var}\{\hat{P}_C(f)\}\approx P^2(f)\frac{1}{P}\sum_{p=-(P-1)}^{P-1}\left(1-\frac{|p|}{P}\right)T\sum\omega^2[m]\,\psi[m, pS], \tag{5.60}$$

где корреляционная последовательность третьего порядка $\psi[m, n]$ окна данных определяется выражением

$$\psi[m, n]=$$
$$=T\sum_{l} w\left[l+\frac{n-m}{2}\right] w\left[l+\frac{-n-m}{2}\right] w\left[l+\frac{n+m}{2}\right] w\left[l+\frac{-n+m}{2}\right]. \tag{5.61}$$

Заметим, что эта корреляционная последовательность симметрична, т. е. $\psi[m, n]=\psi[-m, -n]$. При выводе этих соотношений были использованы допущения о том, что $x[n]$ является комплексным гауссовским процессом, а истинная СПМ $P_{xx}(f)$ относительно постоянна в пределах полосы частот $f\pm B_s/2$, характеризующей ширину полосы эффективного корреляционного окна. Это последнее допущение позволяет также использовать для среднего значения оценки следующее приближенное выражение:

$$\mathscr{E}\{\hat{P}_C(f)\}\approx P_{xx}(f)\int_{-1/2T}^{1/2T}\Omega_e(f)\,df=P_{xx}(f)\,w_e[0]=P_{xx}(f). \tag{5.62}$$

Эквивалентную статистическую ширину полосы частот B_s мож-

но записать в виде явной функции окна данных и корреляционного окна

$$B_s = \frac{[\int \Omega_e(f)\,df]^2}{\int \Omega_e^2(f)\,df} = \frac{\omega_e^2[0]}{T\sum_{m=-L}^{L}\omega_e^2[m]} = \frac{1}{T\sum_{m=-L}^{L}\phi^2[m]\,\omega^2[m]}. \quad (5.63)$$

Используя дисперсию (5.60), квадрат среднего значения оценки (5.62) и статистическую ширину полосы (5.63), получаем следующее выражение для произведения «устойчивость оценки×длительность×ширина полосы»:

$$QT_eB_s \approx \frac{\frac{1}{P}\sum_{p=-(P-1)}^{P-1}\left(1-\frac{|p|}{P}\right)T\sum_{m=-L}^{L}\omega^2[m]\,\psi[m, pS]}{\sum_{m=-L}^{L}\omega^2[m]\,\phi^2[m]}. \quad (5.64)$$

Это тройное произведение является функцией длины имеющейся записи данных T_e, числа сегментов P, степени их перекрытия S, окна данных $w[n]$ и корреляционного окна $\omega[m]$.

Для получения оценки СПМ Блэкмана — Тьюки используем один сегмент ($P=1$), корреляционное окно, ширина которого много меньше числа отсчетов данных ($L \ll D=N$), и прямоугольное окно данных ($w[n]=1$, $n=0, ..., N-1$). Наттолл показал [13], что в этом случае $QT_eB_s \approx 1$. Для получения периодограммы Уэлча используем $P=2N/D-1$ сегментов, 62%-ное перекрытие ($S=0{,}38\,D$), окно Ханна для взвешивания данных и не применяем корреляционного взвешивания ($\omega[m]=1$, где $|m| \leqslant L=D$). В этом случае можно аналогичным образом показать, что $QT_eB_s \approx 1$. Если используется 50%-ное перекрытие, то $QT_eB_s \approx 1{,}08$. Один из интересных комбинированных подходов основан на использовании прямоугольного окна данных ($w|n|=1$) без перекрытия ($S=D$), числа сегментов, вдвое меньшего, чем для периодограммы Уэлча, и корреляционного окна, форма которого изменяется для получения эффективного корреляционного окна $\omega_e[m]$, которое является окном Ханна (см. рис. 5.9). Краткая запись четырех этапов комбинированного метода Наттолла — Картера для оценивания СПМ приведена на рис. 5.10. Наттолл и Картер, используя соотношение (5.64), показали [14], что для указанных на этом рисунке условий $QT_eB_s \approx 1$. Этот частный случай комбинированного подхода будет иметь те же статистические характеристики при заданном значении произведения длительности на ширину полосы T_eB_s, что и популярный периодограммный метод Уэлча. Однако вычислительные затраты для него вдвое ниже, чем для метода Уэлча, так как БПФ в нем вычисляется для вдвое мень-

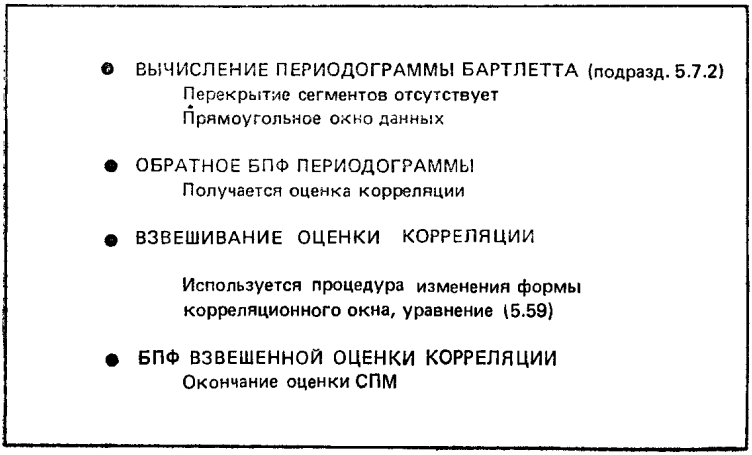
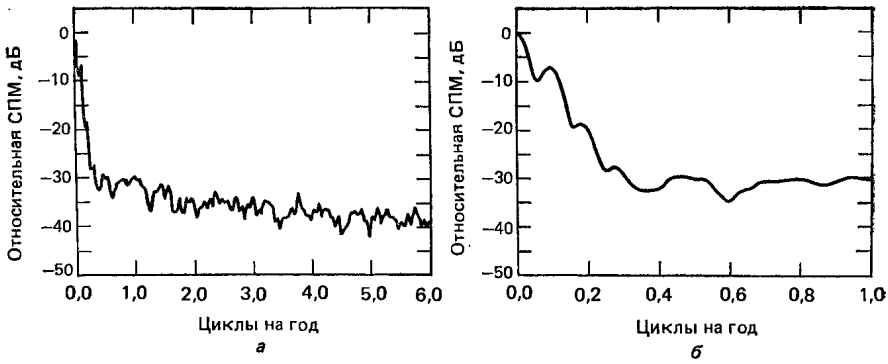


Рис. 5.10. Основные этапы комбинированного метода Наттолла — Картера.

шего числа сегментов, чем в методе Уэлча, к тому же в нем отсутствуют операции умножения, связанные с обработкой сегментов с помощью окна данных.

5.9. Приложение к оцениванию числа солнечных пятен

Одно из интересных применений классических методов спектрального оценивания, имеющее длинную историю, связано с поиском периодичностей числа солнечных пятен. Краткая вводная информация по данному вопросу была изложена нами в разд. 1.2, а результаты предварительного периодограммного анализа приведены на рис. 5.11. Для этой цели 1728 среднемесячных значений числа солнечных пятен с 1841 по 1984 г. (см. приложение I, помещенное в конце книги) были разбиты на 24-летние сегменты (288 отсчетов на сегмент) с 12-летним перекрытием (144 отсчета), которые затем были обработаны с помощью окна данных Хэмминга. Из рис. 5.11 видно, что периодограмма не содержит каких-либо значимых особенностей на частотах выше 1 цикла солнечных пятен на год. Этот факт подтверждается также спектральной оценкой Блэкмана — Тьюки и авторегрессионной спектральной оценкой (см. ниже гл. 7 и 8), которые здесь не показаны. Периодограмма на рис. 5.11 имеет значительную постоянную составляющую (частота 0 Гц), что обусловлено положительностью чисел солнечных пятен, ясно виден также классический 11-летний период активности солнечных пятен (частота, которой соответствует примерно 0,09 цикла на год).



5.11. *а* — периодограмма среднемесячных значений числа солнечных пятен для интервала времени с 1841 по 1984 г.; *б* — участок этой периодограммы на интервале частот от 0 до 1 цикла на год.

Для более подробного исследования спектра в интервале частот от 0 до 1 цикла на год среднемесячные значения числа солнечных пятен обрабатывались фильтром нижних частот (ФНЧ), затем прореживались с коэффициентом 6 для снижения частоты отсчетов до двух отсчетов в год, после чего обрабатывались фильтром верхних частот (ФВЧ). В качестве ФНЧ и ФВЧ применялись линейно-фазовые фильтры, реализованные с помощью программы Паркса — Маклеллана (программа 5.1 в сборнике «Программы для цифровой обработки сигналов» [4]). ФНЧ имел 49 коэффициентов и переходную зону шириной от 0,5 до 1,0 цикла на год (см. рис. 5.12, *а*). Этот фильтр устранял высокочастотный шум в среднемесячных числах солнечных пятен. Выход ФНЧ прореживался с коэффициентом 6,

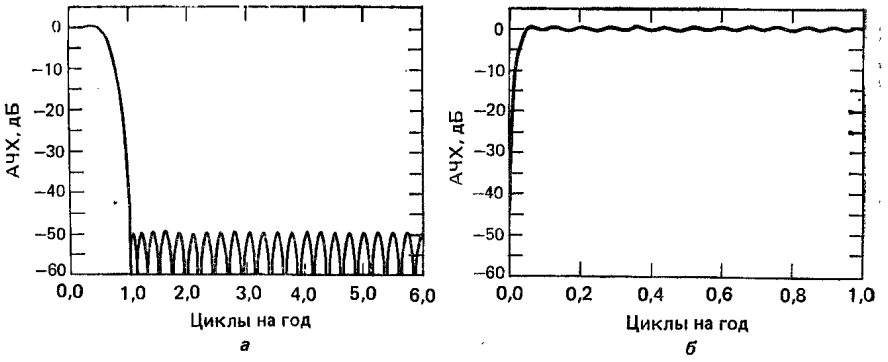


Рис. 5.12. Логарифм модуля частотной характеристики: *а* — линейно-фазовый ФНЧ с 49 коэффициентами; *б* — линейно-фазовый ФВЧ с 51 коэффициентом.

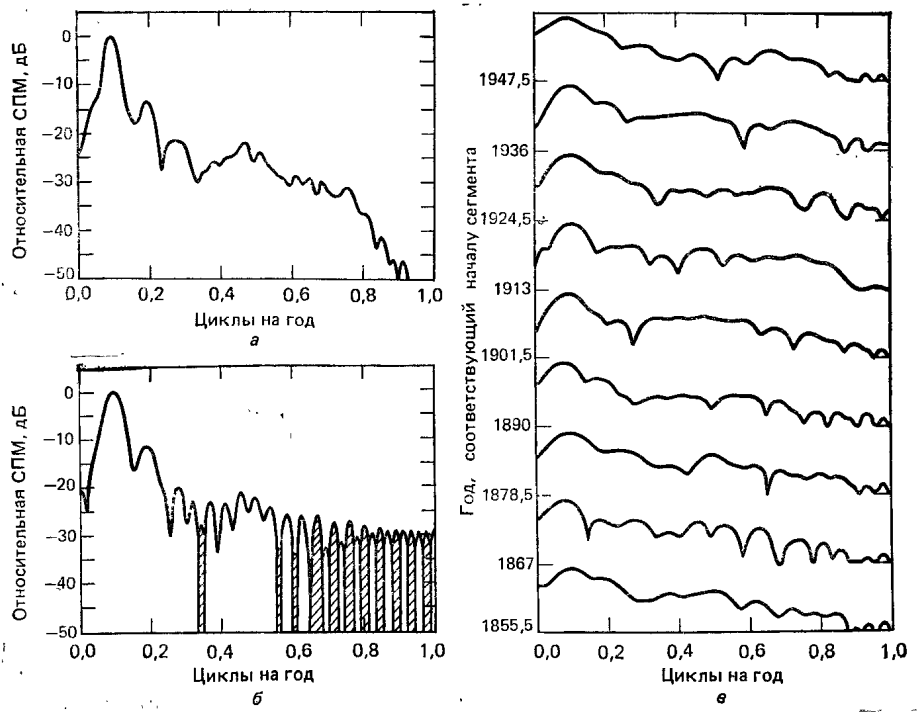


Рис. 5.13. Спектральные оценки фильтрованных чисел солнечных пятен: *а* — периодограмма; *б* — коррелограммная оценка, отрицательные значения СПМ заштрихованы; *в* — набор односегментных периодограмм.

что снижало частоту отсчетов до двух отсчетов в год. Затем оставшиеся отсчеты обрабатывались с помощью ФВЧ, с тем чтобы устранить эффект смещения, обусловленный наличием большой постоянной составляющей. ФВЧ имел 51 коэффициент и переходную зону шириной от 0,0 до 0,0455 циклов на год (см. рис. 5.12, *б*). Такая ширина переходной зоны ФВЧ была выбрана с целью обнаружить возможный 22-летний период изменения активности солнечных пятен из-за перемены их магнитной полярности, которая, как известно, происходит с интервалом примерно 22 года. Результирующая фильтрованная запись содержала около 230 отсчетов (по 2 отсчета в год), охватывающих период времени с июля 1855 г. по январь 1970 г. (оставшиеся после прореживания отсчеты попадали на январь и июль в каждом году).

Спектральные оценки, полученные по фильтрованным данным с помощью классических методов, показаны на рис. 5.13. В периодограммном методе использовались четыре 46-летних

сегмента (92 отсчета на сегмент) с 23-летним перекрытием (46 отсчетов) этих сегментов. Каждый такой сегмент обрабатывался окном Хэмминга. В коррелограммном методе оценка СПМ определялась по последовательности несмещенных автокорреляционных оценок, соответствующих временны́м сдвигам от 0 до 45 лет, которые также обрабатывались окном Хэмминга. Периодограмма имеет два сильных пика на частотах 0,095 цикла на год (10,5-летний цикл) и 0,194 цикла на год (5,16-летний цикл). В коррелограммной оценке этим пикам соответствуют частоты 0,095 цикла на год (тот же 10,5-летний цикл) и 0,188 цикла на год (5,32-летний цикл). Таким образом, первый пик, по всей видимости, соответствует гармонике с 10,5-летним основным периодом изменения активности солнечных пятен. Сходные пики у этих спектров наблюдаются также на частотах, равных примерно 0,25 и 0,45 цикла на год.

Нестационарность характеристик чисел солнечных пятен показана на рис. 5.13, *в*, на котором одна над другой последовательно помещены периодограммы 23-летних сегментов, каждая из которых изображена в 50-дБ диапазоне. Слева около каждой периодограммы указан начальный год каждого сегмента. Отметим также, что использовалось 11,5-летнее перекрытие сегментов. Нетрудно видеть, что два выраженных пика на этих периодограммах не остаются неподвижными на некоторой фиксированной частоте, а перемещаются относительно средних положений этих пиков, показанных на рис. 5.13, *а* и 5.13, *б*. Таким образом, применительно к числам солнечных пятен следует очень осторожно применять методы спектрального оценивания, основанные на допущении о стационарности анализируемого процесса.

5.10. Заключение

Классические методы спектрального оценивания, кратко описанные в этой главе, относятся к числу наиболее устойчивых (робастных) методов спектрального оценивания, описанных в данной книге. Они применимы почти ко всем классам сигналов и шумов, обладающих стационарными свойствами, тогда как альтернативные им методы высокого разрешения, такие как описанные в гл. 6—14, оказываются робастными только в случае ограниченного класса стационарных сигналов. В классических методах, как правило, используется алгоритм БПФ, в связи с чем они оказываются наиболее вычислительно эффективными методами из числа имеющихся методов спектрального оценивания. Отметим также, что получаемые с их помощью оценки СПМ линейно зависят от мощности синусоид, присутствующих в данных, тогда как методы, описанные в гл. 6—14, часто не

обеспечивают линейной связи между высотой спектральных пиков и мощностью этих синусоид.

Основной недостаток классических методов спектрального оценивания обусловлен искажающим воздействием просачивания по боковым лепесткам из-за неизбежного взвешивания в них конечных последовательностей данных. Было показано, что обработка с помощью окна позволяет ослабить влияние боковых лепестков, но лишь за счет ухудшения спектрального разрешения. Разрешение, обеспечиваемое классическими методами, не может превосходить величины, обратной длине записи данных, и не зависит от характеристик анализируемых данных. Для улучшения статистической устойчивости спектральных оценок может быть использовано псевдоусреднение по ансамблю за счет сегментации данных, но это также ухудшает спектральное разрешение. Обработка конечных записей данных требует, конечно, принятия определенных компромиссов относительно разрешения, устойчивости (минимизации дисперсии оценки) и подавления просачивания. Часто при наличии очень коротких записей данных нам необходимо получить гораздо большее разрешение, чем может обеспечить полная запись данных при односегментном анализе. Добиться этого можно за счет ухудшения статистической устойчивости оценок. Методы, которые позволяют улучшать или сохранять высокое разрешение без значительного ухудшения устойчивости спектральных оценок, обсуждаются в следующей главе.

Литература

[1] *Bartlett M. S.* Smoothing Periodograms from Time Series with Continuous Spectra. Nature, London, vol. 161, pp. 686—687, 1948.

[2] *Blackman R. B., Tukey J. W.* The Measurement of Power Spectra from the Point of View of Communication Engineering. Dover Publications, Inc., New York, 1958; опубликовано также в январском и мартовском выпусках Bell Syst. Tech. J. за 1958 г.

[3] *Daniell P. J.* Discussion of «On the Theoretical Specification and Sampling Properties of Autocorrelated Time-Series», J. R. Stat. Soc., ser. B, vol. 8, pp. 88—90, 1946.

[4] Digital Signal Processing Committee, ed., Programs for Digital Signal Processing. IEEE Press, New York, 1979.

[5] *Gardner W. A.* Statistical Spectral Analysis: A Non-Probabilistic Theory. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1987.

[6] *Geckinli N. C., Yavuz D.* Discrete Fourier Transfomation and Its Applications to Power Spectra Estimation. Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam, 1983.

[7] *Harris F. J.* On the Use of Windows for Harmonic Analysis with the Discrete Fourier Transform. Proc. IEEE, vol. 66, pp. 51—83, January 1978. [Имеется русский перевод: *Хэррис Ф. Дж.* Использование окон при гармоническом анализе методом дискретного преобразования Фурье. ТИИЭР, 1978, т. 66, № 1, с. 60—96.]

[8] *Jenkins G. M., Watts D. G.* Spectral Analysis and Its Applications. Holden-

Day, Inc., San Francisco, 1965. [Имеется русский перевод: *Дженкинс Дж., Ваттс Г.* Спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1971, вып. 1; 1972, вып. 2.]
[9] *Jones R. H.* A Reappraisal of the Periodogram in Spectral Analysis. Technometrics, vol. 7, pp. 531—542, November 1965.
[10] *Koopmans L. H.* The Spectral Analysis of Time Series. Academic Press, Inc., New York, 1974.
[11] *Nuttall A. H.* Spectral Estimation by Means of Overlapped Fast Fourier Transform Processing of Windowed Data Naval Underwater Systems Center Technical Report 4169, New London, Conn., October 1971.
[12] *Nuttall A. H.* Some Windows with Very Good Sidelobe Behavior. IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., vol. ASSP-29, pp. 84—91, February 1981.
[13] *Nuttall A. H.* Spectral Analysis via Quadratic Frequency-Smoothing of Fourier-Transformed, Overlapped, Weighted Data Segments. Naval Underwater Systems Center Technical Report 6459, New London, Conn., June 1981.
[14] *Nuttall A. H., Carter G. C.* Spectral Estimation Using Combined Time and Lag Weighting. Proc. IEEE, vol. 70, pp. 1115—1125, September 1982. [Имеется русский перевод: *Наттолл А. Х., Картер Дж. К.* Спектральное оценивание с использованием комбинированного временного и корреляционного взвешивания. ТИИЭР, 1982, т. 70, № 9, с. 243—255.]
[15] *Oppenheim A. V., Schafer R. W.* Digital Signal Processing. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1975. [Имеется русский перевод: *Оппенгейм А. В., Шафер Р. В.* Цифровая обработка сигналов. М.: Связь, 1979.]
[16] *Otnes R. K., Enochson L.* Applied Time Series Analysis. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1978.
[17] *Rabiner L. R., Cold B.* Theory and Application of Digital Signal Processing. Prentice-Hall, englewood Cliffs, N. J., 1975. [Имеется русский перевод: *Рабинер Л., Голд Б.* Теория и применение цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1978.]
[18] *Rader C. M.* An Improved Algorithm for High Speed Autocorrelation with Application to Spectral Estimation. IEEE Trans. Audio Electroacoust., vol. AU-18, pp. 439—442, December 1970.
[19] *Thompson D. J.* Spectrum Estimation Techniques for Characterization and Development of WT4 Waveguide-II. Bell Syst. Tech. J., vol. 56, pp. 1983—2005, December 1977; Part 1, vol. 50, pp. 1769—1815, November 1977.

Задачи

1. Показать, что периодограммную оценку Бартлетта [уравнение (5.36)] можно записать в следующей матричной форме

$$\hat{P}_B(f)=\frac{T}{DP}\mathbf{e}_D^H(f)\left(\sum_{p=0}^{P}\mathbf{x}^{(p)}\mathbf{x}^{(p)H}\right)\mathbf{e}_D(f),$$

где $\mathbf{e}(f)$ — вектор комплексных синусоид [см. определение (3.21)], а $\mathbf{x}^{(p)}=(x[pD], x[pD+1], \ldots, x[pD+D-1])^T$ — вектор отсчетов данных для p-го сегмента.

2. Доказать смещенный результат, соответствующий приведенному в тексте уравнению (5.44).
3. Показать, что матрицу (5.25) смещенной оценки автокорреляции можно также записать в виде

$$\check{\mathbf{R}}_L=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\mathbf{x}_L[k]\,\mathbf{x}_L[k]^H,$$

где $\mathbf{x}_L[k]=(x[k], x[k-1], ..., x[k-L])^T$ — вектор данных. Положить $x[n]=0$ при $n<0$ и при $n>N-1$.

4. Разработать более эффективную в вычислительном отношении подпрограмму CORRELATION, в которой для вычисления корреляционных оценок используется БПФ.
5. Показать, что для действительных $\hat{r}_{xx}[m]$

$$\hat{P}_{BT}(f)=T\hat{r}_{xx}[0]+2T\sum_{m=1}^{M}\hat{r}_{xx}[m]\cos(2\pi fmT).$$

6. Вывести выражения для величин B_s и B_e для окон, приведенных в табл. 5.1, и пронормировать их относительно ячейки разрешения БПФ, равной $1/NT$ герц. Чему равно отношение $\alpha=B_s/B_e$ для каждого окна?
7. Какова величина качества оценки Q для выборочного спектра, полученного в приложении 4.А? Чему равно произведение QT_eB_s для спектра?
8. Спектральная оценка на основе коррелограммного метода, показанная на рис. 5.4, имеет отрицательные лепестки СПМ. Выбрать или построить окно, которое для тест-последовательности данных будет давать только положительные значения СПМ на всех частотах. Ввести это окно в программу CORRELOGRAMPSD. Нарисовать график результирующей спектральной оценки. Как сравнить эту оценку с оценкой на рис. 5.4?
9. Пусть задано N отсчетов данных $x[0]$, ..., $x[N-1]$. Показать, что коррелограммная оценка СПМ

$$\check{P}_{xx}(f)=T\sum_{m=-(N-1)}^{N-1}\check{r}_{xx}[m]\exp(-j2\pi fmT),$$

в которой используется смещенная автокорреляционная оценка при максимальном числе возможных временны́х сдвигов, и выборочный спектр

$$\tilde{P}_{xx}(f)=\frac{T}{N}\left|\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\exp(-j2\pi fnT)\right|^2.$$

идентичны.

Приложение 5.А. Программа для вычисления оценок корреляции

Подпрограмма CORRELATION предназначена для вычисления несмещенных и смещенных оценок автокорреляции и взаимной корреляции для комплексных данных (см. разд. 5.5). Выбор типа оценки — смещенная или несмещенная — зависит от выбора значения параметра MODE. Если массив X считывается при установке $X=Y$, как в CALL CORRELATION (N, LAG, MODE, X, X, R), то вычисляется автокорреляция; в противном случае вычисляется взаимная корреляция. Оценки корреляции вычисляются только при положительных значениях временно́го сдвига. Для получения оценок автокорреляции при отрицательных значениях временно́го сдвига необходимо просто вернуться в начало подпрограммы и вычислить сопряженные оценки автокорреляции. В случае взаимной корреляции для этой цели

нужно просто реверсировать векторы X и Y, снова вызвать подпрограмму и затем вычислить сопряженные значения. Возможность этих процедур является следствием свойства $r_{xy}[-m] = r_{yx}^*[m]$. С помощью процедуры, приведенной в приложении IV, помещенном в конце книги, программу можно преобразовать для обработки действительнозначных данных.

Если $N=64$, $LAG=15$ и $MODE=0$, то для 64-точечной тестпоследовательности данных, приведенной в приложении II, получим следующую 16-точечную автокорреляционную последовательность:

```
R[ 0]=(  1,780459;   0,000000);   R[ 8]=(—0,908952; —1,137790);
R[ 1]=(  0,325858;   1,529764);   R[ 9]=(  0,769808; —1,127676);
R[ 2]=(—1,341396;   0,772292);   R[10]=(  1,298158;   0,388247);
R[ 3]=(—1,012166; —0,989743);   R[11]=(—0,029651;   1,296811);
R[ 4]=(  0,534418; —1,295556);   R[12]=(—1,235431;   0,412799);
R[ 5]=(  1,444954;   0,189344);   R[13]=(—0,629708; —1,094549);
R[ 6]=(  0,226535;   1,458697);   R[14]=(  0,824489; —0,898308);
R[ 7]=(—1,327125;   0,588727);   R[15]=(  1,021054;   0,549560).
```

Подпрограмма CORRELATION (N, LAG, MODE, X, Y, R0, R)

```
C
C  Предназначена для вычисления смещенной или несмещенной оценки комп-
C  лексной корреляции между массивами отсчетов комплексных данных X
C  и Y. Если X=Y, то вычисляется оценка автокорреляции.
C
C  Входные параметры:
C
C     N      — число отсчетов данных в массивах X и Y (целое число).
C     LAG    — число вычисляемых значений корреляции [значения при вре-
C              менны́х сдвигах от 0 до LAG вычисляются и хранятся в R0
C              и в R(1) по R(LAG)] (целое число).
C     MODE   — устанавливается в 0 для вычисления несмещенных оценок
C              корреляции; в противном случае вычисляются смещенные
C              оценки корреляции (целое число).
C     X      — массив отсчетов комплексных данных с X(1) по X(N).
C     Y      — массив отсчетов комплексных данных с Y(1) по Y(N).
C
C  Выходные параметры:
C
C     R0     — оценка комплексной корреляции при временно́м сдвиге, рав-
C              ном 0
C     R      — массив оценок комплексной корреляции при временны́х сдви-
C              гах от 1 до LAG
C
C  Примечание:
C
C     Размеры .GE. N внешних массивов X, Y и размеры .GE. LAG массива R
C     должны указываться в вызывающей программе.
C
      COMPLEX X(1), Y(1), R(1), R0, SUM
      DO 30 K=0, LAG
         NK=N-K
         SUM=(0.,0.)
         DO 10 J =1, NK
```

```
10          SUM=SUM+X(J+K)*CONJG(Y(J))
          IF (K .NE. 0) GO TO 20
          R0=SUM/FLOAT(N)
          GO TO 30
20        IF (MODE .EQ. 0) R(K)=SUM/FLOAT(N-K)   ! (5.9)
          IF (MODE .NE. 0) R(K)=SUM/FLOAT(N)     ! (5.13), (5.19)
30        CONTINUE
        RETURN
        END
```

Приложение 5.Б. Программа для вычисления оценки СПМ с помощью коррелограммного метода

Подпрограмма CORRELOGRAMPSD предназначена для вычисления автоспектральных и взаимно спектральных оценок с помощью коррелограммного метода оценивания СПМ Блэкмана — Тьюки, в основу которого положено уравнение (5.27). Для повышения эффективности вычисления преобразования Фурье от СПМ используется БПФ. Если массив X считывается при установке $X=Y$, как в CALL CORRELOGRAMPSD (N, LAG, T, X, X, PSD), то вычисляется автоспектральная оценка; в противном случае вычисляется оценка взаимного спектра. Для обработки действительных данных необходимо положить мнимую составляющую отсчетов данных равной нулю.

Если $N=64$, $LAG=15$ и $T=1{,}0$, то для 64-точечной тест-последовательности, приведенной в приложении II, помещенном в конце книги, получим последовательность значений СПМ, выборочные шесть из которых приведены ниже:

```
PSD(   1)=  0,131417E+00     PSD(3000)=  0,219200E+00
PSD(1000)=  0,795428E+01     PSD(4000)= -0,344072E-01
PSD(2000)=  0,106389E+00     PSD(4096)=  0,132312E+00
```

Подпрограмма CORRELOGRAMPSD (N, LAG, T, X, Y, PSD)

```
C
C  Заметим, что Rxy[-k] вычисляется как комплексно-сопряженное величи-
C  не (Ryx[k]).
C
C  Входные параметры:
C
C     N    — число отсчетов данных.
C     LAG  — максимальное значение индекса временно́го сдвига.
C     T    — интервал отсчетов в секундах.
C     X    — массив отсчетов комплексных данных с X(1) по X(N).
C     Y    — массив отсчетов комплексных данных с Y(1) по Y(N).
C
C  Выходные параметры:
C
C     PSD  — массив значений оценок действительной спектральной плотности
C            мощности (СПМ).
C
```

```
C  Примечание:
C
C     Размеры .GE. N внешних массивов X и Y и размер .GE. NPSD должны
C     указываться в вызывающей программе. Размеры внутреннего масси-
C     ва W должны указываться в .GE. NPSD, а массивов R и WINDOW —
C     в .GE. LAG. Используются внешние подпрограммы: CORRELATION
C     (см. приложение 5.A), PREFFT и FFT (см. приложение 2.B).
C
      PARAMETER(NPSD=4096, PI=3,141592654)
      COMPLEX X(1), Y(1), PSD(1), W(NPSD), R(64), R0
      REAL WINDOW(64)
C  Здесь можно использовать окно
      DO 10 K=1,LAG
10       WINDOW(K)=0.538+0.462*COS(PI*FLOAT(K)/FLOAT(LAG))
      CALL CORRELATION (N, LAG, 0, X, Y, R0, R)
      PSD(1)=R0
      DO 20 K=1, LAG
20       PSD(K+1)=R(K)*WINDOW(K)
      CALL CORRELATION (N, LAG, 0, Y, X, R0, R)
      DO 30 K=1,LAG
30       PSD(NPSD+1-K)=CONJG(R(K))*WINDOW(K)
      DO 40 K=LAG+2, NPSD-LAG
40       PSD(K)=(0. ,0.)
      CALL PREFFT (NPSD, 0, NEXP, W)
      CALL FFT (NPSD, 0, T, NEXP, W, PSD)
      RETURN
      END
```

Приложение 5.B.
Программа для вычисления оценки СПМ с помощью периодограммного метода

Подпрограмма PERIODOGRAM предназначена для вычисления автоспектральных и взаимно спектральных оценок с помощью периодограммного метода Уэлча, в основу которого положено уравнение (5.43). Для повышения эффективности вычисления преобразования Фурье от СПМ используется БПФ. Если массив X считывается при установке $X=Y$, как в CALL PERIODOGRAM (N, NSHIFT, NSAMP, T, X, X, NSEG, PSD), то вычисляется автоспектральная оценка; в противном случае вычисляется оценка взаимного спектра. Для обработки действительных данных необходимо положить мнимую составляющую отсчетов данных равной нулю.

Если $N=64$, $NSHIFT=16$, $NSAMP=32$ и $T=1{,}0$, то для 64-точечной тест-последовательности, приведенной в приложении II, помещенном в конце книги, получим последовательность значений СПМ, выборочные шесть из которых приведены ниже:

```
PSD(1)=0,341366E—03        PSD(3000)=0,505813E—01
PSD(1000)=0,989954E+00     PSD(4000)=0,378735E—03
PSD(2000)=0,812411E—02     PSD(4096)=0,336007E—03.
```

```
      Подпрограмма (N, NSHIFT, NSAMP, T, X, Y, NSEG, PSD)
C
C  Предназначена для вычисления усредненной периодограммы, определяемой
C  выражением (5.43). Подпрограмма вычисляет количество сегментов NSEG,
C  равное ближайшему целому числу. Используется окно Хэмминга, хотя
C  можно применять и другие окна, приведенные в табл. 5.1. Выходом про-
C  граммы являются значения оценок спектральной плотности мощности PSD
C  в диапазоне частот от −1/2T до 1/2T, где T — интервал отсчетов в секун-
C  дах. При вычислении автоспектральных оценок несколько снизить вычис-
C  лительные затраты можно, устранив строки программы, касающиеся век-
C  тора Y. В общем случае значения оценок взаимной СПМ являются комп-
C  лексными, автоспектральные оценки имеют действительные значения.
C
C  Выходные параметры:
C
C     N       — число отсчетов данных
C     NSHIFT  — число отсчетов, соответствующее сдвигу между сегментами
C     NSAMP   — число отсчетов на сегмент (должно быть четным)
C     T       — интервал отсчетов в секундах
C     X       — массив комплексных отсчетов с X(1) по X(N)
C     Y       — массив комплексных отсчетов с Y(1) по Y(N)
C
C  Выходные параметры:
C
C     NSEG    — число усредняемых сегментов
C     PSD     — массив из действительных значений NPSD спектральной
C               плотности мощности
C
C  Примечание:
C
C     Размеры .GE. N внешних массивов X, Y и размер .GE. NPSD массива
C     PSD должны указываться в вызывающей программе, размеры внутрен-
C     них массивов W, XSEG, YSEG должны указываться в .GE. NPSD,
C     размер массива WINDOW должен указываться в .GE. NSAMP. Исполь-
C     зуются внешние подпрограммы: PREFFT и FFT (см. приложение 2.B)
C
      PARAMETER NPSD=4096          ! Должно быть степенью числа 2
      COMPLEX X(1),Y(1),PSD(1),W(NPSD),XSEG(NPSD),YSED(NPSD),
                                                          TEMP
      REAL WINDOW(127)
      PI2=8.*ATAN(1.)
      CALL PREFFT (NPSD,0,NEXP,W)
C  Используется окно Хэмминга. Следующие две строки можно заменить лю-
C  бой другой функцией окна.
      DO 10 K=1,NSAMP
10       WINDOW(K)=0.538+0.462*COS(PI2*(-.5+
                                    FLOAT(K-1)/FLOAT(NSAMP-1)))
C  Вычислить число целых сегментов NSEG, таких что NSEG .LE. N
      NSEG=(N-NSAMP)/NSHIFT+1
      DO 50 K=1,NSEG
         DO 20 J=1,NSAMP
            INDEX=J+(K-1)*NSHIFT
            XSEG(J)=X(INDEX)*WINDOW(J)
20          YSEG(J)=Y(INDEX)*WINDOW(J)
         DO 30 J=NSAMP+1,NPSD
            XSEG(J)=(0.,0.)
30          YSEG(J)=(0.,0.)
```

```
      CALL FFT (NPSD,0,T,NEXP,W,XSEG)
      CALL FFT (NPSD,0,T,NEXP,W,YSEG)
      DO 40 J=1,NPSD
         IF (K .EQ. 1) PSD(J)=XSEG(J)*CONJG(YSEG(J))
40       IF (K .NE. 1) PSD(J)=PSD(J)+XSEG(J)*CONJG(YSEG(J))
50    CONTINUE
C  Необходимо ввести коэффициент коррекции энергии окна
      DO 60 K=1,NPSD
60       PSD(K)=PSD(K)/FLOAT(NSEG*NSAMP)
      RETURN
      END
```

Глава 6
ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

6.1. Введение

В гл. 4 спектральная плотность мощности (СПМ) была определена как дискретно-временно́е преобразование Фурье (ДВПФ) бесконечной автокорреляционной последовательности (АКП). Это соотношение между СПМ и АКП можно рассматривать как *непараметрическое* описание статистик второго порядка случайного процесса. Ряд других непараметрических спектральных оценок, которые являются строгими функциями АКП, рассматривается в гл. 12 и 13. К *параметрическому* описанию статистик второго порядка можно прийти, рассматривая модель временно́го ряда, соответствующего анализируемому случайному процессу. В этом случае СПМ модели временно́го ряда будет прежде всего некоторой функцией параметров этой модели, а не АКП. В данной главе описан один частный класс моделей, возбуждаемых белым шумовым процессом и обладающих рациональными системными функциями. Этот класс включает модель авторегрессионного (АР) процесса, модель процесса скользящего среднего (СС) и модель процесса авторегрессии — скользящего среднего (АРСС). Выходные процессы моделей этого класса имеют спектральные плотности мощности, которые полностью описываются с помощью параметров модели и дисперсии белого шумового процесса. Значения этих параметров и дисперсии белого шума определяются по автокорреляционной последовательности с помощью соотношений, описанных ниже в этой главе. Методы оценивания параметров моделей и дисперсии белого шума по конечной записи данных рассматриваются в гл. 8—10.

Одна из причин применения параметрических моделей случайных процессов обусловлена возможностью получения на основе этих моделей более точных оценок СПМ, чем это возможно с помощью классических методов спектрального оценивания. Еще одна важная причина — более высокое спектральное разрешение. И периодограммный, и коррелограммный методы, описанные в гл. 5, дают оценки СПМ по взвешенной последовательности данных или оценок АКП. Отсутствующие данные или неоцененные значения АКП за пределами применяемого окна

неявно полагаются равными нулю, что, естественно, является нереалистическим допущением и приводит к искажениям спектральных оценок. На практике часто имеется некоторая информация относительно процесса, из которого берутся отсчеты данных. Эту информацию можно использовать для построения модели, аппроксимирующей процесс, который породил наблюдаемую временну́ю последовательность. Такие модели позволяют принимать более реалистические допущения о данных вне окна, чем допущение об их равенстве нулю. В результате отпадает необходимость в функциях окна, а следовательно, устраняются и связанные с ними искажения. Степень улучшения разрешения и повышения достоверности спектральных оценок (если они имеются) определяется соответствием выбранной модели анализируемому процессу и возможностью аппроксимации измеренных данных или АКП (известной или оцененной по этим данным) с помощью нескольких параметров модели.

Задание СПМ или АКП требует обеспечения устойчивости и (или) каузальности применяемого фильтра, с тем чтобы получить однозначно определенную модель; этому вопросу посвящен разд. 6.6.

6.2. Краткая сводка результатов

Параметрический метод спектрального оценивания состоит из трех этапов. На первом из них производится выбор параметрической модели временно́го ряда, соответствующий имеющейся записи измеренных данных. В этой главе будут рассмотрены три типа параметрических моделей временны́х рядов: авторегрессионная (АР) модель, модель скользящего среднего (СС) и комбинированная модель авторегрессии — скользящего среднего (АРСС). На втором этапе вычисляются оценки параметров модели. На третьем этапе оцененные значения параметров вводятся в теоретическое выражение для спектральной плотности мощности, соответствующее избранной модели.

В табл. 6.1 указаны номера уравнений для АР-, СС- и АРСС-моделей, которые приводятся в данной главе. В приложении 6.А помещена машинная программа ARMAPSD, предназначенная для вычисления значений СПМ по заданным значениям параметров соответствующей модели. Выбор одной из трех моделей, приведенных в табл. 6.1, требует некоторых предварительных сведений о возможной форме спектральной оценки. Если необходимы спектры с острыми пиками, но без глубоких впадин (нулей), то наиболее подходящей является АР-модель. Если, наоборот, необходимы спектры с глубокими нулями, но без острых пиков, то подойдет СС-модель. Что же касается АРСС-модели, то она может, вообще говоря, приме-

Таблица 6.1. Сводка основных соотношений для параметрических моделей

Основные соотношения	АРСС	АР	СС
Определение временно́го ряда	(6.1)	(6.13)	(6.11)
Автокорреляционная последовательность	(6.29)	(6.31)	(6.35)
СПМ (на основе параметров)*)	(6.8)	(6.14)	(6.12)
СПМ (на основе АКП)	—	(6.33)	(6.36)
Эквивалентность АР(∞)-модели	(6.17)	—	(6.17)
Эквивалентность СС(∞)-модели	(6.24)	(6.24)	—

*) См. также подпрограмму ARMAPSD, помещенную в приложении 6.А.

няться в обоих этих предельных случаях. В тех случаях, когда одинаково пригодна любая из трех моделей, следует, по всей вероятности, использовать ту из них, которая имеет наименьшее число параметров. Этот принцип экономии был предложен Боксом и Дженкинсом [1] и основан на том факте, что получить оценки с хорошими статистическими свойствами можно, как правило, тогда, когда число оцениваемых параметров минимально. Заметим, однако, что вычислительные затраты для оценивания параметров АР-модели часто значительно меньше вычислительных затрат, требуемых для оценивания параметров СС- и АРСС-моделей, поэтому АР-модель временно́го ряда иногда выгодно применять даже тогда, когда она не является моделью с наименьшим числом параметров. Вопросы, касающиеся числа параметров для уже выбранной модели будут рассмотрены в гл. 8 и 10.

6.3. АР-, СС- и АРСС-модели случайных процессов

Модель временно́го ряда, которая пригодна для аппроксимации многих встречающихся на практике детерминированных и стохастических процессов с дискретным временем, описывается выходом фильтра, выражаемым следующим линейным разностным уравнением с комплексными коэффициентами:

$$x[n] = -\sum_{k=1}^{p} a[k]\,x[n-k] + \sum_{k=0}^{q} b[k]\,u[n-k] = \tag{6.1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} h[k]\,u[n-k]. \tag{6.2}$$

Здесь $x[n]$ — последовательность на выходе каузального фильтра ($h[k]=0$ при $k<0$), который формирует наблюдаемые дан-

ные, а $u[n]$ — входная возбуждающая последовательность. Без потери общности можно положить $b[0]=1$, так как вход $u[n]$ всегда можно соответствующим образом промасштабировать, с тем чтобы учесть любой коэффициент усиления фильтра. Выше в гл. 2 было показано, что системная функция $H(z)$, связывающая вход и выход этого фильтра [см. выражение (2.17)], имеет рациональную форму

$$H(z)=\frac{B(z)}{A(z)}, \tag{6.3}$$

в которой полиномы определяются следующими выражениями:

$$A(z)=1+\sum_{k=1}^{p} a[k]\,z^{-k}, \tag{6.4}$$

$$B(z)=1+\sum_{k=1}^{q} b[k]\,z^{-k}, \tag{6.5}$$

$$H(z)=1+\sum_{k=1}^{\infty} h[k]\,z^{-k}. \tag{6.6}$$

При этом предполагается, что нули полиномов $A(z)$ и $B(z)$ расположены внутри единичной окружности в z-плоскости, с тем чтобы гарантировать принадлежность функции $H(z)$ устойчивому минимально-фазовому каузальному фильтру.

Согласно выражениям (4.42), z-преобразование автокорреляции выходной последовательности $x[n]$ и z-преобразование автокорреляции входного случайного процесса $u[n]$ связаны соотношением

$$P_{xx}(z)=P_{uu}(z)\,H(z)\,H^*(1/z^*)=P_{uu}(z)\frac{B(z)\,B^*(1/z^*)}{A(z)\,A^*(1/z^*)}. \tag{6.7}$$

Входной возбуждающий процесс $u[n]$ обычно не доступен для наблюдения и поэтому не может быть использован для целей спектрального анализа. Относительно него можно принять много различных допущений, скажем положить, что это единичный импульс, импульсная последовательность или белый шум. Если, например, использовано допущение о том, что это — импульс, то приходим к методам, которые описаны в гл. 11. В данной главе мы будем полагать, что возбуждающая последовательность является белым шумом с нулевым средним значением и дисперсией ρ_w, так что $P_{uu}(z)=\rho_w$. Тогда модель *авторегрессии — скользящего среднего* (АРСС) для временно́го ряда $x[n]$ будет определяться выражением (6.1), где $u[n]$ — последовательность, соответствующая белому шуму. Функциональная схема АРСС-модели показана на рис. 6.1, *а*; здесь параметры $a[k]$ характеризуют авторегрессионную часть этой мо-

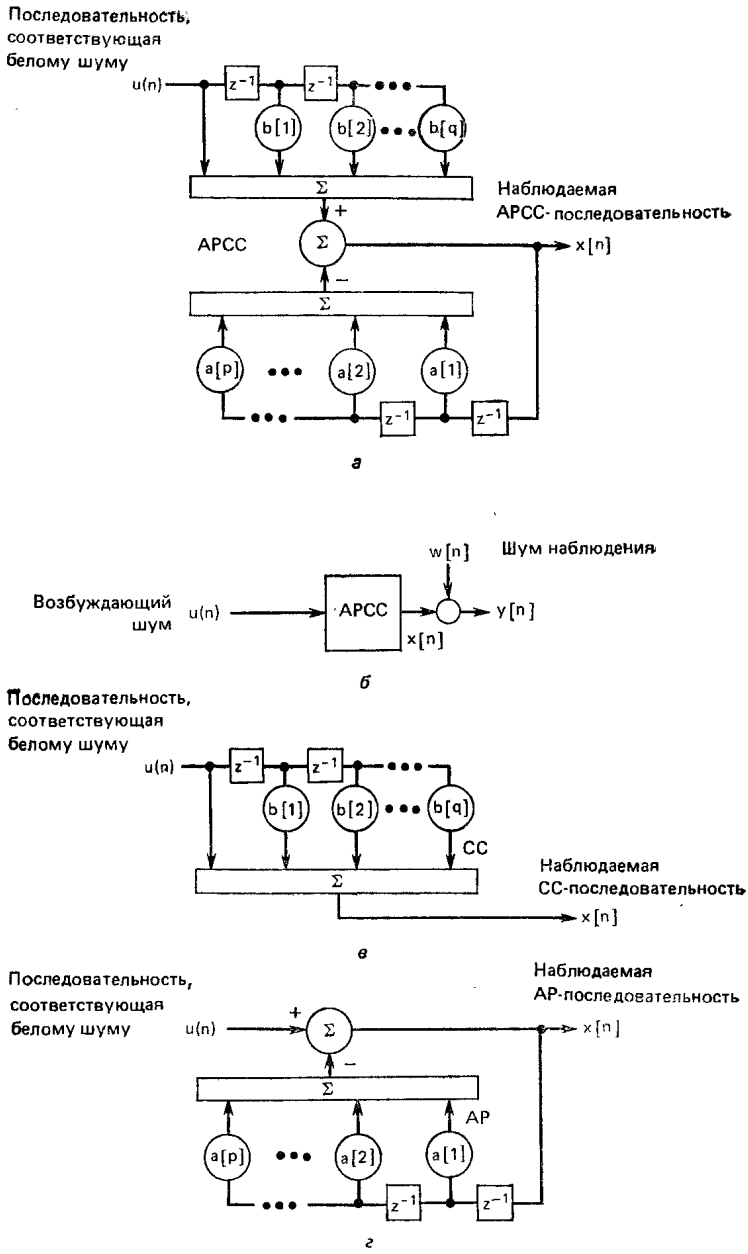


Рис. 6.1. Модели временно́го ряда, которые имеют рациональные системные функции: *а* — фильтр авторегрессии — скользящего среднего (АРСС) порядка (p, q); *б* — АРСС-процесс с шумом наблюдения; *в* — фильтр скользящего среднего (СС) порядка q; *г* — авторегрессионный (АР) фильтр порядка p.

дели, а параметры $b[k]$ — ее часть, соответствующую скользящему среднему. Спектральную плотность мощности для АРСС-модели получаем, подставляя в (6.7) $z=\exp(j2\pi fT)$ и масштабируя интервалом отсчетов T [см. выражение (4.43)], что дает

$$P_{\text{АРСС}}(f)=T\rho_w\left|\frac{B(f)}{A(f)}\right|^2=T\rho_w\frac{\mathbf{e}_q^H(f)\,\mathbf{b}\mathbf{b}^H\mathbf{e}_q(f)}{\mathbf{e}_p^H(f)\,\mathbf{a}\mathbf{a}^H\mathbf{e}_p(f)}, \tag{6.8}$$

где полиномы $A(f)$ и $B(f)$ определяются выражениями

$$\begin{aligned}A(f)&=1+\sum_{k=1}^{p}a[k]\exp(-j2\pi fkT),\\ B(f)&=1+\sum_{k=1}^{q}b[k]\exp(-j2\pi fkT),\end{aligned} \tag{6.9}$$

а векторы комплексных синусоид $\mathbf{e}_q(f)$ и $\mathbf{e}_p(f)$ и векторы параметров $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ имеют следующий вид:

$$\mathbf{e}_p(f)=\begin{bmatrix}1\\ \exp(j2\pi fT)\\ \vdots\\ \exp(j2\pi fpT)\end{bmatrix},\quad \mathbf{a}=\begin{bmatrix}1\\ a[1]\\ \vdots\\ a[p]\end{bmatrix}, \tag{6.10}$$

$$\mathbf{e}_q(f)=\begin{bmatrix}1\\ \exp(j2\pi fT)\\ \vdots\\ \exp(j2\pi fqT)\end{bmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}1\\ b[1]\\ \vdots\\ b[q]\end{bmatrix}.$$

Спектральная плотность мощности АРСС-процесса вычисляется в диапазоне частот $-1/2T\leqslant f\leqslant 1/2T$.

В литературе часто используется обозначение АРСС (p, q), что удобно для краткого обозначения АРСС-модели с параметрами авторегрессии *порядка* p и параметрами скользящего среднего *порядка* q. Заметим, что задание АР-параметров, СС-параметров и дисперсии белого шума ρ_w полностью характеризуют спектральную плотность мощности АРСС-процесса $x[n]$. Любой аддитивный шум наблюдения, присутствующий в последовательности измеряемых данных, должен моделироваться как шум источника, *отличного* от источника *возбуждающего* шума, являющегося составной частью АРСС-модели (см. рис. 6.1, *б*). Эффекты, обусловленные шумом наблюдения, обсуждаются в гл. 8.

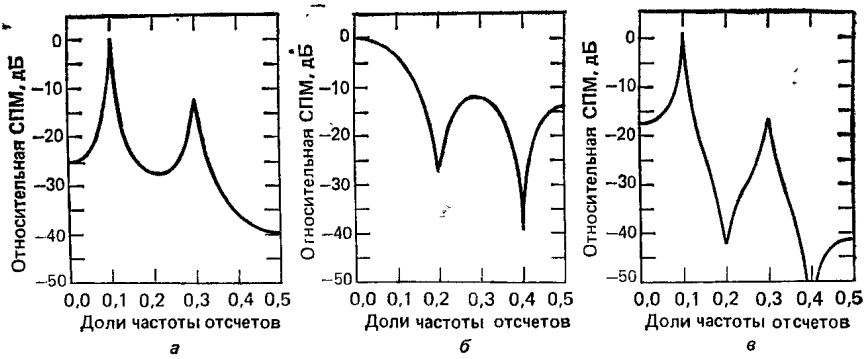


Рис. 6.2. Типичные параметрические модели спектра: *а* — АР(4)-спектр; *б* — СС(4)-спектр; *в* — АРСС(4, 4)-спектр.

Если все АР-параметры положить, за исключением $a[0]=1$, равными нулю, то тогда

$$x[n]=\sum_{k=1}^{q} b[k]\,u[n-k]+u[n] \tag{6.11}$$

будет строго СС-процессом порядка q, или просто СС(q)-процессом. Полагая в уравнении (6.8) $p=0$, получаем спектральную плотность мощности СС-процесса

$$P_{\text{СС}}(f)=T\rho_w|B(f)|^2=T\rho_w\mathbf{e}_q^H(f)\,\mathbf{b}\mathbf{b}^H\mathbf{e}_q(f). \tag{6.12}$$

Функциональная схема СС-модели показана на рис. 6.1, *в*.

Если все СС-параметры положить, за исключением $b[0]=1$, равными нулю, то

$$x[n]=-\sum_{k=1}^{p} a[k]\,x[n-k]+u[n] \tag{6.13}$$

будет строго АР-процессом порядка p, или просто АР(p)-процессом. Полагая в уравнении (6.8) $q=0$, получаем спектральную плотность мощности АР-процесса:

$$P_{\text{АР}}(f)=\frac{T\rho_w}{|A(f)|^2}=\frac{T\rho_w}{\mathbf{e}_p^H(f)\,\mathbf{a}\mathbf{a}^H\mathbf{e}_p(f)}. \tag{6.14}$$

Функциональная схема АР-модели показана на рис. 6.1, *г*. При заданных значениях параметров и дисперсии белого шума ρ_w спектральные плотности мощности АРСС-, СС-, и АР-процессов можно вычислить с помощью подпрограммы ARMAPSD, приведенной в приложении 6.А.

На рис. 6.2 показаны спектры типичных АРСС-, СС- и АР-процессов. Отметим острые пики, характерные для АР-спект-

ров, и глубокие провалы, характерные для СС-спектров. АРСС-спектр, показанный на рис. 6.2, *в*, представляет собой результат объединения АР- и СС-спектров, показанных на рис. 6.2, *а* и 6.2, *б*. АРСС-спектр пригоден для моделирования как острых пиков, так и глубоких провалов. С несколько иной трактовкой спектральных характеристик этих параметрических моделей можно познакомиться в статье Гутовски и др. [2] и книге Кея [3].

6.4. Соотношения между параметрами АР-, СС- и АРСС-моделей

Если задана АР-, СС- и АРСС-модель с конечным числом параметров, то ее можно выразить через две другие модели. АРСС- и СС-процессы можно записать с помощью одной АР-модели в общем случае бесконечного порядка. Этот факт очень важен, так как позволяет выбирать любую из трех моделей и все же получать приемлемую аппроксимацию при достаточно большом порядке этой модели. Возможны определенные алгоритмические выгоды, если по имеющимся данным сначала оценить параметры какой-либо одной модели, а затем по ним вычислить значения параметров какой-либо другой модели. Много эффективных алгоритмов оценивания параметров разработано, в частности, для АР-модели. Как будет показано в гл. 10, оценивание параметров АР-модели большого порядка часто используется в качестве первого этапа алгоритма оценивания параметров СС- и АРСС-моделей.

Пусть

$$C(z)=1+\sum_{k=1}^{\infty} c[k]\,z^{-k} \tag{6.15}$$

— полином знаменателя АР(∞)-модели. Параметры $c[k]$ АР(∞)-модели, которая эквивалентна АРСС (p, q)-модели, получаются из соотношения

$$\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{1}{C(z)}, \tag{6.16}$$

или формированием обратного z-преобразования от $C(z)B(z)=A(z)$. Отсюда получаем

$$c[n]=\begin{cases} 1, & n=0,\\ -\sum\limits_{k=1}^{q} b[k]\,c[n-k]+a[n], & 1\leqslant n\leqslant p;\\ -\sum\limits_{k=1}^{q} b[k]\,c[n-k], & n>p \end{cases} \tag{6.17}$$

с начальными условиями $c[-1]=\ldots=c[-q]=0$. И наоборот, если заданы параметры АР(∞)-модели, которая, как известно, эквивалентна АРСС(p, q)-модели, то значения СС-параметров можно восстановить, решая уравнение

$$\begin{pmatrix} c[p] & c[p-1] & \ldots & c[p-q+1] \\ c[p+1] & c[p] & \ldots & c[p-q+2] \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c[p+q-1] & c[p+q-2] & \ldots & c[p] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b[1] \\ b[2] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b[q] \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} c[p+1] \\ c[p+2] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c[p+q] \end{pmatrix} \tag{6.18}$$

относительно параметров $b[k]$ и используя при этом соотношение (6.17) при $p+1 \leqslant n \leqslant p+q$. Матрица параметров $c[n]$ в уравнении (6.18) является тёплицевой, поэтому для его решения можно использовать подпрограмму TOEPLITZ, помещенную в приложении 3.Г. После определения СС-параметров значения АР-параметров АРСС-модели можно восстановить с помощью свертки

$$a[n]=c[n]+\sum_{k=1}^{q} b[k]\,c[n-k], \tag{6.19}$$

где $1 \leqslant n \leqslant p$. Алгоритмы быстрой свертки основаны на использовании БПФ. Отметим также, что уравнение (6.19) выводится из уравнения (6.17).

Заметим, что в уравнениях (6.18) и (6.19) используются только авторегрессионные параметры $c[1], \ldots, c[p+q]$ АР(∞)-модели. Если параметры $c[k]$ при $k>p+q$ полагаются равными нулю, то результирующая усеченная АР$(p+q)$-модель может *аппроксимировать* только ту АРСС (p, q)-модель, из которой она получена. Она аппроксимирует эту АРСС-модель в том смысле, что полином, обратный полиному АРСС-модели,

$$G(z)=\frac{1}{H(z)}=\frac{A(z)}{B(z)}=1+\sum_{k=1}^{\infty} g[k]\,z^{-k} \tag{6.20}$$

и полином усеченной АР-модели

$$C(z)=1+\sum_{k=1}^{p+q} c[k]\,z^{-k} \tag{6.21}$$

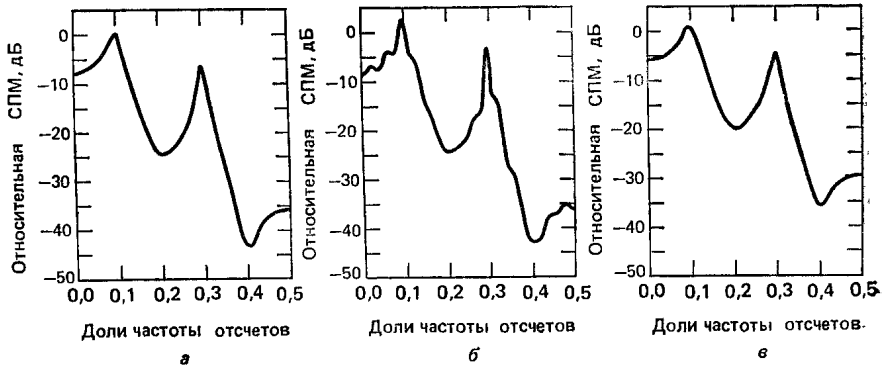


Рис. 6.3. Конечные АР-аппроксимации для АРСС-модели: *а* — АРСС(4, 4)-спектр; *б* — спектр АР(25)-аппроксимации; *в* — спектр АР(50)-аппроксимации.

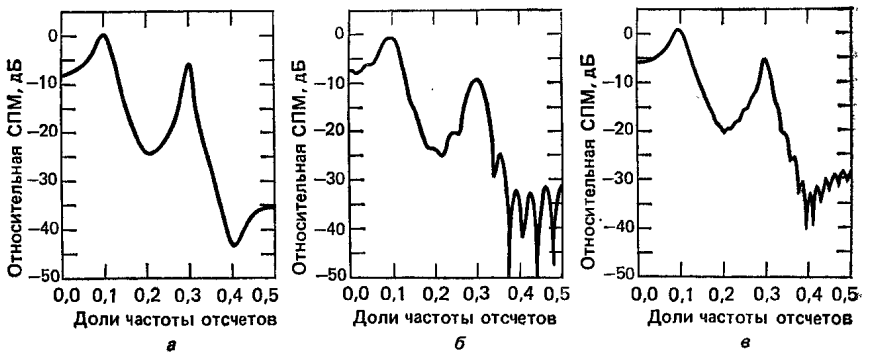


Рис. 6.4. Конечные СС-аппроксимации для АРСС-модели: *а* — АРСС(4, 4)-спектр; *б* — спектр СС(25)-аппроксимации; *в* — спектр СС(50)-аппроксимации.

согласованны, т. е. $g[k]=c[k]$, только для $1\leqslant k\leqslant p+q$. Эта аппроксимация рациональной функции полиномов конечного порядка полиномом более высокого порядка представляет собой известную задачу аппроксимации Паде [4, 5][1]. Эта процедура будет использована в гл. 10 для вывода аппроксимаций АРСС-моделей на основе АР-моделей высокого порядка. Типичные АР-аппроксимации высокого порядка для АРСС-модели низкого порядка показаны на рис. 6.3.

Аналогичным образом пусть теперь

$$D(z)=1+\sum_{k=1}^{\infty} d[k]\,z^{-k} \qquad (6.22)$$

[1] По аппроксимации Паде читателю можно рекомендовать книгу [18*]. — *Прим. ред.*

— полином числителя CC(∞)-модели. Параметры $b[k]$ этой модели, которая эквивалентна APCC (p, q)-модели, можно определить, записывая уравнение

$$\frac{B(z)}{A(z)} = D(z), \tag{6.23}$$

или формированием обратного z-преобразования от $D(z)A(z) = B(z)$. Отсюда получаем

$$d[n] = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ -\sum_{k=1}^{p} a[k]\, d[n-k] + b[n], & 1 \leqslant n \leqslant q; \\ -\sum_{k=1}^{p} a[k]\, d[n-k], & n > q. \end{cases} \tag{6.24}$$

Здесь также можно записать уравнения, аналогичные уравнениям (6.18) и (6.19); см. разд. «Задачи». Типичные CC-аппроксимации для APCC-модели показаны на рис. 6.4.

6.5. Соотношение AP-, CC- и APCC-параметров с автокорреляционной последовательностью

Этот раздел посвящен определению параметров модели в том случае, когда известна автокорреляционная последовательность. Если обе части уравнения (6.1) помножить на $x^*[n-m]$ и определить математическое ожидание, то получим

$$\mathcal{E}\{x[n]\, x^*[n-m]\} =$$

$$= -\sum_{k=1}^{p} a[k]\, \mathcal{E}\{x[n-k]\, x^*[n-m]\} + \sum_{k=0}^{q} b[k]\, \mathcal{E}\{u[n-k]\, x^*[n-m]\} \tag{6.25}$$

или

$$r_{xx}[m] = -\sum_{k=1}^{p} a[k]\, r_{xx}[m-k] + \sum_{k=0}^{q} b[k]\, r_{ux}[m-k]. \tag{6.26}$$

Взаимную корреляцию $r_{ux}[i]$ между входом и выходом можно записать через параметры $h[k]$, входящие в выражение (6.6), используя для этой цели уравнение (6.2), что дает

$$r_{ux}[i] = \mathcal{E}\{u[n+i]\, x^*[n]\} =$$

$$= \mathcal{E}\left\{u[n+i]\left[u^*[n] + \sum_{k=1}^{\infty} h^*[k]\, u^*[n-k]\right]\right\} =$$

$$= r_{uu}[i] + \sum_{k=1}^{\infty} h^*[k]\, r_{uu}[i+k]. \tag{6.27}$$

Поскольку полагается, что $u[k]$ — белый шум, то

$$r_{ux}[i]=\begin{cases}0, & i>0;\\ \rho_w, & i=0;\\ \rho_w h^*[-i], & i<0.\end{cases} \tag{6.28}$$

Отсюда получаем окончательное выражение, связывающее параметры АРСС-модели и автокорреляционную последовательность процесса $x[k]$:

$$r_{xx}[m]=\begin{cases} r^*_{xx}[-m], & m<0;\\ -\sum\limits_{k=1}^{p} a[k]\,r_{xx}[m-k]+\rho_w\sum\limits_{k=m}^{q} b[k]\,h^*[k-m], & 0\leqslant m\leqslant q;\\ -\sum\limits_{k=1}^{p} a[k]\,r_{xx}[m-k], & m>q,\end{cases} \tag{6.29}$$

где напомним читателю, что $h[0]=1$ по определению [см. уравнение (6.2)].

Авторегрессионные параметры АРСС-модели и автокорреляционная последовательность связаны системой линейных уравнений. Выражение (6.29) можно, например, записать для p значений индекса временно́го сдвига $q+1\leqslant m\leqslant q+p$ и затем представить в матричной форме

$$\begin{pmatrix} r_{xx}[q] & r_{xx}[q-1] & \dots & r_{xx}[q-p+1]\\ r_{xx}[q+1] & r_{xx}[q] & \dots & r_{xx}[q-p+2]\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ r_{xx}[q+p-1] & r_{xx}[q+p-2] & \dots & r_{xx}[q]\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a[1]\\ a[2]\\ \vdots\\ a[p]\end{pmatrix}=$$

$$=-\begin{pmatrix} r_{xx}[q+1]\\ r_{xx}[q+2]\\ \vdots\\ r_{xx}[q+p]\end{pmatrix}. \tag{6.30}$$

Таким образом, если задана автокорреляционная последовательность для $q-p+1\leqslant m\leqslant q+p$, то АР-параметры можно найти отдельно от СС-параметров как решение системы линейных уравнений (6.30). Уравнения (6.30) называются *нормальными уравнениями Юла — Уолкера для АРСС-процесса;* иногда их также называют *модифицированными уравнениями Юла — Уолкера.* Автокорреляционная матрица в системе (6.30) является тёплицевой, поэтому для решения этой системы можно

применить подпрограмму TOEPLITZ, помещенную в приложении 3.Г. Количество требуемых для решения вычислительных операций пропорционально величине p^2. Следует заметить, что значения СС-параметров АРСС-модели не являются, к сожалению, решением системы линейных уравнений. СС-параметры входят в выражение (6.29) в виде сверток с коэффициентами импульсной характеристики $h[k]$, а это приводит к нелинейной связи с автокорреляционной последовательностью.

Полагая в (6.29) $q=0$, получаем уравнение, связывающее автокорреляционную последовательность с параметрами авторегрессионной модели:

$$r_{xx}[m]=\begin{cases}-\sum\limits_{k=1}^{p} a[k]\,r_{xx}[m-k], & m>0;\\ -\sum\limits_{k=1}^{p} a[k]\,r_{xx}[-k]+\rho_w, & m=0;\\ r_{xx}^{*}[-m], & m<0.\end{cases} \tag{6.31}$$

Это выражение можно записать для $p+1$ значений индекса временно́го сдвига $0\leqslant m\leqslant p$ и затем представить в матричной форме

$$\begin{pmatrix} r_{xx}[0] & r_{xx}[-1] & \dots & r_{xx}[-p] \\ r_{xx}[1] & r_{xx}[0] & \dots & r_{xx}[-p+1] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{xx}[p] & r_{xx}[p-1] & \dots & r_{xx}[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a[1] \\ \vdots \\ a[p] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_w \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{6.32}$$

Таким образом, если задана автокорреляционная последовательность для $0\leqslant m\leqslant p$, то АР-параметры можно найти в результате решения уравнений (6.32), которые называются *нормальными уравнениями Юла — Уолкера для АР-процесса*. Автокорреляционная матрица в (6.32) является и тёплицевой, и эрмитовой, поскольку $r_{xx}[-k]=r_{xx}^{*}[k]$. Поэтому для получения решения ρ_w, $a[1],\dots,a[p]$ при заданной АКП с $0\leqslant m\leqslant p$ можно использовать подпрограмму LEVINSON, помещенную в приложении 3.В. Количество требуемых для этого вычислительных операций пропорционально величине p^2.

Используя автокорреляционную последовательность, соответствующую уравнениям (6.31), получаем следующее выражение для СПМ авторегрессионного процесса:

$$P_{\text{АР}}(f)=\frac{T\rho_w}{|A(f)|^2}=T\sum_{k=-\infty}^{\infty} r_{xx}[k]\exp(-j2\pi fkT). \tag{6.33}$$

Заметим, что значения автокорреляции, соответствующие значениям индекса временно́го сдвига от 0 до p, однозначно описывают авторегрессионный процесс порядка p, поскольку значения автокорреляции при $|k|>p$ получаются рекурсивно

$$r_{xx}[m] = -\sum_{k=1}^{p} a[k]\, r_{xx}[m-k], \tag{6.34}$$

что следует из выражения (6.29) при $q=0$. Полагая в (6.29) $p=0$ и замечая, что $h[k]=b[k]$ при $1\leqslant k\leqslant q$, получаем выражение, связывающее автокорреляционную последовательность с параметрами модели скользящего среднего

$$r_{xx}[m] = \begin{cases} 0, & m>q; \\ \rho_w \sum\limits_{k=m}^{q} b[k]\, b^*[k-m], & 0\leqslant m\leqslant q; \\ r_{xx}^*[-m], & m<0. \end{cases} \tag{6.35}$$

Отсюда следует, что АКП и СС-параметры связаны нелинейным соотношением типа свертки. Используя далее автокорреляционную последовательность, соответствующую уравнениям (6.35), получаем выражение для СПМ процесса скользящего среднего

$$P_{CC}(f) = T\rho_w |B(f)|^2 = T\sum_{k=-q}^{q} r_{xx}[k] \exp(-j2\pi fkT). \tag{6.36}$$

Заметим, что суммирование в (6.36) осуществляется в конечных пределах, что просто отражает тот факт, что процесс скользящего среднего порядка q некоррелирован при временны́х сдвигах $|k|>q$. Выражение (6.36) идентично по форме выражению для оценки СПМ, получаемой с помощью классического коррелограммного метода:

$$\hat{P}_{\text{КОРР}}(f) = T\sum_{k=-q}^{q} \hat{r}_{xx}[k] \exp(-j2\pi fkT), \tag{6.37}$$

если используются автокорреляционные оценки $\hat{r}_{xx}[k]$, для которых максимальное значение k равно q. Различие между этими двумя методами спектрального оценивания обусловлено тем, как в них используются имеющиеся данные. В коррелограммном методе данные используются непосредственно для получения оценки автокорреляционной последовательности. В методе скользящего среднего данные используются для получения оценок СС-параметров (см. гл. 10, где описана процедура СС-оценивания), а затем с помощью выражения (6.12) вычисляется СПМ. Тем не менее оба метода дают спектры с одинаковыми свойствами.

6.6. Спектральная факторизация

Рассмотрим z-преобразование АР(p)-процесса, которое, согласно (6.7), определяется выражением

$$P_{AP}(z)=\frac{\rho_w}{A(z)A^*(1/z^*)}, \tag{6.38}$$

где $A(z)A^*(1/z^*)$ — полином по z порядка $2p$. Полюсы в (6.38) будут комплексно-сопряженными взаимно обратными парами. Например, если z_k — корень полинома $A(z)$, то $(1/z_k)^*=1/z_k^*$ будет корнем полинома $A^*(1/z^*)$; см. разд. «Задачи». Если z_k лежит внутри единичной окружности, то $1/z_k^*$ будет расположен вне ее. Если z_k лежит на единичной окружности, то и $1/z_k^*$ лежит также на единичной окружности. Кроме того, корни полинома $A(z)$ также будут комплексно-сопряженными парами, если все коэффициенты этого полинома действительны.

Рассмотрим знаменатель в (6.38) — функцию $A(z)A^*(1/z^*)$. Типичная диаграмма расположения полюсов произведения полиномов $A(z)A^*(1/z^*)$ показана на рис. 6.5, *а*. Существует 2^p возможных комбинаций в случае p полюсов для полинома $A(z)$, которые будут давать идентичный полином $A(z)A^*(1/z^*)$. На рис. 6.5, *б* и 6.5, *в* показаны две возможные *спектральные факторизации* полюсов полинома $A(z)A^*(1/z^*)$, представленных на рис. 6.5, *а*. Однозначная факторизация требует, чтобы модель временно́го ряда была и *устойчивой*, и *каузальной*, что предполагалось при записи уравнения (6.1). Согласно теории линейных систем (см. гл. 2), полином $A(z)$ должен быть в этом случае минимально-фазовым, т. е. все его корни должны быть расположены внутри единичной окружности в z-плоскости, как показано на рис. 6.5, *в*. Поэтому все корни полинома $A^*(1/z^*)$ будут расположены вне ее. Полином $A^*(1/z^*)$ ассоциируется с *устойчивым антикаузальным* авторегрессионным процессом

$$x[n]=-\sum_{k=1}^{p}a^*[k]\,x[n+k]+e[n], \tag{6.39}$$

определенным при $n\leqslant 0$, а не с каузальным АР-процессом, определенным при $n\geqslant 0$.

Заметим, что не следует путать устойчивость фильтра, связанную со спектральной факторизацией, и статистическую устойчивость. Устойчивость фильтра касается выбора АР- или СС-параметров, которые формируют автокорреляционные рекурсивные выражения, такие как (6.29) и (6.31). Статистическая устойчивость касается методов, которые позволяют уменьшить дисперсию спектральных оценок, получаемых по заданным конечным записям данных. В гл. 8 будут описаны методы оценивания на основе линейного предсказания, которые обладают хорошей статистической устойчивостью, но необязательно

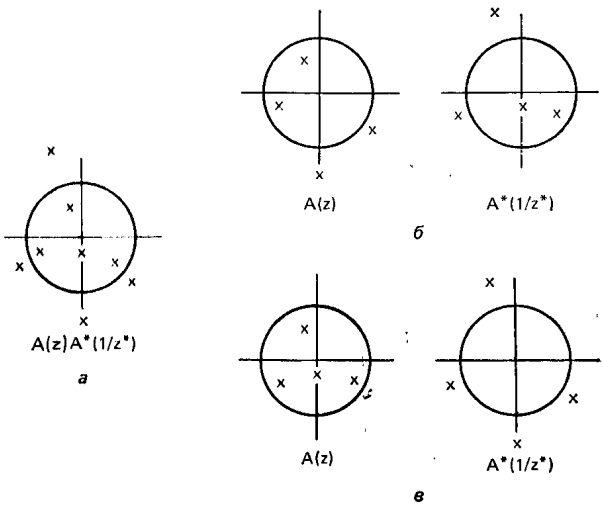


Рис. 6.5. Иллюстрация вопросов спектральной факторизации и устойчивости.

гарантируют получение минимально-фазовых оценок полинома $A(z)$. С точки зрения оценки СПМ вовсе не обязательно, чтобы полином $A(z)$ являлся минимально-фазовым полиномом, поскольку оценка СПМ может быть получена по любому полиному $A(z)$ с произвольным расположением корней, как показано на рис. 6.5. Вопрос устойчивости возникает в том случае, когда для реализации фильтра требуются оценки коэффициентов полинома $A(z)$. В этом случае минимально-фазовый фильтр может быть создан посредством инверсного переноса всех полюсов полинома $A(z)$, расположенных вне единичной окружности, внутрь ее. Иными словами, нужно просто сформировать полином $A(z)A^*(1/z^*)$ и выполнить минимально-фазовую факторизацию.

Литература

[1] *Box G. E. P., Jenkins G. M.* Time Series Analysis, Forecasting and Control. Holden-Day, Inc., San Francisco, 1970. [Имеется русский перевод: *Бокс Дж., Дженкинс Г.* Анализ временных рядов: Прогноз и управление. — М.: Мир, 1974, вып. 1, 2.]

[2] *Gutowski P. E., Robinson E. A., Treitel S.* Spectral Estimation: Fact or Fiction? IEEE Trans. Geosci., Electron., vol. GE-16, pp. 80—84, April 1978.

[3] *Kay S. M.* Modern Spectral Analysis. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1987.

[4] *Padé H. E.* Sur la representation approachée d'une function par des fractions rationnelles. Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. (Paris), no. 3, vol. 9, pp. 1—98 (suppl.), 1892.

[5] *Weiss L., McDonough R. N.* Prony's Method, z-Transforms, and Padé Approximation. SIAM Rev., vol. 5, pp. 145—149, April 1963.

Задачи

1. Получить для АРСС (1,1)-модели явное выражение для $r_{xx}[m]$, записанное через $a[1]$ и $b[1]$.
2. Используя обратное z-преобразование (6.7), доказать справедливость соотношения (6.29).
3. Используя соотношение (6.24), записать матричные выражения, подобные выражениям (6.18) и (6.19) и связывающие параметры СС(∞)-модели с параметрами АРСС(p, q)-модели.
4. Пусть $A(z)=1+0{,}7z^{-1}+0{,}2z^{-2}$ есть z-преобразование АР(2)-процесса. Записать для этой модели СС(2)-, СС(4)- и СС(10)-аппроксимации. Вычертить графики полученных результатов. Насколько точна СС-аппроксимация?
5. Доказать, что автокорреляционная матрица уравнений Юла — Уолкера (6.32) для АР-процесса является положительно-полуопределенной матрицей.
6. Предположим, что устойчивый АРСС(p,q)-фильтр аппроксимируется АР($p+q$)-фильтром с помощью метода аппроксимации Паде. Показать, что эта АР-аппроксимация не обязательно будет устойчивой.
7. Показать, что если z_i — корень полинома $A(z)$, определенного выражением (6.4), то $(1/z_i)^*$ — корень полинома $A^*(1/z^*)$.

Приложение 6.А. Программа для вычисления спектральной плотности мощности АРСС-, АР- и СС-процессов

Подпрограмма APMAPSD предназначена для вычисления набора значений спектральной плотности мощности АРСС-, АР- или СС-процесса по заданному массиву значений параметров (массиву A, массиву B или по обоим этим массивам одновременно) и дисперсии белого шума (RHO). Для повышения эффективности вычислений полиномов $A(f)$ и $B(f)$ в требуемом диапазоне частот используется БПФ. Для обработки действительных данных необходимо просто положить мнимую часть массивов A и B равной нулю.

При $A(1)=(0{,}8;\ 0{,}9)$, $B(1)=(0{,}1;\ -0{,}3)$, $IP=1$, $IQ=1$, $RHO=2{,}0$ и $T=1{,}0$ с помощью этой программы получаются значения СПМ, частичная распечатка которых приведена ниже:

```
PSD (   1) =  0,211765E+01
PSD (1000) =  0,573554E+01
PSD (2000) =  0,687682E+00
PSD (3000) =  0,238198E+00
PSD (4000) =  0,143373E+01
PSD (4096) =  0,210874E+01
```

```
      Подпрограмма ARMAPSD(IP,IQ,RHO,T,A,B,PSD,ISTAT)
C
C     Предназначена для вычисления набора NPSD значений спектральной
C     плотности мощности в диапазоне частот от -1/2T до 1/2T, где T — ин-
C     тервал отсчетов в секундах, по комплексным значениям АРСС-парамет-
C     ров АРСС-модели. Для повышения эффективности вычислений числителя
```

```
C     и знаменателя, определяющих спектральную плотность мощности АРСС-
C     процесса, используется БПФ. В случае действительных значений
C     АРСС-параметров значения спектральной плотности мощности будут сим-
C     метричны относительно значения с индексом NPSD/2+1.
C
C     СПМ для АР-модели можно получить как частный случай данной под-
C     программы, для чего следует положить параметр IQ равным нулю. Анало-
C     гичным образом СПМ для СС-модели можно получить как частный слу-
C     чай данной подпрограммы, для чего следует положить параметр IP рав-
C     ным нулю.
C
C     Входные параметры:
C        IP     — порядок АР-модели (целое число).
C        IQ     — порядок СС-модели (целое число).
C        RHO    — дисперсия белого шума, используемого в качестве входного
C                 воздействия модели (действительная величина).
C        T      — интервал отсчетов в секундах (действительная величина).
C        A      — массив комплексных значений авторегрессионных парамет-
C                 ров от A(1) до A(IP).
C        B      — массив комплексных значений параметров скользящего сред-
C                 него от B(1) до B(IQ).
C
C     Выходные параметры:
C        PSD    — массив действительных значений спектральной плотности
C                 мощности.
C        ISTAT  — целочисленный указатель состояния в момент выхода из
C                 программы:
C                 0 для нормального выхода;
C                 1, если IP<0 или IQ<0.
C
C     Примечание:
C
C        Размеры .GE. IP внешнего массива A, размеры .GE. IQ внешнего
C        массива B и размеры .GE. NPSD массива PSD должны указываться
C        в вызывающей программе. Необходимы подпрограммы PREFFT
C        и FFT (см. приложение 2.А).

      PARAMETER NPSD=4096  ! Должно быть степенью числа 2
      COMPLEX A(1),B(1),W(NPSD),DEN(NPSD),NUM(NPSD)
      REAL PSD(1),RHO,T
      ISTAT=0
C     Определить, если существуют, ошибки при задании значений порядка
C     моделей
      IF (IP .GE. 0 .AND. IQ .GE. 0) GO TO 5
      ISTAT=1
      RETURN
C     Составить таблицу экспонент для БПФ (без дополнения нулями)
5     CALL PREFFT (NPSD,0,NEXP,W)
      IF (IP .EQ. 0) GO TO 30
      DEN (1)=(1.,0.)
      DO 10 K=1,IP
10       DEN(K+1)=A(K)
      DO 20 K=IP+2,NPSD
20       DEN(K)=(0.,0.)
      CALL FFT (NPSD,0,1., NEXP,W,Den)
30    IF (IQ .EQ. 0) GO TO 60
      NUM (1)=(1.,0.)
```

```
      DO 40 K=1,IQ
40       NUM (K+1)=B(K)
      DO 50 K=IQ+2,NPSD
50       NUM(K)=(0. ,0.)
      CALL FFT (NPSD,0, 1., NEXP,W,NUM)
60    IF (IP .EQ. 0) GO TO 80
      IF (IQ .EQ. 0) GO TO 100
C     Уравнение (6.8)
      DO 70 K=1,NPSD
70       PSD(K)=RHO*T*(REAL (NUM(K))**2
                      +AIMAG (NUM(K))**2)/
     *                (REAL(DEN(K))**2+AIMAG(DEN(K))**2)
      RETURN
C     Уравнение (6.12)
80    DO 90 K=1,NPSD
90       PSD(K)=RHO*T*(REAL(NUM(K))**2
                      +AIMAG(NUM(K))**2
      RETURN
C     Уравнение (6.14)
100   DO 110 K=1,NPSD
110      PSD(K)=RHO*T/(REAL(DEN(K))**2+AIMAG(DEN(K)) **2)
      RETURN
      END
```

Глава 7
АВТОРЕГРЕССИОННЫЙ ПРОЦЕСС И СВОЙСТВА СПЕКТРА

7.1. Введение

Из всех моделей временных рядов, описанных в гл. 6, наибольшее внимание в технической литературе уделяется авторегрессионным (АР) спектральным оценкам. Объясняется это двумя причинами. Во-первых, тем, что авторегрессионные спектры имеют, как правило, острые пики, а это часто связывается с высоким спектральным разрешением. Во-вторых, тем, что оценки АР-параметров можно получить как решения линейных уравнений. Так, например, выражение (6.32) может служить иллюстрацией того, что АР-параметры и автокорреляционная последовательность (АКП) связаны системой линейных уравнений. В то же время оценки СС- и АРСС-параметров требуют решения нелинейных уравнений, таких, например, как уравнения (6.29) и (6.35).

Большой объем материала, посвященного авторегрессионному спектральному анализу, заставил разбить изложение АР-метода на три главы. Свойства и особенности АР-процесса и АР-спектра обсуждаются в данной главе в предположении известной АКП, что, как правило, не типично для практики. Эти свойства порождают другие названия АР спектрального анализа, такие как метод максимальной энтропии (ММЭ) и метод линейного предсказания (ЛП). Некоторые из этих свойств используются при разработке алгоритмов оценивания параметров авторегрессионных процессов по одним лишь отсчетам данных; эти алгоритмы описаны в двух следующих главах. В гл. 8 описаны алгоритмы оценивания АР-параметров и машинные программы, основанные на блочной обработке данных, а в гл. 9 рассматриваются алгоритмы, основанные на последовательной во времени обработке отсчетов данных.

7.2. Краткая сводка результатов

Эта глава состоит из двух основных разделов, посвященных свойствам авторегрессионных процессов и свойствам авторегрессионных спектров, которые рассматриваются в предположении, что автокорреляционная последовательность (АКП) известна. Основные свойства АР-процесса указаны в табл. 7.1,

Таблица 7.1. Свойства АР-процесса

Предмет рассмотрения	Свойство	Подраздел
Фильтр линейного предсказания	Отбеленный АР-процесс	7.3.1
Алгоритм Левинсона	Быстрый вычислительный алгоритм	7.3.2
Коэффициенты отражения	АР-процесс как решетчатый фильтр	7.3.3

там же указаны подразделы, где обсуждается каждое названное свойство. Главный результат, касающийся возможности представления АР-процесса в виде одной из трех однозначно определяемых последовательностей, изложен в подразд. 7.3.4.

В табл. 7.2 приведены основные свойства АР-спектра и указаны подразделы, в которых они обсуждаются. Отметим,

Таблица 7.2. Свойство АР СПМ

Свойство	Подраздел
Интерпретация на основе максимальной энтропии	7.4.1
Основа для высокого разрешения	7.4.2
Оценивание мощности синусоидальных компонент	7.4.3

что метод максимальной энтропии целесообразно использовать в том случае, когда исследуемый процесс является гауссовским. Случай, когда анализируемый процесс состоит из синусоид и аддитивного шума, рассматривается в подразд. 7.4.3.

7.3. Свойства авторегрессионного процесса

7.3.1. Связь с анализом, основанным на линейном предсказании

В этом подразделе будет показано, что уравнения, соответствующие линейному предсказанию, по своей структуре идентичны уравнениям Юла — Уолкера для авторегрессионного процесса, а потому существует тесная связь между фильтром линейного предсказания и АР-процессом. Эта взаимосвязь использована в нескольких алгоритмах, представленных в гл. 8 и 9.

Рассмотрим оценку линейного предсказания *вперед*

$$\hat{x}^f[n] = -\sum_{k=1}^{m} a^f[k]\, x[n-k] \tag{7.1}$$

отсчета $x[n]$, где $a^f[k]$ — коэффициент линейного предсказания вперед, соответствующий временно́му индексу k. Здесь крышка «^» обозначает оценку, а надстрочный индекс f (от forward — **вперед) используется для обозначения** оценки, осуществляемой вперед. Предсказание вперед понимается здесь в том смысле, что оценка, соответствующая временно́му индексу n, вычисляется по m предыдущим временны́м отсчетам. Комплексная ошибка линейного предсказания вперед

$$e^f[n] = x[n] - \hat{x}^f[n] \tag{7.2}$$

имеет действительную дисперсию

$$\rho^f = \mathcal{E}\{|e^f[n]|^2\}. \tag{7.3}$$

Подставляя (7.1) и (7.2) в (7.3), получаем следующее выражение для дисперсии:

$$\rho^f = r_{xx}[0] + \sum_{k=1}^{m} a^f[k]\, r_{xx}[-k] + \sum_{j=1}^{m} (a^f[j])^*\, r_{xx}[j] + \\ + \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} a^f[k]\, (a^f[j])^*\, r_{xx}[j-k] = \\ = r_{xx}[0] + \mathbf{r}_m^H \mathbf{a}^f + (\mathbf{a}^f)^H \mathbf{r}_m + (\mathbf{a}^f)^H \mathbf{R}_{m-1} \mathbf{a}^f, \tag{7.4}$$

где

$$\mathbf{a}^f = \begin{pmatrix} a^f[1] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a^f[m] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_m = \begin{pmatrix} r_{xx}[1] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ r_{xx}[m] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_{m-1} = \begin{pmatrix} r_{xx}[0] & \dots & r_{xx}^*[m-1] \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ r_{xx}[m-1] & \dots & r_{xx}[0] \end{pmatrix}.$$

При записи этих выражений использовалось допущение о том, что $x[n]$ — процесс, стационарный в широком смысле, поэтому $r_{xx}[-k] = r_{xx}^*[k]$. Выражение (7.4) по своей форме идентично квадратному матричному уравнению (3.68). Поэтому вектор коэффициентов линейного предсказания вперед $\mathbf{a}^f$, который минимизирует дисперсию ρ^f, находится как решение нормальных уравнений

$$\begin{pmatrix} r_{xx}[0] & \mathbf{r}_m^H \\ \mathbf{r}_m & \mathbf{R}_{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{a}^f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho^f \\ \mathbf{0}_m \end{pmatrix}, \tag{7.5}$$

которые следуют непосредственно из (3.69). Структура нор-

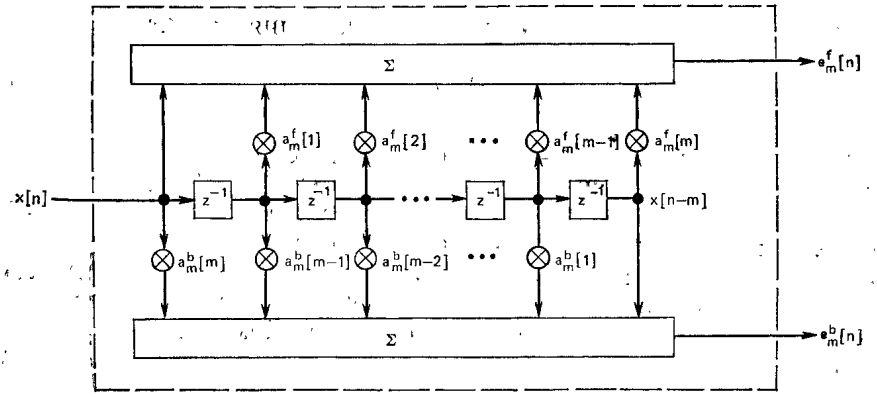


Рис. 7.1. Трансверсальная реализация фильтра линейного предсказания ошибки: если $x[n]$ является АР (m)-процессом, то $e^f[n]$ и $e^b[n]$ — процессы типа белого шума. Здесь z^{-1} означает задержку на один отсчет.

мальных уравнений становится более понятной после их записи в развернутом виде

$$\begin{pmatrix} r_{xx}[0] & r_{xx}^*[1] & \dots & r_{xx}^*[m] \\ r_{xx}^*[1] & r_{xx}[0] & \dots & r_{xx}^*[m-1] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xx}[m] & r_{xx}[m-1] & \dots & r_{xx}[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a^f[1] \\ \vdots \\ a^f[m] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho^f \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7.6)$$

Это матричное уравнение по своей структуре идентично уравнениям Юла — Уолкера (6.32) для авторегрессионного процесса. Если выражение (7.2) переписать в виде

$$x[n] = -\sum_{k=1}^{m} a^f[k]\, x[n-k] + e^f[n], \quad (7.7)$$

то нетрудно видеть его подобие уравнению (6.13) для авторегрессионного процесса. Следует, однако, отметить два различия между процессом линейного предсказания вперед и АР-процессом. Последовательность $u[n]$ в уравнении (6.13) соответствует *белому шумовому* процессу, который используется в качестве *входного* воздействия для авторегрессионного фильтра. Последовательность $x[n]$ представляет собой *выход* авторегрессионного фильтра. Последовательность значений ошибки $e^f[n]$ в уравнении (7.7) представляет собой *выход* фильтра линейного предсказания ошибки вперед, структурная схема которого показана на рис. 7.1. Последовательность $x[n]$ — это входное воздействие для фильтра предсказания ошибки. Последователь-

ность значений ошибки линейного предсказания не будет коррелирована с оценкой линейного предсказания $\hat{x}^f[n]$, однако она, вообще говоря, не будет представлять собой белый шумовой процесс до тех пор, *пока последовательность* $x[n]$ *не генерируется как некоторый* $AP(p)$*-процесс с* $m=p$. В отмеченном же случае последовательность значений ошибки будет белым шумовым процессом, коэффициенты линейного предсказания вперед будут идентичны АР-параметрам ($a^f[k]=a[k]$), а фильтр предсказания ошибки можно будет рассматривать как отбеливающий фильтр; см. Папулис [18].

Можно записать выражение для оценки ошибки линейного предсказания *назад*

$$\hat{x}^b[n]=-\sum_{k=1}^{m} a^b[k]\,x[n+k], \tag{7.8}$$

где $a^b[k]$ — коэффициент линейного предсказания назад, соответствующий индексу времени k. Подстрочный индекс b (от backward — назад) используется для обозначения элементов, связанных с оценкой линейного предсказания назад. Предсказание назад понимается здесь в том смысле, что оценка, соответствующая индексу времени n, вычисляется по m последующим временным отсчетам. Ошибка линейного предсказания назад определяется выражением

$$e^b[n]=x[n-m]-\hat{x}^b[n-m], \tag{7.9}$$

где для удобства намеренно применен индекс n, а не $n-m$, с тем чтобы величины $e^f[n]$ и $e^b[n]$ были функциями одного и того же множества отсчетов данных (а именно $x[n], x[n-1],\ldots,[n-m]$), которые использованы в фильтре линейного предсказания, структурная схема которого показана на рис. 7.1. Комплексное значение ошибки линейного предсказания назад имеет действительную дисперсию

$$\rho^b=\mathscr{E}\{|e^b[n]|^2\}. \tag{7.10}$$

Подставляя (7.8) и (7.9) в (7.10), получаем следующее выражение для дисперсии:

$$\begin{aligned}\rho^b &= r_{xx}[0]+\sum_{k=1}^{m} a^b[k]\,r_{xx}[k]+\sum_{j=1}^{m}(a^b[j])^*\,r_{xx}[-j]+\\ &\quad+\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} a^b[k]\,(a^b[j])^*\,r_{xx}[k-j]=\\ &= r_{xx}[0]+\mathbf{r}_m^T\mathbf{a}^b+(\mathbf{a}^b)^H\mathbf{r}_m^*+(\mathbf{a}^b)^H\mathbf{R}_{m-1}^*\mathbf{a}^b,\end{aligned} \tag{7.11}$$

где $\mathbf{r}_m$ и $\mathbf{R}_{m-1}$ были определены выше, а

$$\mathbf{a}^b = \begin{pmatrix} a^b[1] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a^b[m] \end{pmatrix}.$$

В соответствии с уравнением (3.69), вектор коэффициентов линейного предсказания назад $\mathbf{a}^b$, который минимизирует дисперсию ρ^b, находится как решение нормальных уравнений, определяемых выражением

$$\begin{pmatrix} r_{xx}[0] & \mathbf{r}_m^T \\ \mathbf{r}_m^* & \mathbf{R}_{m-1}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{a}^b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho^b \\ \mathbf{0}_m \end{pmatrix}. \tag{7.12}$$

Записывая уравнение (7.12) в развернутом виде, получаем уравнение

$$\begin{pmatrix} r_{xx}^*[0] & r_{xx}[1] & \dots & r_{xx}[m] \\ r_{xx}^*[1] & r_{xx}[0] & \dots & r_{xx}[m-1] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xx}^*[m] & r_{xx}^*[m-1] & \dots & r_{xx}[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a^b[1] \\ \vdots \\ a^b[m] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho^b \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

которое после перестановки членов принимает следующий вид:

$$\begin{pmatrix} r_{xx}[0] & r_{xx}^*[1] & \dots & r_{xx}^*[m] \\ r_{xx}[1] & r_{xx}[0] & \dots & r_{xx}^*[m-1] \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{xx}[m] & r_{xx}[m-1] & \dots & r_{xx}[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^b[m] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a^b[1] \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ \rho^b \end{pmatrix}. \tag{7.13}$$

Теперь нетрудно видеть, что уравнения (7.6) и (7.13) содержат идентичные эрмитовы тёплицевы автокорреляционные матрицы. Выше в подразд. 3.8.1 [см., в частности, уравнение (3.156)] было показано, что решения уравнений (7.6) и (7.13) должны обладать свойствами

$$\rho^b = \rho^f, \tag{7.14}$$

и

$$a^b[k] = (a^f[k])^*, \tag{7.15}$$

где $1 \leqslant k \leqslant m$. Отсюда следует, что дисперсия линейного предсказания вперед и назад идентичны. Коэффициенты линейного предсказания назад будут просто комплексно-сопряженными величинами коэффициентам линейного предсказания вперед, когда оба фильтра предсказания имеют одну и ту же длину

m. Если фильтр линейного предсказания ошибки вперед является отбеливающим фильтром АР-процесса, то фильтр линейного предсказания ошибки назад будет отбеливающим фильтром для антикаузальной реализации АР-процесса.

7.3.2. Алгоритм Левинсона

Решение эрмитовых тёплицевых уравнений (7.6) и (7.13) можно получить с помощью алгоритма Левинсона, описанного в подразд. 3.8.1. Если в соответствии с параметрами, приведенными в подразд. 3.8.1, положить $t[k]=\mathrm{r}_{xx}[k]$, $a_m[k]=a^f{}_m[k]$ и $\rho_m=\rho^f{}_m$, то решение для фильтра линейного предсказания с M коэффициентами будет описываться следующим рекурсивным соотношением:

$$\Delta_m=\begin{cases} r_{xx}[1], & m=1; \\ \sum\limits_{k=1}^{m-1} a^f_{m-1}[k]\, r_{xx}[m-k]+r_{xx}[m], & m>1, \end{cases} \tag{7.16}$$

$$a^f_m[k]=\begin{cases} -\Delta_m/\rho^f_{m-1}, & k=m; \\ a^f_{m-1}[k]+a^f_m[m]\,(a^f_{m-1}[m-k])^*, & 1\leqslant k\leqslant m-1, \\ & m>1, \end{cases} \tag{7.17}$$

$$\rho^f_m=\rho^f_{m-1}\,(1-|a^f_m[m]|^2), \tag{7.18}$$

где $1\leqslant m\leqslant M$. Единственное требуемое при этом начальное условие имеет вид

$$\rho^f_0=r_{xx}[0]. \tag{7.19}$$

Значения коэффициентов линейного предсказания назад получаются из значений коэффициентов линейного предсказания вперед посредством простой операции комплексного сопряжения. В приведенных выражениях для элементов были добавлены подстрочные индексы m или $m-1$, с тем чтобы указать порядок фильтра линейного предсказания. Заметим, с помощью алгоритма Левинсона автоматически получаются все коэффициенты линейного предсказания с минимальной дисперсией порядка от 1 до M. Следовательно, возможно без добавочных вычислительных затрат получать все АР-модели более низкого порядка.

Если эрмитова тёплицева матрица в уравнении (7.6) является положительно определенной матрицей, то полином

$$\mathrm{A}^f_m(z)=1+\sum_{k=1}^{m} a^f_m[k]\, z^{-k}, \tag{7.20}$$

в котором в качестве коэффициентов используются коэффициенты линейного предсказания, получаемые с помощью алго-

ритма Левинсона, будет иметь корни, расположенные внутри единичного круга; см. Маркел и Грей [14]. Следовательно, это будет давать минимально-фазовый фильтр линейного предсказания ошибки. Доказательство этого свойства приводится в целом ряде работ; см., например, Кей [8], Пакула и Кей [17], Лэнг и Макклеллан [10], Берг [2]. Типичная схема доказательства строится на использовании того факта, что величину дисперсии ρ^b можно уменьшить посредством зеркального переноса корней, лежащих вне единичного круга, внутрь этого круга. Минимально-фазовое свойство гарантирует, что решение уравнений Юла — Уолкера будет давать устойчивый авторегрессионный фильтр $1/A(z)$, а это означает, что рекурсивное уравнение (6.31) для АКП будет давать конечные значения автокорреляции, не превосходящие по своей величине значения $r_{xx}[0]$, как того требует допущение о стационарности процесса.

Если процесс $x[n]$ действительно является АР(p)-процессом, то решение на основе линейного предсказания порядка $m=p$ с помощью алгоритма Левинсона дает

$$\begin{aligned} a_p[k] &= a_p^f, \quad 1 \leqslant k \leqslant p, \\ \rho_p &= \rho^f, \end{aligned} \tag{7.21}$$

где $a_p[k]$ — АР-параметры, а ρ_p — дисперсия возбуждающего белого шума. Величина этой дисперсии будет постоянна, если порядок линейного предсказания равен или превышает правильный порядок, поэтому $a^f{}_m[m]=0$ при $m>p$. Таким образом, алгоритм Левинсона можно использовать для генерации фильтров линейного предсказания ошибки последовательно возрастающего порядка до тех пор, пока дисперсия не достигнет некоторой постоянной величины, т. е. перестанет изменяться. Этот факт может быть использован как своего рода индикатор правильного, или наиболее правдоподобного, порядка используемой авторегрессионной модели.

В следующем подразделе будет показано, что $|a_m[m]| \leqslant 1$. А это означает, что дисперсия ошибки предсказания $\rho^f{}_m$, определяемая уравнением (7.18), должна быть монотонно убывающей функцией, достигающей минимума при $m=p$, если исследуемый процесс является АР(p)-процессом. Это — еще одно полезное свойство, которое также может быть использовано для выбора порядка модели; этот вопрос обсуждается в гл. 8.

7.3.3. Коэффициенты отражения

Коэффициенты линейного предсказания $a_1{}^f[1], \ldots, a_p{}^f[p]$ часто называют *коэффициентами отражения*, что обусловлено их интерпретацией как физических параметров акустической трубы, используемой в модели речи [11, 13], или слоистых моделей

Земли, используемых при обработке сейсмических данных [19]. Для того чтобы отличать именно эти коэффициенты линейного предсказания от остальных коэффициентов, для их обозначения используется специальный символ $k_m = a^f{}_m[m]$, $1 \leqslant m \leqslant p$. В статистической литературе отрицательный коэффициент отражения $-k_m$ называется *частным коэффициентом корреляции* [1], поскольку он характеризует нормированное значение корреляции между $x[n]$ и $x[n-m]$ за вычетом той доли корреляции, которая вызвана влиянием $x[n-1], \ldots, x[n-m+1]$. Коэффициенты отражения можно также рассматривать как взятый со знаком минус нормированный коэффициент корреляции между ошибками линейного предсказания вперед и назад с единичным временным сдвигом:

$$k_m = \frac{-\mathcal{E}\{e^f_{m-1}[n]\, e^{b*}_{m-1}[n-1]\}}{\sqrt{\mathcal{E}\{|e^f_{m-1}[n]|^2\}}\sqrt{\mathcal{E}\{|e^b_{m-1}[n-1]|^2\}}}. \tag{7.22}$$

Это выражение можно получить, используя определения (7.2), (7.4) и (7.9), что дает

$$\mathcal{E}\{e^f_{m-1}[n]\, e^{b*}_{m-1}[n-1]\} =$$
$$= \mathcal{E}\left\{\left(x[n] + \sum_{k=1}^{m-1} a^f_{m-1}[k]\, x[n-k]\right)\left(x^*[n-m] + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \sum_{k=1}^{m-1} a^{b*}_{m-1}[k]\, x^*[n-m+k]\right)\right\} = r_{xx}[m] + \sum_{k=1}^{m-1} a^f_{m-1}[k]\, r_{xx}[m-k] = \Delta_m, \tag{7.23}$$

а также учитывая, что на основании свойства стационарности и эрмитова тёплицева свойства автокорреляционной матрицы

$$\rho^f_{m-1} = \rho^b_{m-1} = \mathcal{E}\{|e^f_{m-1}[n]|^2\} =$$
$$= \mathcal{E}\{|e^b_{m-1}[n]|^2\} = \mathcal{E}\{|e^b_{m-1}[n-1]|^2\}. \tag{7.24}$$

Подставляя (7.23) и (7.24) в выражение, определяющее коэффициент отражения, получаем

$$k_m = a_m[m] = -\frac{\Delta_m}{\rho^f_{m-1}} = -\frac{\Delta_m}{\sqrt{\rho^f_{m-1}}\sqrt{\rho^b_{m-1}}}, \tag{7.25}$$

откуда приходим к выражению (7.22). Используя (7.22), нетрудно также показать, что $|k_m| \leqslant 1$ для $1 \leqslant m \leqslant p$ (см. разд. «Задачи»). Ограничение модуля k_m единицей является необходимым и достаточным условием того, чтобы автокорреляционная матрица была положительно-полуопределенной.

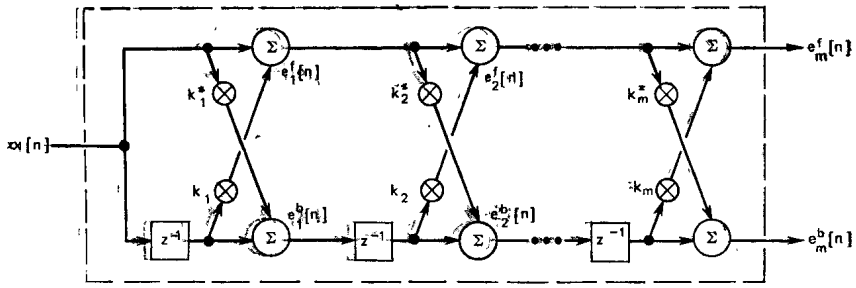


Рис. 7.2. Решетчатая реализация фильтра линейного предсказания ошибки: z^{-1} означает задержку на один отсчет.

Если в определении (7.2) и (7.9) для прямой и обратной ошибок линейного предсказания ввести $a_m{}^f[k]$ (или $a_m{}^b[k] = a_m{}^{f*}[k]$), задаваемое рекурсивным уравнением (7.17), то нетрудно показать (см. разд. «Задачи»), что

$$e_m^f[n] = e_{m-1}^f[n] + k_m e_{m-1}^b[n-1], \tag{7.26}$$

$$e_m^b[n] = e_{m-1}^b[n-1] + k_m^* e_{m-1}^f[n] \tag{7.27}$$

с начальными условиями $x[n] = e_0{}^f[n] = e_0{}^b[n]$. Соотношения (7.26) и (7.27) дают еще одну возможную интерпретацию фильтра линейного предсказания ошибки как решетчатой структуры, изображенной на рис. 7.2. Параметрами на каждой ступени этого решетчатого фильтра являются коэффициенты отражения. Заметим, что в структуре решетчатого фильтра одновременно распространяются ошибки линейного предсказания вперед и назад. К преимуществам решетчатого фильтра перед трансверсальными фильтрами (т. е. фильтрами, реализуемыми на линиях задержки с отводами), например таким, как показан на рис. 7.1, следует отнести их меньшую чувствительность к шуму округления и к флюктуациям (случайным возмущениям) значений коэффициентов [4]. Решетчатый фильтр является также ортогонализирующим фильтром, поскольку ошибки предсказания назад на выходе каждой его ступени взаимно ортогональны [12] (см. разд. «Задачи»).

7.3.4. Об эквивалентных представлениях авторегрессионных процессов

АР(p)-процесс имеет три эквивалентных представления: в виде бесконечно протяженной автокорреляционной последовательности, в виде конечной последовательности авторегрессионных параметров и в виде конечной последовательности коэффициен-

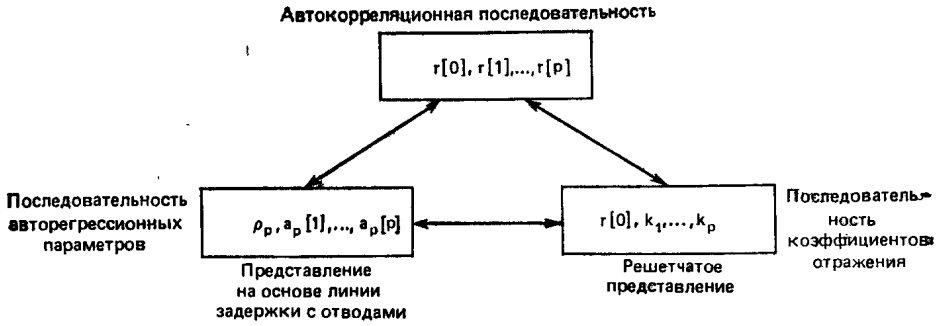


Рис. 7.3. Три эквивалентных представления авторегрессионного процесса.

тов отражения; см. диаграмму на рис. 7.3. Хотя АКП для АР(p)-процесса бесконечна, полная АКП однозначно определяется конечной автокорреляционной последовательностью $r_{xx}[0], \ldots, r_{xx}[p]$. Остальную часть АКП можно получить с помощью рекурсивного соотношения (6.34). Алгоритм Левинсона, описанный в подразд. 7.3.2, позволяет определить и АР-параметры, и коэффициенты отражения по заданной АКП, соответствующей временным сдвигам от 0 до p. Используя только уравнение (7.17) с начальным условием $a_1[1]=k_1$, можно получить простое рекурсивное соотношение, которое будет давать АР-параметры для всех порядков от $m=1$ до $m=p$ всего лишь на основе заданной последовательности коэффициентов отражения от k_1 до k_p, и в результате позволяет сформировать однозначное соответствие между коэффициентами отражения и авторегрессионными параметрами. Можно также обратить направление рекурсий алгоритма Левинсона и получить рекурсии убывающего порядка от m к $m-1$, что позволит вычислять автокорреляционную последовательность при временных сдвигах от p до 0, используя либо набор АР-параметров $\{\rho_p, a_p[1], \ldots, a_p[p]\}$, либо набор коэффициентов отражения $\{r_{xx}[0], k_1, \ldots, k_p\}$ (см. разд. «Задачи»). Возможно также однозначное представление коэффициентов отражения через АР-параметры.

Для того чтобы отображения, указанные на рис. 7.3, были возможными, необходимо, чтобы выполнялись следующие три эквивалентных условия:

- $r_{xx}[0], \ldots, r_{xx}[p]$ является положительно-определенной последовательностью;
- $A(z)=1+\Sigma_{k=1}^{p} a_p[k]z^{-k}$ является минимально-фазовым полиномом;
- $\rho_m>0$ и $|k_m|<1$ при $1\leqslant m\leqslant p$.

7.4. Свойства спектральной плотности мощности авторегрессионного процесса

7.4.1. Интерпретация метода максимальной энтропии

В литературе оценку спектральной плотности мощности авторегрессионного процесса часто называют спектральным анализом на основе *метода максимальной энтропии* (ММЭ). Этот подход был введен Бергом [2]. Если конечная автокорреляционная последовательность $r_{xx}[0], \ldots, r_{xx}[p]$ полагается известной, то может быть поставлен вопрос о том, как следует определять оставшиеся неизвестные члены этой последовательности $r_{xx}[p+1]$, $r_{xx}[p+2]$, ..., для того чтобы полная автокорреляционная последовательность обязательно была бы положительно-полуопределенной. Существует бесконечное число возможных экстраполяций, которые будут давать автокорреляционную последовательность, отвечающую этому требованию. Берг показал, что эту экстраполяцию следует выполнять таким образом, чтобы максимизировать энтропию временно́го ряда, характеризуемого этой экстраполированной АКП. Получаемый при этом временно́й ряд будет наиболее случайным (в энтропийном смысле) из всех рядов, которым соответствует заданная АКП с временны́ми сдвигами от 0 до p. Спектральная оценка, получаемая по этой экстраполированной АКП, будет в этом случае оценкой для процесса с максимальной энтропией[1)].

В разд. 4.5 было, в частности, показано, что для гауссовского случайного процесса удельная энтропия пропорциональна величине

$$\int_{-1/2T}^{1/2T} \ln P_{\text{ММЭ}}(f)\, df, \tag{7.28}$$

где $P_{\text{ММЭ}}(f)$ — СПМ этого процесса. Значение $P_{\text{ММЭ}}(f)$ определяется посредством максимизации величины (7.28) при наложенных ограничениях, что она удовлетворяет соотношению Винера — Хинчина для $p+1$ известных значений автокорреляции:

$$\int_{-1/2T}^{1/2T} P_{\text{ММЭ}}(f) \exp(j2\pi fnT)\, df = r_{xx}[n], \tag{7.29}$$

где $0 \leqslant n \leqslant p$. Это решение, которое находится с помощью ме-

---

[1)] Читателю, интересующемуся обоснованием метода МЭ, можно рекомендовать [6], [19*, 20*]. В [6] ММЭ сформулирован в наиболее краткой форме: «Если мы делаем выводы на основе неполной информации, то должны опираться на такое распределение вероятности, которое имеет максимальную энтропию, допускаемую нашей априорной информацией». — *Прим. ред.*

тода множителей Латранжа (см., например, [5]), имеет вид

$$P_{\text{ММЭ}}(f) = \frac{T\rho_w}{\left|1 + \sum_{k=1}^{p} a_p[k] \exp(-j2\pi fkT)\right|^2}, \qquad (7.30)$$

где ρ_w, $a_p[1]$, ..., $a_p[p]$ определяются из решения уравнений Юла — Уолкера. Таким образом, авторегрессионная СПМ и СПМ, получаемая методом максимальной энтропии, идентичны в случае гауссовского случайного процесса и известной автокорреляционной последовательности с равноотстоящими значениями. Однако неправильно говорить, что уравнение (7.30) является основой спектрального анализа по методу максимальной энтропии в тех случаях, когда исследуемый процесс не является гауссовским или когда значения параметров оцениваются не по известной АКП, а по отсчетам данных. Метод максимальной энтропии применим и в случае неэквидистантной автокорреляционной последовательности. Однако авторегрессионная СПМ и СПМ, получаемая методом максимальной энтропии, не будут идентичны. Другие интерпретации метода максимальной энтропии можно найти в работах [6, 16, 21].

7.4.2. Основа для высокого разрешения

В гл. 6 было показано [выражения (6.14) и (6.33)], что авторегрессионная СПМ имеет эквивалентные представления (см. также [3])

$$P_{\text{АР}}(f) = \frac{T\rho_w}{\left|1 + \sum_{k=1}^{p} a[p] \exp(-j2\pi fkT)\right|^2} = \qquad (7.31)$$

$$= T \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_{xx}[k] \exp(-j2\pi fkT). \qquad (7.32)$$

Если задана автокорреляционная последовательность для временных сдвигов от 0 до p, то из уравнений Юла — Уолкера можно определить дисперсию белого шума ρ_w и авторегрессионные параметры $a[1]$, ..., $a[p]$, а затем использовать уравнение (7.31) для вычисления АР СПМ. Можно также применить экстраполяцию

$$r_{xx}[n] = -\sum_{k=1}^{p} a[k]\, r_{xx}[n-k] \qquad (7.33)$$

при $n > p$, которая следует из уравнения (6.34), для расширения автокорреляционной последовательности, что позволит далее

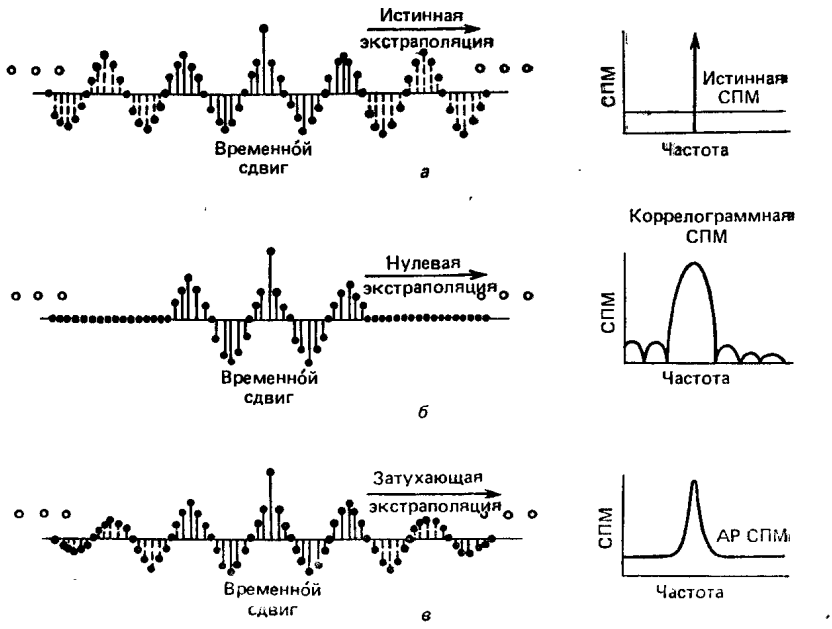


Рис. 7.4. Экстраполяция автокорреляционной последовательности (АКП): *а* — исходная бесконечная АКП и истинный спектр процесса, состоящего из одной действительной синусоиды в белом шуме; *б* — нулевая экстраполяция АКП, подразумеваемая при использовании коррелограммного метода оценивания СПМ, и соответствующая спектральная оценка; *в* — экстраполяция при использовании авторегрессионного метода оценивания СПМ и соответствующая спектральная оценка.

использовать уравнение (7.32) для вычисления АР СПМ (хотя это не всегда эффективно на практике). В противоположность этому рассмотрим коррелограммный метод оценивания спектральной плотности мощности, описанный в гл. 5. Этот метод позволяет по $p+1$ значениям автокорреляции получать оценку

$$P_{\text{КОРР}}(f) = T \sum_{k=-p}^{p} r_{xx}[k] \exp(-j2\pi fkT). \qquad (7.34)$$

Сравнивая выражения (7.32) и (7.34), можно видеть, что АР-оценка СПМ согласуется с автокорреляционной последовательностью на интервале суммирования для коррелограммного метода оценивания СПМ вплоть до значения, соответствующего индексу временно́го сдвига, равному p, но затем в ней для получения отсутствующих значений автокорреляции вместо нулевого продолжения, предполагаемого коррелограммным методом, используется ненулевая экстраполяция АКП, определяемая вы-

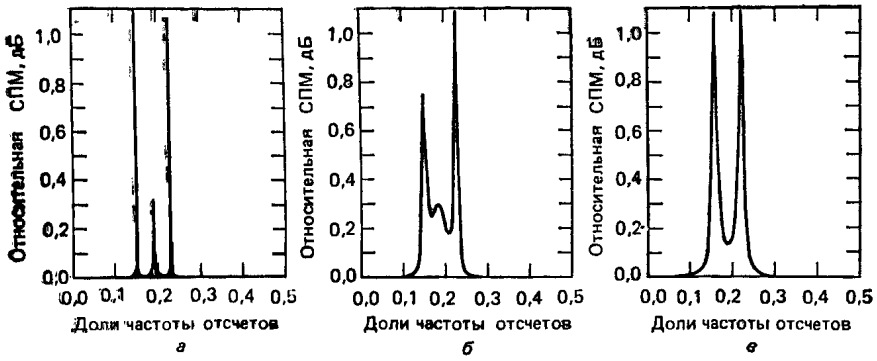


Рис. 7.5. Авторегрессионные оценки СПМ по 9 значениям АКП для трех синусоид равной мощности и аддитивного белого шума при отношении сигнал/шум, равном 30 дБ (*а*), 20 дБ (*б*) и 10 дБ (*в*). Часто́ты синусоид, выраженные в долях частоты отсчетов, равны 0,15, 0,19 и 0,23.

ражением (7.33). Этот факт отражен на рис. 7.4. Именно применением этой ненулевой экстраполяции автокорреляционной последовательности при вычислении АР СПМ с помощью выражения (7.31) и объясняется то высокое разрешение, которое характерно для оценок АР СПМ. Здесь отсутствует обработка автокорреляционной последовательности с помощью окна, которая присуща всем классическим спектральным оценкам. Поэтому оценкам АР СПМ не свойственны все те эффекты, которые обусловлены наличием боковых лепестков — неизбежным атрибутом всех классических спектральных оценок.

Следует, однако, заметить, что степень улучшения разрешения оценки АР СПМ в случае процессов, состоящих из смеси синусоид и белого шума, зависит от величины отношения сигнал/шум. Рассмотрим, например, оценки АР(8) СПМ для трех синусоид равной мощности в белом шуме, показанные на рис. 7.5. Эти оценки были получены по точным значениям автокорреляции этих синусоид в шуме, соответствующим индексам временно́го сдвига от 0 до 8 [выражение (4.25)]. Когда отношение сигнал/шум понизилось с 30 до 10 дБ, число разрешаемых синусоид уменьшилось с трех до двух, при этом оценки частот, определяемые расположением пиков, оказались смещенными. Степень разрешения синусоид равной мощности в случае известной автокорреляционной последовательности можно определить с помощью приближенной формулы Марпла [15]

$$F = \frac{1.03}{Tp\,[\mathrm{SNR}\,(p+1)]^{0.31}}, \qquad (7.35)$$

где F — разрешение в герцах, T — интервал отсчетов в секун-

дах, p — максимальное значение индекса временного сдвига для автокорреляционной последовательности, а SNR — отношение сигнал/шум для отдельной синусоиды, выраженное не в децибелах, а в линейных единицах.

7.4.3. Оценивание мощности синусоидальных компонент

Авторегрессионный метод оценивания СПМ часто используется для того, чтобы выявить в данных наличие синусоидальных компонент. Мощность, соответствующую компонентам в АР оценке СПМ, можно точно вычислить, интегрируя площадь под кривой этой оценки. Однако это связано с большими вычислительными затратами, поэтому весьма заманчивой оказалась идея использования в качестве показателя мощности синусоидальных компонент высоты соответствующих им спектральных пиков. Для классических спектральных оценок высота спектральных пиков служит надежным показателем относительной мощности, поскольку в том случае, когда анализируемый процесс состоит из аддитивной смеси синусоид и белого шума, высота спектральных пиков прямо пропорциональна мощности этих синусоид. Но для АР-оценок СПМ такой подход не применим. Рассмотрим, например, автокорреляционную последовательность для одной комплексной синусоиды в белом шуме, которая, согласно соотношению (4.52), будет определяться выражением

$$r_{xx}[k] = P \exp(j2\pi f_0 kT) + \rho_w \delta[k]. \qquad (7.36)$$

Используя это выражение, Лакосс [9] показал, что авторегрессионная m-го порядка СПМ для процесса, состоящего из одной синусоиды и белого шума, может быть представлена в следующем виде (см. разд. «Задачи»):

$$P_{\text{АР}}(f) = \left| \frac{T\rho_w [1 + p/(mP + \rho_w)]}{1 - \dfrac{P}{mP + \rho_w} \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \exp(-j2\pi k [f - f_0] T)} \right|^2. \qquad (7.37)$$

Функция $P_{\text{АР}}(f)$ достигает своего максимума при $f = f_0$:

$$P_{\text{АР}}(f_0) = \rho_w T [1 + m\text{SNR}][1 + (m+1)\,\text{SNR}] \approx T (m\text{SNR})^2, \qquad (7.38)$$

где $\text{SNR} = P/\rho_w$ и полагается $m\text{SNR} \gg 1$ (т. е. что отношение сигнал/шум велико). Таким образом, высота пика оказывается пропорциональной квадрату мощности, а, следовательно, площадь под пиком прямо пропорциональна этой мощности.

Метод оценки мощности нескольких действительных синусоид по пикам в АР-спектре был предложен Джонсоном и Андерсеном [7]. Однако он дает хорошие результаты только в случае достаточно далеко разнесенных спектральных пиков

синусоид с высоким отношением сигнал/шум. Если АР СПМ записать в виде z-преобразования

$$P_{AP}(z)=\frac{T\rho_w}{A(z)\,A^*(1/z^*)}, \tag{7.39}$$

то мощность пика, наблюдаемого в АР-спектре на частоте f_k, будет оцениваться следующей величиной:

$$\text{Мощность}\,(f_k)=2\mathrm{Re}\left\{\text{вычет}\frac{P_{AP}(z)}{z}, \text{ вычисленный при } z_k=\exp(j2\pi f_k T)\right\} \tag{7.40}$$

Вычет здесь определяется выражением (2.20). Заметим, что при использовании этого метода могут получаться отрицательные значения мощности в тех случаях, когда спектральные пики расположены очень близко друг к другу. Если заранее известно, что данные состоят только их синусоид и шума, то более надежную оценку мощности дает, по всей видимости, метод Прони (гл. 11).

Литература

[1] *Box G. E. P., Jenkins G. M.* Time Series Analysis Forecasting and Control. Holden-Day, Inc., San Francisco, 1970. [Имеется русский перевод: *Бокс Дж., Дженкинс Г.* Анализ временных рядов: Прогноз и управление. — М.: Мир, 1974, вып. 1, 2.]

[2] *Burg J. P.* Maximum Entropy Spectral Analysis, Ph. D. dissertation. Department of Geophysics, Stanford University, Stanford, Calif., 1975.

[3] *DuBroff R. E.* The Effective Autocorrelation Function of Maximum Entropy Spectra. Proc. IEEE, vol. 63, pp. 1622—1623, November 1975. [Имеется русский перевод: *Дуброфф Р. Е.* Эффективная автокорреляционная функция спектров максимальной энтропии. ТИИЭР, 1975, т. 63, № 11, с. 96—97.]

[4] *Friedlander B.* Lattice Filters for Adaptive Processing. Proc. IEEE, vol. 70, pp. 829—867, August 1982. [Имеется русский перевод: *Фридландер Б.* Решетчатые фильтры для адаптивной обработки данных. ТИИЭР, 1982, т. 70, № 8, с. 54—97.]

[5] *Haykin S. S., Kesler S.* Prediction-Error Filtrring and Maximum-Entropy Spectral Estimation, Chapter 2 in Nonlinear Methods of Spectral Analysis, 2nd ed., S. Haykin, ed., Springer-Ferlag, New York, 1983.

[6] *Jaynes E. T.* On the Rationale of Maximum-Entropy Methods. Proc. IEEE, vol. 70, pp. 939—952, September 1982. [Имеется русский перевод: *Джейнс Э. Т.* О логическом обосновании методов максимальной энтропии. ТИИЭР, 1982, т. 70, № 9, с. 33—51.]

[7] *Johnson S. J., Anderson N.* On Power Estimation in Maximum Entropy Spectral Analysis. Geophysics, vol. 43, pp. 681—690, June 1987.

[8] *Kay S. M.* Modern Spectral Estimation. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1987.

[9] *Lacoss R. T.* Data Adaptive Spectral Analysis Methods. Geophysics, vol. 36, pp. 661—675, August 1971.

[10] *Lang S. W., McClellan J. H.* A Simple Proof of Stability for All-Pole Linear Prediction Models. Proc. IEEE, vol. 67, pp. 860—861, May 1979. [Имеется русский перевод: *Лэнг С. У., Макклеллан Дж. Х.* Простое доказательство устойчивости моделей линейного прогнозирования, содержащих только полюсы: Обзор. ТИИЭР, 1979, т. 67, № 5, с. 185—186.]

[11] *Makhoul J.* Linear Prediction: A Tutorial Review. Proc. IEEE, vol. 63, pp. 561—580, April 1975; исправление см.: vol. 64, p. 285, February 1976. [Имеется русский перевод: *Маккол Дж.* Линейное предсказание: Обзор. ТИИЭР, 1975, т. 63, № 4, с. 20—44; исправление к этой статье см.: ТИИЭР, 1976, т. 64, № 2, с. 109.]
[12] *Makhoul J.* A Class of All-Zero Lattice Digitaj Filters: Properties and Applications. IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., vol. ASSP-26, pp. 304—314, August 1978.
[13] *Makhoul J.* Lattice Methods in Spectral Estimation, in Applied Time Series Analysis II, D. F. Findley, ed., Academic Press, Inc., New York, 1981, pp. 301—324.
[14] *Markel J. D., Gray A. H.* Linear Prediction of Apeech. Springer-Ferlag, New York, 1982.
[15] *Marple S. L., Jr.* Frequency Resolution of Fourier and Maximum Entropy Spectral Estimates. Geophysics, vol. 47, pp. 1303—1307, September 1982.
[16] *Nikias C. L., Raghuveer M.* Discussion on Higher Order Autospectra by MEM. Geophysics, vol. 50, pp. 165—166, January 1985.
[17] *Pakula L., Kay S. M.* Simole Proofs of Minimum Phase Property of the Prediction Error Filter. IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., vol. ASSP-31, p. 501, April 1983.
[18] *Papoulis A.* Maximum Entropy and Spectral Estimation: A Review. IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., vol. ASSP-29, pp. 1176—1186, December 1981.
[19] *Robinson E. A., Treitel S.* Geophysical Signal Analysis. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1980.
[20] *Satorius E. H., Zeidler J.* Maximum Entropy Spectral Analysis of Multiple Sinusoids in Noise. Geophysics, vol. 43, pp. 1111—1118, October 1978.
[21] *Van Den Bos A.* Alternative Interpretation of Maximum Entropy Spectral Analysis. IEEE Trans. Inf. Theory, vol. IT-17, pp. 493—494, July 1971.

Задачи

1. Показать, что любой набор чисел $\{\rho_p, k_1, ..., k_p\}$, такой, что $\rho_p > 0$ и $k_i < 1$ будет однозначно определять корректно обусловленную автокорреляционную последовательность.
2. Пусть $\{r_{xx}[0], ..., r_{xx}[m]\}$ — корректно обусловленная автокорреляционная последовательность. Показать, что тёплицевы автокорреляционные матрицы связаны соотношением

$$\det \mathbf{R}_{m+1} = -(\det \mathbf{R}_{m-1})\, r^2[m+1] + \beta r_{xx}[m+1] + \alpha,$$

где β и α — функции от $\det \mathbf{R}_{m-1}$ и $\Sigma a_m[i] r_{xx}[m+1-i]$. Показать, что $\det \mathbf{R}_{m+1}$ как функция от $r[m+1]$ при заданных $r_{xx}[0], ..., r_{xx}[m]$ имеет только один максимум, поэтому диапазон допустимых значений автокорреляции $r_{xx}[m+1]$, которая является невозрастающей функцией m, равен $2\rho_m{}'$. Показать, что выбор $r_{xx}[m+1]$ как средней точки этого допустимого диапазона

$$r_{xx}[m+1] = -\sum_{i=1}^{m} a_m[i]\, r_{xx}[m+1-i]$$

дает $k_{m+1}=0$ и $\rho'_{m+1}=\rho'_m$. Показать, что это максимизирует $\mathbf{R}_{m+1}$.
3. Используя (7.22), доказать, что $|k_m| \leqslant 1$.
4. Доказать рекурсивное относительно порядка соотношение между линейными предсказаниями ошибок вперед и назад, определяемыми соответственно выражениями (7.26) и (7.27).
5. Используя (7.36), доказать соотношение (7.37).

6. Найти представление автокорреляционной последовательности через последовательность авторегрессионных параметров, указанное на рис. 7.3.
7. Рекурсию Левинсона (7.17) можно рассматривать как отображение множества, состоящего из p коэффициентов отражения k_i на множество из p коэффициентов линейного предсказания $a[i]$.
   а) Доказать, что такое отображение взаимно однозначно.
   б) Вывести выражение для рекурсии Левинсона убывающего порядка, которая отображает множество коэффициентов фильтра линейного предсказания на множество коэффициентов отражения.
   в) На основе критерия устойчивости для коэффициентов линейного предсказания записать критерий устойчивости для фильтров, обладающих только полюсами, сформулированный относительно коэффициентов отражения.
   г) Устойчив ли фильтр с системной функцией

$$H(z)=\frac{1}{1-2z^{-1}-6z^{-2}+z^{-3}-2z^{-4}}.$$

8. Показать, что решетчатый фильтр является ортогонализирующим фильтром, для чего доказать, что ошибки линейного предсказания вперед и назад ортогональны друг другу на этой решетке, т. е. что

$$\mathscr{E}\{e^{b}[m]\,e^{b*}[n]\}=\rho_w\delta[m-n].$$

Подсказка: используйте соотношение (3.164).

9. Анализ АР(p)-спектра процесса, состоящего из M комплексных синусоид и аддитивного белого шума, в случае $p>M$ можно упростить, переходя к системе уравнений более низкого порядка (Саториус и Зайдлер [20], Кей [8]). Используя выражение (4.52) для автокорреляционной функции M комплексных синусоид в аддитивном белом шуме, показать, что авторегрессионные параметры удовлетворяют соотношению

$$a_p[k]=\sum_{i=1}^{M}\gamma_i\exp(j2\pi f_i[k-1]T)$$

при $1\leqslant k\leqslant p$ и $p>M$, где

$$\gamma_m+\sum_{\substack{n=1\\ n\neq m}}^{M}c_{mn}\gamma_n=-\frac{P_m}{pP_m+\rho_w}\exp(j2\pi f_m T)$$

и

$$c_{mn}=\frac{P_m}{pP_m+\rho_w}\left(\frac{1-\exp(j2\pi[f_n-f_m]pT}{1-\exp(j2\pi[f_n-f_m]T}\right).$$

Показать также, что

$$\rho_p=\rho_w\left[1-\sum_{i=1}^{M}\gamma_i\exp(-j2\pi f_i T)\right].$$

(Подсказка: подставить в уравнения Юла — Уолкера векторную форму этой автокорреляционной последовательности.) Заметим, что данная процедура позволяет заменить p уравнений Юла — Уолкера меньшей системой из M уравнений относительно коэффициентов γ_i.

Глава 8
АВТОРЕГРЕССИОННОЕ СПЕКТРАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ: АЛГОРИТМЫ БЛОЧНОЙ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ

8.1. Введение

Выше в гл. 6 и 7 были рассмотрены основные свойства и соотношения авторегрессионной (АР) модели и связанной с ней функцией СПМ, причем изложение материала в этих главах велось в предположении, что автокорреляционная функция исследуемого случайного процесса точно известна. Однако на практике эта функция обычно не известна, поэтому авторегрессионная спектральная оценка основывается на имеющихся данных. В этой и следующей главах описываются алгоритмические методы получения авторегрессионных спектральных оценок по отсчетам данных. Следует, однако, заметить, что в действительности эти методы дают оценки параметров АР-модели, а уже по ним может быть вычислена АР СПМ.

Все эти методы можно разбить на две категории: алгоритмы для обработки *блоков* данных и алгоритмы для обработки *последовательных* данных. В этой главе описаны методы обработки, относящиеся к блокам данных, т. е. алгоритмы, предназначенные для обработки целых блоков накопленных отсчетов данных некоторого фиксированного объема. В гл. 9 будут описаны методы обработки последовательных данных, т. е. алгоритмы, предназначенные для последовательной обработки отсчетов данных по мере их поступления. Блочные методы, рассматриваемые в этой главе, можно кратко описать как алгоритмы с фиксированным временем, рекурсивные относительно порядка в том смысле, что они применяются к фиксированным блокам временны́х отсчетов данных и позволяют рекурсивным образом получать оценки параметров АР-модели более высокого порядка по оценкам параметров АР-модели более низкого порядка. Такие алгоритмы целесообразно применять в тех случаях, когда порядок требуемой АР-модели не известен, поэтому для выбора АР-модели надлежащего порядка необходимо испытывать много таких моделей различных порядков и сравнивать получаемые результаты. С другой стороны, последовательные методы, описываемые в гл. 9, можно рассматривать как алгоритмы с фиксированным порядком, рекурсивные относительно времени в том смысле, что они применяются для последовательной обработки данных с целью обновления оценок параметров АР-модели фиксированного порядка. Такие алгорит-

мы целесообразно применять в тех случаях, когда необходимо осуществлять слежение за спектром, медленно изменяющимся во времени, т. е. адаптироваться к нему.

В принципе простейшей процедурой для получения авторегрессионной спектральной оценки по отсчетам данных могла бы быть процедура получения по этим данным оценок автокорреляционной последовательности с помощью программы CORRELATION, приведенной в гл. 5. Эти автокорреляционные оценки использовались бы затем вместо отсутствующей точной автокорреляционной последовательности в уравнениях Юла — Уолкера, приведенных в гл. 6, для получения оценок АР-параметров, по которым далее вычислялась бы функция СПМ. Однако более качественные результаты (особенно в случае коротких последовательностей данных) получаются с помощью алгоритмов, которые позволяют определять оценки АР-параметров непосредственно по самим данным без использования автокорреляционных оценок, что проиллюстрировано ниже конкретными примерами.

Представленные в этой главе методы блочной обработки данных делятся на три категории, каждой из которых посвящен отдельный раздел. Выше в гл. 7 было показано, что АР-параметры можно получать с помощью эквивалентных представлений, основанных на использовании либо автокорреляционной последовательности, либо последовательности коэффициентов отражения. Так называемый *метод Юла — Уолкера* оценивания АР-параметров по последовательности оценок автокорреляционной функции изложен в разд. 8.3. Два метода оценивания АР-параметров по последовательности оценок коэффициентов отражения, включая популярный *алгоритм Берга*, описаны в разд. 8.4. Одну из важных категорий методов оценивания АР-параметров составляют методы, основанные на линейном предсказании по критерию наименьших квадратов. Методы этой категории, которые обсуждаются в разд. 8.5, в дальнейшем различаются по типу используемой оценки линейного предсказания. К одному классу этих методов относятся те из них, в которых производится *раздельная* минимизация квадратичных ошибок линейного предсказания вперед и назад (или прямого и обратного предсказания). К этому классу относятся *автокорреляционный и ковариационный* методы. Второй класс составляют методы, в которых осуществляется совместная минимизация квадратичных ошибок прямого и обратного линейного предсказания. К этому классу относится *модифицированный ковариационный* метод. В остальных разделах данной главы рассмотрены методы, используемые для выбора порядка АР-модели, и некоторые модификации, необходимые для управления шумом наблюдения при измерении данных.

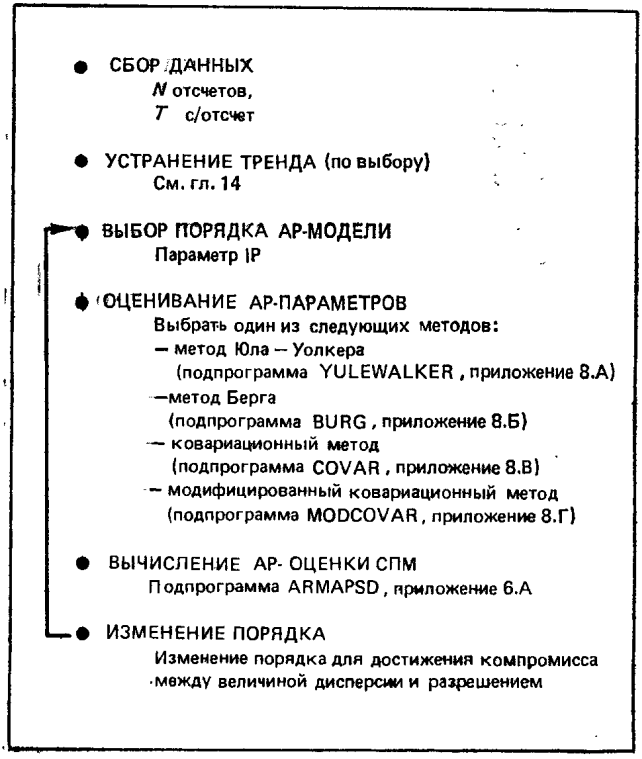


Рис. 8.1. Краткая запись четырех блочных алгоритмов АР-оценивания СПМ, описанных в гл. 8.

8.2. Краткая сводка результатов

Для того чтобы получать авторегрессионные оценки СПМ непосредственно по некоторому блоку отсчетов данных, в эту главу включены машинные программы, которые позволяют читателю работать с одним из четырех возможных алгоритмов. На рис. 8.1 приведена краткая запись этапов, необходимых для авторегрессионного оценивания СПМ, в соответствии с которой можно выбрать одну из четырех подпрограмм оценивания АР-параметров. Метод Юла — Уолкера (разд. 8.3) в случае коротких записей данных дает АР-спектры с наихудшим разрешением по сравнению с тремя остальными методами. Метод Берга (подразд. 8.4.2) и ковариационный метод (подразд. 8.5.1) дают спектральные оценки со сравнимыми характеристиками. Модифицированный ковариационный метод (подразд. 8.5.2) обеспечивает наилучшие результаты при наличии в данных синусоидальных компонент.

С помощью методов Юла — Уолкера и Берга непосредственно получаются оценки АР-параметров $\hat{a}[n]$. Ковариационный и модифицированный ковариационный методы фактически дают оценки коэффициентов линейного предсказания, которые затем используются в качестве оценок АР-параметров, для чего эти АР-параметры приравниваются либо к коэффициентам линейного предсказания вперед: $\hat{a}[n]=a^f[n]$, либо к величинам, комплексно-сопряженным коэффициентам линейного предсказания назад: $\hat{a}[n]=(a^b[n])^*$. После определения (тем или иным методом) оценок АР-параметров вычисляется авторегрессионная спектральная оценка, которая находится с помощью выражения

$$\hat{P}_{\text{АР}}(f)=\frac{T\hat{\rho}_w}{\left|1+\sum_{n=1}^{p}\hat{a}[n]\exp(-j2\pi fnT)\right|^2}, \qquad (8.1)$$

где $\hat{\rho}_w$ — оценка дисперсии возбуждающего шума, которую также можно получить одним из четырех методов, указанных на рис. 8.1. На этом рисунке указаны названия подпрограмм и номера приложений, в которых приведены их распечатки. Заметим, что, кроме входных данных, в качестве входного параметра должен использоваться порядок АР-модели. От выбора порядка этой модели зависит компромисс между разрешением и дисперсией получаемой спектральной оценки, и обусловленный им эффект аналогичен эффекту при изменении окна в классических спектральных оценках. Для определения наиболее подходящего порядка АР-модели приходится испытывать много моделей различных порядков, и эта процедура сходна с процедурой закрывания окна, применяемой в классических методах спектрального оценивания. Именно поэтому она будет также называться *изменением*, или «*закрытием*», *порядка* модели. В разд. 8.7 описаны методы автоматического выбора порядка, которые можно ввести в машинную программу любого из представленных в этой главе алгоритмов и тем самым устранить необходимость ввода параметра, характеризующего порядок АР-модели.

Примеры четырех авторегрессионных оценок СПМ для случая 64-точечной тест-последовательности, приведенной в приложении II, помещенном в конце книги, показаны на рис. 8.2. Для всех методов использовался АР-процесс 15-го порядка. Для иллюстрации компромисса между разрешением и степенью гладкости оценки, который обеспечивает выбор порядка модели, на врезке рисунка, соответствующего ковариационному методу, показана спектральная оценка, полученная с помощью АР-процесса 8-го порядка. Истинный спектр, соответствующий этим спектральным оценкам, показан на рис. 1.8. В приложениях к

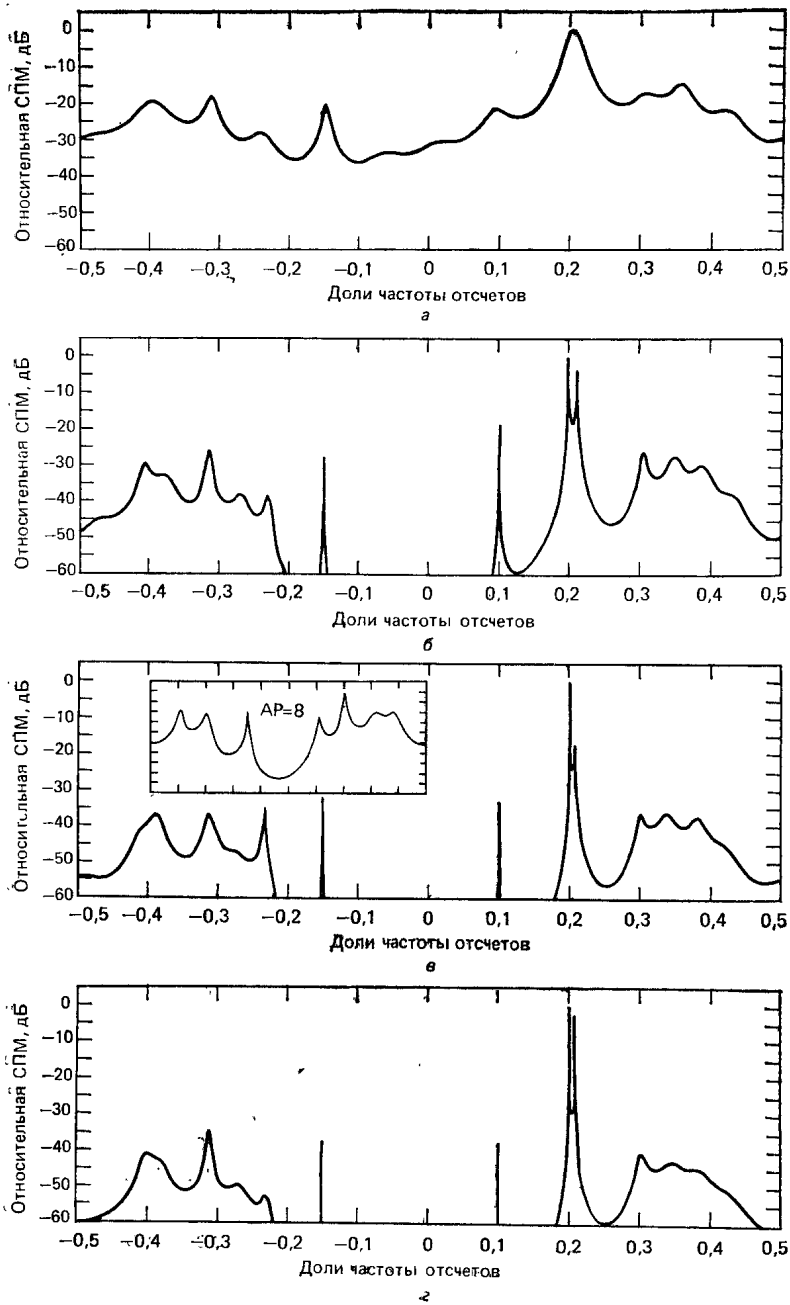


Рис. 8.2. Четыре спектральные AP(15)-оценки, полученные по 64-точечной тестпоследовательности данных: *а* — метод Юла — Уолкера; *б* — метод Берга; *в* — ковариационный метод; *г* — модифицированный ковариационный метод.

этой главе приведены распечатки значений АР-коэффициентов для каждого метода, которые читатель может использовать для проверки правильности реализации машинных программ на своей ЭВМ. Отметим, что оценки на рис. 8.2 обладают острыми спектральными линиями. Для того чтобы убедиться в правильности отсчетов функции СПМ при использовании подпрограммы ARMAPSD, т. е. в том, что не пропущено ни одного острого пика, достаточно просуммировать значения СПМ по всем частотам. Эта сумма должна быть равной полной мощности анализируемого процесса, а следовательно, должна быть близкой к величине автокорреляционного члена с нулевым корреляционным сдвигом, который также характеризует мощность этого процесса. Если эти значения заметно различаются, то для отыскания одного или нескольких пропущенных пиков необходимо повысить частоту отсчетов, т. е. иными словами, увеличить значение входного параметра N в подпрограмме ARMAPSD.

8.3. Метод оценивания корреляционной функции

Наиболее очевидный подход к АР-оцениванию СПМ состоит в решении уравнений Юла — Уолкера, в которые вместо значений неизвестной автокорреляционной функции подставляются их оценки. Такая процедура оценивания СПМ будет называться *алгоритмом Юла — Уолкера.* Следует заметить, что при использовании несмещенных автокорреляционных оценок автокорреляционная матрица может оказаться неположительно-определенной, а это означает, что АР-фильтр будет неустойчивым. При использовании смещенных автокорреляционных оценок эта матрица всегда будет положительно-полуопределенной, что гарантирует устойчивость АР-фильтра. В случае длинных записей данных метод Юла — Уолкера может давать вполне приемлемые спектральные оценки, однако в случае коротких записей данных получаемые с его помощью спектральные оценки имеют более низкое разрешение по сравнению с оценками, получаемыми другими авторегрессионными методами, о чем свидетельствует рис. 8.2. В приложении 8.А приведена программа YULEWALKER, предназначенная для машинной реализации метода Юла — Уолкера.

8.4. Методы оценивания коэффициентов отражения

Рекурсивное решение уравнений Юла — Уолкера методом Левинсона связывает АР-параметры порядка p с параметрами порядка $p-1$ выражением

$$a_p[n] = a_{p-1}[n] + \mathbf{k}_p a^*_{p-1}[p-n], \qquad (8.2)$$

где n изменяется от 1 до $p-1$, а коэффициент отражения k_p определяется по известным значениям автокорреляционной функции, соответствующим корреляционным сдвигам от 0 до $p-1$:

$$k_p = a_p[p] = \frac{-\sum_{n=0}^{p-1} a_{p-1}[n] r_{xx}[p-n]}{\rho_{p-1}}. \tag{8.3}$$

Рекурсивное уравнение для дисперсии возбуждающего белого шума дается выражением

$$\rho_p = \rho_{p-1}(1 - |k_p|^2), \tag{8.4}$$

где $\rho_0 = r_{xx}[0]$. Из всех величин, которые присутствуют в выражениях (8.2)—(8.4), только коэффициент отражения непосредственно зависит от автокорреляционной функции. А это означает, что одна из процедур получения АР-оценки СПМ в том случае, когда имеется некоторый блок отсчетов данных, может быть основана на оценивании коэффициента отражения по этим отсчетам на каждом шаге рекурсии Левинсона. Эта идея реализована в трех методах. В одной из них используется геометрическое среднее квадратичных ошибок линейного предсказания вперед и назад, во втором — их арифметическое среднее, а третий основан на приближении методом максимального правдоподобия.

8.4.1. Геометрический алгоритм

Ошибки линейного предсказания вперед и назад определяются соответственно следующими выражениями:

$$e_p^f[n] = x[n] + \sum_{m=1}^{p} a_p^f[m] x[n-m], \tag{8.5}$$

$$e_p^b[n] = x[n-p] + \sum_{m=1}^{p} a_p^{f*}[m] x[n+m-p]. \tag{8.6}$$

Подставляя в (8.5) и (8.6) значение $a_p[n]$, определяемое выражением (8.2), получаем рекурсивные соотношения

$$\begin{aligned} e_p^f[n] &= e_{p-1}^f[n] + k_p e_{p-1}^b[n-1], \\ e_p^b[n] &= e_{p-1}^b[n-1] + k_p^* e_{p-1}^f[n], \end{aligned} \tag{8.7}$$

которые связывают ошибки предсказания порядка p с ошибками предсказания порядка $p-1$. В гл. 7 было показано, что коэффициент отражения k_p можно рассматривать как коэффициент частной корреляции между ошибками линейного предска-

зания вперед и назад и что он обладает следующим свойством:

$$k_p = -\frac{\mathscr{E}\{e^f_{p-1}[n]\, e^{b*}_{p-1}[n-1]\}}{\mathscr{E}\{|e^f_{p-1}[n]|^2\}^{1/2}\, \mathscr{E}\{|e^b_{p-1}[n-1]|^2\}^{1/2}}. \tag{8.8}$$

Это выражение определяет «геометрическое» среднее[1] между частной корреляцией ошибки предсказания вперед $\mathscr{E}\{e^f_{p-1}[n]\, e^{b*}_{p-1}[n-1]\}/\mathscr{E}\{|e^f_{p-1}[n]|^2\}$ и частной корреляцией ошибки предсказания назад $\mathscr{E}\{e^f_{p-1}[n] e^{b*}_{p-1}[n-1]\}/\mathscr{E}\{|e^b_{p-1}[n-1]|^2\}$. Подставляя в (8.8) оценки взаимной корреляции и автокорреляции ошибок предсказания вперед и назад

$$\begin{gathered}\frac{1}{N}\sum_{n=p+1}^{N} e^f_{p-1}[n]\, e^{b*}_{p-1}[n-1],\\ \frac{1}{N}\sum_{n=p+1}^{N} |e^f_{p-1}[n]|^2,\\ \frac{1}{N}\sum_{n=p+1}^{N} |e^b_{p-1}[n-1]|^2,\end{gathered} \tag{8.9}$$

получаем следующее приближенное выражение для коэффициента отражения:

$$\hat{k}_p = \frac{-\sum_{n=p+1}^{N} e^f_{p-1}[n]\, e^{b*}_{p-1}[n-1]}{\left(\sum_{n=p+1}^{N} |e^f_{p-1}[n]|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=p+1}^{N} |e^b_{p-1}[n-1]|^2\right)^{1/2}}. \tag{8.10}$$

Заметим, что в данном случае не имеет значения, какие оценки корреляции — смещенные или несмещенные — были использованы, так как масштабирующий множитель сократился. При выводе выражения (8.10) предполагалось, что имеется N отсчетов $x[1], \ldots, x[N]$ и ошибки предсказания $e_p{}^f[n]$ и $e_p{}^b[n]$ формируются только в диапазоне индексов от $n=p+1$ до $n=N$, поскольку используются только имеющиеся отсчеты данных. Нетрудно показать, что модуль оценки коэффициента отражения $\hat{k}_p$ не превышает единицы, а это гарантирует получение устойчивого АР-фильтра (т. е. фильтра, полюсы которого лежат внутри единичной окружности в z-плоскости).

Геометрический алгоритм, таким образом, использует алгоритм Левинсона, в котором вместо обычного коэффициента отражения, вычисляемого по известной автокорреляционной функции, используется его оценка $\hat{k}_p$. Базовый алгоритм Левинсона

[1] Геометрическое, арифметическое и гармоническое средние значения двух чисел a и b равны соответственно $\sqrt{ab}$, $(a+b)/2$ и $2ab/(a+b)$.

дополняется при этом рекурсивными уравнениями (8.7), определяющими ошибки предсказания, вычисления по которым начинаются с рекурсии нулевого порядка

$$e_0^f[n] = e_0^b[n] = x[n], \tag{8.11}$$

где $1 \leqslant n \leqslant N$. В качестве начального значения дисперсии ошибки линейного предсказания используется оценка

$$\rho_0 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} |x[n]|^2, \tag{8.12}$$

которая характеризует мощность, содержащуюся в N отсчетах данных. В гл. 15 приводится многоканальная версия геометрического алгоритма, а соответствующая ей машинная программа помещена в приложении 15.А. Для случая одного канала (параметр NUMCHS=1) эта программа будет давать решения, идентичные получаемым с помощью описанного здесь геометрического алгоритма.

8.4.2. Гармонический алгоритм (Берга)

Один из самых первых и наиболее известных алгоритмов авторегрессионного спектрального оценивания был предложен Бергом [9] и впоследствии подробно исследовался Андерсеном [3], Датта [13], Хайкином и Кеслером [15] и Ульрихом и др. [53]. Этот алгоритм получил название алгоритма максимальной энтропии, однако его следовало бы рассматривать как одно из независимых и самостоятельных направлений, обусловленных принципом максимальной энтропии Берга [10].

Алгоритм Берга идентичен геометрическому алгоритму и отличается от него лишь тем, что в нем используется другой тип оценки коэффициента отражения, а именно оценка, определяемая по методу наименьших квадратов. При каждом значении порядка p в нем минимизируется арифметическое среднее мощности ошибок линейного предсказания вперед и назад (выборочная дисперсия ошибки предсказания)

$$\rho_p^{fb} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{N}\sum_{n=p+1}^{N} |e_p^f[n]|^2 + \frac{1}{N}\sum_{n=p+1}^{N} |e_p^b[n]|^2\right], \tag{8.13}$$

где полагается, что ошибки предсказания определяются рекурсивными выражениями (8.7). Заметим, что и здесь суммирование ведется только по имеющимся данным. Из (8.13) следует, что величина $\rho_p{}^{fb}$ является функцией только одного параметра, а именно комплексного коэффициента отражения k_p, поскольку ошибки предсказания, начиная с порядка p—1, известны. При-

равнивая комплексную производную от ρ_p^{fb} нулю

$$\frac{\partial \rho_p^{fb}}{\partial \mathrm{Re}\{k_p\}} + j \frac{\partial \rho_p^{fb}}{\partial \mathrm{Im}\{k_p\}} = 0$$

и решая полученное уравнение относительно k_p, получаем следующее выражение для оценки по методу наименьших квадратов:

$$\hat{k}_p = \frac{-2 \sum_{n=p+1}^{N} e_{p-1}^{f}[n]\, e_{p-1}^{b*}[n-1]}{\sum_{n=p+1}^{N} |e_{p-1}^{f}[n]|^2 + \sum_{n=p+1}^{N} |e_{p-1}^{b}[n-1]|^2}. \qquad (8.14)$$

Эта оценка коэффициента отражения представляет собой гармоническое среднее коэффициентов частной корреляции ошибок предсказания вперед и назад. Нетрудно показать, что ее модуль не превышает единицы, а это гарантирует получение устойчивого фильтра, имеющего только полюсы. Еще одно рекурсивное уравнение, которое упрощает вычисление знаменателя в выражении для оценки (8.14), было проанализировано Андерсеном [4]. Записывая знаменатель (denominator, DEN) оценки (8.14) в виде

$$\mathrm{DEN}_p = \sum_{n=p+1}^{N} (|e_{p-1}^{f}[n]|^2 + |e_{p-1}^{b}[n-1]|^2); \qquad (8.15)$$

получаем далее

$$\mathrm{DEN}_p = (1 - |\hat{k}_{p-1}|^2)\mathrm{DEN}_{p-1} - |e_{p-1}^{f}[p]|^2 - |e_{p-1}^{b}[N]|^2. \qquad (8.16)$$

Доказательство этого соотношения предлагается читателю в качестве самостоятельного упражнения (см. разд. «Задачи»). В приложении 8.Б приведена написанная на Фортране машинная программа алгоритма Берга, в которой в методических целях указаны номера используемых уравнений. Анализ вычислительной сложности этого алгоритма (с учетом только членов второго порядка) показывает, что его реализация требует выполнения $3Np - p^2$ комплексных сложений и умножений, а также p действительных делений. Кроме того, он требует памяти для хранения $3N + p$ комплексных чисел.

Гармонический метод дает несколько смещенные оценки частоты синусоид, что будет проиллюстрировано в разд. 8.6. Для уменьшения этого смещения было предложено несколько модификаций этого метода. Их основное отличие от исходного алгоритма — взвешивание среднего квадрата ошибки предсказания

$$\rho_p^{fb} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{N} \sum_{n=p+1}^{N} w_p[n]\,\{|e_p^{f}[n]|^2 + |e_p^{b}[n]|^2\}\right],$$

что приводит к следующей оценке коэффициента отражения:

$$\hat{k}_p = \frac{-2\sum_{n=p+1}^{N} w_{p-1}[n]\, e^{f}_{p-1}[n]\, e^{b*}_{p-1}[n-1]}{\sum_{n=p+1}^{N} w_{p-1}[n]\left(|e^{f}_{p-1}[n]|^2 + |e^{b}_{p-1}[n-1]|^2\right)}, \qquad (8.17)$$

где $w_{p-1}[n]$ определяет весовую функцию. Нетрудно видеть, что пока $w[n] \geqslant 0$, модуль оценки $|k_p| \leqslant 1$. В алгоритме Берга используется равномерная весовая функция $w_{p-1}[n] = 1/N$. Результаты моделирования, выполненного Суиглером [46, 47], показали, что частотное смещение уменьшается при использовании окна Хэмминга — спадающей к краям весовой функции. Кавех и Липперт [24] показали, что с помощью специального квадратичного окна также можно уменьшить смещение оценки частоты синусоиды в пределах большей части частотного диапазона. Хелме и Никиас [16] предложили адаптивную к данным весовую функцию вида

$$w_{p-1}[n] = \sum_{k=n-p+1}^{n-1} |x[k]|^2 \text{ для } p \geqslant 2,$$

которая характеризует общую энергию данных в ошибках линейного предсказания вперед и назад $e^{f}_{p-1}[n]$ и $e^{b}_{p-1}[n-1]$, соответствующих временно́му индексу n.

8.4.3. Рекурсивное оценивание по методу максимального правдоподобия

Этот алгоритм разработан Кеем [27] и берет свое название от принципа оценивания по методу максимального правдоподобия (МП), который используется в нем для получения оценки коэффициентов отражения и обновления порядка авторегрессионных коэффициентов, получаемых с помощью рекурсивного алгоритма Левинсона. Вывод этого алгоритма требует достаточно много места и времени, поэтому здесь дается лишь его краткое описание. С подробностями его вывода для случая действительных данных читатель может ознакомиться в упомянутой выше работе Кея [27], обобщение же на случай комплексных данных пока еще не получено.

Если плотность вероятности гауссовского авторегрессионного процесса порядка p с нулевым средним значением максимизируется относительно коэффициента отражения k_p и дисперсии возбуждающего шума ρ_p в предположении, что авторегрессионные коэффициенты порядка $p-1$ уже вычислены, то оценки $\hat{k}_p$ и $\hat{\rho}_p$, которые максимизируют эту плотность вероятности для

заданной последовательности данных $x[0], x[1], \ldots, x[N-1]$, получаются как решения кубического уравнения

$$\hat{k}_p^3+\left(\frac{N-2p}{N-p}\right)\left(\frac{\alpha_p}{\beta_p}\right)\hat{k}_p^2-\left(\frac{p\delta_{p-1}+N\alpha_p}{[N-p]\,\beta_p}\right)\hat{k}_p-\left(\frac{N}{N-p}\right)\left(\frac{\alpha_p}{\beta_p}\right)=0,$$

для которого определяется его действительный корень на интервале $|-1, 1|$, максимизирующий плотность вероятности, и линейных уравнений

$$\delta_p=\delta_{p-1}+2\alpha_p\hat{k}_p+\beta_p\hat{k}_p^2,$$
$$\hat{\rho}_p=\delta_p/N.$$

Действительные коэффициенты α_p и β_p определяются с помощью следующих квадратичных форм:

$$\alpha_p=(\mathbf{a}_{p-1}^T\ \ 0)\,\mathbf{S}_p\begin{pmatrix}\mathbf{J}\mathbf{a}_{p-1}\\0\end{pmatrix},$$

$$\beta_p=(0\ \ \mathbf{a}_{p-1}^T\mathbf{J})\mathbf{S}_p\begin{pmatrix}\mathbf{J}\mathbf{a}_{p-1}\\0\end{pmatrix},$$

где $\mathbf{a}=(1\ a_{p-1}[1]\ \ldots\ a_{p-1}[p-1])^T$ — вектор авторегрессионных коэффициентов, $\mathbf{J}$ — $(p\times p)$-матрица отражения, $\mathbf{S}_p$ — $(p+1)\times(p+1)$-матрица с элементами

$$s_p[i, j]=\sum_{n=p}^{N-1+i+j-p}x[n-i]\,x[n-j],$$

определенными при $0\leqslant i, j\leqslant p$. После вычисления оценки $\hat{k}_p$ с помощью рекурсии Левинсона (8.2) определяются авторегрессионные коэффициенты порядка p по значениям этих коэффициентов порядка $p-1$. Для инициализации рекурсивного алгоритма МП-оценивания используется начальное условие

$$\delta_0=\sum_{n=0}^{N-1}x^2[n].$$

Машинная программа реализации этого алгоритма приводится в книге Кея [28].

8.5. Оценивание линейного предсказания по методу наименьших квадратов

Налагая на АР-коэффициенты ограничение, с тем чтобы они удовлетворяли рекурсивному соотношению Левинсона (8.2), Бергу удалось осуществить оптимизацию по методу наименьших квадратов единственного параметра — коэффициента отражения. Другой подход состоит в минимизации в методе наименьших

квадратов одновременно по всем коэффициентам линейного предсказания, что позволяет полностью устранить ограничение, налагаемое рекурсией Левинсона. Такой подход будет несколько улучшать характеристики спектральной оценки, что показано ниже в разд. 8.6. Будут рассмотрены два типа алгоритмов спектрального оценивания по методу наименьших квадратов (МНК). К первому относятся алгоритмы, в которых используются раздельные оценки коэффициентов линейного предсказания вперед и назад, ко второму — алгоритмы, в которых используется некоторая их комбинация.

8.5.1. Алгоритмы с раздельным линейным предсказанием вперед и назад

Предположим, что для оценивания АР-параметров порядка p используется N-точечная последовательность данных $x[1], \ldots, x[N]$. Оценка линейного предсказания вперед $\hat{x}[n]$ для отсчета $x[n]$ будет иметь обычную форму

$$\hat{x}^f[n] = -\sum_{k=1}^{p} a_p^f[k]\, x[n-k], \tag{8.18}$$

где $a_p^f[k]$ — коэффициенты линейного предсказания вперед порядка p. Предсказание «вперед» понимается здесь в том смысле, что результат предсказания для текущего отсчета данных представляет собой взвешенную сумму из p предшествующих отсчетов. Ошибка линейного предсказания вперед определяется выражением

$$e_p^f[n] = x[n] - \hat{x}^f[n] = x[n] + \sum_{k=1}^{p} a_p^f[k]\, x[n-k]. \tag{8.19}$$

По своей форме это выражение идентично рекурсии, которая описывает авторегрессионный процесс p-го порядка, но с тем лишь отличием, что $e^f{}_p[n]$ не является теперь возбуждающим белым шумовым процессом, так как в случае конечной последовательности данных ошибка линейного предсказания не обязательно будет белым шумом. Поэтому, для того чтобы можно было воспользоваться авторегрессионной моделью, мы будем *полагать*, что ошибка предсказания является отбеленным процессом, что позволит приравнять авторегрессионные параметры и коэффициенты линейного предсказания.

Ошибку линейного предсказания вперед можно определить в диапазоне временны́х индексов от $n=1$ до $n=N+p$, если пред-

положить, что данные до первого и после последнего отсчетов равны нулю (т. е. $x[n]=0$ при $n<1$ и $n>N$). $N+p$ членов ошибки линейного предсказания вперед, определяемых выражением (8.19), можно записать, используя матрично-векторное обозначение, в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} e_p^f[1] \\ \vdots \\ e_p^f[p+1] \\ \vdots \\ e_p^f[N-p] \\ \vdots \\ e_p^f[N] \\ \vdots \\ e_p^f[N+p] \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x[1] & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x[p+1] & & x[1] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x[N-p] & & x[p+1] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x[N] & & x[N-p] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & x[N] \end{pmatrix}}_{\mathbf{X}_p} \begin{pmatrix} 1 \\ a_p^f[1] \\ \vdots \\ a_p^f[p] \end{pmatrix}, \quad (8.20)$$

где $\mathbf{X}_p$ — прямоугольная тёплицева $(N+p)\times(p+1)$-матрица данных. В верхнем правом и нижнем левом углах этой матрицы стоят нули, что с очевидностью говорит о неявно подразумеваемой обработке последовательности данных с помощью окна. Матрицу данных можно разбить на три компоненты

$$\mathbf{X}_p = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_p \\ \mathbf{T}_p \\ \mathbf{U}_p \end{pmatrix}, \quad (8.21)$$

где нижняя треугольная $p\times(p+1)$-матрица $\mathbf{L}_p$, прямоугольная $(N-p)\times(p+1)$-матрица $\mathbf{T}_p$ и верхняя треугольная $p\times(p+1)$-матрица $\mathbf{U}_p$ определяются выражениями

$$\mathbf{L}_p = \begin{pmatrix} x[1] & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x[p] & \dots & x[1] & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{T}_p = \begin{pmatrix} x[p+1] & \dots & x[1] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x[N-p] & & x[p+1] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x[N] & \dots & x[N-p] \end{pmatrix}, \tag{8.22}$$

$$\mathbf{U}_p = \begin{pmatrix} 0 & x[N] & \dots & x[N-p+1] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x[N] \end{pmatrix}.$$

Модуль среднего квадрата ошибки линейного предсказания вперед, который необходимо минимизировать, — это просто

$$\rho_p^f = \sum_n |e_p^f[n]|^2. \tag{8.23}$$

Поделив ρ_p^f на N, получим выборочную дисперсию. Диапазон суммирования для ρ_p^f в (8.23) намеренно не определен, поскольку его выбор зависит от конкретного применения. Мы рассмотрим три случая спектрального оценивания. Выбирая полный диапазон суммирования от $e_p^f[1]$ до $e_p^f[N+p]$, получаем так называемый *взвешенный* случай, поскольку он включает пред- и постобработку данных с помощью окна (т. е. приравнивания отсутствующих значений данных к нулю). Выбирая диапазон суммирования от $e_p^f[1]$ до $e_p^f[N]$, получаем *предвзвешенный* случай, поскольку при этом полагается, что значения данных, предшествующие отсчету $x[1]$, равны нулю. Диапазон суммирования от $e_p^f[p+1]$ до $e_p^f[N]$ соответствует невзвешенному случаю, поскольку используются только имеющиеся отсчеты данных. Взвешенный случай получил название *автокорреляционного* метода линейного предсказания. Случай отсутствия взвешивания называется *ковариационным* методом линейного предсказания. Оба этих названия впервые начали употребляться в работах по обработке речевых сигналов (см. Макхол [34]) и не удовлетворяют стандартным статистическим определениям этих терминов (ковариация — это корреляция с устраненным средним значением).

Рассмотрим сначала оценку линейного предсказания по методу наименьших квадратов, основанную на минимизации ρ_p^f с помощью *автокорреляционного* (взвешенного) метода. Соотношение между ошибками линейного предсказания вперед и коэффициентами линейного предсказания можно в краткой форме

записать в следующем виде:

$$\mathbf{e}_p^f = \mathbf{X}_p \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{a}_p^f \end{pmatrix}, \tag{8.24}$$

где $(N+p)$-элементный вектор ошибки $\mathbf{e}_p{}^f$ и p-элементный вектор коэффициентов линейного предсказания $\mathbf{a}_p{}^f$ определяются выражениями

$$\mathbf{e}_p^f = \begin{pmatrix} e_p^f[1] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_p^f[N+p] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_p^f = \begin{pmatrix} a_p^f[1] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_p^f[p] \end{pmatrix}, \tag{8.25}$$

а $\mathbf{X}_p$ — $(N+p)\times(p+1)$-матрица данных, определенная в (8.20). Уравнение (8.24) имеет ту же форму, что и уравнение (3.62), поэтому нормальные уравнения, минимизирующие средний квадрат ошибки

$$\rho_p^f = \sum_{n=1}^{N+p} |e_p^f[n]|^2 = (\mathbf{e}_p^f)^H \mathbf{e}_p^f \tag{8.26}$$

порядка p, будут в соответствии с (3.67) иметь следующий вид:

$$\mathbf{X}_p^H \mathbf{X}_p \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{a}_p^f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_p^f \\ \mathbf{0}_p \end{pmatrix}. \tag{8.27}$$

Произведение $\mathbf{X}_p{}^H\mathbf{X}_p$ формирует квадратную эрмитову $(p+1)\times(p+1)$-матрицу $\mathbf{R}_p$, имеющую форму

$$\mathbf{R}_p = \mathbf{X}_p^H \mathbf{X}_p = \begin{pmatrix} r_p[0,\ 0] & \dots & r_p[0,\ p] \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ r_p[p,\ 0] & \dots & r_p[p,\ p] \end{pmatrix}, \tag{8.28}$$

где $r_p[i, j] = r_p{}^*[j, i]$. Элементы матрицы $\mathbf{R}_p$ имеют форму корреляционных произведений

$$r_p[i,\ j] = \sum_{n=1}^{N+p} x^*[n-i]\, x[n-j] = \sum_{k=1}^{N-(i-j)} x[k+(i-j)]\, x^*[k], \tag{8.29}$$

где $0 \leqslant i-j \leqslant p$. Поскольку $r_p[i, j]$ зависит только от разности $(i-j)$, произведение $\mathbf{X}_p{}^H\mathbf{X}_p$ дает тёплицеву матрицу [см. уравнение (3.35)]. Если $r_p[i, j]$ поделить на N, то эти члены будут идентичны смещенной оценке автокорреляционной последова-

тельности $\check{r}_{xx}[i-j]=r_p[i,j]/N$; в этом случае нормальные уравнения (8.27) будут идентичны уравнениям Юла — Уолкера (6.32). Следовательно, автокорреляционный метод линейного предсказания на основе наименьших квадратов эквивалентен методу Юла — Уолкера для оценивания авторегрессионных параметров, в котором используются смещенные автокорреляционные оценки. Применяемая в автокорреляционном методе обработка данных с помощью окна ухудшает разрешение по сравнению с другими рассматриваемыми здесь методами спектрального оценивания на основе линейного предсказания (см., например, рис. 8.2). Поэтому автокорреляционный метод редко применяется на практике в случае коротких записей данных, так как другие методы наименьших квадратов дают более качественные результаты.

Соотношение между ошибками линейного предсказания вперед и коэффициентами линейного предсказания для *ковариационного* (т. е. без взвешивания) метода можно в краткой форме записать в следующем виде:

$$\mathbf{e}_p^f=\mathbf{T}_p\begin{pmatrix}1\\ \mathbf{a}_p^f\end{pmatrix}, \tag{8.30}$$

где тёплицева $N\times(p+1)$-матрица данных $\mathbf{T}_p$ определена в (8.22), p-элементный вектор коэффициентов линейного предсказания $\mathbf{a}_p{}^f$ определен в (8.25), а $(N-p)$-элементный вектор ошибок $\mathbf{e}_p{}^f$ имеет теперь следующую структуру:

$$\mathbf{e}_p^f=\begin{pmatrix}e_p^f[p+1]\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ e_p^f[N]\end{pmatrix}. \tag{8.31}$$

И здесь в соответствии с (3.67) нормальные уравнения, минимизирующие средний квадрат ошибки

$$\rho_p^f=\sum_{n=p+1}^{N}|e_p^f[n]|^2=(\mathbf{e}_p^f)^H\mathbf{e}_p^f \tag{8.32}$$

порядка p, имеют следующий вид:

$$\mathbf{T}_p^H\mathbf{T}_p\begin{pmatrix}1\\ \mathbf{a}_p^f\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\rho_p^f\\ \mathbf{0}_p\end{pmatrix}. \tag{8.33}$$

Элементы эрмитовой $(p+1)\times(p+1)$-матрицы $\mathbf{R}_p=\mathbf{T}_p{}^H\mathbf{T}_p$ имеют вид корреляционных форм

$$r_p[i,\ j]=\sum_{n=p+1}^{N}x^*[n-i]\,x[n-j], \tag{8.34}$$

где $0 \leqslant i, j \leqslant p$. Элементы матрицы $\mathbf{R}_p$ в ковариационном методе не могут быть записаны как функции разности $(i-j)$, а это означает, что произведение $\mathbf{T}_p{}^H\mathbf{T}_p$ не является тёплицевой матрицей. Однако тот факт, что матрица $\mathbf{R}_p$ является произведением тёплицевых матриц, все же обеспечивает возможность построения быстрого алгоритма, аналогичного алгоритму Левинсона. Следовательно, решение нормальных уравнений (8.33) в случае ковариационного метода может быть получено с помощью некоторого алгоритма, вычислительная сложность которого пропорциональна p^2 операциям, а не p^3 операциям, которые потребовались бы при использовании алгоритма Холецкого. Соответствующий быстрый алгоритм и программа его машинной реализации COVAR приведены в приложении 8.В. Заметим также, что необходимым, но недостаточным условием того, чтобы матрица $\mathbf{R}_p$ была невырожденной, является условие $N-p \geqslant p$ или $p \leqslant N/2$. Отсюда следует, что выбранный порядок модели не должен превышать половины длины записи данных. К ковариационному методу мы еще вернемся в гл. 11 как к составной части метода Прони. Можно показать (см. Кей [28]), что в случае гауссовских процессов ковариационный метод дает для АР-параметров оценку, приближающуюся к оценке максимального правдоподобия.

Используя тот же подход, который был использован нами для взвешенного и невзвешенного случаев, нетрудно показать, что в *предвзвешенном* случае матрицу нормальных уравнений $\mathbf{R}_p$ можно записать в виде следующего матричного произведения:

$$\mathbf{R}_p = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_p \\ \mathbf{T}_p \end{pmatrix}^H \begin{pmatrix} \mathbf{L}_p \\ \mathbf{T}_p \end{pmatrix} = \mathbf{L}_p^H\mathbf{L}_p + \mathbf{T}_p^H\mathbf{T}_p = \mathbf{X}_p^H\mathbf{X}_p - \mathbf{U}_p^H\mathbf{U}_p, \qquad (8.35)$$

элементы которого имеют форму

$$r_p[i, j] = \sum_{n=1}^{N} x^*[n-i]\, x[n-j], \qquad (8.36)$$

где $0 \leqslant i, j \leqslant p$. Метод предвзвешивания целесообразно использовать в процедурах линейного предсказания по методу наименьших квадратов, основанных на последовательной обработке данных. Поэтому более подробно он будет рассмотрен в гл. 9.

Случаи взвешивания (автокорреляционный метод), отсутствия взвешивания (ковариационный метод) и предвзвешивания могут быть также рассмотрены и применительно к оценке линейного предсказания *назад*

$$\hat{x}^b[k] = -\sum_{k=1}^{p} a_p^b[k]\, x[k+p], \qquad (8.37)$$

где $a_p{}^b[k]$ — коэффициенты линейного предсказания назад по-

рядка p. Предсказание «назад» понимается здесь в том смысле, что результат предсказания для текущего отсчета данных является взвешенной суммой p последующих отсчетов. Для конечного набора отсчетов данных параметры линейного предсказания назад, определяемые по методу наименьших квадратов, в общем случае не идентичны параметрам линейного предсказания вперед. Ошибка линейного предсказания назад определяется выражением

$$e_p^b[n] = x[n-p] - \hat{x}^b[n-p] = \\ = x[n-p] + \sum_{k=1}^{p} a_p^b[k]\, x[n-p+k]. \tag{8.38}$$

Если предположить, что $x[n]=0$ при $n<0$ и $n>N$, то составляющие ошибки линейного предсказания назад можно в краткой форме записать в виде следующего матрично-векторного произведения

$$\mathbf{e}_p^b = \mathbf{X}_p \begin{pmatrix} \mathbf{a}_p^b \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{8.39}$$

где вектор ошибки линейного предсказания назад $\mathbf{e}_p{}^b$ и вектор коэффициентов линейного предсказания назад $\mathbf{a}_p{}^b$ определяются выражениями

$$\mathbf{e}_p^b = \begin{pmatrix} e_p^b[N+p] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_p^b[1] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_p^b = \begin{pmatrix} a_p^b[p] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_p^b[1] \end{pmatrix}, \tag{8.40}$$

а $\mathbf{X}_p$ — это, по-прежнему, тёплицева матрица данных, которая была определена выше выражением (8.21).

Средний квадрат ошибки линейного предсказания назад определяется выражением

$$\rho_p^b = \sum_n |e_p^b[n]|^2. \tag{8.41}$$

Суммирование здесь выполняется в диапазоне от 1 до $N+p$ во взвешенном случае (автокорреляционный метод), от $p+1$ до N в невзвешенном случае (ковариационный метод) и от 1 до N в случае предвзвешивания. С помощью того же подхода, который был использован нами для линейного предсказания вперед, можно показать, что во всех этих случаях нормальные уравнения для линейного предсказания назад будут иметь форму

$$\mathbf{R}_p \begin{pmatrix} \mathbf{a}_p^b \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_p \\ \rho_p^b \end{pmatrix}, \tag{8.42}$$

где матрица $\mathbf{R}_p$ равна $\mathbf{X}_p^H\mathbf{X}_p$ для взвешенного случая, $\mathbf{T}_p^H\mathbf{T}_p$ для невзвешенного случая и определяется выражением (8.35) в случае предвзвешивания. Решения «прямых» и «обратных» нормальных уравнений взаимосвязаны, так как в обоих случаях эти уравнения содержат одну и ту же матрицу $\mathbf{R}_p$. Поэтому быстрые алгоритмы для ковариационного и предвзвешенного методов будут одновременно решать нормальные уравнения относительно коэффициентов линейного предсказания вперед и назад при всех промежуточных значениях порядка модели, а, следовательно, оба набора коэффициентов получаются здесь без дополнительных вычислительных затрат.

Следует заметить, что коэффициенты линейного предсказания вперед и назад, определяемые с помощью ковариационного метода, не гарантируют получение устойчивого фильтра. Однако это, вообще говоря, не приводит к каким-либо затруднениям, если их значения используются только для целей спектрального оценивания. В действительности спектральные оценки, получаемые по оценкам авторегрессионных коэффициентов, определяемых с помощью ковариационного метода, обычно имеют меньшие искажения [33, 40], чем спектральные оценки, получаемые с помощью методов, гарантирующих устойчивость фильтра линейного предсказания, например с помощью автокорреляционного метода. Однако если такой фильтр синтезируется для каких-либо других целей, то вопрос об его устойчивости приобретает, естественно, важное значение.

Один из вариантов ковариационного метода был предложен Никиасом и Скоттом [39]. В их методе коэффициенты линейного предсказания вперед и назад выбираются на основе взвешенных квадратов ошибок

$$\rho_p^f = \sum_{n=p+1}^{N} w_p[n]\,|e_p^f[n]|^2, \quad \rho_p^b = \sum_{n=p+1}^{N} w_p[n]\,|e_p^b[n]|^2, \qquad (8.43)$$

где веса характеризуют энергию отсчетов данных, используемых для формирования ошибок предсказания в пределах окна

$$w_p[n] = \sum_{k=n-p+1}^{n} |x[k]|^2.$$

Быстрые алгоритмы для ковариационного метода с весами общего вида пока не получены, поэтому должны использоваться обычные программы решения матричных уравнений, а это означает, что вычислительные затраты, необходимые для решения соответствующих нормальных уравнений, будут в данном случае пропорциональны величине p^3.

8.5.2. Комбинированные алгоритмы линейного предсказания вперед и назад

В гл. 7 было показано, что для стационарного случайного процесса авторегрессионные коэффициенты линейного предсказания вперед и назад представляют собой комплексно-сопряженные величины, поэтому ошибку линейного предсказания назад можно записать в следующем виде:

$$e_p^b[n] = x[n-p] + \sum_{k=1}^{p} a_p^{f*}[k]\, x[n-p+k]. \qquad (8.44)$$

Поскольку оба направления предсказания обеспечивают получение одинаковой статистической информации, представляется целесообразным объединить статистики ошибок линейного предсказания вперед и назад, с тем чтобы получить большее число точек, в которых определяются ошибки. Суммарный результат такой процедуры должен улучшать оценку авторегрессионных параметров. В невзвешенном случае $(N-p)$ ошибок линейного предсказания вперед и $(N-p)$ ошибок линейного предсказания назад можно в краткой форме записать в виде следующего матрично-векторного произведения:

$$\mathbf{e}_p = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_p^f \\ \mathbf{e}_p^{b*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_p \\ \mathbf{T}_p^* \mathbf{J} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{a}_p^{fb} \end{pmatrix}. \qquad (8.45)$$

Вектор ошибки $\mathbf{e}_p$ имеет $2(N-p)$ элементов и образован из $(N-p)$-элементного вектора ошибки линейного предсказания $\mathbf{e}_p{}^f$ и $(N-p)$-элементного вектора ошибки линейного предсказания назад $\mathbf{e}_p{}^b$, которые определяются следующими выражениями:

$$\mathbf{e}_p^f = \begin{pmatrix} e_p^f[p+1] \\ \vdots \\ e_p^f[N] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_p^b = \begin{pmatrix} e_p^b[p+1] \\ \vdots \\ e_p^b[N] \end{pmatrix}.$$

Вектор коэффициентов линейного предсказания $\mathbf{a}_p{}^{fb}$ в (8.45) определяется выражением

$$\mathbf{a}_p^{fb} = \begin{pmatrix} a_p[1] \\ \vdots \\ a_p[p] \end{pmatrix}.$$

а $(N-p)\times(p+1)$-матрица данных $\mathbf{T}_p$ — выражением (8.22).

Так как $\mathbf{J}$ — это $(p+1)\times(p+1)$- матрица отражения, то произведение

$$\mathbf{T}_p^*\mathbf{J}=\begin{pmatrix} x^*[1] & \dots & x^*[p+1] \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x^*[p+1] & \dots & x^*[N-p] \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x^*[N-p] & \dots & x^*[N] \end{pmatrix}$$

представляет собой ганкелеву матрицу с элементами, комплексно-сопряженными отсчетам данных. Отметим, что верхний индекс f у коэффициентов линейного предсказания $a_p[k]$ опущен, поскольку они теперь соответствуют как ошибкам предсказания вперед, так и ошибкам предсказания назад.

Минимизируя среднее значение квадратов ошибок предсказания вперед и назад

$$\rho_p^{fb}=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=p+1}^{N}|e_p^f[n]|^2+\sum_{n=p+1}^{N}|e_p^b[n]|^2\right]=\frac{1}{2}\mathbf{e}_p^H\mathbf{e}_p=$$
$$=\frac{1}{2}[(\mathbf{e}_p^f)^H\mathbf{e}_p^f+(\mathbf{e}_p^b)^H\mathbf{e}_p^b] \qquad (8.46)$$

по имеющимся данным, получаем систему нормальных уравнений

$$\mathbf{R}_p\mathbf{a}_p^{fb}=\begin{pmatrix}2\rho_p^{fb}\\ \mathbf{0}_p\end{pmatrix}, \qquad (8.47)$$

в которых

$$\mathbf{R}_p=\begin{pmatrix}\mathbf{T}_p\\ \mathbf{T}_p^*\mathbf{J}\end{pmatrix}^H\begin{pmatrix}\mathbf{T}_p\\ \mathbf{T}_p^*\mathbf{J}\end{pmatrix}=\mathbf{T}_p^H\mathbf{T}_p+\mathbf{J}\mathbf{T}_p^T\mathbf{T}_p^*\mathbf{J} \qquad (8.48)$$

и $\mathbf{0}_p$ — p-элементный нуль-вектор. Уравнение (8.47) следует непосредственно из уравнения (3.67), поскольку уравнение ошибки (8.45) имеет ту же форму, что и уравнение (3.62). Элементы матрицы $\mathbf{R}_p$ имеют форму

$$r_p[i,j]=\sum_{n=p+1}^{N}(x^*[n-i]\,x[n-j]+x[n-p+i]\,x^*[n-p+j]), \qquad (8.49)$$

где $0\leqslant j,\ k\leqslant p$. Так как диапазон суммирования квадратов ошибок в (8.46) идентичен диапазону суммирования в ковариа-

ционном методе, то процедура, основанная на совместном использовании ошибок линейного предсказания вперед и назад по методу наименьших квадратов, получила название *модифицированного ковариационного метода*. Этот метод был независимо разработан Бергом [9], Ульрихом и Клейтоном [51] и Наттоллом [40]. Ульрих и Клейтон назвали его методом *наименьших квадратов*, хотя это и не единственный метод наименьших квадратов, используемый для линейного предсказания при спектральном оценивании. Отметим, что в выражении (8.46) могут использоваться и другие пределы суммирования, однако мы не будем рассматривать подобные случаи, поскольку характеристики получаемых в них оценок, как правило, не превосходят характеристик оценок, получаемых с помощью модифицированного ковариационного метода.

Модифицированный ковариационный метод и гармонический метод Берга основаны на минимизации средних квадратов ошибок линейного предсказания вперед и назад. В первом из них минимизация выполняется по всем коэффициентам предсказания, во втором же выполняется условная (т. е. с наложенным ограничением) минимизация только по одному коэффициенту предсказания $a_p[p]$ (т. е. по коэффициенту отражения k_p). При использовании метода Берга возникает ряд проблем, включая расщепление спектральных линий и смещение частотных оценок, которые устраняются при использовании модифицированного ковариационного метода. А это означает, что причина их появления, по-видимому, связана с ограничением, которое в методе Берга используется при минимизации.

Количество вычислительных операций, требуемое для прямого решения уравнения (8.47) с помощью алгоритма Холецкого, пропорционально величине p^3, а объем необходимой при этом памяти пропорционален величине p^2. Однако матрица $\mathbf{R}_p$ в уравнении (8.48) обладает столь хорошей структурой, включая центральную симметрию, что можно попытаться использовать ее для построения быстрого алгоритма решения уравнения (8.47). Подробный вывод такого быстрого алгоритма и машинная программа его реализации MODCOVAR приведены в приложении 8.Г. Для модели p-го порядка и N отсчетов данных этот алгоритм требует $Np+6p^2$ вычислительных операций (сложений и умножений) и памяти объемом $N+4p$, что сравнимо с вычислительной сложностью алгоритма Берга. Однако вычислительная эффективность модифицированного ковариационного алгоритма будет выше, чем у алгоритма Берга, в том случае, когда $p \ll N$ и в обоих алгоритмах используется один и тот же порядок модели. Отметим также, что необходимым, но недостаточным условием невырожденности матрицы $\mathbf{R}_p$ является условие $2(N-p) \geqslant p$ или $p \leqslant 2N/3$. Отсюда следует, что значение

выбранного порядка модели не должно превышать двух третей длины записи данных.

В отличие от метода Берга, модифицированный ковариационный метод не гарантирует получение устойчивого фильтра линейного предсказания (т. е. фильтра, полюсы которого расположены внутри единичной окружности в z-плоскости), хотя чаще всего он будет давать именно устойчивые полюсы. В случае спектрального оценивания это не приводит к каким-либо затруднениям, но обязательно должно учитываться в том случае, когда вычисляемые коэффициенты действительно используются для синтеза фильтра. В приложении 8.Г показано, что модифицированный ковариационный метод всегда дает коэффициенты отражения, модуль которых не превосходит единицы. Следовательно, при использовании значений коэффициентов отражения, вычисляемых с помощью модифицированного ковариационного метода, мы всегда будем получать устойчивые решетчатые фильтры.

8.6. Характеристики оценок

Свойства спектров, получаемых по оценкам авторегрессионных параметров, рассмотренным в этой главе, подробно исследованы в многочисленных опубликованных работах. Так как метод Берга является одним из первых и наиболее широко используемых алгоритмов, то проверке и сравнению чаще всего подвергались результаты, получаемые именно с его помощью. Появление каждой новой процедуры спектрального оценивания было, как правило, вызвано необходимостью устранить те или иные аномалии в спектральных оценках, получаемых с помощью гармонического алгоритма Берга. К такого рода аномалиям, которые будут рассмотрены ниже, относятся ложные спектральные пики, смещения частотных оценок и расщепление спектральных линий.

Если выбран большой порядок АР-модели относительно имеющегося числа отсчетов данных, то в авторегрессионных спектральных оценках могут появляться ложные пики. Из-за ошибок оценивания матрица нормальных уравнений для большинства АР-методов будет иметь полный ранг, равный большим значениям порядка моделей, так что решения для АР-параметров получаются даже тогда, когда истинная модель имеет значительно меньший порядок. Дополнительные полюсы, порождаемые лишними АР-параметрами, приводят к появлению ложных спектральных пиков. Для уменьшения числа ложных пиков следует использовать методы определения порядка модели; несколько критериев выбора порядка модели обсуждается в разд. 8.7. Следует заметить, что уменьшение порядка модели с

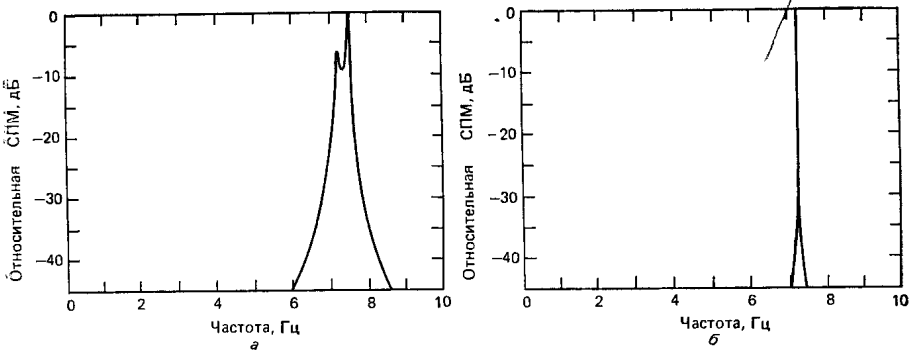


Рис. 8.3. Две спектральные АР-оценки, полученные по 101 отсчету процесса, состоящего из синусоиды с частотой 7,25 Гц и аддитивного белого шума (отношение сигнал/шум=50, частота дискретизации — 100 Гц, начальная фаза равна 45°): *а* — оценка методом Берга с расщепленной спектральной линией; *б* — оценка модифицированным ковариационным методом, расщепление спектральной линии отсутствует.

целью борьбы с ложными пиками снижает также и разрешение спектральной оценки. Из описанных в данной главе АР-методов спектрального оценивания более высокое разрешение при заданном порядке модели обеспечивают метод Берга, ковариационный метод и модифицированный ковариационный метод, о чем свидетельствует рис. 8.2. Обусловлено это главным образом отсутствием в них эффектов, связанных с применением окна. Именно по этой причине наихудшее разрешение из всех описанных здесь методов имеет автокорреляционный метод.

При использовании метода геометрического среднего, метода гармонического среднего (метода Берга) и автокорреляционного метода было замечено, что при некоторых условиях в спектральной оценке могут появляться два близко расположенных спектральных пика там, где должен присутствовать только один спектральный пик. Это явление, названное *расщеплением спектральной линии*, иллюстрирует рис. 8.3, на котором показаны спектральные оценки, полученные с помощью метода Берга и модифицированного ковариационного метода. Оба спектра на этом рисунке построены по 25 значениям оценок, полученным по 101 отсчету процесса, состоящего из синусоиды единичной амплитуды с начальной фазой 45° и частотой 7,25 Гц и аддитивного шума с дисперсией 0,01 (отношение сигнал/шум равно 50). Частота отсчетов равна 100 Гц. Спектральная оценка по методу Берга, показанная на рис. 8.3, *а*, имеет расщепленный пик на частоте примерно 7,25 Гц, что создает ложное представление о наличии частот двух синусоид. Спектр, полученный по тем же данным с помощью модифицированного

ковариационного метода, имеет только один пик на правильной частоте. Расщепление спектральных линий было впервые описано в статье Фужера и др. [14], где отмечается, что при использовании метода Берга расщепление спектральных линий наиболее вероятно в тех случаях, когда 1) велико отношение сигнал/шум, 2) начальные фазы синусоидальных компонент нечетно кратны углу 45°, 3) протяженность последовательности данных во времени такова, что синусоидальные компоненты имеют нечетное число четвертей периодов, и 4) процентное соотношение между числом оцениваемых АР-параметров и числом используемых для этой цели отсчетов данных относительно велико. Расщепление спектральных линий отмечалось при использовании как действительных, так и комплексных данных, причем спектры, характеризуемые расщеплением линий, как правило, содержат много ложных спектральных пиков. С увеличением длины записи данных вероятность расщепления спектральных линий быстро уменьшается. Теоретический анализ причин расщепления спектральных линий в случае автокорреляционного метода Юла — Уолкера выполнен в работе Кея и Марпла [29], где показано, что используя несмещенную оценку автокорреляции, можно ослабить или даже полностью устранить расщепление спектральных линий, свойственное этому методу. Аналогичный анализ для метода Берга выполнен Херрингом [17], который приходит к выводу, что использование в данном случае взвешенных квадратов ошибок [уравнение (8.43)] позволяет, по-видимому, снизить вероятность расщепления спектральных линий, появление которого, по всей видимости, обусловлено смещением между положительными и отрицательными спектральными компонентами действительных синусоид. Однако наилучшее средство от этого — модифицированный ковариационный метод, при использовании которого еще ни разу не отмечалось расщепления спектральных линий, особенно в тех случаях, когда применение метода Берга дает оценки с расщепленными спектральными линиями.

В работах Чженя и Стиджена [11], Ульриха и Клейтона [51] и Торвалдсена [48] отмечается, что в случае процесса, состоящего из смеси одной или двух синусоид и аддитивного белого шума, спектральные пики авторегрессионной спектральной оценки по методу Берга оказываются сдвинутыми, причем величина их сдвига зависит от начальной фазы этих синусоид. В одном из экспериментов Ульриха и Клейтона с помощью метода Берга и модифицированного ковариационного метода определялись спектральные оценки по ансамблям из 15 отсчетов процесса, состоящего из действительной синусоиды единичной амплитуды с частотой 1 Гц и аддитивного белого шума при отношении сигнал/шум, равном 10 (интервал отсчетов был ра-

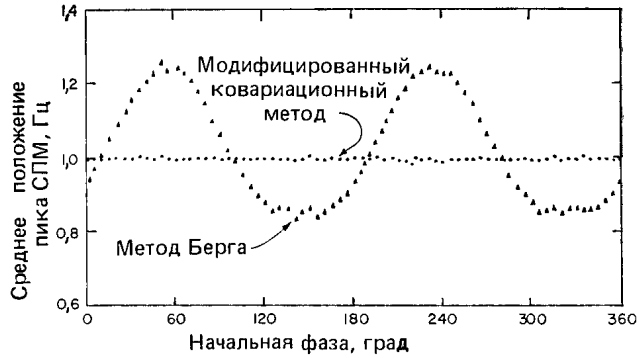


Рис. 8.4. Частотное смещение в случае двух АР-методов спектрального оценивания. На графике представлены кривые зависимости среднего по ансамблю положения спектральных пиков от начальной фазы косинусоидального сигнала в белом шуме для оценок методом Берга и модифицированным ковариационным методом; отношение сигнал/шум=10, порядок модели — 9.

вен 0,05 с). На рис. 8.4 показан график зависимости среднего положения пика этих спектральных оценок от начальной фазы синусоиды. Каждая точка на этом графике характеризует среднюю частоту спектрального пика, вычисленную по ансамблю из 50 независимых реализаций данных. Из приведенного рисунка с очевидностью следует, что в случае модифицированного ковариационного метода эта средняя частота очень слабо зависит от начальной фазы синусоиды и является точной оценкой ее частоты. В то же время метод Берга характеризуется достаточно сильным смещением частотной оценки, величина которого с изменением начальной фазы меняется примерно по синусоидальному закону. Теоретическое обоснование такого характера изменения частотного смещения дано в работах Суинглера [45, 47], где, в частности, показано, что это смещение может достигать 16% величины элемента (или ячейки) разрешения; напомним, что элемент разрешения равен $1/NT$ Герц. Он же показал [46], что использование взвешенных квадратов ошибок [таких, например, как в (8.17)] ослабляет фазовую зависимость частотных оценок по методу Берга. Эффекты, связанные с этим смещением, уменьшаются также и при использовании аналитического (т. е. комплексного) сигнала [18].

Наттолл [40], используя усреднение по ансамблю из большого числа наборов данных, тщательно проанализировал дисперсию оценок СПМ, получаемых с помощью различных АР-методов, в том числе методов, описанных в этой главе. Полученные им результаты показывают, что в случае несинусоидальных процессов из всех этих методов лишь метод Берга и модифицированный ковариационный метод дают, как правило, оценки

СПМ и частоты с минимальной дисперсией. Этот вывод подтверждается также и работой [44]. Для иллюстрации сказанного на рис. 8.5 показаны наложенные друг на друга спектральные оценки, полученные по 50 последовательностям, каждая из которых содержит 40 отсчетов следующего АР(4)-процесса:

$$x[k] = 2{,}7607x[k-1] - 3{,}8106x[k-2] + 2{,}6535x[k-3] - \\ - 0{,}9238x[k-4] + w[k],$$

где $w[k]$ — белый гауссовский шумовой процесс. Порядок модели для каждой оценки СПМ был заранее выбран равным четырем. Из рис. 8.5 можно видеть, что спектральные оценки, получаемые с помощью методов, основанных на линейном предсказании, в целом характеризуются меньшей вариабельностью склонов, но большей амплитудой выбросов вблизи частот, соответствующих истинным пикам спектра. А это означает, что методы на основе линейного предсказания дают авторегрессионные спектральные оценки с несколько меньшей дисперсией частоты, но с большей дисперсией СПМ, чем методы, основанные на оценивании коэффициента отражения. Бóльшую дисперсию СПМ можно объяснить тем фактом, что в случае методов линейного предсказания положение полюсов фильтра не ограничивается областью единичного круга, тогда как в случае методов, основанных на оценивании коэффициента отражения, этот фильтр должен быть устойчивым, т. е. его полюсы должны обязательно располагаться внутри единичной окружности. Из рис. 8.5 также следует, что наихудшую оценку спектра АР(4)-процесса дает метод Юла — Уолкера.

Если сигналы имеют большие уровни постоянных составляющих или же характеризуются заметным линейным трендом, то их авторегрессионные спектральные оценки будут искажены [20], в особенности в низкочастотной части спектра. Поэтому такие составляющие должны оцениваться и удаляться до выполнения процедуры авторегрессионного спектрального оценивания.

Хотя в этой главе основное внимание было уделено характеристикам авторегрессионных спектральных оценок для коротких последовательностей отсчетов данных, следует также кратко упомянуть и об их асимптотических статистических свойствах. Так, Сакаи [43] экспериментально показал, что в случае процесса, состоящего из синусоид и аддитивного шума, дисперсия частоты авторегрессионной спектральной оценки оказывается обратно пропорциональной длине записи данных и квадрату отношения сигнал/шум. Килер [30] представил экспериментальное доказательство того, что в случае несинусоидальных процессов дисперсия обратно пропорциональна длине записи данных и отношению сигнал/шум (а не квадрату этого

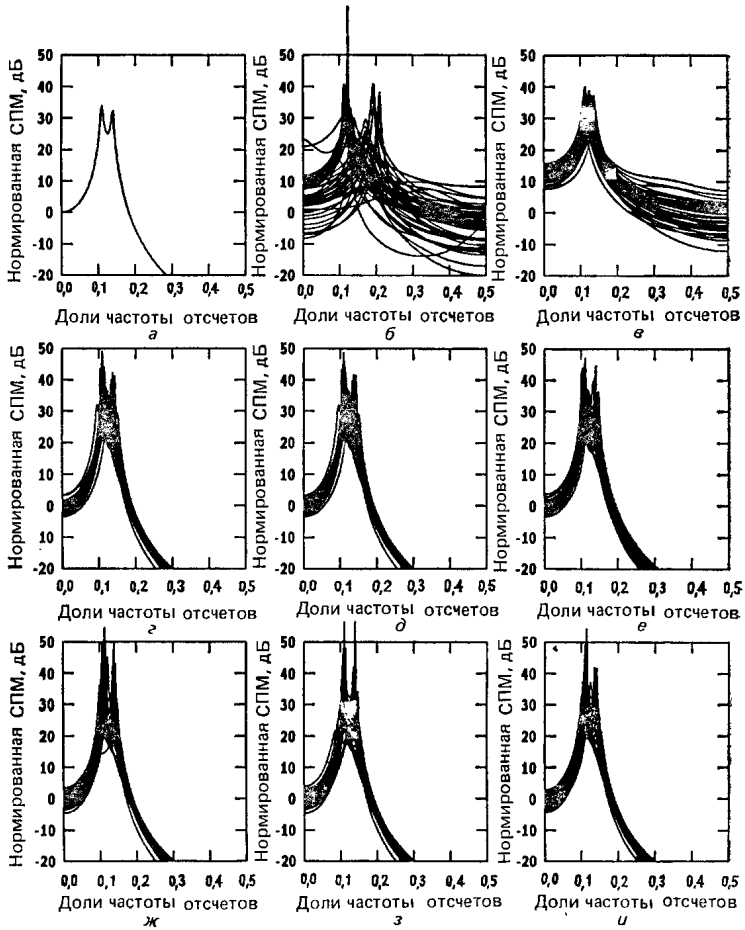


Рис. 8.5. Сравнение АР-оценок пяти типов для АР-процесса четвертого порядка. Для всех методов представлены наложенные друг на друга оценки для 50 реализаций этого процесса, содержащих 40 отсчетов каждая: *а* — истинный спектр АР(4)-процесса; *б* — несмещенные автокорреляционные оценки Юла — Уолкера; *в* — смещенные автокорреляционные оценки Юла — Уолкера; *г* — геометрический метод; *д* — метод Берга; *е* — метод Кея; *ж* — ковариационный метод, коэффициенты предсказания вперед; *з* — ковариационный метод, коэффициенты предсказания назад; *и* — модифицированный ковариационный метод.

отношения, как в случае синусоидальных процессов). Акаике [1], Кроумер [31] и Берк [7] показали, что с ростом числа отсчетов данных асимптотические характеристики АР-оценки СПМ, основанной на автокорреляционном методе, асимптотически приближаются к характеристикам гауссовского распределения вероятностей; иными словами, среднее значение АР-оценки СПМ

оказывается в пределе равным истинному среднему значению этой оценки, а ее дисперсия стремится к значению, пропорциональному величине $(4p/N)P^2_{\text{АР}}(f)$. Доверительные границы для АР-спектров были определены Баггероером [5], а дополнительные сведения, касающиеся сравнения характеристик различных оценок, можно найти в статье Кавеха и Купера [23].

8.7. Выбор порядка модели

Поскольку наилучшее значение порядка фильтра заранее, как правило, не известно, на практике обычно приходится испытывать несколько порядков модели. Базируясь на этом, вводят тот или иной критерий ошибки, по которому затем определяется требуемый порядок модели. Если порядок модели выбран слишком малым, получаются сильно сглаженные спектральные оценки, если излишне большим — увеличивается разрешение, но в оценке появляются ложные спектральные пики. Таким образом, применительно к авторегрессионному спектральному оцениванию выбор порядка модели эквивалентен компромиссу между разрешением и величиной дисперсии для классических методов спектрального оценивания. Интуитивно ясно, что следует увеличивать порядок АР-модели до тех пор, пока вычисляемая ошибка предсказания не достигнет минимума. Однако во всех обсуждаемых в данной главе процедурах оценивания дисперсия ошибки предсказания (или — в статистике — остаточная дисперсия) монотонно уменьшается с увеличением порядка модели p. Так, например, в методе Берга, модифицированном ковариационном методе и автокорреляционном методе Юла — Уолкера для вычисления ошибки по методу средних или наименьших квадратов используется выражение

$$\rho_p = \rho_{p-1}(1 - |a_p[p]|^2). \tag{8.50}$$

До тех пор, пока величина $|a_p[p]|^2$ отлична от нуля (она не должна превосходить единицы), дисперсия ошибки предсказания уменьшается. Следовательно, одной дисперсии обычно недостаточно для того, чтобы определить момент окончания процедуры изменения порядка модели, пока не известно некоторое значение этого порядка, при дальнейшем изменении которого скорость изменения дисперсии ошибки резко снижается. Еще одна простая проверка правильности выбора порядка модели основана на периодограммном анализе последовательности ошибок предсказания, или отклонений от авторегрессии, — так называемых остатков. По своим статистическим свойствам эти остатки близки к белому шуму, поэтому при таком анализе получается достаточно «плоская» оценка периодограммы.

Для выбора порядка АР-модели предложено много различных критериев — своего рода целевых функций. Два подобных критерия были предложены Акаике [1]. Первый из них — это *окончательная ошибка предсказания* (ООП). Согласно этому критерию, выбор порядка АР-процесса осуществляется таким образом, чтобы минимизировать среднюю дисперсию ошибки на каждом шаге предсказания. Акаике рассматривает ошибку предсказания как сумму мощностей в непредсказуемой части анализируемого процесса и как некоторую величину, характеризующую неточность оценивания АР-параметров. ООП для АР-процесса определяется выражением

$$\text{ОПП}[p] = \hat{\rho}_p \left(\frac{N+(p+1)}{N-(p+1)} \right), \tag{8.51}$$

где N — число отсчетов данных, p — порядок АР-процесса и $\hat{\rho}_p$ — оценочное значение дисперсии белого шума (которая будет использоваться в качестве ошибки линейного предсказания). Заметим, что в (8.51) предполагается, что из данных вычтено выборочное среднее значение. Член в круглых скобках растет с увеличением порядка, характеризуя тем самым увеличение неопределенности оценки $\hat{\rho}_p$ для дисперсии ошибки предсказания. Выбирается такое значение порядка, при котором величина ООП минимальна. Критерий на основе ООП исследовался в различных приложениях Ландерсом и Лакоссом [32], Ульрихом и Бишопом [50] и Наттоллом [40]. Для идеальных АР-процессов он обеспечивает отличные результаты, однако применительно к реальным сигналам этот критерий, как показали Джонс [19] и Берриман [8], оказывается излишне консервативным и приводит к выбору заниженного значения порядка модели.

Второй критерий Акаике основан на методике максимального правдоподобия и получил название *информационного критерия Акаике* (ИКА). Согласно этому критерию, порядок модели определяется посредством минимизации некоторой теоретико-информационной функции. Если предположить, что исследуемый АР-процесс имеет гауссовы статистики, то ИКА будет определяться следующим выражением:

$$\text{ИКА}[p] = N \ln(\hat{\rho}_p) + 2p. \tag{8.52}$$

(Вывод этого выражения дан в книге Кея [28].) Член $2p$ в (8.52) характеризует плату за использование дополнительных АР-коэффициентов, но это не приводит к значительному уменьшению дисперсии ошибки предсказания. И здесь выбирается порядок модели, который минимизирует значение ИКА. При $N \to \infty$ первый и второй критерии Акаике асимптотически экви-

валентны. Применительно к идеальным АР-процессам критерий ИКА изучался Тоном [49] и Кавехом и Бруццоне [22]. Как и в случае критерия ООП, многие исследователи отмечают, что порядок модели, выбираемый в соответствии с критерием ИКА, в случае данных, не соответствующих авторегрессионным процессам, очень часто оказывается заниженным. Кавех и Бруццоне предложили еще один вариант ИКА, который учитывает начальные условия при формулировке оценки максимального правдоподобия для АР-параметров. Отметим, что Кашьяп [21] считает ИКА статистически несостоятельным критерием в том смысле, что вероятность ошибки при выборе правильного порядка модели не стремится к нулю при $N \to \infty$, а это приводит к завышению значения порядка модели в том случае, когда длина записи данных возрастает. Для устранения этого недостатка Риссанен [42] разработал другой вариант ИКА, который имеет следующую форму:

$$\text{ДМО}[p] = N \ln(\hat{\rho}_p) + p \ln(N), \tag{8.53}$$

где ДМО — *длина минимального описания*, о которой можно сказать, что она статистически состоятельна, поскольку величина $p \ln(N)$ растет с увеличением N быстрее, чем в случае с p.

Третий метод выбора критерия предложен Парзеном [41] и получил название *авторегрессионной передаточной функции критерия* (АПФК). Порядок модели p выбирается в этом случае равным порядку, при котором оценка разности среднего квадрата ошибок между истинным фильтром предсказания ошибки (его длина может быть бесконечной) и оцениваемым фильтром минимальна. Парзен показал, что эту разность можно вычислить, даже если истинный фильтр предсказания ошибки точно не известен:

$$\text{АПФК}[p] = \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{p} \bar{\rho}_j^{-1} \right) - \bar{\rho}_p^{-1} \tag{8.54}$$

где $\bar{\rho}_j = [N/(N-j)]\hat{\rho}_j$. И здесь значение p выбирается так, чтобы минимизировать АПФК$[p]$.

Результаты оценивания спектра при использовании критериев ООП, ИКА и АПФК мало отличаются друг от друга, особенно в случае реальных данных, а не моделируемых АР-процессов. Ульрих и Клейтон [51] показали, что в случае коротких записей данных ни один из этих критериев не обеспечивает удовлетворительных результатов. Для гармонических процессов в присутствии шума использование ООП и ИКА приводит к заниженной оценке порядка модели, особенно в тех случаях, когда отношение сигнал/шум велико. Ульрих и Уи [52] экспериментально установили, что если при анализе коротких отрезков гармониче-

ских процессов с помощью ковариационного и модифицированного ковариационного методов порядок модели выбирать на интервале значений от $N/3$ до $N/2$, то во многих случаях будут получаться удовлетворительные результаты. Эти экспериментальные данные были подтверждены Лангом и Макклелланом [33], которые аналитическими средствами показали, что при использовании модифицированного ковариационного метода дисперсия положений спектральных пиков для случаев одной синусоиды или нескольких синусоид с хорошо различающимися частотами приближается к нижней границе Крамера — Рао, если порядок модели составляет примерно $^1/_3$ длины записи данных. Тем не менее окончательный выбор порядка модели для данных, получаемых из реальных записей неизвестных процессов, пока еще носит субъективный, а не точный научный характер. Поэтому критерии, описанные в этом разделе, целесообразно использовать лишь для выбора начального значения порядка модели, поскольку они обеспечивают хорошие результаты в случае искусственных АР-сигналов, синтезированных с помощью ЭВМ, а в случае действительных данных результаты их применения зависят от того, насколько точно эти данные могут моделироваться с помощью того или иного АР-процесса.

8.8. Авторегрессионные процессы с шумом наблюдения

На практике отсчеты данных очень часто искажены шумом наблюдения, что приводит к ухудшению характеристик и разрешения авторегрессионных спектральных оценок [25]. Это ухудшение обусловлено тем, что используемая при спектральном анализе модель только с одними полюсами (так называемая чистополюсная модель) при наличии шума наблюдения оказывается уже непригодной. Пусть

$$y[k] = x[k] + n[k]$$

— искаженный шумом АР-процесс, где $x[k]$ — АР(p)-процесс, а $n[k]$ — шум наблюдения. Если $n[k]$ — белый шум с дисперсией ρ_n и если он не коррелирован с $x[k]$, то

$$P_{yy}(z) = \frac{\rho_w}{A(z)\,A^*(1/z^*)} + \rho_n = \frac{[\rho_w + \rho_n A(z)\,A^*(1/z^*)]}{A(z)\,A^*(1/z^*)} = \frac{\rho\,[B(z)\,B^*(1/z^*)]}{A(z)\,A^*(1/z^*)}.$$

Отсюда следует, что z-преобразование автокорреляционной функции выходного процесса характеризуется как полюсами, так и нулями, а это означает, что $y[k]$ является АРСС(p, p)-процессом. Поэтому процессы этого типа следует анализировать с помощью методов на основе моделей авторегрессии — скользящего среднего, которые описаны ниже в гл. 10.

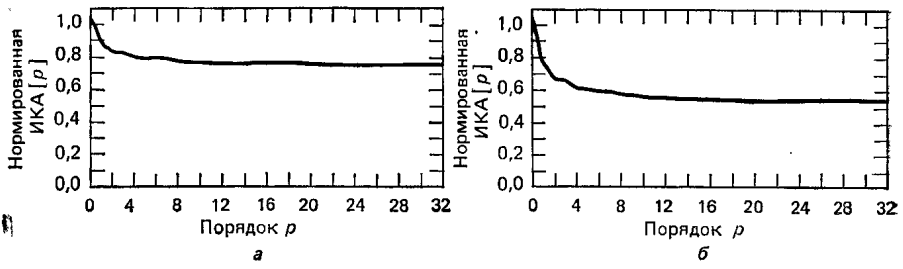


Рис. 8.6. Функция ИКА[p] фильтрованных чисел солнечных пятен, нормированная относительно значения ИКА[0]: *а* — ковариационный метод; *б* — метод Берга.

Применительно к случаю, когда шум наблюдения является белым шумом, предложен ряд схем компенсации мощности этого шума, которые позволяют уменьшить связанное с ним смещение спектральных оценок; (см., например, работы Марпла [36] и Кея [26]). Поскольку мощность шума наблюдения влияет только на член автокорреляционной последовательности, соответствующий нулевому временно́му сдвигу,

$$r_{yy}[k]=\begin{cases} r_{xx}[0]+\rho_n, & k=0; \\ r_{xx}[k], & k\neq 0, \end{cases}$$

то, удаляя из оценки автокорреляционного члена $r_{yy}[0]$ оценку дисперсии ρ_n, можно устранить эффекты, обусловленные шумом наблюдения. Ниже в гл. 13 описан метод гармонического разложения Писаренко, в котором одна из подобных схем используется для оценивания дисперсии ρ_n применительно к процессу, состоящему из смеси синусоид и белого шума. Аналогичные схемы компенсации можно разработать и для коэффициентов отражения. Следует, однако, заметить, что схемы компенсации шума, уменьшая смещение спектральных оценок, одновременно увеличивают дисперсию этих оценок. Основной их недостаток состоит в том, что заранее не известно, какую долю мощности шума следует удалить; если оценка ρ_n слишком велика, то оцененный АР-спектр будет иметь более острые спектральные пики, чем истинный спектр.

8.9. Применение к числам солнечных пятен

Для получения авторегрессионных оценок СПМ использовалась та же фильтрованная последовательность из 230 отсчетов чисел солнечных пятен, что и в разд. 5.9. Оценка порядка применяемой АР-модели производилась с помощью ИКА, определяемого выражением (8.52); кривые зависимости ИКА от порядка моде-

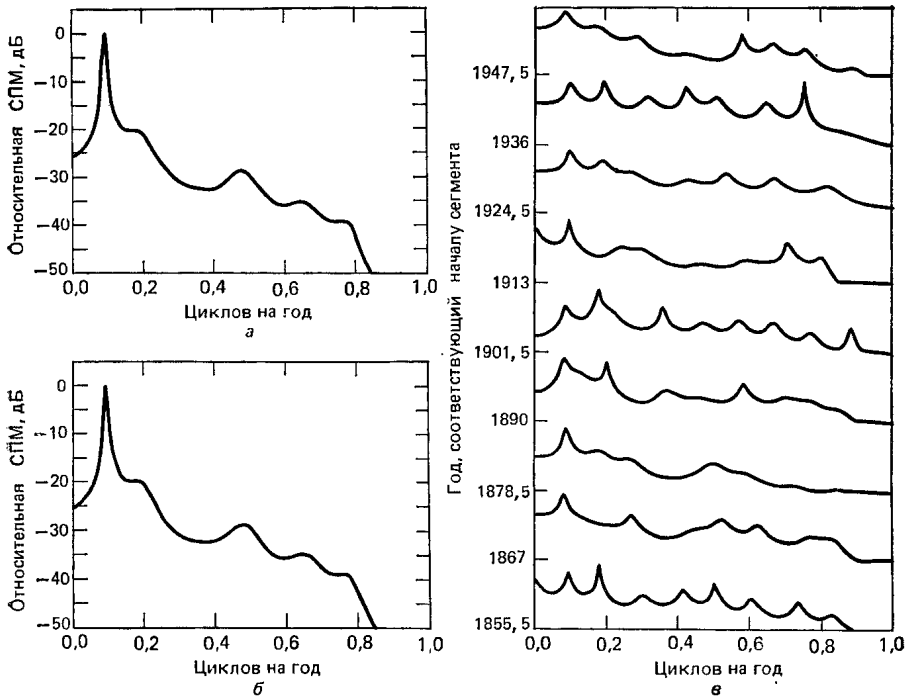


Рис. 8.7. Спектральные АР-оценки фильтрованных чисел солнечных пятен: *а* — ковариационный метод, коэффициенты предсказания вперед, $p=12$; *б* — метод Берга, $p=12$; *в* — набор из спектральных АР(18)-оценок, полученных с помощью ковариационного метода по сегментам записи числа солнечных пятен, содержащим по 46 отсчетов каждый.

ли, изменяющегося в интервале значений от 0 до 32, представлены на рис. 8.6, из которого видно, что эти кривые не имеют выраженных минимумов. Для метода Берга значение ИКА практически остается неизменным, начиная со значения порядка модели, равного примерно 12. На рис. 8.7 показаны авторегрессионные оценки СПМ, полученные с помощью ковариационного метода и метода Берга на основе АР-модели, порядок которой был равен 12. Оба спектра, по сути дела, идентичны, но степень их детальности несколько разочаровывает, что лишний раз подтверждает консервативный характер правил выбора порядка модели, подобных ИКА. На рис. 8.7, *в* показаны авторегрессионные спектральные оценки, полученные с помощью ковариационного метода на основе модели, порядок которой был равен 18. Эти оценки вычислялись по отрезкам из 46 отсчетов фильтрованных чисел солнечных пятен, начинающихся с года, указанного по оси ординат, и позволяют судить о поведении этих

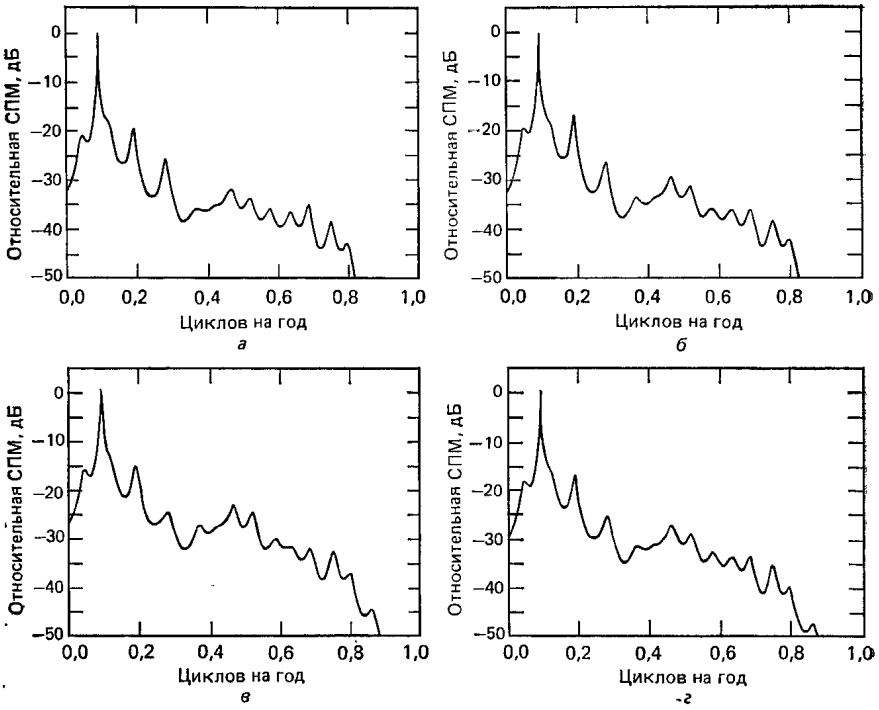


Рис. 8.8. Спектральные АР-оценки фильтрованных чисел солнечных пятен, $p=36$: *а* — ковариационный метод, коэффициенты предсказания вперед; *б* — метод Берга; *в* — ковариационный метод, коэффициенты предсказания назад; *г* — модифицированный ковариационный метод.

оценок на коротких интервалах времени. Каждой оценке на этом рисунке соответствует 50-дБ диапазон амплитуд. Вполне очевидно, что нестационарность характеристик, отмеченная для спектральных оценок, показанных на рис. 5.12, присуща также и авторегрессионным спектральным оценкам.

Если порядок модели увеличить до 36, то у авторегрессионных спектральных оценок начинают появляться более мелкие детали. На рис. 8.8 показаны четыре спектральные оценки, полученные с помощью трех методов спектрального оценивания, в том числе две оценки для ковариационного метода линейного предсказания соответственно вперед и назад. Все четыре спектральные оценки очень сходны между собой. На каждом спектре присутствует пик, соответствующий примерно 22 годам на цикл. Положения первых трех пиков, выраженные в единицах периодов, на рис. 8.8, *а* соответствуют значениям 20,90, 10,72 и 5,20 лет на цикл, на рис. 8.8, *б* — значениям 19,88, 10,67 и 5,21 лет

на цикл, на рис. 8.8, *в* — значениям 21,33, 10,56 и 5,25 лет на цикл и на рис. 8.8, *г* — значениям 20,90, 10,67 и 5,21 лет на цикл. Значения этих компонентов цикла изменения числа солнечных пятен весьма близки к оценкам, полученным Карри [12].

Литература

[1] *Akaike H.* Power Spectrum Estimation through Autoregression Model Fitting. Ann. Inst. Stat. Math., vol. 21, pp. 407—419, 1969.

[2] *Akaike H.* A new Look at the Statistical Model Identification. IEEE Trans. Autom. Control, vol. AC-19, pp. 716—723, December 1974.

[3] *Anderson N. O.* On Calculation of Filter Coefficients for Maximum Entropy Spectral Analysis. Geophysics, vol. 39, pp. 69—72, February 1974.

[4] *Anderson N. O.* Comments on the Performance of Maximum Entropy Algorithms. Proc. IEEE, vol. 66, pp. 1581—1582, November 1978. [Имеется русский перевод: *Андерсон Н. О.* Замечания о характеристиках алгоритмов максимальной энтропии. ТИИЭР, 1978, т. 66, № 11, с. 342—343.]

[5] *Baggeroer A. B.* Confidence Intervals for Regression (MEM) Spectral Estimates. IEEE Trans. Inf. Theory, vol. IT-22, pp. 534—545, September 1976.

[6] *Barrodale I., Delves L. M., Ericson R. E., Zala C. A.* Computational Experience with Marple's Algorithm for Autoregressive Spectrum Analysis. Geophysics, vol. 48, pp. 1274—1286, September 1983.

[7] *Berk K. N.* Consistent Autoregressive Spectral Estimates. Ann. Stat., vol. 2, pp. 489—502, 1974.

[8] *Berryman J. G.* Choice of Operator Length for Maximum Entropy Spectral Analysis. Geophysics, vol. 43, pp. 1384—1391, December 1978.

[9] *Burg J. P.* Maximum Entropy Spectral Analysis. Proceedings of the 37th Meeting of the Society of Exploration Geophysicists, 1967.

[10] *Burg J. P.* Maximum Entropy Spectral Analysis, Ph. D. Dissertation. Department of Geophysics, Stanford University, Stanford, Calif., May 1975.

[11] *Chen W. Y., Stegen G. R.* Experiments with Maximum Entropy Spectra of Sinusoids. J. Geophys. Res., vol. 79, pp. 3019—3022, July 1974.

[12] *Currie R.* Fine Structure in the Sunspot Spectrum — 2 to 70 Years. Astrophys. Space Sci., vol. 20, pp. 509—518, 1973.

[13] *Datta A. K.* Comments on «The Complex Form of the Maximum Entropy Method for Spectral Estimation. Proc. IEEE, vol. 65, pp. 1219—1220, August 1977. [Имеется русский перевод: *Датта А. К., Хайкин С.* Замечания к сообщению «Комплексная форма метода максимальной энтропии для оценки спектральной плотности». ТИИЭР, 1977, т. 65, № 8, с. 134—135.]

[14] *Fougere P. F., Zawalick E. J., Radoski H. R.* Spontaneous Line Splitting in Maximum Entropy Power Spectrum Analysis. Phys. Earth Planet. Inter., vol. 12, pp. 201—207, August 1976.

[15] *Haykin S., Kesler S.* The Complex Form of the Maximum Entropy Method for Spectral Estimation. Proc. IEEE, vol. 64, pp. 822—823, May 1976. [Имеется русский перевод: *Хайкин С., Кеслер С.* Комплексная форма метода максимальной энтропии для оценки спектральной плотности. ТИИЭР, 1976, т. 64, № 5, с. 313—314.]

[16] *Helme B., Nikias C. L.* Improved Spectrum Performance via a Data-Adaptive Weighted Burg Technique. IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., vol. ASSP-33, pp. 903—910, August 1985.

[17] *Herring R. W.* The Cause of Line Splitting in Burg Maximum-Entropy Spectral Analysis. IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., vol. ASSP-28, pp. 692—701, December 1980.

[18] *Jackson L. B., Tufts D. W., Soong F. K., Rao R. M.* Frequency Estimation by Linear Prediction. Proceedings of the 1978 IEEE International Confe-

rence on Acoustics, Speech, and Signal Processing, pp. 352—356, 1978.
[19] *Jones R. H.* Autoregression Order Selection. Geophysics, vol. 41, pp. 771—773, August 1976.
[20] *Kane R. P., Trivedi N. B.* Effects of Linear Trend and Mean Value on Maximum Entropy Spectral Analysis. Institute de Pesquisas Espasials, Report INPE-1568-RPE/069, San Jose dos Compos, Brasil, 1979 (available from NTIS, N79-33949).
[21] *Kashyap R. L.* Inconsistency of the AIC Rule for Estimation the Order of Autoregressive Models. IEEE Trans. Autom. Control, vol. AC-25, pp. 996—998, October 1980.
[22] *Kaveh M., Bruzzone S. P.* Order Determination for Autoregressive Spectral Estimation. Record of the 1979 Rome Air Development Center Spectral Estimation Workshop, pp. 139—145, 1979.
[23] *Kaveh M., Cooper G. R.* An Empirical Investigation of the Properties of the Autoregressive Spectral Estimator. IEEE Trans. Inf. Theory, vol. IT-22, pp. 313—323, May 1976.
[24] *Kaveh M., Lippert G. A.* An Optimum Tapered Burg Algorithm for Linear Prediction and Spectral Analysis. IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., vol. ASSP-31, pp. 438—444, April 1983.
[25] *Kay S. M.* The Effect of Noise on the Autoregressive Spectral Estimator. IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., vol. ASSP-27, pp. 478—485, October 1979.
[26] *Kay S. M.* Noise Compensation for Autoregressive Spectral Estimators. IEEE Trans. Speech Signal Process., vol. ASSP-28, pp. 292—303, June 1980.
[27] *Kay S. M.* Recursive Maximum Likelihood Estimation of Autoregressive Processes. IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., vol. ASSP-31, pp. 56—65, February 1983.
[28] *Kay S. M.* Modern Spectral Estimation. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1987.
[29] *Kay S. M., Marple S. L., Jr.* Sources of and Remedies for Spectral Line Splitting in Autoregressive Spectral Analysis. Proceedings of the 1979 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, pp. 151—154, 1979.
[30] *Keeler R. J.* Uncertainties in Adaptive Maximum Entropy Frequency Estimators. IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., vol. ASSP-26, pp. 469—471, October 1978.
[31] *Kromer R. E.* Asymptotic Properties of the Autoregressive Spectral Estimator, Ph. D. dissertation. Department of Statistics, Stanford University, Stanford, Calif., 1969.
[32] *Landers T. E., Lacoss R. T.* Some Geophysical Applications of Autoregressive Spectral Estimates. IEEE Trans. Geosci. Electron., vol. GE-15, pp. 26—32, January 1977.
[33] *Lang S. W., McClellan J. H.* Frequency Estimation with Maximum Entropy Spectral Estimators. IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., vol. ASSP-28, pp. 716—724, December 1980.
[34] *Makhoul J.* Linear Prediction: A Tutorial Review. Proc. IEEE, vol. 63, pp. 561—580, April 1975; исправление см.: vol. 64, p. 285, February 1976. [Имеется русский перевод: *Маккол Дж.* Линейное предсказание: Обзор. ТИИЭР, 1975, т. 63, № 4, с. 20—44; исправление к этой статье см.: ТИИЭР, 1976, т. 64, № 2, с. 109.]
[35] *Marple S. L., Jr.* A New Autoregressive Spectrum Analysis Algorithm. IEEE Trans. Speech Signal Process., vol. ASSP-28, pp. 441—454, August 1980.
[36] *Marple S. L., Jr.* High Resolution Autoregressive Spectrum Analysis Using Noise Power Cancellation. Proceedings of 1978 IEEE International Confe-

rence on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Tulsa, Okla., pp. 345—348, April 1978.
[37] *Marple S. L., Jr.* Efficient Least Squares FIR System Identification. IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., vol. ASSP-29, pp. 62—73, February 1981.
[38] *Morf M., Dickinson B., Kailath T., Viera A.* Efficient Solution of Covariance Equations for Linear Prediction. IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., vol. ASSP-25, pp. 429—433, October 1977.
[39] *Nikias C. L., Scott P. D.* The Covariance Least-Squares Algorithm for Spectral Estimation of Processes of Short Data Length. IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing, vol. GE-21, pp. 180—190, April 1983.
[40] *Nuttall A. H.* Spectral Analysis of a Univariate Process with Bad Data Points, via Maximum Entropy and Linear Predictive Techniques. Naval Underwater Systems Center Technical Report TR-5303, New London, Conn., March 1976.
[41] *Parzen E.* Some Recent Advances in Time Series Modeling. IEEE Trans. Autom. Control, vol. AC-19, pp. 723—730, December 1974.
[42] *Rissanen J.* A Universal Prior for the Integers and Estimation by Minimum Description Length. Ann. Stat., vol. 11, pp. 417—431, 1983.
[43] *Sakai H.* Statistical Properties of AR Spectral Analysis. IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., vol. ASSP-27, pp. 402—409, August 1979.
[44] *Shon S., Mehrorta K.* Performance Comparison of Autoregressive Estimation Methods. Proceedings of the 1984 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, pp. 14.3.1—14.3.4, 1984.
[45] *Swingler D. N.* A Comparison between Burg's Maximum Entropy Method and a Nonrecursive Technique for the Spectral Analysis of Deterministic Signals. J. Geophys. Res., vol. 84, pp. 679—685, September 1979.
[46] *Swingler D. N.* A Modified Burg Algorithm for Maximum Entropy Spectral Analysis. Proc. IEEE, vol. 67, pp. 1368—1369, September 1979. [Имеется русский перевод: *Суинглер Д. Н.* Модифицированный алгоритм Берга для спектрального анализа максимальной энтропии. ТИИЭР, 1979, т. 67, № 9, с. 223—225.]
[47] *Swingler D. N.* Frequency Errors in MEM Processing. IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., vol. ASSP-28, pp. 257—259, April 1980.
[48] *Thorvaldsen T.* A Comparison of the Least Squares Method and the Burg Method for Autoregressive Spectral Analysis. IEEE Trans. Antennas Propag., vol. AP-29, pp. 675—679, July 1981.
[49] *Tong H.* Autoregressive Model Fitting with Noisy Data by Akaike's Information Criterion. IEEE Trans. Inf. Theory, vol. IT-21, pp. 476—480, July 1975; продолжение см. также: IEEE Trans. Inf. Theory, vol. IT-23, pp. 409—410, May 1977.
[50] *Ulrych T. J., Bishop T. N.* Maximum Entropy Spectral Analysis and Autoregressive Decomposition. Rev. Geophys. Space Phys., vol. 13, pp. 183—200, February 1975.
[51] *Ulrych T. J., Clayton R. W.* Time Series Modeling and Maximum Entropy. Phys. Earth Planet Inter., vol. 12, pp. 188—200, August 1976.
[52] *Ulrich T. J., Ooe M.* Autoregressive and Mixed ARMA Models and Spectra, Chapter 3 in Nonlinear Methods of Spectral Analysis, 2nd ed., S. Haykin, ed., Springer-Verlag, New York, 1983.
[53] *Ulrich T. J., Smylie D. E., Jensen O. G., Clarke G. K. C.* Predictive Filtering and Smoothing of Short Records by Using Maximum Entropy. J. Geophys. Res., vol. 78, pp. 4959—4964, August 1973.

Задачи

1. Ввести критерий выбора порядка на основе оконечной ошибки линейного предсказания вперед в подпрограммы, указанные на рис. 8.1, прогнать в каждой из них 64-точечную тест-последовательность и отметить поря-

док, выбранный каждой из них. Как можно сравнить полученные результаты? Почему они различаются? Ввести далее критерий выбора порядка модели на основе АПФК. Какие значения порядка выбраны в этом случае?

2. Написать программу, реализующую алгоритм оценивания АР-параметров на основе геометрического среднего. В качестве модели структуры этой программы использовать подпрограмму BURG.
3. Вывести рекурсию *убывающего* порядка для алгоритма Берга; иными словами, по заданным АР-коэффициентам p-го порядка записать выражение для АР-коэффициентов $(p-1)$-го порядка.
4. Показать, каким образом в алгоритм Берга можно ввести автокорреляционную оценку. Подсказка: использовать выражение (8.3).
5. Переписать алгоритм Берга, сохранив лишь коэффициенты отражения; АР-коэффициенты не вычислять. Используя критерий ООП, определить наилучшее значение порядка, а затем с помощью рекурсии Левинсона найти АР-коэффициенты, соответствующие этому значению порядка. Показать, что эта процедура может быть выполнена в два этапа без дополнительных вычислительных затрат.
6. Доказать соотношение (8.3).
7. По заданной последовательности коэффициентов отражения отыскать рекурсию, которая дает автокорреляционную последовательность.
8. Объяснить, почему в программе реализации алгоритма Берга используется оператор DEN=P*2, а не DEN=P?
9. Доказать для ковариационного алгоритма следующие соотношения:

$$\rho_p^f = \mathbf{a}_p^H \mathbf{R}_p \mathbf{a}_p = \rho_{p-1}^{f'} (1 - a_p[p]\, b_p[p]),$$
$$\rho_p^b = \mathbf{b}_p^H \mathbf{R}_p \mathbf{b}_p = \rho_{p-1}^{b''} (1 - b[p]\, a_p[p]),$$
$$[e_p^f (p+1)]^* = -\mathbf{r}_p^H \mathbf{d}''_{p-1} + x^*(p+1),$$
$$[e_p^b (N)]^* = -\mathbf{s}_p^H \mathbf{c}'_{p-1} + x^*(N-p).$$

10. Доказать, что в ковариационном алгоритме $\nabla_p = \Delta_p^*$.
11. Показать, что в ковариационном алгоритме δ_p, $\gamma_p \to 0$ с увеличением порядка p.
12. И в алгоритме Берга, и в модифицированных ковариационных методах используется сумма квадратов ошибок линейного предсказания вперед и назад. В каком смысле алгоритм Берга является задачей наименьших квадратов с ограничением, а модифицированный ковариационный метод — задачей наименьших квадратов без ограничений?
13. Модифицировать подпрограмму COVAR таким образом, чтобы в случае обнаружения при ее исполнении ошибочного условия коэффициенты векторов **a** и **b**, которые соответствуют предшествующим значениям порядка и полагаются правильными, подавались на устройство вывода.
14. Используя выражения (8.В.6) и (8.Г.6), доказать, что матрицы $\mathbf{R}_p$ в ковариационном и модифицированном ковариационном методах положительно полуопределенны.
15. Доказать рекурсивное соотношение (8.16).
16. Записать матрицу $\mathbf{R}_p$ в выражении (8.28) через матрицы $\mathbf{T}_p$, $\mathbf{L}_p$ и $\mathbf{U}_p$.
17. Доказать, что матрица $\mathbf{R}_p$ в выражении (8.28) для автокорреляционного метода положительно полуопределенна.

Приложение 8.А. Программа алгоритма Юла — Уолкера

Эта подпрограмма предназначена для вычисления оценок авторегрессионных параметров и дисперсии белого шума с помощью метода Юла — Уолкера, описанного в разд. 8.3. С помощью

процедуры, приведенной в приложении IV, помещенном в конце книги, ее можно преобразовать для обработки действительных данных. При обработке с помощью этой подпрограммы 64-точечной тест-последовательности, приведенной в приложении II, в случае, когда N=64, IP=15 и L=1, получаются следующие значения АР-коэффициентов:

P=0,22833

A(1)=(0,277473; —0,707342);	A(9)=(0,051247; 0,158093);
A(2)=(0,336654; —0,536765);	A(10)=(0,157524; 0,075804);
A(3)=(—0,201972; —0,310083);	A(11)=(0,136989; —0,015143);
A(4)=(0,182192; —0,011275);	A(12)=(—0,007077; —0,230838);
A(5)=(—0,146188; —0,147403);	A(13)=(—0,233656; —0,046570);
A(6)=(0,002554; —0,170146);	A(14)=(—0,151503; 0,034726);
A(7)=(—0,216875; —0,044782);	A(15)=(0,018774; 0,093879).
A(8)=(—0,000398; 0,196649);	

Подпрограмма YULEWALKER (N, IP, L, X, P, A, ISTAT)

```
C
C  Предназначена для определения авторегрессионных коэффициентов с по-
C  мощью алгоритма Юла — Уолкера.
C
C  Входные параметры:
C    N       — число отсчетов данных (целое число).
C    IP      — порядок используемого авторегрессионного процесса (целое
C              число).
C    L       — параметр, значение которого устанавливается равным 0 для
C              несмещенных автокорреляционных оценок и равным 1 для
C              смещенных.
C    X       — массив значений комплексных данных от X(1) до X(N).
C  Выходные параметры:
C
C    P       — дисперсия возбуждающего шума (действительная вели-
C              чина).
C    A       — массив комплексных авторегрессионных коэффициентов от
C              A(1) до A(IP).
C    ISTAT   — Указатель состояния. Устанавливается в 0 при нормальном
C              выходе из программы или в 1, если алгоритм LEVINSON
C              оказывается численно плохо обусловленным.
C
C  Примечание:
C
C    Размеры .GE. N внешнего массива X и размеры .GE. IP массива A указы-
C    ваются в вызывающей программе. Размеры внутреннего массива R указы-
C    ваются в .GE. IP. Используются внешние подпрограммы CORRELATION
C    (приложение 5.A) и LEVINSON (приложение 3.B).
C
      COMPLEX X(1),A(1),R0,R(100)
      CALL CORRELATION (N,IP,L,X,X,R0,R)
      RZERO=REAL(R0)
      CALL LEVINSON (IP,RZERO,R,P,A,ISTAT)
      RETURN
      END
```

Приложение 8.Б.
Программа реализации алгоритма Берга (гармонического)

Алгоритм Берга описан в подразд. 8.4.2 и предназначен для вычисления оценок АР-параметров и дисперсии белого шума. Программа этого алгоритма, написанная на Фортране, аннотируется ссылками на номера формул в тексте данной главы, с тем чтобы читатель мог следить за логикой построения программы. При обработке с помощью этой программы 64-точечной тест-последовательности, приведенной в приложении II, при N=64 и IP= =15 получаем следующие значения АР-параметров:

P=0,00542;

A(1)=(2,711213; —0,776930);	A(9)=(—4,678243; —15,089474);
A(2)=(5,179286; —2,737600);	A(10)=(—6,255747; —11,272636);
A(3)=(7,041883; —6,163119);	A(11)=(—6,311070; —6,947133);
A(4)=(7,899391; —10,228625);	A(12)=(—4,916976; —3,253044);
A(5)=(6,848681; —14,106740);	A(13)=(—3,009425; —0,872889);
A(6)=(4,561341; —16,882746);	A(14)=(—1,326651; 0,046931);
A(7)=(1,310846; —18,172159);	A(15)=(—0,356762; 0,148375).
A(8)=(—1,901579; —17,536158);	

```
      Подпрограмма BURG (N,IP,X,P,A,ISTAT)
C
C     Предназначена для оценки комплексных авторегрессионных параметров
C     с помощью алгоритма Берга.
C
C     Входные параметры:
C
C       N      — число отсчетов данных (целое число).
C       IP     — порядок авторегрессионного процесса (целое число).
C       X      — массив значений комплексных данных от X(1) до X(N).
C
C     Выходные параметры:
C
C       P      — действительная переменная, представляющая дисперсию воз-
C                буждающего шума.
C       A      — массив комплексных авторегрессионных коэффициентов от
C                A(1) до A(IP).
C       ISTAT  — целочисленный указатель состояния в момент выхода из
C                программы:
C                0 при нормальном выходе,
C                1 при плохой численной обусловленности (P<0).
C
C     Примечание:
C
C       Размеры .GE. N внешнего массива X и размеры .GE. IP массива A
C       должны указываться в вызывающей программе. Размеры внутренних
C       массивов EF и EB должны указываться в .GE. N.

      COMPLEX X(1),A(1),EF(300),EB(300),NUM,SAVE1,SAVE2
      REAL P, DEN,TEMP
C
C     Инициализация
C
```

```
      ISTAT=0
      P=0.
      DO 10 J=1,N
10       P=P+REAL(X(J))**2+AIMAG(X(J))**2  !  (8.12)
      DEN=P*2.
      P=P/N
      IF (IP .EQ. 0) RETURN
      DO 20 J=1,N
         EF(J)=X(J)
20       EB(J)=X(J)                        !  (8.11)
      TEMP=1.
      K=0
C
C     Главная рекурсия
C
100   K=K+1
      NUM=(0.,0.)
      DO 30 J=K+1,N
30       NUM=NUM+EF(J)*CONJG(EB(J-1))
      DEN=TEMP*DEN-REAL(EF(K))**2-AIMAG(EF(K))**2
     *       -REAL(EB(N))**2-AIMAG(EB(N))**2!  (8.16)
      SAVE1=-2.*NUM/DEN                    !  (8.14)
      TEMP=1.-REAL(SAVE1)**2-AIMAG(SAVE1)**2
      P=P*TEMP                             !  (8.4)
      IF (TEMP .GT. 0.) GO TO 40
      ISTAT=1
      RETURN
40    A(K)=SAVE1
      IF (K .EQ. 1) GO TO 60
      KHALF=K/2
      DO 50 J=1,KHALF
         KJ=K-J
         SAVE2=A(J)
         A(J)=SAVE2+SAVE1*CONJG(A(KJ))     !  (8.2)
         IF (J .EQ. KJ) GO TO 50
         A(KJ)=A(KJ)+SAVE1*CONJG(SAVE2)    !  (8.2)
50       CONTINUE
60    IF (K .EQ. IP) RETURN
      DO 70 J=N,K+1,-1
         SAVE2=EF(J)
         EF(J)=SAVE2+SAVE1*EB(J-1)         !  (8.7)
70       EB(J)=EB(J-1)+CONJG(SAVE1)*SAVE2
      GO TO 100
      END
```

Приложение 8.В. Быстрый алгоритм и программа решения ковариационных уравнений линейного предсказания

8.В.1. Введение

Первый быстрый алгоритм для решения ковариационных нормальных уравнений был разработан в 1977 г. Морфом и др. [38] и впоследствии упрощен в вычислительном отношении Марплом

[37]. В варианте, который описан ниже, учтены также и дальнейшие совершенствования этого алгоритма. Так как алгоритм имеет рекурсивную структуру, он вычисляет решения наименьших квадратов для ковариационных нормальных уравнений всех более низких порядков, однако приведенная здесь программа не сохраняет эти промежуточные решения, хотя, конечно, ее нетрудно для этой цели модифицировать.

Ошибки линейного предсказания вперед и назад p-го порядка можно представить в форме внутреннего (или скалярного) произведения векторов

$$e_p^f[n] = \mathbf{x}_p^T[n]\,\mathbf{a}_p^f; \tag{8.B.1}$$

$$e_p^b[n] = \mathbf{x}_p^T[n]\,\mathbf{a}_p^b, \tag{8.B.2}$$

где вектор данных $\mathbf{x}_p[n]$, вектор коэффициентов линейного предсказания вперед $\mathbf{a}_p{}^f$ и вектор коэффициентов линейного предсказания назад $\mathbf{a}_p{}^b$ определяются следующими выражениями:

$$\mathbf{x}_p[n] = \begin{pmatrix} x[n] \\ x[n-1] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x[n-p] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_p^f = \begin{pmatrix} 1 \\ a_p^f[1] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_p^f[p] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_p^b = \begin{pmatrix} a_p^b[p] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_p^b[1] \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{8.B.3}$$

Заметим, что векторы $\mathbf{a}_p{}^f$ и $\mathbf{a}_p{}^b$ содержат теперь элемент, равный единице, что отличает их от векторов, определенных выражениями (8.25) и (8.40). На основе отсчетов измеренных комплексных данных $x[1], \ldots, x[N]$ ковариационный метод линейного предсказания позволяет *раздельно* минимизировать суммы квадратов ошибок линейного предсказания вперед и назад:

$$\rho_p^f = \sum_{n=p+1}^{N} |e_p^f[n]|^2, \quad \rho_p^b = \sum_{n=p+1}^{N} |e_p^b[n]|^2, \tag{8.B.4}$$

что приводит к следующим нормальным уравнениям:

$$\mathbf{R}_p\mathbf{a}_p^f = \begin{pmatrix} \rho_p^f \\ \mathbf{0}_p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_p\mathbf{a}_p^b = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_p \\ \rho_p^b \end{pmatrix}, \tag{8.B.5}$$

где $\mathbf{0}_p$ — $(p\times 1)$-нуль-вектор. В отличие от алгоритма Левинсона, теперь в общем случае $\mathbf{a}_p{}^f \neq \mathbf{a}_p{}^{b*}$. Внешнее произведение вектора, определяющее матрицу $\mathbf{R}_p$ эквивалентно выражению (8.33) и имеет вид

$$\mathbf{R}_p = \sum_{n=p+1}^{N} \mathbf{x}_p^*[n]\,\mathbf{x}_p^T[n]. \tag{8.B.6}$$

Если член $e[1]$ ошибки не используется, нормальные уравнения, которые получаются при рассмотрении последовательности данных $x[2], \ldots, x[N]$, будут иметь форму

$$\mathbf{R}'_p \mathbf{a}_p^{f'} = \begin{pmatrix} \rho_p^{f'} \\ \mathbf{0}_p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}'_p \mathbf{a}_p^{b'} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_p \\ \rho_p^{b'} \end{pmatrix}, \tag{8.B.7}$$

где штрих означает, что эти уравнения соответствуют случаю «укороченной» последовательности данных. В этом случае

$$\mathbf{R}'_p = \sum_{n=p+2}^{N} \mathbf{x}_p^*[n]\, \mathbf{x}_p^T[n]. \tag{8.B.8}$$

Аналогичным образом, если исключается член $e[N]$ ошибки, нормальные уравнения, получаемые по последовательности данных $x[1], \ldots, x[N-1]$, будут иметь форму

$$\mathbf{R}''_p \mathbf{a}_p^{f''} = \begin{pmatrix} \rho_p^{f''} \\ \mathbf{0}_p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}''_p \mathbf{a}_p^{b''} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_p \\ \rho_p^{b''} \end{pmatrix}, \tag{8.B.9}$$

где двойной штрих означает, что решения этих уравнений соответствуют другому случаю укороченной последовательности данных; для него

$$\mathbf{R}''_p = \sum_{n=p+1}^{N-1} \mathbf{x}_p^*[n]\, \mathbf{x}_p^T[n]. \tag{8.B.10}$$

8.B.2. Специальные разложения и вспомогательные параметры

Для разработки быстрого алгоритма важными являются следующие разложения $(p+1)\times(p+1)$-матрицы по индексу порядка p:

$$\mathbf{R}_p = \begin{pmatrix} r_p[0,\,0] & \mathbf{s}_p^H \\ \mathbf{s}_p & \mathbf{R}''_{p-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_p = \begin{pmatrix} \mathbf{R}'_{p-1} & \mathbf{r}_p \\ \mathbf{r}_p^H & r_p[p,\,p] \end{pmatrix}, \tag{8.B.11}$$

где p-вектор-столбцы $\mathbf{r}_p$ и $\mathbf{s}_p$ даются выражениями

$$\mathbf{s}_p = \begin{pmatrix} r_p[1,\,0] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ r_p[p,\,0] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_p = \begin{pmatrix} r_p[0,\,p] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ r_p[p-1,\,p] \end{pmatrix}. \tag{8.B.12}$$

Разложения (8.B.11) весьма сходны с разложениями (3.124) тёплицевой матрицы, которые были даны в гл. 3.

Важными также являются следующие разложения матрицы $\mathbf{R}_p$ по временно́му индексу:

$$\mathbf{R}'_p = \mathbf{R}_p - \mathbf{x}^*[p+1]\, \mathbf{x}_p^T[p+1], \tag{8.B.13}$$

$$\mathbf{R}''_p = \mathbf{R}_p - \mathbf{x}_p^*[N]\, \mathbf{x}_p^T[N], \tag{8.B.14}$$

которые можно рассматривать как корректировки, необходимые для учета весьма близкой к тёплицевой структуры матрицы $\mathbf{R}_p$.

Для разработки быстрого алгоритма потребуется также пара $(p+1)$-вектор-столбцов $\mathbf{c}_p$ и $\mathbf{d}_p$. Они определяются из уравнений

$$\mathbf{R}_p\mathbf{c}_p = \mathbf{x}_p^*[N], \tag{8.B.15}$$

$$\mathbf{R}_p\mathbf{d}_p = \mathbf{x}_p^*[p+1] \tag{8.B.16}$$

и имеют следующий вид:

$$\mathbf{c}_p = \begin{pmatrix} c_p[0] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_p[p] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d}_p = \begin{pmatrix} d_p[0] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ d_p[p] \end{pmatrix}. \tag{8.B.17}$$

Аналогичные векторы $\mathbf{c}_p'$ и $\mathbf{d}_p'$, а также $\mathbf{c}_p''$ и $\mathbf{d}_p''$ можно определить соответственно для матриц $\mathbf{R}_p$ и $\mathbf{R}_p''$.

8.B.3. Рекурсии обновления порядка

Процедура, используемая для обновления порядка вектора линейного предсказания вперед, по своей структуре весьма сходна с рекурсией Левинсона. С учетом этого факта она будет осуществляться в соответствии с выражением

$$\mathbf{a}_p^f = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{p-1}^{f'} \\ 0 \end{pmatrix} + a_p^f[p] \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{a}_{p-1}^{b''} \end{pmatrix}, \tag{8.B.18}$$

где

$$a_p^f[p] = -\frac{\Delta_p}{\rho_{p-1}^{b''}}, \tag{8.B.19}$$

в котором

$$\Delta_p = \mathbf{r}_p^H \mathbf{a}_{p-1}^{f'}.$$

Для проверки правильности (8.B.18) умножим обе части этого равенства слева на матрицу $\mathbf{R}_p$ и подставим разложение соответствующего порядка из (8.B.11). В результате получим следующее рекурсивное соотношение для квадрата ошибки линейного предсказания вперед:

$$\rho_p^f = \rho_{p-1}^{f'} - \Delta_p\nabla_f/\rho_{p-1}^{b''} = \rho_{p-1}^{f'} - |\Delta_p|^2/\rho_{p-1}^{b''}, \tag{8.B.20}$$

где

$$\nabla_p = \mathbf{s}_p^H \mathbf{a}_{p-1}^{b''}.$$

Можно показать (см. выше задачу 11), что $\nabla_p = \Delta_p^*$, а это га-

рантирует, что величина, определяемая выражением (8.B.20), является действительнозначной. Процедура обновления порядка для вектора линейного предсказания назад выполняется в соответствии с выражением

$$\mathbf{a}_p^b = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{a}_{p-1}^{b\prime\prime} \end{pmatrix} + a_p^b[p] \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{p-1}^{f\prime} \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{8.B.21}$$

где

$$a_p^b[p] = -\nabla_p / \rho_{p-1}^{f\prime} = -\Delta_p^* / \rho_{p-1}^{f\prime}. \tag{8.B.22}$$

Правильность уравнения (8.B.21) можно проверить, умножая слева обе его стороны на $\mathbf{R}_p$ и подставляя далее разложения соответствующего порядка из (8.B.11). В результате получим следующее соотношение для квадрата ошибки линейного предсказания назад:

$$\rho_p^b = \rho_{p-1}^{b\prime\prime} - |\Delta_p|^2 / \rho_{p-1}^{f\prime} = \rho_{p-1}^{b\prime\prime}(1 - a_p^f[p]\, a_p^b[p]). \tag{8.B.23}$$

Векторы $\mathbf{c}_p$ и $\mathbf{d}_p$ должны удовлетворять следующим рекурсиям обновления порядка:

$$\mathbf{c}_p = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_{p-1}' \\ 0 \end{pmatrix} + c_p[p]\, \mathbf{b}_p, \tag{8.B.24}$$

$$\mathbf{d}_p = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{d}_{p-1}'' \end{pmatrix} + d_p[0]\, \mathbf{a}_p, \tag{8.B.25}$$

правильность которых также можно проверить, умножая слева обе стороны этих равенств на $\mathbf{R}_p$ и используя далее соответствующие разложения из (8.B.11) и выражения из (8.B.5). Скалярные множители $c_p[p]$ и $d_p[0]$ можно определить из следующих скалярных тождеств (в которых используется тот факт, что $\mathbf{R}_p$ является эрмитовой матрицей):

$$\mathbf{d}_p^H \mathbf{R}_p \mathbf{a}_p^f = (\mathbf{a}_p^{fH} \mathbf{R}_p \mathbf{d}_p)^* \Rightarrow d_p[0] = (e_p^f[p+1])^* / \rho_p^f, \tag{8.B.26}$$

$$\mathbf{c}_p^H \mathbf{R}_p \mathbf{a}_p^b = (\mathbf{a}_p^{bH} \mathbf{R}_p \mathbf{c}_p)^* \Rightarrow c_p[p] = (e_p^b[N])^* / \rho_p^b. \tag{8.B.27}$$

Введем скалярные множители δ_p и γ_p, определяемые выражениями

$$\delta_p = 1 - \mathbf{x}_p^T[p+1]\, \mathbf{d}_p = 1 - \mathbf{x}_p^T[p+1]\, \mathbf{R}_p^{-1} \mathbf{x}_p^*[p+1], \tag{8.B.28}$$

$$\gamma_p = 1 - \mathbf{x}_p^T[N]\, \mathbf{c}_p = 1 - \mathbf{x}_p^T[N]\, \mathbf{R}_p^{-1} \mathbf{x}_p^*[N]. \tag{8.B.29}$$

которые, согласно этим определениям, являются действительнозначными величинами. Умножим слева обе стороны равенства (8.B.24) на $\mathbf{x}_p^T[N]$ и обе стороны равенства (8.B.25) на $\mathbf{x}_p^T[p+1]$,

с тем чтобы получить выражения для обновления порядка скалярных множителей δ_p и γ_p:

$$\delta_p = \delta''_{p-1} - d_p[0]\, e^f_p[p+1] = \delta''_{p-1} - |e^f_p[p+1]|^2/\rho^f_p, \quad (8.B.30)$$

$$\gamma_p = \gamma'_{p-1} - c_p[p]\, e^b_p[N] = \gamma'_{p-1} - |e^b_p[N]|^2/\rho^b_p. \quad (8.B.31)$$

Наконец, еще одна рекурсия обновления порядка необходима для вектора $\mathbf{r}_p$:

$$\mathbf{r}_p = \begin{pmatrix} r_p[0, p] \\ \mathbf{r}_{p-1} - x[N+1-p]\mathbf{x}^*_{p-2}[N] \end{pmatrix}. \quad (8.B.32)$$

Для ее вывода следует воспользоваться определением для $r_p[i, j]$.

8.B.4. Рекурсия обновления во времени

Обновление временно́го индекса в векторе коэффициентов линейного предсказания вперед осуществляется в соответствии с выражением

$$\mathbf{a}^{f'}_p = \mathbf{a}^f_p + \frac{e^f_p[p+1]}{\delta''_{p-1}} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{d}''_{p-1} \end{pmatrix}, \quad (8.B.33)$$

правильность которого можно проверить, умножая слева обе его стороны на $\mathbf{R}'_p$ и подставляя далее соответствующие разложения по временно́му индексу (8.B.13) и индексу порядка (8.B.11). «Побочным продуктом» этой проверки является выражение для обновления временного индекса у квадрата ошибки линейного предсказания вперед:

$$\rho^{f'}_p = \rho^f_p + \frac{e^f_p[p+1]}{\delta''_{p-1}} \{\mathbf{s}^H_p \mathbf{d}''_{p-1} - x^*[p+1]\} = \rho^f_p - |e^f_p[p+1]|^2/\delta''_{p-1}. \quad (8.B.34)$$

Аналогичным образом обновление временного индекса в векторе коэффициентов линейного предсказания назад ведется в соответствии с выражением

$$\mathbf{a}^{b''}_p = \mathbf{a}^b_p + \frac{e^b_p[N]}{\gamma'_{p-1}} \begin{pmatrix} \mathbf{c}'_{p-1} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (8.B.35)$$

правильность которого можно проверить, умножая слева обе его стороны на $\mathbf{R}''_p$ и подставляя далее соответствующие разложения по временно́му индексу (8.B.14) и индексу порядка (8.B.11). Побочным продуктом этой проверки является выражение для обновления временно́го индекса у квадрата ошибки ли-

нейного предсказания назад:

$$\rho_p^{b''} = \rho_p^b + \frac{e_p^b[N]}{\gamma'_{p-1}} \{\mathbf{r}_p^H \mathbf{c}'_{p-1} - x^*[N-p]\} = \rho_p^b - |e_p^b[N]|^2/\gamma'_{p-1}. \quad (8.B.36)$$

Вспомогательные векторы $\mathbf{c}_p$ и $\mathbf{d}_p$ удовлетворяют следующим рекурсиям обновления временного индекса:

$$\mathbf{c}_p^* = \mathbf{c}_p + \left(\frac{\theta_p}{\delta_p}\right)\mathbf{d}_p, \quad (8.B.37)$$

$$\mathbf{d}_p'' = \mathbf{d}_p + \left(\frac{\theta_p^*}{\gamma_p}\right)\mathbf{c}_p, \quad (8.B.38)$$

где комплексный скаляр θ_p определяется выражением

$$\theta_p = \mathbf{x}_p^T[p+1]\,\mathbf{c}_p = \mathbf{x}_p^T[p+1]\,\mathbf{R}_p^{-1}\mathbf{x}_p^*[N] = \mathbf{d}_p^H\mathbf{x}_p^*[N]. \quad (8.B.39)$$

Правильность выражения (8.B.37) для вектора $\mathbf{c}_p$ можно проверить, умножая слева обе его части на $\mathbf{R}_p'$ и подставляя далее разложение (8.B.13); аналогичная проверка для вектора $\mathbf{d}_p$ проводится посредством умножения слева обеих сторон равенства (8.B.38) на $\mathbf{R}_p'$ с последующей подстановкой разложения (8.B.14). Соответствующие рекурсии по временному индексу для действительных скаляров δ_p и γ_p можно получить, просто формируя произведение величин $\mathbf{x}_p^T[N]\mathbf{c}_p'$ из (8.B.37) и $\mathbf{x}_p^T[p+1]\mathbf{d}_p''$ из (8.B.38), что дает

$$\delta_p'' = \delta_p - |\theta_p|^2/\gamma_p; \quad (8.B.40)$$

$$\gamma_p' = \gamma_p - |\theta_p|^2/\delta_p. \quad (8.B.41)$$

8.B.5. Начальные условия

Начальные условия необходимы для того, чтобы начать рекурсивное решение с порядка, равного нулю:

$$\begin{aligned} r_0[0,\ 0] &= \sum_{n=1}^{N} |x[n]|^2, \\ \rho_0^{b'} &= \sum_{n=2}^{N} |x[n]|^2, \\ \rho_0^{b''} &= \sum_{n=1}^{N-1} |x[n]|^2, \\ \delta_0 &= 1 - |x[1]|^2/r_0[0,\ 0], \\ \gamma_0 &= 1 - |x[N]|^2/r_0[0,\ 0], \\ c_0[0] &= x^*[N]/r_0[0,\ 0], \\ d_0[0] &= x^*[1]/r_0[0,\ 0]. \end{aligned} \quad (8.B.42)$$

Все эти выражения непосредственно следуют из соотношений, приведенных в двух предшествующих подразделах.

8.В.6. Простые проверки на плохую численную обусловленность

В описываемый алгоритм введено несколько простых процедур для проверки нормальных уравнений на плохую численную обусловленность и сингулярность. Согласно определению, квадраты ошибок предсказания ρ^f, ρ^b, $\rho^{f'}$ и $\rho^{b''}$ — положительные скалярные величины. Если в какой-то момент времени их значения становятся отрицательными, то это вызвано плохой численной обусловленностью. Если их значения оказываются равными нулю, то это говорит о сингулярности матрицы нормальных уравнений. Значения скалярных величин δ, γ, δ'' и γ' должны лежать, как показано ниже, в интервале от нуля до единицы. Если значение любого из этих скаляров выходит из этого интервала, то это свидетельствует о плохой численной обусловленности.

Для определения границ интервала изменения скалярных величин δ и γ применим лемму об обращении матрицы (3.53) к разложению матрицы $\mathbf{R}_p'$ по временному индексу (8.В.13). Имеем

$$(\mathbf{R}_p')^{-1} =$$
$$= \mathbf{R}_p^{-1} - (1 - \mathbf{x}_p^T[p+1]\,\mathbf{R}_p^{-1}\mathbf{x}_p^*[p+1])^{-1}(\mathbf{R}_p^{-1}\mathbf{x}_p^*[p+1])(\mathbf{x}_p^{T}[p+1]\,\mathbf{R}_p^{-1})$$

или

$$(\mathbf{R}_p')^{-1} = \mathbf{R}_p^{-1} - \mathbf{d}_p\mathbf{d}_p^H/\delta_p.$$

Запишем следующую квадратичную форму:

$$2\delta_p(1-\delta_p) > 0.$$

Если $\mathbf{R}_p'$ — обратимая положительно определенная матрица, то эта квадратичная форма должна быть положительной, т. е. будем иметь

$$\mathbf{x}_p^T[p+1]\,(\mathbf{R}_p')^{-1}\mathbf{x}_p^*[p+1] =$$
$$= \mathbf{x}_p^T[p+1]\,\mathbf{R}_p^{-1}\mathbf{x}_p^*[p+1] - \mathbf{x}_p^T[p+1]\,\mathbf{d}_p\mathbf{d}_p^H\mathbf{x}_p^*[p+1]/\delta_p =$$
$$= (1-\delta_p) - (1-\delta_p)^2/\delta_p = 2\delta_p(1-\delta_p).$$

Отсюда следует, что скалярная величина δ_p должна удовлетворять условию $0 < \delta_p < 1$.

8.В.7. Вычислительные затраты и требуемый объем памяти

В основном цикле выполняется $N+12m$ вычислительных операций (сложений и умножений) за проход, а, следовательно, общее число требуемых вычислительных операций зависит от значений N и m. При изменении m от 1 до M получаем $NM+6M^2$ операций (с учетом только квадратичных членов). Анализ размерностей векторов в программе показывает, что для хранения

содержимого этих векторов необходима память объемом $N+5M$. Заметим, что эта величина является линейной функцией порядка модели, а не квадратичной, как это было в случае хранения полной матрицы $\mathbf{R}_p$. В процессе выполнения алгоритма автоматически получаются все решения более низких порядков.

При обработке с помощью этого алгоритма 64-точечной тест-последовательности, приведенной в приложении II, при N=64 и IP=15 получаем следующие значения коэффициентов линейного предсказания вперед:

PF=0,00469;

AF(1)=(2,789415; —0,438349); AF(9)=(3,988581; —10,472203);
AF(2)=(5,510542; —1,506919); AF(10)=(2,054187; —8,156341);
AF(3)=(8,034858; —3,420010); AF(11)=(0,804809; —5,221524);
AF(4)=(10,026126; —5,750709); AF(12)=(0,295171; —2,585814);
AF(5)=(10,567300; —8,080594); AF(13)=(0,199536; —0,804796);
AF(6)=(9,954793; —9,989690); AF(14)=(0,146386; —0,034894);
AF(7)=(8,265129; —11,310373); AF(15)=(0,078573; 0,090202).
AF(8)=(6,184772; —11,547959);

Подпрограмма COVAR (N,IP,X,PF,AF,PB,AB,ISTAT)

```
C
C   Быстрый алгоритм, предназначенный для решения ковариационных нор-
C   мальных уравнений по методу наименьших квадратов.
C
C   Входные параметры:
C
C     N      — число отсчетов данных (целое число).
C     IP     — порядок модели линейного предсказания (целое число).
C     X      — массив отсчетов комплексных данных от X(1) до X(N).
C
C   Выходные параметры:
C
C     PF     — действительная дисперсия линейного предсказания впе-
C              ред, соответствующая порядку IP.
C     AF     — массив комплексных коэффициентов линейного предска-
C              зания вперед.
C     PB     — действительная дисперсия линейного предсказания назад,
C              соответствующая порядку IP.
C     AB     — массив комплексных коэффициентов линейного предска-
C              зания назад.
C     ISTAT  — целочисленный указатель состояния в момент выхода из
C              программы:
C              0 при нормальном выходе, если не обнаружено плохой
C              численной обусловленности,
C              1, если параметры PF и PB имеют неположительные зна-
C              чения,
C              2, если значения параметров DELTA″ и GAMMA′ не ле-
C              жат в интервале от 0 до 1,
C              3, если параметры PF′ и PB″ имеют неположительные
C              значения,
C              4, если значения параметров DELTA и GAMMA не лежат
C              в интервале от 0 до 1.
```

```
C
C     Примечание:
C
C        Размеры .GE. IP внешних массивов AF, AB и размер .GE. N массива
C        X должны указываться в вызывающей программе. Размер внутреннего
C        массива R должен указываться в .GE. IP, а размеры массивов
C        C и D — в .GE. IP+1. Элементы C(k+1) и D(k+1) в программе
C        соответствуют в тексте элементам c(k) и d(k), где k изменяется
C        от 0 до IP.
C
      COMPLEX X(1),AF(1),AB(1)
      COMPLEX   C(101),D(101),R(100),EF,EB,THETA,TEMP,SAVE,C1,C2,
     *          C3,C4
C
C     Инициализация
C
      R1=0.
      DO 10 K=2,N-1
10       R1=R1+REAL(X(K))**2+AIMAG(X(K))**2
      R2=REAL(X(1))**2+AIMAG(X(1))**2
      R3=REAL(X(N))**2+AIMAG(X(N))**2
      PF=R1+R3
      PB=R1+R2
      R4=R1+R2+R3
      R5=1./R4
      DELTA=1.-R2*R5
      GAMMA=1.-R3*R5
      C(1)=CONJG(X(N))*R5
      D(1)=CONJG(X(1))*R5
      ISTAT=0
      M=0
      IF (IP .NE. 0) GO TO 1000
      PF=R4/FLOAT(N)
      PB=PF
      RETURN
C
C     Основной цикл
C
1000  M=M+1
      R1=1./PF
      R2=1./PB
      R3=1./DELTA
      R4=1./GAMMA
C
C     Обновление порядка: векторы AF и AB; обновление во времени: векто-
C     ры C и D
C
      TEMP=(0.,0.)
      DO 20 K=M+1,N
20       TEMP=TEMP+X(K)*CONJG(X(K-M))
      R(M)=CONJG(TEMP)
      THETA=X(1)*C(M)
      IF (M .EQ. 1) GO TO 40
      DO 30 K=1,M-1
         THETA=THETA+X(M+1-K)*C(K)                    ! (8.B 39)
         R(K)=R(K)-X(N+1-M)*CONJG(X(N+1-M+K))         ! (8.B.32)
```

```
30          TEMP=TEMP+CONJG(R(K))**AF(M-K)
40        C1=-TEMP*R2
          C2=-CONJG(TEMP)*R1
          C3=THETA*R3
          C4=CONJG(THETA)*R4
          AF(M)=C1                                  ! (8.B.19)
          AB(M)=C2                                  ! (8.B.22)
          SAVE=C(M)
          C(M)=SAVE+C3*D(M)
          D(M)=D(M)+C4*SAVE
          IF (M .EQ. 1) GO TO 60
          DO 50 K=1,M-1
             SAVE=AF(K)
             AF(K)=SAVE+C1*AB(M-K)                  ! (8.B.18)
             AB(M-K)=AB(M-K)+C2*SAVE                ! (8.B.21)
             SAVE=C(K)
             C(K)=SAVE+C3*D(K)                      ! (8.B.37)
50           D(K)=D(K)+C4*SAVE                      ! (8.B.38)
60        R5=REAL(TEMP)**2+AIMAG(TEMP)**2
          PF=PF-R5*R2                               ! (8.B.20)
          PB=PB-R5*R1                               ! (8.B.23)
          R5=REAL(THETA)**2+AIMAG(THETA)**2
          DELTA=DELTA-R5*R4                         ! (8.B.39)
          GAMMA=GAMMA-R5*R3                         ! (8.B.40)
          IF (M .NE. IP) GO TO 65
          PF=PF/FLOAT(N-M)
          PB=PB/FLOAT(N-M)
          RETURN
65        IF (PF .GT. 0. .AND. PB. GT. 0.) GO TO 70
          ISTAT=1
          RETURN
70        IF (DELTA .GT 0. .AND. DELTA .LE. 1. .AND. GAMMA
         *     .GT. 0. .AND. GAMMA .LE. 1) GO TO 80
          ISTAT=2
          RETURN
C
C     Обновление во времени: векторы AF и AB; обновление порядка: векто-
C     ры C и D
C
80        R1=1./PF
          R2=1./PB
          R3=1./DELTA
          R4=1./GAMMA
          EF=X(M+1)
          EB=X(N-M)
          DO 90 K=1,M
             EF=EF+AF(K)*X(M+1-K)                   ! (8.B.1)
90           EB=EB+AB(K)*X(N-M+K)                   ! (8.B.2)
          C1=EF*R3
          C2=EB*R4
          C3=CONJG(EB)*R2
          C4=CONJG(EF)*R1
          DO 100 K=M,1,-1
             SAVE=AF(K)
             AF(K)=SAVE+C1*D(K)                     ! (8.B.33)
             D(K+1)=D(K)+C4*SAVE                    ! (8.B.25)
```

```
            SAVE=AB(K)
            AB(K)=SAVE+C2*C(M+1-K)          ! (8.B.35)
100         C(M+1-K)=C(M+1-K)+C3*SAVE       ! (8.B.24)
          C(M+1)=C3
          D(1)=C4
          R5=REAL(EF)**2+AIMAG(EF)**2
          PF=PF-R5*R3                       ! (8.B.34)
          DELTA=DELTA-R5*R1                 ! (8.B.30)
          R5=REAL(EB)**2+AIMAG(EB)**2
          PB=PB-R5*R4                       ! (8.B.36)
          GAMMA=GAMMA-R5*R2                 ! (8.B.31)
          IF (PF. GT. 0. .AND. PB .GT. 0.) GO TO 110
          ISTAT=3
          RETURN
110       IF (DELTA .GT. 0. .AND. DELTA .LE. 1. .AND. GAMMA
         *    .GT. 0. .AND. GAMMA .LE. 1.) GO TO 1000
          ISTAT=4
          RETURN
          END
```

Приложение 8.Г.
Быстрый алгоритм и программа решения модифицированных ковариационных уравнений линейного предсказания

8.Г.1. Введение

Первый быстрый алгоритм для решения модифицированных ковариационных нормальных уравнений был разработан и опубликован в 1980 г. Марплом [35]. В варианте, который описан ниже, учтены также последующие вычислительные упрощения исходного алгоритма. В случае модифицированного ковариационного метода спектрального оценивания ошибки линейного предсказания вперед и назад p-го порядка можно представить в форме внутреннего (или скалярного) произведения векторов

$$e_p^f[n] = \mathbf{x}_p^T[n]\,\mathbf{a}_p^{fb}; \qquad (8.\Gamma.1)$$

$$e_p^b[n] = \mathbf{x}_p^T[n]\,\mathbf{J}\mathbf{a}_p^{fb*}, \qquad (8.\Gamma.2)$$

где вектор данных $\mathbf{x}_p[n]$ и вектор коэффициентов линейного предсказания $\mathbf{a}^{fb}$ определяются выражениями

$$\mathbf{x}_p[n] = \begin{pmatrix} x[n] \\ x[n-1] \\ \vdots \\ x[n-p] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_p^{fb} = \begin{pmatrix} 1 \\ a_p[1] \\ \vdots \\ a_p[p] \end{pmatrix}, \qquad (8.\Gamma.3)$$

а $\mathbf{J}-(p+1)\times(p+1)$-матрица отражения. На основе отсчетов измеренных комплексных данных $x[1], \ldots, x[N]$ модифицированный ковариационный метод позволяет минимизировать среднее значение сумм квадратов ошибок линейного предсказания вперед и назад

$$\rho_p^{fb}=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=p+1}^{N}\left[|e_p^f[n]|^2+|e_p^b[n]|^2\right]\right], \qquad (8.\Gamma.4)$$

что приводит к следующим нормальным уравнениям:

$$\mathbf{R}_p\mathbf{a}_p^{fb}=\begin{pmatrix}2\rho_p^{fb}\\ \mathbf{0}_p\end{pmatrix}, \qquad (8.\Gamma.5)$$

где $\mathbf{0}_p$—$(p\times 1)$-нуль-вектор. Эквивалентное диадическое векторное представление матрицы $\mathbf{R}_p$[1], которое соответствует матрице в уравнениях (8.47), имеет вид

$$\mathbf{R}_p=\sum_{n=p+1}^{N}\left[\mathbf{x}_p^*[n]\,\mathbf{x}_p^T[n]+\mathbf{J}\mathbf{x}_p[n]\,\mathbf{x}_p^H[n]\mathbf{J}\right]. \qquad (8.\Gamma.6)$$

Заметим, что матрица $\mathbf{R}_p$ персимметрична, поскольку $\mathbf{J}\mathbf{R}_p^*\mathbf{J}=\mathbf{R}_p$, а также эрмитова, поскольку $\mathbf{R}_p^H=\mathbf{R}_p$. Эти свойства являются следствием допущения о том, что $\mathbf{a}_p$ — это вектор линейного предсказания вперед, а комплексно-сопряженный инвертированный вектор $\mathbf{J}\mathbf{a}_p^*$ — это вектор коэффициентов линейного предсказания назад (в этом состоят отличия от ковариационного метода).

Если член $e_p^f[p+1]$ ошибки линейного предсказания вперед и член $e_p^b[N]$ ошибки линейного предсказания назад не используются, то минимизироваться должна следующая средняя сумма квадратов ошибок:

$$\rho_p^{fb'}=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=p+2}^{N}\left(|e_p^{f'}[n]|^2+|e_p^{b'}[n-1]|^2\right)\right]. \qquad (8.\Gamma.7)$$

В этом случае коэффициенты линейного предсказания удовлетворяют нормальным уравнениям

$$\mathbf{R}_p'\mathbf{a}_p^{fb'}=\begin{pmatrix}2\rho_p^{fb'}\\ \mathbf{0}_p\end{pmatrix}, \qquad (8.\Gamma.8)$$

где штрих означает, что эти уравнения соответствуют решению для случая опущенных членов ошибки. Матрица $\mathbf{R}_p'$ в данном

[1] Диадическое представление линейных операторов (см., например, в [21*]). — *Прим. ред.*

случае определяется выражением

$$\mathbf{R}'_p = \sum_{n=p+2}^{N} (\mathbf{x}_p^*[n]\,\mathbf{x}_p^T[n] + \mathbf{J}\mathbf{x}_p[n-1]\,\mathbf{x}_p^H[n-1]\,\mathbf{J}). \quad (8.\Gamma.9)$$

8.Г.2. Специальные разложения и вспомогательные параметры

Для разработки быстрого алгоритма важными являются следующие разложения $(p+1)\times(p+1)$-матрицы $\mathbf{R}_p$ по индексу порядка p:

$$\mathbf{R}_p = \begin{pmatrix} \mathbf{R}'_{p-1} & \mathbf{r}_p \\ \mathbf{r}_p^H & r_p[p,\ p] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_p[0,\ 0] & \mathbf{r}_p^T\mathbf{J} \\ \mathbf{J}\mathbf{r}_p^* & \mathbf{J}\mathbf{R}'^*_{p-1}\mathbf{J} \end{pmatrix}, \quad (8.\Gamma.10)$$

где p-вектор-столбец $\mathbf{r}_p$ определяется выражением

$$\mathbf{r}_p = \begin{pmatrix} r_p[0,\ p] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ r_p[p-1,\ p] \end{pmatrix}, \quad (8.\Gamma.11)$$

а $\mathbf{J}$ — $(p\times p)$-матрица отражения. Заметим также, что

$$r_p[0,\ 0] = r_p^*[p,\ p] = \sum_{n=p+1}^{N} (|x[n]|^2 + |x[n-p]|^2).$$

Это выражение весьма сходно с разложением (3.124) тёплицевой матрицы, которое было дано в гл. 3. Важными также являются следующее разложение матрицы $\mathbf{R}_p$:

$$\mathbf{R}_p = \mathbf{R}'_p + \mathbf{x}_p^*[p+1]\,\mathbf{x}_p^T[p+1] + \mathbf{J}\mathbf{x}_p[N]\,\mathbf{x}_p^H[N]\,\mathbf{J} \quad (8.\Gamma.12)$$

и его центросимметричный вариант

$$\mathbf{R}_p = \mathbf{J}\mathbf{R}'^*_p\mathbf{J} + \mathbf{J}\mathbf{x}_p[p+1]\,\mathbf{x}_p^H[p+1]\,\mathbf{J} + \mathbf{x}_p^*[N]\,\mathbf{x}_p^T[N]. \quad (8.\Gamma.13)$$

Для разработки быстрого алгоритма потребуется также пара $(p+1)$-вектор-столбцов $\mathbf{c}_p$ и $\mathbf{d}_p$. Они определяются из уравнений

$$\mathbf{R}_p\mathbf{c}_p = \mathbf{J}\mathbf{x}_p[N], \quad (8.\Gamma.14)$$

$$\mathbf{R}_p\mathbf{d}_p = \mathbf{x}_p^*[p+1], \quad (8.\Gamma.15)$$

где

$$\mathbf{c}_p = \begin{pmatrix} c_p[0] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_p[p] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d}_p = \begin{pmatrix} d_p[0] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ d_p[p] \end{pmatrix}. \quad (8.\Gamma.16)$$

Поскольку $\mathbf{R}_p$ — эрмитова персимметричная матрица, то нетрудно показать, что

$$\mathbf{J}\mathbf{R}_p^*\mathbf{a}_p^{fb*} = \mathbf{R}_p\mathbf{J}\mathbf{a}_p^{fb*} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_p \\ \rho_p^{fb} \end{pmatrix}, \tag{8.Г.17}$$

$$\mathbf{R}_p\mathbf{J}\mathbf{c}_p^* = \mathbf{x}_p^*[N], \tag{8.Г.18}$$

$$\mathbf{R}_p\mathbf{J}\mathbf{d}_p^* = \mathbf{J}\mathbf{x}_p[p+1]. \tag{8.Г.19}$$

Аналогичным образом определяются и векторы $\mathbf{c}_p'$ и $\mathbf{d}_p'$ для матрицы $\mathbf{R}_p'$:

$$(\mathbf{J}\mathbf{R}_p'^*\mathbf{J})\,\mathbf{c}_p' = \mathbf{J}\mathbf{x}_p[N]; \tag{8.Г.20}$$

$$(\mathbf{J}\mathbf{R}_p'^*\mathbf{J})\,\mathbf{d}_p' = \mathbf{x}_p^*[p+1], \tag{8.Г.21}$$

где просто используются инвертированный вектор $\mathbf{J}\mathbf{x}_p$ и комплексно-сопряженный вектор $\mathbf{x}_p^*$.

8.Г.3. Рекурсии обновления порядка

Процедура, используемая для обновления порядка вектора коэффициентов линейного предсказания, по своей структуре весьма сходна с рекурсией Левинсона и выполняется в соответствии с выражением

$$\mathbf{a}_p^{fb} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{p-1}^{fb'} \\ 0 \end{pmatrix} + a_p[p]\begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{J}\mathbf{a}_{p-1}^{fb'*} \end{pmatrix}, \tag{8.Г.22}$$

где

$$a_p[p] = -\Delta_p/\rho_{p-1}^{fb'} \tag{8.Г.23}$$

и

$$\Delta_p = \mathbf{r}_p^H\mathbf{a}_{p-1}^{fb'}. \tag{8.Г.24}$$

Для проверки правильности рекурсии (8.Г.22) умножим обе части этого равенства слева на матрицу $\mathbf{R}_p$, подставим разложение соответствующего порядка, определенное в (8.Г.10), и воспользуемся также свойством (8.Г.17). В результате получим следующее рекурсивное соотношение для квадрата ошибки линейного предсказания:

$$\rho_p^{fb} = \rho_{p-1}^{fb'} - |\Delta_p|^2/\rho_{p-1}^{fb'} = \rho_{p-1}^{fb'}(1 - |a_p[p]|^2). \tag{8.Г.25}$$

Заметим, что для того, чтобы величина ρ_p^{fb} была положительной и действительной (как по сути и должно быть, поскольку это — квадрат ошибки), необходимо, чтобы $|a_p[p]|^2 < 1$. А это означает, что коэффициент отражения, используемый в модифицированном ковариационном методе, *по своему модулю не превосходит единицы.*

Векторы $\mathbf{c}_p$ и $\mathbf{d}_p$ должны удовлетворять следующим рекурсиям обновления порядка:

$$\mathbf{c}_p = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{c}'_{p-1} \end{pmatrix} + c_p[0]\,\mathbf{a}_p, \tag{8.Г.26}$$

$$\mathbf{d}_p = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{d}'_{p-1} \end{pmatrix} + d_p[0]\,\mathbf{a}_p, \tag{8.Г.27}$$

правильность которых также можно проверить, умножая слева обе стороны этих равенств на $\mathbf{R}_p$ и подставляя далее разложения соответствующих порядков из (8.Г.10). Скалярные множители $c_p[0]$ и $d_p[0]$ можно определить из следующих скалярных тождеств (в которых используется эрмитово свойство $\mathbf{R}_p{}^H = \mathbf{R}_p$):

$$\mathbf{c}_p^H \mathbf{R}_p \mathbf{a}_p^{fb} = (\mathbf{a}_p^{fbH} \mathbf{R}_p \mathbf{c}_p)^* \Rightarrow c_p[0] = e_p^b[N]/\rho_p^{fb}, \tag{8.Г.28}$$

$$\mathbf{d}_p^H \mathbf{R}_p \mathbf{a}_p^{fb} = (\mathbf{a}_p^{fbH} \mathbf{R}_p \mathbf{d}_p)^* \Rightarrow d_p[0] = e_p^{f*}[p+1]/\rho_p^{fb}. \tag{8.Г.29}$$

Введем скалярные множители δ_p и γ_p, определяемые выражениями

$$\gamma_p = 1 - \mathbf{x}_p^H[N]\,\mathbf{J}\mathbf{c}_p = 1 - \mathbf{x}_p^H[N]\,\mathbf{J}\mathbf{R}_p^{-1}\mathbf{J}\mathbf{x}_p[N], \tag{8.Г.30}$$

$$\delta_p = 1 - \mathbf{x}_p^T[p+1]\,\mathbf{d}_p = 1 - \mathbf{x}_p^T[p+1]\,\mathbf{R}_p^{-1}\mathbf{x}_p^*[p+1]. \tag{8.Г.31}$$

которые, согласно этим определениям как квадратичным формам, являются действительнозначными величинами. Умножим слева обе стороны равенства (8.Г.26) на $\mathbf{x}_p{}^H[N]\mathbf{J}$ и обе стороны равенства (8.Г.27) на $\mathbf{x}_p{}^T[p+1]$, в результате чего получаем выражения для обновления порядка скалярных множителей δ_p и γ_p:

$$\gamma_p = \gamma'_{p-1} - c_p[0]\,e_p^{b*}[N] = \gamma'_{p-1} - |e_{p-1}^b[N]|^2/\rho_p^{fb}, \tag{8.Г.32}$$

$$\delta_p = \delta'_{p-1} - d_p[0]\,e_p^f[p+1] = \delta'_{p-1} - |e_p^f[p+1]|^2/\rho_p^{fb}. \tag{8.Г.33}$$

Для быстрого алгоритма потребуется еще один скалярный параметр, определяемый следующим выражением:

$$\lambda_p = \mathbf{x}_p^H[N]\,\mathbf{J}\mathbf{d}_p. \tag{8.Г.34}$$

Умножим слева обе стороны равенства (8.Г.27) на $\mathbf{x}_p{}^H[N]\mathbf{J}$, с тем чтобы получить выражение для обновления порядка этого параметра:

$$\lambda_p = \lambda'_{p-1} + (e_p^f[p+1]\,e_p^b[N])^*/\rho_p^{fb}. \tag{8.Г.35}$$

Заметим, что λ_p — комплекснозначный параметр. Рассматривая тождество $\mathbf{d}_p{}^H\mathbf{R}_p\mathbf{c}_p = (\mathbf{c}_p{}^H\mathbf{R}_p\mathbf{d}_p)^*$, приходим к выводу, что

$$\lambda_p^* = \mathbf{x}_p^T[p+1]\,\mathbf{c}_p. \tag{8.Г.36}$$

Наконец, еще одна рекурсия обновления порядка необходима

для вектора $\mathbf{r}_p$

$$\mathbf{r}_p = \begin{pmatrix} r_p[0,\ p] \\ \mathbf{r}_{p-1} - x[N+1-p]\,\mathbf{x}^*_{p-2}[N] - x^*[p]\,\mathbf{J}\,\mathbf{x}_{p-2}[p-1] \end{pmatrix}. \qquad (8.\Gamma.37)$$

Для ее вывода следует воспользоваться определением для $r_p[i, j]$.

8.Г.4. Рекурсии обновления во времени

Обновление временно́го индекса в векторе коэффициентов линейного предсказания ведется в соответствии с выражением

$$\mathbf{a}_p^{fb'} = \mathbf{a}_p^{fb} + \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{c}'_{p-1} \end{pmatrix} + \beta_1 \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{d}'_{p-1} \end{pmatrix}, \qquad (8.\Gamma.38)$$

где

$$\alpha_1 = (e_p^{b*}[N]\,\delta'_{p-1} + e_p^f[p+1]\,\lambda'_{p-1})/\mathrm{DEN}'_{p-1}, \qquad (8.\Gamma.39)$$

$$\beta_1 = (e_p^f[p+1]\,\gamma'_{p-1} + e_p^{b*}[N]\,\lambda'^*_{p-1})/\mathrm{DEN}'_{p-1}, \qquad (8.\Gamma.40)$$

$$\mathrm{DEN}'_{p-1} = \gamma'_{p-1}\delta'_{p-1} - |\lambda'_{p-1}|^2. \qquad (8.\Gamma.41)$$

Правильность рекурсии (8.Г.38) можно проверить, умножая слева обе стороны этого равенства на $\mathbf{R}_p'$ и подставляя далее соответствующие разложения по временно́му индексу (8.Г.12) и индексу порядка (8.Г.10). Побочным продуктом этой проверки является выражение для обновления квадрата ошибки линейного предсказания:

$$\rho_p^{fb'} = \rho_p^{fb} - \frac{|e_p^b[N]|^2\delta'_{p-1} + |e_p^f[p+1]|^2\gamma'_{p-1} + 2\mathrm{Re}\,\{e_p^f[p+1]\,e_p^b[N]\,\lambda'_{p-1}\}}{\mathrm{DEN}'_{p-1}}. \qquad (8.\Gamma.42)$$

Дополнительные векторы $\mathbf{c}_p$ и $\mathbf{d}_p$ удовлетворяют следующим рекурсиям по временно́му индексу:

$$\mathbf{c}'_p = \mathbf{c}_p + \alpha_2\mathbf{J}\,\mathbf{c}_p^* + \beta_2\mathbf{J}\mathbf{d}_p^*; \qquad (8.\Gamma.43)$$

$$\mathbf{d}'_p = \mathbf{d}_p + \alpha_3\mathbf{J}\mathbf{c}_p^* + \beta_3\mathbf{J}\mathbf{d}_p^*, \qquad (8.\Gamma.44)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= (\theta_p\lambda_p^* + \phi_p\delta_p)/\mathrm{DEN}_p, \\ \beta_2 &= (\phi_p\lambda_p + \theta_p\gamma_p)/\mathrm{DEN}_p, \\ \alpha_3 &= (\Xi_p\lambda_p^* + \theta_p\delta_p)/\mathrm{DEN}_p, \\ \beta_3 &= (\theta_p\lambda_p + \Xi_p\gamma_p)/\mathrm{DEN}_p, \\ \mathrm{DEN}_p &= \gamma_p\delta_p - |\lambda_p|^2, \\ \theta_p &= \mathbf{x}_p^T[N]\,\mathbf{d}_p, \\ \phi_p &= \mathbf{x}_p^T[N]\,\mathbf{c}_p, \\ \Xi_p &= \mathbf{x}_p^H[p+1]\,\mathbf{J}\mathbf{d}_p. \end{aligned} \qquad (8.\Gamma.45)$$

Правильность рекурсий (8.Г.43) и (8.Г.44) можно проверить, умножая слева обе стороны этих равенств на $\mathbf{J}\mathbf{R}_p'^*\mathbf{J}$, подставляя разложение по временно́му индексу (8.Г.13) и используя далее тождество $\theta_p = \mathbf{x}_p^H[p+1]\mathbf{J}\mathbf{c}_p$, которое является следствием свойства $\mathbf{c}_p^H\mathbf{J}\mathbf{R}_p\mathbf{d}_p^* = (\mathbf{d}_p^H\mathbf{R}_p\mathbf{J}\mathbf{c}_p^*)^*$.

Рекурсии по временному индексу для действительных скалярных величин γ_p и δ_p можно получить, формируя с помощью (8.Г.43) произведение $\mathbf{x}_p^H[N]\mathbf{J}\mathbf{c}_p'$ и с помощью (8.Г.42) произведение $\mathbf{x}_p^T[p+1]\mathbf{d}_p'$, что дает

$$\gamma_p' = \gamma_p - (|\phi_p|^2\delta_p + |\theta_p|^2\gamma_p + 2\mathrm{Re}[\phi_p\lambda_p\theta_p^*])/\mathrm{DEN}_p; \quad (8.Г.46)$$

$$\delta_p' = \delta_p - (|\theta_p|^2\delta_p + |\Xi_p|^2\gamma_p + 2\mathrm{Re}[\theta_p\lambda_p\Xi_p^*])/\mathrm{DEN}_p. \quad (8.Г.47)$$

Рекурсию по временно́му индексу для скалярной величины λ_p получаем, формируя с помощью (8.Г.44) произведение $\mathbf{x}_p^H[N]\mathbf{J}\mathbf{d}_p'$, что дает

$$\lambda_p' = \lambda_p + \alpha_3\phi_p^* + \beta_3\theta_p^*. \quad (8.Г.48)$$

8.Г.5. Начальные условия

Начальные условия необходимы для того, чтобы начать рекурсивный алгоритм с порядка, равного нулю:

$$\begin{aligned}
r_0[0,\ 0] &= 2\sum_{n=1}^{N}|x[n]|^2,\\
\rho_0^{fb'} &= r_0[0,\ 0] - |x[1]|^2 - |x[N]|^2,\\
c_0[0] &= x[N]/r_0[0,\ 0],\\
d_0[0] &= x^*[1]/r_0[0,\ 0],\\
\lambda_0 &= x^*[1]\,x^*[N]/r_0[0,\ 0],\\
\delta_0 &= 1 - |x[1]|^2/r_0[0,\ 0],\\
\gamma_0 &= 1 - |x[n]|^2/r_0[0,\ 0].
\end{aligned} \quad (8.Г.49)$$

8.Г.6. Простые проверки на плохую численную обусловленность

Как и в случае ковариационного алгоритма, можно показать, что $0 < \mathrm{DEN} \leqslant 1$ и $0 < \mathrm{DEN}' \leqslant 1$. Кроме того, с помощью подхода, использованного в подразд. 8.В.6, можно показать, что $0 < \gamma, \delta \leqslant 1$. Эти проверки, а также проверка на положительность членов квадрата ошибки, выполняются на каждом шаге алгоритма. Отметим, что некоторые улучшения базового алгоритма как при больших отношениях сигнал/шум, так и при больших значениях порядка модели были предложены в работе [35].

8.Г.7. Вычислительные затраты и требуемый объем памяти

В основном цикле выполняется $N+12p$ вычислительных операций (сложений и умножений) за проход, а, следовательно, общее число требуемых вычислительных операций зависит от значений N и p. При изменении p от 1 до M получаем $NM+6M^2$ операций (с учетом только квадратичных членов). Анализ размерностей векторов в программе показывает, что необходима память объемом $N+4M$.

При обработке с помощью этого алгоритма 64-точечной тест-последовательности, приведенной в приложении II, при N=64 и IP=15 получаем следующие значения коэффициентов линейного предсказания:

P=0,00395;

A(1)=(2,878987; —0,474820);
A(2)=(5,847520; —1,795236);
A(3)=(8,693661; —4,219615);
A(4)=(10,966792; —7,316369);
A(5)=(11,597926; —10,521787);
A(6)=(10,831415; —13,236135);
A(7)=(8,699289; —15,097140);
A(8)=(6,027758; —15,518534);
A(9)=(3,204673; —14,283307);
A(10)=(0,854681; —11,484167);
A(11)=(—0,582791; —7,833453);
A(12)=(—0,968658; —4,332430);
A(13)=(—0,732152; —1,757008);
A(14)=(—0,341911; —0,416644);
A(15)=(—0,084096; —0,002586).

```
      Подпрограмма MODCOVAR (N,IP,X,P,A,ISTAT)
C
C     Быстрый алгоритм, предназначенный для решения модифицированных
C     ковариационных уравнений по методу наименьших квадратов.
C
C     Входные параметры:
C        N       — число отсчетов данных (целое число).
C        IP      — порядок модели линейного предсказания (целое число).
C        X       — массив отсчетов комплексных данных от X(1) до X(N).
C
C     Выходные параметры:
C        P       — действительная дисперсия линейного предсказания, соот-
C                  ветствующая порядку IP.
C        A       — массив комплексных коэффициентов линейного предска-
C                  зания
C        ISTAT   — целочисленный указатель состояния в момент выхода из
C                  программы:
C                  0 при нормальном выходе, если не обнаружено плохой
C                  численной обусловленности,
C                  1, если параметр P имеет отрицательное значение,
C                  2, если значения параметров DELTA' и GAMMA' не ле-
C                  жат в интервале от 0 до 1,
C                  3, если значение параметра P' имеет отрицательное зна-
C                  чение,
C                  4, если значения параметров DELTA и GAMMA не лежат
C                  в интервале от 0 до 1.
C
```

```
C     Примечание:
C        Размер .GE. N внешнего массива X и размер .GE. IP массива A
C        должны указываться в вызывающей программе. Размер внутреннего
C        массива R должен указываться в .GE. IP, а размеры массивов C
C        и D должны указываться в .GE. IP+1.
C
      COMPLEX  X(1),A(1),C(101),D(101),R(100),LAMBDA,THETA,PSI,XI
      COMPLEX EF,EB,C1,C2,C3,C4,SAVE1,SAVE2,SAVE3,SAVE4
C
C     Инициализация
C
      R1=0.
      DO 10 K=2,N-1
10       R1=R1+2.*(REAL(X(K))**2+AIMAG(X(K))**2)
      R2=REAL(X(1))**2+AIMAG(X(1))**2
      R3=REAL(X(N))**2+AIMAG(X(N))**2
      R4=1./(R1+2.*(R2+R3))
      P=R1+R2+R3
      DELTA=1.-R2*R4
      GAMMA=1.-R3*R4
      LAMBDA=CONJG(X(1)*X(N))*R4
      C(1)=X(N)*R4
      D(1)=CONJG(X(1))*R4
      ISTAT=0
      M=0
      IF (IP .NE. 0) GO TO 1000
      P=(.5*R1+R2+R3)/FLOAT(N)
      RETURN
C
C     Основной цикл
C
1000  M=M+1
      SAVE1=(0.,0.)
      DO 20 K=M+1,N
20       SAVE1=SAVE1+X(K)*CONJG(X(K-M))
      SAVE1=2.*SAVE1
      R(M)=CONJG(SAVE1)
      THETA=X(N)*D(1)
      PSI=X(N)*C(1)
      XI=CONJG(X(1))*D(1)
      IF (M .EQ. 1) GO TO 40
      DO 30 K=1,M-1
         THETA=THETA+X(N-K)*D(K+1)          ! (8.Г.45)
         PSI=PSI+X(N-K)*C(K+1)              ! (8.Г.45)
         XI=XI+CONJG(X(K+1))*D(K+1)         ! (8.Г.45)
         R(K)=R(K)-X(N+1-M)*CONJG(X(N+1-M+K))
     *             -CONJG(X(M))*X(M-K)      ! (8.Г.37)
30       SAVE1=SAVE1+CONJG(R(K))*A(M-K)     ! (8.Г.24)
C
C     Обновление порядка вектора A
C
40    C1=-SAVE1/P
      A(M)=C1                               ! (8.Г.23)
      P=P*(1.-REAL(C1)**2-AIMAG(C1)**2)     ! (8.Г.25)
      IF (M .EQ. 1) GO TO 60
      DO 50 K=1,M/2
```

```
            MK=M-K
            SAVE1=A(K)
            A(K)=SAVE1+C1*CONJG(A(MK))                ! (8.Г.22)
            IF (K .EQ. MK) GO TO 50
            A(MK)=A(MK)+C1*CONJG(SAVE1)               ! (8.Г.22)
50          CONTINUE
60        IF (M .NE. IP) GO TO 65
          P=.5*P/FLOAT(N-M)
          RETURN
C
C     Обновление во времени векторов C, D и скаляров GAMMA, DELTA,
C     LAMBDA
65        R1=1./(DELTA*GAMMA-REAL(LAMBDA)**2
                              -AIMAG(LAMBDA)**2)
          C1=(THETA*CONJG(LAMBDA)+PSI*DELTA)*R1
          C2=(PSI*LAMBDA+THETA*GAMMA)*R1
          C3=(XI*CONJG(LAMBDA)+THETA*DELTA)*R1
          C4=(THETA*LAMBDA+XI*GAMMA)*R1
          DO 70 K=1,(M-1)/2+1
            MK=M+1-K
            SAVE1=CONJG(C(K))
            SAVE2=CONJG(D(K))
            SAVE3=CONJG(C(MK))
            SAVE4=CONJG(D(MK))
            C(K)=C(K)+C1*SAVE3+C2*SAVE4               ! (8.Г.43)
            D(K)=D(K)+C3*SAVE3+C4*SAVE4               ! (8.Г.44)
            IF (K .EQ. MK) GO TO 70
            C(MK)=C(MK)+C1*SAVE1+C2*SAVE2             ! (8.Г.43)
            D(MK)=D(MK)+C3*SAVE1+C4*SAVE2             ! (8.Г.44)
70          CONTINUE
          R2=REAL(PSI)**2+AIMAG(PSI) **2
          R3=REAL(THETA)**2+AIMAG(THETA) **2
          R4=REAL(XI)**2+AIMAG(XI) **2
          R5=GAMMA-(R2*DELTA+R3*GAMMA+
                    2.*REAL (PSI*LAMBDA*CONJG(THETA)))*R1
          R2=DELTA-(R3*DELTA+R4*GAMMA+
                    2.*REAL (THETA*LAMBDA*CONJG(XI)))*R1
          GAMMA=R5                                    ! (8.Г.46)
          DELTA=R2                                    ! (8.Г.47)
          LAMBDA=LAMBDA+C3*CONJG(PSI)+C4*CONJG        ! (8.Г.48)
                                        (THETA)
          IF (P .GT. 0.) GO TO 80
          ISTAT=1
          RETURN
80        IF (DELTA .GT. 0. .AND. DELTA .LE. 1. .AND. GAMMA
         *    .GT. 0. .AND. GAMMA .LE. 1.) GO TO 90
          ISTAT=2
          RETURN
C
C     Обновление во времени вектора A; обновление порядка векторов C, D
C     и скаляров GAMMA, DELTA, LAMBDA
C
90        R1=1./P
          R2=1./(DELTA*GAMMA-REAL(LAMBDA)**2          ! (8.Г.41)
                              -AIMAG(LAMBDA)**2)
          EF=X(M+1)
```

```
      EB=X(N-M)
      DO 100 K=1,M
        EF=EF+A(K)*X(M+1-K)                          ! (8.Г.1)
        EB=EB+CONJG(A(K))*X(N-M+K)                   ! (8.Г.2)
      C1=EB*R1                                       ! (8.Г.28)
      C2=CONJG(EF)*R1                                ! (8.Г.29)
      C3=(CONJG(EB)*DELTA+EF*LAMBDA)*R2
      C4=(EF*GAMMA+CONJG(EB*LAMBDA))*R2
      DO 110 K=M,1,-1
        SAVE1=A(K)
        A(K)=SAVE1+C3*C(K)+C4*D(K)                   ! (8.Г.38)
        C(K+1)=C(K)+C1*SAVE1                         ! (8.Г.26)
        D(K+1)=D(K)+C2*SAVE1                         ! (8.Г.27)
      C(1)=C1
      D(1)=C2
      R3=REAL(EB)**2+AIMAG(EB)**2
      R4=REAL(EF)**2+AIMAG(EF)**2
      P=P-(R3*DELTA+R4*GAMMA                         ! (8.Г.42)
                   +2.*REAL (EF*EB*LAMBDA))R2
      DELTA=DELTA-R4*R1                              ! (8.Г.32)
      GAMMA=GAMMA-R3*R1                              ! (8.Г.33)
      LAMBDA=LAMBDA+CONJG(EF*EB)*R1                  ! (8.Г.35)
      IF (P .GT. 0.) GO TO 120
      ISTAT=3
      RETURN
      IF (DELTA .GT. 0. .AND. DELTA .LE. 1. .AND. GAMMA
     *    .GT. 0. .AND. GAMMA .LE. 1.) GO TO 1000
      ISTAT=4
      RETURN
      END
```

Глава 9
АВТОРЕГРЕССИОННОЕ СПЕКТРАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ: АЛГОРИТМЫ ОБРАБОТКИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ДАННЫХ

9.1. Введение

Блочные методы оценивания целесообразно применять в тех случаях, когда объем имеющихся данных сильно ограничен, но желательно получить оценки с наилучшими возможными характеристиками. При наличии более длинных записей данных можно применить целый ряд методов последовательного оценивания для обновления оценок авторегрессионных параметров по мере поступления каждого нового отсчета от системы сбора данных в реальном времени. Затем по этим обновленным параметрам можно по мере необходимости строить новый график спектральной оценки. Подобные методы особенно полезны для слежения за сигналами с медленно изменяющимися во времени параметрами. Примером может служить слежение за доплеровской частотой гидролокационного сигнала, принимаемого от движущейся цели. Методы последовательного во времени оценивания иногда называют *адаптивными* алгоритмами, поскольку они постоянно адаптируются к характеристикам сигнала, даже когда он изменяется. Термин «адаптивный» не следует путать с термином «адаптивный к данным», который весьма часто употребляется в литературе по спектральному оцениванию и используется для того, чтобы отличать параметрические методы спектрального оценивания от непараметрических. Говорят, что параметрические методы «адаптируют» свои параметры к характеру данных; в непараметрических методах такой подстройки параметров не производится.

Последовательные алгоритмы, используемые для оценивания АР-параметров, делятся на две категории. К первой относятся простейшие алгоритмы на основе градиентной аппроксимации, к числу которых принадлежит хорошо известный метод наименьших средних квадратов (НСК). Ко второй категории относятся рекурсивные алгоритмы наименьших квадратов (РНК); эти алгоритмы обеспечивают более высокие характеристики, чем алгоритмы НСК, но за счет дополнительных вычислительных затрат. Ниже в главе описаны оба типа алгоритмов.

В литературе описаны также алгоритмы для последовательного обновления параметров решетчатых фильтров. Поскольку параметры решетчатых фильтров представляют собой коэффи-

циенты отражения некоторого АР-процесса, то для преобразования последовательности коэффициентов отражения в последовательность авторегрессионных параметров, которые будут далее использоваться в формуле для вычисления АР СПМ, необходимо каждый раз применять алгоритм Левинсона. Последовательные алгоритмы, описанные в этой главе, позволяют сразу обновлять АР-параметры, а не коэффициенты отражения, что исключает необходимость применения алгоритма Левинсона, а следовательно, уменьшает вычислительные затраты. Тех читателей, которых интересуют последовательные алгоритмы обновления параметров решетчатых фильтров, мы отсылаем к обзорно-методическим статьям Фридландера [6, 7].

9.2. Краткая сводка результатов

В приложениях к этой главе помещены три машинные программы, предназначенные для вычисления двух последовательно-временны́х оценок (градиентной и по методу РНК) АР-параметров, которые затем могут быть использованы после любой операции обновления во времени для вычисления авторегрессионной оценки СПМ, определяемой формулой

$$\hat{P}_{\mathrm{AP}}(f)=\frac{T\hat{\rho}_w}{\left|1+\sum_{n=1}^{p}\hat{a}[n]\exp(-j2\pi fnT)\right|^2}. \qquad (9.1)$$

На рис. 9.1 приведена краткая запись этапов, требуемых для вычисления АР СПМ с помощью двух последовательных алгоритмов, даны названия подпрограмм, используемых для этой цели на каждом этапе, и указаны номера приложений, в которых помещены распечатки этих подпрограмм. Заметим, что порядок модели используется теперь как один из входных параметров. В случае алгоритма НСК необходимо также задать значение постоянной времени адаптации μ, а при использовании алгоритма РНК — значение постоянной затухания ω. После выбора порядка модели его значение больше не меняется.

На рис. 9.2 приведены две спектральные оценки, полученные с помощью алгоритмов НСК и РНК для 64-точечной тест-последовательности данных, приведенной в приложении II, которые позволяют судить о характеристиках этих алгоритмов. Для вычисления оценок использовалась АР-модель 15-го порядка. Из рисунка видно, что быстрый РНК-алгоритм обеспечил получение приемлемой спектральной оценки, показанной на рис. 9.2, *б*, уже после 64 обновлений во времени при $\omega=1$, чего и следовало ожидать, поскольку это быстро сходящийся точный метод наименьших квадратов. Его обсуждению посвящены разд. 9.4 и 9.5.

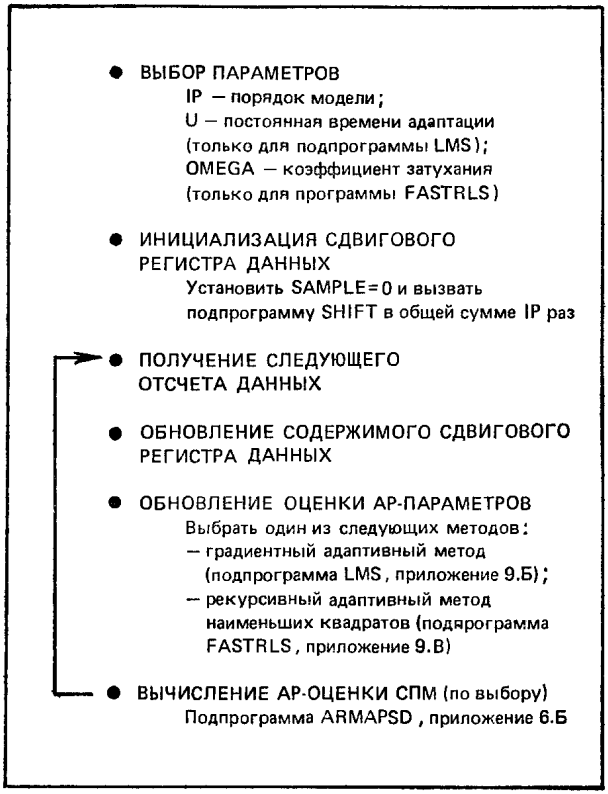


Рис. 9.1. Краткая запись двух алгоритмов последовательного во времени авторегрессионного оценивания СПМ.

Градиентный НСК-алгоритм работает хуже, но этого и следовало ожидать, так как это медленно сходящийся последовательный алгоритм, и длины 64-точечной последовательности данных, т. е. 64 обновлений во времени, оказалось недостаточно для того, чтобы обеспечить его сходимость. Постоянная времени адаптации $\mu=0{,}02$ была выбрана для НСК-алгоритма, базирующегося на процедуре, описанной в разд. 9.3.

9.3. Градиентные адаптивные авторегрессионные методы

Градиентная адаптивная процедура наискорейшего спуска позволяет рекурсивно оценивать p-компонентный вектор АР-параметров $\mathbf{a}_p{}^T=(a_p[1],\ldots,a_p[p])$ в момент времени, соответствующий индексу $N+1$, по предыдущей его оценке, соответствующей

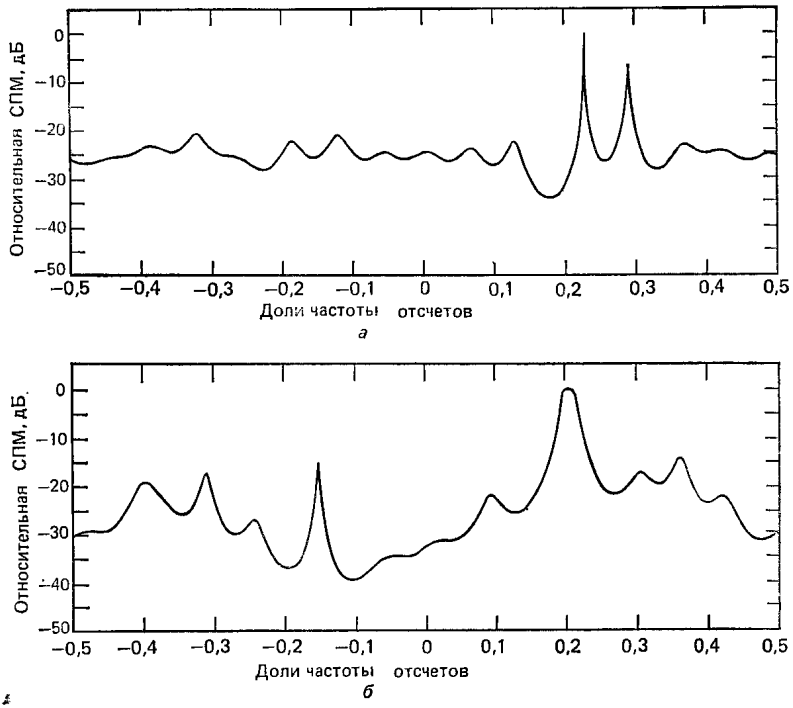


Рис. 9.2. Примеры последовательных во времени спектральных АР-оценок, полученных по 64-точечной тест-последовательности данных: *а* — метод наименьших средних квадратов (МНСК); *б* — быстрый рекурсивный метод наименьших квадратов (РМНК).

временно́му индексу N:

$$\hat{\mathbf{a}}_{p,\,N+1} = \hat{\mathbf{a}}_{p,\,N} - \mu \nabla \mathcal{E}\{|e^f_{p,\,N}[N+1]|^2\}, \tag{9.2}$$

где μ — положительная скалярная величина шага адаптации (от нее зависят постоянная времени адаптации и другие свойства алгоритма), ∇ — градиент, а $e^f_{p,N}[N+1]$ — *остаточная ошибка* фильтра линейного предсказания вперед, которая определяется выражением

$$\begin{aligned} e^f_{p,\,N}[N+1] &= x[N+1] + \sum_{k=1}^{p} \hat{a}_{p,\,N}[k]\, x[N+1-k] = \\ &= x[N+1] + \mathbf{x}^T_{p-1}[N]\, \hat{\mathbf{a}}_{p,\,N}. \end{aligned} \tag{9.3}$$

где $x_{p-1}[N] = (x[N], \ldots, x[N-p+1])^T$ — вектор данных. Заметим, что остаточную ошибку фильтра (9.3) не следует путать с *ошибкой предсказания*, поскольку она определена с использова-

нием вектора $\hat{\mathbf{a}}_{p,N}$, а не вектора $\hat{\mathbf{a}}_{p,N+1}$. Среднее значение квадрата модуля этой ошибки определяется выражением

$$\mathscr{E}\{|e^f_{p,N}[N+1]|^2\} = r[0] + \hat{\mathbf{a}}^H_{p,N}\mathbf{R}_{p-1}\hat{\mathbf{a}}_{p,N} + 2\mathrm{Re}(\hat{\mathbf{a}}^H_{p,N}\mathbf{r}_p), \qquad (9.4)$$

где коэффициент, вектор и матрица автокорреляции определяются соответственно выражениями

$$r[0] = \mathscr{E}\{x[N+1]x^*[N+1]\},$$
$$\mathbf{r}_p = \mathscr{E}\{x[N+1]\mathbf{x}^*_{p-1}[N]\},$$
$$\mathbf{R}_{p-1} = \mathscr{E}\{\mathbf{x}^*_{p-1}[N]\mathbf{x}^T_{p-1}[N]\}.$$

Отсюда получаем следующее выражение для градиента:

$$\nabla\mathscr{E}\{|e^f_{p,N}[N+1]|^2\} = 2\mathbf{r}_p + 2\mathbf{R}_{p-1}\hat{\mathbf{a}}_{p,N}. \qquad (9.5)$$

Когда градиентная адаптивная процедура сходится, получаем $\nabla\mathscr{E}\{|e^f{}_{p,N}[N+1]|^2\} = 0$, поэтому $\hat{\mathbf{a}}_{p,N} = \mathbf{a}_p$, а следовательно,

$$\mathbf{R}_{p-1}\mathbf{a}_p = -\mathbf{r}_p, \qquad (9.6)$$

что идентично уравнению Юла — Уолкера (6.32).

Так как на практике автокорреляционная последовательность обычно не известна, используются мгновенные оценки

$$\hat{\mathbf{r}}_p = x[N+1]\mathbf{x}^*_{p-1}[N], \quad \hat{\mathbf{R}}_{p-1} = \mathbf{x}^*_{p-1}\mathbf{x}^T_{p-1}, \qquad (9.7)$$

подставляя которые в (9.6), получаем

$$\hat{\mathbf{a}}_{p,N+1} = \hat{\mathbf{a}}_{p,N} - e^f_{p,N}[N+1]2\mu\mathbf{x}^*_{p-1}[N]. \qquad (9.8)$$

Выражения (9.3) и (9.8) вместе образуют классический адаптивный алгоритм *наименьших средних квадратов* (НСК) [17], в котором каждое обновление во времени требует выполнения примерно $2p$ операций сложения и умножения.

Заметим, что выбор наиболее подходящих значений μ сопряжен в нем со значительными трудностями. Если положить, что входной процесс является гауссовским процессом с нулевым средним значением, то сходимость среднего значения вектора $\mathbf{a}_p$ к вектору $\mathbf{a}_p$ будет гарантироваться до тех пор, пока μ будет иметь положительное значение, лежащее в интервале от 0 до $1/\lambda_{max}$, где λ_{max} — максимальное собственное значение матрицы $\mathbf{R}_{p-1}$. В гл. 3 было показано [см. выражение (3.81)], что след матрицы равен сумме собственных значений этой матрицы. Поэтому $\lambda_{max} \leqslant \mathrm{tr}\,\mathbf{R}_{p-1}$, и, следовательно, более точная граница для постоянной времени адаптации определяется условием $0 < \mu < 1/\mathrm{tr}\,\mathbf{R}_{p-1}$. Эту границу определить легче, поскольку $\mathbf{R}_{p-1}$ — тёплицева матрица, и поэтому $\mathrm{tr}\,\mathbf{R}_{p-1} = pr[0]$. Оценку $r[0]$, характеризующую мощность отсчетов сигнала, получаем непосредст-

венно по N отсчетам данных согласно выражению

$$\hat{r}_{xx}[0]=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}|x[k]|^2.$$

Скорость сходимости в среднем, или постоянная времени экспоненциальной сходимости τ_k по k-му собственному вектору λ_k матрицы $\mathbf{R}_p$, определяется следующим приближенным выражением [17]:

$$\tau_k \approx \frac{1}{4\mu\lambda_k}, \tag{9.9}$$

из которого видно, что скорость сходимости зависит как от постоянной адаптации μ, так и от величины области существования собственных значений автокорреляционной матрицы. Таким образом, сходимость зависит от совместного влияния всех собственных значений матрицы $\mathbf{R}_p$, а, следовательно, время сходимости будет в основном определяться наименьшим из собственных значений этой матрицы. При большом относительном размахе собственных значений $\lambda_{max}/\lambda_{min}\gg 1$, что характерно, например, для узкополосных шумовых процессов, время сходимости может оказаться сравнительно большим.

Так как используется градиентная *оценка*, то это приводит к появлению в адаптивном процессе собственного шума, который проявляется как некоторое установившееся значение дисперсии или среднеквадратичной ошибки вектора параметров $\hat{\mathbf{a}}_p$ относительно их средних значений при достижении сходимости. Выбирая достаточно малое значение μ, величину этой дисперсии можно сделать произвольно малой, но при этом, к сожалению, существенно снижается скорость сходимости. Поэтому при выборе значения μ следует соблюдать компромисс между скоростью сходимости алгоритма и точностью оценок АР-параметров (уровнем допустимого собственного шума).

Адаптивный НСК-алгоритм можно использовать для слежения за изменениями во времени статистик входного сигнала, если они изменяются достаточно медленно по сравнению со скоростью сходимости этого алгоритма. Усреднение по времени последовательности ошибок, порождаемой НСК-алгоритмом, обеспечивает получение оценки дисперсии белого шума, необходимой для вычисления АР СПМ. Одним из первых, кто предложил использовать этот метод авторегрессионного спектрального оценивания, был Гриффитс [8].

Как уже отмечалось выше в разд. 9.2 при рассмотрении иллюстративного примера, в случае относительно коротких записей данных градиентный адаптивный НСК-алгоритм по своим характеристикам и скорости сходимости уступает РНК-алгорит-

мам. Однако он более функционально-устойчив (робастен) и менее чувствителен, чем РНК-алгоритмы, к плохой численной обусловленности и эффектам, возникающим из-за конечной длины машинного слова. Поэтому в тех приложениях, где данных достаточно и допустима более медленная сходимость, НСК-метод может оказаться вполне приемлемым алгоритмом последовательного спектрального оценивания.

9.4. Рекурсивные авторегрессионные методы наименьших квадратов

Для оценивания параметров АР-модели p-го порядка по N-точечной последовательности данных $x[1], \ldots, x[N]$ необходимо записать уравнение для ошибки линейного предсказания вперед

$$e^f_{p,N}[n] = x[n] + \sum_{k=1}^{p} a_{p,N}[k]\, x[n-k], \tag{9.10}$$

и решить его относительно набора параметров $a_{p,N}[k]$, которые минимизируют сумму экспоненциально взвешенных квадратов ошибок по всем имеющимся измеренным данным вплоть до временно́го индекса N:

$$\rho^f_{p,N} = \sum_{n=1}^{N} \omega^{N-n} |e^f_{p,N}[n]|^2, \tag{9.11}$$

где ω — положительная действительная скалярная величина, удовлетворяющая условию $0 < \omega \leqslant 1$. Это экспоненциальное окно движется вдоль записи данных, создавая наименьшие изменения значений текущих ошибок и очень сильно уменьшая значения более старых ошибок, что позволяет отслеживать медленно изменяющиеся параметры сигналов (нестационарных процессов). Диапазон суммирования в (9.11) при $\omega = 1$ (см. гл. 8 разд. 8.5) соответствует случаю предвзвешивания, поскольку при этом использовалось допущение о том, что $x[n] = 0$ при $n \leqslant 0$. Следуя той же процедуре минимизации, использованной в разд. 8.5 и приложении 8.С, можно показать, что коэффициенты линейного предсказания/авторегрессии, которые минимизируют величину $\rho_p{}^f$, удовлетворяют следующему матричному нормальному уравнению:

$$\mathbf{R}_{p,N}\bar{\mathbf{a}}_{p,N} = \begin{pmatrix} \rho^f_{p,N} \\ \mathbf{0}_p \end{pmatrix}, \tag{9.12}$$

где $(p+1)\times(p+1)$-матрица $\mathbf{R}_{p,N}$ определяется выражением

$$\mathbf{R}_{p,N}=\sum_{n=1}^{N}\omega^{N-n}\mathbf{x}_p^*[n]\,\mathbf{x}_p^T[n], \tag{9.13}$$

а

$$\mathbf{x}_p[n]=\begin{pmatrix} x[n] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x[n-p] \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{a}}_{p,N}=\begin{pmatrix} 1 \\ a_{p,N}[1] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{p,N}[p] \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{a}_{p,N} \end{pmatrix}$$

и $\mathbf{0}_p$ — $p\times 1$-нуль-вектор. Решая уравнение (9.12), получаем вектор линейного предсказания $\mathbf{a}_{p,N}$ и минимальную сумму квадратов ошибок $\rho^f_{p,N}$. Заметим, что матрица $\mathbf{R}_{p,N}$ и вектор параметров $\bar{\mathbf{a}}_{p,N}$ снабжены подстрочным индексом N, с тем чтобы указать, что они определяются по всем отсчетам данных вплоть до временного индекса N. Можно показать (см. разд. «Задачи»), что компоненты вектора $\mathbf{a}_{p,N}$ соответствуют устойчивому фильтру предсказания.

Если получен новый отсчет данных $x[N+1]$, то аппроксимацию по методу наименьших квадратов для всего набора из $N+1$ отсчетов данных можно записать в виде следующих матричных нормальных уравнений:

$$\mathbf{R}_{p,N+1}\bar{\mathbf{a}}_{p,N+1}=\begin{pmatrix} \rho^f_{p,N+1} \\ \mathbf{0}_p \end{pmatrix}, \tag{9.14}$$

где

$$\mathbf{R}_{p,N+1}=\sum_{n=1}^{N+1}\omega^{N+1-n}\mathbf{x}_p^*[n]\,\mathbf{x}_p^T[n]. \tag{9.15}$$

Алгоритм, который при получении нового отсчета данных $x[N+1]$ позволяет переходить от вектора $\mathbf{a}_{p,N}$ к $\mathbf{a}_{p,N+1}$, не прибегая к явному решению уравнения (9.14), называется *рекурсивным* алгоритмом *наименьших квадратов* (РНК). Ниже будут рассмотрены два РНК-алгоритма. Количество вычислительных операций, требуемое традиционным РНК-алгоритмом на одно обновление во времени, пропорционально величине p^2. В новом быстром РНК-алгоритме используются особенности структуры нормальных уравнений, что позволяет получить аналогичное решение с помощью значительно более экономной в вычислительном отношении процедуры, поскольку требуемое в этом случае количество вычислительных операций пропорционально величине p. Этот быстрый РНК-алгоритм является последовательным аналогом быстрых алгоритмов блочной обработки, описанных в гл. 8.

9.4.1. Классический рекурсивный алгоритм наименьших квадратов

Традиционный РНК-алгоритм [14] позволяет по мере поступления каждого нового отсчета данных получать точное рекурсивное решение наименьших квадратов для коэффициентов линейного предсказания. Заметим, что матрицу $\mathbf{R}_{p,N}$ можно записать в виде следующего разложения:

$$\mathbf{R}_{p,N}\bar{\mathbf{a}}_{p,N}=\begin{pmatrix} r_{p,N}[0,\ 0] & \mathbf{r}^H_{p,N} \\ \mathbf{r}_{p,N} & \mathbf{R}_{p-1,N-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \mathbf{a}_{p,N}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\rho^f_{p,N}\\ \mathbf{0}_p\end{pmatrix}, \quad (9.16)$$

где

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{p-1,N-1}&=\sum_{n=1}^{N}\omega^{N-n}\mathbf{x}^*_{p-1}[n-1]\,\mathbf{x}^T_{p-1}[n-1]=\\ &=\sum_{n=1}^{N-1}\omega^{N-1-n}\mathbf{x}^*_{p-1}[n]\,\mathbf{x}^T_{p-1}[n],\\ \mathbf{r}_{p,N}&=\sum_{n=1}^{N}\omega^{N-n}\mathbf{x}^*_{p-1}[n-1]\,x[n],\\ r_{p,N}[0,\ 0]&=\sum_{n=1}^{N}\omega^{N-n}|x[n]|^2.\end{aligned} \quad (9.17)$$

Это позволяет записать раздельные уравнения для $\rho^f_{p,N}$ и $\mathbf{a}_{p,N}$:

$$\mathbf{R}_{p-1,N-1}\mathbf{a}_{p,N}=-\mathbf{r}_{p,N}, \quad (9.18)$$

$$\rho^f_{p,N}=r_{p,N}[0,\ 0]+\mathbf{r}^H_{p,N}\mathbf{a}_{p,N}. \quad (9.19)$$

Используя определение

$$\mathbf{P}_{N-1}=\mathbf{R}^{-1}_{p-1,N-1}, \quad (9.20)$$

получаем следующее решение для вектора $\mathbf{a}_{p,N+1}$, соответствующего временно́му индексу $N+1$:

$$\mathbf{a}_{p,N+1}=-\mathbf{P}_N\mathbf{r}_{p,N+1}. \quad (9.21)$$

Используя тождество

$$\mathbf{r}_{p,N+1}=\omega\mathbf{r}_{p,N}+\mathbf{x}^*_{p-1}[N]\,x[N+1], \quad (9.22)$$

справедливость которого можно показать, анализируя определение (9.17), получаем

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_{p,N+1}&=-\mathbf{P}_N(\omega\mathbf{r}_{p,N}+\mathbf{x}^*_{p-1}[N]\,x[N+1])=\\ &=-\mathbf{P}_N(\omega\mathbf{P}^{-1}_{N-1}\mathbf{P}_{N-1}\mathbf{r}_{p,N}+\mathbf{x}^*_{p-1}[N]\,x[N+1])=\\ &=\mathbf{P}_N(\omega\mathbf{P}^{-1}_{N-1}\mathbf{a}_{p,N}-\mathbf{x}^*_{p-1}[N]\,x[N+1]).\end{aligned} \quad (9.23)$$

Используя далее тождество

$$\omega\mathbf{P}^{-1}_{N-1}=\mathbf{P}^{-1}_N-\mathbf{x}^*_{p-1}\mathbf{x}^T_{p-1}[N], \quad (9.24)$$

справедливость которого нетрудно показать, анализируя определение матрицы $\mathbf{R}_{p-1,N-1}$ в (9.17) и выполняя в соответствии с ним подстановку в уравнение (9.23), получаем

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_{p,\,N+1} &= \mathbf{a}_{p,\,N} - \mathbf{P}_N \mathbf{x}^*_{p-1}[N]\,(\mathbf{x}^T_{p-1}[N]\,\mathbf{a}_{p,\,N} + x[N+1]) = \\ &= \mathbf{a}_{p,\,N} - e^f_{p,\,N}[N+1]\,\mathbf{P}_N \mathbf{x}^*_{p-1}[N] = \qquad (9.25)\\ &= \mathbf{a}_{p,\,N} - e^f_{p,\,N}[N+1]\,\mathbf{c}_{p-1,\,N}, \qquad (9.26)\end{aligned}$$

где вектор $\mathbf{c}_{p-1,N}$ определяется выражением

$$\mathbf{c}_{p-1,\,N} = \mathbf{P}_N \mathbf{x}^*_{p-1}[N]. \qquad (9.27)$$

Скалярная величина $e^f{}_{p,N}[N+1]$ — это *остаточная ошибка фильтра*, а не *ошибка предсказания*, так как используется вектор параметров $\mathbf{a}_{p,N}$, а не вектор параметров $\mathbf{a}_{p,N+1}$.

Различие между адаптивными РНК- и НСК-алгоритмами нетрудно видеть, сравнивая уравнения обновления параметров (9.8) и (9.25). Эти уравнения идентичны и различаются лишь множителями, соответствующими адаптивным коэффициентам усиления. В НСК-алгоритме этот коэффициент равен 2μ и является *постоянной скалярной величиной*. В РНК-алгоритме адаптивный коэффициент $\mathbf{P}_N$ представляет собой *изменяющуюся во времени матрицу*. Выражение, необходимое для обновления матрицы $\mathbf{P}_N$ во времени, можно получить, применяя к выражению (9.24) лемму об обращении матрицы [см. гл. 3, выражение (3.53)], что дает

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_N &= (\omega \mathbf{P}^{-1}_{N-1} + \mathbf{x}^*_{p-1}[N]\,\mathbf{x}^T_{p-1}[N])^{-1} = \\ &= \omega^{-1}\left[\mathbf{P}_{N-1} - \frac{\mathbf{P}_{N-1}\mathbf{x}^*_{p-1}[N]\,\mathbf{x}^T_{p-1}[N]\,\mathbf{P}_{N-1}}{(\omega + \mathbf{x}^T_{p-1}[N]\,\mathbf{P}_{N-1}\mathbf{x}^*_{p-1}[N])}\right]. \qquad (9.28)\end{aligned}$$

Используя (9.28), нетрудно показать, что

$$\mathbf{c}_{p-1,\,N} = \mathbf{P}_{N-1}\mathbf{x}^*_{p-1}[N]/(\omega + \mathbf{x}^T_{p-1}[N]\,\mathbf{P}_{N-1}\mathbf{x}^*_{p-1}[N]), \qquad (9.29)$$

поэтому уравнение (9.28) можно записать в следующем упрощенном виде:

$$\mathbf{P}_N = \omega^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{c}_{p-1,\,N}\mathbf{x}^T_{p-1}[N])\,\mathbf{P}_{N-1}. \qquad (9.30)$$

Завершает этот РНК-алгоритм обновление $\rho^f{}_{p,N+1}$, выражение для которого получается из выражений (9.19) и (9.22).

Уравнения (9.26), (9.29) и (9.30) составляют основу базового РНК-алгоритма. Их структура аналогична структуре уравнений для фильтра Калмана, используемых в стохастической теории управления. Вектор $\mathbf{x}_{p-1}[N]$ и матрица $\mathbf{P}_{N-1}$, которые составлены из отсчетов данных, аналогичны корреляционному вектору и корреляционной матрице в задаче калмановской фильтрации, а вектор $\mathbf{c}_{p-1,N}$ является аналогом *вектора коэффициентов усиления фильтра Калмана*. Заметим также, что из-за необходи-

мости обновления матриц в соответствии с выражениями (9.29) и (9.30) количество вычислительных операций, требуемых этим РНК-алгоритмом на одно обновление во времени, пропорционально величине p^2, что резко контрастирует с НСК-алгоритмом, вычислительные затраты которого пропорциональны величине p.

Для того чтобы начать рекурсию, необходимо задать начальные значения вектора АР-параметров $\mathbf{a}_0$ и матрицы коэффициентов усиления $\mathbf{P}_0$. К выбору $\mathbf{a}_0$ следует относиться весьма тщательно, с тем чтобы устранить смещение в оценке вектора АР-параметров $\mathbf{a}_N$, которая будет получена после обработки N отсчетов данных. Приравнивая матрицу $\mathbf{R}_{p,0}$ некоторой диагональной матрице $\varepsilon\mathbf{I}$, где ε — небольшая положительная константа, мы гарантируем, что она будет обратима, так что $\mathbf{P}_0 = 1/\varepsilon\mathbf{I}$. Влияние ε с ростом N постепенно ослабевает. РНК-алгоритм чувствителен к ухудшению численной обусловленности, вызванному шумом округления, который накапливается в процессе рекурсивных вычислений. Для частичного возмещения связанной с этим численной неустойчивости были предложены алгоритмы факторизации методом квадратного корня, основанные на треугольном разложении симметричной матрицы $\mathbf{P}_N$ [1].

9.4.2. Быстрый рекурсивный алгоритм наименьших квадратов

Классический РНК-алгоритм предназначен для решения обычных линейных задач минимизации по методу наименьших квадратов. Однако структура уравнения (9.16) обладает дополнительными свойствами, которые можно использовать для построения более эффективного алгоритма, все еще позволяющего получать точное решение по методу наименьших квадратов. Эти свойства аналогичны использованным в гл. 8 при выводе быстрого блочного алгоритма. Быстрые блочные алгоритмы были рекурсивными по порядку, но фиксированными по времени (поскольку использовался блок данных из N отсчетов). Применяя аналогичный подход, можно создать быстрый РНК-алгоритм, но в отличие от быстрых блочных алгоритмов он будет рекурсивным по времени и фиксированным по порядку. Подробности вывода быстрого РНК-алгоритма и машинная программа его реализации приведены в приложении 9.В. Ключевой в быстром алгоритме является процедура обновления для вектора коэффициентов усиления $\mathbf{c}_{p-1,N}$ в уравнении (9.26), в которой используются только операции над векторами, а не над матрицами, как, например, в уравнениях (9.29) и (9.30). Вычислительные затраты, требуемые полным РНК-алгоритмом, уменьшаются с p^2 до точно $5p$ операций (умножений/сложений), что в 2,5 раза больше вычислительных затрат для НСК-алгоритма, который требует $2p$ операций. В вычислительном отношении это делает дан-

ный быстрый РНК-алгоритм сравнимым с НСК-алгоритмом. Заметим также, что бытует тенденция называть быстрый РНК-алгоритм «быстрым алгоритмом Калмана», но это не совсем правильно из-за неслучайного характера детерминированного решения по методу наименьших квадратов.

Быстрый РНК-алгоритм обладает двумя дополнительными достоинствами, которые отсутствуют у классического РНК-алгоритма. При выполнении быстрого РНК-алгоритма вычисляются и обновляются также и коэффициенты линейного предсказания назад $a^b_{p,N}[k]$, которые минимизируют сумму квадратов ошибок линейного предсказания назад

$$\rho^b_{p,N} = \sum_{n=1}^{N} \omega^{N-n} |e^b_{p,N}[n]|^2,$$

где

$$e^b_{p,N}[n] = x[n-p] + \sum_{k=1}^{p} a^b_{p,N}[k]\, x[n-p+k]$$

вычисляется и сама сумма $\rho^b_{p,N}$. Это может оказаться полезным для методов определения экспоненциальных сигналов, таких, например, которые описаны в разд. 11.9.

Для того чтобы матрица $\mathbf{R}_{p,N}$ стала несингулярной, требуется как минимум $p+1$ отсчетов данных (ранг этой матрицы равен $p+1$). В классическом РНК-алгоритме эта трудность инициализации устраняется посредством выбора произвольных начальных значений $\mathbf{P}_0$ и $\mathbf{a}_{p,0}$, что приводит к некоторому смещению получаемых оценок. Быстрый РНК-алгоритм, описанный в приложении 9.В, снабжен программой одновременного обновления по порядку и во времени, которая предназначена для инициализации этого алгоритма. Данная программа обрабатывает первые $p+1$ отсчетов таким образом, что в момент времени обновления $N=p+1$ всем параметрам устанавливаются их точные значения, вычисленные по методу наименьших квадратов по этим первым $p+1$ отсчетам данных. В результате смещение, обусловленное инициализацией в классическом РНК-алгоритме, в быстром РНК-алгоритме устраняется.

Быстрый РНК-алгоритм обладает, по всей видимости, плохой долговременной численной устойчивостью, но он все же достаточно точен при использовании записей данных короткой и средней длины. Отмечалось [3], что при продолжительной работе РНК-алгоритма в адаптивном режиме его характеристики расходятся. Это обусловлено накоплением ошибок при вычислениях с конечной точностью, особенно в том случае, когда матрица $\mathbf{R}_{p,N}$ почти сингулярна, что может иметь место при анализе узкополосных сигналов. Для устранения сингулярности этой мат-

рицы к входному сигналу можно, например, добавить слабый белый шум. Линь [11] прибег к «спасительному» решению, основанному на повторной инициализации вектора коэффициентов усиления. Для увеличения динамического диапазона вычислительных машин с ограниченной точностью и улучшения характеристик можно использовать быстрый РНК-алгоритм нормированного корня квадратного [4]. Однако эти нормированные алгоритмы по существу удваивают вычислительную сложность, поскольку уменьшение вдвое требуемой точности оборачивается необходимостью хранения и вычисления параметров этих алгоритмов. Использование $\omega \ll 1$ приводит, по-видимому, к появлению в алгоритме значительного собственного шума [13]. РНК-алгоритм сходится экспоненциально и равномерно независимо от разброса собственных значений автокорреляционной матрицы сигнала; его сходимость зависит лишь от весового множителя ω после изменений на входе (начальная сходимость от ω не зависит).

9.4.3. Сравнение характеристик РНК- и НСК-алгоритмов

График, характеризующий типичные характеристики сходимости РНК- и НСК-алгоритмов, представлен на рис. 9.3. К установившемуся (стационарному) состоянию РНК-алгоритм обычно сходится быстрее, но никогда не медленнее, чем НСК-алгоритм. При наличии сильного шума, т. е. в том случае, когда разброс собственных значений автокорреляционной матрицы невелик, РНК- и НСК-алгоритмы имеют сравнимые скорости сходимости. Собственный шум, генерируемый при градиентной оценке методом НСК-алгоритма, проявляется в виде некоторого смещения дисперсии выхода фильтра и некоторой расстройки параметров фильтра предсказания. Уровень смещения и расстройку можно снизить, уменьшая значение постоянной времени адаптации μ, однако это приводит к увеличению времени сходимости НСК-алгоритма, о чем свидетельствует рис. 9.3. В случае НСК-алгоритма скорость сходимости и шум из-за расстройки параметров фильтра предсказания взаимосвязаны, поэтому ни одну из этих характеристик нельзя улучшить, не оказав ухудшающего воздействия на другую.

Если НСК- и РНК-алгоритмы реализуются аппаратными средствами для выполнения спектрального оценивания в реальном времени, то на характеристики этих двух адаптивных алгоритмов будут влиять ошибки квантования и ошибки округления из-за малой длины машинного слова и использования арифметических операций с фиксированной запятой [10]. Ошибки округления могут накапливаться и расти с течением времени до тех пор, пока не будет нарушена нормальная работа алгоритма.

Рис. 9.3. Типичные характеристики сходимости градиентного алгоритма МНСК и точного алгоритма РМНК. (СКО — среднеквадратичная ошибка.)

В случае РНК-алгоритма можно, выбирая $\omega<1$, ограничить величину накопленной ошибки округления и сохранить устойчивость фильтра, хотя это и приведет к ухудшению точности вычисляемых значений параметров предсказания. В одном из экспериментов было показано [13], что для нормальной работы РНК-алгоритма для представления чисел необходимо использовать не менее 10 двоичных разрядов, тогда как для нормальной работы НСК-алгоритма достаточно 7 двоичных разрядов. Оба алгоритма имеют сравнимые характеристики, если для этой цели используется не менее 12 двоичных разрядов.

9.5. Быстрые авторегрессионные методы на основе решетчатых фильтров

В гл. 7 было показано, что любой АР(p)-процесс допускает эквивалентное представление либо с помощью параметров предсказания, либо с помощью коэффициентов отражения. Если используются параметры предсказания, то этот авторегрессионный процесс можно сформировать, пропуская белый шум через трансверсальный (т. е. реализованный на линии задержки с отводами) фильтр; параметрами предсказания в этом случае являются весовые коэффициенты этого фильтра. Если же используются коэффициенты отражения, то эквивалентный авторегрессионный процесс можно сформировать, пропуская белый шум через решетчатый фильтр; коэффициентами отражения в этом случае будут весовые коэффициенты этого решетчатого фильтра. Быстрый РНК-алгоритм может быть переформирован в математически эквивалентный быстрый решетчатый алгоритм. Такой алгоритм также дает точное решение по методу наименьших квадратов, как и трансверсальный фильтр, но выраженное, естественно, через коэффициенты отражения, а не через (АР)

параметры линейного предсказания. Быстрый решетчатый алгоритм требует выполнения вдвое большего количества вычислительных операций, чем быстрый РНК-алгоритм. Те читатели, которые хотели бы подробнее ознакомиться с быстрыми решетчатыми алгоритмами, основанными на методе наименьших квадратов, могут обратиться к статьям [6, 7, 16] или к книге [9].

Параметры предсказания, определяемые с помощью быстрого РНК-алгоритма, после любого шага обновления во времени можно непосредственно (сразу же) использовать для вычисления АР-оценки СПМ. Что же касается коэффициентов отражения, определяемых с помощью быстрого решетчатого алгоритма по методу наименьших квадратов, то их, используя какую-либо рекурсию типа рекурсии Левинсона, необходимо для этой цели сначала преобразовать к эквивалентным параметрам предсказания. Это потребует примерно p^2 вычислительных операций на любом шаге обновления во времени, для которого необходимо вычислить спектральную функцию. Эта двухэтапная процедура и большие дополнительные вычислительные затраты являются одним из недостатков применения решетчатого алгоритма для авторегрессионного спектрального оценивания, особенно при необходимости частых обновлений получаемых спектральных оценок. Однако быстрые решетчатые алгоритмы обладают более высокой численной устойчивостью, что может оказаться полезным при их аппаратной реализации. Характеристики решетчатых алгоритмов менее чувствительны к шуму округления и ошибкам квантования коэффициентов, чем быстрый РНК-алгоритм. Быстрые решетчатые алгоритмы также дают решения наименьших квадратов всех более низких порядков, поэтому порядок фильтра может быть изменен на любом шаге обновления во времени.

9.6. Приложение к числам солнечных пятен

Заметим сразу, что 230 отсчетов фильтрованной последовательности чисел солнечных пятен — это слишком мало для достижения сходимости при использовании адаптивного НСК-алгоритма. Поэтому был испытан один лишь РНК-алгоритм. Возможности слежения быстрого РНК-алгоритма при различных значениях экспоненциального весового коэффициента ω иллюстрирует рис. 9.4. На рис. 9.4, *а* показана типичная спектральная оценка, полученная с помощью АР-модели 15-го порядка. Этот спектр получен в результате последовательной обработки 115 отсчетов за период времени с 1885,5 по 1913,0 г. с $\omega = 0{,}98$. Кривые, показанные на рис. 9.4, *б*, отображают последовательное положение доминирующего пика в этом спектре, которое в получаемой авторегрессионной оценке определялось после каждого

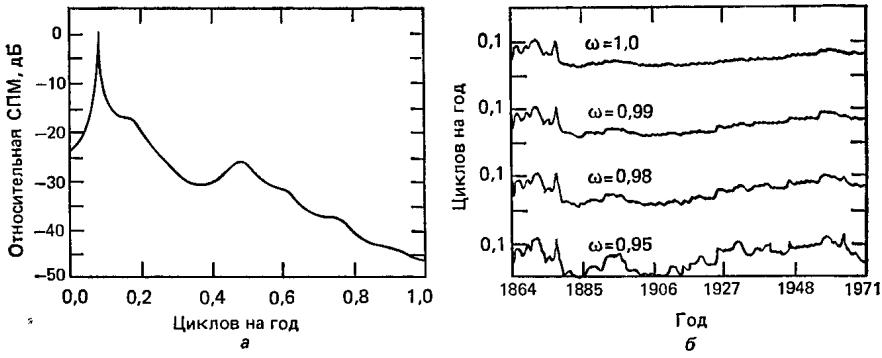


Рис. 9.4. Иллюстрация способности быстрого алгоритма РМНК отслеживать основной цикл изменения числа солнечных пятен: *а* — типичная спектральная АР(15)-оценка после 115 отсчетов с $\omega=0{,}98$; *б* — положение наибольшего пика в спектре как функция года для четырех значений весового коэффициента (каждое деление по вертикальной оси соответствует 0,02 цикла на год).

обновления отсчета данных. Эти кривые соответствуют четырем значениям ω и позволяют судить о характеристиках слежения использованного алгоритма. Длина эффективного экспоненциального окна, выражаемая в отсчетах данных, приближенно определялась по формуле $1/(1-\omega)$; следовательно, четырем значениям ω, указанным на рис. 9.4, *б*, соответствует эффективное окно длиной 20, 50, 100 и ∞ отсчетов. Нестационарность доминирующего цикла солнечных пятен, обнаруженная ранее на графике из расположенных друг над другом периодограмм, с очевидностью подтверждается и вариациями кривых, показанных на рис. 9.4, *б*.

Литература

[1] *Bierman G. J.* Factorization Methods for Discrete Sequential Estimation. Academic Press, Inc., New York, 1977.

[2] *Carayannis G., Manolakis D. G., Kalouptsidis N.* A Fast Sequential Algorithm for Least Squares Filtering and Prediction. IEEE Acoust. Speech Signal Process., vol. ASSP-31, pp. 1394—1402, December 1983.

[3] *Cioffi J. M., Kailath T.* Fast, Recursive-Least-Squares, Transversal Filters for Adaptive Filtering. IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., vol. ASSP-32, pp. 304—337, April 1984.

[4] *Fabre P., Gueguen C.* Improvement of the Fast Recursive Least-Squares Algorithms via Normalization: A Comparative Study. IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., vol. ASSP-34, pp. 296—308, April 1986.

[5] *Falconer D. D., Ljung L.* Application of Fast-Kalman Estimation to Adaptive Equalizations. IEEE Trans. Commun., vol. COM-26, pp. 1439—1446, October 1978.

[6] *Friedlander B.* Lattice Filters for Adaptive Processing. Proc. IEEE, vol. **70**, pp. 829—867, August 1982. [Имеется русский перевод: *Фридландер Б.*

Решетчатые фильтры для адаптивной обработки данных. ТИИЭР, 1982, т. 70, № 8, с. 54—97.]
[7] *Friedlander B.* Recursive Lattice Forms for Spectral Estimation. IEEE Trans. Acoust Speech Signal Process., vol. ASSP-30, pp. 920—930, December 1982.
[8] *Griffiths L. J.* Rapid Measurements of Digital Instantaneous Frequency. IEEE Trans. Speech Signal Process., vol. ASSP-23, pp. 207—222, April 1975.
[9] *Honig M., Messerschmitt D.* Adaptive Filters: Structures, Algorithms, and Applications. Kluwer Academic Publishers, Hingham, Mass., 1984.
[10] *Lawrence V. B., Tewksbury S. K.* Microprocessor Implementation of Adaptive Digital Filters. IEEE Trans. Commun., vol. COM-31, pp. 826—835, June 1983.
[11] *Lin D. W.* On Digital Implementation of the Fast Kalman Algorithm. IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., vol. ASSP-32, pp. 998—1006, October 1983.
[12] *Ling F., Proakis J. G.* Nonstationary Learning Characteristics of Least Squares Adaptive Estimation Algorithms. Proceedings 1984 International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, paper 3.7, 1984.
[13] *Ling F., Proakis J. G.* Numerical Accuracy and Stability: Two Problems of Adaptive Estimation Algorithms Caused by Round-off Error. Proceedings 1984 International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, paper 30.3, 1984.
[14] *Ljung L., Söderström T.* Theory and Practice of Recursive Identification. The MIT Press, Cambridge, Mass., 1983.
[15] *Ljung L., Morf M., Falconer D.* Fast Calculation of Gain Matrices for Recursive Estimation Schemes. Int. J. Control, vol. 27, pp. 1—19, January 1978.
[16] *Satorius E. H., Pack J. D.* Application of Least Squares Lattice Algorithms to Adaptive Equalization. IEEE Trans. Commun., vol. COM-29, pp. 136—142, February 1981.
[17] *Widrow B., Stearns S. D.* Adaptive Signal Processing. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1985.

Задачи

1. Доказать соотношение (9.29).
2. Доказать, что метод предвзвешивания дает устойчивый фильтр до тех пор, пока матрица $\mathbf{R}_{p,N}$ обратима.
3. Доказать, что $0 \leqslant \gamma_{p,N} \leqslant 1$ в быстром РНК-алгоритме и что $\gamma_{p,N}$ — действительная величина. Показать также, что аналогичные результаты справедливы для $\gamma_{p,N-1}$ и $\gamma_{p-1,N+1}$.
4. Доказать, что

$$\gamma_{p,\,N+1} = \frac{\det \mathbf{R}_{p,\,N+1}}{\det \mathbf{R}_{p,\,N}}, \quad \rho^f_{p,\,N+1} = \frac{\det \mathbf{R}_{p+1\,N+1}}{\det \mathbf{R}_{p,\,N}}, \quad \rho^b_{p,\,N+1} = \frac{\det \mathbf{R}_{p+1,\,N+1}}{\det \mathbf{R}_{p,\,N+1}}.$$

   Это означает, что условие γ, ρ^f, $\rho^b > 0$ гарантирует обратимость матрицы $\mathbf{R}_{p,N}$.
5. Ввести в подпрограмму FASTRLS сравнимые с подпрограммой COVAR проверки плохой численной обусловленности, основанные на проверке переменных γ и проверке положительности квадратичной ошибки предсказания.

6. Пусть $\psi_{p,N}=\gamma^{-1}{}_{p,N}$. Тогда показать, что альтернативные обновления для уравнений (9.B.28) и (9.B.30) будут иметь форму

$$\psi_{p,\,N+1}=\left(\frac{\omega\rho^f_{p,\,N}}{\rho^f_{p,\,N+1}}\right)\psi_{p-1,\,N},$$

$$\psi_{p-1,\,N+1}=\psi_{p,\,N+1}\left(1-\psi_{p,\,N+1}c_{p,\,N+1}[p]\,e^b_{p,\,N}[N+1]\right)^{-1}=$$
$$=\psi_{p,\,N+1}\left(2-\frac{\rho^b_{p,\,N+1}}{\omega\rho^b_{p,\,N}}\right).$$

Показать, каким образом следует изменить реализацию подпрограммы FASTRLS, с тем чтобы вместо параметра GAMMA использовать в ней параметр PSI.

Приложение 9.А.
Программа сдвигового регистра

```
      Подпрограмма SHIFT (X,IP,SAMPLE)
C
C  Предназначена для обновления данных в сдвиговом регистре
C
C  Параметры:
C
C    X         — массив отсчетов комплексных данных от X(1) [текущий
C                отсчет] до X(IP) [самый старый отсчет].
C    IP        — целочисленная скалярная величина, характеризующая
C                длину вектора данных.
C    SAMPLE    — комплексная скалярная величина, соответствующая по-
C                следнему по времени отсчету данных.
C
C  Размер .GE. IP+1 внешнего массива X должен указываться в вызываю-
C  щей программе.
C
      COMPLEX X(1),SAMPLE
      DO 10 K=IP+1, 2, -1
10       X(K)=X(K-1)
      X(1)=SAMPLE
      RETURN
      END
```

Приложение 9.Б.
Программа адаптивного НСК-алгоритма

Эта подпрограмма предназначена для реализации адаптивного НСК-алгоритма, описанного в разд. 9.3. Она вызывается после каждого вызова подпрограммы SHIFT, которая обновляет содержимое сдвигового регистра данных.

```
      Подпрограмма LMS (IP,U,X,A)
C
C  Предназначена для реализации последовательного адаптивного НСК-ал-
C  горитма.
```

```
C
C  Входные параметры:
C
C     IP — целочисленная скалярная величина, характеризующая длину
C          фильтра.
C     U  — действительная скалярная величина, характеризующая размер ша-
C          га адаптации.
C     X  — массив отсчетов комплексных данных, внесенных во входной сдви-
C          говый регистр.
C
C  Выходные параметры:
C
C     A  — массив комплексных АР-параметров (адаптивных весов).
C
C  Примечание:
C     Размер .GE. IP+1 внешнего массива X и размер .GE. IP массива A
C     должны указываться в вызывающей программе.
C
      COMPLEX X(1),A(1),EF
      EF=X(1)
      DO 10 K=1,IP
10       EF=EF+A(K)*X(K+1)          ! (9.3)
      DO 20 K=1,IP
20       A(K)=A(K)-2.*U*EF*X(K+1)   ! (9.8)
      RETURN
      END
```

Приложение 9.В. Быстрый РНК-алгоритм и программа для решения экспоненциально взвешенных уравнений линейного предсказания

9.В.1. Введение

Этот алгоритм основан на быстрой рекурсивной процедуре адаптивной фильтрации по методу наименьших квадратов, которая была предложена и исследована в работах [15, 5, 2, 3].

Ошибки линейного предсказания вперед и назад p-го порядка, определяемые по всем имеющимся отсчетам данных вплоть до временного индекса N, можно записать в виде следующих внутренних (или скалярных) произведений векторов:

$$e^f_{p,N}[n] = \mathbf{x}^f_p[n]\,\mathbf{a}^f_{p,N}, \tag{9.В.1}$$

$$e^b_{p,N}[n] = \mathbf{x}^T_p[n]\,\mathbf{a}^b_{p,N}, \tag{9.В.2}$$

где вектор данных $\mathbf{x}_p[n]$, векторы коэффициентов линейного предсказания вперед $\mathbf{a}^f_{p,N}$ и коэффициентов линейного предска-

зания назад $\mathbf{a}^b_{p,N}$ определяются следующими выражениями:

$$\mathbf{x}_p[n]=\begin{pmatrix} x[n] \\ x[n-1] \\ \vdots \\ x[n-p] \end{pmatrix},\quad \mathbf{a}^f_{p,N}=\begin{pmatrix} 1 \\ a^f_{p,N}[1] \\ \vdots \\ a^f_{p,N}[p] \end{pmatrix},\quad \mathbf{a}^b_{p,N}=\begin{pmatrix} a^b_{p,N}[p] \\ \vdots \\ a^b_{p,N}[1] \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad (9.B.3)$$

Используя отсчеты комплексных данных $x[1], \ldots, x[N]$, с помощью метода предвзвешивания можно раздельно минимизировать суммы экспоненциально-взвешенных квадратов ошибок линейного предсказания вперед и назад

$$\rho^f_{p,N}=\sum_{n=1}^{N}\omega^{N-n}|e^f_{p,N}[n]|^2,\quad \rho^b_{p,N}=\sum_{n=1}^{N}\omega^{N-n}|e^b_{p,N}[n]|^2, \qquad (9.B.4)$$

в результате чего приходим к следующим нормальным уравнениям:

$$\mathbf{R}_{p,N}\ \mathbf{a}^f_{p,N}=\begin{pmatrix}\rho^f_{p,N}\\ \mathbf{0}_p\end{pmatrix},\quad \mathbf{R}_{p,N}\ \mathbf{a}^b_{p,N}=\begin{pmatrix}\mathbf{0}_p\\ \rho^b_{p,N}\end{pmatrix}, \qquad (9.B.5)$$

где $\mathbf{0}$ — $(p\times 1)$-нуль-вектор. Эффективная длина окна в данном случае равна приблизительно $1/(1-\omega)$. Эквивалентное диадическое векторное представление матрицы $\mathbf{R}_{p,N}$ имеет вид

$$\mathbf{R}_{p,N}=\sum_{n=1}^{N}\omega^{N-n}\mathbf{x}^*_p[n]\,\mathbf{x}^T_p[n], \qquad (9.B.6)$$

а ее элементы определяются выражением

$$r_{p,N}[j,\ k]=\sum_{n=1}^{N}\omega^{N-n}x[n-k]\,x^*[n-j],$$

где $0\leqslant j,\ k\leqslant p$.

9.B.2. Специальные разложения и вспомогательные параметры

Важным для построения быстрого РНК-алгоритма является следующее разложение $(p+1)\times(p+1)$-матрицы $\mathbf{R}_{p,N}$ по индексу порядка:

$$\mathbf{R}_{p,N}=\begin{pmatrix}\mathbf{R}_{p-1,N} & \mathbf{s}_{p,N}\\ \mathbf{s}^H_{p,N} & r_{p,N}[p,\ p]\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r_{p,N}[0,0] & \mathbf{r}^H_{p,N}\\ \mathbf{r}_{p,N} & \mathbf{R}_{p-1,N-1}\end{pmatrix}, \qquad (9.B.7)$$

где $(p\times 1)$-вектор-столбцы $\mathbf{r}_{p,N}$ и $\mathbf{s}_{p,N}$ определяются выражениями

$$\mathbf{r}_{p,N}=\begin{bmatrix} r_{p,N}[1,0] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ r_{p,N}[p,0] \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s}_{p,N}=\begin{bmatrix} r_{p,N}[0,p] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ r_{p,N}[p-1,p] \end{bmatrix}. \tag{9.B.8}$$

Важным также является следующее разложение этой матрицы по временно́му индексу:

$$\mathbf{R}_{p,N}=\omega\mathbf{R}_{p,N-1}+\mathbf{x}_p^*[N]\,\mathbf{x}_p^T[N], \tag{9.B.9}$$

которое получается непосредственно из выражения (9.B.6).

Применяя к обоим разложениям в (9.B.7) лемму об обращении матрицы, после достаточно длинных матричных преобразований получаем

$$\mathbf{R}_{p,N}^{-1}=\begin{pmatrix} \mathbf{R}_{p-1,N}^{-1} & \mathbf{0}_p \\ \mathbf{0}_p^H & 0 \end{pmatrix}+\mathbf{a}_{p,N}^b\mathbf{a}_{p,N}^{b\,H}/\rho_{p\ N}^b, \tag{9.B.10}$$

$$\mathbf{R}_{p,N}^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}_p^H \\ \mathbf{0}_p & \mathbf{R}_{p-1,N-1}^{-1} \end{pmatrix}+\mathbf{a}_{p,N}^f\mathbf{a}_{p,N}^{f\,H}/\rho_{p,N}^f. \tag{9.B.11}$$

Для вывода алгоритма нам также потребуется $(p+1)\times 1$-вектор-столбец коэффициентов усиления $\mathbf{c}_{p,N}$, определяемый из уравнения

$$\mathbf{R}_{p,N-1}\mathbf{c}_{p,N}=\omega^{-1}\mathbf{x}_p^*[N], \tag{9.B.12}$$

Заметим, что этот вектор определяется несколько иначе, чем дополнительный вектор, требуемый при выводе быстрых блочных алгоритмов в гл. 8, поскольку теперь используется матрица $\mathbf{R}_{p,N-1}$, а не матрица $\mathbf{R}_{p,N}$. Вектор-столбец $\mathbf{c}_{p,N}$ имеет следующий вид:

$$\mathbf{c}_{p,N}=\begin{bmatrix} c_{p,N}[0] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_{p,N}[p] \end{bmatrix}.$$

9.B.3. Рекурсии обновления во времени

Обновление вектора коэффициентов линейного предсказания вперед по временно́му индексу производится в соответствии с выражением

$$\mathbf{a}_{p,N+1}^f=\mathbf{a}_{p,N}^f-e_{p,N+1}^f[N+1]\begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{c}_{p-1,N} \end{pmatrix}, \tag{9.B.13}$$

правильность которого можно проверить, умножая слева обе части этого равенства на матрицу $\mathbf{R}_{p,N+1}$ и подставляя далее соответствующее разложение либо по временно́му индексу (9.В.9), либо по индексу порядка (9.В.7). Побочным результатом этой проверки является выражение для обновления во времени действительнозначного квадрата ошибки линейного предсказания вперед:

$$\rho^f_{p,N+1} = \omega\rho^f_{p,N} + e^f_{p,N+1}[N+1](x^*[N+1] - \mathbf{r}^H_{p,N}\mathbf{c}_{p-1,N}) = \\ = \omega\rho^f_{p,N} + e^f_{p,N+1}[N+1]\, e^{f*}_{p,N}[N+1]. \qquad (9.В.14)$$

Умножая слева обе части уравнения (9.В.13) на вектор $\mathbf{x}_p{}^T[N+1]$, получаем

$$e^f_{p,N+1}[N+1] = e^f_{p,N}[N+1] - e^f_{p,N+1}[N+1](\mathbf{x}^T_{p-1}[N]\,\mathbf{c}_{p-1,N}), \qquad (9.В.15)$$

или в более краткой форме (связывающей остаточную ошибку фильтра с ошибкой предсказания)

$$e^f_{p,N+1}[N+1] = e^f_{p,N}[N+1]/\gamma_{p-1,N}, \qquad (9.В.16)$$

где по определению $\gamma_{p-1,N}$ — действительная положительная скалярная величина, вычисляемая в соответствии с выражением

$$\gamma_{p-1,N} = 1 + \mathbf{x}^T_{p-1}[N]\,\mathbf{c}_{p-1,N} = 1 + \omega^{-1}\mathbf{x}^T_{p-1}[N]\,\mathbf{R}^{-1}_{p-1,N-1}\mathbf{x}^*_{p-1}[N]. \qquad (9.В.17)$$

Подставляя (9.В.16) в (9.В.14), получаем

$$\rho^f_{p,N+1} = \omega\rho^f_{p,N} + |e^f_{p,N}[N+1]|^2/\gamma_{p-1,N}, \qquad (9.В.18)$$

что подтверждает действительность и положительность квадрата ошибки.

Обновление вектора коэффициентов линейного предсказания назад по временно́му индексу производится в соответствии с выражением

$$\mathbf{a}^b_{p,N+1} = \mathbf{a}^b_{p,N} - e^b_{p,N+1}[N+1]\begin{pmatrix}\mathbf{c}_{p-1,N+1}\\ 0\end{pmatrix}, \qquad (9.В.19)$$

правильность которого можно проверить, умножая слева обе части этого равенства на матрицу $\mathbf{R}_{p,N+1}$ и подставляя далее соответствующее разложение либо по временно́му индексу (9.В.9), либо по индексу порядка (9.В.7). Побочным результатом этой проверки является выражение для обновления во времени действительнозначного квадрата ошибки линейного предсказания назад

$$\rho^b_{p,N+1} = \omega\rho^b_{p,N} + e^b_{p,N+1}[N+1](x^*[N-p+1] - \mathbf{s}^H_{p,N}\mathbf{c}_{p-1,N+1}) = \\ = \omega\rho^b_{p,N} + e^b_{p,N+1}[N+1]\, e^{b*}_{p,N}[N+1]. \qquad (9.В.20)$$

Умножая слева обе части уравнения (9.B.19) на вектор $\mathbf{x}_p^T[N+1]$, получаем

$$e^b_{p,\,N+1}[N+1]=e^b_{p,\,N}[N+1]-e^b_{p,\,N+1}[N+1]\,(\mathbf{x}^T_{p-1}[N+1]\,\mathbf{c}_{p-1,\,N+1}) \tag{9.B.21}$$

или в более краткой форме

$$e^b_{p,\,N+1}[N+1]=e^b_{p,\,N}[N+1]/\gamma_{p-1,\,N+1}, \tag{9.B.22}$$

где по определению $\gamma_{p-1,N+1}$ — действительная положительная скалярная величина, вычисляемая в соответствии с выражением

$$\begin{aligned}\gamma_{p-1,\,N+1}&=1+\mathbf{x}^T_{p-1}[N+1]\,\mathbf{c}_{p-1,\,N+1}=\\&=1+\omega^{-1}\mathbf{x}^T_{p-1}[N+1]\,\mathbf{R}^{-1}_{p-1,\,N}\mathbf{x}^*_{p-1}[N+1].\end{aligned} \tag{9.B.23}$$

Подставляя (9.B.22) в (9.B.20), получаем

$$\rho^b_{p,\,N+1}=\rho^b_{p,\,N}+|e^b_{p,\,N}[N+1]|^2/\gamma_{p-1,\,N+1}, \tag{9.B.24}$$

что подтверждает действительность и положительность квадрата ошибки.

Полезное скалярное соотношение можно получить из следующей квадратичной формы:

$$\mathbf{c}^H_{p,\,N+1}\mathbf{R}_{p,\,N}\,\mathbf{a}^b_{p,\,N}=(\mathbf{a}^b_{p,\,N}{}^H\mathbf{R}_{p,\,N}\,\mathbf{c}_{p,\,N+1})^*.$$

Это выражение можно записать в виде

$$\mathbf{c}^H_{p,\,N+1}\begin{pmatrix}\mathbf{0}_p\\ \rho^b_{p,\,N}\end{pmatrix}=\mathbf{a}^b_{p,\,N}{}^T\omega^{-1}\mathbf{x}_p[N+1],$$

которое в свою очередь сводится к выражению

$$e^b_{p,\,N}[N+1]=\omega c^*_{p,\,N+1}[p]\,\rho^b_{p,\,N}. \tag{9.B.25}$$

9.B.4. Рекурсии обновления по порядку

Подставляя матрицу $\mathbf{R}^{-1}{}_{p,N}$, определяемую выражением (9.B.11), в уравнение

$$\mathbf{c}_{p,\,N+1}=\omega^{-1}\mathbf{R}^{-1}_{p,\,N}\mathbf{x}^*_p[N+1] \tag{9.B.26}$$

получаем

$$\mathbf{c}_{p,\,N+1}=\omega^{-1}\begin{pmatrix}0 & \mathbf{0}^H_p\\ \mathbf{0}_p & \mathbf{R}^{-1}_{p-1,\,N-1}\end{pmatrix}\mathbf{x}^*_p[N+1]+(\omega\rho^f_{p,\,N})^{-1}\,\mathbf{a}^f_{p,\,N}\mathbf{a}^f_{p,\,N}{}^H\mathbf{x}^*_p[N+1]$$

или

$$\mathbf{c}_{p,\,N+1}=\begin{pmatrix}0\\ \mathbf{c}_{p-1,\,N}\end{pmatrix}+(\omega\rho^f_{p,\,N})^{-1}\,e^{f\,*}_{p,\,N}[N+1]\,\mathbf{a}^f_{p,\,N}. \tag{9.B.27}$$

Выражение (9.В.27) определяет *восходящую рекурсию* для вектора $\mathbf{c}_{p,N+1}$, поскольку это рекурсия от порядка p—1 к порядку p. Умножая слева обе части выражения (9.В.27) на вектор $\mathbf{x}_p^T[N+1]$ и прибавляя к обеим частям единицу, получаем следующее выражение для обновления скалярной величины по порядку:

$$\gamma_{p,\,N+1}=\gamma_{p-1,\,N}+|e^f_{p,\,N}[N+1]|^2/(\omega\rho^f_{p,\,N}). \qquad (9.В.28)$$

Подставляя матрицу $\mathbf{R}^{-1}{}_{p,N}$, определяемую выражением (9.В.10), в уравнение (9.В.26), получаем

$$\mathbf{c}_{p,\,N+1}=\omega^{-1}\begin{pmatrix}\mathbf{R}^{-1}_{p-1,\,N} & \mathbf{0}_p\\ \mathbf{0}_p^H & 0\end{pmatrix}\mathbf{x}_p^*[N+1]+(\omega\rho^b_{p,\,N})^{-1}\mathbf{a}^b_{p,\,N}\mathbf{a}^{b\,H}_{p,\,N}\mathbf{x}_p^*[N+1]$$

или

$$\begin{pmatrix}\mathbf{c}_{p-1,N+1}\\ 0\end{pmatrix}=\mathbf{c}_{p,\,N+1}-(\omega\rho^b_{p,N})^{-1}e^{b*}_{p,\,N}[N+1]\,\mathbf{b}_{p,\,N}. \qquad (9.В.29)$$

Выражение (9.В.29) определяет *нисходящую рекурсию* для вектора $\mathbf{c}_{p-1,N+1}$, поскольку это рекурсия от порядка p к порядку p—1. Умножая слева обе части уравнения (9.В.29) на вектор $\mathbf{x}_p^T[N+1]$ и прибавляя к обеим частям единицу, получаем следующее выражение для обновления скалярной величины по порядку:

$$\begin{aligned}\gamma_{p-1,\,N+1}&=\gamma_{p,\,N+1}-|e^b_{p,\,N}[N+1]|^2/(\omega\rho^b_{p,\,N})=\\&=\gamma_{p,\,N+1}-c_{p,\,N+1}[p]\,e^b_{p,\,N}[N+1]. \qquad (9.В.30)\end{aligned}$$

9.В.5. Инициализация

Установившийся (или стационарный) быстрый РНК-алгоритм для фильтра фиксированного порядка p применяется только в том случае, когда $N>p$; в противном случае нормальные уравнения наименьших квадратов окажутся недоопределенными. Для интервала $1\leqslant N\leqslant p$ можно получить выражения для *одновременного обновления по порядку и во времени*, которые будут давать точное решение наименьших квадратов (N—1)-го порядка по имеющимся N отсчетам данных. С приходом очередного отсчета $x[p+1]$ производится переключение от процедуры инициализации обновления по порядку и во времени к установившемуся РНК-алгоритму фиксированного порядка и обновления во времени, с тем чтобы продолжить получение точного РНК-решения при $N>p$.

При получении первого временно́го отсчета данных $x[1]$ осуществляется инициализация следующих параметров:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^f_{0,1} &= \mathbf{a}^b_{0,1} = 1, \\ \gamma_{-1,1} &= 1, \\ \rho^f_{0,1} &= |x[1]|^2. \end{aligned} \tag{9.B.31}$$

Для отсчетов данных с временны́м индексом, лежащим в интервале $2 \leqslant N \leqslant p+1$, будут справедливы следующие рекурсии по порядку и во времени:

$$\begin{aligned} e^f_{N-2,N-1}[N] &= \mathbf{a}^f{}^T_{N-2,N-1}\mathbf{x}_{N-2}[N], \\ e^f_{N-2,N}[N] &= e^f_{N-2,N-1}[N]/\gamma_{N-3,N-1}, \\ \rho^f_{N-1,N} &= \omega\rho^f_{N-2,N-1}, \\ \gamma_{N-2,N} &= \gamma_{N-3,N-1} + |e^f_{N-2,N-1}[N]|^2/\rho^f_{N-1,N}, \\ \mathbf{a}^f_{N-1,N} &= \begin{pmatrix} \mathbf{a}^f_{N-2,N-1} \\ -e^f_{N-2,N-1}[N]/x[1] \end{pmatrix}, \\ \mathbf{c}_{N-2,N} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{c}_{N-3,N-1} \end{pmatrix} + \frac{e^{f*}_{N-2,N}[N]}{\rho^f_{N-1,N}}\mathbf{a}^f_{N-2,N-1}. \end{aligned} \tag{9.B.32}$$

Следующие значения $\mathbf{a}^b{}_{N-1,N}$ и $\rho^b{}_{N-1,N}$ необходимы для инициализации только в момент времени $N=p+1$:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^b_{p,p+1} &= \begin{pmatrix} -x[1]\mathbf{c}_{p-1,p+1}/\gamma_{p-1,p+1} \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \rho^b_{p,p+1} &= |x[1]|^2/\gamma_{p+1,p}. \end{aligned} \tag{9.B.33}$$

9.B.6. Проверки на плохую численную обусловленность

Обратимость матриц $\mathbf{R}_{p,N}$ и $\mathbf{R}_{p,N+1}$ гарантируется до тех пор, пока скалярные величины $\gamma_{p,N}$ и $\gamma_{p,N+1}$ положительны и лежат в интервале от 0 до 1, а также пока квадраты ошибок $\rho^f{}_{p,N}$ и $\rho^b{}_{p,N}$ положительны. Нарушение этих условий при использовании подпрограммы FASTRLS может быть связано с ухудшением характеристик алгоритма из-за влияния эффектов округления и конечной точности. Матрица $\mathbf{R}_{p,N}$, как нетрудно показать, является положительно определенной матрицей.

При обработке с помощью этого алгоритма 64-точечной тест-последовательности данных, приведенной в приложении II, которое помещено в конце книги, в случае OMEGA=1,0 и IP=15 получаются следующие значения параметров:

```
                    PF=12,47651;
AF( 1)=(  0,367824; —0,741921); AF( 9)=(  0,105724;   0,253750);
AF( 2)=(  0,369765; —0,660722); AF(10)=(  0,257914;   0,106587);
AF( 3)=(—0,245683; —0,445400); AF(11)=(  0,246466; —0,067043);
AF( 4)=(  0,075830; —0,056228); AF(12)=(  0,004733; —0,322168);
AF( 5)=(—0,228449; —0,135792); AF(13)=(—0,283299; —0,098737);
AF( 6)=(—0,056229; —0,146420); AF(14)=(—0,212917;   0,020704);
AF( 7)=(—0,263949; —0,024513); AF(15)=(  0,015728;   0,124406).
AF( 8)=(—0,033696;   0,260718);
```

Заметим, что параметр PF можно использовать в качестве дисперсии ошибки, если поделить его на число обрабатываемых отсчетов данных.

Подпрограмма FASTRLS (INIT,OMEGA,IP,X,PF,AF,PB,AB,GAMMA,C)

```
C
C   Предназначена для реализации быстрого последовательного адаптивного
C   РНК-алгоритма.
C
C   Входные параметры:
C
C     INIT    — целочисленная величина, устанавливаемая в 0 при каж-
C               дой повторной инициализации алгоритма; после первого
C               прогона программа устанавливает его в значение, боль-
C               шее 0.
C     OMEGA   — действительный экспоненциальный весовой множитель
C               (0<OMEGA≤1).
C     IP      — целочисленная скалярная величина, характеризующая
C               длину фильтра.
C     X       — комплексный массив, соответствующий содержимому
C               сдвигового регистра входных данных.
C
C   Выходные параметры:
C
C     PF      — действительная скалярная величина, характеризующая
C               квадрат ошибки линейного предсказания вперед.
C     AF      — массив комплексных параметров линейного предсказания
C               вперед.
C     PB      — действительная скалярная величина, характеризующая
C               квадрат ошибки линейного предсказания назад.
C     AB      — массив комплексных параметров линейного предсказания
C               назад.
C     GAMMA   — действительный скалярный коэффициент усиления.
C     C       — массив комплексных параметров усиления.
C
C   Примечание:
C
C     Размеры .GE. IP+1 внешних массивов X, C и размеры .GE. IP масси-
C     вов AF, AB должны указываться в вызывающей программе. Элементу
C     C(k+1) в программе соответствует элемент c(k) в тексте; здесь
C     0≤k≤IP.
C
C
      COMPLEX SAMPLE, X(1),AF(1),AB(1),C(1),EF,EPF,EB,EPB,TEMP,
                                                          HOLD
      REAL PF,PB,GAMMA,OMEGA,SAVE
```

```
      INTEGER IP,INIT,K,MK
C
C   Сегмент инициализации ! (9.B.31), (9.B.32), (9.B.33)
C
      IF (INIT .GT. IP) GO TO 100
      IF (INIT .NE. 0) GO TO 20
      GAMMA=1.
      PF=REAL(X(1))**2+AIMAG(X(1)) **2
      GO TO 70
20    EF=X(1)
      IF (INIT .EQ. 1) GO TO 40
      DO 30 K=1,INIT-1
30       EF=EF+AF(K)*X(K+1)
40    EPF=EF/GAMMA
      PF=OMEGA*PF
      HOLD=CONJG(EF)/PF
      GAMMA=GAMMA+REAL(EF)*REAL(HOLD)-AIMAG(EF)*
                  AIMAG(HOLD)
      TEMP=X(INIT+1)
      AF(INIT)=-EF/TEMP
      IF (INIT .EQ. 1) GO TO 55
      DO 50 K=INIT-1, 1,-1
50       C(K+1)=C(K)+HOLD*AF(K)
55    C(1)=HOLD
      IF (INIT .LT. IP) GO TO 70
      HOLD=-TEMP/GAMMA
      PB=(REAL(TEMP)**2+AIMAG(TEMP) **2)/GAMMA  ! (9.B.31)
      DO 60 K=1, INIT
60       AB(K)=HOLD*C(INIT+1-K)
70    INIT=INIT+1
      RETURN
C
C - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
C
C   Сегмент обновления предсказания вперед
C
100   SAVE=OMEGA*PF
      EF=X(1)
      DO 110 K=1,IP
110      EF=EF+AK(K)*X(K+1)                          ! (9.B.1)
      EPF=EF/GAMMA                                   ! (9.B.16)
      HOLD=CONJG(EF)/SAVE
      PF=SAVE+REAL(EPF)*REAL(EF)+AIMAG(EPF)*         ! (9.B.14)
                 AIMAG(EF)
C                Здесь может быть выполнена проверка условия PF>0
      GAMMA=GAMMA+REAL(EF)*REAL(HOLD)                ! (9.B.28)
                 -AIMAG(EF)*AIMAG(HOLD)
C           Здесь может быть выполнена проверка условия 0<GAMMA<1
      DO 120 K=IP,1,-1
         TEMP=C(K)
         C(K+1)=TEMP+HOLD*AF(K)                      ! (9.B.27)
120      AF(K)=AF(K)-EPF*TEMP                        ! (9.B.13)
      C(1)=HOLD
C
C - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
C
C   Сегмент обновления предсказания назад
```

```
C
      SAVE=OMEGA*PB
      EB=SAVE*CONJG(C(IP+1))                          ! (9.B.25)
      HOLD=C(IP+1)
      GAMMA=GAMMA-REAL(EB)*REAL(HOLD)                 ! (9.B.30)
     +AIMAG(EB)*AIMAG(HOLD)
C         Здесь может быть выполнена проверка условия 0<GAMMA<1
      EPB=EB/GAMMA                                    ! (9.B.22)
      PB=SAVE+REAL(EPB)*REAL(EB)+AIMAG(EPB)*          ! (9.B.20)
     AIMAG(EB)
C                 Здесь может быть выполнена проверка условия PB>0
      DO 130 K=1,IP
        MK=IP+1-K
        TEMP=C(K)-HOLD*AB(MK)                         ! (9.B.29)
        C(K)=TEMP
130     AB(MK)=AB(MK)-EPB*TEMP                        ! (9.B.19)
C
C - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
C
      RETURN
      END
```

Глава 10
СПЕКТРАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ НА ОСНОВЕ МОДЕЛЕЙ АВТОРЕГРЕССИИ — СКОЛЬЗЯЩЕГО СРЕДНЕГО

10.1. Введение

Модель авторегрессии — скользящего среднего (АРСС) имеет больше степеней свободы, чем авторегрессионная (АР) модель, поэтому следует ожидать, что получаемые с ее помощью оценки СПМ будут обладать бóльшими возможностями для передачи формы различных спектров. Однако в отличие от имеющегося обширного репертуара линейных алгоритмов, предназначенных для вычисления АР-оценок СПМ, разработано всего лишь несколько алгоритмов для получения АРСС-оценок СПМ, что объясняется главным образом нелинейным характером таких алгоритмов, которые должны *одновременно* оценивать СС- и АР-параметры АРСС-модели. О трудности оценивания АРСС-параметров даже в том случае, когда точно известна автокорреляционная последовательность, говорит вид нелинейного уравнения (6.29). Для решения подобных нелинейных уравнений часто используются итеративные методы оптимизации, основанные на использовании оценок максимального правдоподобия, и близкие к ним методы [15]. Но эти методы требуют больших вычислительных затрат, к тому же они не гарантируют сходимости или даже могут сходиться к неверным решениям, поэтому их, в отличие от авторегрессионных методов, нецелесообразно применять для обработки сигналов в реальном времени. Для существенного снижения вычислительных затрат разработаны субоптимальные методы, которые, как правило, основываются на критерии наименьших квадратов и требуют решения линейных уравнений. В этих методах АР- и СС-параметры обычно оцениваются *раздельно,* а не *совместно,* как того требует оптимальное оценивание параметров. Сначала, как правило, оцениваются АР-параметры; их оценки вычисляются независимо от СС-параметров и для этой цели используется один из вариантов модифицированного уравнения Юла — Уолкера (6.30). Затем оцениваются СС-параметры, при этом полагается, что АР-параметры известны или же заранее оценены.

Следует заметить, что статистические характеристики спектральных АРСС-оценок почти не исследованы, а бóльшая часть имеющихся сведений об их свойствах основана на результатах немногочисленных экспериментов по моделированию. Получен

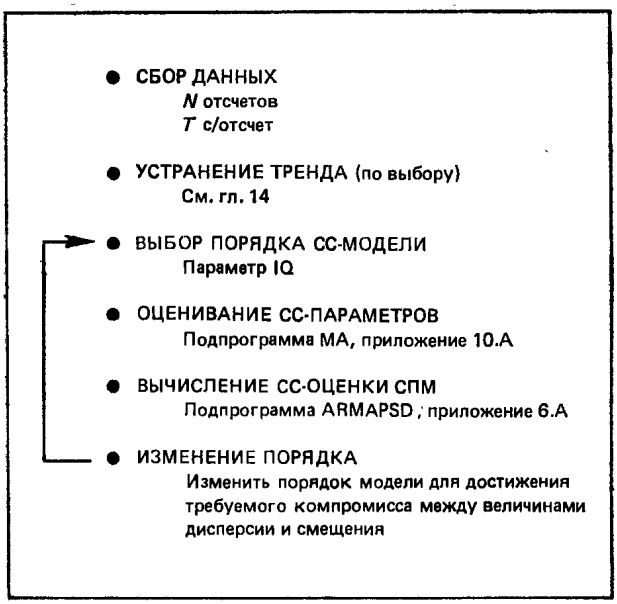


Рис. 10.1. Краткая запись алгоритма СС-оценивания СПМ.

также ряд асимптотических оценок характеристик АРСС-параметров по методу максимального правдоподобия, но они не позволяют судить о свойствах АРСС-оценок в случае конечных записей данных.

Раздел 10.3 этой главы посвящен оцениванию параметров модели скользящего среднего. Описанные в нем методы могут быть далее использованы для получения СС-оценок СПМ по имеющимся данным или для оценивания СС-параметров АРСС-модели, оцениванию параметров которой посвящен разд. 10.4. Субоптимальный метод раздельного оценивания АР- и СС-параметров описан в разд. 10.5, а в разд. 10.6 дан обзор методов последовательного оценивания. В разд. 10.7 описана одна из частных разновидностей АРСС-модели, предназначенная для аппроксимации процесса, состоящего из аддитивной смеси синусоид и белого шума.

10.2. Краткая сводка результатов

На рис. 10.1 представлена краткая запись алгоритма, предназначенного для оценивания СС-параметров по последовательности отсчетов данных, а основная машинная программа, названная MA, помещена в приложении 10.A. Массив B значений СС-параметров и оценка RHO дисперсии белого шума, оп-

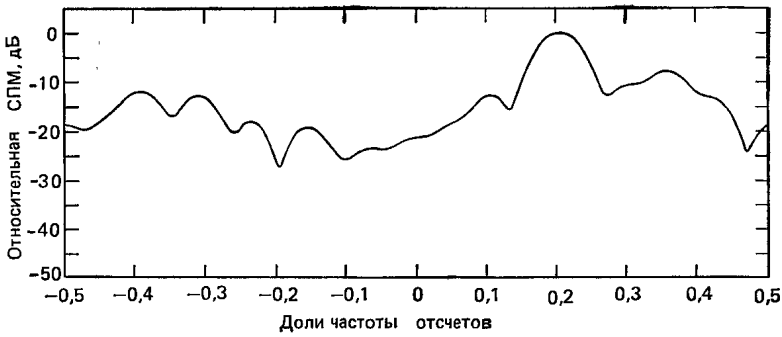


Рис. 10.2. Спектральная СС(15)-оценка 64-точечной тест-последовательности, полученная при использовании «длинной» АР(30)-модели.

ределяемые с помощью этой программы, используются затем в вызываемой подпрограмме ARMAPSD для определения СС-оценки СПМ, которая вычисляется по формуле

$$\hat{P}_{\text{CC}}(f) = T\hat{\rho}_w \left| 1 + \sum_{l=1}^{p} \hat{b}[l] \exp(-j2\pi flT) \right|^2. \qquad (10.1)$$

На рис. 10.2 показана типичная спектральная СС(15)-оценка, полученная по 64-точечной тест-последовательности, приведенной в приложении II, помещенном в конце книги. Как и в случае АР-методов, выбор порядка модели должен удовлетворять приемлемому компромиссу между разрешением и дисперсией получаемой оценки СПМ. Отметим также, что спектральная оценка, приведенная на рис. 10.2, аналогична коррелограммной спектральной оценке СПМ, приведенной на рис. 5.4.

На рис. 10.3 приведена краткая запись алгоритма, предназначенного для оценивания АРСС-параметров по последовательности отсчетов данных, который основан на методе раздельного оценивания АР- и СС-параметров. Основная машинная программа реализации этого алгоритма, названная ARMA, помещена в приложении 10.Б. Массив А значений АР-параметров, массив В значений СС-параметров и оценка RHO дисперсии белого шума, определяемые с помощью этой программы, используются затем в вызываемой подпрограмме ARMAPSD для определения АРСС-оценки СПМ, которая вычисляется по формуле

$$\hat{P}_{\text{APCC}}(f) = T\hat{\rho}_w \left| \frac{1 + \sum_{k=1}^{q} \hat{b}[k] \exp(-j2\pi fkT)}{1 + \sum_{l=1}^{p} \hat{a}[l] \exp(-j2\pi flT)} \right|^2. \qquad (10.2)$$

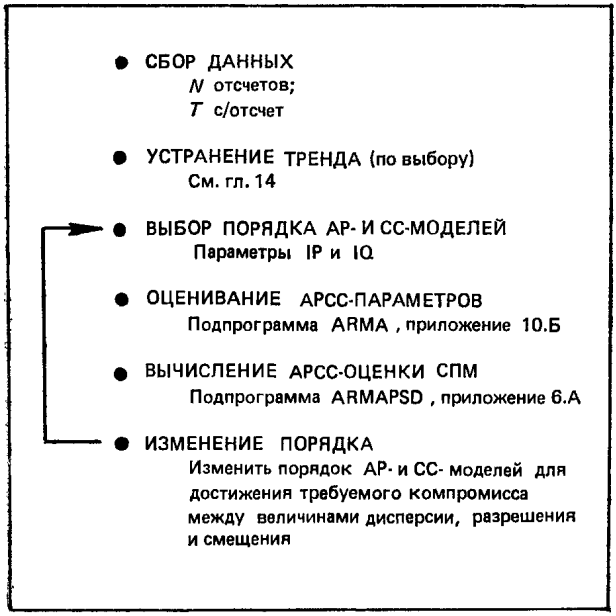


Рис. 10.3. Краткая запись алгоритма АРСС-оценивания СПМ.

На рис. 10.4 показана типичная АРСС(15, 15)-оценка, полученная по 64-точечной тест-последовательности, приведенной в приложении II, помещенном в конце книги. От выбора порядка модели зависит приемлемый компромисс между разрешением и дисперсией получаемой оценки СПМ.

Несколько слов следует сказать о выборе значений порядка p и q АРСС-модели или порядка q СС-модели. Чаще всего полагается, что $p=q$, хотя какие-либо веские причины, обосновывающие такое допущение, отсутствуют. Часто для АР-процессов применяется информационный критерий Акаике (ИКА). Для определения порядка АР-модели p можно также использовать проверку ранга матрицы модифицированного уравнения Юла — Уолкера (6.30).

10.3. Оценивание параметров модели скользящего среднего

Результаты, изложенные в этом разделе, в общем случае применимы ко всем последовательностям данных, для которых необходимо получить оценки СС-параметров, будь то исходная последовательность измеренных данных или последовательность остаточных ошибок фильтра, полученная при использовании АРСС-метода, описанного в разд. 10.4. Напомним, что СС-мо-

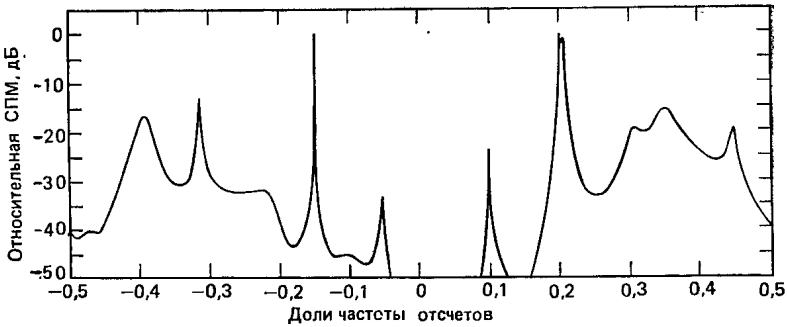


Рис. 10.4. Спектральная АРСС(15, 15)-оценка 64-точечной тест-последовательности, полученная при использовании 30 оценок значений автокорреляции ($M=30$).

дели целесообразно использовать для спектрального оценивания процессов, спектры которых имеют широкие пики или острые минимумы (нули). СС-оценка СПМ не пригодна для моделирования узкополосных спектров и поэтому не относится к числу спектральных оценок так называемого «высокого разрешения», что привело к ограничению исследований средств оценивания СС-параметров, используемых для вычисления СС-оценок СПМ.

Наиболее очевидный подход к оцениванию СС-параметров основан на решении нелинейного уравнения (6.35), в котором используются автокорреляционные оценки, получаемые по имеющимся данным. Однако методы решения уравнения (6.35) часто сопряжены с использованием сложных методов спектральной факторизации [1]. Возможен альтернативный подход, основанный на аппроксимации СС-процесса АР-моделью высокого порядка, в котором используются только линейные операции. Поскольку такой линейный подход может давать вполне удовлетворительные спектральные СС-оценки, основное внимание при изложении вопросов оценивания СС-параметров будет ниже уделено именно этому алгоритму.

Пусть

$$B(z)=1+\sum_{k=1}^{q} b[k]\,z^{-k} \tag{10.3}$$

— системная функция СС(q)-процесса и пусть $1/A_\infty(z)$, где

$$A_\infty(z)=1+\sum_{k=1}^{\infty} a[k]\,z^{-k}, \tag{10.4}$$

— системная функция $АР_\infty$-процесса, эквивалентного этому

СС(q)-процессу, т. е., иными словами,

$$B(z)=\frac{1}{A_\infty(z)}, \tag{10.5}$$

или $B(z)A_\infty(z)=1$. Обратное z-преобразование, соответствующее произведению $B(z)A_\infty(z)$, является сверткой СС-параметров с АР-параметрами, что можно показать, используя соотношения, приведенные в табл. 2.1. Обратное z-преобразование от единицы — это просто выборочная функция $\delta[m]$. Иными словами,

$$a[m]+\sum_{n=1}^{q} b[n]\,a[m-n]=\delta[m]=\begin{cases}1, & \text{если } m=0,\\ 0, & \text{если } m\neq 0,\end{cases} \tag{10.6}$$

где, по определению, $a[0]=1$ и $a[k]=0$ при $k<0$. Таким образом, СС-параметры можно определить по параметрам некоторой эквивалентной АР-модели бесконечного порядка посредством решения произвольной подсистемы из q уравнений, полученных из (10.6). Иными словами, на практике можно вычислить АР(M)-оценку высокого порядка, такую, что $M\gg q$. Используя АР-оценки высокого порядка 1, $\hat{a}_M[1]$, ..., $\hat{a}_M[M]$, можно записать следующую систему уравнений:

$$e_{CC}[m]=\hat{a}_M[m]+\sum_{n=1}^{q} b[n]\,\hat{a}_M[m-n]. \tag{10.7}$$

В идеальном случае ошибка $e_{CC}[m]$ должна быть равна нулю при всех значениях m, за исключением $m=0$, что следует из уравнения (10.6). Однако на практике при использовании конечной записи данных эта ошибка не будет равна нулю, поэтому оценки СС-параметров должны определяться посредством минимизации дисперсии квадратов ошибки

$$\hat{\rho}_q=\sum_m |e_{CC}[m]|^2/M, \tag{10.8}$$

где интервал суммирования будет определен несколько позже. Если анализируемый процесс является гауссовским, то можно показать [15], что такая процедура будет давать оценку, близкую к оценке максимального правдоподобия. Уравнение (10.7) по своей структуре идентично выражению для ошибки линейного предсказания вперед, в чем нетрудно убедиться, заменив в этом уравнении оценки параметров $\hat{a}[k]$ отсчетами данных. В уравнении (10.8) можно использовать два интервала суммирования: интервал $0\leqslant m\leqslant M+q$, который соответствует *автокорреляционному* методу линейного предсказания, и интервал $q\leqslant m\leqslant M$, который соответствует *ковариационному* методу линейного предсказания. Реализовать эти два метода можно с

помощью быстрых вычислительных алгоритмов, описанных в гл. 8. Решить нормальные уравнения в случае автокорреляционного метода можно с помощью подпрограммы YULEWALKER, в случае ковариационного метода для этой цели можно использовать подпрограмму COVAR. В приложении 10.А приведена распечатка подпрограммы MA, предназначенной для оценивания СС-параметров на основе оценки АР-параметров высокого порядка и полученной посредством линейного предсказания по методу наименьших квадратов. Для подпрограммы MA был выбран автокорреляционный метод, для того чтобы гарантировать получение минимально-фазовой оценки СС-параметров; иными словами, для того чтобы нули функции $B(z)$ были расположены внутри единичной окружности. Заменив подпрограмму YULEWALKER подпрограммой COVAR, получим решение, соответствующее ковариационному методу. Заметим, что оценка дисперсии возбуждающего шума СС-процесса — это просто АР(M)-оценка дисперсии по методу наименьших квадратов.

Для определения порядка q СС-модели можно воспользоваться несколькими методами. Информационный критерий Акаике (ИКА) имеет в данном случае ту же форму, что и в случае АР-модели:

$$\text{ИКА}[q] = N \ln(\hat{p}_q) + 2q,$$

где $\hat{\rho}_q$ — оценка дисперсии белого шума (для этого целесообразно использовать дисперсию ошибки наименьших квадратов). Можно также подвергать исходные данные фильтрации с помощью обратного СС-фильтра и проверить последовательность остаточных ошибок на близость к белому шуму [5]. Последовательность остаточных ошибок будет белым шумом, если оценки значений автокорреляционной последовательности для этих ошибок будут приближенно равными нулю при всех корреляционных сдвигах, за исключением корреляционного сдвига, равного нулю.

10.4. Раздельное оценивание АР- и СС-параметров

Для получения оценок АРСС-параметров и оценок СПМ чаще всего применяются субоптимальные процедуры, в большинстве из которых оценки АР- и СС-параметров получаются раздельно. Сначала, как правило, оцениваются АР-параметры, а затем их оценки используются для построения некоторого обратного фильтра, который будет применен к исходным данным. Последовательность остаточных ошибок на выходе этого фильтра должна характеризовать некоторый процесс скользящего среднего, к которому затем может быть применена процедура оце-

нивания СС-параметров. В этом разделе описан один из таких АРСС-алгоритмов, состоящий из трех основных этапов.

В гл. 6 было показано [см. выражение (6.29)], что автокорреляционная последовательность для АРСС(p, q)-модели удовлетворяет соотношению

$$r_{xx}[n] = -\sum_{k=1}^{p} a_p[k]\, r_{xx}[n-k], \tag{10.9}$$

где $n > q$. Если автокорреляционная последовательность известна точно, то p соотношений, соответствующих (10.9), при $q+1 \leqslant n \leqslant q+p$ образуют систему уравнений, решая которую, можно определить АР-параметры. Эти уравнения, в соответствии с их формулировкой (6.30), были названы модифицированными уравнениями Юла — Уолкера. Однако на практике обычно имеются лишь отсчеты данных, поэтому вместо неизвестной автокорреляционной последовательности приходится использовать ее оценки. Оценки АР-параметров, получаемые с помощью модифицированных уравнений Юла — Уолкера, обычно имеют плохое качество (большую дисперсию) там, где значения АРСС-оценки СПМ малы [19], что обусловлено либо неточностью автокорреляционных оценок, либо неправильным выбором порядка модели, либо обоими этими факторами одновременно [15].

Еще один подход, исследованный в работах Мехры [17], Кэдзоу [4, 5], Пората и Фридландера [18], основан на использовании большего, чем p, числа уравнений для корреляционных сдвигов, больших q, и минимизации суммы квадратов ошибок для аппроксимации p АР-параметров. Такая процедура приводит к *модифицированному методу наименьших квадратов Юла — Уолкера*. Если предположить, что оценку автокорреляции $\hat{r}_{xx}[n]$ с корреляционными сдвигами от 0 до M уже вычислены (здесь M — наибольший индекс корреляционного сдвига, при котором возможна точная оценка автокорреляции), то можно записать $M-q$ уравнений (таких, что $M-q > p$)

$$\hat{r}_{xx}[n] = -\sum_{k=1}^{p} a[k]\, \hat{r}_{xx}[n-k] + \varepsilon[n], \tag{10.10}$$

где $q+1 \leqslant n \leqslant M$, а $\varepsilon[n]$ — ошибка оценивания. Необходимо использовать *несмещенные* автокорреляционные оценки, с тем чтобы гарантировать, что смещение ошибки $\varepsilon[n]$ будет равно нулю. Затем сумма квадратов ошибок

$$\rho = \sum_{n=q+1}^{M} |\varepsilon[n]|^2 \tag{10.11}$$

минимизируется относительно p авторегрессионных парамет-

ров $a[k]$. Получаемые в результате нормальные уравнения оказываются идентичными уравнениям, которые получаются при использовании ковариационного метода линейного предсказания, описанного в подраз. 8.5.1, т. е. они имеют следующий вид:

$$[\mathbf{T}_p^H \mathbf{T}_p] \begin{pmatrix} 1 \\ a[1] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a[p] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{10.12}$$

где

$$\mathbf{T}_p = \begin{pmatrix} \hat{r}_{xx}[q+1] & \dots & \hat{r}_{xx}[q-p+1] \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \hat{r}_{xx}[M-p] & & \hat{r}_{xx}[q+1] \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \hat{r}_{xx}[M] & \dots & \hat{r}_{xx}[M-p] \end{pmatrix} \tag{10.13}$$

— прямоугольная тёплицева матрица, состоящая из автокорреляционных оценок, а не из отсчетов данных, как в гл. 8. Для решения уравнения (10.12) можно применить подпрограмму COVAR, которая представляет собой машинную реализацию одного из быстрых алгоритмов. При этом вместо последовательности данных $x[1], \dots, x[N]$, которая использовалась в ковариационном методе линейного предсказания, описанном в гл. 8, теперь в качестве входной последовательности используется последовательность оценок автокорреляции $\hat{r}_{xx}[q-p+1], \dots, \hat{r}_{xx}[M]$.

Для уменьшения влияния возрастающей дисперсии оценивания, связанного с тем, что для вычисления членов последовательности ошибок с увеличивающимся индексом используются автокорреляционные оценки с увеличивающимся индексом корреляционного сдвига, в работе [10] было предложено использовать взвешенную сумму квадратов ошибок

$$\rho = \sum_{n=q+1}^{M} w[n] |\varepsilon[n]|^2, \tag{10.14}$$

где значения весов последовательности $w[n]$ убывают с ростом n. С увеличением индекса корреляционного сдвига автокорреляционной оценки в ней используется все меньшее и меньшее

число отсчетов данных, а это приводит к росту дисперсии получаемых оценок. Аналогичный подход был предложен в работе [5], но с тем лишь отличием, что ошибки усредняются в некоторой окрестности значений этих ошибок.

АР-параметры, оцениваемые с помощью модифицированного метода наименьших квадратов Юла— Уолкера, в общем случае не будут удовлетворять условию минимально-фазовой авторегрессии. Для создания минимально-фазовой авторегрессии за счет «зеркального» переноса полюсов, лежащих вне единичной окружности, внутрь этой окружности, можно использовать метод спектральной факторизации. Однако никаких статистических оценок результатов, получаемых с помощью этого метода, пока не получено. В работе [14] был сделан эмпирический вывод о том, что характеристики получаемых оценок очень сильно зависят от положения этих полюсов и что наилучшие результаты получаются тогда, когда полюсы АР-модели расположены вблизи единичной окружности, а наихудшие — тогда, когда вблизи единичной окружности находятся нули СС-модели, а полюсы АР-модели удалены от нее. Ряд аналитических результатов относительно асимптотического поведения оценок, получаемых с помощью модифицированных методов наименьших квадратов Юла — Уолкера, содержится в работах [12, 10], в которых приводятся выражения, связывающие качество этих оценок с числом используемых членов в последовательности ошибок, отношением сигнал/шум и шириной полосы частот отдельных деталей АРСС-спектров.

Выбор порядка АР-составляющей АРСС-процесса может быть основан на методах, аналогичных описанным в гл. 8 применительно к выбору порядка чистого АР-процесса. Большие значения порядка этой составляющей потребуются в том случае, когда АРСС-спектр содержит острые узкополосные пики. Так, в работе [2] показано, что завышение значения действительно требуемого порядка АР-составляющей АРСС-модели может даже улучшить качество полной спектральной АРСС-оценки. Отмечалось также [5], что в качестве индикатора порядка можно использовать проверку ранга матрицы $\mathbf{T}_p$ в уравнении (10.13), основанную на анализе по методу разложения по сингулярным числам (РСЧ).

После определения АР-параметров можно сформировать временной ряд из остаточных ошибок, приближенно соответствующий некоторому СС-процессу; для этого исходную последовательность данных необходимо подвергнуть фильтрации с помощью фильтра с системной функцией

$$\hat{\mathrm{A}}(z) = 1 + \sum_{k=1}^{p} \hat{a}[k]\, z^{-k}, \qquad (10.15)$$

где $\hat{a}[k]$ — оценки АР-параметров, определенные с помощью модифицированного метода наименьших квадратов Юла — Уолкера. Системная функция АРСС-процесса равна $B(z)/A(z)$, поэтому

$$\frac{B(z)}{A(z)}\hat{A}(z) \approx B(z). \tag{10.16}$$

Таким образом, пропуская запись измеренных данных через фильтр с системной функцией $\hat{A}(z)$, получаем на его выходе аппроксимирующий процесс скользящего среднего. Затем для оценивания СС-параметров может быть применена процедура, описанная в разд. 10.3. Фильтрованная последовательность длиной $N-p$ будет определяться следующим уравнением свертки:

$$z[n] = x[n] + \sum_{m=1}^{p} \hat{a}[m]\, x[n-m], \tag{10.17}$$

где $p+1 \leqslant n \leqslant N$. В приложении 10.Б приведена программа ARMA, предназначенная для оценивания АРСС-параметров. В ее основе лежит процедура, состоящая из трех следующих этапов: (1) оценивание АР-параметров с помощью модифицированного метода наименьших квадратов Юла — Уолкера; (2) фильтрация исходной последовательности отсчетов данных; (3) оценивание СС-параметров по полученной последовательности остаточных ошибок фильтрации.

Хотя СС-параметры и необходимы для оценивания параметров АРСС-модели временно́го ряда, для получения АРСС-оценки СПМ нужна лишь оценка величины $T\rho_w|\hat{B}(f)|^2$, т. е. необходимости в явном оценивании СС-параметров в этом случае нет [13]. Для непосредственного оценивания числителя в выражении для АРСС-оценки СПМ может быть также применена корелограммная оценка СПМ, а именно оценка вида

$$T\rho_w|\hat{B}(f)|^2 = T\sum_{m=-q}^{q} \hat{r}_{zz}[m] \exp(-j2\pi fmT), \tag{10.18}$$

где $\hat{r}_{zz}[m]$ — оценка автокорреляции, полученная по фильтрованной последовательности $z[n]$. При необходимости может быть использована спектральная факторизация, для того чтобы гарантировать получение минимально-фазового СС-процесса.

Процедура выбора значений порядка АР- и СС-составляющих АРСС-модели временно́го ряда достаточно сложна, и в литературе этому вопросу уделено очень мало внимания, за исключением простых случаев. Чаще всего для этой цели используется информационный критерий Акаике (ИКА), который в

данном случае имеет форму

$$\text{ИКА}[p,\ q]=N\ln(\hat{\rho}_{pq})+2(p+q),$$

где $\hat{\rho}_{pq}$ — оценка дисперсии белого шума на входе принятой АРСС(p, q)-модели. В качестве этой оценки обычно используется дисперсия квадрата ошибки, определяемая с помощью методов, описанных в этом и последующем разделах. Минимум ИКА(p, q) по всем значениям p и q характеризует те их значения, которые наиболее целесообразно использовать. Можно также проверить на близость белому шуму последовательность остаточных ошибок на выходе обратного фильтра с системной функцией $\hat{B}(z)/\hat{A}(z)$, в которой используются оценки АР- и СС-параметров. Оценки автокорреляции для последовательности этих остаточных ошибок должны быть близки к нулю, за исключением оценки, соответствующей нулевому корреляционному сдвигу [7].

10.5. Одновременное оценивание АР- и СС-параметров

Один из субоптимальных методов, который позволяет одновременно оценивать параметры авторегрессии и скользящего среднего, основан на некоторой разновидности принципа итеративной предварительной фильтрации Стиглица и Макбрайда [20] и принадлежит к классу методов, с помощью которых решение линейной задачи сводится к оцениванию неизвестных значений белого шума на входе АРСС-фильтра. Ряд других методов этого же класса описан в книге Кея [15]. Метод, который будет описан ниже, основан на улучшении (т. е. уточнении) линейной задачи за счет рассмотрения некоторой последовательности таких линейных задач, что позволяет итеративно уточнять оценки АР- и СС-параметров.

Временно предположим, что воздействие на входе АРСС-фильтра было оценено как последовательность $\hat{u}[n]$; тогда для некоторого АРСС(p, q)-процесса можно записать следующие уравнения для ошибки аппроксимации:

$$e[n]=x[n]+\sum_{k=1}^{p}\hat{a}[k]\,x[n-k]+\sum_{k=1}^{q}\hat{b}[k]\,\hat{u}[n-k],\quad (10.19)$$

где вместо последовательности неизвестных значений возбуждающего шума $u[n]$ используется последовательность их оценок $\hat{u}[n]$. Таким образом, ошибка стала линейной функцией неизвестных параметров $a[k]$ и $b[k]$. Будем полагать, что известны все отсчеты данных от $x[1]$ до $x[N]$, а следовательно, временной индекс изменяется в диапазоне $1\leqslant\alpha\leqslant n\leqslant\beta\leqslant N$. Фактиче-

ские значения, используемые для α и β, будут зависеть от конкретного алгоритма, применяемого для оценивания $u[n]$, который будет обсуждаться несколько позже. Систему из $\beta-\alpha+1$ уравнений ошибки (10.19) можно записать в следующей матричной форме:

$$\mathbf{e}=\mathbf{X}\hat{\mathbf{a}}+\hat{\mathbf{U}}\hat{\mathbf{b}}, \tag{10.20}$$

где

$$\mathbf{e}=\begin{pmatrix} e[\alpha] \\ \vdots \\ e[\beta] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}=\begin{pmatrix} x[\alpha] & \dots & x[\alpha-p] \\ \vdots & & \vdots \\ x[\beta] & \dots & x[\beta-p] \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{a}}=\begin{pmatrix} 1 \\ \hat{a}[1] \\ \vdots \\ \hat{a}[p] \end{pmatrix}$$

и

$$\hat{\mathbf{U}}=\begin{bmatrix} \hat{u}[\alpha-1] & \dots & \hat{u}[\alpha-q] \\ \vdots & & \vdots \\ \hat{u}[\beta-1] & \dots & \hat{u}[\beta-q] \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{b}}=\begin{pmatrix} \hat{b}[1] \\ \vdots \\ \hat{b}[q] \end{pmatrix}.$$

Используя описанное в разд. 3.5 решение по методу наименьших квадратов, которое минимизирует величину

$$\rho_{\text{АРСС}}=\sum_{n=\alpha}^{\beta}|e[n]|^2,$$

систему линейных уравнений, которую необходимо решить для определения вектора оценок АР-параметров $\hat{\mathbf{a}}$ и вектора оценок СС-параметров $\hat{\mathbf{b}}$, можно далее, как нетрудно показать, записать в виде

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}^H\mathbf{X} & \mathbf{X}^H\hat{\mathbf{U}} \\ \hat{\mathbf{U}}^H\mathbf{X} & \hat{\mathbf{U}}^H\hat{\mathbf{U}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{a}} \\ \hat{\mathbf{b}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \rho_{\text{АРСС}} \\ \mathbf{0}_{p+q} \end{bmatrix}. \tag{10.21}$$

Решив уравнение (10.21), новые оценки $\hat{\mathbf{a}}$ и $\hat{\mathbf{b}}$ можно затем использовать для фильтрации исходного временно́го ряда $x[n]$ с помощью обратного АРСС-фильтра с системной функцией $\hat{\mathbf{A}}(z)/\hat{\mathbf{B}}(z)$, с тем чтобы получить обновленную оценку $\hat{u}[n]$ входной последовательности. Нормальные уравнения (10.21) решаются итеративным способом до тех пор, пока не будет достигнута сходимость. Импульсная характеристика фильтра $1/\hat{\mathbf{B}}(z)$ будет в общем случае иметь бесконечную протяженность

и должна быть усечена до конечного интервала, что позволит оперировать с конечной последовательностью данных $x[n]$. Однако это приводит к появлению ошибки в рассматриваемой процедуре оценивания. От величины выбранного интервала усечения и от концевых эффектов фильтра будут зависеть значения индексов α и β, которые можно будет использовать. Полный итеративный процесс начинается с определения оценки для $u[n]$, основанной на использовании АР-аппроксимации высокого порядка; для этой цели можно применить любой АР-алгоритм, описанный в гл. 8.

Рассмотренная итеративная процедура не гарантирует сходимости, а иногда она может расходиться. Условия, обеспечивающие сходимость, в общем случае не известны. Обратный фильтр $\hat{\mathrm{A}}(z)/\hat{\mathrm{B}}(z)$, сформированный по оценкам АР- и СС-параметров, не обязательно будет минимально-фазовым фильтром, а, следовательно, может оказаться неустойчивым. Обычно это требует некоторой модификации исходного итеративного алгоритма, для того чтобы получить минимально-фазовый обратный фильтр, например «зеркального» переноса полюсов и нулей, расположенных вне единичной окружности в z-плоскости, внутрь этой окружности. Одна из модифицированных версий данного алгоритма, в которой используется одна пятишаговая итерация, была реализована с помощью машинной программы MAYNE, приведенной в книге Кея [15].

10.6. Последовательный подход к оцениванию АРСС-параметров

Выше в гл. 9 были описаны алгоритмы последовательного во времени оценивания АР-параметров. АРСС-процесс можно представить в форме, которая позволяет строить аналогичные последовательно-временные алгоритмы, предназначенные для *одновременного* оценивания АР- и СС-параметров. Так, например, АРСС-процесс можно рассматривать как процесс, вложенный в некоторый двухканальный авторегрессионный процесс

$$\mathbf{e}[n]=\mathbf{y}[n]+\sum_{k=1}^{p}\mathbf{A}[k]\,\mathbf{y}[n-k], \tag{10.22}$$

где двухкомпонентные векторы $\mathbf{e}[n]$ и $\mathbf{y}[n]$ и (2×2)-матрица параметров $\mathbf{A}[k]$ определяются следующими выражениями:

$$\mathbf{e}[n]=\begin{bmatrix}e_x[n]\\ e_u[n]\end{bmatrix},\quad \mathbf{y}[n]=\begin{bmatrix}x[n]\\ u[n]\end{bmatrix},\quad \mathbf{A}[k]=\begin{bmatrix}a[k] & -b[k]\\ 0 & 0\end{bmatrix}. \tag{10.23}$$

Матрица параметров $\mathbf{A}[k]$ наполовину состоит из нулей, что отражает допущение о близости статистик входной последовательности $u[n]$ к статистикам белого шума. Методы многока-

нального авторегрессионного анализа рассматриваются ниже в гл. 15, многоканальный вариант одноканального быстрого РНК-алгоритма описан в работе [8]. При записи уравнения (10.22) было использовано допущение о том, что последовательность отсчетов входного возбуждающего шума известна (а это не соответствует действительности) и что порядок СС-составляющей рассматриваемого процесса идентичен порядку его АР-составляющей (т. е. $p=q$). Методы вложения можно модифицировать, с тем чтобы учесть неравенство порядков АР- и СС-составляющих АРСС-процесса [16, 9]. На практике неизвестный процесс $u[n]$ заменяется оценкой

$$\hat{u}[n]=e_x[n] \tag{10.24}$$

после каждого обновления во времени, выполняемого с приходом нового отсчета данных, а затем эта оценка $\hat{u}[n]$ используется в качестве «известных» данных на следующем шаге обновления, что позволяет этому последовательному алгоритму работать, «самозагружая» себя своей собственной последовательностью ошибок двухканального предсказания. Некоторые соображения, касающиеся условий сходимости этого двухэтапного метода [уравнения (10.22) и (10.24)], были высказаны Фридландером [9], однако эти вопросы все еще ждут своего детального анализа.

10.7. Специальный АРСС-процесс для моделирования синусоид в белом шуме

Процесс, состоящий из аддитивной смеси синусоид и белого шума, можно смоделировать как некоторую частную разновидность АРСС-процесса. Ниже в гл. 11, посвященной методу Прони, показано, что выборочную последовательность, соответствующую смеси из M действительных синусоид с произвольными частотами, значения которых лежат в интервале $0\leqslant f\leqslant 1/2T$ (где T — интервал отсчетов), можно сформировать с помощью следующего симметричного линейного разностного уравнения порядка $2M$:

$$\sum_{k=0}^{2M} a[k]\,x[n-k]=0, \tag{10.25}$$

такого что $a[0]=a[2M]=1$ и $a[2M-k]=a[k]$, где $0\leqslant k\leqslant 2M$. Начальные условия $x[1], \ldots, x[2M]$ определяют амплитуды и начальные фазы этих M синусоид. Добавляя аддитивный белый шум, получаем процесс вида

$$y[n]=x[n]+w[n]. \tag{10.26}$$

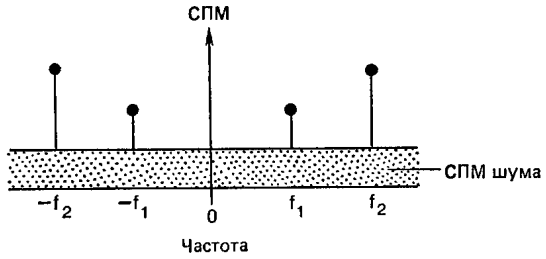


Рис. 10.5. Спектр специального АРСС-процесса для синусоид в белом шуме.

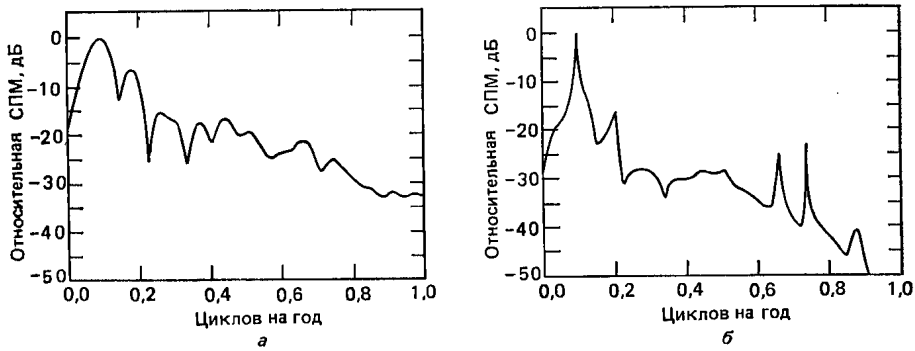


Рис. 10.6. Спектральные оценки СПМ фильтрованных чисел солнечных пятен: *а* — СС(32)-оценка; *б* — АРСС(25, 25)-оценка.

Подставляя $x[n-k]=y[n-k]-w[n-k]$ в уравнение (10.25), получаем

$$y[n]=-\sum_{k=1}^{2M} a[k]\,y[n-k]+\sum_{k=0}^{2M} a[k]\,w[n-k]. \qquad (10.27)$$

Это уравнение соответствует АРСС($2M$, $2M$)-процессу, АР- и СС-параметры которого идентичны и имеют полюсы и нули, расположенные на единичной окружности [21]. Такое расположение полюсов и нулей соответствует всепропускающему (т. е. фазовому) фильтру, системная функция которого, вычисляемая на частотах синусоид, оказывается неопределенной, поскольку на этих частотах $B(z)/A(z)=0/0$. Следовательно, в точках СПМ, соответствующих частотам этих синусоид, могут быть введены импульсы (дискретные спектральные линии), в результате чего получаем спектр, вид которого показан на рис. 10.5. Уравнение (10.27) будет использоваться в гл. 13 при обсуждении метода гармонического разложения Писаренко.

10.8. Приложение к числам солнечных пятен

На рис. 10.6 показаны СС- и АРСС-оценки СПМ, полученные по фильтрованной последовательности чисел солнечных пятен с помощью машинных программ, помещенных в приложениях 10.А и 10.Б. Для получения АРСС(25, 25)-оценки использовалась «длинная» АР-модель 50-го порядка. Первым двум пикам в этом АРСС-спектре соответствуют частоты 0,0938 и 0,2012 цикла на год (соответственно 10,67 и 4,97 года на цикл). Для получения СС(32)-оценки использовалась «длинная» АР-модель 64-го порядка. Первым двум пикам в этом спектре соответствуют частоты 0,0923 и 0,181 цикла на год (10,84 и 5,52 года на цикл).

Литература

[1] *Box G. E. P., Jenkins G. M.* Time Series Analysis, Forecasting and Control. Holden-Day, Inc., San Francisco, 1970. [Имеется русский перевод: *Бокс Дж., Дженкинс Г.* Анализ временных рядов: Прогноз и управление. — М: Мир, 1974, вып. 1, 2.]

[2] *Bruzzone S. P., Kaveh M.* On Some Suboptimum ARMA Spectral Estimators. IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., vol. ASSP-28, pp. 753—755, December 1980.

[3] *Bruzzone S. P., Kaveh M.* Information Tradeoffs in Using the Sample Autocorrelation Function in ARMA Parametr Estimation. IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., vol. ASSP-32, pp. 701—715, August 1984.

[4] *Cadzow J. A.* Autoregressive Moving Average Spectral Estimation: A Model Equation Error Procedure. IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing, vol. GE-19, pp. 24—28, January 1981.

[5] *Cadzow J. A.* Spectral Estimation: An Overdetermined Rational Model Equation Approach. Proc. IEEE, vol. 70, pp. 907—938, September 1982. [Имеется русский перевод: *Кэдзоу Дж. А.* Спектральное оценивание: Метод переопределенной системы уравнений рациональной модели. ТИИЭР, 1982, т. 70, № 9, с. 256—293.]

[6] *Chow J. C.* On the Estimation of the Order of a Moving Average Process. IEEE Trans. Autom. Control, vol. AC-17, pp. 386—387, June 1972.

[7] *Chow J. C.* On Estimating the Orders of an Autoregressive—Moving Average Process with Uncertain Observations. IEEE Trans. Autom. Control, vol. AC-17, pp. 707—709, October 1972.

[8] *Cioffi J. M., Kailath T.* Fast, Recursive-Least-Squares Transversal Filters for Adaptive Filtering. IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., vol. ASSP-32, pp. 304—337, April 1984.

[9] *Friedlander B.* Recursive Lattice Forms for Spectral Estimation. IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., vol. ASSP-30, pp. 920—930, December 1982.

[10] *Friedlander B., Sharman K. C.* Performance Evaluation of the Modified Yule — Walker Estimator. IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., vol. ASSP-33, pp. 719—725, June 1985.

[11] *Graupe D., Krause D. J., Moore J. B.* Identification of Autoregressive Moving Average Parameters of Time Series. IEEE Trans. Autom. Control, vol. AC-20, pp. 104—107, February 1975.

[12] *Izraelevitz D., Lim J. S.* Properties of the Overdetermined Normal Equation Method for Spectral Estimation When Applied to Sinusoids in Noise. IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., vol. ASSP-33, pp. 406—412, April 1985.

[13] *Kaveh M.* High Resolution Spectral Estimation for Noisy Signals. IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., vol. ASSP-27, pp. 286—287, June 1979.
[14] *Kaveh M., Bruzzone S. P.* Statistical Efficiency of Correlation-Based Methods for ARMA Spectral Estimation. IEEE Proc., Part F, vol. 130, pp. 211—217, April 1983.
[15] *Kay S. M.* Modern Spectral Estimation. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1987.
[16] *Lee D. T. L., Friedlander B., Morf M.* Recursive Ladder Algorithm for ARMA Modeling. IEEE Trans. Autom. Control, vol. AC-27, pp. 753—764, August 1982.
[17] *Mehra R. K.* On-Line Identification of Linear Dynamic Systems with Application to Kalman Filtering. IEEE Trans. Autom. Control, vol. AC-16, pp. 12—22, February 1971.
[18] *Porat B., Friedlander B.* Asymptotic Analysis of the Bias of the Modified Yule — Walker Estimator. IEEE Trans. Autom. Control, vol. AC-30, pp. 765—767, August 1985.
[19] *Sakai H., Tokumaru H.* Statistical Analysis of a Spectral Estimator for ARMA Processes. IEEE Trans. Autom. Control, vol. AC-25, pp. 122—124, February 1980.
[20] *Steiglitz K., McBride L. E.* A Technique for the Identification of Linear Systems. IEEE Trans. Autom. Control, vol. AC-10, pp. 461—464, October 1965.
[21] *Ulrych T. J., Clayton R. W.* Time Series Modeling and Maximum Entropy. Phys. Earth Planet. Inter., vol. 12, pp. 188—200, August 1976.

Задачи

1. Доказать соотношение (10.6).
2. В чем сходство СС-оценки СПМ и оценки СПМ, получаемой с помощью коррелограммного метода (гл. 5)?
3. Показать на контрпримере, что модифицированные уравнения Юла — Уолкера в общем случае не гарантируют получение последовательности минимально-фазовых АР-параметров даже в том случае, когда автокорреляционная последовательность точно известна.
4. Вычислить значение ИКА $[p, q]$ при $0 \leqslant p, q \leqslant 20$, используя для этой цели подпрограмму ARMA и тест-последовательность данных, приведенную в приложении II, помещенном в конце книги. Когда значение ИКА минимально? Вычертить АРСС-спектр для значений порядков p и q, соответствующих этому минимуму.
5. Заменить в программе MA подпрограмму YULEWALKER подпрограммой COVAR. Вычислить и вычертить СС(15)-оценку для тест-последовательности, приведенной в приложении II, помещенном в конце книги. Чем отличается спектральная оценка, приведенная на рис. 10.2, от графика оценки, полученной при использовании в программе MA подпрограммы COVAR? Почему появились эти различия?

Приложение 10.А. Программа для оценивания параметров СС-модели

Эта подпрограмма предназначена для вычисления оценок параметров скользящего среднего (массив B) и дисперсии белого шума (RHO) произвольного СС-процесса с помощью алгоритма, описанного в разд. 10.3. С помощью процедуры, приведенной в приложении IV, помещенном в конце книги, эта программа может быть преобразована для обработки действительнозначных данных. При обработке 64-точечной тест-последова-

тельности, приведенной в приложении II, помещенном в конце книги, в случае N=64, IQ=15 и M=30 получаются следующие значения параметров:

```
                    RHO=0,21432;
B( 1)=(—0,251507;  0,672468); B( 9)=( 0,260140; —0,161014);
B( 2)=(—0,686121;  0,145718); B(10)=( 0,251199;  0,167119);
B( 3)=( 0,020615; —0,522469); B(11)=(—0,134490;  0,212024);
B( 4)=( 0,114441; —0,191581); B(12)=(—0,161253;  0,108043);
B( 5)=( 0,365925;  0,098857); B(13)=(—0,034023; —0,180158);
B( 6)=( 0,005570;  0,433081); B(14)=( 0,087808; —0,114639);
B( 7)=(—0,406348;  0,048549); B(15)=( 0,022949;  0,084114).
B( 8)=(—0,100927; —0,428140);
```

Подпрограмма MA (N,IQ,M,X,RHO,B,ISTAT)

```
C
C  Предназначена для получения оценок параметров скользящего среднего
C  и дисперсии возбуждающего шума для последовательности отсчетов ком-
C  плексных данных с помощью «длинной» АР-модели и аппроксимации по
C  методу наименьших квадратов.
C
C  Входные параметры:
C
C    N      — число отсчетов комплексных данных.
C    IQ     — порядок используемой СС-модели.
C    M      — порядок «длинной» АР-модели (рекомендуется использовать
C             значение, равное как минимум 2*IQ).
C    X      — массив отсчетов комплексных данных от X(1) до X(N).
C
C  Выходные параметры:
C
C    RHO    — действительная скалярная величина, характеризующая оцен-
C             ку дисперсии белого шума.
C    B      — массив оценок комплексных СС-параметров от B(1) до
C             B(IQ).
C    ISTAT  — целочисленный индикатор ошибки:
C             0 — при нормальном выходе из программы (ошибки отсут-
C             ствуют);
C             1, если обнаружена ошибка в подпрограмме YULEWALKER;
C             2, если значение IQ вышло из допустимых пределов (оно
C             должно быть больше нуля и меньше M).
C
C  Примечание:
C
C    Размеры внешних массивов должны указываться в вызывающей про-
C    грамме следующим образом: X .GE. N, B .GE. IQ. Размер внутреннего
C    массива указывается следующим образом: A .GE. M+1. Используемые
C    внешние подпрограммы: YULEWALKER (см. приложение 8.А).
C
      COMPLEX X(1),B(1),A(100)
      IF (IQ .GT. 0 .AND. IQ .LT. M) GO TO 10
      ISTAT=2
      RETURN
C  Аппроксимация данных АР-моделью высокого порядка.
10    CALL YULEWALKER (N,M,1,X,RHO,A,ISTAT)   ! (10.5)
      IF (ISTAT .NE. 0) RETURN
      DO 20 K=M,1,-1
20      A(K+1)=A(K)
```

```
      A(1)=(1.,0.)
C     Определение СС-параметров по оценкам автокорреляции методом Юла —
C     Уолкера.
      CALL YULEWALKER (M+1,IQ,1,A,P,B,ISTAT)  ! (10.7)
      RETURN
      END
```

Приложение 10.Б.
Программа для оценивания параметров АРСС-модели

Эта подпрограмма предназначена для вычисления оценок параметров авторегрессии и скользящего среднего (соответственно массивы A и B) и дисперсии белого шума (RHO) произвольного АРСС-процесса с помощью трехэтапного алгоритма, описанного в разд. 10.4. С помощью процедуры, приведенной в приложении IV, помещенном в конце книги, эта программа может быть преобразована для обработки действительнозначных данных. При обработке 64-точечной тест-последовательности, приведенной в приложении II, помещенном в конце книги, в случае N=64, IP=IQ=15 и M=30 получаются следующие значения параметров:

RHO=0,18861;

A(1)=(1,878354;	—1,612764);	A(9)=(3,159017;	1,981841);
A(2)=(2,336005;	—1,779042);	A(10)=(2,585279;	2,064622);
A(3)=(1,746248;	—0,553477);	A(11)=(1,235883;	3,146405);
A(4)=(3,711644;	0,331686);	A(12)=(1,411187;	2,564941);
A(5)=(3,825539;	0,710195);	A(13)=(—0,103888;	2,140406);
A(6)=(2,638773;	0,365052);	A(14)=(—0,581367;	1,333906);
A(7)=(2,368238;	2,086531);	A(15)=(—1,053285;	1,504694);
A(8)=(2,144489;	1,935402);		

B(1)=(—0,916489;	—0,005500);	B(9)=(—0,461919;	0,010084);
B(2)=(—0,143437;	—0,245983);	B(10)=(0,094423;	—0,021009);
B(3)=(0,689553;	0,668978);	B(11)=(0,131542;	0,280898);
B(4)=(—0,478825;	—0,385360);	B(12)=(—0,052980;	—0,183776);
B(5)=(0,265910;	—0,418730);	B(13)=(—0,009754;	—0,058460);
B(6)=(—0,396341;	0,562510);	B(14)=(—0,121936;	0,132263);
B(7)=(0,140056;	—0,119093);	B(15)=(0,103597;	—0,061122).
B(8)=(0,452928;	—0,159134);		

```
      Подпрограмма ARMA (N,IP,IQ,M,X,RHO,A,B,ISTAT)
C
C     Предназначена для получения оценок авторегрессионных параметров, па-
C     раметров скользящего среднего и дисперсии возбуждающего белого шума
C     АРСС(IP,IQ)-модели для последовательности отсчетов комплексных дан-
C     ных. Параметры оцениваются в три этапа: сначала по исходным данным
C     с помощью модифицированного метода наименьших квадратов Юла —
C     Уолкера оцениваются АР-параметры, затем посредством фильтрации ис-
C     ходных данных с помощью фильтра, сформированного на основе оценок
C     АР-параметров, получается временной ряд, соответствующий последова-
C     тельности остаточных ошибок этого фильтра, и далее по этой последова-
C     тельности оцениваются СС-параметры.
C
C     Входные параметры:
C       N          — число отсчетов комплексных данных.
```

```
C     IP      — требуемое число AP-параметров.
C     IQ      — требуемое число CC-параметров.
C     M       — максимальный корреляционный сдвиг, используемый для ав-
C               токорреляционных оценок.
C     X       — массив отсчетов комплексных данных от X(1) до X(N).
C
C   Выходные параметры:
C
C     RHO     — действительная скалярная величина, характеризующая оцен-
C               ку дисперсии белого шума.
C     A       — массив оценок комплексных AP-параметров от A(1) до
C               A(IP).
C     B       — массив оценок комплексных CC-параметров от B(1) до
C               B(IQ).
C     ISTAT   — целочисленный указатель состояния:
C               0 — при нормальном выходе из программы (ошибки отсут-
C               ствуют);
C               1—4, если обнаружена ошибка в подпрограмме COVAR;
C               5, если обнаружена ошибка в подпрограмме MA;
C               6, если IP<1.
C
C   Примечание:
C
C     Размеры внешних массивов должны указываться в вызывающей про-
C     грамме следующим образом: X .GE. N,A .GE. IP,B .GE. IQ. Размеры
C     внутренних массивов должны указываться следующим образом:
C     R .GE. M,Y .GE. макс. из N-IP,M+IP-IQ. Используемые внешние под-
C     программы: CORRELATION (см. приложение 5.Б), COVAR (см. при-
C     ложение 8.В), MA (см. приложение 10.Б).
C
      COMPLEX X(1),A(1),B(1),R0,R(100),Y(300),SUM
      IF (IP .GT. 0) GO TO 5
      ISTAT=6
      RETURN
5     CALL CORRELATION (N,M,0,X,X,R0,R)
C   Оценивание AP-параметров (без взвешивания ошибок).
C   Число ошибок в уравнении равно M-IQ.
      MPQ=M-IQ+IP
      DO 10 K=1,MPQ
         KPQ=K+IQ-IP
         IF (KPQ .LT. 0) Y(K)=CONJG(R(-KPQ))
         IF (KPQ .EQ. 0) Y(K)=R0
10       IF (KPQ .GT. 0) Y(K)=R(KPQ)
      CALL COVAR (MPQ,IP,Y,PF,A,PB,R,ISTAT)   ! (10.12)
      IF (ISTAT .NE. 0) RETURN
C   Фильтрация исходного временно́го ряда.
      DO 30 K=IP+1,N
         SUM=X(K)
         DO 20 J=1,IP
20          SUM=SUM+A(J)*X(K-J)                ! (10.17)
30       Y(K-IP)=SUM
C   Оценивание CC-параметров (рекомендуется использовать «длинную»
C   AP-модель, порядок которой равен как минимум 2*IQ).
      CALL MA (N-IP,IQ,2*IQ,Y,RHO,B,ISTAT)    ! разд. 10.3
      IF (ISTAT .NE. 0) ISTAT=5
      RETURN
      END
```

Глава 11
МЕТОД ПРОНИ

11.1. Введение

Метод Прони — это метод моделирования выборочных данных в виде линейной комбинации экспоненциальных функций (экспонент). И хотя метод Прони не относится к числу методов спектрального оценивания, он, тем не менее, тесно связан с алгоритмами линейного предсказания по методу наименьших квадратов, используемыми для оценивания АР- и АРСС-параметров, что позволяет углубить понимание методов спектрального оценивания, основанных на применении АР- и АРСС-моделей. С помощью метода Прони осуществляется аппроксимация данных с использованием некоторой *детерминированной* экспоненциальной модели, в противоположность АР- и АРСС-методам, с помощью которых стремятся приспособить вероятностные модели для представления статистик второго порядка для имеющихся данных. Спектральную интерпретацию метода Прони можно получить, вычисляя спектральную плотность энергии (СПЭ) в случае детерминированной экспоненциальной модели.

В 1795 г. Гаспар Рише (барон де Прони) [19] пришел к выводу, что законы, определяющие расширение различных газов, могут быть представлены с помощью сумм затухающих экспонент. Для интерполяции данных проводимых им измерений Прони предложил метод, основанный на подгонке экспоненциальной модели к измеренным эквидистантным значениям и последующем вычислении дополнительных значений посредством оценивания параметров этой экспоненциальной модели в промежуточных точках. Современная версия экспоненциального моделирования по методу наименьших квадратов во многом базируется на исходной процедуре Прони. В оригинальной статье Прони описан метод *точной* подгонки, основанный на использовании такого большого числа полностью *затухающих* экспонент, сколько их необходимо для аппроксимации N имеющихся точек данных. Современный вариант метода Прони обобщен и на модели, состоящие из затухающих синусоид. В нем также используется анализ по методу наименьших квадратов для приближенной подгонки экспоненциальной модели в тех случаях, когда число точек данных превышает их число, необходи-

мое для подгонки с помощью предполагаемого числа экспоненциальных членов. Одна из модификаций современного метода Прони позволяет использовать чисто синусоидальную модель с незатухающими компонентами. В данной главе представлены оригинальный и модифицированный методы наименьших квадратов Прони.

Здесь приведены три основных этапа метода Прони. На первом этапе определяются параметры линейного предсказания, с помощью которых осуществляется подгонка имеющихся данных. На втором этапе из коэффициентов линейного предсказания формируется полином и определяются его корни, которые будут давать оценки коэффициентов затухания и частот синусоид для каждого экспоненциального члена. На третьем этапе ищется решение второй системы линейных уравнений, которое дает оценки амплитуд экспонент и начальных фаз синусоид. Соотношение между параметрами линейного предсказания и авторегрессии, исследованное в гл. 7, позволяет интерпретировать первый и второй этапы как процедуру отыскания *полюсов* некоторого АР-процесса. Таким образом, любой метод спектрального анализа с использованием АР- или АРСС-модели, который предусматривает определение положений полюсов, можно в некотором широком смысле рассматривать как процедуру Прони.

11.2. Краткая сводка результатов

Предположим, что имеется N комплексных отсчетов данных $x[1],\ldots, x[N]$. Тогда метод Прони позволяет оценить $x[n]$ с помощью некоторой p-членной модели комплексных экспонент:

$$\hat{x}[n]=\sum_{k=1}^{p} A_k \exp\left[(\alpha_k+j2\pi f_k)(n-1)T+j\theta_k\right], \qquad (11.1)$$

где $1\leqslant n\leqslant N$, T — интервал отсчетов в секундах, A_k и α_k — амплитуда и коэффициент затухания (в $с^{-1}$) k-й комплексной экспоненты, f_k и θ_k — частота (в Гц) и начальная фаза (в рад) k-й синусоиды. Значения всех этих параметров полностью произвольны. В случае отсчетов действительных данных комплексные экспоненты должны появляться комплексно-сопряженными парами равной амплитуды, что сводит экспоненциальное представление к

$$\hat{x}[n]=\sum_{k=1}^{p/2} 2A_k \exp\left[\alpha_k(n-1)T\right]\cos\left[2\pi f_k(n-1)T+\theta_k\right], \qquad (11.2)$$

где $1\leqslant n\leqslant N$. Если число p комплексных экспонент четно, то

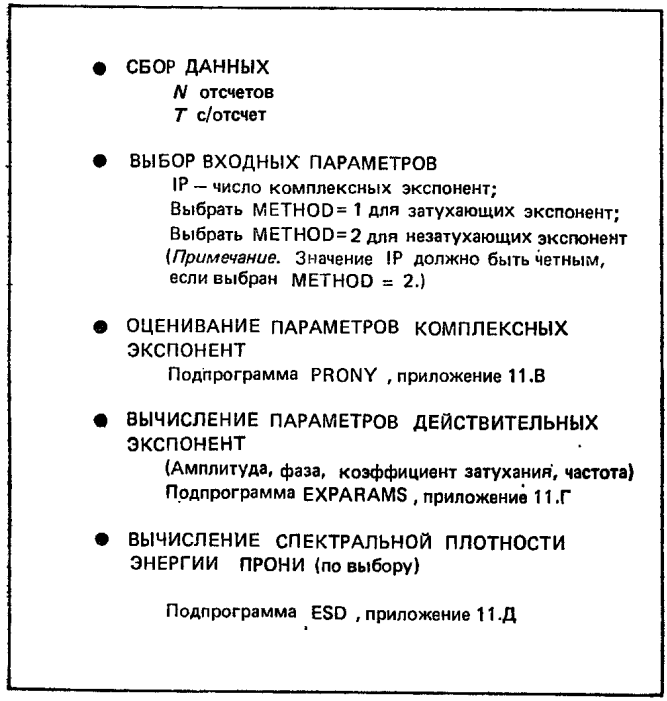


Рис. 11.1. Краткая запись метода экспоненциального оценивания Прони и вычисления СПЭ по методу Прони.

будем иметь $p/2$ затухающих косинусоид. Если p нечетно, то будем иметь $(p—1)/2$ затухающих косинусоид и одну полностью затухающую экспоненту. Периодограмму следует интерпретировать (см. разд. «Задачи») как представление временно́го ряда с помощью гармонической синусоидальной модели. Различие между периодограммной моделью и подходом Прони состоит в способе, с помощью которого выбираются частоты. В случае периодограммы заранее выбирается гармоническая последовательность частот. В методе Прони частоты оцениваются на основе имеющихся данных.

На рис. 11.1 приведена краткая запись этапов программы, предназначенной для получения оценок по методу Прони амплитуды, коэффициента затухания, частоты и начальной фазы. Возможны два варианта этой программы. Если требуется модель общего вида, состоящая из затухающих синусоид, то параметр METHOD устанавливается в значение 1. Если необходимо использовать модель из незатухающих синусоид, то значение этого параметра устанавливается равным 2. Выход про-

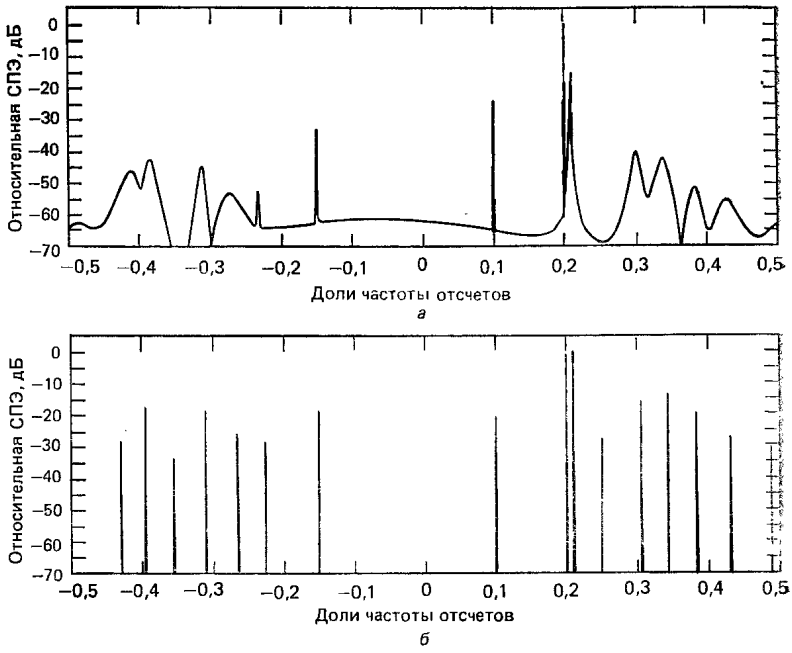


Рис. 11.2. Примеры двух спектральных оценок Прони, полученных по 64-точечной тест-последовательности данных: *а* — обобщенный метод Прони, $p=15$; *б* — модифицированный метод Прони, $p=16$.

граммы PRONY содержит оценки значений двух массивов комплексных экспоненциальных параметров, соответствующих p комплексным экспонентам (см. разд. 11.3). При необходимости эти параметры можно затем использовать в качестве входных параметров для подпрограммы EXPARAMS, с помощью которой определяются значения четырех экспоненциальных параметров, или для подпрограммы ESD, которая дает «спектральную» оценку Прони.

На рис. 11.2 показаны оценки по методу Прони спектральной плотности энергии (СПЭ), полученные для 64-точечной тест-последовательности данных с помощью двух методов, представленных на рис. 11.1. Значения оценок экспоненциальных параметров приведены в приложении 11.Г. Модифицированный метод Прони дает линейчатый спектр, поскольку в нем используется допущение о синусоидальной модели. Это приводит к получению очень точных оценок четырех действительных синусоид анализируемого процесса, но к неточному представлению окрашенного шума, присутствующего в этом процессе.

11.3. Одновременное оценивание экспоненциальных параметров

Функцию дискретного времени (11.1), состоящую из p экспонент, можно сжато представить в форме

$$\hat{x}[n]=\sum_{k=1}^{p} h_k z_k^{n-1}, \tag{11.3}$$

где комплексные константы h_k и z_k определяются выражениями

$$h_k = A_k \exp(j\theta_k), \tag{11.4}$$

$$z_k = \exp[(\alpha_k + j2\pi f_k)\,T]. \tag{11.5}$$

Заметим, что h_k — это комплексная амплитуда, представляющая собой *независящий* от времени параметр, а z_k — это комплексная экспонента, которая описывает параметр, *зависящий* от времени. В идеальном случае при наличии N отсчетов данных сумму квадратов ошибок

$$\rho=\sum_{n=1}^{N} |\varepsilon[n]|^2, \tag{11.6}$$

где

$$\varepsilon[n]=x[n]-\hat{x}[n]=x[n]-\sum_{k=1}^{p} h_k z_k^{n-1}, \tag{11.7}$$

необходимо одновременно минимизировать по параметрам h_k, параметрам z_k и числу экспонент p. К сожалению, это оказывается трудной нелинейной задачей даже в том случае, когда значение p известно. Трудность подобной задачи можно продемонстрировать на примере модели, содержащей только одну экспоненту. Для минимизации квадрата ошибки ρ при использовании модели с затухающей экспонентой

$$\hat{x}[n]=A\exp(\alpha[n-1]\,T)$$

необходимо приравнять нулю производные от ρ по A и α:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\rho}{\partial A}&=c_1-c_2A=0,\\ \frac{\partial\rho}{\partial\alpha}&=c_3-c_4A=0,\end{aligned} \tag{11.8}$$

где

$$c_1 = \sum_{n=1}^{N} x[n] \exp(\alpha[n-1]T),$$
$$c_2 = \sum_{n=1}^{N} \exp(2\alpha[n-1]T),$$
$$c_3 = \sum_{n=1}^{N} (n-1)\, x[n] \exp(\alpha[n-1]T), \qquad (11.9)$$
$$c_4 = \sum_{n=1}^{N} (n-1) \exp(2\alpha[n-1]T).$$

Для простоты положим, что $x[n]$, A и α имеют действительные значения. Из первого уравнения в (11.8) получаем $A = c_1/c_2$; подставляя это значение во второе уравнение в (11.8), получаем

$$c_2 c_3 = c_1 c_4. \qquad (11.10)$$

Это в высшей степени нелинейное уравнение относительно входящих в него сумм, содержащих множитель $\exp(\alpha[n-1]T)$, необходимо решить относительно α. Аналитические методы решения этого уравнения отсутствуют.

Для одновременной минимизации величины (11.6) по всем экспоненциальным параметрам можно использовать итеративные алгоритмы, такие как процедуры градиентного спуска и метод Ньютона [3, 16, 17]. Эти алгоритмы требуют очень больших вычислительных затрат и к тому же на каждом шаге требуют обращения матриц, размерность которых может быть равной числу имеющихся отсчетов данных. Алгоритмы градиентного спуска для мультимодальных уравнений могут к тому же не сходиться к глобальному минимуму. Отмеченные вычислительные трудности привели к разработке субоптимальных процедур минимизации ρ, получивших название метода наименьших квадратов Прони, в котором используются решения линейных уравнений. Метод Прони сводит нелинейные аспекты экспоненциальной модели к процедуре факторизации полиномов, для которой разработаны быстрые вычислительные алгоритмы.

11.4. Исходный подход Прони

Если число используемых отсчетов данных равно числу экспоненциальных параметров, то возможна точная подгонка экспонент под имеющиеся данные. Рассмотрим функцию дискретного времени, представляющую собой сумму p экспонент:

$$x[n] = \sum_{k=1}^{p} h_k z_k^{n-1}. \qquad (11.11)$$

Заметим, что в этом выражении используется $x[n]$, а не $\hat{x}[n]$, поскольку точно $2p$ комплексных отсчетов $x[1], \ldots, x[2p]$ используется для точной подгонки к экспоненциальной модели с $2p$ комплексными параметрами $h_1, \ldots, h_p, z_1, \ldots, z_p$. Входящие в (11.11) p уравнений, где $1 \leqslant n \leqslant p$, можно записать в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} z_1^0 & z_2^0 & \ldots & z_p^0 \\ z_1^1 & z_2^1 & \ldots & z_p^1 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ z_1^{p-1} & z_2^{p-1} & \ldots & z_p^{p-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ h_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x[1] \\ x[2] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x[p] \end{pmatrix}. \tag{11.12}$$

Матрица с временными индексами элементов z имеет структуру матрицы Вандермонда. Если может быть найден метод для раздельного определения элементов z, то уравнение (11.12) можно рассматривать как систему уравнений, решив которую, определяют неизвестный вектор комплексных амплитуд. Вклад самого Прони как раз и состоял в отыскании такого метода.

Ключ к разделению основан на том факте, что уравнение (11.12) является решением некоторого однородного линейного разностного уравнения с постоянными коэффициентами. Для того чтобы определить вид этого разностного уравнения, определим сначала полином $\phi(z)$, корнями которого являются экспоненты z_k:

$$\phi(z) = \prod_{k=1}^{p} (z - z_k). \tag{11.13}$$

Если произведения в (11.13) выразить в виде степенной последовательности, то полином можно представить в следующем виде:

$$\phi(z) = \sum_{m=0}^{p} a[m] z^{p-m} \tag{11.14}$$

с комплексными коэффициентами $a[m]$, для которых $a[0] = 1$. Осуществляя в уравнении (11.11) сдвиг индекса от n к $n-m$ и умножая обе его части на параметр $a[m]$, получаем

$$a[m] x[n-m] = a[m] \sum_{k=1}^{p} h_k z_k^{n-m-1}. \tag{11.15}$$

Записывая аналогичные произведения $a[0]x[n], \ldots, a[m-1] \times x[n-m+1]$ и осуществляя суммирование, получаем

$$\sum_{m=0}^{p} a[m] x[n-m] = \sum_{i=0}^{p} h_i \sum_{m=0}^{p} a[m] z_i^{n-m-1}, \tag{11.16}$$

которое справедливо при $p+1 \leqslant n \leqslant 2p$. Осуществляя подстановку $z_i^{n-m-1} = z_i^{n-p} z_i^{p-m-1}$, получаем

$$\sum_{m=0}^{p} a[m]\, x[n-m] = \sum_{i=0}^{p} h_i z_i^{n-p} \sum_{m=0}^{p} a[m]\, z_i^{p-m-1} = 0. \quad (11.17)$$

Сумму в правой части (11.17) можно рассматривать как полином, определяемый уравнением (11.14), который записан через свои корни, что и обеспечивает в (11.17) равенство нулю. Уравнение (11.17) — это линейное разностное уравнение, однородное решение которого выражается формулой (11.11). Полином (11.14), ассоциированный с этим линейным разностным уравнением, называется *характеристическим*.

p уравнений, представляющих истинные значения коэффициентов $a[n]$, удовлетворяющих (11.17), можно записать в виде следующего $p \times p$ матричного уравнения:

$$\begin{pmatrix} x[p] & x[p-1] & \dots & x[1] \\ x[p+1] & x[p] & \dots & x[2] \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x[2p-1] & x[2p-2] & \dots & x[p] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a[1] \\ a[2] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a[p] \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x[p+1] \\ x[p+2] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x[2p] \end{pmatrix}. \quad (11.18)$$

Из уравнения (11.18) следует, что, имея $2p$ отсчетов комплексных данных, возможно разделение множеств параметров h_k и z_k. Комплексные полиномиальные коэффициенты $a[1], \dots, a[p]$, которые являются функциями только зависящих от времени компонентов z_k экспоненциальной модели, позволяют по временны́м отсчетам сформировать соотношения для линейного предсказания. Матрица в уравнении (11.18) имеет тёплицеву структуру, поэтому решение может быть получено с помощью подпрограммы TOEPLITZ, приведенной в гл. 3.

Процедуру Прони для подгонки p экспонент к $2p$ отсчетам данных можно теперь представить в виде следующих трех этапов. На первом этапе получается решение уравнения (11.18) для коэффициентов полинома. На втором этапе вычисляются корни полинома, определяемого уравнением (11.14). Для этой цели используется программа факторизации полинома CPOLY, приведенная в приложении 11.Б. Используя корень z_i, можно определить коэффициент затухания α_i и частоту синусоиды f_i с помощью соотношений

$$\alpha_i = \ln |z_i| / T \text{ с}^{-1}, \quad (11.19)$$

$$f_i = \operatorname{arctg} [\operatorname{Im}\{z_i\}/\operatorname{Re}\{z_i\}]/2\pi T \text{ Гц}. \quad (11.20)$$

Для завершения процедуры Прони корни полинома, вычисленные на втором этапе, используются далее для формирования

элементов матрицы уравнения (11.12), которое затем решается относительно p комплексных параметров $h[1], \ldots, h[p]$. Каждый параметр h_i используется далее для определения амплитуды A_i и начальной фазы θ_i, которые вычисляются с помощью выражений

$$A_i = |h_i|, \tag{11.21}$$

$$\theta_i = \operatorname{arc\,tg}[\operatorname{Im}\{h_i\}/\operatorname{Re}\{h_i\}] \text{ рад}. \tag{11.22}$$

Вычисления, требуемые выражениями (11.19)—(11.22), выполняются с помощью подпрограммы EXPARAMS, приведенной ниже в приложении 11.Г.

11.5. Метод наименьших квадратов Прони

На практике число отсчетов данных N, как правило, превышает то минимальное их количество, которое необходимо для подгонки модели из p экспонент, т. е. $N > 2p$. В этом переопределенном случае последовательность отсчетов данных может быть аппроксимирована лишь как экспоненциальная последовательность

$$\hat{x}[n] = \sum_{k=1}^{p} h_k z_k^{n-1}, \tag{11.23}$$

где $1 \leqslant n \leqslant N$. Заметим, что ошибка аппроксимации в данном случае определяется выражением $\varepsilon[n] = x[n] - \hat{x}[n]$. В разд. 11.3 было показано, что одновременное нахождение порядка p и параметров $\{h_k, z_k\}$, где $1 \leqslant k \leqslant p$, которые минимизируют сумму квадратов ошибки

$$\rho = \sum_{n=1}^{N} |\varepsilon[n]|^2 \tag{11.24}$$

представляет собой трудную нелинейную задачу. Используя вариант метода Прони, описанный в разд. 11.4, можно определить субоптимальное решение, которое обеспечивает удовлетворительные результаты. Используя на первом и втором этапе трехэтапного метода Прони соответствующие линейные процедуры наименьших квадратов, получим процедуру экспоненциального моделирования, которую иногда называют *обобщенным методом Прони* [6, 16]. При таком субоптимальном подходе задача нелинейной экспоненциальной подгонки сводится по сути дела к задаче полиномиальной факторизации.

В переопределенном случае (т. е. при наличии избыточных данных) линейное разностное уравнение (11.17) может быть модифицированно к виду

$$\sum_{m=1}^{p} a[m]\,x[n-m]=e[n] \tag{11.25}$$

где $p+1\leqslant n\leqslant N$. Член $e[n]$ характеризует ошибку аппроксимации на основе *линейного предсказания* в отличие от ошибки $\varepsilon[n]$, которая характеризует ошибку *экспоненциальной* аппроксимации. Уравнение (11.25) идентично уравнению для ошибки линейного предсказания вперед, если каждый член $a[m]$ рассматривать как параметр линейного предсказания. Вместо уравнения (11.17) параметры $a[m]$ можно теперь выбирать как параметры, которые минимизируют сумму квадратов ошибок линейного предсказания $\Sigma^{N}_{n=p+1}|e[n]|^2$, а не сумму квадратов ошибок экспоненциальной аппроксимации ρ, определяемую выражением (11.24). Иными словами, это просто ковариационный метод линейного предсказания. Для решения ковариационных нормальных уравнений линейного предсказания можно воспользоваться программой COVAR, приведенной в приложении 8.В. Число экспонент p (называемое также числом полюсов применительно к АР-методам) можно оценить, используя те же правила выбора порядка, которые были описаны в гл. 8. Можно также воспользоваться и анализом на основе разложения по сингулярным числам (РСЧ), описанным ниже в разд. 11.9. В любом случае максимальное значение порядка ограничено величиной $p\leqslant N/2$. Корни полинома, сформированного из коэффициентов линейного предсказания, будут давать при использовании уравнений (11.19) и (11.20) оценки коэффициентов затухания и частоты каждой экспоненты.

Если значения параметров $z_1, \ldots, z_p$ были определены с помощью линейного предсказания по методу наименьших квадратов и факторизацией полинома, то экспоненциальная аппроксимация $\hat{x}[n]$, описываемая уравнением (11.23), становится линейной относительно оставшихся неизвестных параметров $h_1, \ldots, h_p$. Минимизируя сумму квадратов ошибок по каждому параметру h_k, получаем следующее комплексное нормальное уравнение с матрицей размером $p\times p$ (подробности его вывода см. в разд. 3.4):

$$(\mathbf{Z}^H\mathbf{Z})\,\mathbf{h}=(\mathbf{Z}^H\mathbf{x}), \tag{11.26}$$

где $(N\times p)$-матрица $\mathbf{Z}$, $(p\times 1)$-вектор $\mathbf{h}$ и $(N\times 1)$-вектор отсче-

тов данных x определяются выражениями

$$\mathbf{Z}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_1 & z_2 & \dots & z_p \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ z_1^{N-1} & z_2^{N-1} & \dots & z_p^{N-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h}=\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ h_p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}=\begin{pmatrix} x[1] \\ x[2] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x[N] \end{pmatrix}. \tag{11.27}$$

Эрмитова $(p\times p)$-матрица $\mathbf{Z}^H\mathbf{Z}$ имеет форму

$$\mathbf{Z}^H\mathbf{Z}=\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \dots & \gamma_{1p} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \gamma_{p1} & \dots & \gamma_{pp} \end{pmatrix}, \tag{11.28}$$

где

$$\gamma_{jk}=\sum_{n=0}^{N-1}(z_j^*z_k)^n=\gamma_{kj}^*. \tag{11.29}$$

Приведем также одно полезное соотношение, которое позволяет устранить суммирование в выражении (11.29); оно имеет следующий вид:

$$\gamma_{jk}=\begin{cases} \dfrac{(z_j^*z_k)^N-1}{(z_j^*z_k)-1}, & z_j^*z_k\neq 1; \\ N, & z_j^*z_k=1. \end{cases} \tag{11.30}$$

Для решения уравнения (11.26) относительно неизвестных параметров $h[k]$ можно далее использовать подпрограмму CHOLESKY, приведенную в гл. 3.

Метод Прони будет также подгонять экспоненты к любому аддитивному шуму, присутствующему в данных, поскольку экспоненциальная модель не позволяет получать раздельную оценку этого шумового процесса. Экспоненциальная модель, учитывающая присутствие аддитивного шума, будет иметь форму

$$x[n]=\sum_{k=1}^{p}h_kz_k^{n-1}+\varepsilon[n]. \tag{11.31}$$

Функция $\varepsilon[n]$ использовалась также для представления ошибки аппроксимации этой экспоненциальной модели. Если в анализе, выполненном в разд. 11.4, вместо $x[n]$ использовать $x[n]$—$\varepsilon[n]$, то линейное разностное уравнение, которое описы-

вает процесс, состоящий из суммы экспонент и аддитивного белого шума, будет иметь вид

$$x[n] = -\sum_{k=1}^{p} a[m]\,x[n-m] + \sum_{k=0}^{p} a[m]\,\varepsilon[n-m]. \quad (11.32)$$

Это — АРСС(p, p)-модель с одинаковыми АР- и СС-коэффициентами и возбуждающим шумовым процессом $\varepsilon[n]$. На первом этапе метода Прони используются уравнение линейного предсказания

$$x[n] = -\sum_{k=1}^{p} a[m]\,x[n-m] + e[n] \quad (11.33)$$

и попытка «отбеливания» $e[n]$. Сравнивая уравнение (11.33) с уравнением (11.32), видим, что отбеленный процесс $e[n]$ совершенно не соответствует небелому СС-процессу, представляемому выражением $\Sigma^{p}_{k=0} a[m]\varepsilon[n-m]$. Именно по этой причине метод Прони часто не обеспечивает удовлетворительных результатов при значительном уровне аддитивного шума, поскольку не позволяет учесть наличие небелого шума в анализируемом процессе. Когда метод Прони используется при наличии сильного аддитивного шума, получаются очень неточные оценки коэффициентов затухания, значения которых часто намного превышают их истинные значения [16, 23, 24, 18]. Использование значений p, превышающих число действительно имеющихся полюсов, упрощает моделирование и позволяет учесть наличие шума; см. разд. 11.9.

11.6. Модифицированный метод наименьших квадратов Прони

Обычный метод наименьших квадратов Прони может быть модифицирован для аппроксимации последовательности *комплексных* данных с помощью модели, состоящей из *незатухающих* ($\alpha=0$) комплексных синусоид [8, 12]. Ниже мы рассмотрим лишь случай четного числа комплексных экспонент. Модель, содержащая $2p$ компонент и аналогичная уравнению (11.1), будет иметь форму

$$\hat{x}[n] = \sum_{k=1}^{2p} A_k \exp\left(j2\pi f_k [n-1]\,T + j\theta_k\right) = \sum_{k=1}^{2p} h_k z_k^{n-1}, \quad (11.34)$$

где $1 \leqslant n \leqslant N$, $h_k = A_k \exp(j\theta_k)$ и $z_k = \exp(j2\pi f_k T)$. Заметим, что z_k имеют единичный модуль, т. е. $|z_k| = 1$. Если h_k и z_k появляются комплексно-сопряженными парами и $f_k \neq 0$ или $f_k \neq 1/2T$, то последовательность из отсчетов действительных данных мо-

жет быть аппроксимирована с помощью модели, состоящей из четного или нечетного числа p действительных незатухающих синусоид:

$$\hat{x}[n]=\sum_{k=1}^{p}2A_k\cos(2\pi f_k[n-1]T+\theta_k)=\sum_{k=1}^{p}(h_k z_k^{n-1}+h_k^*(z_k^*)^{n-1}), \tag{11.35}$$

где $1\leqslant n\leqslant N$. Полином, сформированный с помощью корней либо уравнения (11.34), либо уравнения (11.35), равных z_k, имеет форму

$$\phi(z)=\prod_{k=1}^{2p}(z-z_k)=\sum_{k=0}^{2p}a[k]z^{2p-k}, \tag{11.36}$$

где $a[0]=1$ (по определению), а остальные параметры $a[k]$ будут в общем случае комплексными, за исключением рассмотренного выше случая действительных синусоид, которому соответствует рассмотренное выше уравнение (11.35). В этом частном случае все параметры $a[k]$ будут действительными. Нетрудно показать, что коэффициент $a[2p]$ определяется выражением

$$a[2p]=\prod_{k=1}^{2p}z_k, \tag{11.37}$$

которое следует из определения $\phi(z)$. Благодаря единичному модулю имеем $z_k^{-1}=z_k^*$, поэтому нетрудно показать, что $|a[2p]|=1$ и что полином

$$a[2p]z^{2p}\phi^*(z) \tag{11.38}$$

имеет те же корни, что и полином $\phi(z)$. Поскольку полином

$$a[2p]z^{2p}\phi^*(z)=\sum_{k=0}^{2p}a[2p]a^*[2p-k]z^{2p-k} \tag{11.39}$$

должен иметь такие же корни, приходим к выводу, что эти коэффициенты также должны обладать свойством комплексной сопряженности, т. е. $a[k]=a[2p]a^*[2p-k]$, где $0\leqslant k\leqslant 2p$. Таким образом, однородное линейное разностное уравнение, для которого (11.35) рассматривается в качестве его решения, имеет вид

$$a[p]x[n-p]+\sum_{k=1}^{p}(a[p-k]x[n-p+k]+a[p+k]x[n-p-k])=0 \tag{11.40}$$

для $2p+1\leqslant n\leqslant N$. Более удобную форму уравнения (11.40) можно получить, поделив его члены на значение центрального элемента $a[p]$, в результате чего получаем сопряженно симмет-

ричное разностное уравнение

$$x[n-p]+\sum_{k=1}^{p}\left(g_p[k]\,x[n-p+k]+g_p^*[k]\,x[n-p-k]\right)=0, \quad (11.41)$$

где $g_p[k]=a[p-k]/a[p]$. Сопряженная симметрия обусловлена свойством $a[p]=a[2p]a^*[p]$. Аналогичное симметричное разностное уравнение для случая действительных синусоид было получено Хильдебрандом [4].

В модифицированном методе Прони на первом этапе ошибка линейного предсказания, определяемая уравнением (11.33), заменяется сопряженно симметричной ошибкой линейного сглаживания, использующей как предшествующие, так и последующие значения отсчетов данных:

$$e_p^s[n]=x[n]+\sum_{k=1}^{p}\left(g_p[k]\,x[n+k]+g_p^*[k]\,x[n-k]\right), \quad (11.42)$$

определенной на интервале $p+1\leqslant n\leqslant N-p$ (используются только имеющиеся данные), и минимизируется сумма квадратов ошибок сглаживания

$$\rho_p^s=\sum_{n=p+1}^{N-p}|e_p^s[n]|^2, \quad (11.43)$$

а не сумма квадратов ошибок линейного предсказания, определяемая выражением (11.24). Приравнивая нулю комплексные производные от $\rho^s{}_p$ по $g_p[1]$, ..., $g_p[p]$, получаем нормальные уравнения, которые можно кратко записать в виде матричных соотношений:

$$\mathbf{R}_{2p}\mathbf{g}_{2p}=\begin{pmatrix}\mathbf{0}_p\\ 2\rho_p^s\\ \mathbf{0}_p\end{pmatrix}, \quad (11.44)$$

где центросимметричная матрица $\mathbf{R}_{2p}$ и сопряженно симметричный вектор-столбец $\mathbf{g}_{2p}$ определяются выражениями

$$\mathbf{R}_{2p}=\begin{pmatrix}r_{2p}[0,0] & \dots & r_{2p}[0,2p]\\ \vdots & & \vdots\\ r_{2p}[2p,0] & \dots & r_{2p}[2p,2p]\end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_{2p}=\begin{pmatrix}g_p[p]\\ \vdots\\ g_p[1]\\ 1\\ g_p^*[1]\\ \vdots\\ g_p^*[p]\end{pmatrix}. \quad (11.45)$$

Элементы матрицы $\mathbf{R}_{2p}$ определяются выражением

$$r_{2p}[j, k] = \sum_{n=2p+1}^{N} (x^*[n-j]\,x[n-k] + x[n-p+j]\,x^*[n-p+k]). \tag{11.46}$$

Внимательный читатель, конечно, заметит, что матрица $\mathbf{R}_{2p}$ в (11.45) идентична матрице в приведенном в гл. 8 выражении (8.48), соответствующем модифицированному ковариационному методу. Там же в гл. 8 был описан быстрый алгоритм для решения модифицированных ковариационных нормальных уравнений. Можно разработать быстрый алгоритм и для решения нормальных уравнений (11.44), для чего можно воспользоваться простым обобщением модифицированного ковариационного алгоритма (см. приложение 11.А). Результирующий быстрый алгоритм требует для решения этого уравнения $Np+18p^2$ вычислений. Кроме того, при этом получаются решения наименьших квадратов для всех меньших порядков этого уравнения без каких-либо дополнительных вычислительных затрат. В том случае, когда число синусоид не известно, это свойство алгоритма обеспечивает средство для проверки всех моделей, содержащих от одной до p синусоид. В приложении 11.А приведена машинная программа SYMCOVAR для решения уравнения (11.44), в которой использован этот быстрый алгоритм.

Хотя комплексные корни с модулем, равным единице, обеспечивают получение полинома с сопряженно симметричными коэффициентами, обратное утверждение не всегда справедливо. Сопряженно симметричный полином лишь гарантирует, что если z_i — один из корней, то обратная ему величина z_i^{-1} также будет корнем. Этот корень не обязательно имеет единичный модуль, поскольку это требование необходимо лишь тогда, когда должна генерироваться незатухающая синусоида. На практике полином порядка $2p$, сформированный из вектора $\mathbf{g}_{2p}$ параметров линейного сглаживания

$$g[p]\,z^{2p} + \ldots + g[1]\,z^{p+1} + z^p + g^*[1]\,z^{p-1} + \ldots + g^*[p] = 0, \tag{11.47}$$

редко обладает обратными корнями с модулем, отличным от единицы. Когда такие корни встречаются, то они часто соответствуют частотам 0 и $1/2T$ герц. Модифицированный метод Прони завершается тем же самым способом, который используется в немодифицированном методе Прони для определения амплитуд и начальных фаз синусоид.

11.7. Спектр Прони

Процедура Прони обычно завершается вычислением оценок параметров, определяющих амплитуду, коэффициент затухания, частоту и фазу. Однако обработку можно продолжить еще на один этап и вычислить «спектр» Прони [13]. Множество возможных спектров может быть определено в зависимости от принятых допущений относительно вида колебаний вне интервала наблюдения. Спектр Прони определяется в терминах экспоненциальной аппроксимации $\hat{x}[n]$, а не в терминах исходной временно́й последовательности $x[n]$.

Одно из допущений состоит в том, что сумма экспонент дискретного времени в уравнении (11.3) определяется на интервале $-\infty<n<\infty$ как односторонняя функция следующего вида:

$$\hat{x}_1[n+1]=\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{p} h_k z_k^n, & n\geqslant 0;\\ 0, & n<0,\end{cases} \tag{11.48}$$

см. рис. 11,3, *а*. Если сигнал $x[n]$ действителен, то экспоненты будут появляться комплексно-сопряженными парами $\exp(\pm j[2\pi f_k+\theta_k])$, что обеспечит формирование одного косинусоидального члена $\cos(2\pi f_k+\theta_k)$ z-преобразования от (11.48)

$$\hat{X}_1(z)=\sum_{k=1}^{p}\left(\frac{h_k}{1-z_k z^{-1}}\right), \tag{11.49}$$

которое сходится при $|z_k|<|z|$. Здесь также полагается, что $|z_k|<1$, т. е., иными словами, — все параметры затухания отрицательны, что дает затухающие экспоненты. Если это так, то подстановка вида $z=\exp(j2\pi fT)$ в выражение (11.49) будет давать дискретно-временно́е преобразование Фурье (ДВПФ) детерминированной последовательности $\hat{x}_1[n]$ с конечной энергией. Поэтому спектральная плотность энергии (СПЭ) Прони для рассматриваемой односторонней экспоненциальной модели будет определяться выражением

$$\hat{S}_1(f)=|T\hat{X}_1(\exp[j2\pi fT])|^2, \tag{11.50}$$

которое определено на интервале частот $-1/2T\leqslant f\leqslant 1/2T$. Этот спектр удобен для описания кратковременных сигналов. Типичная форма этого спектра показана на рис. 11.3, *б*.

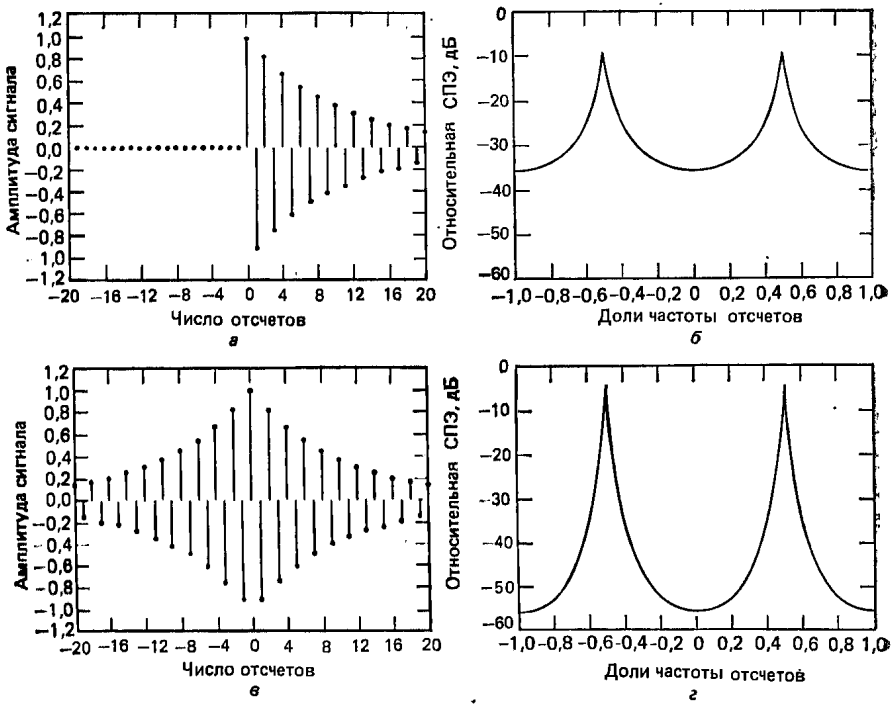


Рис. 11.3. Экспоненциальные модели и связанные с ними спектральные плотности энергии (СПЭ): *а* — односторонняя модель; *б* — СПЭ односторонней модели; *в* — двусторонняя модель; *г* — СПЭ двусторонней модели.

Альтернативной интерпретацией экспоненциальной модели является двусторонняя функция вида

$$\hat{x}_2[n] = \begin{cases} \sum_{k=1}^{p} h_k z_k^n, & n \geqslant 0; \\ \sum_{k=1}^{p} h_k (z_k^*)^{-n}, & n < 0, \end{cases} \tag{11.51}$$

где $z_k = \exp(\alpha_k T + j2\pi f_k T)$ и $(z_k^*)^{-1} = \exp(-\alpha_k T + j2\pi f_k T)$. Это определение обеспечивает симметрию затухающей части экспоненты относительно начала координат, как показано на рис. 11.3, *в*. Функция (11.51) имеет следующее z-преобразование:

$$\hat{X}_2(z) = \sum_{k=1}^{p} h_k \left(\frac{1}{1 - z_k z^{-1}} - \frac{1}{1 - (z_k^* z)^{-1}} \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{p} h_k \left(\frac{(z_k - 1/z_k^*) z^{-1}}{1 - (z_k + 1/z_k^*) z^{-1} + (z_k / z_k^*) z^{-2}} \right), \tag{11.52}$$

и сходится для $|z_k|<|z|<|z_k^{-1}|$. Если также полагается, что $|z_k|<1$, а для выражения (11.52) используется подстановка вида $z=\exp(j2\pi fT)$, то ДВПФ этой двусторонней функции будет иметь вид

$$\hat{X}_2(f)=T\hat{X}_2(\exp[j2\pi fT])=$$

$$=\sum_{k=1}^{p} h_k\left(\frac{T(\exp[\alpha_kT]-\exp[-\alpha_kT])\exp(j2\pi[f_k-f]T)}{1-(\exp[\alpha_kT]+\exp[-\alpha_kT])\exp(j2\pi[f_k-f]T)+}\rightarrow\right.$$

$$\left.\rightarrow\frac{}{+\exp(j4\pi[f_k-f]T)}\right), \quad (11.53)$$

а результирующая СПЭ Прони — вид

$$\hat{S}_2(f)=|\hat{X}_2(f)|^2. \quad (11.54)$$

В общем случае спектр $\hat{S}_2(f)$ имеет более острые пики, чем спектр $\hat{S}_1(f)$; см. рис. 11.3, *г*. Автор отдает предпочтение именно этому второму определению, поскольку незатухающая синусоида ($\alpha=0$) определяется в нем на бесконечном временно́м интервале. СПЭ Прони $\hat{S}_2(f)$ имеет в этом случае бесконечное значение на частоте синусоиды и ведет себя подобно дискретной импульсной функции.

Любое из двух приведенных определений спектра Прони пригодно для отображения спектров как узкополосных, так и широкополосных сигналов. Ширина пиков спектра зависит от величины коэффициента затухания, что иллюстрирует рис. 11.3. Колоколообразные отклики имеют пиковые значения СПЭ величиной $(2A_k/\alpha_k)^2$ и полосы (по уровню 6 дБ) величиной α/π герц, поэтому разрешение меняется как функция затухания. Когда α велико, получается спектр с широкими пиками, когда же мало, получаются спектры с узкими пиками.

Еще один возможный спектр Прони учитывает всю информацию, содержащуюся в полной последовательности отсчетов данных. Если вычисляются остаточные ошибки экспоненциальной аппроксимации

$$\varepsilon[n]=x[n]-\sum_{k=1}^{p} h_k z_k^{n-1}, \quad (11.55)$$

то к ним применим стандартный периодограммный анализ, и спектр получаемой при этом периодограммы может комбинироваться с любым из двух рассмотренных спектров Прони.

11.8. Учет известных экспоненциальных компонент

Имеются приложения, в которых некоторые экспоненциальные моды (либо полюсы, либо затухание и частоты компонент) могут быть известны заранее в результате предварительно-

но проведенных измерений или же потому, что известны физические или электрические свойства источника, генерирующего анализируемый сигнал. Однако соответствующие амплитудные и фазовые компоненты этих экспоненциальных мод могут быть не известны. В этом случае первый этап метода Прони можно модифицировать, с тем чтобы учесть эти известные полюсы [21]. Пусть, например, q экспоненциальных компонент $z_1, \ldots, z_q$ известны. Характеристический полином, связанный с этими q известными компонентами, имеет вид

$$\prod_{k=1}^{q}(z-z_k)=\sum_{k=0}^{q}c[k]\,z^k, \tag{11.56}$$

где $c[q]=1$. Тогда характеристический полином для всех p компонент, определяемый выражением (11.14), можно разложить на множители и записать в следующем виде:

$$\sum_{m=0}^{p}a[m]\,z^m=\left(\sum_{k=0}^{q}c[k]\,z^k\right)\left(\sum_{i=0}^{p-q}\alpha[i]\,z^i\right), \tag{11.57}$$

где $\alpha[p-q]=1$. Приравнивая члены с одинаковыми степенями компонент z, получаем

$$a[m]=\sum_{k=0}^{q}c[k]\,\alpha[m-k], \tag{11.58}$$

где $\alpha[i]=0$ для $i>p-q+1$ и $i<0$. Подставляя выражение (11.58) для $a[m]$ в выражение (11.16), получаем

$$\sum_{m=1}^{p}a[m]\,x[n-m]=\sum_{m=1}^{p}\left(\sum_{k=0}^{q}c[k]\,\alpha[m-k]\right)x[n-m]=0, \tag{11.59}$$

где $p+1\leqslant n\leqslant 2p$. Уравнение (11.59) можно преобразовать к виду

$$\sum_{m=0}^{p-q}\alpha[m]\,y[n-m]=0, \tag{11.60}$$

где $p+1\leqslant n\leqslant 2p$, а новая последовательность $y[n]$ определяется выражением

$$y[n]=\sum_{k=0}^{q}c[k]\,x[n-k]. \tag{11.61}$$

Выражение (11.61) определяет операцию свертки, посредством которой осуществляется фильтрация исходной временной последовательности $x[n]$ с целью получения новой последовательности $y[n]$.

Метод Прони при наличии нескольких известных компонент продолжается следующим образом. Во-первых, исходная после-

довательность отсчетов данных фильтруется [уравнение (11.61)] с помощью фильтра с коэффициентами, определяемыми этими известными полюсами [уравнение (11.58)]. Затем фильтрованные отсчеты данных обрабатываются как обычно с помощью ковариационного алгоритма линейного предсказания на основе наименьших квадратов, с тем чтобы получить оценки параметров $\alpha[m]$. Корни полинома пониженного порядка

$$\sum_{i=0}^{p-q} \alpha[i] z^i \tag{11.62}$$

дают оценки неизвестных полюсов. Эти p—q полюсов и q известных полюсов далее объединяются для выполнения операции минимизации по методу наименьших квадратов, в результате которой будут определены амплитуды и фазы всех p компонент.

11.9. Идентификация экспонент в шуме

Выше было показано, что метод наименьших квадратов Прони требует решения ковариационных нормальных уравнений линейного предсказания, идентичных уравнениям, с которыми мы познакомились в гл. 8 при описании АР-методов спектрального анализа. Эта общность с названными методами позволила использовать критерии выбора порядка АР-модели, обсуждавшиеся в разд. 8.10, для определения числа экспонент, требуемых для аппроксимации анализируемых данных. В тех случаях, когда уровень шума низок, эти критерии нередко обеспечивают получение удовлетворительных результатов. Однако при высоких уровнях шума оценки частоты и затухания компоненты обычно оказываются неточными и смещенными из-за воздействия шума. Разделить корни характеристического полинома Прони на корни, соответствующие слабым экспонентам, и корни, соответствующие шуму, часто весьма затруднительно. Для упрощения идентификации экспоненциальных сигналов, действительно присутствующих в данных, и улучшения точности оценок затухания и частоты можно применить три метода. Эти методы включают использование нулей полинома линейного предсказания вперед и назад, больших порядков предсказания и разложения по сингулярным числам (РСЧ).

В разд. 11.4 было показано, что при отсутствии аддитивного шума p экспонент определяются посредством решения уравнения линейного предсказания вперед

$$\sum_{m=0}^{p} a[m] x[n-m] = 0, \tag{11.63}$$

где $a[0]=1$, а характеристический полином

$$A(z)=\sum_{m=0}^{p} a[m]\,z^{p-m} \qquad (11.64)$$

имеет корни в $z_k=\exp(s_k)$, где $1\leqslant k\leqslant p$, а $s_k=(\alpha_k+j2\pi f_k)T$ характеризует коэффициент затухания и частоту k-й экспоненты. Те же p экспонент можно получить в обращенном времени, решая уравнения линейного предсказания назад:

$$\sum_{m=0}^{p} b[m]\,x[n-p+m]=0, \qquad (11.65)$$

где $b[0]=1$. Характеристический полином

$$B(z)=\sum_{m=0}^{p} b^*[m]\,z^{p-m}, \qquad (11.66)$$

сформированный из комплексно-сопряженных коэффициентов линейного предсказания назад, имеет корни в $z_k=\exp(-s_k^*)=\exp([-\alpha_k+j2\pi f_k]T)$, где $1\leqslant k\leqslant p$. (Доказательство этого свойства в качестве самостоятельного задания вынесено в разд. «Задачи».) Для затухающей экспоненты (коэффициент затухания $\alpha_k<0$) эти корни характеристического полинома линейного предсказания вперед $A(z)$ попадают *внутрь* единичной окружности z-плоскости, тогда как корни характеристического полинома $B(z)$ линейного предсказания назад будут находиться *снаружи* этой единичной окружности из-за наличия коэффициента затухания $\exp(-\alpha_k T)$, что соответствует возрастающей экспоненте. Эти свойства расположения корней полиномов $A(z)$ и $B(z)$ обусловлены свойствами детерминированных экспоненциальных функций.

Рассмотрим процесс, состоящий из двух комплексных экспонент и комплексного аддитивного белого гауссовского шума

$$x[n]=A_1\exp(s_1 n)+A_2\exp(s_2 n)+w[n], \qquad (11.67)$$

где $s_1=0{,}1+j2\pi\cdot 0{,}52$, $s_2=-0{,}2+j2\pi\cdot 0{,}42$, $A_1=A_2=1$, а дисперсия шума равна ρ. При отсутствии шума характеристические полиномы второго порядка $A(z)$ и $B(z)$ для этих двух экспонент будут иметь корни, расположенные в точках, показанных на рис. 11.4, *а* и 11.4, *б*. В соответствии с уравнением (11.67) были сгенерированы 50 записей данных по 25 отсчетов в каждой с индексами от $n=0$ до $n=24$ с использованием различных последовательностей $w[n]$ при отношении сигнал/шум, равном $10\lg(1/\rho)=20$ дБ. Каждая запись была обработана с помощью ковариационного алгоритма линейного предсказания по методу

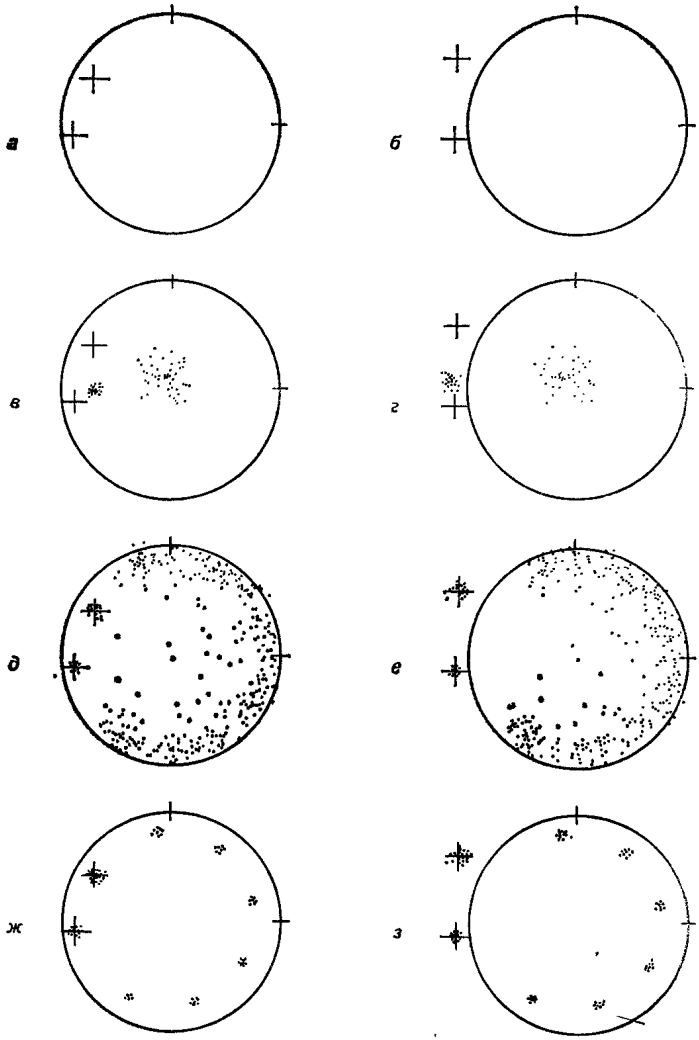


Рис. 11.4. Расположение нулей полинома $A(z)$, соответствующего фильтру линейного предсказания вперед, и полинома $B(z)$, соответствующего фильтру линейного предсказания назад, для 50 независимых реализаций данных, содержащих по 25 отсчетов каждая. Для удобства показана окружность единичного радиуса в z-плоскости. Крестиками отмечены истинные положения двух экспоненциальных сигналов. Для $A(z)$ этим сигналам соответствуют $\exp(s_1)$ и $\exp(s_2)$ внутри единичного круга, а для $B(z)$: $\exp(-s_1^*)$ и $\exp(-s_2^*)$ снаружи единичного круга. *а* — $A(z)$, $p=2$, шум отсутствует; *б* — $B(z)$, $p=2$, шум отсутствует; *в* — $A(z)$, $p=2$, присутствует шум; *г* — $B(z)$, $p=2$, присутствует шум; *д* — $A(z)$, $p=8$, присутствует шум; *е* — $B(z)$, $p=8$, присутствует шум; *ж* — $A(z)$, $p=8$, разложение по сингулярным числам (РСЧ) с двумя главными собственными векторами; *з* — $B(z)$, $p=8$, РСЧ с двумя главными собственными векторами.

наименьших квадратов (подпрограмма COVAR) при значении порядка $p=2$, и корни (нули) полиномов $A(z)$ и $B(z)$ были нанесены на график. Коэффициенты линейного предсказания назад получались одновременно с коэффициентами линейного предсказания вперед с помощью быстрого алгоритма, приведенного в приложении 8.В. Иными словами, для определения коэффициентов линейного предсказания назад никаких дополнительных вычислений не требуется. На рис. 11.4, *в* и 11.4, *г* показаны соответственно положения нулей характеристических полиномов линейного предсказания вперед и назад для всех 50 записей. Для сравнения показаны также истинные положения нулей для двух экспонент. Аддитивный шум приводит к смещению оценок нулей, а это означает смещение оценок членов, характеризующих затухание и часто́ты. Смещение оказывается более сильным для экспоненты с бо́льшим коэффициентом затухания.

Смещение оценок можно существенно уменьшить, выбирая порядок фильтра линейного предсказания намного больше числа экспонент, действительно присутствующих в анализируемом сигнале: это одно из эмпирических наблюдений, часто упоминаемое в литературе (см., например, работы [11, 23]). Рисунки 11.4, *д* и 11.4, *е* иллюстрируют расположение нулей в том случае, когда применялся ковариационный алгоритм порядка $p=8$. Нули, связанные с истинными экспонентами, присутствующими в сигнале, теперь группируются ближе к правильным положениям, но дополнительные нули, обусловленные наличием шума, разбросаны очень широко. Однако выбор фильтра линейного предсказания более высокого порядка приводит к появлению дополнительных нулей, затрудняя тем самым отделение нулей, соответствующих действительно имеющимся экспоненциальным сигналам, от нулей, обусловленных наличием шума, по крайней мере в том случае, когда анализируются только корни полинома $A(z)$. Это разделение очевидно в случае расположения нулей полинома $B(z)$ на рис. 11.4, *е* только благодаря эффекту группирования результатов для 50 независимых наборов данных. Разделение нулей для одного полинома не столь уж очевидно. Анализ нулей сразу обоих полиномов, $A(z)$ и $B(z)$, дает нам средство для различения истинных нулей сигнала и нулей шума. Статистики стационарного случайного процесса не изменяются при обращении этого процесса во времени. Следовательно, и нули полинома $A(z)$, и нули полинома $B(z)$, соответствующие шуму, будут преимущественно оставаться внутри единичной окружности, о чем свидетельствует совокупность тестовых результатов, приведенных на рис. 11.4, *д* и 11.4, *е*. Таким образом, при анализе расположения нулей полиномов $A(z)$ и $B(z)$ истинные нули экспоненциальных сигналов будут появ-

ляться во взаимно обратных точках, расположенных вдоль некоторого общего радиуса [10].

Дальнейшему улучшению результатов может способствовать применение метода разложения по сингулярным числам (РСЧ). Ошибки линейного предсказания вперед и назад, введенные в подразд. 8.5.1, можно записать в следующей краткой форме:

$$\mathbf{X}_p^f \mathbf{a}_p^f = -\mathbf{x}_p^f + \mathbf{e}_p^f, \quad \mathbf{X}_p^b \mathbf{a}_p^b = -\mathbf{x}_p^b + \mathbf{e}_p^b, \tag{11.68}$$

где тёплицевы матрицы данных $\mathbf{X}^f{}_p$, $\mathbf{X}^b{}_p$ и векторы данных $\mathbf{x}^f{}_p$, $\mathbf{x}^b{}_p$ определяются выражениями

$$\mathbf{X}_p^f = \begin{bmatrix} x[p] & \dots & x[1] \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ x[N-1] & \dots & x[N-p] \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_p^f = \begin{bmatrix} x[p+1] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x[N] \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X}_p^b = \begin{bmatrix} x[p+1] & \dots & x[2] \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ x[N] & \dots & x[N-p+1] \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_p^b = \begin{bmatrix} x[1] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x[N-p] \end{bmatrix}, \tag{11.69}$$

а вектор коэффициентов линейного предсказания вперед $\mathbf{a}^f{}_p$, вектор ошибок линейного предсказания вперед $\mathbf{e}^f{}_p$, вектор коэффициентов линейного предсказания назад $\mathbf{a}^b{}_p$ и вектор ошибок линейного предсказания назад $\mathbf{e}^b{}_p$ — выражениями

$$\mathbf{a}_p^f = \begin{bmatrix} a^f[1] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a^f[p] \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_p^f = \begin{bmatrix} e^f[p+1] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e^f[N] \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{a}_p^b = \begin{bmatrix} a^b[p] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a^b[1] \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_p^b = \begin{bmatrix} e^b[p+1] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e^b[N] \end{bmatrix}. \tag{11.70}$$

Используя соотношение (3.96), матрицы данных можно представить в виде следующих разложений по сингулярным числам:

$$\mathbf{X}_p^f = \sum_{n=1}^{p} \sigma_n^f \mathbf{u}_n^f (\mathbf{v}_n^f)^H, \quad \mathbf{X}_p^b = \sum_{n=1}^{p} \sigma_n^b \mathbf{u}_n^b (\mathbf{v}_n^b)^H, \tag{11.71}$$

где $\sigma^f{}_n$ — положительные сингулярные числа матрицы $\mathbf{X}^f{}_p$, $\sigma^b{}_n$ — положительные сингулярные числа матрицы $\mathbf{X}^b{}_p$, а $\mathbf{u}_n$ и $\mathbf{v}_n$ — собственные векторы соответствующих матриц данных.

Если сигнал состоит из смеси m экспонент и аддитивного шума, тогда m собственных векторов, ассоциированных с m наибольшими сингулярными числами, будут главным образом охватывать эти экспоненциальные компоненты. Остальные $p-m$ собственных векторов, ассоциированных с оставшимися меньшими сингулярными числами, будут охватывать шумовые компоненты. Более подробно эта процедура описана в гл. 13. Если предположить, что сингулярные числа упорядочены по убыванию величины, т. е. $\sigma^f{}_1 > \sigma^f{}_2 > \ldots > \sigma^f{}_p$, тогда можно получить пониженный ранг *аппроксимации* для каждой матрицы данных посредством усечения соотношений для РСЧ в (11.71) до m главных сингулярных чисел:

$$\hat{\mathbf{X}}^f_p = \sum_{n=1}^{m} \sigma^f_n \mathbf{u}^f_n (\mathbf{v}^f_n)^H, \quad \hat{\mathbf{X}}^b_p = \sum_{n=1}^{m} \sigma^b_n \mathbf{u}^b_n (\mathbf{v}^b_n)^H. \tag{11.72}$$

Эта процедура будет уменьшать вклад шума в матрицу данных, эффективно увеличивая тем самым отношение сигнал/шум [5, 11, 22]. Минимизируя нормы $\|\mathbf{a}^f{}_p\|_2$ и $\|\mathbf{a}^b{}_p\|_2$ относительно матриц данных пониженного ранга, получаем следующие решения:

$$\mathbf{a}^f_p = -(\hat{\mathbf{X}}^f_p)^{\#}\, x^f_p, \quad \mathbf{a}^b_p = -(\hat{X}^b_p)^{\#}\, x^b_p, \tag{11.73}$$

в которых псевдообратные матрицы данных определяются выражениями

$$(\hat{\mathbf{X}}^f_p)^{\#} = \sum_{n=1}^{m} (\sigma^f_n)^{-1} \mathbf{v}^f_n (\mathbf{u}^f_n)^H, \quad (\hat{\mathbf{X}}^b_p)^{\#} = \sum_{n=1}^{m} (\sigma^b_n)^{-1} \mathbf{v}^b_n (\mathbf{u}^b_n)^H. \tag{11.74}$$

Значение порядка p должно лежать в интервале $m \leqslant p \leqslant N-m$ для того, чтобы ранг матриц $\mathbf{X}^f{}_p$ и $\mathbf{X}^b{}_p$ был больше или равен m, т .е. более предполагаемого числа экспонент. Если число экспонент не известно, то его можно оценить, сравнивая относительные величины сингулярных чисел. Сингулярные числа, связанные с сигналом, как правило, должны быть больше сингулярных чисел, связанных с шумом. После вычисления коэффициентов линейного предсказания вперед и назад, определяемых выражениями (11.73), с помощью выражений (11.64) и (11.66) вычисляются корни характеристических полиномов, которые и дают оценки экспонент. Векторы данных $\mathbf{x}^f{}_p$ и $\mathbf{x}^b{}_p$ при анализе эффектов, обусловленных шумом, не рассматриваются, даже если они и зашумлены. Для ослабления влияния шума как на матрицы, так и на векторы данных можно применить полный метод наименьших квадратов, что позволяет получить несколько лучшие результаты, чем описанные выше [20].

На рис. 11.4, *ж* и 11.4, *з* приведены результаты, полученные по тем же 50 реализациям данных при использовании подхода на основе РСЧ с аппроксимацией пониженного порядка. В обо-

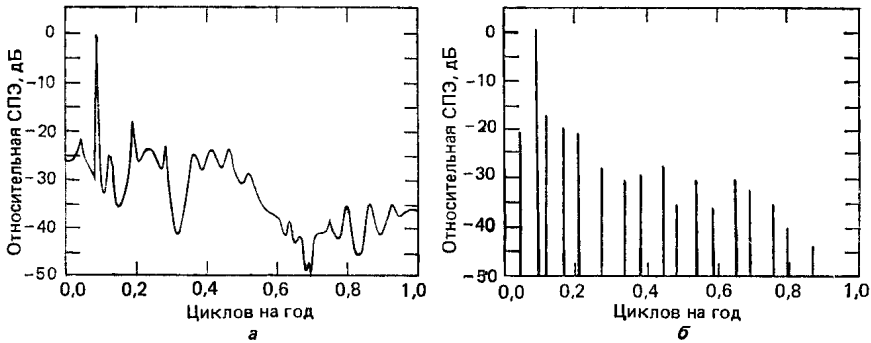


Рис. 11.5. Оценки СПЭ Прони для фильтрованных чисел солнечных пятен: *а* — обобщенный метод Прони; *б* — модифицированный метод Прони (незатухающие синусоиды).

их случаях использовались значения $p=8$ и $m=2$. Дополнительные нули теперь имеют значительно меньший разброс и образуют регулярно расположенные группы внутри единичной окружности, что характерно для аппроксимации белого шума с помощью экспоненциальной модели. В то же время нули, соответствующие паре действительно присутствующих затухающих экспонент, расположены на этих рисунках по-разному. Относительно скромнее результаты применения РСЧ пониженного ранга в случае быстро затухающих экспонент и в случае малых отношений сигнал/шум. В обоих этих случаях сингулярные числа сигнала сравнимы по величине с сингулярными числами шума, что затрудняет их строгое разделение по относительным величинам.

11.10. Приложение к числам солнечных пятен

На рис. 11.5 показаны оценки СПЭ фильтрованной последовательности чисел солнечных пятен, полученные с помощью метода Прони. Использовалась модель, содержащая 36 комплексных экспонент ($p=36$), что соответствует 18 действительным синусоидам в случае модифицированного метода Прони. При использовании обычного алгоритма наименьших квадратов Прони для пиков, соответствующих четырем наинизшим частотам, были получены периоды, равные 22,71, 10,78, 7,92 и 5,19 лет на цикл, причем для компоненты с периодом 10,78 лет на цикл относительная амплитуда и коэффициент затухания оценивались величинами, равными соответственно 58,78 и —0,0057. В случае модифицированного алгоритма Прони этим компонентам соответствовали периоды 24,84, 10,96, 8,60 и 5,96 лет на цикл, а относительная амплитуда второй из них которая была наиболее сильной) оценивалась величиной, равной 37,69.

Другие приложения метода Прони, которые могут представлять интерес для читателя, включают оценивание направления прихода (пеленга) сигнала [1] и определение резонансных пиков в диаграммах эффективной площади рассеяния (ЭПР) радиолокационных целей [2].

Литература

[1] *Bucker H. P.* Comparison of FFT and Prony Algorithms for Bearing Estimation of Narrow-Band Signals in Realistic Ocean Environment. J. Acoust. Soc. Am., vol. 61, pp. 756—762, March 1977.

[2] *Chuang C. W., Moffatt D. L.* Natural Resonances of Radar Targets via Prony's Method and Target Discrimination. IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst., vol. AES-12, pp. 583—589, September 1976.

[3] *Evans A. G., Fischl R.* Optimal Least-Squares Time-Domain Synthesis of Recursive Digital Filters. IEEE Trans. Audio. Electroacoust., vol. AU-21, pp. 61—65, February 1973.

[4] *Hildebrand F. B.* Introduction to Numerical Analysis. McGraw-Hill Book Company, New York, 1956, ch. 9.

[5] *Holt J. N., Antill R. J.* Determining the Number of Terms in Prony Algorithm Exponential Fit. Math. Biosci., vol. 36, pp. 319—332, 1977.

[6] *Householder A. S.* On Prony's Method of Fitting Exponential Decay Curves and Multiple-Hit Survival Curves. Oak Ridge National Laboratory Report ORNL-455, Oak Ridge, Tenn., February 1950.

[7] *Jenkins M. A., Traub J. F.* Algorithm 419: Zeros of a Complex Polinomial. Commun. ACM, vol. 15, pp. 97—99, February 1972.

[8] *Korn G. A., Korn T. M.* Mathematical Handbook for Scientists and Engineers. McGraw-Hill Book Company, New York, 1961, p. 660. [Имеется русский перевод: *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. — 4-е изд. — М.: Наука, 1977.]

[9] *Kulp R. W.* An Optimum Sampling Procedure for Use with Prony Method. IEEE Trans. Electromagn. Compat., vol. EMC-23, pp. 67—71, May 1981.

[10] *Kumaresan R.* On the Zeros of the Linear Prediction-Error Filter for Deterministic Signals. IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., vol. ASSP-31, pp. 217—220, February 1983.

[11] *Kumaresan R., Tufts D. W.* Estimating the Parametrs of Exponentially Damped Sinusoids and Pole-Zero Modeling in Noise. IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., vol. ASSP-30, pp. 833—840, December 1982.

[12] *Marple S. L., Jr.* Spectral Line Analisys by Pisarenko and Prony Methods. Proceedings of the 1979 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing. Washington, D. C., pp. 159—161.

[13] *Marple S. L., Jr.* Exponential Energy Spectral Density Estimation. Proceedings of the 1980 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing. Denver, Colo., pp. 588—591.

[14] *Marple S. L., Jr.* Spectral Line Analysis via a Fast Prony Algorithm. Proceedings of the 1982 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing. Paris, France, pp. 1375—1378.

[15] *Marple S. L., Jr.* Fast Algorithms for Linear Prediction and System Identification Filters with Linear Phase. IEEE Trans. Acoust. Speech. Signal Process., vol. ASSP-30, pp. 942—953, December 1982.

[16] *McDonough R. N.* Representations and Analysis of Signals. Part XV. Matched Exponents for the Representation of Signals. Ph. D. dissertation, Department of Electrical Engineering, John Hopkins University, Baltimore, Md., April 1963.

[17] *McDonough R. N., Higgins W. H.* Best Least-Squares Representation of

Signals by Exponentials. IEEE Trans. Autom. Control, vol. AC-13, pp. 408—412, August 1968.
[18] *Poggio A. J., Van Blaricum M. L., Miller E. K., Mittra R.* Evaluation for a Processing Technique for Transient Data. IEEE Trans. Antennas Propag., vol. AP-26, pp. 165—173, January 1978.
[19] *de Prony, Baron (Gaspard Riche).* Essai expérimental et analytique: sur les lois de la dilatabilité de fluides élastiques et sur celles de la force expansive de la vapeur de l'eau et de la vapeur de l'alkool, à différentes températures. J. E. Polytech., vol. 1, no. 2, pp. 24—76, 1795.
[20] *Rahman M. A., Kai-Bor Yu.* Improved Frequency Estimation Using Total Least Squares Approach. Proceedings of the 1986 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Tokyo, Japan, pp. 1397—1400, April 1986.
[21] *Trivett D. H., Robinson A. Z.* Modified Prony Method Approach to Echo-Reduction Measurements. J. Acoust. Soc. Am., vol. 70, pp. 1166—1175, October 1981.
[22] *Tufts D. W., Kumaresan R.* Estimation of Frequencies of Multiple Sinusoids: Making Linear Prediction Perform Like Maximum Likelihood. Proc. IEEE, vol. 70, pp. 975—989, September 1982. [Имеется русский перевод: *Тафтс Д. У., Кумаресан Р.* Оценивание частот суммы нескольких синусоид: Модификация метода линейного предсказания, сравнимая по эффективности с методом максимального правдоподобия. ТИИЭР, 1982, т. 70, № 9, с. 77—94.]
[23] *Van Blaricum M. L., Mittra R.* A Technique for Extracting the Poles and Residues of a System Directly from Its Transient Response. IEEE Trans. Antennas Propag., vol. AP-23, pp. 777—781, November 1975.
[24] *Van Blaricum M. L., Mittra R.* Problems and Solutions Associated with Prony's Method for Processing Transient Response. IEEE Trans. Antennas Propag., vol. AP-26, pp. 174—182, January 1978; исправление см.: vol. AP-28, pp. 949, November 1980.

Задачи

1. Доказать, что матрица $\mathbf{Z}^H\mathbf{Z}$ в уравнении (11.26) является положительно полуопределенной матрицей.
2. Если при факторизации полинома встречается кратный нуль, то это приводит к появлению в разложении произведения некоторого полинома с экспонентой. Как следует изменить метод Прони, для того чтобы учесть этот случай?
3. Показать, что АР- и АРСС-процессы имеют автокорреляционные последовательности, представимые в виде сумм затухающих экспонент. Показать, как применить метод Прони к такой автокорреляционной последовательности (а не к последовательности отсчетов данных), для того чтобы получить коэффициенты АР- и СС-моделей?
4. Доказать, что сумма из p экспонент может быть также получена и с помощью метода линейного предсказания назад, если обратить направление времени. Как связать корни характеристического полинома с показателями степеней этих p экспонент?
5. Пусть задан экспоненциальный сигнал $x[n]=\exp(-0{,}2nT)\sin(2\pi 0{,}05nT)$. Пусть $T=1{,}0$, и выберем 20 отсчетов этого сигнала для $0\leqslant n\leqslant 19$. Вычислить оценку наименьших квадратов Прони для коэффициента затухания. Пусть теперь $T=0{,}5$, и выберем 40 отсчетов для $0\leqslant n\leqslant 39$. Снова вычислить ту же оценку Прони. Чем различаются эти оценки? Почему? (См. [9] относительно тонких деталей влияния частоты отсчетов на точность оценок, получаемых с помощью метода Прони.)
6. Используя выражение (11.49), показать, что обратное преобразование от $\widehat{X}_1(z)$ представляет собой АРСС(p, q)-модель, у которой $p=q$.

7. Доказать, справедливость матричного уравнения (11.44).
8. Пусть $\hat{x}[n]=a\exp[sn]$ — аппроксимация одной экспонентой с некоторым действительным a и некоторым действительным $s=\alpha T$,таким что $\alpha<0$, определенная в диапазоне значений индекса от 0 до $N-1$. Пусть $e[n]=x[n]-\hat{x}[n]$. Минимизировать величину

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^2[n],$$

приравняв ее производные по a и s нулю. Найти аналитическое решение для a и s. (Этот пример еще раз подтверждает нелинейность и трудность задачи минимизации общего вида даже в случае действительных данных.)
9. Показать, что в случае действительных данных уравнение (11.А.17) сводится к двум линейным уравнениям относительно двух действительных неизвестных величин α_2 и α_3. Найти решения для α_2 и α_3 в явном виде.
10. В этой задаче периодограммный метод спектрального оценивания будет рассматриваться как частный случай метода Прони, в котором для аппроксимации данных используется гармоническая модель с заранее выбранными частотами. Пусть модель временно́го ряда описывается выражением

$$\hat{x}(nT)=\hat{x}[n]=\sum_{m=0}^{M-1} a_m \exp(j2\pi f_m nT),$$

где $n=0, \ldots, N-1$, причем $M<N$. Используя заранее выбранные гармонические частоты $f_m=m/NT$ для $0\leqslant m\leqslant M-1$ и уравнение (11.26), показать, что решение по методу наименьших квадратов для амплитуд комплексных синусоид a_m будет определяться выражением

$$a_m=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\exp(-j2\pi mn/N),$$

где $m=0, \ldots, M-1$. При $M=N$ и $T=1$ это выражение будет, очевидно, соответствовать дискретно-временному ряду Фурье (ДВРФ).

Приложение 11.А. Быстрый алгоритм и программа для решения симметричных ковариационных нормальных уравнений

11.А.1. Введение

Быстрый алгоритм для решения симметричных ковариационных нормальных уравнений [см. (11.44)] был разработан Марплом [14, 15]. Комплексная ошибка линейного сглаживания порядка $2p$ может быть записана в виде

$$e_{2p}^{s}[n]=\mathbf{x}_{2p}^{T}[n+p]\,\mathbf{g}_{2p}, \qquad (11.\text{А}.1)$$

где вектор данных $\mathbf{x}_{2p}[n+p]$ и симметричный вектор линейного

сглаживания $\mathbf{g}_{2p}$ определяются выражениями

$$\mathbf{x}_{2p}[n+p]=\begin{pmatrix} x[n+p] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x[n+1] \\ x[n] \\ x[n-1] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x[n-p] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_{2p}=\begin{pmatrix} g_{2p}[p] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g_{2p}[1] \\ 1 \\ g^*_{2p}[1] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g^*_{2p}[p] \end{pmatrix}. \qquad (11.A.2)$$

Заметим, что $\mathbf{g}_{2p}=\mathbf{J}\mathbf{g}^*_{2p}$, где $\mathbf{J}$ представляет собой $(2p+1)\times(2p+1)$-матрицу отражения. На основе измеренных отсчетов комплексных данных $x[1], \ldots, x[N]$ симметричный ковариационный метод позволяет минимизировать сумму квадратов ошибок линейного сглаживания.

$$\rho^s_{2p}=\sum_{n=p+1}^{N-p}|e^s_{2p}[n]|^2, \qquad (11.A.3)$$

в результате чего получается следующее нормальное уравнение:

$$\mathbf{R}_{2p}\mathbf{g}_{2p}=\begin{pmatrix} \mathbf{0}_p \\ 2\rho^s_{2p} \\ \mathbf{0}_p \end{pmatrix}, \qquad (11.A.4)$$

где $\mathbf{0}_p$—$(p\times 1)$-нуль-вектор. Центросимметричная матрица $\mathbf{R}_{2p}$ может быть записана в виде

$$\mathbf{R}_{2p}=\sum_{n=2p+1}^{N}[\mathbf{x}^*_{2p}[n]\,\mathbf{x}^T_{2p}[n]+\mathbf{J}\,\mathbf{x}_{2p}[n]\,\mathbf{x}^H_{2p}[n]\,\mathbf{J}]. \qquad (11.A.5)$$

Если члены сглаженной ошибки $e^s{}_{2p}[N-p]$ и $e^s{}_{2p}[p+1]$ не используются и результирующий квадрат ошибки

$$\rho^{s''}_{2p}=\sum_{n=p+2}^{N-p-1}|e^s_{2p}[n]|^2 \qquad (11.A.6)$$

минимизируется, то получаем следующее нормальное уравнение:

$$\mathbf{R}''_{2p}\mathbf{g}''_{2p}=\begin{pmatrix} \mathbf{0}_p \\ 2\rho^{s''}_{2p} \\ \mathbf{0}_p \end{pmatrix}, \qquad (11.A.7)$$

где двойным штрихом отмечено решение для случая опущенных

членов ошибки. Матрица $\mathbf{R}''_{2p}$ определяется уравнением

$$\mathbf{R}''_{2p} = \sum_{n=2p+2}^{N-1} (\mathbf{x}^*_{2p}[n]\,\mathbf{x}^T_{2p}[n] + \mathbf{J}\mathbf{x}_{2p}[n]\,\mathbf{x}^H_{2p}[n]\,\mathbf{J}). \qquad (11.A.8)$$

Разработанный быстрый алгоритм вводит в модифицированный ковариационный алгоритм, описанный в приложении 8.Г, дополнительные рекурсивные соотношения. Оба алгоритма выполняются одновременно.

11.А.2. Специальные разложения и дополнительные параметры

Для разработки быстрого алгоритма важным является следующее разложение $(2p+1)\times(2p+1)$-матрицы $\mathbf{R}_{2p}$ по индексу порядка:

$$\mathbf{R}_{2p} = \begin{pmatrix} r_{2p}[0,\,0] & \mathbf{r}^T_{2p}\mathbf{J} & r_{2p}[0,\,2p] \\ \mathbf{J}\mathbf{r}^*_{2p} & \mathbf{R}''_{2p-2} & \mathbf{r}_{2p} \\ r_{2p}[2p,\,0] & \mathbf{r}^H_{2p} & r_{2p}[2p,\,2p] \end{pmatrix}, \qquad (11.A.9)$$

где $(2p-1)\times 1$-вектор-столбец $\mathbf{r}_{2p}$ дается выражением

$$\mathbf{r}_{2p} = \begin{pmatrix} r_{2p}[1,\,2p] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ r_{2p}[2p-1,\,2p] \end{pmatrix}, \qquad (11.A.10)$$

а $\mathbf{J}$ — $(2p-1)\times(2p-1)$-матрица отражения. Элементы $r_{2p}[i,\,j]$ определяются выражением (8.49). Заметим также, что $r_{2p}[0,0] = r_{2p}[2p,\,2p]$ и $r_{2p}[0,\,2p] = r^*[2p,\,0]$. Важным также является следующее разложение матрицы $\mathbf{R}_{2p}$ по временному индексу:

$$\mathbf{R}_{2p} = \mathbf{R}''_{2p} + \mathbf{x}^*_{2p}[2p+1]\,\mathbf{x}^T_{2p}[2p+1] + \mathbf{J}\mathbf{x}_{2p}[2p+1]\,\mathbf{x}^H_{2p}[2p+1]\,\mathbf{J} + \\ + \mathbf{x}^*_{2p}[N]\,\mathbf{x}^T_{2p}[N] + \mathbf{J}\mathbf{x}_{2p}[N]\,\mathbf{x}^H_{2p}[N]\,\mathbf{J}. \qquad (11.A.11)$$

11.А.3. Рекурсии обновления порядка

Обновление порядка для вектора коэффициентов линейного сглаживания $\mathbf{g}_{2p}$ описывается выражением

$$\mathbf{g}_{2p} = \beta_1 \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{g}''_{2p-2} \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_1 \mathbf{a}_{2p} + \alpha_1^* \mathbf{J}\mathbf{a}^*_{2p} \right\}, \qquad (11.A.12)$$

в котором комплексный скаляр α_1 и действительный скаляр β_1

определяются выражениями

$$\alpha_1 = -\mathbf{r}_{2p}^T \mathbf{g}''^*_{2p-2}/\rho_{2p}, \tag{11.A.13}$$

$$\beta_1 = (1 + 2\,\mathrm{Re}\,\{\alpha_1 a_{2p}[p]\})^{-1}. \tag{11.A.14}$$

Вектор $\mathbf{a}_{2p}$ получается с помощью модифицированного ковариационного быстрого алгоритма. Для проверки правильности выражения (11.A.12) умножим слева обе его стороны на $\mathbf{R}_{2p}$ и подставим далее соответствующее разложение по индексу порядка (11.A.9) или (8.Г.10). При этом получается также выражение для обновления квадрата ошибки линейного сглаживания по индексу порядка

$$\rho^s_{2p} = \beta_1 \rho^{s''}_{2p-2}. \tag{11.A.15}$$

Заметим, что выражение для обновления порядка вектора $\mathbf{g}_{2p}$ совпадает с выражением для обновления вектора коэффициентов линейного предсказания $\mathbf{a}_{2p}$ только при четных значениях порядка, т. е., иными словами, только на каждом втором шаге обновления порядка вектора $\mathbf{a}_{2p}$. Заметим также, что необходимо иметь $\beta_1 > 0$, для того чтобы гарантировать положительность ρ^s_{2p}, как это и должно быть, поскольку это сумма квадратов ошибок.

11.A.4. Рекурсии обновления во времени

Обновление временно́го индекса в векторе коэффициентов линейного сглаживания осуществляется в соответствии с выражением

$$\mathbf{g}''_{2p} = \beta_2 [\mathbf{g}_{2p} + \alpha_2 \mathbf{c}_{2p} + \alpha_2^* \mathbf{J}\mathbf{c}^*_{2p} + \alpha_3 \mathbf{d}_{2p} + \alpha_3^* \mathbf{J}\mathbf{d}^*_{2p}], \tag{11.A.16}$$

где комплексные скаляры α_2 и α_3 находятся как решения следующего уравнения с комплексной (4×4)-матрицей:

$$\begin{pmatrix} \delta_{2p} & -\xi^*_{2p} & -\lambda^*_{2p} & -\theta^*_{2p} \\ -\xi_{2p} & \delta_{2p} & -\theta_{2p} & -\lambda_{2p} \\ -\lambda_{2p} & -\theta^*_{2p} & \gamma_{2p} & -\phi^*_{2p} \\ -\theta_{2p} & -\lambda^*_{2p} & -\phi_{2p} & \gamma_{2p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_3^* \\ \alpha_2 \\ \alpha_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^s_{2p}[p+1] \\ (e^s_{2p}[p+1])^* \\ (e^s_{2p}[N-p])^* \\ e^s_{2p}[N-p] \end{pmatrix}. \tag{11.A.17}$$

Эта матрица является эрмитовой, поэтому для решения данного уравнения можно применить подпрограмму CHOLESKY. Действительный скаляр β_2 определяется выражением:

$$\beta_2 = [1 + 2\,\mathrm{Re}\,\{\alpha_2 c_{2p}[p]\} + 2\,\mathrm{Re}\,\{\alpha_3 d_{2p}[p]\}]^{-1}. \tag{11.A.18}$$

Комплексные векторы $\mathbf{c}_{2p}$, $\mathbf{d}_{2p}$, действительные скаляры δ_{2p}, γ_{2p} и комплексные скаляры λ_{2p}, θ_{2p}, ξ_{2p}, ϕ_{2p} определяются с помощью модифицированного ковариационного алгоритма, приведенного

в приложении 8.7. Для проверки выражения (11.А.16) следует умножить слева обе его стороны на $\mathbf{R}''_{2p}$ и подставить соответствующее разложение по временному индексу (11.А.11). При этом получается также выражение для обновления временно́го индекса у квадрата ошибки линейного сглаживания

$$\rho_{2p}^{s''} = \beta_2 \rho_{2p}^{s}. \qquad (11.А.19)$$

11.А.5. Начальные условия

Требуется только одно начальное условие, а именно квадрат суммы ошибок регулируемого сглаживания

$$\rho_0^{s''} = \sum_{n=2}^{N-1} |x[n]|^2. \qquad (11.А.20)$$

11.А.6. Вычислительные затраты

Симметричный ковариационный алгоритм требует $3Np+40p^2$ операций умножения, $12p$ операций деления действительных чисел и объем памяти для хранения $N+10p+12$ элементов. Переход от порядка $2p+1$ к порядку $2p+3$ требует вычислений, количество которых пропорционально величине $2N+36p$ на каждой итерации. При обработке с помощью этого алгоритма 64-точечной тест-последовательности, приведенной в приложении II, при $N=64$ и $IP=16$ получаются следующие значения коэффициентов линейного сглаживания:

$$PS = 0{,}000397$$

G[1]=0,954512; 0,151396) G[5]=(0,229737; 0,223792)
G[2]=(0,823844; 0,266706) G[6]=(0,097085; 0,132041)
G[3]=(0,632592; 0,317878) G[7]=(0,027857; 0,055635)
G[4]=(0,418971; 0,298189) G[8]=(0,003689; 0,013973).

Подпрограмма SUBROUTINE SYMCOVAR (N,IP,X,PS,G,ISTAT)

```
C
C     Этот быстрый алгоритм предназначен для решения симметричных ко-
C     вариационных нормальных уравнений метода наименьших квадратов
C     с эрмитовой матрицей
C
C     Входные параметры:
C
C       N     — число отсчетов данных (целое число)
C       IP    — порядок модели линейного предсказания (должен быть чет-
C               ным целым числом)
C       X     — массив отсчетов комплексных данных от X(1) до X(N).
C
C     Выходные параметры:
C
C       PS    — действительный квадрат ошибки линейного сглаживания по-
```

```
C           рядка IP; заметим, что значение PS должно быть промас-
C           штабировано величиной 1/(N-IP), с тем чтобы получить
C           дисперсию оценки
C     G     — массив из IP/2 комплексных коэффициентов линейного сгла-
C           живания
C     ISTAT — целочисленный указатель состояния в момент выхода из
C           программы:
C           0 при нормальном выходе, если не обнаружено плохой
C           численной обусловленности
C           1, если параметр P имеет неположительное значение
C           2, если значения параметров DELTA' и GAMMA' не лежат
C           в интервале от 0 до 1
C           3, если параметр P' имеет неположительное значение
C           4, если значения параметров DELTA и GAMMA не лежат
C           в интервале от 0 до 1
C           5, если параметр IP не является четным целым числом
C           6, если параметр PS имеет неположительное значение
C           7, если параметр PS'' имеет неположительное значение
C           8, если обнаружена ошибка в подпрограмме CHOLESKY
C
C     Примечание:
C
C     Размер внешнего массива G должен указываться в .GE. IP/2. Размер
C     .GE. N внешнего массива X и размер .GE. IP массива A должны ука-
C     зываться в вызывающей программе. Внутренний массив R указывается
C     в .GE. IP, размеры массивов C и D должны указываться в .GE. IP+1.
C     Внутренние массивы AA и BB фиксируются на указанных размерах.
C
      COMPLEX X(1),AF(100),C(101),D(101),R(100),LAMBDA,THETA,
                                                        PSI,XI
      COMPLEX EF,EB,C1,C2,C3,C4,SAVE1,SAVE2,SAVE3,SAVE4
      COMPLEX G(1),AA(10),BB(4),ESP,ESN
      REAL PS,DELTA,GAMMA,P,R1,R2,R3,R4,R5,EPS
C
C     Инициализация
C
      EPS=1.E-15
      IF (MOD(IP,2) .EQ. 0) GO TO 5
      ISTAT=5
      RETURN
5     R1=0.
      DO 10 K=2,N-1
10       R1=R1+REAL(X(K))**2+AIMAG(X(K)) **2
      R2=REAL(X(1))**2+AIMAG(X(1)) **2
      R3=REAL(X(N))**2+AIMAG(X(N)) **2
      R4=1.(2.*(R1+R2+R3))
      P=2.*R1+R2+R3
      PS=R1                                          ! (11.A.20)
      DELTA=1.-R2*R4
      GAMMA=1.-R3*R4
      LAMBDA=CONJG(X(1)*X(N))*R4
      C(1)=X(N)*R4
      D(1)=CONJG(X(1))*R4
      ISTAT=0
      M=0
      IF (IP .EQ. 0) RETURN
C
```

Основной цикл

```
      M=M+1
      SAVE=(0.,0.)
      DO 20 K=M+1,N
         SAVE1=SAVE1+X(K)*CONJG(X(K-M))
      SAVE1=2.*SAVE1
      R(M)=CONJG(SAVE1)
      THETA=X(N)*D(1)
      PSI=X(N)*C(1)
      XI=CONJG(X(1))*D(1)
      IF (M .EQ. 1) GO TO 40
      DO 30 K=1,M-1
         THETA=THETA+X(N-K)*D(K+1)                !  (8.Г.45)
         PSI=PSI+X(N-K)*C(K+1)                    !  (8.Г.45)
         XI=XI+CONJG(X(K+1))*D(K+1)               !  (8.Г.45)
         R(K)=R(K)-X(N+1-M)*CONJG(X(N+1-M+K))
     *          -CONJG(X(M))*X(M-K)               !  (8.Г.37)
         SAVE1=SAVE1+CONJG(R(K))*AF(M-K)          !  (8.Г.24)
```

Обновление вектора AF по индексу порядка

```
      C1=SAVE1/P
      AF(M)=C1                                    !  (8.Г.23)
      P=P*(1.-REAL(C1)**2-AIMAG(C1)**2)           !  (8.Г.25)
      IF (M .EQ. 1) GO TO 60

      IF (MOD(M,2) .EQ. 0) GO TO 46
      MH=(M-1)/2
      MH1=MH+1
      BB(1)=ESP
      BB(2)=CONJG(ESP)
      BB(3)=CONJG(ESN)
      BB(4)=ESN
      AA(1)=CMPLX(DELTA,0.)
      AA(2)=-CONJG(XI)
      AA(3)=CMPLX(DELTA,0.)
      AA(4)=-CONJG(LAMBDA)
      AA(5)=-THETA
      AA(6)=CMPLX(GAMMA,0.)
      AA(7)=-CONJG(THETA)
      AA(8)=-LAMBDA
      AA(9)=-CONJG(PSI)
      AA(10)=CMPLX(GAMMA,0.)
      CALL CHOLESKY (4,ESP,AA,BB,JSTAT)           !  (11.A.17)
      IF (JSTAT .EQ. 0) GO TO 42
      ISTAT=8
      RETURN
      R5=1./(1.+2.*REAL(BB(3)*C(MH1))             !  (11.A.18)
             +2.*REAL(BB(1)*D(MH1)))
      DO 44 K=1,MH
         G(K)=R5*(G(K)+BB(4)*CONJG(C(MH1+K))      !  (11.A.16)
                +BB(3)*C(MH1-K)+BB(2)*CONJG(D(MH1+K))
     *                    +BB(1)*D(MH1-K))        (11.A.19)
      PS=R5*PS
      IF (PS .GT. 0) GO TO 46
```

```
      ISTAT=7
      RETURN
C
46    DO 50 K=1,M/2
         MK=M-K
         SAVE1=AF(K)
         AF(K)=SAVE1+C1*CONJG(AF(MK))                    !  (8.Г.22)
         IF (K .EQ. MK) GO TO 50
         AF(MK)=AF(MK)+C1*CONJG(SAVE1)                   !  (8.Г.22)
50       CONTINUE
C
      IF (MOD(M,2) .NE. 0) GO TO 60
      MH=M/2
      MH1=MH+1
      SAVE1=R(MH)
      DO 54 K=1,MH-1
54       SAVE1=SAVE1+CONJG(G(K))*R(MH+K)+G(K)*R(MH-K)
                                                       !  (11.A.13)
      C1=-SAVE1/P                                      !  (11.A.14)
      R5=1./(1.+2.*REAL(C1*AF(MH)))
      G(MH)=R5*(C1+CONJG(C1*AF(M)))
      ESP=X(MH1)+G(MH)*X(M+1)+CONJG(G(MH))*X(1)
      ESN=X(N-MH)+G(MH)*X(N)+CONJG(G(MH))*X(N-M)
      DO 56 K=1,MH-1
            G(K)=R5*(G(K)+C1*AF(MH-K)+CONJG
                                  (C1*AF(MH+K)))!  (11.A.12)
         ESP=ESP+G(K)*X(MH1+K)+CONJG
                           (G(K))*X(MH1-K)        !  (11.A.1)
56       ESN=ESN+G(K)*X(N-MH+K)+CONJG
                           (G(K))*X(N-MH-K)       !  (11.A.1)
      PS=R5*PS                                    !  (11.A.15)
      IF (PS .GT. 0) GO TO 60
      ISTAT=6
      RETURN
C
60    IF (M .EQ. IP) RETURN
C
C     Обновление во времени векторов C, D и скаляров GAMMA, DELTA,
C     LAMBDA
C
65    R1=1./(DELTA*GAMMA-REAL(LAMBDA)**2
                                  -AIMAG(LAMBDA)**2)
      C1=(THETA*CONJG(LAMBDA)+PSI*DELTA)*R1
      C2=(PSI*LAMBDA+THETA*GAMMA)*R1
      C3=(XI*CONJG(LAMBDA)+THETA*DELTA)*R1
      C4=(THETA*LAMBDA+XI*GAMMA)*R1
      DO 70 K=1,(M-1)/2+1
         MK=M+1-K
         SAVE1=CONJG(C(K))
         SAVE2=CONJG(D(K))
         SAVE3=CONJG(C(MK))
         SAVE4=CONJG(D(MK))
         C(K)=C(K)+C1*SAVE3+C2*SAVE4                  !  (8.Г.43)
         D(K)=D(K)+C3*SAVE3+C4*SAVE4                  !  (8.Г.44)
         IF (K .EQ. MK) GO TO 70
         C(MK)=C(MK)+C1*SAVE1+C2*SAVE2                !  (8.Г.43)
         D(MK)=D(MK)+C3*SAVE1+C4*SAVE2                !  (8.Г.44)
```

```
70          CONTINUE
            R2=REAL(PSI)**2+AIMAG(PSI) **2
            R3=REAL(THETA)**2+AIMAG(THETA) **2
            R4=REAL(XI)**2+AIMAG(XI) **2
            R5=GAMMA-(R2*DELTA+R3*GAMMA
                      +2.*REAL(PSI*LAMBDA*CONJG(THETA)))*R1
            R2=DELTA-(R3*DELTA+R4*GAMMA
                      +2.*REAL (THETA*LAMBDA*CONJG(XI)))*R1
            GAMMA=R5                                          !  (8.Г.46)
            DELTA=R2                                          !  (8.Г.47)
            LAMBDA=LAMBDA+C3*CONJG(PSI)+C4*CONJG              !  (8.Г.48)
                                                 (THETA)
            IF (P .GT. 0.) GO TO 80
            ISTAT=1
            RETURN
80          IF (DELTA .GT. 0. .AND. DELTA .LT. 1. .AND. GAMMA .GT. 0.
           *    .AND. GAMMA .LT. 1.) GO TO 90
            ISTAT=2
            RETURN
C
C     Обновление во времени вектора AF; обновление порядка векторов C, D
C     и скаляров GAMMA, DELTA, LAMBDA
C
90          R1=1./P
            R2=1./(DELTA*GAMMA-REAL(LAMBDA)**2
                               -AIMAG(LAMBDA)**2)             !  (8.Г.41)
            EF=X(M+1)
            EB=X(N-M)
            DO 100 K=1,M
               EF=EF+AF(K)*X(M+1-K)                           !  (8.Г.1)
100            EB=EB+CONJG(AF(K))*X(N-M+K)                    !  (8.Г.2)
            C1=EB*R1                                          !  (8.Г.28)
            C2=CONJG(EF)*R1                                   !  (8.Г.29)
            C3=(CONJG(EB)*DELTA+EF*LAMBDA)*R2
            C4=(EF*GAMMA+CONJG(EB*LAMBDA))*R2
            DO 110 K=M,1,-1
               SAVE1=AF(K)
               AF(K)=SAVE1+C3*C(K)+C4*D(K)                    !  (8.Г.38)
               C(K+1)=C(K)+C1*SAVE1                           !  (8.Г.26)
110            D(K+1)=D(K)+C2*SAVE1                           !  (8.Г.27)
            C(1)=C1
            D(1)=C2
            R3=REAL(EB)**2+AIMAG(EB) **2
            R4=REAL(EF)**2+AIMAG(EF) **2
            P=P-(R3*DELTA+R4*GAMMA
                      +2.*REAL(EF*EB*LAMBDA))*R2              !  (8.Г.42)
            DELTA=DELTA-R4*R1                                 !  (8.Г.32)
            GAMMA=GAMMA-R3*R1                                 !  (8.Г.33)
            LAMBDA=LAMBDA+CONJG(EF*EB)*R1                     !  (8.Г.35)
            IF (P .GT. 0.) GO TO 120
            ISTAT=3
            RETURN
120         IF (DELTA .GT. 0. .AND. DELTA .LT. 1. .AND. GAMMA .GT. 0.
           *      .AND. GAMMA .LT. 1.) GO TO 1000
            ISTAT=4
            RETURN
            END
```

Приложение 11.Б. Программа для факторизации комплексного полинома

Описанный ниже алгоритм факторизации полинома заимствован из программы Дженкинса и Трауба [7]. Для этой цели используется трехэтапный алгоритм. Программа отыскивает нули (по одному за раз), грубо говоря, в порядке повышения модуля и приводя исходный полином к некоторому полиному меньшей степени. Максимальная степень полинома устанавливается извне и равна 99.

```
      Подпрограмма CPOLY (OPR,OPI,DEGREE,ZEROR,ZEROI,FAIL)
C
C     Copyright 1972, Association for Computing Machinery. Перепечатывается
C     с разрешения.
C
C     Это — разработанная М. А. Дженкинсом и Дж. Ф. Траубом программа
C     «Нули комплексного полинома»; (см.: Communication of the ACM, vol. 15,
C     pp, 97—99, Feb. 1972).
C
C     Заметим, что в подпрограмме MCON используется четыре переменных
C     величины, точность и диапазон представления которых в формате с пла-
C     вающей запятой соответствуют ЭВМ типа VAX 11/780.
C
C     Подпрограмма предназначена для отыскания нулей комплексного поли-
C     нома.
C
C       OPR, OPI      — векторы удвоенной точности из действительных
C                       и мнимых частей коэффициентов в порядке убы-
C                       вания показателя степени
C       DEGREE        — целочисленная степень полинома
C       ZEROR, ZEROI  — выходные векторы удвоенной точности из дейст-
C                       вительных и мнимых частей нулей
C       FAIL          — выходной логический параметр; .TRUE., только
C                       если старший коэффициент равен нулю или если
C                       подпрограмма CPOLY обнаружила нуль для по-
C                       линома, степень которого меньше значения
C                       DEGREE
C
C     Данная программа была написана с учетом уменьшения возможности
C     переполнения. Если переполнение все же будет иметь место, то возмож-
C     ность работы указателя нулей сохраняется, если величина, обусловившая
C     переполнение, будет заменена большим числом.
C
      COMMON/GLOBAL/PR,PI,HR,HI,QPR,QPI,QHR,QHI,SHR,SHI,SR,SI,
     *              TR,TI,PVR,PVI,ARE,MRE,ETA,INFIN,NN
      REAL*8 SR,SI,TR,TI,PVR,PVI,ARE,MRE,ETA,INFIN
      REAL*8 PR(100),PI(100),HR(100),HI(100),QPR(100),QPI(100)
      REAL*8 QHR(100),QHI(100),SHR(100),SHI(100)
C     Изменить размер полинома, который может быть факторизован, заменить
C     размерность массива в области памяти COMMON
      REAL*8 XX,YY,COSR,SINR,SMALNO,BASE,XXX,ZR,ZI,BND
      REAL*8 OPR(1),OPI(1),ZEROR(1),ZEROI(1),CMOD,SCALE,CAUCHY,
                                                          DSQRT
```

```
      LOGICAL*4 FAIL,CONV
      INTEGER*4 DEGREE,CNT1,CNT2
C     Инициализация констант
      CALL MCON(ETA,INFIN,SMALNO,BASE)
      ARE=ETA
      MRE=2.D0*DSQRT(2.D0)*ETA
      XX=.70710678D0
      YY=-XX
      COSR=-.069756474D0
      SINR=.99756405D0
      FAIL=.FALSE.
      NN=DEGREE+1
C     Алгоритм не работает, если старший коэффициент равен нулю
      IF (OPR(1) .NE. 0.D0 .OR. OPI(1). NE. 0. D0) GO TO 10
            FAIL=.TRUE.
            RETURN
C     Устранить нули из начала координат, если таковые имеются
10    IF (OPR(NN) .NE. 0.D0 .OR. OPI(NN) .NE. 0.D0) GO TO 20
            IDNN2=DEGREE-NN+2
            ZEROR(IDNN2)=0.D0
            ZEROI(IDNN2) =0.D0
            NN=NN-1
            GO TO 10
C     Вывести значения коэффициентов на печать
20    DO 30 I=1,NN
            PR(I)=OPR(I)
            PI(I)=OPI(I)
            SHR(I)=CMOD(PR(I),PI(I))
30          CONTINUE
C     Промасштабировать полином
      BND=SCALE (NN,SHR,ETA,INFIN,SMALNO,BASE)
      IF (BND .EQ. 1.D0) GO TO 40
      DO 35 I=1,NN
         PR(I)=BND*PR(I)
         PI(I)=BND*PI(I)
35       CONTINUE
C     Начать алгоритм с одного нуля
40    IF (NN .GT. 2) GO TO 50
      IF (NN .EQ. 1) RETURN
C     Вычислить последний нуль и осуществить возврат
         CALL CDIVID(-PR(2),-PI(2),PR(1),PI(1),ZEROR(DEGREE),
     *                     ZEROI(DEGREE))
         RETURN
C     Вычисление BND — нижней границы модуля нулей
50    DO 60 I=1,NN
         SHR(I)=CMOD(PR(I),PI(I))
60       CONTINUE
      BND=CAUCHY(NN,SHR,SHI)
C     Внешний цикл для управления двумя главными проходами с различны-
C     ми последовательностями сдвигов
      DO 100 CNT1,2
C     Вычисление на первом этапе сдвигов
         CALL NOSHFT (5)
C     Внутренний цикл для выбора сдвига
      DO 90 CNT2=1,9
C     Сдвиг выбирается с модулем BND и амплитудой, повернутыми на 94 гра-
C     дуса относительно предыдущего сдвига
```

```
      XXX=COSR*XX-SINR*YY
      YY=SINR*XX+COSR*YY
      XX=XXX
      SR=BND*XX
      SI=BND*YY
C     Второй этап вычислений, фиксированный сдвиг
      CALL FXSHFT(10*CNT2,ZR,ZI,CONV)
      IF (.NOT. CONV) GO TO 80
C     Второй этап начинается непосредственно с итерации на третьем шаге;
C     если она успешна, то в память записываются значения нулей и пони-
C     жается степень анализируемого полинома
        IDNN2=DEGREE-NN+2
        ZEROR(IDNN2)=ZR
        ZEROI(IDNN2)=ZI
        NN=NN-1
        DO 70 I=1,NN
          PR(I)=QPR(I)
          PI(I)=QPI(I)
70        CONTINUE
        GO TO 40
80    CONTINUE
C     Если результат итерации не успешен, выбирать другое значение сдвига
90    CONTINUE
C     Если девять сдвигов не дали требуемого результата, то повторить внеш-
C     ний цикл с другой последовательностью сдвигов
100   CONTINUE
C     Указатель нуля не сработал на двух главных проходах; вернуться в на-
C     чало программы и очистить память
      FAIL=TRUE.
      RETURN
      END

      SUBROUTINE NOSHFT (L1)
C     Вычисляет производный полином в качестве начального полинома H и вы-
C     числяет полиномы H без сдвига L1
C
      COMMON(GLOBAL)PR,PI,HR,HI,QPR,QPI,QHR,QHI,SHR,SHI,
     *              SR,SI,TR,TI,PVR,PVI,ARE,MRE,ETA,INFIN,NN
      REAL*8 SR,SI,TR,TI,PVR,PVI,ARE,MRE,ETA,INFIN
      REAL*8 PR(100),PI(100),HR(100),HI(100),QPR(100),QPI(100)
      REAL*8 QHR(100),QHI(100),SHR(100),SHI(100)
      REAL*8 XNI,T1,T2,CMOD
      N=NN-1
      NM1=N-1
      DO 10 I=1,N
        XNI=NN-I
        HR(I)=XNI*PR(I)/FLOAT(N)
        HI(I)=XNI*PI(I)/FLOAT(N)
10      CONTINUE
      DO 50 JJ=1,L1
        IF (CMOD(HR(N),HI(N)) .LE. ETA*10.D0*CMOD(PR(N),PI(N)))
     *                  GO TO 30
        CALL CDIVID(-PR(NN),-PI(NN),HR(N),HI(N),TR,TI)
        DO 20 I=1,NM1
          J=NN-I
          T1=HR(J-1)
          T2=HI(J-1)
```

```
            HR(J)=TR*T1-TI*T2+PR(J)
            HI(J)=TR*T2+TI*T1+PI(J)
20          CONTINUE
          HR(1)=PR(1)
          HI(1)=PI(1)
          GO TO 50
C     Если член, соответствующий константе, существенно близок к нулю, осу-
C     ществить сдвиг коэффициентов полинома H
30        DO 40 I=1,NM1
            J=NN-I
            HR(J)=HR(J-1)
            HI(J)=HI(J-1)
40          CONTINUE
          HR(1)=0.D0
          HI(1)=0.D0
50        CONTINUE
        RETURN
        END


      Подпрограмма FXSHFT (L2,ZR,ZI,CONV)
C     Предназначена для вычисления сдвинутых на L2 полиномов H и проверки
C     на сходимость. Инициирует итерацию сдвига переменной и осуществляет
C     возврат в приближенный нуль при успешном выполнении.
C
C       L2      — предельное значение шагов фиксированного сдвига
C       ZR,ZI   — приближенный нуль, если CONV является .TRUE
C       CONV    — логическая переменная, указывающая сходимость итерации
C                 на третьем шаге
C
        COMMON/GLOBAL/PR,PI,HR,HI,QPR,QPI,QHR,QHI,SHR,SHI,SR,SI,
                      TR,TI,PVR,PVI,ARE,MRE,ETA,INFIN,NN
        REAL*8 SR,SI,TR,TI,PVR,PVI,ARE,MRE,ETA,INFIN
        REAL*8 PR(100),PI(100),HR(100),HI(100),QPR(100),QPI(100)
        REAL*8 QHR(100),QHI(100),SHR(100),SHI(100)
        REAL*8 ZR,ZI,OTR,OTI,SVSR,SVSI,CMOD
        LOGICAL*4 CONV,TEST,PASD,BOOL
        N=NN-1
C     Вычисление P в S
        CALL POLYEV (NN,SR,SI,PR,PI,QPR,QPI,PVR,PVI)
        TEST= .TRUE.
        PASD= .FALSE.
C     Вычисление первого T=-P(S)/H(S)
        CALL CALCT(BOOL)
C     Основной цикл для одного второго шага
        DO 50 J=1,L2
          OTR=TR
          OTI=TI
C     Вычисление следующего полинома H и нового T
          CALL NEXTH (BOOL)
          CALL CALCT (BOOL)
          ZR=SR+TR
          ZI=SI+TI
C     Проверка на сходимость, если только шаг три был неуспешным или отказ
C     был при вычислении последнего полинома H
          IF (BOOL .OR. .NOT. TEST .OR. J .EQ. L2) GO TO 50
          IF (CMOD(TR-OTR,TI-OTI) .GE. .5DO*CMOD(ZR,ZI) GO TO 40
            IF ( .NOT. PASD) GO TO 30
```

```
C  Проверка на слабую сходимость проводилась дважды; начать с третьей
C  итерации после записи текущего полинома H и сдвига
                DO 10 I=1,N
                   SHR(I)=HR(I)
                   SHI(I)=HI(I)
10                 CONTINUE
                SVSR=SR
                SVSI=SI
                CALL VRSHFT (10,ZR,ZI,CONV)
                IF (CONV) RETURN
C  Итерация не сходится. Прекратить проверку и восстановить H, S, PV и T
                TEST= .FALSE.
                DO 20 I=1,N
                   HR(I)=SHR(I)
                   HI(I)=SHI(I)
20                 CONTINUE
                SR=SVSR
                SI=SVSI
                CALL POLYEV (NN,SR,SI,PR,PI,QPR,QPI,PVR,PVI)
                CALL CALCT (BOOL)
                GO TO 50
30           PASD= .TRUE.
             GO TO 50
40        PAST= .FALSE.
50     CONTINUE
C  Попытка выполнить итерацию с последним полиномом H из второго этапа
       CALL VRSHFT (10,ZR,ZI,CONV)
       RETURN
       END
```

Подпрограмма VRSHFT (L3,ZR,ZI,CONV)

```
C
C  Предназначена для выполнения итерации на третьем этапе
C  L3       — предельное значение шага на третьем этапе
C  ZR,ZI    — относительно входа содержит начальную итерацию; если эта
C             итерация сходится, то содержит последнюю итерацию относи-
C             тельно выхода
C  CONV     — .TRUE., если итерация сходится
C
       COMMON/GLOBAL/PR,PI,HR,HI,QPR,QPI,QHR,QHI,SHR,SHI,SR,SI,
      *              TR,TI,PVR,PVI,ARE,MRE,ETA,INFIN,NN
       REAL*8 SR,SI,TR,TI,PVR,PVI,ARE,MRE,ETA,INFIN
       REAL*8 PR(100),PI(100),HR(100),HI(100),QPR(100),QPI(100)
       REAL*8 QHR(100),QHI(100),SHR(100),SHI(100)
       REAL*8 ZR,ZI,MP,MS,OMP,RELSTP,R1,R2,CMOD,DSQRT,ERREV,TP
       LOGICAL*4 CONV,B,BOOL
       CONV= .FALSE.
       B= .FALSE.
       SR=ZR
       SI=ZI
C  Основной цикл для третьего этапа
       DO 60 I=1,L3
C  Вычисление P в S и проверка сходимости
          CALL POLYEV (NN,SR,SI,PR,PI,QPR,QPI,PVR,PVI)
          MP=CMOD(PVR,PVI)
          MS=CMOD(SR,SI)
          IF (MP .GT. 20.D0*ERREV(NN,QPR,QPI,MS,MP,ARE,MRE))
                                                    GO TO 10
```

```
C  Значение полинома меньше значения, заданного для ошибки вычисле-
C  ния P; завершить итерацию
               CONV= .TRUE.
               ZR=SR
               ZI=SI
               RETURN
10          IF (I .EQ. 1) GO TO 40
               IF (B .OR. MP .LT. OMP .OR. RELSTP .GE. 05D0) GO TO 30
C  Итерация остановлена. Возможно, получена группа нулей. Выполнить
C  пять шагов фиксированного сдвига на этой группе, с тем, чтобы сделать
C  один нуль доминирующим
               TP=RELSTP
               B= .TRUE.
               IF (RELSTP .LT. ETA) TP=ETA
               R1=DSQRT(TP)
               R2=SR*(1.D0+R1)-SI*R1
               SI=SR*R1+SI*(1.D0+R1)
               SR=R2
               CALL POLYEV (NN,SR,SI,PR,PI,QPR,QPI,PVR,PVI)
               DO 20 J=1, 5
                  CALL CALCT (BOOL)
                  CALL NEXTH (BOOL)
20                CONTINUE
               OMP=INFIN
               GO TO 50
C  Вывод, если значение полинома значительно возросло
30          IF (MP* .1D0 .GT. OMP) RETURN
40       OMP=MP
C  Вычисление следующей итерации
50       CALL CALCT (BOOL)
         CALL NEXTH (BOOL)
         CALL CALCT (BOOL)
         IF (BOOL) GO TO 60
         RELSTP=CMOD(TR,TI)/CMOD(SR,SI)
         SR=SR+TR
         SI=SI+TI
60       CONTINUE
         RETURN
         END


         Подпрограмма CALCT(BOOL)
C  Предназначена для вычисления T=-P(S)/H(S)
C
C  BOOL — логическая переменная; установить в .TRUE., если H(S) сущест-
C                венно близок к нулю
         COMMON/GLOBAL/PR,PI,HR,HI,QPR,QPI,QHR,QHI,SHR,SHI,SR,SI,
        *                    TR,TI,PVR,PVI,ARE,MRE,ETA,INFIN,NN
         REAL*8 SR,SI,TR,TI,PVR,PVI,ARE,MRE,ETA,INFIN
         REAL*8 PR(100),PI(100),HR(100),HI(100),QPR(100),QPI(100)
         REAL*8 QHR(100),QHI(100),SHR(100),SHI(100)
         REAL*8 HVR,HVI,CMOD
         LOGICAL*4 BOOL
         N=NN-1
C  Вычисление H(S)
         CALL POLYEV (N,SR,SI,HR,HI,QHR,QHI,HVR,HVI)
         BOOL=CMOD(HVR,HVI) .LE. ARE*10.D0*CMOD(HR(N),HI(N))
         IF (BOOL) GO TO 10
```

```
      CALL CDIVID(-PVR,-PVI,HVR,HVI,TR,TI)
      RETURN
10    TR=0.D0
      TI=0.D0
      RETURN
      END


      Подпрограмма NEXT (BOOL)
C     Предназначена для вычисления следующего сдвинутого полинома H
C
C     BOOL — логическая переменная; если .TRUE., H(S) существенно близок
            к нулю
      COMMON/GLOBAL/PR,PI,HR,HI,QPR,QPI,QHR,QHI,SHR,SHI,SR,SI,
     *              TR,TI,PVR,PVI,ARE,MRE,ETA,INFIN,NN
      REAL*8 SR,SI,TR,TI,PVR,PVI,ARE,MRE,ETA,INFIN
      REAL*8 PR(100),PI(100),HR(100),HI(100),QPR(100),QPI(100)
      REAL*8 GHR(100),QHI(100),SHR(100),SHI(100),T1,T2
      LOGICAL*4 BOOL
      N=NN-1
      IF (BOOL) GO TO 20
         DO 10 J=2,N
            T1=QHR(J-1)
            T2=QHI(J-1)
            HR(J)=TR*T1-TI*T2+QPR(J)
            HI(J)=TR*T2+TI*T1+QPI(J)
10          CONTINUE
         HR(1)=QPR(1)
         HI(1)=QPI(1)
         RETURN
C     Если H(S) равен нулю, заменить H на QH
20    DO 30 J=2,N
         HR(J)=QHR(J-1)
         HI(J)=QHI(J-1)
30       CONTINUE
      HR(1)=0.D0
      HI(1)=0.D0
      RETURN
      END


      Подпрограмма POLYEV (NN,SR,SI,PR,PI,QR,QI,PVR,PVI)
C     Предназначена для вычисления полинома P при S с помощью рекуррент-
C     ной схемы Горнера
      REAL*8 PR(NN),PI(NN),QR(NN),QI(NN),SR,SI,PVR,PVI,T
      QR(1)=PR(1)
      QI(1)=PI(1)
      PVR=QR(1)
      PVI=QI(1)
      DO 10 I=2,NN
         T=PVR*SR-PVI*SI+PR(I)
         PVI=PVR*SI+PVI*SR+PI(I)
         PVR=T
         QR(I)=PVR
         QI(I)=PVI
10       CONTINUE
      RETURN
      END
```

```
      REAL*8 FUNCTION ERREV(NN,QR,QI,MS,MP,ARE,MRE)
C     Границы ошибки при вычислении полинома с помощью рекуррентной схе-
C     мы Горнера
C       QR,QI      — частичные суммы
C       MS         — модуль в точке
C       MP         — модуль значения полинома
C       ARE,MRE    — границы ошибки для комплексных операций сложения
C                    и умножения
        REAL*8 QR(NN),QI(NN),MS,MP,ARE,MRE,E,CMOD
        E=CMOD(QR(1),QI(1))*MRE/(ARE+MRE)
        DO 10 I=1,NN
           E=E*MS+CMOD(QR(I),QI(I))
10         CONTINUE
        ERREV=E*(ARE+MRE)-MP*MRE
        RETURN
        END

        REAL*8 FUNCTION CAUCHY (NN,PT,Q)
C     Предназначена для вычисления нижней границы ошибки для модуля ну-
C     лей полинома; PT — модуль коэффициентов
        REAL*8 Q(NN),PT(NN),X,XM,F,DX,DF,DABS,DEXP,DLOG
        PT(NN)=-PT(NN)
C     Вычисление верхней оценки границы
        N=NN-1
        X=DEXP(DLOG(-PT(NN))-DLOG(PT(1)))/FLOAT(N))
        IF (PT(N) .EQ. 0.D0) GO TO 20
C     Если значение для итерации Ньютона в начале координат лучше, исполь-
C     зовать это значение
           XM=-PT(NN)/PT(N)
           IF (XM .LT. X) X=XM
C     Изменять интервал 0,X, пока не будет достигнуто F≤0
20      XM=X*.1D0
        F=PT(1)
        DO 30 I=2,NN
           F=F*XM+PT(I)
30         CONTINUE
        IF (F .LE. 0.D0) GO TO 40
           X=XM
           GO TO 20
40      DX=X
C     Выполнять итерацию Ньютона, пока не сойдется к двум десятичным раз-
C     рядам
50      IF (DABS(DX/X) .LE. .005D0) GO TO 70
           Q(1)=PT(1)
           DO 60 I=2,NN
              Q(I)=Q(I-1)*X+PT(I)
60            CONTINUE
           F=Q(NN)
           DF=Q(1)
           DO 65 I=2,N
              DF=DF*X+Q(I)
65            CONTINUE
           DX=F/DF
           X=X-DX
           GO TO 50
70      CAUCHY=X
```

```
      RETURN
      END
      REAL*8 FUNCTION SCALE(NN,PT,ETA,INFIN,SMALNO,BASE)
C     Возвращает масштабирующий множитель для умножения коэффициентов
C     полинома. Масштабирование осуществляется для того, чтобы устранить
C     переполнение и устранить необнаруженное недопереполнение, вступающие
C     в противоречие с критерием сходимости. Этот множитель является сте-
C     пенью основания
C
C     PT — модуль коэффициентов полинома P
C     ETA,INFIN,SMALNO,BASE — константы, описывающие величины, зада-
C                             ваемые в формате с плавающей запятой

      REAL*8 PT(NN),ETA,INFIN,SMALNO,BASE,HI,LO,MAX,MIN,X,SC
      REAL*8 DSQRT,DLOG
C     Определение наибольшего и наименьшего модулей коэффициентов
      HI=DSQRT (INFIN)
      LO=SMALNO/ETA
      MAX=0.D0
      MIN=INFIN
      DO 10 I=1,NN
         X=PT(I)
         IF (X .GT. MAX) MAX=X
         IF (X .NE. 0.D0 .AND. X .LT. MIN) MIN=X
10       CONTINUE
C     Масштабирование в случае очень большой и очень малой компонент
      SCALE=1.D0
      IF (MIN .GE. LO .AND. MAX .LE. HI) RETURN
      X=LO/MIN
      IF (X .GT. 1.D0) GO TO 20
         SC=1.D0/(DSQRT(MAX)*DSQRT(MIN))
         GO TO 30
20    SC=X
      IF (INFIN/SC .GT. MAX) SC=1.D0
30    L=DLOG(SC)/DLOG(BASE)+.5D0
      SCALE=BASE**L
      RETURN
      END

      Подпрограмма CDIVID (AR,AI,BR,BI,CR,CI)
C     Комплексное деление C=A/B, устраняющее переполнение
      REAL*8 AR,AI,BR,BI,CR,CI,R,D,T,INFIN,DABS
      IF (BR .NE. 0.D0 .OR. BI .NE. 0.D0) GO TO 10
C     Деление на нуль, C равно бесконечности
         CALL MCON (T,INFIN,T,T)
         CR=INFIN
         CI=INFIN
         RETURN
10    IF (DABS(BR) .GE. DABS(BI)) GO TO 20
         R=BR/BI
         D=BI+R*BR
         CR=(AR*R+AI)/D
         CI=(AI*R-AR)/D
         RETURN
20    R=BI/BR
      D=BR+R*BI
      CR=(AR+AI*R)/D
      CI=(AI-AR*R)/D
```

```
      RETURN
      END
      REAL*8 FUNCTION CMOD(R,I)
C  Модуль некоторого комплексного числа, устраняющий переполнение
      REAL*8 R,I,AR,AI,DABS,DSQRT
      AR=DABS(R)
      AI=DABS(I)
      IF (AR .GE. AI) GO TO 10
         CMOD=AI*DSQRT(1.D0+(AR/AI)**2)
         RETURN
10    IF (AR .LE. AI) GO TO 20
         CMOD=AR*DSQRT(1.D0+(AI/AR)**2)
         RETURN
20    CMOD=AR*DSQRT(2.D0)
      RETURN
      END
```

```
      Подпрограмма MCON (ETA,INFINY,SMALNO,BASE)
C  MCON обеспечивает вычисление машинных констант, используемых в раз-
C  личных частях данной программы. Пользователь может либо самостоятель-
C  но задать их, либо вычислить их с помощью операторов, приведенных ни-
C  же. Четыре константы имеют следующее значение:
C  ETA       — максимальная относительная ошибка представления, кото-
C              рую можно записать как наименьшее положительное число
C              с плавающей запятой, такое что 1.D0+ETA больше, чем 1.D0
C
C  INFINY    — наибольшее число с плавающей запятой
C  SMALNO    — наименьшее положительное число с плавающей запятой
C  BASE      — основание используемой системы представления чисел в фор-
C              мате с плавающей запятой
C
C  Пусть T — число цифр в каждом числе с плавающей запятой (удвоенная
C  точность). Тогда ETA — это либо 5*B**(1-T), либо B**(1-T) в зависи-
C  мости от того, используется ли округление или усечение.
C  Пусть M — наибольший, а N — наименьший показатель степени экспоненты
C  в принятой системе счисления. Тогда INFINY — это (1-BASE**(-T))*
C  BASE**M, а SMALNO — это BASE**N.
C  Значения для BASE, T, M и N соответствуют формату представления, при-
C  нятому в ЭВМ типа VAX 11/780.
      REAL*8 ETA,INFINY,SMALNO,BASE
      INTEGER*4 M,N,T
      BASE=2.D0
      T=56
      M=127
      N=-127
      ETA=BASE**(1-T)
      INFINY=BASE*(1.D0-BASE**(-T))*BASE**(M-1)
      SMALNO=(BASE**(N+3))/BASE**3
      RETURN
      END
```

Приложение 11.В. Программа для метода Прони

Эта подпрограмма предназначена для вычисления оценок комплексных экспоненциальных параметров h_k и z_k в уравнении (11.3). Может быть выбран либо обычный метод наименьших

квадратов Прони (METHOD=1), описанный в разд. 11.5, либо модифицированный метод наименьших квадратов Прони (METHOD=2), описанный в разд. 11.6. Для работы с действительными данными необходимо просто положить мнимые компоненты каждого элемента входного массива равными нулю.

```
      Программа PRONY (METHOD,N,IP,X,H,Z,ISTAT)
C
C     Предназначена для определения параметров экспоненциальной модели
C     с помощью метода Прони.
C
C     Входные параметры:
C
C        METHOD  — указывает требуемый метод: 1 — для обычного метода
C                  Прони, 2 — для модифицированного метода Прони (це-
C                  лое число)
C        N       — число отсчетов данных (целое число).
C        IP      — порядок экспоненциальной модели (целое число); должен
C                  быть четным, если METHOD=2.
C        X       — массив отсчетов комплексных данных от X(1) до X(N).
C
C     Выходные параметры:
C
C        H       — массив комплексных амплитуд экспоненциальной модели.
C        Z       — массив комплексных экспонент экспоненциальной модели.
C        ISTAT   — целочисленный указатель состояния в момент выхода из
C                  программы:
C                  0 — нормальный выход при отсутствии ошибок;
C                  1 — при наличии ошибки в программе COVAR;
C                  2 — при наличии ошибки в программе SYMCOVAR;
C                  3 — при наличии ошибки в программе CPOLY;
C                  4 — при наличии ошибки в программе CHOLESKY;
C
C     Примечание:
C        Размер .GE. IP внешних массивов H, Z и размер .GE. N массива X
C        должны указываться в вызывающей программе. Размер внутреннего
C        массива B должен указываться в .GE. IP(IP+1)/2; размеры масси-
C        вов A, ROOTR, ROOTI должны указываться в .GE. IP; размеры мас-
C        сивов PR, PI должны указываться в GE. IP+1. Размер массива C
C        указывается в .GE. IP/2.
C
C     Используются подпрограммы COVAR (приложение 8.Б), SYMCOVAR
C     (приложение 14.А), CPOLY (приложение 14.Б) и CHOLESKY (приложе-
C     ние 3.А).
C
      COMPLEX X(1),H(1),Z(1),A(100),B(5050),G(100)
      REAL*4 PF,PB,PS,EPS
      REAL*8 PR(101),PI(101),ROOTR(100),ROOTI(100)
      REAL*8 C1,C2,C3,C4,C5,C6,SUMR,SUMI,SUM
      LOGICAL*4 FAIL
      ISTAT=0
      EPS=1.E-15
C     *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *
C     *     ПЕРВЫЙ ЭТАП: Применение ковариационного или симметрич-  *
C     *                  ного ковариационного метода                *
C     *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *
```

```
      IF (METHOD .EQ. 2) GO TO 20
      CALL COVAR (N,IP,X,PF,A,PB,B,JSTAT)
      IF (JSTAT .EQ. 0) GO TO 5
         ISTAT=1
         RETURN
5     PR(1)=1.D0
      PI(1)=0.D0
      DO 10 K=1,IP
         PR(K+1)=REAL(A(K))
10       PI(K+1)=AIMAG(A(K))
      GO TO 50
C
20    CALL SYMCOVAR (N,IP,X,PS,G,JSTAT)
      IF (JSTAT .EQ. 0) GO TO 30
         ISTAT=2
         RETURN
30    MHALF=IP/2
      M1=MHALF+1
      PR(M1)=1.D0
      PI(M1)=0.D0
      DO 40 K=1,MHALF
         PR(M1+K)=REAL(G(K))
         PI(M1+K)=-AIMAG(G(K))
         PR(M1-K)=REAL(G(K))
40       PI(M1-K)=AIMAG(G(K))
C  *   *   *   *   *   *   *   *   *   *   *   *   *   *   *   *   *
C  *     ВТОРОЙ ЭТАП: вычисление корней полинома для определения  *
C  *                  комплексных экспоненциальных параметров     *
C  *   *   *   *   *   *   *   *   *   *   *   *   *   *   *   *   *
50    CALL CPOLY (PR,PI,IP,ROOTR,ROOTI,FAIL)
      IF (FAIL .NE. .TRUE.) GO TO 55
         ISTAT=3
         RETURN
55    DO 60 K=1,IP
60       Z(K)=CMPLX(SNGL(ROOTR(K)),SNGL(ROOTI(K)))
C  *   *   *   *   *   *   *   *   *   *   *   *   *   *   *   *   *
C  *     ТРЕТИЙ ЭТАП: оценки параметров комплексных амплитуд      *
C  *   *   *   *   *   *   *   *   *   *   *   *   *   *   *   *   *
      I=0
      DO 100 K=1,IP
         C1=ROOTR(K)
         C2=ROOTI(K)
         DO 80 J=1,K
            SUMR=C1*ROOTR(J)+C2*ROOTI(J)
            SUMI=S2*ROOTR(J)-C1*ROOTI(J)
            I=I+1
            C3=SUMR*SUMR+SUMI*SUMI
            SUM=C3-2.D0*SUMR+1.D0
            IF (SUM .EQ. 0.D0) GO TO 70
            C3=C3**N
            C3=DSQRT(C3)
            C4=DATAN2(SUMI,SUMR)*N
            C5=C3*DCOS(C4)-1.D0
            C6=C3*DSIN(C4)
            SUMR=SUMR-1.D0
            SUMI=-SUMI
            C3=(SUMR*C5-SUMI*C6)/SUM
```

```
            C4=(SUMR*C6+SUMI*C5)/SUM
            B(I)=CMPLX(SNGL(C3),SNGL(C4))
            GO TO 80
70          B(I)=CMPLX(FLOAT(N),0.)
80          CONTINUE
          SUMR=REAL(X(1))
          SUMI=AIMAG(X(1))
          C2=-C2
          C3=1.D0
          C4=0.D0
          DO 90 J=2,N
             SUM=C3
             C3=SUM*C1-C4*C2
             C4=SUM*C2+C4*C1
             SUMR=SUMR+C3*REAL(X(J))-C4*AIMAG(X(J))
90           SUMI=SUMI+C4*REAL(X(J))+C3*AIMAG(X(J))
100       H(K)=CMPLX(SNGL(SUMR),SNGL(SUMI))
        CALL CHOLESKY (IP,EPS,B,H,JSTAT)
        IF (JSTAT .NE. 0) ISTAT=4
C     *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *
C     *     Здесь может быть произведено вычисление остатков      *
C     *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *
        RETURN
        END
```

Приложение 11.Г.
Программа вычисления экспоненциальных параметров

Оценки амплитуд, коэффициентов затухания, частот и фаз, полученные для 64-точечной тест-последовательности данных с помощью подпрограмм PRONY и EXPARAMS при использовании обычного метода наименьших квадратов Прони (METHOD=1) в случае IP=15 и T=1.0 с, имеют следующие значения:

Частота	Затухание	Амплитуда	Фаза, рад
—0,49163	—0,17371	0,13521	1,30373
—0,41007	—0,10256	0,59115	0,79553
—0,38589	—0,05828	0,51430	3,11306
—0,31345	—0,03573	0,23348	0,62037
—0,27254	—0,11726	0,26078	—2,61130
—0,23315	—0,00972	0,02494	0,27368
—0,15001	—0,00008	0,09466	—0,98327
—0,06426	—1,34236	1,00616	—1,33355
0,10001	—0,00009	0,10869	0,61524
0,20100	—0,00024	1,21926	1,03794
0,20914	0,00592	0,91410	1,64492
0,30043	—0,03858	0,38163	0,19629
0,33765	—0,06556	0,50696	1,65248
0,38231	—0,06997	0,20830	—1,50325
0,42640	—0,11518	0,20499	0,95396

При использовании модифицированного метода наименьших квадратов Прони (METHOD=2) в случае IP=16 и T=1,0 с эти параметры имеют следующие значения:

Частота	Затухание	Амплитуда	Фаза, рад
—0,42996	0,00000	0,04092	0,30816
—0,39495	0,00000	0,12822	—1,81738
—0,35502	0,00000	0,02274	—0,10270
—0,31035	0,00000	0,12497	—0,11989
—0,26485	0,00000	0,05410	—0,93568
—0,22608	0,00000	0,03279	—1,13157
—0,15003	0,00000	0,10509	—0,91128
0,10002	0,00000	0,10017	0,59811
0,20021	0,00000	0,98100	1,23697
0,21014	0,00000	0,98191	1,30105
0,24917	0,00000	0,03746	—0,29225
0,30629	0,00000	0,15687	—0,44691
0,34351	0,00000	0,19537	0,73366
0,38368	0,00000	0,09891	0,00492
0,43086	0,00000	0,04702	1,38147
0,48952	0,00000	0,02784	1,76092

Ниже приведена распечатка подпрограммы EXPARAMS.

```
      Подпрограмма EXPARAMS (IP,T,H,Z,AMP,DAMP,FREQ,PHASE)
C
C  Предназначена для вычисления действительной амплитуды, коэффициента
C  затухания, частоты и фазы по массивам комплексных амплитуд и экспо-
C  ненциальных параметров.
C
C  Входные параметры:
C
C    IP     — порядок экспоненциальной модели (целое число)
C    T      — действительная переменная, представляющая интервал от-
C             счетов в секундах
C    H      — массив параметров комплексных амплитуд от H(1) до H(IP)
C    Z      — массив комплексных экспоненциальных параметров от Z(1)
C             до Z(IP)
C  Выходные параметры:
C
C    AMP    — массив действующих амплитуд (в произвольных единицах)
C    DAMP   — массив действительных коэффициентов затухания (в с⁻¹).
C    FREQ   — массив действительных частот (в герцах)
C    PHASE  — массив действительных фаз (в радианах)
C
C  Примечание:
C
C    Размеры .GE. IP внешних массивов H,Z,AMP,DAMP,PHASE должны
C    указываться в вызывающей программе. Если исходные данные имеют
C    действительные значения, фаза вычисляется для косинусоидального
C    колебания.
C
      COMPLEX H(1),Z(1)
      REAL AMP(1),DAMP(1),FREQ(1),PHASE(1)
```

```
      TWOPI=8*ATAN(1.)
      DO 10 K=1,IP
         FREQ(K)=ATAN2(AIMAG(Z(K)),REAL(Z(K)))/(TWOPI*T)
         DAMP(K)=LOG(CABS(Z(K)))/T
         AMP(K)=CABS(H(K))
10       PHASE(K)=ATAN2(AIMAG(H(K)),REAL(H(K)))
      RETURN
      END
```

Приложение 11.Д. Программа для вычисления спектральной плотности энергии (СПЭ) Прони

Эта подпрограмма предназначена для вычисления односторонней (установить METHOD=1) и двусторонней (установить METHOD=2) спектральной плотности энергии (СПЭ) Прони с помощью уравнений (11.50) и (11.54). Программа выдает значение СПЭ для каждой относительной частоты F, введенной в подпрограмму. Заметим, что F должно лежать в интервале от $-0{,}5 \leqslant F \leqslant 0{,}5$.

```
      Подпрограмма ESD (METHOD,IP,T,F,H,Z,SD)
C
C  Предназначена для вычисления односторонней или двусторонней спект-
C  ральной плотности энергии для экспоненциальной модели на заданной
C  частоте F.
C
C  Входные параметры:
C
C    METHOD   — указывает требуемый вид СПЭ: 1 — односторонняя, 2 —
C               двусторонняя (целое число)
C    IP       — порядок экспоненциальной модели (целое число)
C    T        — действительная переменная, представляющая интервал
C               отсчетов в секундах
C    F        — действительная переменная, представляющая доли от ча-
C               стоты отсчетов (изменяется от −0,5 до 0,5)
C    H        — массив параметров комплексных амплитуд от H(1) до
C               H(IP)
C    Z        — массив комплексных экспоненциальных параметров от
C               Z(1) до Z(IP)
C
C  Выходные параметры:
C    SD       — действительная спектральная плотность энергии на часто-
C               те F.
C
C  Примечание:
C
C    Размер .GE. IP внешних массивов H и Z должен указываться в вызы-
C    вающей программе.
C
      COMPLEX H(1),Z(1),ZK,ZKC,ZI,SUM
      TWOPI=8.*ATAN(1.)
```

```
      ZI=CEXP(CMPLX(0.,-TWOPI*F))
      SUM=(0.,0.)
      IF (METHOD .EQ. 2) GO TO 20
      DO 10 K=1,IP
10       SUM=SUM+H(K)/(1.-Z(K)*ZI)
      GO TO 40
20    DO 30 K=1,IP
         ZK=Z(K)
         ZKC=1./CONJG(ZK)
30       SUM=SUM+(H(K)*(ZK-ZKC)*ZI)/(1.-(ZK+ZKC)*ZI
                                        +ZK*ZKC*ZI*ZI)
40    SD=T*(REAL(SUM)**2+AIMAG(SUM) **2)
      RETURN
      END
```

Глава 12
СПЕКТРАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПО МЕТОДУ МИНИМУМА ДИСПЕРСИИ

12.1. Введение

Спектральная оценка минимальной дисперсии (МД) была впервые введена Кейпоном [3, 4] при пространственно-временном анализе многомерных сигналов решеток сейсмических датчиков. Метод получения такой оценки характеризовался Кейпоном как метод спектрального анализа высокого разрешения, хотя в действительности его разрешение лежит между разрешением авторегрессивной спектральной оценки и разрешением классических спектральных оценок. Лакосс [7] переформулировал метод пространственно-временного анализа Кейпона применительно к задачам спектрального анализа одномерных временны́х рядов и назвал его *методом* (спектрального оценивания) *максимального правдоподобия* (ММП), поскольку в статье Кейпона [3], опубликованной в 1969 г., использовалась функция максимального правдоподобия и гауссовский процесс. Однако название ММП не совсем точно, так как данный метод не дает оценки максимального правдоподобия для функции спектральной плотности мощности (СПМ). На самом деле МД-оценка не является истинной функцией СПМ, поскольку в отличие от истинной СПМ площадь под графиком МД-оценки не характеризует полную мощность измеряемого процесса. Обратное преобразование Фурье, соответствующее МД-оценке, также не совпадает с автокорреляционной последовательностью, которая используется для получения этой оценки, чем она отличается от АР-оценок, которые этим свойством обладают. Таким образом, МД-оценку можно считать спектральной оценкой в том смысле, что она описывает относительные интенсивности компонент частотного спектра, но не является оценкой истинной СПМ. И все же к достоинствам МД-оценки следует отнести тот факт, что она дает спектр, высоты пиков в котором линейно пропорциональны мощности синусоид, присутствующих в анализируемом процессе. *Минимальная дисперсия* — это характеристика, которая более информативна вблизи начала координат оценки. Она получается посредством минимизации дисперсии процесса на выходе узкополосного фильтра, частотная характеристика которого адаптируется к спектральным компонентам входного процесса на каждой представляющей интерес частоте.

12.2. Краткая сводка результатов

Спектральная МД-оценка определяется выражением

$$P_{\text{МД}}(f) = \frac{T}{\mathbf{e}^{H}(f)\,\mathbf{R}_p^{-1}\mathbf{e}(f)}, \tag{12.1}$$

где $\mathbf{R}_p^{-1}$ — матрица, обратная известной или оцененной автокорреляционной матрице размером $(p+1)\times(p+1)$,

$$\mathbf{e}(f) = \begin{pmatrix} 1 \\ \exp(j2\pi fT) \\ \vdots \\ \exp(j2\pi fpT) \end{pmatrix} \tag{12.2}$$

— вектор комплексных синусоид, а T — интервал отсчетов. На рис. 12.1 приведена краткая запись этапов программы, предназначенной для вычисления МД-оценки. Главной является программа MINVAR, приведенная в приложении 12.А. В ее основу положен быстрый вычислительный алгоритм, предложенный Музикусом [13], в котором используется автокорреляционная оценка, получаемая с помощью алгоритма Берга. На рис. 12.2 показана спектральная оценка 64-точечной тест-последовательности данных для случая $p=15$. Нетрудно видеть, что кажущееся разрешение этой оценки хуже разрешения авторегрессионной спектральной оценки, приведенной в гл. 8, но лучше разрешения, которое обеспечивает классический коррелограммный метод, описанный в гл. 5. И в данном случае для достижения требуемого компромисса между дисперсией и разрешением оценки также можно применить процедуру изменения порядка (см. этап «Закрытие порядка» на рис. 12.1). Количественный анализ разрешающей способности метода минимума дисперсии был выполнен Коксом [6].

12.3. Вывод выражения для спектральной оценки минимальной дисперсии

Рассмотрим трансверсальный фильтр с $p+1$ коэффициентами $a[0]$, $a[1]$, ..., $a[p]$. Выход $y[n]$ этого фильтра, соответствующий входу $x[n]$, определяется сверткой

$$y[n] = \sum_{k=0}^{p} a[k]\,x[n-k] = \mathbf{x}^{T}[n]\,\mathbf{a}, \tag{12.3}$$

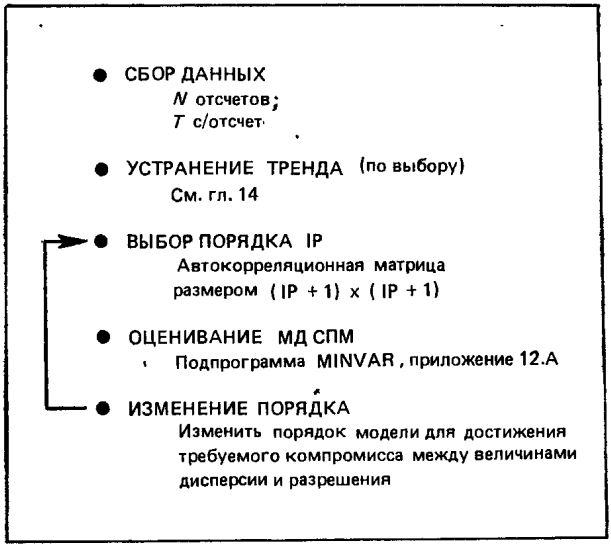


Рис. 12.1. Краткая запись алгоритма спектрального МД-оценивания.

где $(p+1)$-векторы $\mathbf{x}[n]$ и $\mathbf{a}$ определяются выражениями

$$\mathbf{x}[n] = \begin{pmatrix} x[n] \\ x[n-1] \\ \vdots \\ x[n-p] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a[0] \\ a[1] \\ \vdots \\ a[p] \end{pmatrix}. \tag{12.4}$$

Дисперсия на выходе рассматриваемого фильтра определяется простым выражением:

$$= \mathcal{E}\{|y[n]|^2\} = \mathcal{E}\{\mathbf{a}^H \mathbf{x}^*[n]\mathbf{x}^T[n]\mathbf{a}\} = \mathbf{a}^H \mathcal{E}\{\mathbf{x}^*[n]\mathbf{x}^T[n]\}\mathbf{a} = \mathbf{a}^H \mathbf{R}_p \mathbf{a}, \tag{12.5}$$

где

$$\mathbf{R}_p = \begin{pmatrix} r_{xx}[0] & \cdots & r_{xx}^*[p] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xx}[p] & \cdots & r_{xx}[0] \end{pmatrix} \tag{12.6}$$

— тёплицева автокорреляционная $(p+1)\times(p+1)$-матрица. Дисперсия на выходе фильтра (12.5) аналогична дисперсии фильтра линейного предсказания ошибки (7.4), но с тем лишь различием,

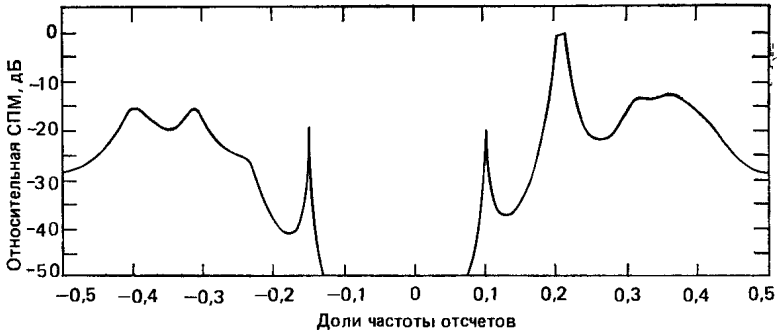


Рис. 12.2. Спектральная МД-оценка, полученная для 64-точечной тест-последовательности данных при $p=15$.

что теперь значение коэффициента $a[0]$ произвольно, а не ограничено единицей. Коэффициенты фильтра необходимо выбирать таким образом, чтобы на частоте f_0 частотная характеристика этого фильтра имела единичный коэффициент усиления. Это ограничение можно записать следующим образом:

$$\sum_{k=0}^{p} a[k] \exp(-j2\pi f_0 kT) = \mathbf{e}^H(f_0)\,\mathbf{a} = 1, \qquad (12.7)$$

где $\mathbf{e}(f_0)$ — это $(p+1)$-вектор, определенный выражением (12.2). Отсюда следует, что синусоида с частотой f_0, поданная на вход такого фильтра, пройдет на его выход без искажений. Для режекции компонент спектра, удаленных от частоты f_0, необходимо просто минимизировать дисперсию (12.5) при ограничении (12.7), налагаемом на частотную характеристику фильтра. Можно показать [12], что при таком ограничении решение по минимуму дисперсии для коэффициентов фильтра будет удовлетворять уравнению

$$\mathbf{a}_{\text{МД}} = \frac{\mathbf{R}_p^{-1}\mathbf{e}(f_0)}{\mathbf{e}^H(f_0)\,\mathbf{R}_p^{-1}\mathbf{e}(f_0)}. \qquad (12.8)$$

Подставляя (12.8) в (12.5), получаем далее следующее выражение для минимальной дисперсии:

$$\rho_{\text{МД}} = \frac{1}{\mathbf{e}^H(f_0)\,\mathbf{R}_p^{-1}\mathbf{e}(f_0)}. \qquad (12.9)$$

Дисперсия выхода фильтра служит хорошим индикатором мощности входного спектра в окрестности частоты f_0. Для каждой выбранной частоты f_0 получается отличное от других частот оптимальное значение дисперсии. В требуемом частотном диапазо-

не фильтр адаптирует форму своей характеристики к автокорреляционной функции анализируемого процесса.

Одно из приемлемых выражений для *спектральной оценки минимальной дисперсии* (МД), которое можно получить из (12.9), имеет вид

$$P_{\text{МД}}(f) = T\rho_{\text{МД}} = \frac{T}{\mathbf{e}^H(f)\,\mathbf{R}_p^{-1}\mathbf{e}(f)}, \qquad (12.10)$$

где $-1/2T \leqslant f \leqslant 1/2T$. Наличие в (12.10) интервала отсчетов T обеспечивает получение этой величины в единицах мощности на герц, что соответствует спектральной плотности мощности. Однако спектральная МД-оценка не является истинной СПМ. Рассмотрим белый шум с дисперсией ρ_w. Можно показать (см. разд. «Задачи»), что спектральная МД-оценка белого шума имеет вид

$$P_{\text{МД}}(f) = \frac{T\rho_w}{p+1}, \qquad (12.11)$$

где $p+1$ — размер автокорреляционной матрицы (12.6). Истинная СПМ равна, конечно, $T\rho_w$. Ряд других интерпретаций и модификаций спектральных МД-оценок дан в работах [1, 8—10]. Так, например, в работе [10] показано, что МД-оценку (12.10) можно интерпретировать как верхнюю границу для взвешенной спектральной плотности мощности неизвестного случайного процесса, некоторые значения корреляционной функции которого были измерены.

Можно показать (см. разд. «Задачи» и работу [7]), что комплексная синусоида в белом шуме с автокорреляцией

$$r_{xx}[k] = P\exp(j2\pi f_0 kT) + \rho_w\delta[k] \qquad (12.12)$$

имеет на частоте $f=f_0$ следующую спектральную МД-оценку:

$$P_{\text{МД}}(f_0) = \frac{T\rho_w}{p}(1+pP/\rho_w). \qquad (12.13)$$

Если отношение сигнал/шум $P/\rho_w \gg 1$, то

$$P_{\text{МД}}(f_0) \approx PT, \qquad (12.14)$$

т. е. равно мощности синусоиды, помноженной на масштабирующий множитель T. Следовательно, при большом отношении сигнал/шум высоты пиков в спектральной МД-оценке будут приближенно линейно пропорциональны мощности синусоид, а спектральные линии достаточно разнесены. Высоты же пиков в АР-оценке СПМ пропорциональны квадрату мощности. Однако площадь под графиком МД-оценки СПМ пропорциональна корню квадратному из мощности синусоиды, что служит индикатором того, что эта оценка не является истинной СПМ. Кейпон и Гудман [5] показали, что среднее значение и дисперсия МД-оценки

СПМ ведут себя подобно усредненной периодограмме (т. е. дисперсия линейно уменьшается по мере увеличения числа усредняемых сегментов данных).

На практике, когда имеются только одни отсчеты данных, необходимо использовать оценку автокорреляционной матрицы. В следующем разделе обсуждается несколько более удобный подход, в котором вместо оценки автокорреляционной матрицы используется алгоритм Берга.

12.4. Связь между спектральными МД- и АР-оценками

В том случае, когда автокорреляционная последовательность известна, спектральные МД и АР-оценки связаны явным соотношением. В гл. 3 было показано (см. выражение (3.166)), что матрица, обратная тёплицевой автокорреляционной матрице, представима в виде

$$\mathbf{R}_p^{-1} = \mathbf{A}_p \mathbf{P}_p^{-1} \mathbf{A}_p^H, \tag{12.15}$$

где

$$\mathbf{A}_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_p[1] & 1 & \dots & 0 \\ a_p[2] & a_{p-1}[1] & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_p[p] & a_{p-1}[p-1] & \dots & 1 \end{pmatrix} \tag{12.16}$$

— $(p+1)\times(p+1)$-матрица АР-параметров со значениями порядка от 0 до p, а

$$\mathbf{P}_p^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\rho_p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/\rho_{p-1} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1/\rho_0 \end{pmatrix}. \tag{12.17}$$

— диагональная $(p+1)\times(p+1)$-матрица, составленная из величин, обратных дисперсиям белого шума соответствующих порядков. Подставляя (12.15) в формулу (12.1) для спектральной МД-оценки и записывая обратную ей величину, получаем

$$\frac{1}{P_{\text{МД}}(p, f)} = \frac{1}{T}\mathbf{e}^H(f)\,\mathbf{R}_{xx}^{-1}\mathbf{e}(f) = \frac{1}{T}\mathbf{e}^H(f)\,\mathbf{A}_p\mathbf{P}_p^{-}\,\mathbf{A}_p^H\mathbf{e}(f) =$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{\rho_k}\left|\sum_{m=0}^{k} a_k[m]\exp(-j2\pi f m T)\right|^2 = \sum_{k=0}^{p}\frac{1}{P_{\text{АР}}(k, f)}, \tag{12.18}$$

где $P(k, f)$ использовано для обозначения СПМ порядка k на частоте f [2]. Использовано также допущение $a[0]=1$ для всех значений порядка $0 \leqslant k \leqslant p$. Таким образом, величина, обратная спектральной МД-оценке, равна среднему значению по всем величинам, обратным авторегрессионным спектральным оценкам со значениями порядка от 0 до p. Поэтому наблюдаемое на практике более низкое по сравнению с АР-оценкой разрешение спектральной МД-оценки обусловлено эффектом совместного усреднения АР-спектров низких порядков, обладающих наименьшим разрешением, и АР-спектров высоких порядков, обладающих наибольшим разрешением. Тем не менее МД-оценки при достаточно больших отношениях сигнал/шум обеспечивают более высокое разрешение, чем классические оценки СПМ. В экспериментах с записями данных большой длительности дисперсия спектральной МД-оценки оказалась меньше дисперсии спектральной АР-оценки СПМ идентичного порядка p [7]. Это уменьшение дисперсии также можно связать с эффектом усреднения, присутствующим в выражении (12.18).

Соотношение (12.18) характеризует связь между спектральными МД- и АР-оценками в частотной области. Аналогичное соотношение можно получить и для *временно́й* области [13]. Разложив знаменатель АР-оценки СПМ p-го порядка на множители, ее можно записать в следующем виде:

$$P_{\text{АР}}(f)=\frac{T\rho_p}{\left|1+\sum\limits_{k=1}^{p} a_p[k]\exp(-j2\pi fkT)\right|^2}=\frac{T}{\sum\limits_{k=-p}^{p}\psi_{\text{АР}}[k]\exp(-j2\pi fkT)}. \tag{12.19}$$

Коэффициенты $\psi_{\text{АР}}[k]$ вычисляются по корреляционным коэффициентам АР-параметров

$$\psi_{\text{АР}}[k]=\begin{cases}\dfrac{1}{\rho_p}\sum\limits_{i=0}^{p-k} a_p[k+i]\,a_p^*[i], & 0\leqslant k\leqslant p;\\ \psi_{\text{АР}}^*[-k], & -1\geqslant k\geqslant -p,\end{cases} \tag{12.20}$$

где, по определению, полагается $a_p[0]=1$.

Аналогичным образом можно записать и спектральную МД-оценку. Для этого сначала напомним вид матрицы, обратной эрмитовой тёплицевой матрице $\mathbf{R}_p$ [см. выражение (3.160)], а именно

$$\mathbf{R}_p^{-1}=\frac{1}{\rho_p}\mathbf{T}_p\mathbf{T}_p^H-\frac{1}{\rho_p}\mathbf{S}_p\mathbf{S}_p^H, \tag{12.21}$$

где треугольные тёплицевы матрицы $\mathbf{T}_p$ и $\mathbf{S}_p$ определяются вы-

ражениями

$$\mathbf{T}_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_p[1] & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_p[p-1] & a_p[p-2] & \dots & 1 & 0 \\ a_p[p] & a_p[p-1] & \dots & a_p[1] & 1 \end{pmatrix}. \tag{12.22}$$

$$\mathbf{S}_p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_p^*[p] & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_p^*[2] & a_p^*[3] & \dots & 0 & 0 \\ a_p^*[1] & a_p^*[2] & \dots & a_p^*[p] & 0 \end{pmatrix}. \tag{12.23}$$

Подставляя представление (12.21) для обратной матрицы $\mathbf{R}_p^{-1}$ в выражение (12.10) для МД-оценки, после необходимых алгебраических преобразований получаем

$$P_{\text{МД}}(f) = \frac{T}{\sum\limits_{k=-p}^{p} \psi_{\text{МД}}[k] \exp(-j2\pi fkT)}. \tag{12.24}$$

Коэффициенты $\psi_{\text{МД}}[k]$ вычисляются как линейно взвешенные (обработанные окном) корреляционные коэффициенты АР-параметров:

$$\psi_{\text{МД}}[k] = \begin{cases} \dfrac{1}{\rho_p} \sum\limits_{i=0}^{p-k} (p+1-k-2i)\, a_p[k+i]\, a_p^*[i], & 0 \leqslant k \leqslant p; \\ \psi_{\text{МД}}^*[-k], & -1 \geqslant k \geqslant -p. \end{cases} \tag{12.25}$$

Количество вычислительных операций, требуемых для расчета необходимого набора коэффициентов $\psi_{\text{МД}}[k]$, пропорционально величине p^2. Для расчета альтернативного представления (12.25) спектральной МД-оценки в требуемом диапазоне частот можно далее применить какой-либо быстрый алгоритм преобразования Фурье, например БПФ, приведенный в приложении 2.А. В вычислительном отношении такой подход эффективнее прямого вычисления спектральной МД-оценки по исходной формуле (12.10), которое требует p^3 операций для обращения матрицы $\mathbf{R}_p$ и p^2 операций для расчета значения этой оценки на каждой частоте.

12.5. Реализация метода спектральной оценки по минимуму дисперсии

Наиболее эффективная реализация метода спектральной МД-оценки состоит из следующих этапов:

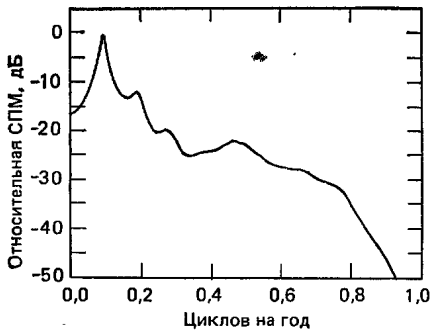


Рис. 12.3. Спектральная МД-оценка фильтрованных чисел солнечных пятен при $p=32$.

- вычислить на основе данных последовательность оценок автокорреляции;
- решить уравнения Юла—Уолкера для АР-параметров с помощью алгоритма Левинсона;
- определить корреляцию АР-параметров для получения коэффициентов $\psi_{МД}[k]$; использовать выражение (12.25);
- вычислить спектральную МД-оценку в требуемом частотном диапазоне, используя выражение (12.24) и алгоритм БПФ. На практике несколько лучше в в вычислительном отношении результаты можно получить, заменяя первые два этапа любой из процедур определения АР-параметров, описанных в гл. 8. Так, например, их можно заменить следующим этапом:
- вычислить АР-коэффициенты с помощью алгоритма Берга.

Использование алгоритма Берга неявно подразумевает, что автокорреляционные функции получают из тёплицевой матрицы. В приложении 12.А приведена подпрограмма MINVAR, предназначенная для вычисления спектральной МД-оценки по набору отсчетов комплексных данных. В этой подпрограмме вместо двух приведенных выше этапов используется алгоритм Берга.

12.6. Приложение к числам солнечных пятен

На рис. 12.3 показана спектральная оценка, вычисленная по значениям СПМ, которые были получены по последовательности фильтрованных солнечных пятен с помощью подпрограммы MINVAR. Использовалось значение порядка $p=32$, сравнения со значениями порядка авторегрессионных спектральных оценок, приведенных в гл. 8. Двум наибольшим пикам соответствуют значения 0,0938 цикла на год (10,67 года на цикл) и 0,1870 цикла на год (5,35 года на цикл).

Литература

[1] *Barnard T. E.* Analytical Studies of Techniques for the Computation of High-Resolution Wavenumber Spectra. Special Report No. 9 prepared by Texas Instruments, Inc. for the Advanced Research Projects Agency under contract F33657-68-C-0867, May 1969.

[2] *Burg J. P.* The Relationship between Maximum Entropy and Maximum Likelihood Spectra. Geophysics, vol. 37, pp. 375—376, April 1972.
[3] *Capon J.* High-Resolution Frequency-Wavenumber Spectrum Analysis. Proc. IEEE, vol. 57, pp. 1408—1418, August 1969. [Имеется русский перевод: *Кейпон Дж.* Пространственно-временной спектральный анализ с высоким разрешением. ТИИЭР, 1969, т. 57, № 8, с. 69—79.]
[4] *Capon J.* Maximum-Likelihood Spectral Estimation. Chapter 5 in Nonlinear Methods of Spectral Analysis, 2nd ed., S. Haykin, ed., Springer-Verlag, New York, 1983.
[5] *Capon J., Goodman N. R.* Probability Distribution for Estimators of the Frequency-Wavenumber Spectrum. Proc. IEEE, vol. 58, pp. 1785—1786, October 1970; исправления см.: vol. 59, p. 112, January 1971. [Имеется русский перевод: *Кейпон Дж., Гудмен Н.* Распределение вероятности оценок пространственно-временно́го спектра. ТИИЭР, 1970, т. 58, № 11, с. 82—84; исправления см.: ТИИЭР, 1971, т. 59, № 1, с. 119.]
[6] *Cox H.* Resolving Power and Sensitivity to Mismatch of Optimum (Line) Array Processors. J. Acoust. Soc. Am., vol. 54, pp. 771—785, 1973.
[7] *Lacoss R. T.* Data Adaptive Spectral Analysis Methods. Geophysics, vol. 36, pp. 661—675, August 1971.
[8] *Lagunas M. A., Gasull A.* Measuring True Spectral Density from ML Filters. Proceedings of the 1984 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, San Diego, Calif., pp. 14.10.1—14.10.4, March 1984.
[9] *Marzetta T. L.* A New Interpretation for Capon's Maximum Likelihood Method of Frequency-Wavenumber Spectral Estimation. IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., vol. ASSP-31, pp. 445—449, April 1983.
[10] *Marzetta T. L., Lang S. W.* New Interpretation for the MLM and DASE Spectral Estimators. Proceedings of the 1983 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Boston, Mass., pp. 844—846, April 1983.
[11] *Marzetta T. L., Lang S. W.* Power Spectral Density Bounds. IEEE Trans. Inform. Theory, vol. IT-30, pp. 117—122, January 1984.
[12] *McDonough R. N.* Application of the Maximum-Likelihood Method and the Maximum-Entropy Method to Array Processing. Chapter 6 in Nonlinear Methods of Spectral Analysis, 2nd ed., S. Haykin, ed., Springer-Verlag, New York, 1983.
[13] *Musicus B.* Fast MLM Power Spectrum Estimation from Uniformly Spaced Correlations. IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., vol. ASSP-33, pp. 1333—1335, October 1985.

Задачи

1. Доказать соотношения (12.20) и (12.25).
2. Доказать, что

$$\frac{1}{P_{\text{АР}}(p, f)} = \frac{1}{P_{\text{МД}}(p, f)} - \frac{1}{P_{\text{МД}}(p-1, f)}.$$

3. Заменить подпрограмму YULEWALKER в программе MINVAR подпрограммой BURG. Вычислить спектральную оценку с помощью модифицированной программы MINVAR, используя для этой цели тест-последовательность данных, приведенную в приложении II. Каким образом сравнить график полученной спектральной оценки с графиком спектральной оценки, приведенным на рис. 12.2? Объяснить имеющиеся различия.
4. Используя аналитическое выражение (12.12) автокорреляционной последовательности для одиночной синусоиды в белом шуме со значениями корреляционного сдвига, изменяющимися от $k=0$ до $k=p$, записать в аналитической форме решение для уравнения (12.8), определяющего коэффициенты

фильтра минимальной дисперсии. Вычертить частотную характеристику этого фильтра для случая $p=10$. Обратить внимание на боковые лепестки. Какую весовую обработку следует применить автокорреляционной последовательности для подавления боковых лепестков?

Приложение 12.А. Программа для вычисления спектральной оценки минимальной дисперсии

Эта подпрограмма реализует алгоритм вычисления спектральной оценки минимальной дисперсии, описанный в разд. 12.5. При обработке тест-последовательности данных, приведенной в приложении II, с помощью подпрограммы MINVAR в случае N=64, IP=15 и T=1,0 с получаются следующие значения спектральной плотности мощности:

```
PSD(1)    =0.170584E—06;    PSD(3000)=0.418217E—02;
PSD(1000)=0.101236E—01;     PSD(4000)=0.128422E—06;
PSD(2000)=0.139269E—02;     PSD(4096)=0.169758E—06.
```

```
      Подпрограмма MINVAR (N,IP,T,X,PSD,ISTAT)
C
C     Предназначена для вычисления спектральной оценки минимальной диспер-
C     сии с помощью процедуры Музикуса. Для оценивания авторегрессионных
C     параметров используется алгоритм Берга.
C
C     Входные параметры:
C
C       N       — число отсчетов данных
C       IP      — размер корреляционной матрицы (порядок АР-модели на
C                 единицу меньше)
C       T       — интервал отсчетов
C       X       — массив отсчетов комплексных данных от X(1) до X(N).
C
C     Выходные параметры:
C
C       PSD     — массив действительных значений спектральной плотности
C                 мощности
C       ISTAT   — указатель состояния
C
C     Примечание:
C
C     Размер .GE. N внешнего массива X и размер .GE. NPSD массива PSD
C     должны указываться в вызывающей программе. Размер внутреннего
C     массива A должен указываться в .GE. IP—1, размеры массивов PSI
C     и W должны указываться в .GE. NPSD. Используемые внешние подпро-
C     граммы: BURG (см. приложение 8.Б), PREFFT и FFT (см. приложе-
C     ние 2.В).
      PARAMETER  NPSD-4096  ! Число значений PSD (должно быть сте-
                              пенью числа 2)
      COMPLEX X(1),A(50),PSI(NPSD),W(NPSD),SUM
      REAL PSD(1)
      M=IP—1
```

```
      CALL BURG (N,M,X,P,A,ISTAT)  ! Вычисление АР-коэффициентов
      IF (ISTAT .NE. 0) RETURN
         DO 10 K=M,1,-1
10       A(K+1)=A(K)
      A(1)=(1.,0.)
      DO 30 K=0,M                  ! Вычисление коэффициентов «пси»
         SUM=(0.,0.)
         MK=M+1-K
C  Вычисление корреляции авторегрессионных параметров
         DO 20 I=0,M-K
20          SUM=SUM+FLOAT(MK-2*I)*CONJG(A(I+1))*A(I+1+K)
                                                        ! (12.25)
         SUM=SUM/P
         IF (K .NE. 0) PSI(NPSD+1-K)=CONJG(SUM)
30       PSI(K+1)=SUM
C  Дополнение нулевыми отсчетами (нулями) остальных членов коэффициен-
C  тов «пси»
      DO 40 K=M+2,NPSD-M
40       PSI(K)=(0.,0.)
      CALL PREFFT (NPSD,0,NEXP,W)
      CALL FFT (NPSD,0,1.,NEXP,W,PSI)  ! Вычисление БПФ знаменателя
C  В этом месте производится обращение членов коэффициентов «пси» для
C  получения значений PSD
      DO 50 K=1,NPSD
50       PSD(K)=T/REAL(PSI(K))                          ! (12.24)
      RETURN
      END
```

Глава 13
МЕТОДЫ ОЦЕНИВАНИЯ ЧАСТОТЫ, ОСНОВАННЫЕ НА АНАЛИЗЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

13.1. Введение

Один из классов спектральных методов, основанный на анализе собственных значений автокорреляционной матрицы или одной из матриц данных, упомянутых в гл. 8, описывается в научной литературе как класс методов, обеспечивающих лучшие характеристики разрешения и оценивания частоты, чем авторегрессионный метод и метод Прони, особенно при низких отношениях сигнал/шум, когда эти методы не в состоянии разрешить близкие по частоте синусоиды или другие узкополосные спектральные компоненты. Выше, в разд. 11.9, уже приводился ряд аргументов, подтверждающих подобное мнение: в этом разделе описывалось использование метода разложения по сингулярным числам (РСЧ), что позволяло получать более точные оценки частоты и коэффициента затухания для процесса, состоящего из смеси двух затухающих экспонент и аддитивного шума. Причины улучшения характеристик методов, основанных на анализе собственных значений, рассмотрены в данной главе. Ключевой операцией в этих методах является разделение информации, содержащейся в автокорреляционной матрице или матрице данных, на два векторных подпространства — подпространство сигнала и подпространство шума.

В указанных подпространствах можно определять различные функции от векторов сигнала и шума для получения *оценок частоты*, графическое представление которых имеет острые пики на частотах синусоид или других узкополосных спектральных компонент. Однако эти оценки не являются оценками истинной СПМ, поскольку они не сохраняют мощность анализируемого процесса, а их обратное преобразование Фурье не позволяет восстановить исходную автокорреляционную последовательность. К классу методов оценивания частоты, основанных на анализе собственных значений соответствующих матриц, принадлежат алгоритмы гармонического разложения Писаренко (ГРП) и классификации множественных сигналов (MUSIC — *multiple signal classification*).

13.2. Краткая сводка результатов

На рис. 13.1 перечислены этапы обработки сигнала, требуемые для вычисления частотных оценок двух типов, получаемых с помощью алгоритма MUSIC и алгоритма EV, машинная програм-

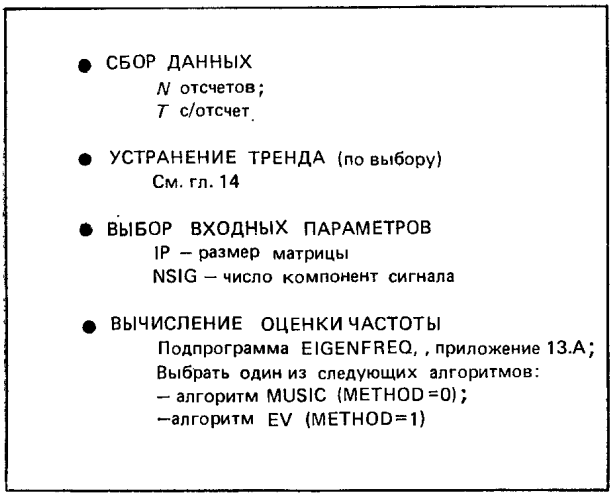


Рис. 13.1. Краткая запись процедуры получения двух спектральных оценок, основанных на методе анализа собственных значений. (EV — *eigenvector*.)

ма реализации которых приведена в приложении 13.A. Графики этих оценок для 64-точечной тест-последовательности данных приведены соответственно на рис. 13.2 и 13.3. В качестве входных данных в обоих алгоритмах используются автокорреляционная матрица размера IP и оценка числа компонент сигнала NSIG. Заметим, что NSIG$<$IP. Оценки, приведенные на этих рисунках, иллюстрируют предельные возможности названных методов, которые предназначены для получения спектральных оценок процессов, состоящих из смеси узкополосных сигналов и аддитивного шума. Заметим также, что окрашенный шум, содержащийся в тест-последовательности, ухудшает характеристики оценок, получаемых с помощью этих методов, поскольку они не предназначены для работы в подобных случаях. Метод гармонического разложения Писаренко кратко описан в разд. 13.6.

13.3. Анализ собственных значений автокорреляционной матрицы для случая синусоид в белом шуме

В гл. 4 было показано, что автокорреляционная последовательность (АКП) для стационарного в широком смысле процесса, состоящего из M *комплексных* синусоид со случайными фазами и аддитивного комплексного белого шума, описывается как

$$r_{xx}[k]=\sum_{i=1}^{M} P_i \exp(j2\pi f_i kT)+\rho_w\delta[k], \qquad (13.1)$$

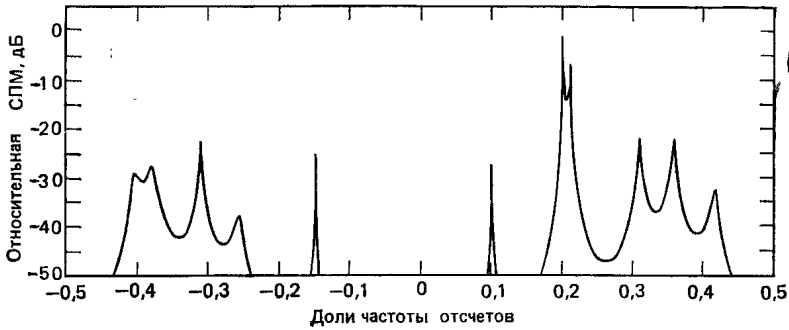


Рис. 13.2. Оценка частоты для 64-точечной тест-последовательности, полученная методом анализа собственных векторов (СВ) в случае, когда матрица данных имеет порядок IP=15 и параметр NSIG=11 (4 собственных вектора подпространства шума).

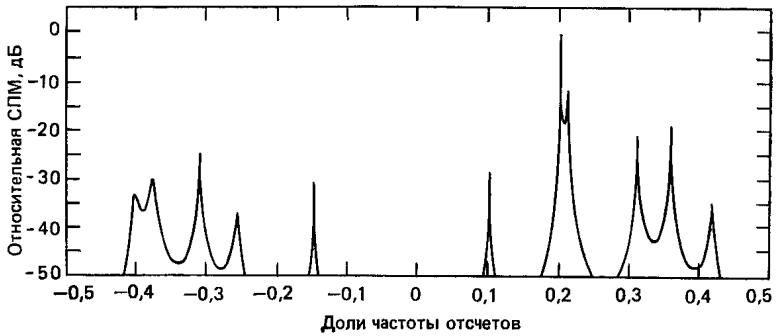


Рис. 13.3. Оценка частоты для 64-точечной тест-последовательности, полученная методом классификации множественных сигналов (MUSIC) в случае, когда матрица данных имеет порядок IP=15 и параметр NSIG=11 (4 собственных вектора подпространства шума).

где P_i — мощность i-й синусоиды, а ρ_w — дисперсия белого шума. Если процесс состоит из M *действительных* синусоид и аддитивного действительного белого шума, то АКП описывается выражением

$$r_{xx}[k] = \sum_{i=1}^{M} P_i \cos(2\pi f_i kT) + \rho_w \delta[k] = \\ = \sum_{i=1}^{M} \frac{P_i}{2} [\exp(j2\pi f_i kT) + \exp(-j2\pi f_i kT)] + \rho_w \delta[k]. \tag{13.2}$$

Тёплицева автокорреляционная $(p+1)\times(p+1)$-матрица

$$\mathbf{R}_p = \begin{pmatrix} r_{xx}[0] & \cdots & r_{xx}^*[p] \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{xx}[p] & \cdots & r_{xx}[0] \end{pmatrix} \tag{13.3}$$

в случае комплексных синусоид в белом шуме имеет следующую структуру:

$$\mathbf{R}_p = \sum_{i=1}^{M} P_i \mathbf{s}_i \mathbf{s}_i^H + \rho_w \mathbf{I}, \tag{13.4}$$

где $\mathbf{I}$ — единичная $(p+1)\times(p+1)$-матрица, а

$$\mathbf{s}_i = \begin{pmatrix} 1 \\ \exp(j2\pi f_i T) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \exp(j2\pi f_i pT) \end{pmatrix} \tag{13.5}$$

— вектор сигнала размерности $p+1$, несущий информацию о частоте i-й синусоиды. Матрицу $\mathbf{R}_p$ можно представить как сумму автокорреляционной матрицы сигнала $\mathbf{S}_p$ и автокорреляционной матрицы шума $\mathbf{W}_p$:

$$\mathbf{R}_p = \mathbf{S}_p + \mathbf{W}_p, \tag{13.6}$$

где

$$\mathbf{S}_p = \sum_{i=1}^{M} P_i \mathbf{s}_i \mathbf{s}_i^H, \tag{13.7}$$

$$\mathbf{W}_p = \rho_w \mathbf{I} \tag{13.8}$$

— $(p+1)\times(p+1)$-матрицы. Если порядок автокорреляционной матрицы $\mathbf{R}_p$ больше числа комплексных синусоид (т. е. $p>M$), то матрица сигнала $\mathbf{S}_p$ будет иметь ранг M (так как каждое внешнее произведение векторов $\mathbf{s}_i\mathbf{s}_i^H$ — это матрица ранга 1). Матрица шума будет иметь полный ранг $p+1$.

Аналогичным образом можно показать, что в случае M действительных синусоид в белом шуме автокорреляционная матрица p-го порядка имеет следующую структуру:

$$\mathbf{R}_p = \sum_{i=1}^{M} \frac{P_i}{2} [\mathbf{s}_i \mathbf{s}_i^H + \mathbf{s}_i^* \mathbf{s}_i^T] + \rho_w \mathbf{I}. \tag{13.9}$$

Матрица сигнала $\mathbf{S}_p$ в этом случае будет иметь ранг $2M$. Заметим, что, начиная с этого момента, основное внимание будет уделено комплексному случаю; действительный случай получается из комплексного простым изменением ранга матрицы сигнала от значения M к значению $2M$.

Матрица сигнала будет иметь следующее разложение по собственным значениям:

$$\mathbf{S}_p = \sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H, \tag{13.10}$$

где собственные значения упорядочены по степени их убывания, т. е. $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 > \ldots \lambda_{p+1}$, а собственные векторы ортонормальны ($\mathbf{v}_i^H \mathbf{v}_j = 0$, если $i \neq j$, и 1, если $i = j$). Можно показать [10], что матрица размерности $p+1$, обладающая рангом $M < p+1$, будет иметь $p-M+1$ нулевых собственных значений. Тогда разложение (13.10) можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{S}_p = \sum_{i=1}^{M} \lambda_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H. \tag{13.11}$$

На собственные векторы $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_M$, называемые *главными собственными векторами*, натянута та же область *подпространства сигнала*, что и на векторы сигнала $\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_M$. Это означает, что любой главный собственный вектор должен быть представим в виде некоторой линейной комбинации векторов сигнала

$$\mathbf{v}_i = \sum_{k=1}^{M} \beta_{ik} \mathbf{s}_k, \tag{13.12}$$

$1 \leqslant i \leqslant M$. Для того чтобы этот вектор был собственным вектором матрицы $\mathbf{S}_p$, должно выполняться условие

$$\mathbf{S}_p \mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i. \tag{13.13}$$

Подставляя (13.7) в (13.13), получаем

$$\sum_{k=1}^{M} P_k \mathbf{s}_k \mathbf{s}_k^H \mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i \tag{13.14}$$

или

$$\mathbf{v}_i = \sum_{k=1}^{M} \left(\frac{P_k}{\lambda_i} \mathbf{s}_k^H \mathbf{v}_i \right) \mathbf{s}_k, \tag{13.15}$$

где $1 \leqslant i \leqslant M$, а это означает, что

$$\beta_{ik} = \frac{P_k}{\lambda_i} \mathbf{s}_k^H \mathbf{v}_i. \tag{13.16}$$

Заметим, что в случае $M = 1$ будем иметь $\lambda_1 = pP$ и $\mathbf{v}_1 = \mathbf{s}_1 / \sqrt{p}$.

Одно из представлений единичной матрицы, записанное через ортонормальные собственные векторы, имеет вид

$$\mathbf{I} = \sum_{i=1}^{p+1} \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H. \tag{13.17}$$

Подставляя (13.11) и (13.17) в (13.6), получаем разложение автокорреляционной матрицы по собственным значениям:

$$\mathbf{R}_p = \sum_{i=1}^{M} \lambda_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H + \rho_w \sum_{i=1}^{p+1} \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H = \sum_{i=1}^{M} (\lambda_i + \rho_w) \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H + \sum_{i=M+1}^{p+1} \rho_w \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H. \tag{13.18}$$

Следовательно, на собственные векторы $\mathbf{v}_{M+1}, \ldots, \mathbf{v}_{p+1}$ натянуто подпространство шума матрицы $\mathbf{R}_p$, и всем им соответствует одно и то же собственное значение ρ_w. На главные собственные векторы $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_M$ натянуто подпространство сигнала матрицы $\mathbf{R}_p$ и матрицы $\mathbf{S}_p$, и им соответствуют собственные значения $\lambda_1 + \rho_w, \ldots, \lambda_M + \rho_w$. Заметим, что эти собственные значения главных собственных векторов составлены *как из мощности сигнала, так и из мощности шума*, поэтому белый шум будет обязательно влиять на *веса*, формируемые собственными значениями собственных векторов, соответствующих свободному от шума подпространству сигнала.

Разложение (13.18) автокорреляционной матрицы на собственные значения можно двумя способами использовать для получения спектральных оценок или, точнее говоря, улучшенных процедур оценок частоты. *Сохранение одной лишь информации, ссответствующей собственным векторам подпространства сигнала, т. е., иными словами, формирование для матриц* $\mathbf{R}_p$ *аппроксимации пониженного ранга, эффективно способствует увеличению отношения сигнал/шум*, поскольку устраняет вклад мощности компонент подпространства шума. Этот факт лежит в основе процедур оценок частоты главных компонент (подпространства сигнала), обсуждаемых в разд. 13.5. Заметим, что собственные векторы ортогональны и что на главные собственные векторы натянуто то же подпространство, что и на векторы сигнала, а, следовательно, *векторы сигнала ортогональны всем векторам в подпространстве шума*, включая любую их линейную комбинацию, т. е.

$$\mathbf{s}_i^H \left(\sum_{k=M+1}^{p+1} \alpha_k \mathbf{v}_k \right) = 0, \tag{13.19}$$

где $1 \leqslant i \leqslant M$ (или $2M$ в случае M действительных синусоид). Это свойство положено в основу процедур *оценок частоты в подпространстве шума*, которые обсуждаются в разд. 13.6.

В частном случае $p=M$ (или $p=2M$ в случае M действительных синусоид) подпространство шума будет иметь только один собственный вектор $\mathbf{v}_{p+1}$ с собственным значением ρ_w. Этому собственному вектору будут ортогональны M векторов сигнала

$$\mathbf{s}_i^H \mathbf{v}_{p+1} = \sum_{k=1}^{M+1} v_{p+1}[k] \exp(-j2\pi f_i k T) = 0, \qquad (13.20)$$

где $1 \leqslant i \leqslant M$. Следовательно, корни полинома

$$\sum_{k=0}^{M} v_{p+1}[k+1] z^{-k} \qquad (13.21)$$

будут лежать на единичной окружности в точках, которым соответствуют центральные углы $2\pi f_i T$, где $1 \leqslant i \leqslant M$. Эта концепция лежит в основе метода гармонического разложения Писаренко (ГРП), обсуждаемого в разд. 13.6.

13.4. Анализ собственных значений матрицы данных для случая экспонент в шуме

Автокорреляционная последовательность, как правило, не известна, поэтому свойства автокорреляционных матриц, описанные в разд. 13.3, представляют скорее теоретический, чем практический интерес. Однако идеи, изложенные в этом разделе, можно обобщить на ковариационные и модифицированные ковариационные матрицы данных, которые используются в экспоненциальных методах оценивания, основанных на методе Прони (см. гл. 11). В этом разделе будет показано, что свойства разложения матриц данных на собственные значения аналогичны свойствам подобного разложения для автокорреляционной матрицы. На главные собственные векторы матрицы данных в основном натянуто подпространство сигнала, а сингулярные числа, соответствующие этим главным собственным векторам, чаще всего имеют значения, превосходящие значения сингулярных чисел, соответствующих подпространству шума. Следовательно, сингулярные числа, определяемые в результате применения к матрице данных процедуры РСЧ, будут составлять основу, необходимую для разделения собственных векторов на векторы, наиболее вероятно принадлежащие подпространству сигнала и подпространству шума.

Метод Прони был введен в гл. 11 как метод, предназначенный для оценивания параметров некоторой *затухающей экспоненциальной модели*, используемой для аппроксимации заданной последовательности отсчетов данных. Центральным моментом для этого метода является решение некоторой системы линейных

уравнений, содержащей подобное автокорреляционной матрице произведение $\mathbf{T}_p^H\mathbf{T}_p$, где

$$\mathbf{T}_p=\begin{pmatrix} x[p+1] & \dots & x[1] \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x[N] & \dots & x[N-p] \end{pmatrix} \tag{13.22}$$

— матрица данных порядка p, используемая в ковариационном методе линейного предсказания. В модифицированном методе Прони, который представляет собой один из вариантов метода Прони для случая *незатухающей* синусоидальной модели, используется модифицированная ковариационная матрица данных вида

$$\begin{pmatrix} \mathbf{T}_p \\ \mathbf{T}_p^*\mathbf{J} \end{pmatrix}. \tag{13.23}$$

Последующее обсуждение будет в основном касаться матрицы $\mathbf{T}_p$, однако выводы будут также справедливы и для модифицированной ковариационной матрицы данных.

Рассмотрим свободную от шума последовательность комплексных экспоненциальных сигналов

$$x[n]=\sum_{k=1}^{M} h_k z_k^n, \tag{13.24}$$

где $z_k=\exp([\alpha_k+j2\pi f_k]T)$, а $h_k=A_k\exp(j\varphi_k)$. Заметим, что в качестве приемлемых сигналов в данном случае допустимы и затухающие экспоненты. Сформированная из этой последовательности $x[n]$ матрица $\mathbf{T}_p$ вида (13.22) будет иметь ранг M до тех пор, пока выбранное значение порядка p будет лежать в интервале $M\leqslant p\leqslant N-M$ (для модифицированной ковариационной матрицы — в интервале $M\leqslant p\leqslant[N-M]/2$). Матрицу данных $\mathbf{T}_p$ можно записать в виде следующего разложения на множители [7]:

$$\mathbf{T}_p=\mathbf{BC}, \tag{13.25}$$

где $(N-p)\times M$-матрица $\mathbf{B}$ и $(M\times p)$-матрица $\mathbf{C}$ определяются выражениями

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} h_1z_1^p & \dots & h_Mz_M^p \\ h_1z_1^{p+1} & \dots & h_Mz_M^{p+1} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ h_1z_1^N & \dots & h_Mz_M^N \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}=\begin{pmatrix} 1 & z_1^{-1} & \dots & z^{-(p-1)} \\ 1 & z_2^{-1} & \dots & z_2^{-(p-1)} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 1 & z_M^{-1} & \dots & z_M^{-(p-1)} \end{pmatrix}. \tag{13.26}$$

Используя разложение (13.25), получаем далее

$$\mathbf{T}_p^H\mathbf{T}_p=\mathbf{C}^H\mathbf{B}^H\mathbf{B}\mathbf{C}. \tag{13.27}$$

Соответствующая матрица $\mathbf{B}^H\mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{C}^H$ размера $M\times M$ является положительно определенной, поскольку матрицы $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ обе имеют полный ранг M. Если λ_i, $1\leqslant i\leqslant M$,— собственные значения, а $\mathbf{w}_i$, $1\leqslant i\leqslant M$,— собственные векторы, то

$$(\mathbf{B}^H\mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{C}^H)\,\mathbf{w}_i=\lambda_i\mathbf{w}_i, \tag{13.28}$$

где $1\leqslant i\leqslant M$. Умножая слева обе стороны выражения (13.28) на матрицу $\mathbf{C}^H$, получаем

$$\mathbf{C}^H\mathbf{B}^H\mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{C}^H\mathbf{w}_i=\lambda_i\mathbf{C}^H\mathbf{w}_i. \tag{13.29}$$

Вводя обозначение

$$\mathbf{v}_i=\mathbf{C}^H\mathbf{w}_i \tag{13.30}$$

и подставляя (13.30) в (13.29), окончательно получаем

$$\mathbf{T}_p^H\mathbf{T}_p\mathbf{v}_i=\lambda_i\mathbf{v}_i, \tag{13.31}$$

где $1\leqslant i\leqslant M$. Таким образом, M ненулевых собственных значений матрицы $\mathbf{T}_p{}^H\mathbf{T}_p$ размером $p\times p$ идентичны собственным значениям матрицы $\mathbf{B}^H\mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{C}^H$. Остальные p—M собственных значений матрицы $\mathbf{T}_p{}^H\mathbf{T}_p$ равны нулю, поскольку эта матрица имеет ранг M. Собственные векторы, соответствующие ненулевым собственным значениям, определяются выражением (13.30). Следовательно, любой главный собственный вектор матрицы $\mathbf{T}_p{}^H\mathbf{T}_p$ будет представлять собой некоторую линейную комбинацию из столбцов матрицы $\mathbf{C}$, которая составлена из векторов сигнала, о чем свидетельствует выражение (13.26). Можно также показать, что любой главный собственный вектор матрицы $\mathbf{T}_p{}^H\mathbf{T}_p$ представляет собой некоторую линейную комбинацию из столбцов матрицы $\mathbf{B}$, которая также составлена из векторов сигнала. Матрица $\mathbf{T}_p$ будет иметь M ненулевых сингулярных чисел, которые просто равны корням квадратным из собственных значений. Собственные векторы, соответствующие нулевым собственным значениям матрицы $\mathbf{T}_p{}^H\mathbf{T}_p$ или $\mathbf{T}_p\mathbf{T}_p{}^H$ ортогональны M собственным (или главным) векторам подпространства сигнала, связанным с ненулевыми собственными значениями в пространстве сигнала.

Если данные содержат шум, описанные свойства будут справедливы не точно, а приближенно. Следовательно, M главных сингулярных чисел матрицы $\mathbf{T}_p$, составленной из зашумленных отсчетов, чаще всего будут иметь значения, превосходящие значения p—M наименьших сингулярных чисел (которые точно равны нулю в случае отсутствия шума). Поэтому M собственных векторов, соответствующих M главным собственным значениям либо матрицы $\mathbf{T}^H\mathbf{T}_p$, либо матрицы $\mathbf{T}_p\mathbf{T}_p{}^H$, будут содержать меньшие вклады шума, чем собственные векторы подпространства

шума, соответствующие p—M наименьшим сингулярным числам. Эти выводы отчасти подтверждаются и результатами анализа, выполненного в разд. 13.3.

13.5. Процедуры оценки частоты в подпространстве сигнала

Выше было показано, что сохранение собственных (или главных) векторов подпространства сигнала эффективно увеличивает отношение сигнал/шум для процессов, состоящих из смеси экспонент и аддитивного белого шума, за счет устранения основной доли вклада шума в автокорреляционную матрицу или матрицу данных. Используя любую из оценок СПМ, описанных в гл. 5—12, можно построить один из классов процедур оценки частоты в подпространстве сигнала, просто заменяя автокорреляционную матрицу или матрицу данных их аппроксимациями пониженного ранга, записываемыми через главные собственные векторы.

Рассмотрим коррелограммную оценку СПМ, оценку СПМ минимальной дисперсии (МД) и авторегрессионную (АР) оценку СПМ Юла — Уолкера. В коррелограммном методе и МД-методе известная или оцененная автокорреляционная матрица $\mathbf{R}_p$ используется для определения спектральных оценок вида

$$P_{\text{КОРР}}(f) = T\mathbf{e}^H(f)\,\mathbf{R}_p\mathbf{e}(f), \tag{13.32}$$

$$P_{\text{МД}}(f) = T\left[\mathbf{e}^H(f)\,\mathbf{R}_p^{-1}\mathbf{e}(f)\right]^{-1}, \tag{13.33}$$

тогда как в АР-методе автокорреляционная матрица используется для получения АР-параметров

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{a}_p \end{pmatrix} = \mathbf{R}_p^{-1}\begin{pmatrix} \rho_p \\ \mathbf{0}_p \end{pmatrix}, \tag{13.34}$$

где векторы и матрицы определяются следующими выражениями:

$$\mathbf{R}_p = \begin{bmatrix} r_{xx}[0] & \cdots & r_{xx}^*[p] \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{xx}[p] & \cdots & r_{xx}[0] \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{e}(f) = \begin{bmatrix} 1 \\ \exp(j2\pi fT) \\ \vdots \\ \exp(j2\pi fpT) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_p = \begin{bmatrix} a[1] \\ a[2] \\ \vdots \\ a[p] \end{bmatrix}. \tag{13.35}$$

Если

$$\mathbf{R}_p = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^H \tag{13.36}$$

— ортонормальное разложение матрицы $\mathbf{R}_p$ по собственным значениям, величины которых упорядочены по степени их убывания, т. е. $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots > \lambda_p$, и должны оцениваться M главных компонент ($M \leqslant p$), то аппроксимации пониженного порядка для матриц $\mathbf{R}_p$ и $\mathbf{R}_p^{-1}$, записанные через главные собственные векторы, будут иметь следующий вид:

$$\hat{\mathbf{R}}_p = \sum_{k=1}^{M} \lambda_k \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^H, \quad \hat{\mathbf{R}}_p^{-1} = \sum_{k=1}^{M} \frac{1}{\lambda_k} \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^H, \tag{13.37}$$

и могут использоваться вместо матриц $\mathbf{R}_p$ и $\mathbf{R}_p^{-1}$ в выражениях (13.32)—(13.34) для вычисления спектральных оценок с пониженным содержанием шума благодаря устранению собственных векторов подпространства шума. Впервые подход на основе подпространства сигнала, или главных компонент, был применен Оусли [11, 12] при получении классических коррелограммных оценок для устройства формирования луча линейной антенной решетки — эквивалента пространственно-временных оценок. Джонсон [4], а затем Оусли [13] предложили использовать этот подход и для улучшения характеристик МД-метода.

Алгоритмы линейного предсказания, рассмотренные в гл. 8 и 11, основаны на использовании подобных автокорреляционным матрицам произведений вида $\mathbf{T}_p^H \mathbf{T}_p$, где матрица $\mathbf{T}_p$ описывается, например, выражением (13.22). Собственные векторы и собственные значения матрицы $\mathbf{T}_p^H \mathbf{T}_p$ определяются посредством применения процедуры РСЧ к прямоугольной тёплицевой матрице данных $\mathbf{T}_p$, описываемой выражением (3.96). Сингулярные числа будут равны положительным значениям квадратных корней из собственных значений матрицы $\mathbf{T}_p^H \mathbf{T}_p$. Одна из аппроксимаций пониженного ранга для матрицы $\mathbf{T}_p$ может быть получена посредством устранения собственных векторов, соответствующих малым сингулярным числам, и сохранения одних лишь главных собственных векторов и связанных с ними сингулярных чисел. Одно из применений этого подхода было показано для метода Прони (см. разд. 11.9), а Тафтс и Кумаресан [20] предложили использовать его для оценивания частоты. В проведенных экспериментах они обнаружили, что ковариационная матрица данных $\mathbf{T}_p$ лучше всего подходит для получения оценок в случае затухающих экспонент в шуме, а модифицированная ковариационная матрица данных, описываемая выражением (13.23), лучше всего подходит для получения оценок в случае незатухающих синусоид в шуме [6]. Однако ничего удивительного в этом нет, поскольку использование модифицированной ковариационной матрицы данных составляет также одну из главных особенностей модифицированного метода Прони, применяемого для оценивания синусоид. Рисунок 13.4 иллюстрирует улучшение эффективного

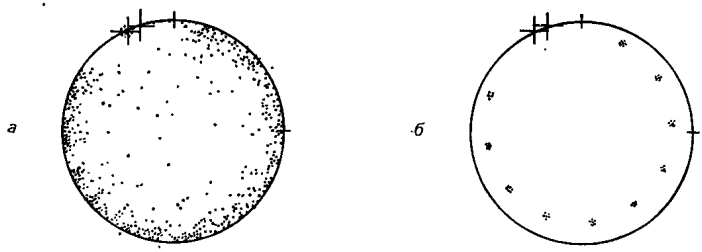


Рис. 13.4. Расположение нулей при использовании модифицированного ковариационного метода в случае 50 независимых наборов данных, содержащих по 25 отсчетов каждый. Комплексные синусоиды имели относительные частоты 0,32 и 0,3 и наблюдались на фоне белого шума при отношении сигнал/шум, равном 10 дБ: *а* — матрица данных, имеющая порядок $p=12$; *б* — разложение этой матрицы по сингулярным числам (РСЧ) с использованием двух главных собственных векторов.

отношения сигнал/шум при использовании модифицированной ковариационной матрицы данных пониженного порядка применительно к 25 отсчетам двухкомпонентного комплексного синусоидального процесса:

$$x[n]=\exp(j2\pi[0{,}32]n+\pi/4)+\exp(j2\pi[0{,}3]n)+w[n] \tag{13.38}$$

где $0\leqslant n\leqslant 24$, характеризуемого отношением сигнал/шум, равным 10 дБ. Тафтс и Кумаресан показали, что этот подход обеспечивает характеристики, близкие к характеристикам метода максимального правдоподобия, и позволяет разрешать пары близких по частоте синусоид при малых отношениях сигнал/шум, когда методы линейного предсказания не в состоянии точно разрешить две близких частоты.

13.6. Оценки частоты в подпространстве шума

Все оценки этого класса основаны на использовании того факта, что собственные векторы автокорреляционной матрицы или матрицы данных, соответствующие подпространству шума, ортогональны собственным векторам сигнала или любой линейной комбинации этих векторов. На практике наибольший интерес представляют матрицы, используемые в ковариационном и модифицированном ковариационном методах линейного предсказания, которые обсуждались в гл. 8.

13.6.1. Метод гармонического разложения Писаренко

Метод гармонического разложения Писаренко (ГРП) относится к числу самых первых процедур спектрального оценивания, основанных на анализе собственных значений [14]. В этом методе

предполагается, что анализируемый процесс состоит из смеси M комплексных синусоид и аддитивного комплексного белого шума, а для оценки частот синусоид, их мощности и дисперсии белого шума используется *известная автокорреляционная последовательность* от $r_{xx}[0]$ до $r_{xx}[M]$. Если анализируемый процесс состоит из смеси M действительных синусоид и аддитивного действительного белого шума, то АКП должна быть известна для корреляционных сдвигов от 0 до $2M$. В разд. 13.3 было показано, что в комплексном случае автокорреляционная матрица $\mathbf{R}_{M+1}$, сформированная из АКП, будет иметь в подпространстве шума только один собственный вектор $\mathbf{v}_{M+1}$ и одно связанное с ним собственное значение ρ_w, соответствующее дисперсии белого шума. Это собственное значение является также минимальным собственным значением матрицы $\mathbf{R}_{M+1}$, что может быть записано в следующем виде:

$$\mathbf{R}_{M+1}\mathbf{v}_{M+1} = \rho_w \mathbf{v}_{M+1}. \tag{13.39}$$

Если матрица $\mathbf{R}_{M+1}$ задана, то с помощью подпрограммы MINEIGVAL, приведенной в гл. 3, можно определить это минимальное собственное значение (дисперсию шума) и соответствующий ему собственный вектор. Алгоритм, реализуемый данной подпрограммой, учитывает комплексно-сопряженную симметрию собственного вектора. После определения этого вектора часто́ты синусоид находятся посредством факторизации полинома фильтра (13.21), соответствующего полученному собственному вектору. При этом гарантируется, что корни указанного полинома будут лежать на единичной окружности.

После выполнения процедуры факторизации полинома и определения частот синусоид можно далее, используя автокорреляционную последовательность $r_{xx}[1], \ldots, r_{xx}[M]$ и выражение (13.1), определить мощности этих синусоид [9]. Процедура вычислений основана на использовании матричного уравнения

$$\begin{bmatrix} \exp(j2\pi f_1 T) & \exp(j2\pi f_2 T) & \ldots & \exp(j2\pi f_M T) \\ \exp(j2\pi f_1 2T) & \exp(j2\pi f_2 2T) & \ldots & \exp(j2\pi f_M 2T) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \exp(j2\pi f_1 MT) & \exp(j2\pi f_2 MT) & \ldots & \exp(j2\pi f_M MT) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_M \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} r_{xx}[1] \\ r_{xx}[2] \\ \vdots \\ r_{xx}[M] \end{bmatrix}, \tag{13.40}$$

которое можно решить относительно вектора неизвестных мощностей синусоид $P_1, \ldots, P_M$ с помощью любой стандартной программы, предназначенной для решения комплексных линейных уравнений. На практике значения АКП должны оцениваться по отсчетам данных. К числу трудных относится и задача определения значения порядка (т. е. числа синусоид) M, которое должно использоваться в методе ГРП. В тех случаях, когда значение порядка превышает число синусоид, собственные значения, соответствующие дисперсии шума, должны, как это следует из теории, повторяться [см. выражение (13.18)], поэтому проверка наличия повторяющихся собственных значений у автокорреляционных матриц очень больших порядков могла бы, по-видимому, стать одним из методов выбора порядка. Однако использование на практике оцененных автокорреляционных последовательностей обычно не приводит к появлению повторяющихся собственных значений. Следовательно, характеристики оценок, получаемых с помощью метода ГРП, в случае коротких последовательностей данных будут, как правило, ухудшаться. Ряд статистических свойств таких оценок описан в работе [25].

Адаптивный вариант метода Писаренко для слежения за узкополосными сигналами в широкополосном шуме был предложен Томпсоном [19], а характеристики этого метода были тщательно исследованы Ларимором [8]. В его основе лежит последовательно-временной алгоритм реализации метода ГРП, который, в отличие от описанного выше алгоритма блочной реализации этого метода, осуществляет обновление оценки собственного вектора (связанного с минимальным собственным значением) по мере поступления очередного отсчета данных. Этот алгоритм представляет собой один из вариантов алгоритма наименьших средних квадратов, реализуемого с помощью процедуры условного (т. е. с наложенными ограничениями) градиентного поиска, описанной в гл. 9:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'[k+1] &= \mathbf{v}[k] - 2\mu e_k[k+1]\,\mathbf{x}[k], \\ \mathbf{v}[k+1] &= \frac{\mathbf{v}'[k+1]}{(\mathbf{v}'[k+1])^H(\mathbf{v}'[k+1])}, \\ e_k[k+1] &= x[k+1] + \sum_{n=1}^{M} v[n]\,x[k+1-n]. \end{aligned} \tag{13.41}$$

Когда алгоритм сходится, вектор $\mathbf{v}$ оказывается вектором единичной нормы в подпространстве порядка $p=2M$, связанным с минимальным собственным значением. Опыт работы с этим рекурсивным по времени алгоритмом показал, что его сходимость может быть немонотонной и что для выделения спектральных линий необходимо применять длинные окна данных.

13.6.2. Функции оценок частоты

Ряд функций оценок частоты, полученных в подпространстве шума, позволяет получать спектроподобные графики с острыми пиками. Согласно теории, p—M собственных векторов подпространства шума $\mathbf{v}_{M+1}, \ldots, \mathbf{v}_p$ автокорреляционной матрицы, ковариационной матрицы данных или модифицированной ковариационной матрицы данных из p полных собственных векторов и M главных собственных векторов будут ортогональны векторам синусоидальных сигналов, поэтому линейная комбинация с произвольными весовыми коэффициентами α_k, такая, что

$$\sum_{k=M+1}^{p} \alpha_k |\, \mathbf{e}^H(f)\, \mathbf{v}_k \,|^2 = \mathbf{e}^H(f) \left(\sum_{k=M+1}^{p} \alpha_k \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^H \right) \mathbf{e}(f), \qquad (13.42)$$

где

$$\mathbf{e}(f) = \begin{pmatrix} 1 \\ \exp(j2\pi fT) \\ \vdots \\ \exp(j2\pi fMT) \end{pmatrix} \qquad (13.43)$$

— вектор комплексных синусоид, будет равна нулю, если $\mathbf{e}(f_i) = \mathbf{s}_i$, т. е. является одним из векторов синусоидальных сигналов. Это означает, что теоретически функция оценки частоты вида

$$\frac{1}{\sum_{k=M+1}^{p} \alpha_k |\, \mathbf{e}^H(f)\, \mathbf{v}_k \,|^2} \qquad (13.44)$$

будет иметь бесконечное значение на частоте $f = f_i$, т. е. на частоте одного из синусоидальных сигналов. На практике из-за ошибок оценивания функция (13.44) будет иметь конечные значения, но очень острые пики на частотах синусоид у нее сохранятся. Оценки частоты вида (13.44) — это, конечно, не оценки истинной СПМ, а всего лишь спектральные псевдооценки, полезные при оценивании частот синусоидальных или узкополосных спектральных компонент, которые обладают разрешением, несколько превосходящим разрешение авторегрессионных методов спектрального оценивания.

В литературе предложено еще два частных вида частотных оценок. Полагая $\alpha_k = 1$ при всех k, приходим к оценке частоты, получаемой с помощью алгоритма «классификации множествен-

ных сигналов» (multiple signal classification, MUSIC) [16, 17],

$$P_{\text{MUSIC}}(f) = \frac{1}{\mathbf{e}^H(f)\left(\sum_{k=M+1}^{p} \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^H\right)\mathbf{e}(f)}, \tag{13.45}$$

основанной на строгом использовании собственных векторов подпространства шума с равномерной весовой обработкой. Полагая теперь $\alpha_k = 1/\lambda_k$, приходим к оценке частоты, получаемой с помощью алгоритма «собственный вектор» (eigenvector, EV) [3],

$$P_{\text{EV}}(f) = \frac{1}{\mathbf{e}^H(f)\left(\sum_{k=M+1}^{p} \frac{1}{\lambda_k} \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^H\right)\mathbf{e}(f)}, \tag{13.46}$$

в которой вес каждого собственного вектора подпространства шума берется равным величине, обратной собственному значению, соответствующему этому вектору.

В работе [4] отмечалось, что при заданном значении порядка p метод EV порождает меньше, чем метод MUSIC, ложных спектральных пиков благодаря использованию в нем весов, равных обратным величинам собственных значений. В этой работе утверждается также, что метод EV, как правило, лучше передает форму спектра шума, чем метод MUSIC. Предельные характеристики любой оценки частоты будут, конечно, зависеть от того, насколько хорошо осуществлено разбиение на подпространства сигнала и шума. Основное средство для принятия решения о том, как разбить собственные векторы на два подпространства,— это анализ относительных величин собственных значений (сингулярных чисел) разложения автокорреляционной матрицы (матрицы данных) по сингулярным значениям (числам). Анализ зависимости асимптотических характеристик оценок частоты, получаемых с помощью этих алгоритмов, от величины отношения сигнал/шум, значения порядка и частотного разрешения выполнен в работах [5, 21, 18]. Чувствительность этих методов к окрашенному (т. е. небелому) шуму пока еще количественно не оценена. Тем не менее можно указать важную для практики фундаментальную проблему: насколько хорошо можно разделить собственные значения, соответствующие сигналу и шуму, используя для этой цели только одни собственные значения, соответствующие шуму?

В приложении 13.А помещена подпрограмма EIGENFREQ, предназначенная для вычисления оценок частоты по модифицированной ковариационной матрице данных с помощью методов MUSIC и EV (по выбору). Интересные приложения этих методов для пространственной обработки сигналов описаны в работах [1, 2].

13.7. Выбор порядка

Простая идея разделения собственных векторов на подпространства сигнала и шума, основанная на анализе либо собственных значений автокорреляционной матрицы, либо сингулярных чисел матрицы данных, не дает хороших результатов на практике, особенно в случае коротких записей данных. В работе [22] информационный критерий Акаике (ИКА), описанный выше в гл. 8, был обобщен применительно к задаче разделения подпространств. Пусть $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_p$ — собственные значения выборочной автокорреляционной матрицы $\hat{\boldsymbol{R}}_p$ и пусть $m < p$, где m — число синусоидальных сигналов, и N — число отсчетов данных. Тогда

$$\text{ИКА}[m] = (p-m)\ln\left(\frac{\dfrac{1}{p-m}\displaystyle\sum_{i=m+1}^{p}\lambda_i}{\displaystyle\prod_{i=m+1}^{p}\lambda_i^{-(p-m)}}\right) + m(2p-m). \quad (13.47)$$

Число синусоид в подпространстве сигнала зависит от минимального значения ИКА$[m]$. В работе [22] сообщаются также некоторые предварительные результаты, полученные при использовании критерия вида (13.47).

Литература

[1] *Evans J. E., Johnson J. R., Sun D. F.* Applications of Advanced Signal Processing Techniques to Estimation Angle of Arrival of ATC Navigation and Surveillance Systems. MIT Lincoln Laboratory Technical Report 582, June 1982.

[2] *Gabriel W. F.* Using Spectral Estimation Techniques in Adaptive Processing Antenna Systems. IEEE Trans. Antennas Propag., vol. AP-34, pp. 291—300, March 1986.

[3] *Johnson D. H.* The Application of Spectral Estimation Methods in Bearing Estimation Problems. Proc. IEEE, vol. 70, pp. 1018—1028, September 1982. [Имеется русский перевод: *Джонсон Д. Х.* Применение методов спектрального оценивания к задачам определения угловых координат источников излучения. ТИИЭР, 1982, т. 70, № 9, с. 126—139.]

[4] *Johnson D. H., DeGraaf S. R.* Improving Resolution of Bearing in Passive Sonar Arrays by Eigenvalue Analysis. IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., vol. ASSP-30, pp. 638—647, August 1982.

[5] *Kaveh M., Barabell A. J.* The Statistical Performance of the MUSIC and the Minimum-Norm Algorithms for Resolving Plane Waves in Noise. IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., vol. ASSP-34, pp. 331—341, April 1986.

[6] *Kumaresan R.* Estimating the Parameters of Exponentially Damped or Undamped Sinusoidal Signal in Noise. Ph. D. dissertation, Department of Electrical Engineering, University of Rhode Island, Kingston, R. I., 1982.

[7] *Kumaresan R.* On the Zeros of the Linear Prediction Error Filter for Deter-

ministic Signals. IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., vol. ASSP-31, pp. 217—220, February 1983.
[8] *Larimore M. G.* Adaption Convergence of Spectral Estimation Based on Pisarenko Harmonic Retrieval. IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., vol. ASSP-31, pp. 955—962, August 1983.
[9] *Marple S. L., Jr.* Conventional Fourier, Autoregressive, and Special ARMA Methods of Spectrum Analysis. Engineer's dissertation, Department of Electrical Engineering, Stanford University, Stanford, Calif., December 1976.
[10] *Noble B., Daniel J. W.* Applied Linear Algebra. — 2nd ed., Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1977.
[11] *Owsley N. L.* A Recent Trend in Adaptive Signal Processing for Sensor Array: Constrained Adaptation. See in: Signal Processing, J. W. R. Griffits et al., eds., Academic Press, Inc., New York, 1978.
[12] *Owsley N. L.* Sonar Array Processing. Chapter 3 in Array Signal Processing. S. Haykin, ed., Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1985.
[13] *Owsley N. L.* High-Resolution Spectrum Analysis by Dominant-Mode Enhancement. Chapter 4 in VLSI and Modern Signal Processing. S. Y. Kung, H. J. Whitehouse, and T. Kailath, eds., Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1985.
[14] *Pisarenko V. F.* The Retrieval of Harmonic from a Covariance Function. Geophys. J. R. Astron. Soc., vol. 33, pp. 347—366, 1973.
[15] *Sakai H.* Statistical Analysis of Pisarenko's Method for Sinusoidal Frequency Estimation. IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., vol. ASSP-32, pp. 95—101, February 1984.
[16] *Schmidt R. O.* A Signal Subspace Approach to Multiple Emitter Location and Spectral Estimation. Ph. D. dissertation, Department of Electrical Engineering, Stanford University, Stanford, Calif., November 1981.
[17] *Schmidt R. O.* Multiple Emitter Location and Signal Parameter Estimation. IEEE Trans. Antennas Propag., vol. AP-34, pp. 276—280, March 1986.
[18] *Spielman D., Paulraj A., Kailath T.* Performance Analysis of the Music Algorithm. Proceedings of the 1986 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Tokyo, Japan, pp. 1909—1912, April 1986.
[19] *Thompson P. A.* An Adaptive Spectral Analysis Technique for Unbiased Frequency Estimation in the Presence of White Noise. Proceedings of the 13th Asilomar Conference on Circuits, Systems, and Computers, pp. 529—533, November 1979.
[20] *Tufts D. W., Kumaresan R.* Estimation of Frequencies of Multiple Sinusoids: Making Linear Prediction Perform like Maximum Likelihood. Proc. IEEE, vol. 70, pp. 975—989, September 1982. [Имеется русский перевод: *Тафтс Д. У., Кумаресан Р.* Оценивание частот суммы нескольких синусоид: Модификация метода линейного предсказания, сравнимая по эффективности с методом максимального правдоподобия. ТИИЭР, 1982, т. 70, № 9, с. 77—94.]
[21] *Wang H., Kaveh M.* Performance of Narrowband Signal-Subspace Processing. Proceedings of the 1986 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Tokyo, Japan, pp. 589—592, April 1986.
[22] *Wax M., Kailath T.* Detection of Signals by Information Theoretic Criteria. IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., vol. ASSP-33, pp. 387—392, April 1985.

Задачи

1. Доказать, что в случае M не содержащих шума комплексных синусоид $x[n]=A_i\Sigma_{i=1}^{M}\sin(2\pi f_i nT)$ и порядка $p=M$ нули полинома, сформированного из коэффициентов фильтра предсказания ошибки модифицированной кова-

риационной матрицы данных (13.23), будут лежать на единичной окружности в точках, соответствующих частотам этих синусоид.

2. Показать, что для АР-параметров в уравнении (13.34) подпространство сигнала может иметь вид

$$\mathbf{a}_p = -\sum_{k=1}^{\cdots} (\alpha_k/\lambda_k)\,\mathbf{v}_k,$$

где $\alpha_k = \mathbf{v}_k^H \mathbf{r}_p$ — скалярное произведение собственных векторов $\mathbf{v}_k$ и $\mathbf{r}_p = [r_{xx}[1] \ldots r_{xx}[p]]^T$.

3. Доказать, что $\rho_{\omega} = r[0] - \Sigma \widehat{P}_i$. Этот результат можно использовать для численной проверки на собственные значения, применяемой в подпрограмме MINEIGVAL.
4. Показать, каким образом оценку частоты, получаемую с помощью метода MUSIC, можно записать не через собственные векторы подпространства шума, а через собственные векторы подпространства сигнала. Для доказательства использовать выражение (13.17).

Приложение 13.А. Программа для вычисления оценок частоты с помощью методов MUSIC и EV

Эта подпрограмма предназначена для вычисления оценок частоты в подпространстве шума либо с помощью метода MUSIC (METHOD=0), либо с помощью метода EV (METHOD=1), описанных в подразд. 13.6.2. Оба этих метода основаны на использовании РСЧ модифицированной ковариационной матрицы данных [см. выражение (13.23)]:

$$\begin{pmatrix} x[p] & \ldots & x[1] \\ \vdots & & \vdots \\ x[N-1] & \ldots & x[N-p] \\ x^*[2] & \ldots & x^*[p] \\ \vdots & & \vdots \\ x^*[N-p+1] & \ldots & x^*[N] \end{pmatrix}.$$

Для 64-точечной тест-последовательности данных, приведенной в приложении II, в случае выбора параметра METHOD=1 и N=64, IP=15, NSIG=11 получаются следующие значения спектральной плотности мощности:

PSD(1) =0,110867E—02; PSD(3000)=0,821904E+01;
PSD(1000)=0,351216E+01; PSD(4000)=0,966779E—03;
PSD(2000)=0,124425E+00; PSD(4096)=0,110536E—02.

```
      Подпрограмма EIGENFREQ (METHOD,N,IP,NSIG,X,PSD,ISTAT)
C
C  Входные параметры:
C
C     METHOD    — устанавливается в 0 для метода MUSIC и в 1 для мето-
C                 да EV (целое число)
C     N         — число отсчетов данных
C     IP        — размерность матрицы данных (целое число)
C     NSIG      — предполагаемое число векторов пространства «сигнала»
C                 (целое число)
C     X         — массив отсчетов комплексных данных
C  Выходные параметры:
C
C     PSD       — массив действительных значений оценок частот
C
C     ISTAT     — указатель состояния (целое число):
C                 0 — при нормальном выходе из программы,
C                 1 — если NSIG>IP−1 или NSIG<0
C
C  Примечание:
C
C     Размер .GE. N внешнего массива X и размер .GE. NPSD массива PSD
C     должны указываться в вызывающей программе. Размер внутреннего
C     массива FB должен указываться в .GE. 2*(N−IP)×IP, размер масси-
C     ва U должен указываться в .GE. 2*(N−IP)×2*(N−IP), размер масси-
C     ва V должен указываться в .GE. IP×IP, размер массива S должен ука-
C     зываться в .GE. IP или 2*(N−IP) в зависимости от того, что больше.
C
      PARAMETR NPSD=4096   ! Должно быть степенью числа 2 (размер-
                             ность матриц W и Z)
      PARAMETR MAXU=100    ! Максимальная размерность матрицы U
      PARAMETR MAXV=50     ! Максимальная размерность матриц V и S
      COMPLEX X(1),PB(MAXU,MAXV),U(MAXU,MAXU),V(MAXV,MAXV)
      COMPLEX W(NPSD),Z(NPSD)
      REAL PSD(1),S(MAXV)
      PI2=8.*ATAN(1.)
      ISTAT=0
      IF (NSIG .LT. IP .AND. NSIG .GE. 0) GO TO 5
      ISTAT=1
      RETURN
5     NP=N−IP
      DO 20 I=1,NP
         DO 10 K=1,IP
            FB(I,K)=X(I−K+IP)
10          FB(I+NP,K)=CONJG(X(I+K))
20       CONTINUE
      NP2=2*NP
      CALL CSVD (FB,MAXU,MAXV,NP2,IP,0,IP,IP,S,U,V)
C  В этой точке для выбора сингулярных чисел «сигнала» или значения вход-
C  ного параметра NSIG используется ИКА или экспертная оценка
      CALL PREFFT (NPSD,0,NEXP,W)
      DO 30 K=1,NPSD
30       PSD(K)=0.
      DO 70 I=NSIG+1,IP
         DO 40 K=1,IP
40          Z(K)=V(K,I)
         DO 50 K=IP+1,NPSD
```

```
50          Z(K)=(0.,0.)
         CALL FFT (NPSD,0,1.,NEXP,W,Z)
         DO 60 K=1,NPSD
            TEMP=REAL(Z(K))**2+AIMAG(Z(K))**2
            IF (METHOD .EQ. 0) PSD(K)=PSD(K)+TEMP
60          IF (METHOD .NE. 0) PSD(K)=PSD(K)+TEMP/S(I)
70       CONTINUE
      DO 80 K=1,NPSD
80       PSD(K)=1./PSD(K)
      RETURN
      END
```

Глава 14
КРАТКАЯ СВОДКА РЕЗУЛЬТАТОВ ПО СПЕКТРАЛЬНЫМ ОЦЕНКАМ

Унифицированный подход, использованный в гл. 5—13, позволил рассмотреть все методы спектрального оценивания как методы аппроксимации данных с помощью той или иной принятой модели. Главная причина появления многих альтернативных методов спектрального оценивания — неудовлетворительные характеристики классических методов спектрального оценивания, особенно в тех случаях, когда величина, обратная длине последовательности данных, имеет тот же порядок, что и требуемое разрешение. И все же следует заметить, что в тех случаях, когда объем данных достаточно велик, классические спектральные оценки, которые обсуждались в гл. 5, будут наиболее структурно устойчивыми, или, как сейчас принято говорить, наиболее робастными спектральными оценками. Классические методы дают наиболее точно характеризуемые оценки из всех методов спектрального оценивания, рассмотренных в данной книге; единственное допущение, которое для них требуется,— это допущение о том, что анализируемые данные стационарны в широком смысле. Неклассические методы требуют принятия дополнительных допущений. Вариации характеристик различных методов спектрального оценивания нередко можно объяснить тем, насколько хорошо используемая модель согласуется с анализируемым процессом. Когда модель хорошо согласуется с данными, могут быть получены спектральные оценки, характеристики которых превосходят характеристики классических спектральных оценок (например, периодограммы). Когда модель выбрана правильно, но используются плохие оценки спектральных параметров, получаются неэффективные (т. е. с большой дисперсией) спектральные оценки. К сожалению, в случае конечных записей данных тщательно проанализированы статистические характеристики всего лишь нескольких алгоритмов. Гораздо больше результатов получено при сравнении конкурирующих алгоритмов посредством машинного моделирования на ограниченном материале. Различные модели могут давать сравнимые результаты, но одна модель может требовать меньше модельных параметров, а следовательно, будет эффективней других моделей, используемых для представления анализируемого процесса. Различие характеристик

наблюдается также и среди алгоритмов, предназначенных для оценки параметров некоторой общей модели, что было проиллюстрировано на примере АР-оценок СПМ, описанных в гл. 8.

Общая задача спектрального оценивания — это задача оценивания спектральной плотности мощности, или, что эквивалентно, автокорреляционной функции некоторого случайного процесса. Поскольку СПМ формально определяется бесконечным числом значений автокорреляционной функции, задача оценивания СПМ по конечному множеству данных по своей природе принадлежит к числу плохо обусловленных, или некорректных, задач. Самое большее, на что здесь можно рассчитывать,— это попытаться оценить значения автокорреляционной функции при некотором конечном числе корреляционных сдвигов. В классических спектральных оценках, описанных в гл. 5, мы пытаемся оценить наиболее существенные значения этой функции при корреляционных сдвигах, изменяющихся от 0 до некоторого максимального значения M. Попытки свести эту задачу к более легкой и практически решаемой задаче привели к использованию различных моделей СПМ, которые были рассмотрены в гл. 6—13. Типичным является класс моделей временных рядов, которые дают рациональные функции СПМ (АР-, СС- и АРСС-модели). Эти модели параметризуются некоторым конечным и, к счастью, небольшим набором коэффициентов. В результате получаются менее смещенные спектральные оценки с более высоким разрешением, если, конечно, используемая модель точно описывает анализируемые данные.

В табл. 14.1 кратко представлены все основные методы спектрального оценивания, которые были рассмотрены в гл. 5—13. Для реализации некоторых методов оценивания СПМ используется несколько алгоритмов оценивания параметров. Заметим, что для компактной записи структурной формы функции СПМ в книге используются квадратичные матричные формы. Для получения решения относительно параметров модели многие из описанных методов включают задачу минимизации на некоторой матрице данных; эта матрица данных указана в таблице. Некоторые постоянные масштабирующие множители в таблице опущены, для того чтобы отчетливее подчеркнуть сходства и различия перечисленных в ней методов. Указаны номера разделов книги, в которых даны точные выражения для оценок СПМ и нормальные уравнения для параметров. Для каждого метода дана приближенная оценка вычислительной сложности, в которой учтены лишь затраты на вычисление членов высоких порядков полиномиального представления. Заметим, что эти оценки получены в предположении, что для соответствующих вычислений используются машинные программы, перечисленные в данной таблице.

Указанные в табл. 14.1 $((p+1)\times 1)$-вектор данных $\mathbf{x}$, $((p+1)\times 1)$-вектор параметров $\mathbf{a}$, $(p+1)\times 1))$-вектор параметров $\mathbf{b}$ и $(p\times 1)$-вектор комплексных синусоид $\mathbf{e}(f)$ определяются следующими выражениями:

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}_p[n]=\begin{pmatrix} x[n] \\ x[n-1] \\ \vdots \\ x[n-p] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}=\begin{pmatrix} 1 \\ a_p[1] \\ \vdots \\ a_p[p] \end{pmatrix}, \tag{14.1}$$

$$\mathbf{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ b_p[1] \\ \vdots \\ b_p[p] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}(f)=\begin{pmatrix} 1 \\ \exp(j2\pi fT) \\ \vdots \\ \exp(j2\pi[p-1]fT) \end{pmatrix}.$$

Тёплицева автокорреляционная матрица данных $\mathbf{X}_1$, тёплицева ковариационная матрица данных $\mathbf{X}_2$, модифицированная ковариационная матрица данных $\mathbf{X}_3$ и матрица предвзвешенных данных $\mathbf{X}_4$ были определены в гл. 8 и имеют следующий вид:

$$\mathbf{X}_1=\begin{pmatrix} x[1] & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x[p+1] & \dots & x[1] \\ \vdots & & \vdots \\ x[N] & \dots & x[N-p] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & x[N] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_2=\begin{pmatrix} x[p+1] & \dots & x[1] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x[N-p] & & x[p+1] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x[N] & \dots & x[N-p] \end{pmatrix},$$

и

$$\mathbf{X}_3=\begin{pmatrix} \mathbf{X}_2 \\ \mathbf{X}_2^*\mathbf{J} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_4=\begin{pmatrix} x[1] & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x[p+1] & \dots & x[1] \\ \vdots & & \vdots \\ x[N] & \dots & x[N-p] \end{pmatrix}, \tag{14.2}$$

Таблица 14.1. Краткая сводка результатов по методам спектрального оценивания

Класс оценок	Модель	Метод	Номер основного раздела	Приложение с машинной программой[1]	Квадратичная форма спектра[2]	Матрица данных[3]	Относительная сложность[4]	Управление соотношением между разрешением и дисперсией[5]
Классические	Не используется[6]	Периодограммный	5.7	—/5.В	$\lvert\mathbf{e}^H(f)\mathbf{x}\rvert^2$	—	$N \log_2 N$	Окно
	Не используется	Коррелограммный	5.6	—/5.Б	$\mathbf{e}^H(f)\mathbf{R}_A\mathbf{e}(f)$	$\mathbf{X}_1$	$N \log_2 N$	Окно
Параметрические	Авторегрессионная (АР)	Юла — Уолкера	8.3	8.А/6.А	$\lvert\mathbf{e}^H(f)\mathbf{a}\rvert^{-2}$	$\mathbf{X}_1$	N^2	Порядок АР-модели
		Берга	8.4.2	8.Б/6.А		—	N^2	
		Ковариационный	8.5.1	8.В/6.А		$\mathbf{X}_2$	N^2	
		Модифицированный ковариационный	8.5.2	8.Г/6.А		$\mathbf{X}_3$	N^2	
		Адаптивный НСК	9.3	9.Б/6.А		—	$N^{7)}$	
		Адаптивный РНК	9.4.2	9.В/6.А		$\mathbf{X}_4$	$N^{7)}$	
	Скользящего среднего (СС)	АР высокого порядка	10.3	10.А/6.А	$\lvert\mathbf{e}^H(f)\mathbf{b}\rvert^2$	$\mathbf{X}_1$	N^2	Порядок СС-модели
	Авторегрессии — скользящего среднего (АРСС)	Модифицированный Юла — Уолкера	10.4	10.Б/6.А	$\dfrac{\lvert\mathbf{e}^H(f)\mathbf{b}\rvert^2}{\lvert\mathbf{e}^H(f)\mathbf{a}\rvert^2}$	$\mathbf{X}_1$	N^2	Порядок АР- и СС-компонент АРСС-модели
	Затухающие синусоиды	Прони	11.5	11.В/11.Д	$\lvert$ДВПФ $(\Sigma h_k z^k)\rvert^2$	$\mathbf{X}_2$	N^2	Число синусоид
	Незатухающие синусоиды	Модифицированный Прони	11.6	11.В/—	Линейчатый спектр	$\mathbf{X}_3$	N^2	Число синусоид
	Синусоиды+ +шум	Писаренко	13.6.1	3.Е/—	Линейчатый спектр	$\mathbf{X}_1$	N^3	Число синусоид

Непараметрические	Не используется	Минимума дисперсии	12.4	—/12.A	$[\mathbf{e}^H(f)\mathbf{R}_A^{-1}\mathbf{e}(f)]^{-1}$	$\mathbf{X}_1$	N^2	Размерность матрицы $\mathbf{R}_A$
	Не используется	MUSIC	13.6.2	—/13.A	$[\mathbf{e}^H(f)\mathbf{R}_M\mathbf{e}(f)]^{-1}$	$\mathbf{X}_3$	N^3	Сингулярные числа
	Не используется	EV	13.6.2	—/13.A	$[\mathbf{e}^H(f)\mathbf{R}_E\mathbf{e}(f)]^{-1}$	$\mathbf{X}_3$	N^3	Сингулярные числа

[1]) Программа оценивания параметров/программа оценивания спектра.
[2]) Определения вектора и матрицы см. в тексте книги.
[3]) Определения матрицы данных см. в тексте книги.
[4]) Вычислительная сложность приближенно оценивается порядком величины вычислительных затрат; см. соответствующие разделы глав книги.
[5]) В этом столбце указаны основные параметры, от которых зависит соотношение между разрешением и дисперсией оценки СПМ.
[6]) Периодограмма не рассматривается как некоторая синусоидальная модель с заранее выбранными гармоническими частотами; см. гл. 11, разд. «Задачи».
[7]) Число вычислительных операций на одно обновление во времени.

Тёплицева автокорреляционная $(p+1)\times(p+1)$-матрица $\mathbf{R}_A$ определяется выражением

$$\mathbf{R}_A = \mathscr{E}\{\mathbf{x}_p^*[n]\,\mathbf{x}_p^T[n]\} = \begin{pmatrix} r_{xx}[0] & \dots & r_{xx}^*[p] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xx}[p] & \dots & r_{xx}[0] \end{pmatrix}. \qquad (14.3)$$

Матрицы $\mathbf{R}_M$ и $\mathbf{R}_E$ — это аппроксимации пониженного порядка для матрицы $\mathbf{R}_A$, используемые соответственно в методах MUSIC и EV (их точные определения см. в гл. 13). Для определения параметров модели во многих из перечисленных в табл. 14.1 методах используется либо условная (т. е. с наложенными ограничениями), либо безусловная минимизация некоторой квадратичной формы, включающей в себя какую-либо из матриц данных $\mathbf{X}_i$, $i=1, \dots, 4$, или автокорреляционную матрицу $\mathbf{R}_A$. Спектральные оценки, полученные с помощью перечисленных в табл. 14.1 методов для 64-точечной тест-последовательности, помещенной в приложении II, приведены в разд. «Краткая сводка результатов», содержащемся в каждой из гл. 5—13.

В научной литературе нередко пытаются делить приведенные в табл. 14.1 методы на методы «адаптивные» и «неадаптивные» к данным. Эти термины использовались для различения классических методов спектрального оценивания от таких более новых методов, как, например, авторегрессионный метод спектрального анализа. Однако было показано, что все методы спектрального оценивания так или иначе подгоняют, или «адаптируют», параметры модели к имеющимся данным. В методе Прони, например, такая подгонка (аппроксимация) выполняется относительно оценок амплитуды, фазы, коэффициента затухания и частоты для некоторой экспоненциальной модели. В периодограммном методе с помощью ДВРФ оцениваются только амплитуды и фазы, поскольку частоты синусоидальной модели заранее выбраны с гармоническими интервалами. *Единственно* уместно использовать термин «адаптивный» применительно к алгоритмам последовательного обновления во времени, которые отслеживают изменения параметров модели во времени; к их числу относятся методы, описанные в гл. 9.

В некоторых случаях исходные данные должны перед выполнением спектрального оценивания подвергаться предварительной обработке, с тем чтобы устранить значительные компоненты сигнала, которые в противном случае могут неблагоприятно повлиять на качество спектральной оценки. Целесообразно удалять такие компоненты сигнала, как большое среднее значение (постоянную составляющую), тренды — линейный и полиномиальные высоких порядков, сильные тоны (синусоидальные сигналы). Доминирующие тоны или большая постоянная составляю-

щая приводят к появлению значительных боковых лепестков у оценок СПМ, получаемых с помощью периодограммного и корелограммного методов, что может маскировать присутствие слабых компонент сигнала, близких по частоте к его сильным компонентам. Полиномиальные тренды имеют нестационарный характер и, как было показано [2], приводят к значительным эффектам смещения на низкочастотном конце авторегрессионных спектральных оценок. Устранение сильных компонент сигнала и трендов способствует уменьшению динамического диапазона спектральных значений и поэтому может рассматриваться как грубое *предварительное отбеливание* спектра. В случае последовательностей данных с пропущенными или плохими отсчетами перед выполнением спектрального оценивания могут быть применены методы линейного предсказания (см. гл. 8), с помощью которых эти отсчеты будут восстановлены или заменены более надежными [3, 1].

Полиномиальные тренды вплоть до M-го порядка могут быть устранены с помощью режекторного КИХ-фильтра длиной $M+1$:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} h[k]\, x[n-k]. \tag{14.4}$$

Обозначим такой тренд как

$$x[n] = \sum_{i=0}^{M} b[i]\,(nT)^i, \tag{14.5}$$

где T — интервал отсчетов. Тогда, для того чтобы иметь

$$y[n] = \sum_{i=0}^{M} b[i] \sum_{k=0}^{M} h[k]\,(nT-kT)^i = 0, \tag{14.6}$$

должны выполняться следующие условия:

$$\sum_{k=0}^{M} (k)^i\, h[k] = 0, \tag{14.7}$$

где $0 \leqslant i \leqslant M$. Отсюда получаем $M+1$ уравнений относительно $M+1$ неизвестных коэффициентов фильтра. Сильные тоны могут быть также удалены с помощью симметричного КИХ-фильтра с линейной фазовой характеристикой.

Фильтры для режекции трендов и тонов должны применяться с надлежащей степенью предосторожности, поскольку при этом могут удаляться не только тренды и тоны, но и компоненты спектра, близкие к полосам задерживания частотной характеристики этих фильтров [которая является преобразованием Фурье от функции (14.4)]. Чаще всего это проявляется в низкочастотной области спектра. Удаление выборочного среднего значения

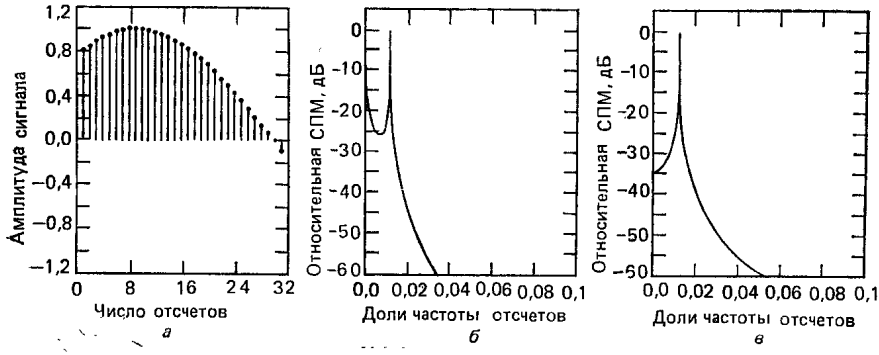


Рис. 14.1. Эффект, обусловленный некорректным удалением среднего значения: *а* — отсчеты, соответствующие части периода синусоиды; *б* — АР-оценка для этих отсчетов, полученная с помощью модифицированного ковариационного метода, с удаленным выборочным средним значением; *в* — та же оценка, но без удаленного выборочного среднего значения.

также должно выполняться со всей тщательностью. Поскольку при статистическом выводе многих спектральных оценок используется допущение о нулевом среднем значении, представляется заманчивым всегда устранять из данных выборочное среднее значение

$$\overline{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x[n]. \qquad (14.8)$$

Для того чтобы показать, к чему это может привести, обратимся к примеру, приведенному на рис. 14.1. Короткой последовательности отсчетов некоторой части периода синусоиды, показанной на рис. 14.1(*а*), соответствует острый пик в модифицированной ковариационной авторегрессионной спектральной оценке, показанной на рис. 14.1(*в*). Эта же оценка после устранения из данных выборочного среднего значения показана на рис. 14.1(*б*), и ее вид ошибочно говорит о наличии постоянной составляющей. Приведенный пример иллюстрирует именно тот случай, когда удаление выборочного среднего значения не улучшает спектр, а приводит к появлению в нем лишних деталей (артефактов). Полностью удалять выборочное среднее значение нежелательно также в тех случаях, когда спектр может содержать компоненту, представляющую собой некоторый случайный процесс с конечной *спектральной плотностью мощности* на нулевой частоте (например, белый шум), тогда как никакой конечной *мощности* на нулевой частоте нет (нулевое среднее значение). Выборочное среднее значение не следует также удалять из данных, содержащих переходные (или неустановившиеся) сигналы. Практиче-

ский опыт говорит, что выборочное среднее значение и тренды следует удалять лишь в тех случаях, когда физический характер анализируемого процесса говорит о возможности их наличия или когда они с очевидностью доминируют в исследуемых данных.

Литература

[1] *Bowling S. B., Lai S.* The Use of Linear Prediction for the Interpolation and Extrapolation of Missing Data Prior to Spectral Analysis. Proceedings of the Rome Air Development Center Workshop on Spectrum Estimation, pp. 39—50, October 1979.

[2] *Kane R. P., Trivedi N. B.* Effects of Linear Trend and Mean Value on Maximum Entropy Spectral Analysis. Institute de Pesquisas Espaciais, Report INPE-1568-RPE/069, Sao Jose dos Compos, Brasil, 1979 (available as NTIS N79-33949).

[3] *Nuttall A. H.* Spectral Analysis of a Univariate with Bad Data Points, via Maximum Entropy and Linear Predictive Techniques. Naval Underwater Systems Center Technical Report TR-5303, New London, Conn., March 1976.

Глава 15
МНОГОКАНАЛЬНОЕ СПЕКТРАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ

15.1. Введение

До сих пор обсуждение в книге было связано со спектральным оцениванием единственной стационарной выборочной последовательности. В двух следующих главах одномерные, с единственной переменной спектральные процедуры оценки будут обобщены на многоканальный случай (векторные функции скалярной переменной) и на двумерный случай (скалярные функции векторной переменной). В данной главе понятия, введенные в тексте ранее, обобщаются на одновременную обработку отсчетов данных из нескольких каналов. Такие массивы сигналов типичны для радио- и гидролокационных фазированных антенных решеток, а также для сейсмических измерений, представляющих собой лишь часть возможных приложений. Итак, изложение в каждом разделе настоящей главы ведется параллельно изложению материалов, представленных в гл. 5—13. Сюда включены теории многоканальных линейных систем, теория многоканальных случайных процессов, многоканальные параметрические модели, многоканальная авторегрессионная СПМ, многоканальное линейное предсказание и многоканальное спектральное оценивание на основе метода минимума дисперсии. В связи с интересом к спектральному оцениванию с высоким разрешением для коротких последовательностей данных значительная часть данной главы посвящена многоканальному оцениванию авторегрессионной СПМ. Дополнительный теоретический материал по многоканальному анализу временных рядов содержится в работе [18].

15.2. Краткая сводка результатов

Задачей многоканального спектрального анализа данных в m каналах является оценивание эрмитовой матрицы спектральной плотности мощности (СПМ)

$$\mathbf{P}(f)=\begin{pmatrix} P_{11}(f) & \cdots & P_{1m}(f) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ P_{m1}(f) & \cdots & P_{mm}(f) \end{pmatrix},$$

● СБОР ДАННЫХ *M* каналов; *N* отсчетов/канал; *T* с/отсчет		
Многоканальная периодограмма	Многоканальная авторегрессионная СПМ	Многоканальная СПМ с минимальной дисперсией
● ВЫБОР ПАРАМЕТРОВ СЕГМЕНТОВ NSAMP отсчетов/сегмент; NSHIFT сдвигов отсчетов/сегмент ● ВЫЧИСЛЕНИЕ МНОГОКАНАЛЬНОЙ ПЕРИОДОГРАММЫ (подпрограмма MCPERIOD, приложение 15.А)	● ВЫБОР ВХОДНЫХ ПАРАМЕТРОВ Порядок IP Алгоритм METHOD ● ОЦЕНИВАНИЕ МНОГОКАНАЛЬНЫХ АР-ПАРАМЕТРОВ (подпрограмма MCAR, приложение 15.Б) ● ВЫЧИСЛЕНИЕ МНОГОКАНАЛЬНОЙ АР СПМ (подпрограмма MCARPSD, приложение 15.Г)	● ВЫБОР ПОРЯДКА ● ВЫЧИСЛЕНИЕ МНОГОКАНАЛЬНОЙ СПМ С МИНИМАЛЬНОЙ ДИСПЕРСИЕЙ (подпрограмма MCMINVAR, подразд. 15.13)

Рис. 15.1. Краткая запись трех подходов к многоканальному оцениванию СПМ.

определяемой формулой (15.19). Матрица СПМ состоит из элементов, соответствующих автоспектрам, P_{ii}, $i=1, \ldots, m$, и элементов, соответствующих взаимным спектрам, P_{ij}, $i \neq j$, для всех возможных пар каналов. На рис. 15.1 дана краткая запись трех возможных подходов к многоканальному оцениванию, для которых в данной главе приводятся программы вычислений. Многоканальный анализ СПМ с использованием классического периодограммного подхода представлен в разд. 15.5. Программа MCPERIOD в приложении 15.А — это реализация одной из классических многоканальных процедур оценки СПМ. Многоканальное оценивание авторегрессионной (АР) СПМ широко обсуждается в разд. 15.7—15.12. Два АР-алгоритма Виеры — Морфа и Наттолла — Странда совместно реализованы в единой машинной программе MCAR, дающей оценки матриц авторегрессионных параметров, из которых с помощью подпрограммы MCARPSD можно вычислить матрицу ARPSD. Многоканальный метод минимума дисперсии описан в разд. 15.13, где представлена пошаговая процедура его реализации. Члены, соответствующие взаимным спектрам, в этих различных процедурах оценки наиболее удобно интерпретировать в терминах функции когерентности [см. формулы (15.15)—(15.17)].

15.3. Теория многоканальных линейных систем

Пусть $\mathbf{x}[n]$ обозначает вектор отсчетов из m-канального процесса с временным индексом n:

$$\mathbf{x}[n]=\begin{pmatrix} x_1[n] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_m(n) \end{pmatrix}. \tag{15.1}$$

Если $\mathbf{x}[n]$ представляет m-канальный $m\times 1$-вектор входа, а $\mathbf{y}[n]$ — m-канальный $m\times 1$-вектор выхода, то операция свертки, реализуемая линейной системой, инвариантной к сдвигу[1], устанавливает соотношение между $\mathbf{x}[n]$ и $\mathbf{y}[n]$ и записывается в виде

$$\mathbf{y}[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathbf{H}[n-k]\,\mathbf{x}[k]=\mathbf{H}[n]\star\mathbf{x}[n], \tag{15.2}$$

где $m\times m$-*матрица многоканальной импульсной характеристики* имеет вид

$$\mathbf{H}[k]=\begin{pmatrix} h_{1,1}[k] & \dots & h_{1,m}[k] \\ h_{2,1}[k] & \dots & h_{2,m}[k] \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ h_{m,1}[k] & \dots & h_{m,m}[k] \end{pmatrix}.$$

Следовательно, отдельному выходному каналу $y_i[n]$ соответствует функция свертки

$$y_i[n]=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=-\infty}^{\infty}h_{ij}[n-k]\,x_j[k].$$

Матрица многоканального z-преобразования матричной последовательности $\mathbf{H}[k]$ определяется следующим выражением:

$$\mathrm{H}(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathbf{H}[k]z^{-k}=\mathcal{Z}\{\mathbf{H}[k]\}, \tag{15.3}$$

где z — комплексный скаляр. В этом случае $\mathbf{H}(z)$ — *многоканальная системная функция.* Вектор сигнала $\mathbf{x}[k]$ имеет следующее z-преобразование:

$$\mathrm{X}(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathbf{x}[k]z^{-k}. \tag{15.4}$$

---

[1] Такие системы часто называются линейными инвариантными во времени или ЛИВ-системами (см., например, [13*]). — *Прим. ред.*

Матрица $\mathbf{H}(f)$ *многоканального дискретного времени преобразования Фурье* (ДВПФ) определяется выражением

$$\mathbf{H}(f) = T\mathrm{H}(z)|_{z=\exp(j2\pi fT)} = T\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{H}[k]\exp(-j2\pi fkT), \quad (15.5)$$

а вектор $\mathbf{X}(f)$ многоканального ДВПФ — выражением

$$\mathbf{X}(f) = T\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{x}[k]\exp(-j2\pi fkT). \quad (15.6)$$

Теорема о многоканальной свертке, связывающая z-преобразование матрицы и векторов в уравнении (15.2), записывается в форме

$$\mathrm{Y}(z) = \mathrm{H}(z)\,\mathrm{X}(z). \quad (15.7)$$

Каузальная m-канальная линейная система описывается матричным разностным уравнением с постоянными коэффициентами

$$\sum_{k=0}^{p} \mathbf{A}[k]\,\mathbf{y}[n-k] = \sum_{k=0}^{q} \mathbf{C}[k]\,\mathbf{x}[n-k], \quad (15.8)$$

в котором $\mathbf{A}[k]$ и $\mathbf{C}[k]$ — $m\times m$-матричные коэффициенты. В предположении нулевых начальных условий z-преобразование имеет вид

$$\mathrm{A}(z)\,\mathrm{Y}(z) = \mathrm{C}(z)\,\mathrm{X}(z)$$

или

$$\mathrm{Y}(z) = \mathrm{A}^{-1}(z)\,\mathrm{C}(z)\,\mathrm{X}(z). \quad (15.9)$$

15.4. Теория многоканальных случайных процессов

Основные положения теории двухканальных случайных процессов для процессов, стационарных в широком смысле, были развиты в гл. 3. Взаимная корреляция между одноканальными процессами $x[n]$ и $y[n]$ определялась там как

$$r_{xy}[k] = \mathscr{E}\{x[n+k]\,y^*[n]\} \quad (15.10)$$

со свойством $r_{xy}[k] = r^*_{yx}[-k]$. Было показано, что двухканальная взаимная спектральная плотность мощности представляет собой просто дискретно-временное преобразование Фурье (ДВПФ) взаимной корреляционной функции

$$P_{xy}(f) = T\sum_{k=-\infty}^{\infty} r_{xy}[k]\exp(-j2\pi fkT). \quad (15.11)$$

В общем случае эта функция является комплексной и обладает комплексно-сопряженной симметрией

$$P_{xy}(f) = P^*_{yx}(-f). \quad (15.12)$$

Можно непосредственно показать (см. Задачи), что значения взаимного спектра на каждой частоте не превышают среднего геометрического значения спектров процессов x и y на этой частоте, т. е.

$$|P_{xy}(f)|^2 \leqslant P_{xx}(f)\,P_{yy}(f). \tag{15.13}$$

Эрмитова матрица

$$\begin{pmatrix} P_{xx}(f) & P_{xy}(f) \\ P_{yx}(f) & P_{yy}(f) \end{pmatrix} \tag{15.14}$$

называется *матрицей когерентности*. Согласно свойству (15.13), эта 2×2-матрица должна иметь неотрицательный детерминант для всех частот. Комплексное безразмерное выражение

$$\Phi_{xy}(f) = \frac{P_{xy}(f)}{\sqrt{P_{xx}(f)}\,\sqrt{P_{yy}(f)}} \tag{15.15}$$

получило название *функции когерентности*. С этой функцией связаны *квадрат модуля когерентности* (КМК)

$$\text{КМК}(f) = |\Phi_{xy}(f)|^2 = \frac{|P_{xy}(f)|^2}{P_{xx}(f)\,P_{yy}(f)} \tag{15.16}$$

и *фазовый спектр когерентности* (или просто «фазовый» спектр)

$$\theta(f) = \operatorname{arctg}[\operatorname{Im}\{\Phi_{xy}(f)\}/\operatorname{Re}\{\Phi_{xy}(f)\}]. \tag{15.17}$$

Заметим, что величина КМК должна быть заключена между 0 (для частот, на которых отсутствует когерентность между каналами) и 1 (для частот, на которых каналы полностью когерентны в границах некоторых фиксированных фазовых соотношений). Таким образом, КМК можно использовать для измерения сходства (как функции частоты) двух сигналов. Важнейшее его применение — обнаружение общего сигнала в двух различных каналах. Фаза когерентности характеризует отставание или опережение по фазе в канале x по отношению к каналу y как функцию частоты.

Чтобы обобщить скалярные функции авто/взаимную корреляцию и авто/взаимную спектральную плотность мощности на многоканальный случай, определим *многоканальную корреляционную последовательность* (МКП) стационарного вектора m-канальных данных $\mathbf{x}[n]$ для корреляционного сдвига k как матрицу

$$\mathbf{R}_{xx}[k] = \mathscr{E}\{\mathbf{x}[n+k]\,\mathbf{x}^H[n]\} = \begin{Bmatrix} r_{11}[k] & r_{12}[k] & \dots & r_{1m}[k] \\ r_{21}[k] & r_{22}[k] & \dots & r_{2m}[k] \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{m1}[k] & r_{m2}[k] & \dots & r_{mm}[k] \end{Bmatrix}, \tag{15.18}$$

представляющую по форме корреляционную матрицу, диагональ-

ные элементы которой являются коэффициентами автокорреляции для отдельных каналов, а все остальные элементы — это коэффициенты взаимной корреляции между всеми парами каналов. Хотя $r_{ij}[k] \neq r_{ji}^*[k]$, свойство $r_{ij}[k] = r_{ji}^*[-k]$ должно иметь место для $i \neq j$. Следовательно, $\mathbf{R}_{xx}[k]$ *не* будет обладать свойством эрмитовой симметрии, т. е. $\mathbf{R}_{xx}[k] \neq \mathbf{R}_{xx}^H[k]$, но вместо него будем иметь $\mathbf{R}_{xx}[k] = \mathbf{R}_{xx}^H[-k]$. Аналогичное определение можно ввести для многоканальной ковариационной функции, если использовать вектор средних по каналам. Если многоканальный процесс $\mathbf{x}[n]$ имеет во всех каналах нулевое среднее, то многоканальная ковариационная матрица равна многоканальной корреляционной матрице, Матрица ДВПФ размером $(m \times m)$ многоканальной корреляционной матрицы

$$\mathbf{P}_{xx}(f) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{R}_{xx}[k] \exp(-j2\pi fkT) = \begin{vmatrix} P_{11}(f) & P_{12}(f) & \dots & P_{1m}(f) \\ P_{21}(f) & P_{22}(f) & \dots & P_{2m}(f) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ P_{m1}(f) & P_{m2}(f) & \dots & P_{mm}(f) \end{vmatrix}, \tag{15.19}$$

по определению является *матрицей многоканальной спектральной плотности мощности* (СПМ) многоканального случайного процесса. Диагональными элементами ее являются автоспектральные плотности отдельных каналов, а недиагональными — взаимные спектральные плотности пар каналов. Заметим, что матрица $\mathbf{P}_{xx}(f)$ эрмитова, т. е. $\mathbf{P}_{xx}(f) = \mathbf{P}^H{}_{xx}(f)$, и является положительно полуопределенной. Это означает, что матрица каждого главного минора $\mathbf{P}_{xx}(f)$ имеет неотрицательный детерминант, и, следовательно, значения когерентности для всех пар каналов заключены между 0 и 1. Так, для двухканальной матрицы СПМ

$$\det \begin{pmatrix} P_{11}(f) & P_{12}(f) \\ P_{21}(f) & P_{22}(f) \end{pmatrix} \geqslant 0$$

означает

$$0 \leqslant \frac{|P_{21}(f)|^2}{P_{11}(f) P_{22}(f)} \leqslant 1.$$

Подобные утверждения могут быть сделаны в отношении детерминантов более высокого порядка, в предположении существования множественных функций когерентности, таких, как $\Phi_{ijk}(f)$, со свойством

$$0 \leqslant |\Phi_{ijk}(f)| \leqslant 1.$$

Из многоканальных случайных процессов с нулевым средним особый интерес представляет многоканальный белый шум $\mathbf{w}[n]$, многоканальная МКП которого имеет вид

$$\mathbf{R}_{\mathbf{ww}}[k] = \begin{cases} \mathbf{P}_w, & k = 0, \\ \mathbf{0} & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \tag{15.20}$$

где $\mathbf{P}_w$—$m \times m$-эрмитова матрица. Белый шум в каждом канале коррелирован с самим собой и с белым шумом других каналов только при сдвиге $k=0$. Следовательно, многоканальная СПМ многоканального процесса типа белого шума подчиняется соотношению

$$\mathbf{P}_{\mathbf{ww}}(f) = T\mathbf{P}_w. \tag{15.21}$$

Используя аргументы, аналогичные приведенным в разд. 4.3, легко показать (см. Задачи), что соотношение между корреляционной матрицей $\mathbf{R}_{\mathbf{yy}}[m]$, выходной корреляционной матрицей многоканального фильтра с последовательностью матричной импульсной характеристики $\mathbf{H}[m]$, и $\mathbf{R}_{\mathbf{xx}}[m]$, корреляционной матрицей многоканального входного процесса, записывается в виде

$$\mathbf{R}_{\mathbf{yy}}[m] = \mathbf{H}[m] \overset{\star}{\star} \mathbf{R}_{\mathbf{xx}}[m] \star \mathbf{H}^H[-m]. \tag{15.22}$$

Тогда многоканальное z-преобразование выражения (15.22) будет

$$P_{\mathbf{yy}}(z) = H(z)\, P_{\mathbf{xx}}(z)\, H^H(1/z^*). \tag{15.23}$$

На основе определений (15.5) и (15.19) и связи между входным и выходным процессами многоканального линейного фильтра получаем $m \times m$-матрицу СПМ

$$\mathbf{P}_{\mathbf{yy}}(f) = \mathbf{H}(f)\, \mathbf{P}_{\mathbf{xx}}(f)\, \mathbf{H}^H(f), \tag{15.24}$$

где

$$\mathbf{H}(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{H}[k] \exp(-j2\pi f k T).$$

Заметим, что формально $\mathbf{H}(f)$ не является многоканальным ДВПФ, поскольку здесь опущен масштабный множитель T.

15.5. Многоканальные классические процедуры спектральной оценки

В гл. 5 были обсуждены классические методы автоспектрального и взаимноспектрального оценивания для двух методов оценивания СПМ — периодограммного и коррелограммного. В этой главе читатель найдет алгоритмы для вычисления автоспектральных оценок отдельных каналов и взаимных спектральных оценок пар каналов, которые затем используются для заполнения

клеток матрицы СПМ (15.19). Программа MCPERIOD в приложении 15.А позволяет вычислять матрицу СПМ с помощью периодограммного метода.

Многоканальные периодограммные и коррелограммные методы для оценивания СПМ можно представить более наглядно в многоканальной матричной записи. *Многоканальная усредненная периодограмма*, основанная на усреднении по K сегментам, имеет вид

$$\hat{\mathbf{P}}_{\text{PER}}(f) = \frac{1}{K}\left[\frac{1}{NT}\sum_{k=1}^{K}\mathbf{X}_k(f)\,\mathbf{X}_k^H(f)\right], \qquad (15.25)$$

где

$$\mathbf{X}_k(f) = T\sum_{n=0}^{N-1}\mathbf{x}_k[n]\exp(-j2\pi fnT)$$

— $m\times 1$-вектор ДВПФ, построенный по N отсчетам m-канального выборочного вектора $\mathbf{x}_k[n]$, взятого из k-го сегмента. Усреднение важно не только для целей статистического сглаживания периодограммы, оно также имеет большое значение для минимизации смещения в оценке когерентности. Рассмотрим предельную ситуацию в двухканальном случае без усреднения по сегментам (имеется единственный сегмент). Тогда авто- и взаимные периодограммные оценки, полученные по N отсчетам из каналов x_1 и x_2, имеют вид

$$\hat{P}_{11}(f) = \frac{1}{NT}X_1(f)\,X_1^*(f),$$

$$\hat{P}_{22}(f) = \frac{1}{NT}X_2(f)\,X_2^*(f),$$

$$\hat{P}_{12}(f) = \frac{1}{NT}X_1(f)\,X_2^*(f),$$

где

$$X_1(f) = T\sum_{n=0}^{N-1}x_1[n]\exp(-j2\pi fnT),$$

$$X_2(f) = T\sum_{n=0}^{N-1}x_2[n]\exp(-j2\pi fnT).$$

При этом оценка квадрата модуля когерентности будет равна единице, так как

$$\text{КМК}(f) = \frac{\hat{P}_{12}(f)\,\hat{P}_{12}^*(f)}{\hat{P}_{11}(f)\,\hat{P}_{22}(f)} = \frac{[X_1(f)\,X_2^*(f)]\,[X_1^*(f)\,X_2(f)]}{[X_1(f)\,X_1^*(f)]\,[X_2(f)\,X_2^*(f)]} = 1 \qquad (15.26)$$

для всех f независимо от значений данных. Этот случай иллюстрирует предельную ситуацию в отношении эффекта смещения,

который всегда присутствует в оценках когерентности, полученных из спектральных периодограммных оценок.

Смещенную оценку многоканальной корреляционной матрицы при сдвиге k можно записать для случая $k>0$ в виде

$$\check{\mathbf{R}}_{\mathbf{xx}}[k]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-k-1}\mathbf{x}[n+k]\,\mathbf{x}^H[n], \tag{15.27}$$

где многоканальный вектор данных $\mathbf{x}[n]$ определен формулой (15.1). Полагая, что оценки проведены для сдвигов от 0 до $\pm p$, с помощью многоканального коррелограммного метода получим оценку СПМ

$$\hat{\mathbf{P}}_{\text{КОРР}}(f)=T\sum_{k=-p}^{p}\check{\mathbf{R}}_{\mathbf{xx}}[k]\exp(-j2\pi fkT). \tag{15.28}$$

Выражение (15.28) можно кратко записать в виде

$$\hat{\mathbf{P}}_{\text{КОРР}}(f)=T\underline{\mathbf{e}}_p(f)\,\underline{\check{\mathbf{R}}}_p\underline{\mathbf{e}}_p^H(f), \tag{15.29}$$

где блочно-тёплицева корреляционная матрица блочной размерности $(p+1)\times(p+1)$ определена выражением

$$\underline{\check{\mathbf{R}}}_p=\begin{pmatrix}\check{\mathbf{R}}_{\mathbf{xx}}[0] & \check{\mathbf{R}}_{\mathbf{xx}}[1] & \dots & \check{\mathbf{R}}_{\mathbf{xx}}[p]\\ \check{\mathbf{R}}_{\mathbf{xx}}[-1] & \check{\mathbf{R}}_{\mathbf{xx}}[0] & \dots & \check{\mathbf{R}}_{\mathbf{xx}}[p-1]\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \check{\mathbf{R}}_{\mathbf{xx}}[-p] & \check{\mathbf{R}}_{\mathbf{xx}}[-p+1] & \dots & \check{\mathbf{R}}_{\mathbf{xx}}[0]\end{pmatrix} \tag{15.30}$$

а блочный вектор-*строка* комплексных синусоид $\underline{\mathbf{e}}_p(f)$ из $(p+1)$ блочных элементов определяется как

$$\underline{\mathbf{e}}_p(f)=[\mathbf{I}_m\exp(j2\pi fT)\,\mathbf{I}_m\ \dots\ \exp(j2\pi fpT)\,\mathbf{I}_m]. \tag{15.31}$$

Заметим, что каждый элемент блочного вектора $\mathbf{e}_p(f)$ — это единичная $m\times m$-матрица $\mathbf{I}_m$, умноженная на соответствующее значение комплексной синусоиды.

Ведется разработка схем применения классических алгоритмов автоспектрального оценивания взаимных спектральных плотностей. В случае успеха это сняло бы необходимость развивать взаимные спектральные оценки и полные многоканальные алгоритмы. Например, формируя новые комплексные данные процессов

$$w[n]=x[n]+jy[n],$$
$$z[n]=x[n]+y[n]$$

из исходных процессов $x[n]$ и $y[n]$ и вычисляя автоспектры $P_{xx}(f)$, $P_{yy}(f)$, $P_{ww}(f)$, $P_{zz}(f)$, легко можно показать, что дейст-

вительная и мнимая части взаимной спектральной плотности между каналами x и y описываются выражениями

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\{P_{xy}(f)\} &= \frac{1}{2}[P_{zz}(f) - P_{xx}(f) - P_{yy}(f)],\\ \operatorname{Im}\{P_{xy}(f)\} &= \frac{1}{2}[P_{ww}(f) - P_{xx}(f) - P_{yy}(f)].\end{aligned} \tag{15.32}$$

При использовании метода взаимного спектрального оценивания значения квадрата модуля когерентности, вычисленные по $\hat{P}_{xy}$, которая получается из выражений (15.32), могут превышать 1. Очевидно, что это неприемлемо с точки зрения обнаружения когерентных компонент между каналами, и, следовательно, рассмотренный подход не пригоден для использования.

15.6. Многоканальные АРСС-, АР- и СС-процессы

По аналогии с определением для одноканального случая m-канальный АРСС-процесс определяется как векторная рекурсия

$$\mathbf{x}[n] = -\sum_{k=1}^{p} \mathbf{A}[k]\,\mathbf{x}[n-k] + \sum_{k=0}^{q} \mathbf{C}[k]\,\mathbf{u}[n-k], \tag{15.33}$$

где $\mathbf{A}[k]$ — $m \times m$-матрицы авторегрессионных параметров, $\mathbf{C}[k]$ — $m \times m$-матрицы параметров скользящего среднего и $\mathbf{u}[k]$ — $m \times 1$-вектор, представляющий входной возбуждающий шумовой процесс, в предположении, что это стационарный в широком смысле многоканальный процесс. Z-преобразование, устанавливающее связь между входом и выходом, как следует из (15.19), имеет вид

$$X(z) = A^{-1}(z)\,C(z)\,U(z), \tag{15.34}$$

причем

$$\begin{aligned}A(z) &= \mathbf{I} + \sum_{k=1}^{p} \mathbf{A}[k]\,z^{-k},\\ C(z) &= \mathbf{I} + \sum_{k=1}^{q} \mathbf{C}[k]\,z^{-k}.\end{aligned} \tag{15.35}$$

Следовательно, матричная передаточная функция от входа к выходу равна

$$H(z) = A^{-1}(z)\,C(z). \tag{15.36}$$

Подставляя (15.36) в (15.23), получаем z-преобразование выходной корреляционной последовательности

$$P_{\mathbf{xx}}(z) = A^{-1}(z)\,C(z)\,P_{\mathbf{uu}}(z)\,C^{H}(1/z^{*})\,A^{-H}(1/z^{*}), \tag{15.37}$$

где $^{-H}$ означает эрмитову транспозицию обратной матрицы [1]. Если сделано предположение, что многоканальный входной процесс является белым шумом с постоянной ковариационной матрицей $\mathbf{P}_w$, то выходной процесс имеет многоканальную АРСС СПМ-функцию, получаемую из (15.37):

$$\mathbf{P}_{\text{АРСС}}(f) = T\mathbf{A}^{-1}(f)\,\mathbf{C}(f)\,\mathbf{P}_w\mathbf{C}^H(f)\,\mathbf{A}^{-H}(f) \tag{15.38}$$

и определенную для $|f| \leqslant 1/2T$, где

$$\mathbf{A}(f) = A(\exp[j2\pi fT]) = \mathbf{I} + \sum_{k=1}^{p} \mathbf{A}[k]\exp(-j2\pi fkT)$$

и

$$\mathbf{C}(f) = C(\exp[j2\pi fT]) = \mathbf{I} + \sum_{k=1}^{q} \mathbf{C}[k]\exp(-j2\pi fkT).$$

Многоканальную АРСС СПМ-функцию можно записать иначе

$$\mathbf{P}_{\text{АРСС}}(f) = T[\underline{\mathbf{a}}_p\underline{\mathbf{e}}_p^H(f)]^{-1}[\underline{\mathbf{c}}_q\underline{\mathbf{e}}_q^H(f)]\,\boldsymbol{P}_w[\underline{\mathbf{e}}_q(f)\,\underline{\mathbf{c}}_q^H][\underline{\mathbf{e}}_p(f)\,\underline{\mathbf{a}}_p^H]^{-1}. \tag{15.39}$$

Здесь блочные вектор-*строки* $\underline{\mathbf{a}}_p$ с $p+1$ блочными элементами и $\underline{\mathbf{c}}_q$ с $q+1$ блочными элементами определяются выражениями

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{a}}_p &= (\mathbf{I}\ \mathbf{A}[1]\ \ldots\ \mathbf{A}[p]), \\ \underline{\mathbf{c}}_q &= (\mathbf{I}\ \mathbf{C}[1]\ \ldots\ \mathbf{C}[q]), \end{aligned} \tag{15.40}$$

а $\underline{\mathbf{e}}_p(f)$ и $\underline{\mathbf{e}}_q(f)$ — блочные вектор-строки комплексных синусоид, определяемые формулой (15.31).

Многоканальный АР(p)-процесс

$$\mathbf{x}[n] = -\sum_{k=1}^{p} \mathbf{A}[k]\,\mathbf{x}[n-k] + \mathbf{u}[n] \tag{15.41}$$

имеет z-преобразование

$$\mathrm{P}_{\text{АР}}(z) = \mathrm{A}^{-1}(z)\,\boldsymbol{P}_w\mathrm{A}^{-H}(1/z^*) \tag{15.42}$$

и, следовательно, многоканальную функцию СПМ

$$\mathbf{P}_{\text{АР}}(f) = T[\underline{\mathbf{a}}_p\underline{\mathbf{e}}_p^H(f)]^{-1}\,\boldsymbol{P}_w[\underline{\mathbf{e}}_p(f)\,\underline{\mathbf{a}}_p^H]^{-1}. \tag{15.43}$$

Многоканальный СС(q)-процесс

$$\mathbf{x}[n] = \sum_{k=1}^{q} \mathbf{C}[k]\,\mathbf{u}[n-k] + \mathbf{u}[n] \tag{15.44}$$

имеет z-преобразование

$$\mathrm{P}_{\text{СС}}(z) = \mathrm{C}(z)\,\boldsymbol{P}_w\mathrm{C}^H(1/z^*) \tag{15.45}$$

и, следовательно, многоканальную функцию СПМ

$$\mathbf{P}_{\text{СС}}(f) = T[\underline{\mathbf{c}}_q\underline{\mathbf{e}}_q^H(f)]\,\mathbf{P}_w[\underline{\mathbf{e}}_q(f)\,\underline{\mathbf{c}}_q^H]. \tag{15.46}$$

---

[1] В разд. 3.2 определена эрмитова транспозиция матрицы $\mathbf{A}$: $\mathbf{A}^{\text{н}} = (\mathbf{A}^{\text{т}})^* = (\mathbf{A}^*)^{\text{т}}$. — *Прим. ред.*

Хотя многоканальный процесс может быть векторной авторегрессией, отсюда вовсе не следует, что каждый канал отдельно представляет авторегрессионный процесс [14, 15]. Рассмотрим двухканальную векторную авторегрессию первого порядка

$$\mathbf{x}[n] = -\mathbf{A}[1]\,\mathbf{x}[n-1] + \mathbf{u}[n], \tag{15.47}$$

где во входном процессе отсутствует корреляция между каналами и дисперсия для каждого канала равна единице ($\mathbf{P}_w = \mathbf{I}$), а также

$$\mathbf{A}[1] = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

где a, b, c и d — комплексные элементы.

В случае двухканального АР-процесса его z-преобразование будет иметь вид

$$\mathbf{P}_{\text{АР}}(z) = \mathbf{A}^{-1}(z)\,\mathbf{A}^{-H}(1/z^*), \tag{15.48}$$

где

$$\mathbf{A}(z) = (\mathbf{I} - \mathbf{A}[1]\,z^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 - z^{-1}a & -z^{-1}b \\ -z^{-1}c & 1 - z^{-1}d \end{pmatrix}.$$

Подставляя это выражение для $\mathbf{A}(z)$ в (15.42), получаем

$$\mathbf{P}_{\text{АР}}(z) = \frac{1}{D(z)D(1/z)} \begin{pmatrix} 1 + |b|^2 + |d|^2 + z^{-1}d + zd^* & -(a^*b + c^*d + z^{-1}b + zc^*) \\ -(ab^* + cd^* + z^{-1}c + zb^*) & 1 + |a|^2 + |c|^2 + z^{-1}a + za^* \end{pmatrix}, \tag{15.49}$$

где $D(z)$ — полином вида

$$D(z) = (1 - z^{-1}(a+d) + z^{-2}(ad - bc)). \tag{15.50}$$

Анализ знаменателя $D(z)$ показывает, что каждый элемент матрицы $\mathbf{P}_{\text{АР}}(z)$ имеет *четыре* полюса и *три* нуля в ограниченной z-плоскости. Таким образом, спектр в каждом канале является *одноканальным* АРСС(4,3)-процессом, даже несмотря на то, что многоканальная задача является *векторной авторегрессией первого порядка* с входами, каждый из которых возбуждается независимым белым шумом. Вообще, m-канальная авторегрессия порядка p с возбуждением каждого из каналов независимым белым шумом имеет автоспектры и взаимные спектры с m^2p полюсами и $(m^2-1)p$ нулями в ограниченной z-плоскости (из них p нулей находятся в начале координат) в отличие от одноканальной авторегрессии, имеющей лишь $2p$ полюсов. Это показывает, что автоспектр многоканальной авторегрессии имеет больше степеней свободы, чем автоспектр одноканальной авторегрессии.

15.7. Многоканальные уравнения Юла — Уолкера

В изложении следующих пяти разделов основное внимание будет уделено многоканальной авторегрессионной спектральной оценке. Многоканальным спектральным АРСС- и СС-оценкам в литературе уделено ограниченное внимание. Однако в связи с интересом к ним здесь выводятся в качестве упражнения уравнения Юла — Уолкера для многоканальной АРСС-оценки. К числу работ последних лет по многоканальной АРСС-оценке можно отнести работу Ли и др. [10], Фридлендера [5], Фридлендера и Пората [7].

Стационарный m-канальный авторегрессионный процесс можно представить в виде скалярного произведения блочных векторов

$$\mathbf{e}_p^f[n] = \underline{\mathbf{a}}_p \underline{\mathbf{x}}_p[n], \tag{15.51}$$

для которого блочный *вектор-строка* многоканальной матрицы АР-коэффициентов был определен в (15.40) как

$$\underline{\mathbf{a}}_p = (\mathbf{I}\ \mathbf{A}_p[1] \ \ldots\ \mathbf{A}_p[p]), \tag{15.52}$$

где $\mathbf{I}$ — единичная матрица размером $m \times m$, а блочный *вектор-столбец* многоканальных векторов данных имеет вид

$$\underline{\mathbf{x}}_p[n] = \begin{pmatrix} \mathbf{x}[n] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{x}[n-p] \end{pmatrix}. \tag{15.53}$$

Верхний индекс «f» использован в формуле (15.51), чтобы подчеркнуть, что $\mathbf{e}_p^f[n]$ не только авторегрессионная возбуждающая последовательность (в прежней записи $\mathbf{u}[n]$), но также и ошибка линейного предсказания вперед. Чтобы установить соотношение между матричными элементами АР-коэффициентов и матричной корреляционной последовательностью для сдвигов от 0 до p, умножим обе части (15.51) на $\underline{\mathbf{x}}_p^H[n]$ и вычислим математическое ожидание

$$\mathcal{E}\{\mathbf{e}^f[n]\underline{\mathbf{x}}_p^H[n]\} = \mathcal{E}\{\underline{\mathbf{a}}_p\underline{\mathbf{x}}_p[n]\underline{\mathbf{x}}_p^H[n]\} = \underline{\mathbf{a}}_p\mathcal{E}\{\underline{\mathbf{x}}_p[n]\underline{\mathbf{x}}_p^H[n]\}. \tag{15.54}$$

Определим блочную матрицу $\underline{\mathbf{R}}_p$, состоящую из $(p+1)\times(p+1)$-блочных элементов $\mathbf{R}_{xx}[k]$ (размер каждого из них равен $m \times m$):

$$\underline{\mathbf{R}}_p = \mathcal{E}\{\underline{\mathbf{x}}_p[n]\underline{\mathbf{x}}_p^H[n]\} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathcal{E}\{\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^H[n]\} & \ldots & \mathcal{E}\{\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^H[n-p]\} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \mathcal{E}\{\mathbf{x}[n-p]\mathbf{x}^H[n]\} & \ldots & \mathcal{E}\{\mathbf{x}[n-p]\mathbf{x}^H[n-p]\} \end{pmatrix} = \tag{15.55}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{xx}[0] & \mathbf{R}_{xx}[1] & \dots & \mathbf{R}_{xx}[p] \\ \mathbf{R}_{xx}[-1] & \mathbf{R}_{xx}[0] & \dots & \mathbf{R}_{xx}[p-1] \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{R}_{xx}[-p] & \mathbf{R}_{xx}[-p+1] & \dots & \mathbf{R}_{xx}[0] \end{pmatrix}.$$

Матрица $\underline{\mathbf{R}}_p$ имеет и *эрмитову*, и *блочно-тёплицеву* структуру. Отдельные элементы матрицы $\underline{\mathbf{R}}_p$, вообще говоря, *не* эрмитовы ($\mathbf{R}_{xx}[k] \neq \mathbf{R}^H_{xx}[k]$), хотя $\mathbf{R}_{xx}[-k] = \mathbf{R}^H_{xx}[k]$. Можно упростить $(p+1)\times 1$-блочный вектор $\mathscr{E}\{\mathbf{e}^f[n]\underline{\mathbf{x}}_p^H[n]\}$:

$$\mathscr{E}\{\underline{\mathbf{e}}^f[n]\underline{\mathbf{x}}_p^H[n]\} = \mathscr{E}\left\{\mathbf{e}^f[n]\left(\mathbf{e}^{fH}[n] - \sum_{k=1}^{p}\mathbf{x}^H[n-k]\mathbf{A}_p^H[k]\right)\right\} = \\ = (\mathbf{P}_p^f \quad \mathbf{0} \quad \dots \quad \mathbf{0}), \tag{15.56}$$

где $\mathbf{0}$ — нулевые $m\times m$-матрицы и $\mathbf{P}_p{}^f = \mathscr{E}\{\mathbf{e}^f[n]\mathbf{e}^{fH}[n]\} = \mathbf{P}_w$ — ковариационная матрица возбуждающего АР-шума. Последнее равенство в уравнении (15.56) следует из того, что возбуждающий шумовой процесс не коррелирован с предшествующими значениями АР-процесса, $\mathscr{E}\{\mathbf{e}^f[n]\mathbf{x}^H[n-k]\} = \mathbf{0}$ для $k<n$. С учетом этого результата уравнение (15.54) можно переписать в виде

$$\underline{\mathbf{a}}_p\underline{\mathbf{R}}_p = (\boldsymbol{P}_p^f \quad \mathbf{0} \quad \dots \quad \mathbf{0}). \tag{15.57}$$

Это многоканальная версия нормальных уравнений Юла — Уолкера как для многоканального АР(p)-процесса, так и для многоканального фильтра линейного предсказания вперед порядка p.

Многоканальный авторегрессионный процесс, представляющий собой процесс, образованный с помощью фильтра предсказания *назад*, для временно́го индекса $n-1$ имеет вид

$$\mathbf{e}_p^b[n-1] = \mathbf{x}[n-p-1] + \sum_{k=1}^{p}\mathbf{B}[k]\mathbf{x}[n-p-1+k] = \underline{\mathbf{b}}_p\underline{\mathbf{x}}_p[n-1]. \tag{15.58}$$

Здесь блочный *вектор-строка* многоканальных матричных АР-коэффициентов предсказания назад равен

$$\underline{\mathbf{b}}_p = (\mathbf{B}_p[p] \quad \dots \quad \mathbf{B}_p[1] \quad \mathbf{I}). \tag{15.59}$$

Соответствующие многоканальные уравнения Юла — Уолкера для коэффициентов предсказания назад стационарного многоканального процесса находятся из следующих соотношений:

$$\mathscr{E}\{\mathbf{e}_p^b[n-1]\underline{\mathbf{x}}_p^H[n-1]\} = \mathscr{E}\{\underline{\mathbf{b}}_p\underline{\mathbf{x}}_p[n-1]\underline{\mathbf{x}}_p^H[n-1]\},$$

откуда

$$\underline{\mathbf{b}}_p\underline{\mathbf{R}}_p = (\mathbf{0} \quad \dots \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{P}_p^b), \tag{15.60}$$

где $\mathbf{P}_p{}^b = \mathscr{E}\{\mathbf{e}^b[n-1]\mathbf{e}^{bH}[n-1]\}$ — ковариация возбуждающего шумового процесса для АР-процесса предсказания назад. В общем случае для многоканальных процессов $\mathbf{P}_p{}^b$ будет отличаться от $\mathbf{P}_p{}^f$, тогда как в одноканальном случае они равны. В одноканальном случае было достаточно эрмитово-теплицевой структуры корреляционной матрицы, чтобы гарантировать соотношение сопряженности $a_p[k] = b_p{}^*[k]$ между АР-параметрами предсказания вперед и назад, что было показано в разд. 3.8.1. В многоканальном случае, однако, элементы блочной корреляционной матрицы $\underline{\mathbf{R}}_p$ утрачивают свойство эрмитовости, необходимое для достижения простейшего соотношения между $\underline{\mathbf{a}}_p$ и $\underline{\mathbf{b}}_p$. Z-преобразование спектральной плотности многоканального АР(p)-процесса может быть выражено через коэффициенты фильтра предсказания назад:

$$\mathrm{P}_{\mathrm{AP}}(z) = \mathrm{B}^{-1}(z)\,\boldsymbol{P}_p^b\,\mathrm{B}^{-H}(1/z^*), \tag{15.61}$$

где $\mathrm{B}(z)$ — матричный полином вида

$$\mathrm{B}(z) = z^{-p}\mathbf{I} + \sum_{k=1}^{p} \mathbf{B}[k]\,z^{-p+k} = z^{-p}\left(\mathbf{I} + \sum_{k=1}^{p} \mathbf{B}[k]\,z^k\right). \tag{15.62}$$

Для стационарного многоканального процесса преобразования $\mathrm{P}_{\mathrm{AP}}(z)$, описываемые соотношениями (15.42) и (15.61), должны быть эквивалентными, и, следовательно, любое из этих выражений можно использовать для получения многоканальной АР-оценки СПМ.

15.8. Многоканальный алгоритм Левинсона

Вероятно, впервые быстрый алгоритм для совместного решения уравнений Юла — Уолкера (15.57) и (15.60) был разработан в работе [22]. В нем принят тот же подход, что и в одноканальном алгоритме Левинсона, представленном в разд. 3.8.1. Блочно-теплицеву многоканальную корреляционную матрицу $\mathbf{R}_{p+1}$ можно представить двумя способами:

$$\underline{\mathbf{R}}_{p+1} = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{R}}_p & \underline{\mathbf{s}}_{p+1}^H \\ \underline{\mathbf{s}}_{p+1} & \mathbf{R}_{\mathbf{xx}}[0] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{\mathbf{xx}}[0] & \underline{\mathbf{r}}_{p+1} \\ \underline{\mathbf{r}}_{p+1}^H & \underline{\mathbf{R}}_p \end{pmatrix}, \tag{15.63}$$

для которых блочные вектор-*строки* $\underline{\mathbf{r}}_{p+1}$ и $\underline{\mathbf{s}}_{p+1}$ определяются так:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{r}}_{p+1} &= (\mathbf{R}_{\mathbf{xx}}[1] \;\ldots\; \mathbf{R}_{\mathbf{xx}}[p+1]), \\ \underline{\mathbf{s}}_{p+1} &= (\mathbf{R}_{\mathbf{xx}}[-(p+1)] \;\ldots\; \mathbf{R}_{\mathbf{xx}}[-1]). \end{aligned} \tag{15.64}$$

Эти представления можно затем использовать для построения следующих соотношений:

$$(\underline{\mathbf{a}}_p \;\; 0)\,\underline{\mathbf{R}}_{p+1} = (\boldsymbol{P}_p^f \;\; 0 \;\ldots\; 0 \;\; \Delta_{p+1}), \tag{15.65}$$

$$(0 \;\; \underline{\mathbf{b}}_p)\,\underline{\mathbf{R}}_{p+1} = (\nabla_{p+1} \;\; 0 \;\ldots\; 0 \;\; \boldsymbol{P}_p^b), \tag{15.66}$$

для которых $m\times m$-матрицы Δ_{p+1} и ∇_{p+1} определены в виде

$$\Delta_{p+1}=\mathbf{R}_{xx}[p+1]+\sum_{k=1}^{p}\mathbf{A}_p[k]\,\mathbf{R}_{xx}[p+1-k]=\underline{a}_p\underline{s}_{p+1}^H, \quad (15.67)$$

$$\nabla_{p+1}=\mathbf{R}_{xx}[-p-1]+\sum_{k=1}^{p}\mathbf{B}_p[k]\,\mathbf{R}_{xx}[k-p-1]=\underline{b}_p\underline{r}_{p+1}^H. \quad (15.68)$$

Рекурсия обновления порядка для матриц авторегрессионных коэффициентов предсказания «вперед» и «назад» принимает вид

$$\underline{a}_{p+1}=(\underline{a}_p\ 0)+\mathbf{A}_{p+1}[p+1](0\ \underline{b}_p), \quad (15.69)$$

$$\underline{b}_{p+1}=(0\ \underline{b}_p)+\mathbf{B}_{p+1}[p+1](\underline{a}_p\ 0). \quad (15.70)$$

Матричные элементы, необходимые для определения матричных коэффициентов фильтра линейного предсказания, подчиняются рекурсиям

$$\mathbf{A}_{p+1}[k]=\mathbf{A}_p[k]+\mathbf{A}_{p+1}[p+1]\,\mathbf{B}_p[p+1-k], \quad (15.71)$$

$$\mathbf{B}_{p+1}[k]=\mathbf{B}_p[k]+\mathbf{B}_{p+1}[p+1]\,\mathbf{A}_p[p+1-k] \quad (15.72)$$

при k, изменяющемся от 1 до p. В многоканальном случае имеются две различные матрицы коэффициентов отражения:

$$\mathbf{A}_{p+1}[p+1]=-\Delta_{p+1}(\boldsymbol{P}_p^b)^{-1}, \quad (15.73)$$

$$\mathbf{B}_{p+1}[p+1]=-\nabla_{p+1}(\boldsymbol{P}_p^f)^{-1}. \quad (15.74)$$

В этом заключается отличие от одноканального случая, для которого существовал единственный коэффициент отражения, обусловленный свойством $b_p[p]=a_p^*[p]$ (разд. 3.8.1). Справедливость соотношений (15.69) и (15.70) можно проверить умножением каждой части этих соотношений справа на $\underline{\mathbf{R}}_{p+1}$ и исследованием формул (15.65), (15.66), (15.73) и (15.74). В процессе проверки получаем рекурсии обновления порядка для ковариационных матриц ошибок предсказания

$$\boldsymbol{P}_{p+1}^f=\boldsymbol{P}_p^f+\mathbf{A}_{p+1}[p+1]\,\nabla_{p+1}=(\mathbf{I}-\mathbf{A}_{p+1}[p+1]\,\mathbf{B}_{p+1}[p+1])\,\boldsymbol{P}_p^f, \quad (15.75)$$

$$\boldsymbol{P}_{p+1}^b=\boldsymbol{P}_p^b+\mathbf{B}_{p+1}[p+1]\,\Delta_{p+1}=(\mathbf{I}-\mathbf{B}_{p+1}[p+1]\,\bar{\mathbf{A}}_{p+1}[p+1])\,\boldsymbol{P}_p^b. \quad (15.76)$$

Используя матричное тождество

$$(\underline{a}_p\ 0)\,\underline{\mathbf{R}}_{p+1}\begin{pmatrix}0\\ \underline{b}_p^H\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\ \underline{b}_p\end{pmatrix}\underline{\mathbf{R}}_{p+1}\begin{pmatrix}\underline{a}_p^H\\ 0\end{pmatrix}, \quad (15.77)$$

можно вывести следующую лемму:

$$\nabla_{p+1}=\Delta_{p+1}^H. \quad (15.78)$$

Матрица Δ_{p+1} размером $m \times m$ является просто матрицей взаимной корреляции остатков линейного предсказания вперед и назад при единичном корреляционном сдвиге:

$$\Delta_{p+1} = \mathcal{E}\{e_p^f[n]\, e_p^{b\,H}[n-1]\} = P_p^{fb}. \qquad (15.79)$$

Доказательство этого соотношения оставлено до разд. «Задачи».

Определим нормированную взаимную корреляцию, или *нормированную частную корреляцию*, которую можно сопоставить с одноканальным коэффициентом отражения, определяемым формулой (7.22):

$$\begin{aligned}\Lambda_{p+1} &= (P_p^{f1/2})^{-1}(P_p^{fb})(P_p^{b1/2})^{-H} = \\ &= (\mathcal{E}\{e_p^f[n]\, e_p^{fH}[n]\}^{1/2})^{-1}(\mathcal{E}\{e_p^f[n]\, e_p^{bH}[n-1]\})\times \\ &\quad \times(\mathcal{E}\{e_p^b[n-1]\, e_p^{bH}[n-1]\}^{1/2})^{-H}. \qquad (15.80)\end{aligned}$$

В многоканальном случае матрица коэффициентов частной корреляции и матрицы коэффициентов отражения не тождественны: в этом — отличие от одноканального случая, для которого они совпадают. Верхний индекс $(-H)$ означает сопряженную транспозицию обратной матрицы, т. е. по порядку выполнения сначала осуществляется обращение матрицы, а затем производится сопряженная транспозиция[1]. Верхний индекс 1/2 означает нижнюю треугольную матрицу, полученную разложением по методу Холецкого[2] исходной эрмитовой матрицы. Следовательно, если $\mathbf{M}$ — эрмитова матрица, то

$$\mathbf{M} = (\mathbf{M}^{1/2})(\mathbf{M}^{1/2})^H. \qquad (15.81)$$

Коэффициенты отражения в формулах (15.73) и (15.74), соответствующие предсказанию вперед и назад, можно выразить через Λ_{p+1}:

$$\mathbf{A}_{p+1}[p+1] = -(P_p^{f1/2})\,\Lambda_{p+1}\,(P_p^{b1/2})^{-1}, \qquad (15.82)$$

$$\mathbf{B}_{p+1}[p+1] = -(P_p^{b1/2})\,\Lambda_{p+1}^H\,(P_p^{f1/2})^{-1}. \qquad (15.83)$$

Многоканальная нормированная корреляция Λ_p позволяет получить единственную параметрическую последовательность для многоканального алгоритма, так же как коэффициент отражения $a_p[p]$ обеспечивает единственную параметризацию в случае одноканального АР-процесса. Основываясь на неотрицательной определенности корреляции $\underline{\mathbf{R}}_p$, Морф и др. показали [13], что сингулярные числа $\Lambda_{p+1}\Lambda^H_{p+1}$ находятся внутри единичного круга. Это представляет многоканальное обобщение требования к одноканальным коэффициентам отражения, которые должны быть меньше единицы.

---

[1] См. замечание к формуле (15.37). — *Прим. ред.*

[2] Метод Холецкого (метод корня квадратного) см. [6*], с. 176. — *Прим. ред.*

Формулы (15.67), (15.69), (15.70), (15.73—15.76) составляют многоканальное обобщение алгоритма Левинсона. Выражения (15.80) и (15.83) можно использовать вместо выражений (15.73) и (15.74). Структура алгоритма для рекурсии обновления порядка требует, чтобы $\underline{\mathbf{R}}_q$ были строго положительно определенными и несингулярными для любого порядка от $q=1$ до $q=p$. Это условие выполняется до тех пор, пока $\det|\mathbf{P}_q{}^f|>0$ и $\det|\mathbf{P}_q{}^b|>0$ для каждого значения порядка. Начальные условия $\mathbf{P}_0{}^f=\mathbf{P}_0{}^b=\mathbf{R}_{xx}[0]$, необходимые для начала рекурсии Левинсона, получены анализом формул (15.65) и (15.66).

Умножая обе части уравнений (15.69) и (15.70) на $\underline{\mathbf{x}}_{p+1}[n]$, можно получить полезные соотношения между многоканальными ошибками линейного предсказания порядка p и ошибками линейного предсказания порядка $p+1$:

$$\mathbf{e}_{p+1}^f[n]=\mathbf{e}_p^f[n]+\mathbf{A}_{p+1}[p+1]\,\mathbf{e}_p^b[n-1], \tag{15.84}$$

$$\mathbf{e}_{p+1}^b[n]=\mathbf{e}_p^b[n-1]+\mathbf{B}_{p+1}[p+1]\,\mathbf{e}_p^f[n]. \tag{15.85}$$

15.9. Многоканальное обращение блочно-тёплицевой матрицы

Многоканальный алгоритм Левинсона служит основой для методов, описывающих полное обращение эрмитовой блочно-теплицевой корреляционной матрицы уравнения (15.55). Акаике [1] и Уотсон [20] в числе первых опубликовали алгоритмы для такого блочного обращения. Форма эрмитовой блочно-теплицевой обратной матрицы, которая будет особенно полезна в настоящей главе, имеет следующий вид:

$$\underline{\mathbf{R}}_p^{-1}=\underline{\mathbf{A}}_p^H\underline{\mathbf{P}}_p^f\underline{\mathbf{A}}_p-\underline{\mathbf{B}}_p^H\underline{\mathbf{P}}_p^b\underline{\mathbf{B}}_p, \tag{15.86}$$

где

$$\underline{\mathbf{A}}_p=\begin{bmatrix}\mathbf{I} & A_p[1] & \dots & \mathbf{A}_p[p]\\ \mathbf{0} & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{A}_p[1]\\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{I}\end{bmatrix},\quad \underline{\mathbf{P}}_p^f=\begin{bmatrix}(\boldsymbol{P}_p^f)^{-1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & (\boldsymbol{P}_p^f)^{-1} & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & (\boldsymbol{P}_p^f)^{-1}\end{bmatrix},$$

$$\underline{\mathbf{B}}_p=\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{B}_p[p] & \dots & \mathbf{B}_p[1]\\ \mathbf{0} & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{B}_p[p]\\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix},\quad \underline{\mathbf{P}}_p^b=\begin{bmatrix}(\boldsymbol{P}_p^b)^{-1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & (\boldsymbol{P}_p^b)^{-1} & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & (\boldsymbol{P}_p^b)^{-1}\end{bmatrix}.$$

Этот результат можно вывести, используя подход разд. 3.8.1 (см. также [6]).

15.10. Многоканальное авторегрессионное спектральное оценивание

Алгоритмы, непосредственно по данным оценивающие параметры многоканального АР-процесса, построены подобно алгоритмам, описанным для одноканального АР-процесса в гл. 8. В этом разделе обсуждаются алгоритмы, основанные на оценивании корреляционной функции, на оценивании частной корреляции и на линейном предсказании на основе метода наименьших квадратов.

15.10.1. Метод оценивания корреляционной функции

Наиболее очевидный подход к АР-оцениванию СПМ по данным r-канальной выборки — это вместо неизвестной корреляционной функции использовать ее оценки. Смещенная оценка, основанная на N векторных отсчетах от $\mathbf{x}[1]$ до $\mathbf{x}[N]$, имеет следующий вид:

$$\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{x}}[m] = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N-m} \mathbf{x}[n+m]\,\mathbf{x}^H[n], \qquad (15.87)$$

где $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{xx}}[m]$ определена для $0 \leqslant m \leqslant N-1$. Автокорреляционные члены для отрицательных сдвигов получают из свойства $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{xx}}[-m] = \hat{\mathbf{R}}^H_{\mathbf{xx}}[m]$. Для вычисления отдельных автокорреляционных и взаимнокорреляционных элементов матрицы $\mathbf{R}_{\mathbf{xx}}[m]$ можно использовать подпрограмму CORRELATION. Использование смещенных корреляционных оценок гарантирует положительную полуопределенность $\underline{\mathbf{R}}_p$. Комбинируя корреляционные оценки с многоканальным алгоритмом Левинсона, получают оценки матриц АР-коэффициентов, которые затем можно использовать в формуле (15.43) для получения АР-оценки СПМ. Будем называть эту процедуру многоканальным алгоритмом Юла — Уолкера.

15.10.2. Оценивание частной корреляции: Метод Виеры — Морфа

Только остаточная взаимная корреляция $\mathbf{\Delta}_p$, или, что эквивалентно, частная корреляция $\mathbf{\Lambda}_p$, зависит от корреляционной функции $\mathbf{R}_{\mathbf{xx}}[m]$. Замена их оценками, основанными на доступных данных, позволила бы в алгоритм оценивания АР-параметра включить остальную часть рекурсии Левинсона. Были развиты алгоритмы, параллельные геометрическим и гармоническим алгоритмам гл. 8 для оценивания коэффициентов отражения.

Многоканальную разновидность геометрического алгоритма предложили Виера и Морф [12]. Они предложили оценивать частную корреляцию по формуле

$$\hat{\mathbf{\Lambda}}_{p+1} = (\hat{\mathbf{P}}_p^{f\,1/2})^{-1} (\hat{\mathbf{P}}_p^{fb}) (\hat{\mathbf{P}}_p^{b\,1/2})^{-H}, \tag{15.88}$$

основанной на оценках матриц остаточной дисперсии $\mathbf{P}_p^f$, $\mathbf{P}_p^b$ и ковариационной матрицы $\mathbf{P}_p^{fb}$:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{P}}_p^f &= \frac{1}{N} \sum_{n=p+2}^{N} \mathbf{e}_p^f[n]\, \mathbf{e}_p^{fH}[n], \\
\hat{\mathbf{P}}_p^b &= \frac{1}{N} \sum_{n=p+2}^{N} \mathbf{e}_p^b[n-1]\, \mathbf{e}_p^{bH}[n-1], \\
\hat{\mathbf{P}}_p^{fb} &= \frac{1}{N} \sum_{n=p+2}^{N} \mathbf{e}_p^f[n]\, \mathbf{e}_{p-1}^{bH}[n-1].
\end{aligned} \tag{15.89}$$

Заметим, что множитель $1/N$ при вычислении $\hat{\mathbf{\Lambda}}_{p+1}$ сокращается.

Остатки $\mathbf{e}_p^f[n]$ и $\mathbf{e}_p^b[n]$ для $p+1 \leqslant n \leqslant N$ при каждом порядке обновляются с использованием рекурсий в соответствии с уравнениями (15.84) и (15.85). При этих модификациях для оценивания $\hat{\mathbf{\Lambda}}_{p+1}$ многоканальный алгоритм Левинсона может развиваться дальше, как в случае известной корреляции. Это включает обновление порядка по формулам (15.75) и (15.76) для $\mathbf{P}_p^f$ и $\mathbf{P}_p^b$; оценки $\hat{\mathbf{P}}_p^f$ и $\hat{\mathbf{P}}_p^b$ используются только для оценивания $\hat{\mathbf{\Lambda}}_{p+1}$.

В геометрический алгоритм Виеры — Морфа начальные условия вводят, полагая

$$\mathbf{P}_0^f = \mathbf{P}_0^b = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mathbf{x}[n]\, \mathbf{x}^H[n] \tag{15.90}$$

$$\mathbf{e}_0^f[n] = \mathbf{e}_0^b[n] = \mathbf{x}[n], \tag{15.91}$$

для $1 \leqslant n \leqslant N$. Этот многоканальный алгоритм сводится к алгоритму геометрического среднего в случае одного канала, поскольку в этом случае $\mathbf{P}_p^f = \mathbf{P}_p^b = \rho$. В приложении 15.Б имеется программа MCAR, реализующая алгоритм Виеры — Морфа. Программа MCARPSD для вычисления результирующей многоканальной авторегрессионной спектральной плотности мощности содержится в приложении 15.В.

15.10.3. Оценивание частной корреляции: метод Наттолла — Странда

Многоканальная версия алгоритма гармонического среднего была предложена независимо Наттоллом [14, 15] и Страндом [19]. Они избрали путь непосредственного оценивания коэффициента взаимной корреляции Λ_p на основе данных вместо оценивания нормированной частной корреляции Δ_p. Оценка, которая получается с помощью матрицы Δ_p, минимизирующей след взвешенного среднего (арифметического среднего) *оцененных* ковариационных матриц остатков ковариации линейного предсказания вперед и назад

$$\mathrm{tr}\,\{\mathbf{V}_{p-1}\hat{\boldsymbol{P}}_p^f + \mathbf{W}_{p-1}\hat{\boldsymbol{P}}_p^b\}, \tag{15.92}$$

налагает три условия:

$$\mathbf{e}_p^f[n] = \mathbf{e}_{p-1}^f[n] - \Delta_p(\boldsymbol{P}_p^b)^{-1}\mathbf{e}_{p-1}^b[n-1], \tag{15.93}$$

$$\mathbf{e}_p^b[n] = \mathbf{e}_p^b[n-1] - \Delta_p^H(\boldsymbol{P}_p^f)^{-1}\mathbf{e}_{p-1}^f[n], \tag{15.94}$$

$$\mathbf{A}_p[p]\,\boldsymbol{P}_p^f = (\mathbf{B}_p[p]\,\boldsymbol{P}_p^b)^H. \tag{15.95}$$

Оценки $\hat{\mathbf{P}}_p{}^f$ и $\hat{\mathbf{P}}_p{}^b$ были определены выше соотношениями (15.89). В качестве матриц $\mathbf{V}_p$ и $\mathbf{W}_p$ выбираются произвольные положительно определенные матрицы. Условия (15.93) и (15.94) следуют непосредственно из формул (15.69), (15.70), (15.73) и (15.74). Линейное матричное условие (15.95) следует непосредственно из формул (15.73), (15.74) и (15.78) и показывает, что матрицы коэффициентов отражения не могут быть определены независимо. Эти ограничения совместно вынуждают решение для Δ_p в возможно большей мере подчиняться свойствам многоканального алгоритма Левинсона. Весовые матрицы должны быть тщательно подобраны так, чтобы результирующее решение для Δ_p приводило к устойчивой корреляционной последовательности (это гарантировано, если Λ_p имеет сингулярные числа, меньшие или равные единице) и положительно определенной многоканальной спектральной оценке.

Наттолл [16] подробно исследовал весовые матрицы и установил, что к желаемому свойству устойчивости приведут обратные матрицы

$$\mathbf{V}_p = (\boldsymbol{P}_p^f)^{-1}, \tag{15.96}$$

$$\mathbf{W}_p = (\boldsymbol{P}_p^b)^{-1}. \tag{15.97}$$

Оценки АР-параметра устойчивы, если все нули $\det[\mathbf{A}_p(z)]$ и $\det[z^{-p}\mathbf{B}_p(1/z)]$ находятся внутри единичного круга на z-плоскости. Устойчивость гарантирует, что корреляционные экстраполяции вперед и назад являются затухающими продолжениями [16]. Желательно не иметь каналов с большими ошибками, которые создают большие выбросы. Представляется разумным, чтобы

веса в формулах (15.96) и (15.97) взвешивали каждый канал пропорционально обратной величине его квадрата ошибки. Если выбраны именно такие веса, то минимизация величины (15.92) дает матричное выражение

$$\hat{\mathbf{P}}_p^f (\mathbf{P}_p^f)^{-1} \hat{\mathbf{\Delta}}_{p+1} + \hat{\mathbf{\Delta}}_{p+1} (\mathbf{P}_p^b)^{-1} \hat{\mathbf{P}}_p^b = -2\hat{\mathbf{P}}_p^{fb}, \tag{15.98}$$

которое содержит смесь ковариационных матриц ошибок $\mathbf{P}_p{}^f$ и $\mathbf{P}_p{}^b$ из рекурсии Левинсона и *оценок* ковариационных матриц ошибок $\hat{\mathbf{P}}_p{}^f$, $\hat{\mathbf{P}}_p{}^b$ и $\hat{\mathbf{P}}_p{}^{fb}$. В одноканальном случае каждый элемент уравнения (15.98) превращается в скаляр и ковариации ошибок равны, т. е. $\mathbf{P}_p{}^f = \mathbf{P}_p{}^b$. Замечая, что $\mathbf{A}_{p+1}[p+1] = \hat{\mathbf{\Delta}}_{p+1} \mathbf{P}_p{}^f$, получаем решение для $\mathbf{A}_{p+1}[p+1]$ в одноканальном случае, которое переходит в соотношение для гармонического среднего:

$$\mathbf{A}_{p+1}[p+1] = \frac{-2\hat{\mathbf{P}}_p^{fb}}{\hat{\mathbf{P}}_p^f + \hat{\mathbf{P}}_p^b}. \tag{15.99}$$

Таким образом, в одноканальном случае многоканальный алгоритм Наттолла — Странда идентичен алгоритму Берга (разд. 8.4).

Уравнение (15.98) — это частный случай билинейного матричного уравнения

$$\mathbf{AX} + \mathbf{XB} = \mathbf{C}, \tag{15.100}$$

в котором $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ и $\mathbf{X}$ — $m \times m$-матрицы. Решения, приводящие к единственной матрице $\mathbf{X}$, были получены несколькими авторами. Наттолл [15] выбрал решение

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \mathbf{PQ}^{-1}, \\ \mathbf{P} &= \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \mathbf{A}_k \mathbf{C} \mathbf{B}^{m-1-k}, \\ \mathbf{Q} &= \sum_{k=0}^{m} (-1)^k a_k \mathbf{B}^{m-k}, \\ a_k &= -\frac{1}{k} \operatorname{tr}(\mathbf{A}\mathbf{A}_{k-1}), \quad 1 \leqslant k \leqslant m, \\ \mathbf{A}_k &= \mathbf{A}\mathbf{A}_{k-1} + a_k \mathbf{I}, \quad 1 \leqslant k \leqslant m, \end{aligned} \tag{15.101}$$

в котором $a_0 = 1$ и $\mathbf{A}_0 = \mathbf{I}$. В двухканальном случае [17] матрицы $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ можно упростить

$$\mathbf{P} = \mathbf{CB} - (\mathbf{A} - \operatorname{tr}(\mathbf{A})\mathbf{I})\mathbf{C}, \tag{15.102}$$

$$\mathbf{Q} = (\operatorname{tr}\mathbf{A} + \operatorname{tr}\mathbf{B})\mathbf{B} + (\det\mathbf{A} - \det\mathbf{B})\mathbf{I}. \tag{15.103}$$

Начальные условия в алгоритме Наттолла — Странда вводятся заданием в качестве $\mathbf{P}_0{}^f$, $\mathbf{P}_0{}^b$, $\mathbf{e}_0{}^f[n]$ и $\mathbf{e}_0{}^b[n]$ значений, получаемых с помощью формул (15.90) и (15.91). В приложении 15.Б приводится программа MCAR для реализации этого алгоритма.

Если параметры в этой программе соответствуют METHOD=2 и NUMCHS=1, то она даст решение, идентичное тому, которое дает программа BURG в приложении 8.Б.

15.10.4. Ковариационный метод линейного предсказания

Алгоритмы, построенные на многоканальных обобщениях одноканальных алгоритмов линейного предсказания на основе метода наименьших квадратов разд. 8.5, являются их непосредственным развитием. Многоканальные ошибки линейного предсказания вперед

$$\mathbf{e}_p^f[n] = \mathbf{x}[n] + \sum_{k=1}^{p} \mathbf{A}_p[k]\,\mathbf{x}[n-k] = \underline{\mathbf{a}}_p \underline{\mathbf{x}}_p[n] \qquad (15.104)$$

и линейного предсказания назад

$$\mathbf{e}_p^b[n] = \mathbf{x}[n-p] + \sum_{k=1}^{p} \mathbf{B}_p[k]\,\mathbf{x}[n-p+k] = \underline{\mathbf{b}}_p \underline{\mathbf{x}}_p[n] \qquad (15.105)$$

могут быть определены для временны́х индексов от $n=1$ до $n=N+p$, если сделано допущение о том, что $\mathbf{x}[n]=\mathbf{0}$ вне доступного диапазона наблюдений (принимается равным от $n=1$ до $n=N$). Эрмитовы, неотрицательно определенные матрицы квадратов ошибок линейного предсказания вперед и назад

$$\boldsymbol{P}_p^f = \sum_{n=p+1}^{N} \mathbf{e}_p^f[n]\,(\mathbf{e}_p^f[n])^H = \sum_{n=p+1}^{N} \underline{\mathbf{a}}_p \underline{\mathbf{x}}_p[n]\,\underline{\mathbf{x}}_p^H[n]\,\underline{\mathbf{a}}_p^H = \underline{\mathbf{a}}_p \underline{\mathbf{R}}_p \underline{\mathbf{a}}_p^H, \qquad (15.106)$$

$$\boldsymbol{P}_p^b = \sum_{n=p+1}^{N} \mathbf{e}_p^b[n]\,(\mathbf{e}_p^b[n])^H = \underline{\mathbf{b}}_p \underline{\mathbf{R}}_p \underline{\mathbf{b}}_p^H \qquad (15.107)$$

и $(p+1)\times(p+1)$-эрмитова блочная матрица данных

$$\underline{\mathbf{R}}_p = \sum_{n=p+1}^{N} \underline{\mathbf{x}}_p[n]\,\underline{\mathbf{x}}_p^H[n] \qquad (15.108)$$

формируются, однако, суммированием только в пределах от $n=p+1$ до $n=N$. Таким образом, используются лишь имеющиеся данные, что соответствует «ковариационному» случаю линейного предсказания. При этом берутся только реальные ошибки невзвешенных многоканальных данных. «Автокорреляционный» и предвзвешенный случаи линейного предсказания с интервалами индексов соответственно $1 \leqslant n \leqslant N+p$ и $1 \leqslant n \leqslant N$ также могут применяться, но ковариационный случай дает лучшие результаты для коротких последовательностей данных.

Применение аппарата теории многоканальных матриц для раздельной минимизации скаляров $\mathrm{tr}\,\mathbf{P}_p^f = \Sigma(\mathbf{e}_p^f)^H \mathbf{e}_p^f$ и $\mathrm{tr}\,\mathbf{P}_p^b =$

$=\Sigma(\mathbf{e}_p{}^b)^H\mathbf{e}_p{}^b$ приводит к следующей паре нормальных уравнений многоканального линейного предсказания:

$$\underline{\mathbf{a}}_p\underline{\mathbf{R}}_p=(P_p^f\ 0\ \ldots\ 0), \tag{15.109}$$

$$\underline{\mathbf{b}}_p\underline{\mathbf{R}}_p=(0\ \ldots\ 0\ P_p^b). \tag{15.110}$$

Заметим, что для получения решений $\underline{\mathbf{R}}_p$ должна быть положительно определенной (и несингулярной). Матрицу $\underline{\mathbf{R}}_p$ можно записать в следующем виде:

$$\underline{\mathbf{R}}_p=\begin{pmatrix}\mathbf{R}_{xx}[0,\ 0] & \ldots & \mathbf{R}_{xx}[0,\ p]\\ \vdots & & \vdots\\ \mathbf{R}_{xx}[p,\ 0] & \ldots & \mathbf{R}_{xx}[p,\ p]\end{pmatrix} \tag{15.111}$$

с элементами

$$\mathbf{R}_{xx}[i,\ j]=\sum_{n=p+1}^{N}\mathbf{x}[n-i]\,\mathbf{x}^H[n-j]. \tag{15.112}$$

Хотя $\underline{\mathbf{R}}_p$ не является блочно-теплицевой, быстрый алгоритм, решающий уравнения (15.109) и (15.110), был сконструирован автором в тех же основных направлениях, что и одноканальный ковариационный алгоритм в гл. 8. Как и в одноканальном случае, многоканальная СПМ, полученная из матриц коэффициентов линейного предсказания вперед, даст оценку СПМ, отличную от полученной из матриц коэффициентов предсказания назад, в связи с безусловной раздельной минимизацией следов матриц квадратов ошибок предсказаний вперед и назад, что приводит к $\underline{\mathbf{R}}_p$, не имеющей блочно-теплицевой структуры. Это не согласуется с допущением о стационарности используемой модели. Однако эти спектральные оценки все же будут весьма близки. Как и в одноканальном случае, устойчивость многоканальных фильтров линейного предсказания не гарантирована, т. е. не гарантирована устойчивость корреляционной функции.

15.10.5. Многоканальная спектральная АР-оценка СПМ

АР-оценка СПМ завершается вычислением многоканальной СПМ. Спектральная плотность в случае авторегрессионных коэффициентов предсказания вперед (15.43) и спектральная плотность в случае авторегрессионных коэффициентов предсказания назад (15.61), как функции частоты имеют вид

$$\mathbf{P}_{\text{АР}}(f)=T[\mathbf{A}(f)]^{-1}P_p^f[\mathbf{A}(f)]^{-H}, \tag{15.113}$$

$$\mathbf{P}_{\text{АР}}(f)=T[\mathbf{B}(f)]^{-1}P_p^b[\mathbf{B}(f)]^{-H}, \tag{15.114}$$

где

$$\mathbf{A}(f) = \mathbf{I} + \sum_{k=1}^{p} \mathbf{A}[k] \exp(-j2\pi fkT), \qquad (15.115)$$

$$\mathbf{B}(f) = \exp(-j2\pi fpT)\left[\mathbf{I} + \sum_{k=1}^{p} \mathbf{B}[k] \exp(j2\pi fkT)\right]. \qquad (15.116)$$

Программа MCARPSD позволяет вычислить каждое из выражений (15.113) и (15.114) для заданной частоты.

15.11. Выбор порядка авторегрессии

Определение порядка многоканальной АР-модели производится с помощью многоканальной версии AIC-критерия Акаике [8, 15], имеющей вид

$$\text{ИКА}[p] = N \ln(\det \boldsymbol{P}_p^f) + 2m^2p = M \ln(\det \boldsymbol{P}_p^b) + 2m^2p. \qquad (15.117)$$

Искомый порядок — тот, при котором величина ИКА$[p]$ имеет минимум. Предлагаемая [15] верхняя граница для порядка — это $3\sqrt{N/m}$, где m — число каналов, а N — число отсчетов данных, приходящихся на канал. Вообще, процедура выбора порядка в многоканальном АР-анализе еще недостаточно исследована, поэтому значение ИКА$[p]$ указывает порядок лишь ориентировочно.

15.12. Экспериментальное сравнение многоканальных авторегрессионных процедур оценивания СПМ

Аналитическое описание реализации различных многоканальных АР-оценок СПМ наталкивается на значительные математические трудности, поэтому приходится прибегнуть к экспериментальным подходам для получения эмпирических характеристик. Здесь для характеризации возможностей использованы два типа двухканальных наборов данных. Один — истинная двухканальная авторегрессия первого порядка. Второй — двухканальный процесс с тонами, погруженными в окрашенный шумовой процесс, подобный тест-процессу в приложении II.

В первом испытании для генерации наборов данных использовали двухканальный авторегрессионный процесс первого порядка ($p=1$). Данные получали согласно рекурсии

$$\mathbf{x}[n] = -\mathbf{A}[1]\mathbf{x}[n-1] + \mathbf{w}[n], \qquad (15.118)$$

где матрица авторегрессионных коэффициентов имеет вид

$$\mathbf{A}[1] = \begin{pmatrix} -0{,}85 & +0{,}75 \\ -0{,}65 & -0{,}55 \end{pmatrix}, \qquad (15.119)$$

а $\mathbf{w}[n]$ — двухканальный белый шум, в котором отсутствует кор-

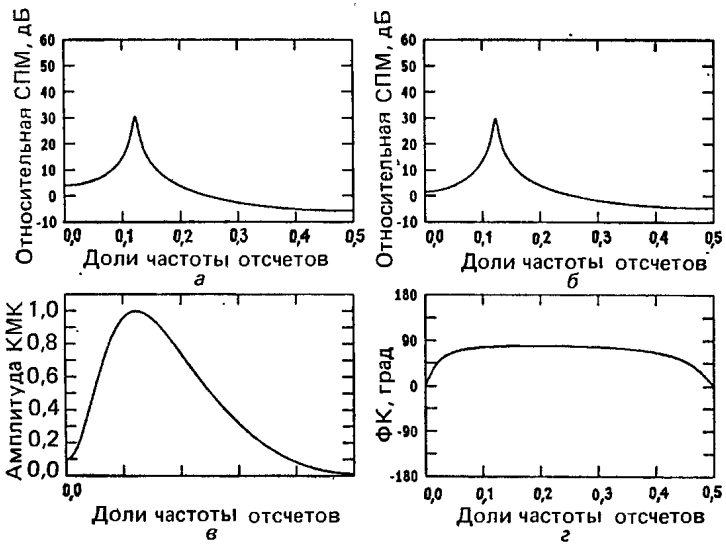


Рис. 15.2. Истинные спектры АР(1)-тест-процесса: *а* — автоспектр для канала 1; *б* — автоспектр для канала 2; *в* — квадрат модуля когерентности (КМК); *г* — фаза когерентности (ФК).

реляция между каналами и дисперсия в каждом канале равна единице. Даже несмотря на то, что это авторегрессионный процесс первого порядка, автоспектры каждого канала будут иметь четыре полюса и три нуля. На рис. 15.2 изображены истинные автоспектры и когерентность для рассматриваемого процесса. Автоспектры для каждого из двух каналов и КМК имеют пики на частоте, равной 0,12295 частоты отсчетов. Фаза комплексной когерентности (взаимного спектра) на частоте, соответствующей пику, равна 90 и 0° на частотах 0 и 0,5 частоты отсчетов. Пиковая величина квадрата модуля когерентности на частоте пика равна 0,999013. Были обработаны 20 последовательностей, каждая из 100 отсчетных точек, с помощью каждого из трех АР-алгоритмов с порядком p, ограниченным единицей. 20 спектральных оценок перекрылись, как показано на рис. 15.3—15.6. Все автоспектры построены для 1500 значений. Из четырех наборов кривых алгоритмы Наттолла — Странда и линейного предсказания назад имели наименьшую дисперсию амплитуды СПМ, тогда как алгоритмы Виеры — Морфа и линейного предсказания вперед имели наименьшую дисперсию положения спектрального пика на оси частот (дисперсия по частоте). В остальном все четыре метода дали очень близкие спектральные оценки.

В следующем испытании использовались последовательности данных с тремя синусоидами в окрашенном шумовом процессе.

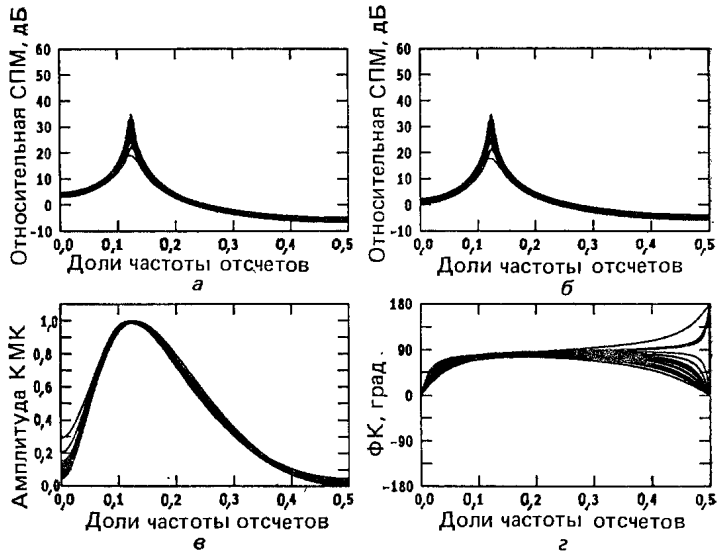


Рис. 15.3. АР(1)-оценка, полученная с помощью алгоритма Наттолла — Странда: *а* — автоспектр для канала 1; *б* — автоспектр для канала 2; *в* — квадрат модуля когерентности (КМК); *г* — фаза когерентности (ФК).

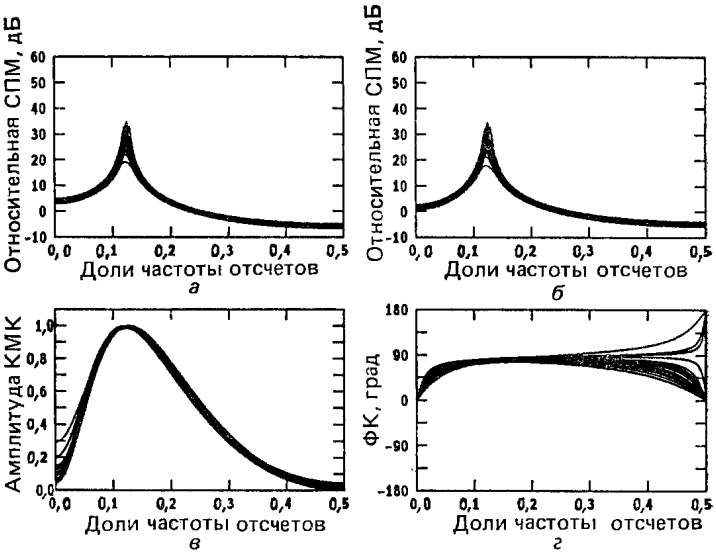


Рис. 15.4. АР(1)-оценка, полученная с помощью алгоритма Виеры — Морфа: *а* — автоспектр для канала 1; *б* — автоспектр для канала 2; *в* — квадрат модуля когерентности (КМК); *г* — фаза когерентности (ФК).

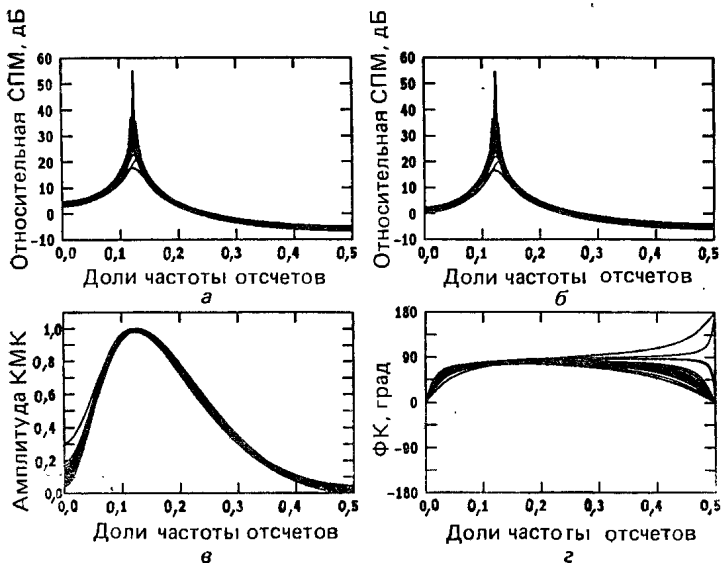


Рис. 15.5. АР(1)-оценка (коэффициенты предсказания вперед), полученная с помощью ковариационного алгоритма: *а* — автоспектр для канала 1; *б* — автоспектр для канала 2; *в* — квадрат модуля когерентности (КМК); *г* — фаза когерентности (ФК).

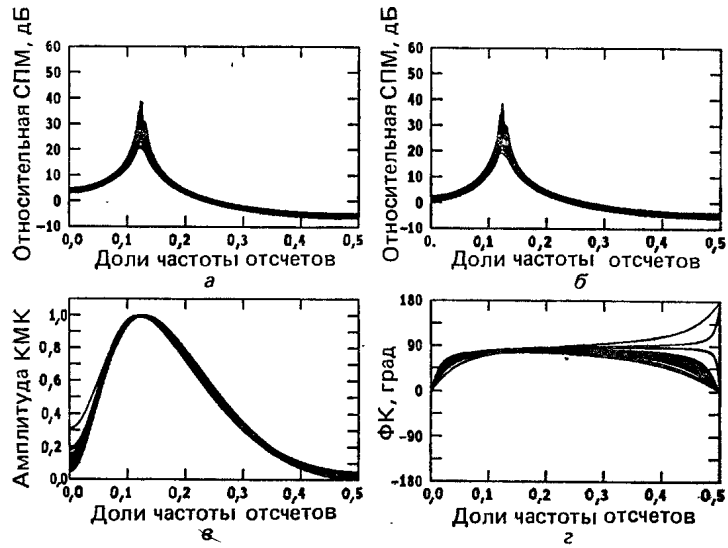


Рис. 15.6. АР(1)-оценка (коэффициенты предсказания назад), полученная с помощью ковариационного алгоритма: *а* — автоспектр для канала 1; *б* — автоспектр для канала 2; *в* — квадрат модуля когерентности (КМК); *г* — фаза когерентности (ФК).

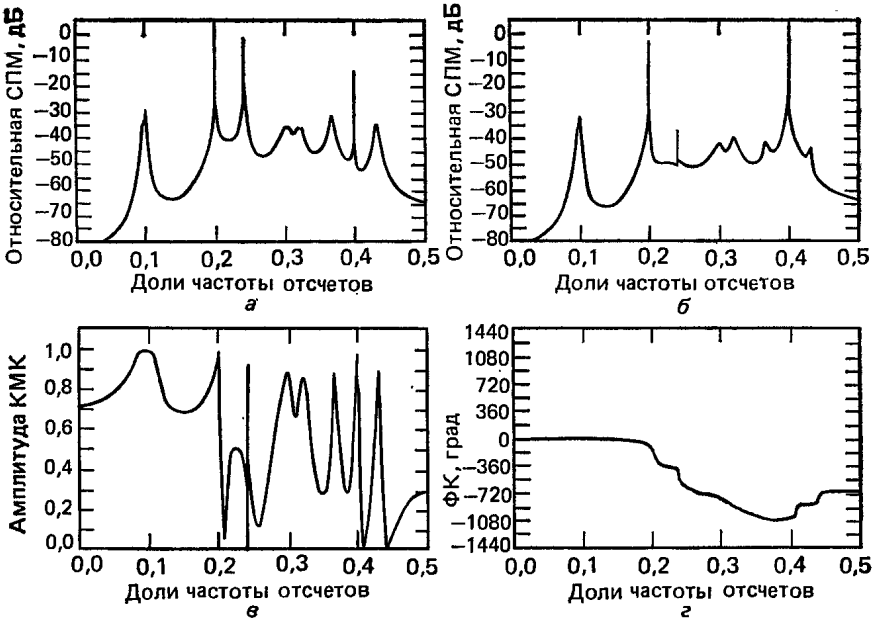


Рис. 15.7. AP(12)-оценка для 64 отсчетов тест-последовательности, полученная с помощью алгоритма Наттолла — Странда: *а* — автоспектр для канала 1; *б* — автоспектр для канала 2; *в* — квадрат модуля когерентности (КМК); *г* — фаза когерентности (ФК).

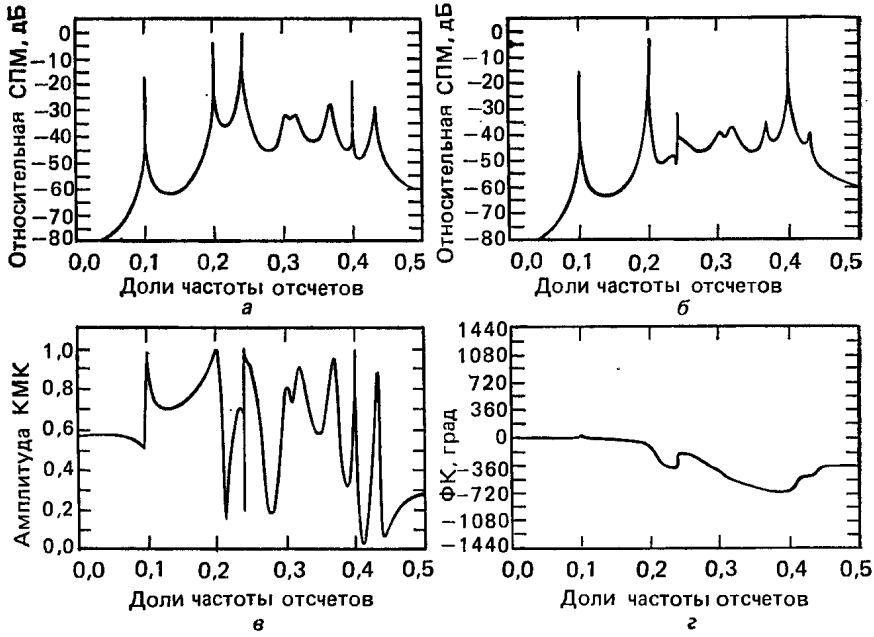


Рис. 15.8. AP(12)-оценка для 64 отсчетов испытательной последовательности, полученная с помощью алгоритма Виеры — Морфа: *а* — автоспектр для канала 1; *б* — автоспектр для канала 2; *в* — квадрат модуля когерентности (КМК); *г* — фаза когерентности (ФК).

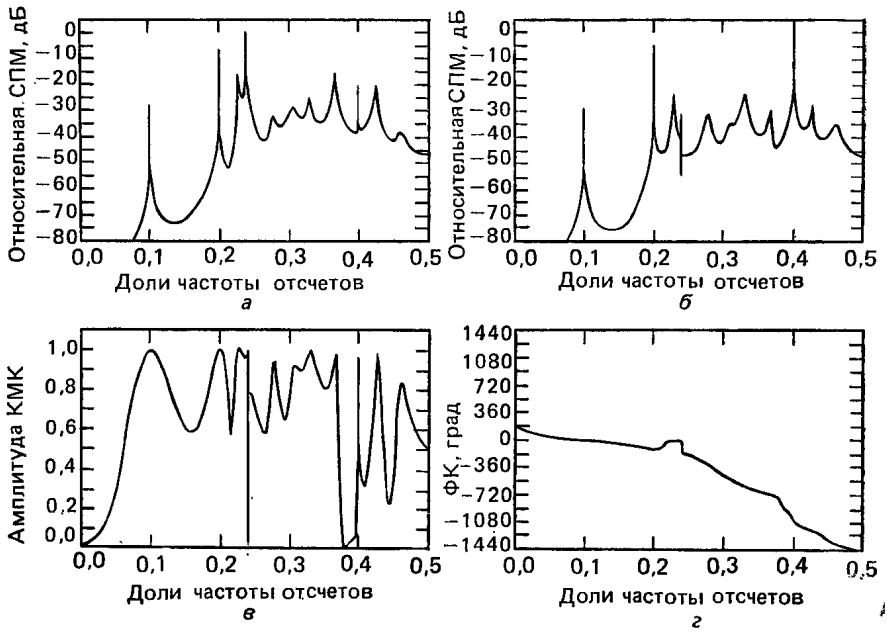


Рис. 15.9. АР(12)-оценка (коэффициенты предсказания вперед) для 64 отсчетов тест-последовательности, полученная с помощью ковариационного алгоритма: *а* — автоспектр для канала 1; *б* — автоспектр для канала 2; *в* — квадрат модуля когерентности (КМК); *г* — фаза когерентности (ФК).

В канале 1 были использованы синусоиды с частотами (в долях частоты отсчетов) 0,1, 0,2 и 0,24 с соответствующими амплитудами 0,1, 1,0 и 1,0 и начальными фазами 0, 90 и 235°. Окрашенный шумовой процесс с большей частью энергии на частотах, превышающих частоты этих синусоид, генерировался путем пропускания белого шума с дисперсией 0,05 через цифровой фильтр с частотной характеристикой в виде приподнятого косинуса между частотами 0,2 и 0,5 частоты отсчетов, что эквивалентно процессу, применяемому для испытательной последовательности в приложении II. В канале 2 генерировались синусоиды с частотами 0,1, 0,2, 0,4, амплитудами 0,1 1,0, 1,0 и начальными фазами 0, 210, 25°. К синусоидам добавляли окрашенный шумовой процесс, подобный процессу в канале 1, но получаемый независимо. Заметим, что синусоидальные компоненты на частотах 0,1 и 0,2 являлись общими для обоих каналов. Последовательность данных из 64 точек генерировалась для каждого канала. На рис. 15.7—15.9 показаны оценки автоспектров, квадрата модуля и фазы когерентности для $p=12$, полученные тремя авторегрессионными методами. Заметим, что на всех графиках энергия,

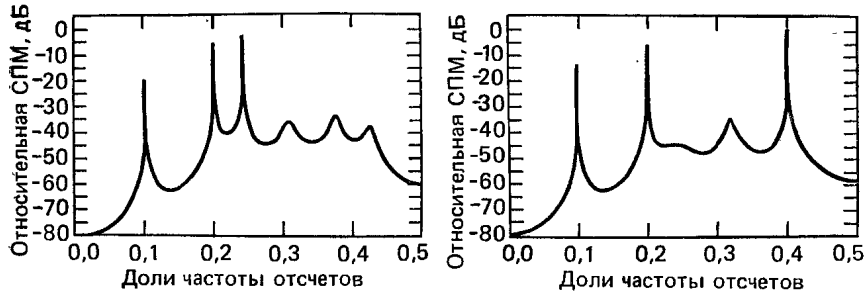


Рис. 15.10. Одноканальная АР(12)-оценка для 64 отсчетов тест-последовательности, полученная с помощью алгоритма Берга: *а* — автоспектр для канала 1; *б* — автоспектр для канала 2.

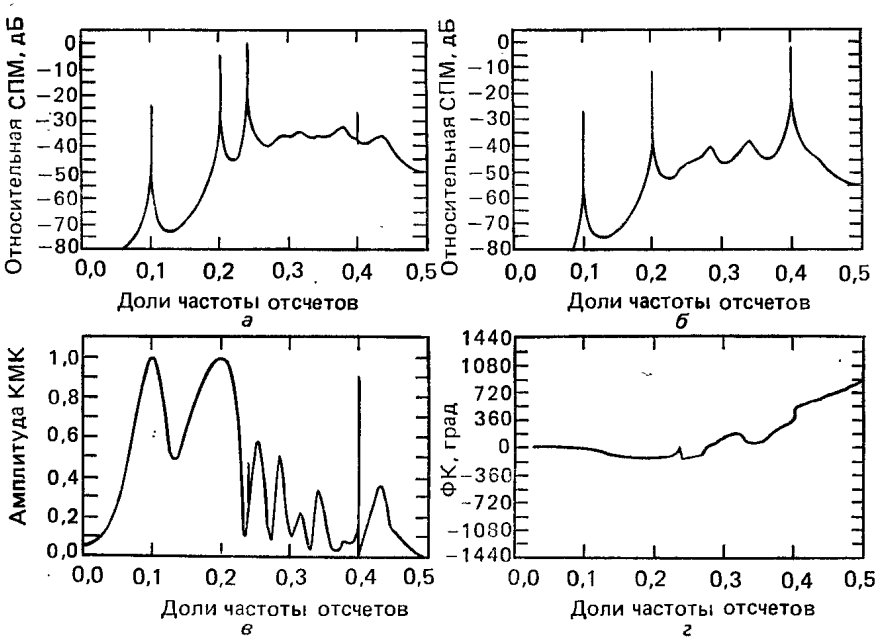


Рис. 15.11. АР(12)-оценка для 500 отсчетов испытательной последовательности, полученная с помощью алгоритма Наттолла — Странда: *а* — автоспектр для канала 1; *б* — автоспектр для канала 2; *в* — квадрат модуля когерентности (КМК); *г* — фаза когерентности (ФК).

соответствующая синусоиде с частотой 0,24, имеющейся только в канале 1, включалась в автоспектральную оценку для канала 2, и, наоборот, энергия синусоиды с частотой 0,4, которая имеется только в канале 2, включена в автоспектральную оценку для канала 1. Кривые КМК содержат пики на частотах 0,24 и

0,4, где в идеале когерентность должна быть нулевой. Это проявление «перекрестного возбуждения» — нежелательное явление; однако оно присуще всем методам, представленным в этой главе, и, по-видимому, неустранимо при обработке коротких последовательностей данных с помощью многоканальных АР-алгоритмов (см. также [4]). Если последовательности данных от каждого канала обрабатываются отдельно с помощью одноканальных АР-методов, как, например, алгоритм Берга, то автоспектры не содержат ложных частотных составляющих, как показано на рис. 15.10. Удлиняя последовательность данных до 500 точек отсчета, получаем ослабление эффекта перекрестного возбуждения (рис. 15.11), хотя вблизи единицы еще наблюдаются острые пики. Таким образом, похоже, что возможности высокого разрешения одноканального анализа спектров на основе линейного предсказания для обработки коротких записей данных не переносятся автоматически на многоканальный случай. Еще ярче выражен этот эффект взаимосвязи, если число каналов больше двух. Хотя элементы взаимной спектральной СПМ записываются для двух каналов, данные от всех каналов дают свой вклад в отдельные двухканальные взаимные спектральные оценки. Эффект перекрестного возбуждения приводит к появлению ложных узкополосных компонент, особенно при обработке коротких последовательностей данных. Детальный анализ [11] причины эффекта перекрестного возбуждения показал, что он происходит вследствие неполной компенсации полюсов — нулей в многоканальной оценке СПМ. Этот пример подчеркивает необходимость подтверждать независимыми одноканальными автоспектральными оценками детали, выявленные в автоспектрах, порожденных многоканальным алгоритмом.

Явление расщепления спектральных линий, наблюдавшееся в одноканальном спектральном анализе на основе линейного предсказания, наблюдалось также при аналогичных условиях в некоторых многоканальных алгоритмах, в частности в алгоритмах Наттолла — Странда и Виеры — Морфа. Однако это не наблюдалось в многоканальном ковариационном алгоритме.

15.13. Многоканальное спектральное оценивание на основе метода минимума дисперсии

Здесь можно было бы привести доводы, аналогичные используемым в гл. 12, чтобы построить процедуру многоканальной спектральной оценки на основе метода минимума дисперсии (МД), в которой алгоритм формирует дисперсию на выходе m-канального фильтра с конечной импульсной характеристикой (КИХ-фильтра) с коэффициентами, обеспечивающими пропускание синусоиды на заданной частоте без искажений и ослабления всех

других спектральных компонент. Получающийся в результате многоканальный алгоритм МД-оценки СПМ имеет вид

$$\hat{\mathbf{P}}_{\text{МД}}(f) = T\,[\underline{\mathbf{e}}_p(f)\,\underline{\mathbf{R}}_p^{-1}\underline{\mathbf{e}}_p^H(f)]^{-1}, \tag{15.120}$$

где блочный вектор комплексных синусоид $\underline{\mathbf{e}}_p(f)$ определен в (15.31) и $\underline{\mathbf{R}}_p^{-1}$ — обратная блочно-тёплицевой матрице, определенной в (15.55).

Можно было бы использовать оценку $\hat{\underline{\mathbf{R}}}_p$ блочной корреляционной матрицы, например оценку в (15.87), и затем вычислить оценку (15.120) в некотором интервале частот, что даст МД-оценку СПМ. Однако альтернативный подход, основанный на связи обращения корреляционной матрицы с многоканальными авторегрессионными параметрами, может дать значительный выигрыш в объеме вычислений, необходимых для нахождения многоканальной МД СПМ функции (15.120). Можно показать (см. Задачи), что эквивалентное представление многоканальной МД СПМ имеет вид

$$\hat{\mathbf{P}}_{\text{МД}}(f) = T\left[\sum_{k=-p}^{p} \mathbf{\Psi}[k]\exp(-j2\pi fkT)\right]^{-1}, \tag{15.121}$$

где совокупность $p\times p$-матриц $\mathbf{\Psi}[k]$ вычисляют как корреляцию многоканальных матричных АР-параметров:

$$\mathbf{\Psi}[k] = \begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{p-k} \{(p+1-k-i)\,\mathbf{A}_p^H[k+i]\,(\boldsymbol{P}_p^f)^{-1}\mathbf{A}_p[i] - \\ \qquad -i\mathbf{B}_p^H[k+i]\,(\boldsymbol{P}_p^b)^{-1}\mathbf{B}_p[i]\}, & 0\leqslant k\leqslant p; \\ \mathbf{\Psi}^H[-k], & -1\geqslant k\geqslant -p, \end{cases} \tag{15.122}$$

Можно использовать программу под названием MCMINVAR для вычисления многоканальной спектральной оценки по методу минимума дисперсии в три стадии: 1) вычислить многоканальные матричные АР-параметры $\mathbf{A}[k]$ и $\mathbf{B}[k]$, используя подпрограмму MCAR; 2) прокоррелировать матричные АР-параметры (формула (15.122)), чтобы получить матричную последовательность $\mathbf{\Psi}[k]$; 3) произвести МД-оценку СПМ, используя программу БПФ для вычисления (15.121).

15.14. Двухканальный спектральный анализ числа солнечных пятен и температуры воздуха

С помощью двухканального спектрального анализа было показано, что существуют эффекты корреляции между числом солнечных пятен и такими глобальными явлениями, как, например, уровень моря (приливы и отливы), температура нижних слоев

атмосферы, период вращения Земли, атмосферное давление, магнитное склонение и чередование засух и наводнений [2, 3]. Здесь будет исследовано возможное соотношение между числом солнечных пятен и температурой нижних слоев атмосферы на одном участке земной поверхности. В приложении III даны среднемесячные температуры в °С в американском городе Сент-Луис за период с 1845 по 1978 годы. Эти данные были любезно предоставлены д-ром Р. Карри, который собрал и провел исчерпывающий анализ записей глобальных температурных данных. Предварительный периодограммный анализ 1608 отсчетов ежемесячных температур показан на рис. 15.12, *а*. Эта периодограмма была получена усреднением выборочных периодограмм по шести сегментам из 400 отсчетов в каждом с 200 перекрывающимися отсчетами между сегментами (8 точек не использованы)[1]. Отчетливо обнаруживаются большая постоянная составляющая и составляющая с одногодичным циклом, связанная с сезонным колебанием температуры. Также различима слабая сезонная гармоника с двухгодичным циклом. Эти доминантные компоненты должны быть исключены до начала двухканального анализа отфильтрованных чисел солнечных пятен. Фильтрация нижних частот с децимацией (прореживанием) частоты отсчетов с коэффициентом 6 и фильтрация верхних частот дают фильтрованные температурные данные, представленные на рис. 15.12, *б*. Характеристики линейно-фазовых фильтров показаны на рис. 15.13. Оба фильтра выполнены на основе метода Паркс — Макклеллана. Фильтр нижних частот — по 25 отсчетам. Он отфильтровывает одно- и двухгодичные циклы. Фильтр верхних частот — по 37 отсчетам. Он подавляет постоянную составляющую на 60,45 дБ. Всего 227 фильтрованных температурных отсчетов со скоростью 2 отсчета в год сформировано с июля 1855 по июль 1968 года.

Результат двухканального периодограммного анализа 227 отсчетов фильтрованных температурных данных и числа солнечных пятен показан на рис. 15.14. Автоспектры представляют собой обычные одноканальные периодограммы. Было использовано пять взвешенных по Хэммингу сегментов из 75 отсчетов каждый с перекрывающимися 38 отсчетами. Были вычислены квадрат модуля когерентности и фаза когерентности, определенные соотношениями (15.9) и (15.10), на основе взаимной спектральной периодограммы тех же пяти сегментов. В температурном спектре на рис. 15.14, *б* не обнаруживается никаких существенных особенностей. На рис. 15.14, *в* ближе к низкочастотному

[1] Для использования 1600 отсчетов с указанным перекрытием на половину сегмента требуется 7 сегментов, при 6 сегментах используется 1400 отсчетов, так как сдвиги на полный сегмент обеспечивают 3-, 5- и 7-й сегменты, — *Прим. ред.*

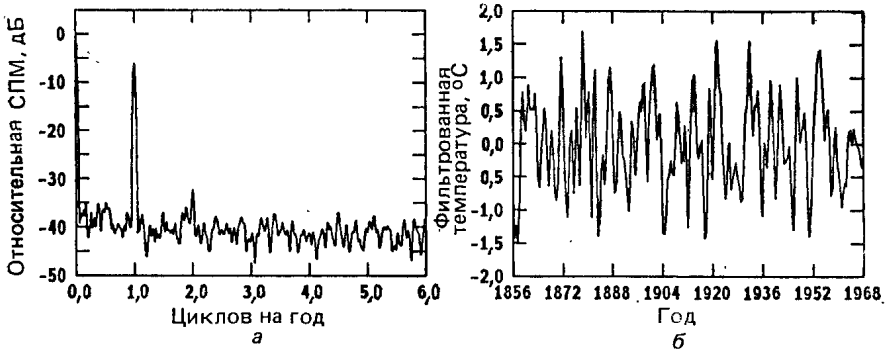


Рис. 15.12. Периодограмма нефильтрованных среднемесячных температур для г. Сент-Луис (*а*) и кривая изменения температуры после фильтрации и децимации с коэффициентом 6 (*б*).

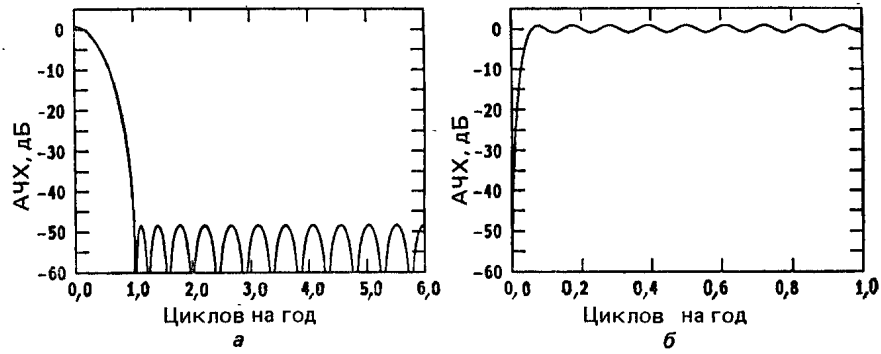


Рис. 15.13. Частотные характеристики фильтров, использованных для фильтрации температурных данных: *а* — ФНЧ с линейной фазовой характеристикой, содержащий 25 коэффициентов; *б* — ФВЧ с линейной фазовой характеристикой, содержащий 37 коэффициентов.

краю имеются два пика при 0,077 и 0,253 циклах в год (12,96 и 3,95 лет на цикл) с когерентностями 0,73 и 0,83. Таким образом, кажется, что периодограммный анализ не выявляет сильной корреляции между данными о солнечных пятнах и температуре.

Результат двухканального авторегрессионного анализа по алгоритму Наттолла — Странда показан на рис. 15.15. Был выбран порядок 25. Подобные же результаты были получены по алгоритмам Виеры—Морфа и ковариационному. Оба автоспектра имеют пики на одинаковой частоте 0,0942 цикла в год (10,61 лет на цикл). У КМК обнаруживаются пики при 0,0938 и 0,2471 циклах в год (10,67 и 4,05 лет на цикл) с когерентностями 0,70 и 0,64

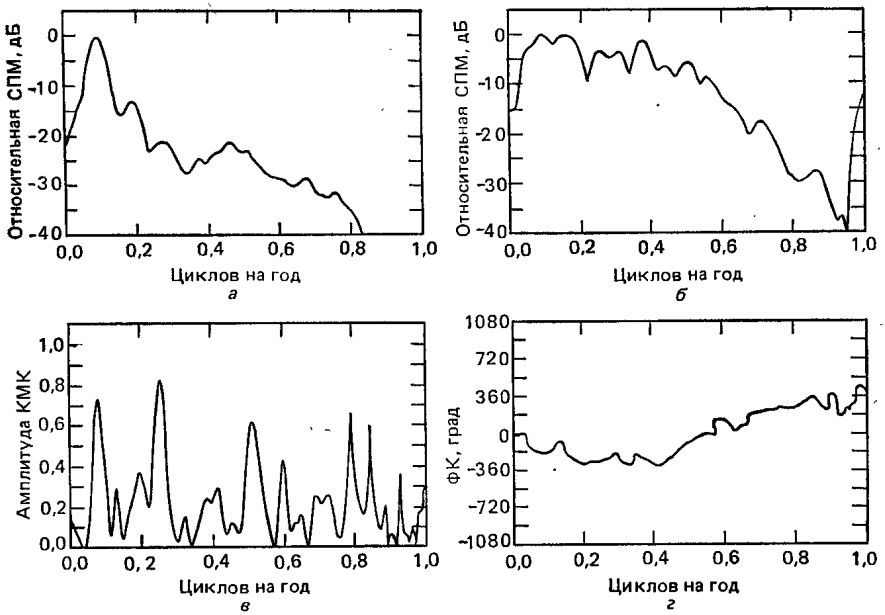


Рис. 15.14. Двухканальный периодограммный анализ данных о числе солнечных пятен и температуре: *а* — автоспектр фильтрованных данных о числе солнечных пятен; *б* — автоспектр фильтрованных данных о температуре; *в* — квадрат модуля когерентности (КМК); *г* — фаза когерентности (ФК) (неприведенная).

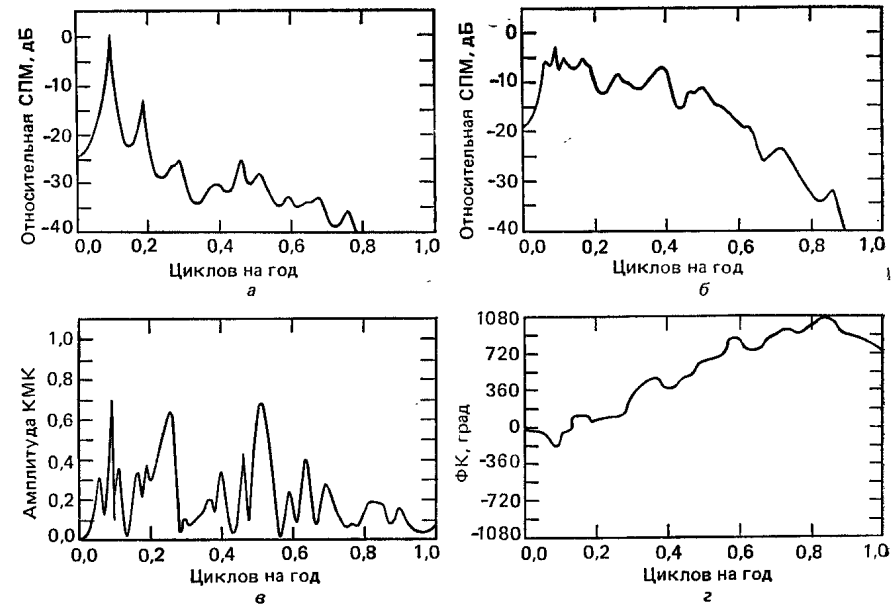


Рис. 15.15. Результаты двухканального AP(25)-анализа данных о числе солнечных пятен и температуре, выполненного с помощью алгоритма Наттолла — Странда: *а* — автоспектр фильтрованных данных о числе солнечных пятен; *б* — автоспектр фильтрованных данных о температуре; *в* — квадрат модуля когерентности (КМК); *г* — фаза когерентности (ФК) (неприведенная).

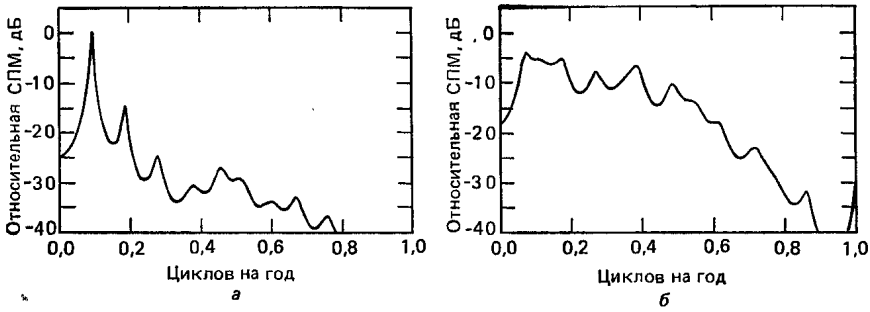


Рис. 15.16. Результаты одноканального АР(25)-анализа с помощью алгоритма Берга: *а* — автоспектр фильтрованных данных о числе солнечных пятен; *б* — автоспектр фильтрованных данных о температуре.

соответственно. Следовательно, представляется возможным наличие корреляции между доминантным циклом солнечных пятен и компонентой в температурных данных. Фаза когерентности при 0,0938 циклах в год равна —186,5°, что означает, что модулированная компонента в температурных данных отстает от цикла солнечных пятен на 5,52 года. Проверкой для двухканального АР-анализа служит одноканальный АР(25)-анализ по алгоритму Берга, показанный на рис. 15.16. Острый пик, который виден на рис. 15.15, *б*, не появляется в одноканальном спектре рис. 15.16, *б*. Это наводит на мысль, что коррелятивные пики при 0,0938 циклов в год могут быть порождены двухканальным АР-анализом.

Литература

[1] *Akaike H.* Block Toeplitz Matrix Inversion, SIAM J. Appl. Math., vol. 24, pp. 334—341, March 1973.

[2] *Currie R. G.* Solar Cycle Signal in Air Temperature in North America: Amplitude, Gradient, Phase, and Distribution, J. Atmos. Sci., vol. 38, pp. 808—818, April 1981.

[3] *Currie R. G.* Periodic (18.6-Years) and Cyclic (11-Year) Induced Drought and Flood in Western North America, J. Geophys. Res., vol. 89, pp. 7215—7230, August 1984.

[4] *Fougere P. F.* Spontaneous Line Splitting in Multichannel Maximum Entropy Power Spectra, Proceedings of First ASSP Workshop on Spectral Estimation, McMaster University, Hamilton, Ontario, Canada, pp. 1.6.1—1.6.3, August 1981.

[5] *Friedlander B.* Lattice Methods for Spectral Estimation, Proc. IEEE, vol. 70, pp. 990—1017, September 1982. [Имеется русский перевод: *Фридландер Б.* Методы спектрального оценивания на основе решетчатой структуры. ТИИЭР, 1982, т. 70, № 9, с. 95—125].

[6] *Friedlander B., Morf M., Kailath T., Ljung L.* New Inversion Formulas for Matrices Classified in Terms of Their Distance from Toeplitz Matrices, Linear Algebra and Its Applications, vol. 27, pp. 31—60, 1979.

[7] *Friedlander B., Porat B.* Multichannel ARMA Spectral Estimation by the Modified Yule—Walker Method, Signal Process, vol. 10, pp. 49—59, 1986.

[8] *Jones R. H.* Identification and Autoregressive Spectrum Estimation, IEEE Trans. Autom. Control, vol. AC-19, pp. 894—897, December 1974.
[9] *Lacoss R. T.* Autoregressive and Maximum Likelihood Spectral Analysis Techniques, in Aspects of Signal Processing, part 2, G. Tucconi, ed., pp. 591—615, Reidel, Boston, Mass., 1977.
[10] *Lee D., Friedlander B., Morf M.* Recursive Ladder Forms for ARMA Modeling, IEEE Trans. Autom. Control, vol. AC-27, pp. 753—764, August 1982.
[11] *Marple S. L., Jr., Nuttall A. H.* Experimental Comparison of Three Multichannel Linear Prediction Spectral Estimators, IEEE Proc., vol. 130, Part F, pp. 218—229, April 1983.
[12] *Morf M., Vieira A., Lee D. T., Kailath T.* Recursive Multichannel Maximum Entropy Spectral Estimation, IEEE Trans. Geosci. Electron., vol. GE-16, pp. 85—94, April 1978a.
[13] *Morf M., Vieira A., Lee D. T., Kailath T.* Covariance Characterization by Partial Autocorrelation Matrices, Ann. Stat., vol. 6, pp. 643—648, May 1978b.
[14] *Nuttall A. H.* FORTRAN Program for Multivatiate Linear Predictive Spectral Analysis, Employing Forward and Backward Averaging, Naval Underwater Systems Center Technical Report 5419, New London, Conn., May 1976a.
[15] *Nuttall A. H.* Multivatiate Linear Predictive Spectral Analysis Employing Weighted Forward and Backward Averaging: A Generalization of Burg's Algorithm, Naval Underwater Systems Center Technical Report 5501, New London, Conn., October 1976b.
[16] *Nuttall A. H.* Positive Definite Spectral Estimate and Stable Correlation Recursion for Multivariate Linear Predictive Spectral Analysis, Naval Underwater Systems Center Technical Report 5729, New London, Conn., November 1977.
[17] *Nuttall A. H.* Two-Channel Linear-Predictive Spectral Analysis: Program for the HP 9845 Desk Calculator, Naval Underwater Systems Center Technical Report 6533, New London, Conn., October 1981.
[18] *Robinson E. A.* Multichannel Time Series Analysis with Digital Computer Programs, 2nd ed., Goose Pond Press, Houston, Tex., 1983.
[19] *Strand O. N.* Multichannel Complex Maximum Entropy (Autoregressive) Spectral Analysis, IEEE Trans. Autom. Control, vol. AC-22, pp. 634—640, August 1977.
[20] *Watson G. A.* An Algorithm for the Inversion of Block Matrices of Toeplitz Form, J. Assoc. Comput. Mach., vol. 20, pp. 409—415, July 1973.
[21] *Whittle P.* On the Fitting of Multivariate Autoregressions, and the Approximate Canonical Factorization of a Spectral Density Matrix, Biometrika, vol. 50, pp. 129—134, 1963.
[22] *Wiggins R. A., Robinson E. A.* Recursive Solution to the Multichannel Filtering Problem, J. Geophys. Res., vol. 70, pp. 1885—1891, April 1965.

Задачи

1. Доказать справедливость соотношения (15.79), т. е. показать, что

$$\Delta_{p+1} = \mathcal{E}\{\mathbf{e}_p^f[n]\,\mathbf{e}_p^{bH}[n-1]\}.$$

2. Показать, что ковариационные матрицы $\mathbf{P}_p^f$ и $\mathbf{P}_p^b$ удовлетворяют следующим рекурсивным соотношениям по обновлению порядка:

$$\boldsymbol{P}_p^f = \boldsymbol{P}_{p-1}^f - [(\boldsymbol{P}_{p-1}^f)^{1/2}\,\boldsymbol{\Lambda}_p][(\boldsymbol{P}_{p-1}^f)^{1/2}\,\boldsymbol{\Lambda}_p]^H,$$
$$\boldsymbol{P}_p^b = \boldsymbol{P}_{p-1}^b - [(\boldsymbol{P}_{p-1}^b)^{1/2}\,\boldsymbol{\Lambda}_p^H][(\boldsymbol{P}_{p-1}^b)^{1/2}\,\boldsymbol{\Lambda}_p^H]^H.$$

3. Показать для многоканального случая, что существует однозначное соот-

ветствие между $\{\mathbf{R}_{xx}[0], \mathbf{R}_{xx}[1], ..., \mathbf{R}_{xx}[p]\}$ и последовательностью $\{\mathbf{R}_{xx}[0], \Lambda_1, ..., \Lambda_p\}$. Любая из этих последовательностей определяет параметризацию авторегрессионной последовательности $\{\mathbf{P}_p^f, A_p[1], ..., A_p[p]\}$.

4. Определить нормированные остатки

$$\tilde{e}_p^f[n] = (\hat{\mathbf{P}}_{p-1}^{f\,1/2})^{-1} e_p^f[n] = \tilde{e}_{p-1}^f - \Lambda_p \tilde{e}_{p-1}^b,$$
$$\tilde{e}_p^b[n] = (\hat{\mathbf{P}}_{p-1}^{b\,1/2})^{-1} e_p^b[n] = \tilde{e}_{p-1}^b - \Lambda_p^H \tilde{e}_{p-1}^f,$$

которые используют ковариацию предыдущей ошибки как нормирующие веса. Показать, что минимизация арифметического среднего взвешенных остатков

$$\mathrm{tr}\left[\sum_{n=p+1}^{N} \tilde{e}_p^f[n]\,\tilde{e}_p^{fH}[n] + \tilde{e}_p^b[n]\,\tilde{e}_p^{bH}[n]\right]$$

относительно Λ_{p+1} дает нормированную частную корреляцию из уравнения (15.88).

5. Доказать, что соотношения (15.121) и (15.122) формируют эффективное альтернативное выражение для многоканальной спектральной оценки на основе метода минимума дисперсии. Примечание: использовать соображения, представленные в разд. 12.4, и соотношение (15.86) для обращения блочно-тёплицевой матрицы.
6. В многоканальном алгоритме Левинсона $\mathbf{B}_p[p] \neq \mathbf{A}_p^H[p]$. Показать, что, несмотря на это, выполняется равенство

$$\det \mathbf{B}_p[p] = \det \mathbf{A}_p^H[p].$$

Показать также, что

$$\mathrm{tr}\,\mathbf{A}_p[1] = \mathrm{tr}\,\mathbf{B}_p^H[1]$$

и что

$$\det \mathbf{R}_p = \prod_{n=1}^{p} \det \boldsymbol{P}_n^f = \prod_{n=1}^{p} \det \boldsymbol{P}_n^b.$$

7. Построить быстрый алгоритм для решения многоканальных ковариационных нормальных уравнений линейного предсказания. Применить те же идеи, которые использовались для одноканального ковариационного алгоритма в приложении 8.Б.
8. Показать, что выбор $\mathbf{V}_p = \mathbf{W}_p = \mathbf{I}$ в алгоритме Наттолла — Странда не гарантирует устойчивой корреляционной последовательности или положительно определенной спектральной оценки.
9. Разработать двухканальный вариант подпрограммы MCARPSD приложения 15.В, который использует БПФ для получения более высокой эффективности в вычислении полиномов $\mathbf{A}(f)$ и $\mathbf{B}(f)$.
10. Аналитически определить расположение полюсов и нулей в двухканальном примере уравнения (15.118). Найти аналитическое выражение для КМК. Показать, что оно имеет четыре полюса и четыре нуля в конечной области z-плоскости. Каково его максимальное значение?
11. Доказать, что фильтрация каналов X и Y одним и тем же фильтром дает одинаковое КМК для входа и выхода.
12. Определить количество вычислительных операций для двух алгоритмов в программе MCAR как функцию числа каналов, числа отсчетов и порядка. Сравнить объем вычислений для алгоритма Наттолла — Странда и необходимый для подпрограммы BURG в гл. 8.
13. Доказать соотношение (15.13).

14. Почему матрица уравнения (15.111) не эрмитова, за исключением случая $\mathbf{R}_{xx}[0]$?
16. Доказать соотношения (15.22) и (15.23).
16. Опираясь на основные понятия из гл. 6, показать, что многоканальные уравнения Юла — Уолкера для многоканального АРСС(p, q)-процесса имеют вид

$$\mathbf{R}_{xx}[m] = \begin{cases} -\sum_{k=1}^{p} \mathbf{A}[k]\,\mathbf{R}_{xx}[m-k] + \sum_{k=m}^{q} \mathbf{B}[k]\mathbf{P}_w\mathbf{H}^H[k-m], & 0 \leqslant m \leqslant q; \\ -\sum_{k=1}^{p} \mathbf{A}[k]\,\mathbf{R}_{xx}[m-k], & m > q. \end{cases}$$

Какова блочно-матричная структура модифицированных уравнений Юла — Уолкера в многоканальном случае АРСС?

17. Построить вычислительную программу MCMINVAR согласно намеченному плану в разд. 15.13.

Приложение 15.А. Программа для многоканальной периодограммы

Многоканальный периодограммный алгоритм спектральной оценки обсуждается в разд. 15.5.

```
      SUBROUTINE MCPERIOD (N,NSHIFT,NSAMP,T,PSD)
C
C  Эта программа вычисляет многоканальную периодограммную СПМ-мат-
C  рицу
C
C  Входные параметры:
C    N       — число точек отсчета на канал (целое)
C    NSHIFT  — число точек в сдвиге между сегментами
C    NSAMP   — число точек на сегмент (должно быть четным)
C    T       — выборочный интервал в секундах
C    X       — комплексный массив отсчетов данных в канале
C
C  Выходные параметры:
C    PSD     — массив комплексных NPSD-матриц спектральной плотности
C              мощности размера NUMCHS×NUMCHS, перекрывающих
C              диапазон частот m/(NPSD*T) для m от m=−NPSD/2 до
C              NPSD/2−1. Заметим, что NPSD должна быть степенью 2.
C
C  Примечание:
C    Размеры массива управляются с помощью PARAMETER, данных ниже.
C    Используемые внешние подпрограммы: PERIODOGRAM, PREFFT,
C    FFT.
C
      PARAMETER NUMCHS=2   ! Число каналов
      PARAMETER NPSD=4096  ! Число частот для вычисления PSD
      PARAMETER MAXPTS=500 ! Максимальное число точек, данных на
                           канал
      COMPLEX X(NUMCHS,MAXPTS),PSD(NUMCHS,NUMCHS,NPSD),
                                                    P(NPSD)
      DO 30 K=1,NUMCHS
         DO 20 J=K,NUMCHS
            CALL PERIODOGRAM (N,NSHIFT,NSAMP,T,X(K,1),X(J,1),
                                                    NSEG,P)
            DO 10 I=1,NPSD
```

```
                PSD(J,K,I)=P(I)
10              PSD(K,J,I)=CONJG(P(I))
20            CONTINUE
30          CONTINUE
        RETURN
        END
```

Приложение 15.5

Программа для многоканального авторегрессионного оценивания по алгоритмам Наттолла — Странда или Виеры — Морфа

В разд. 15.10 описаны две процедуры многоканального авторегрессионного спектрального оценивания. Для случая простого теста следует выбрать NUMCHS=1 и METHOD=2 и использовать 64-точечную тест-последовательность приложения II. Результаты в массиве A должны совпасть с результатами в массиве A подпрограммы BURG.

```
      SUBROUTINE MCAR (METHOD,N,IP,X,PF,A,PB,B,ISTAT)
C
C     Вычисляются коэффициенты многоканальной авторегрессионной матрицы
C     с применением либо алгоритма Виеры — Морфа (обобщение одноканаль-
C     ного геометрического метода), либо алгоритма Наттолла — Странда
C     (обобщение одноканального гармонического метода).
C
C     Входные параметры:
C
C       METHOD  — целое число; если 1, то выбирается алгоритм Виеры —
C                 Морфа; если 2, то используется алгоритм Наттолла —
C                 Странда
C       N       — число точек отсчета на канал (целое)
C       IP      — порядок авторегрессионной модели (целый)
C       X       — комплексный массив NUMCHS-отсчетов данных в ка-
C                 нале
C
C     Выходные параметры:
C
C       PF      — комплексная размера NUMCHS×NUMCHS ковариация
C                 ошибки линейного предсказания вперед
C       A       — массив комплексных матричных коэффициентов линейно-
C                 го предсказания вперед
C       PB      — комплексная ковариационная матрица ошибки линейного
C                 предсказания назад
C       B       — массив комплексных матричных коэффициентов линейно-
C                 го предсказания назад
C       ISTAT   — целочисленный индикатор состояния в момент вывода
C                 подпрограммы
C                   0 — нормальный вывод без обнаруженных ошибок
C                   1 — обработка более чем двух каналов была запрошена
C                       из подпрограмм BILINEAR, INVERT, SQROOT
C                   2 — сингулярная матрица выявлена подпрограммой
C                       SQROOT
C                   3 — IP превышает максимальный разрешенный порядок;
C                       изменение размеров массивов с помощью подпро-
C                       граммы
```

```
C
C    Примечание:
C      Размеры массива задаются операторами PARAMETER, данными ни-
C      же. Вспомогательные подпрограммы представлены в приложении
C      15.Г.
C
       PARAMETER NUMCHS=2      ! Число каналов
       PARAMETER MAXORDER=32   ! Максимальный разрешенный поря-
                                 док модели
       PARAMETER MAXPTS=500    ! Максимальное число точек данных
       COMPLEX X(NUMCHS,MAXPTS), PF(NUMCHS,NUMCHS),
                                              PB(NUMCHS,NUMCHS)
       COMPLEX A(NUMCHS,NUMCHS,MAXORDER),
                                          B(NUMCHS,NUMCHS,MAXORDER)
       COMPLEX PFHAT(NUMCHS,NUMCHS),
                                            PBHAT(NUMCHS,NUMCHS), S
       COMPLEX PFBHAT(NUMCHS,NUMCHS), RHO(NUMCHS,NUMCHS),
                                                  COL1(NUMCHS)
       COMPLEX EF(NUMCHS,MAXPTS), EB(NUMCHS,MAXPTS),
                                               TEMP1(NUMCHS,NUMCHS)
       COMPLEX TEMP2(NUMCHS,NUMCHS),
                              TEMP3(NUMCHS,NUMCHS), COL2(NUMCHS)
       COMPLEX TEMP4(NUMCHS,NUMCHS),
                              TEMP5(NUMCHS,NUMCHS), COL3(NUMCHS)
C
C    **Инициализация **
C
       ISTAT=0
       IF (IP .LE. MAXORDER) GO TO 5
       ISTAT=3
       RETURN
5      CALL ZER0 (NUMCHS,NUMCHS,PF)
       DO 10 K=1,N
          CALL ASSIGN (NUMCHS,1,X(1,K),EF(1,K))          ! (15.91)
          CALL ASSIGN (NUMCHS,1,X(1,K),EB(1,K))          ! (15.91)
          CALL OUTPROD (NUMCHS,X(1,K),X(1,K),TEMP1)
10        CALL ADD (NUMCHS,NUMCHS,PF,TEMP1,PF)
       S=CMPLX(1./FLOAT(N),0.)
       CALL SCALE (NUMCHS,NUMCHS,S,PF,PF)              ! (15.90)
       CALL ASSIGN (NUMCHS,NUMCHS,PF,PB)               ! (15.90)
C
       M=0
C
C    **Основной цикл **
C
100    CONTINUE
C
C    Обновите оцененные ковариации ошибок   ! (15.89)
C
       CALL ZERO (NUMCHS,NUMCHS,PFHAT)
       CALL ZERO (NUMCHS,NUMCHS,PBHAT)
       CALL ZERO (NUMCHS,NUMCHS,PFBHAT)
       DO 20 K=M+2,N
          CALL ASSIGN (NUMCHS,1,EF(1,K),COL1)
          CALL ASSIGN (NUMCHS,1,EB(1,K-1),COL2)
          CALL OUTPROD (NUMCHS,COL1,COL1,TEMP1)
```

```
      CALL ADD (NUMCHS, NUMCHS,PFHAT,TEMP1,PFHAT)
      CALL OUTPROD (NUMCHS,COL2,COL2,TEMP1)
      CALL ADD (NUMCHS,NUMCHS,PBHAT,TEMP1,PBHAT)
      CALL OUTPROD (NUMCHS,COL1,COL2,TEMP1)
20    CALL ADD (NUMCHS,NUMCHS,PFBHAT,TEMP1,PFBHAT)
C
      M=M+1
      IF (METHOD .EQ. 2) GO TO 30
C
C     Вычислите матрицу оцененной нормированной частной корреляции
C     (15.88) (только алгоритм Виеры — Морфа)
C
      CALL SQROOT (NUMCHS,PFHAT,TEMP1,ISTAT)
      IF (ISTAT .NE. 0) RETURN
      CALL INVERT (NUMCHS,TEMP1,TEMP3,ISTAT)
      IF (ISTAT .NE. 0) RETURN
      CALL SQROOT (NUMCHS,PBHAT,TEMP1,ISTAT)
      CALL INVERT (NUMCHS,TEMP1,TEMP2,ISTAT)
      IF (ISTAT .NE. 0) RETURN
      CALL XPOSE (NUMCHS,TEMP2,TEMP4)
      CALL MULT (NUMCHS,NUMCHS,TEMP3,PFBHAT,TEMP1)
      CALL MULT (NUMCHS,NUMCHS,TEMP1,TEMP4,RHO)
C
C     Обновите прямые и обратные коэффициенты отражения (15.82), (15.83)
C     (только алгоритм Виеры — Морфа)
C
      CALL SQROOT (NUMCHS,PF,TEMP3,ISTAT)
      CALL SQROOT (NUMCHS,PB,TEMP4,ISTAT)
      CALL MULT (NUMCHS,NUMCHS,TEMP3,RHO,TEMP1)
      CALL XPOSE (NUMCHS,RHO,TEMP5)
      CALL MULT (NUMCHS,NUMCHS,TEMP4,TEMP5,TEMP2)
      CALL INVERT (NUMCHS,TEMP4,TEMP5,ISTAT)
      IF (ISTAT .NE. 0) RETURN
      CALL MULT (NUMCHS,NUMCHS,TEMP1,TEMP5,A(1,1,M))
      CALL INVERT (NUMCHS,TEMP3,TEMP5,ISTAT)
      IF (ISTAT .NE. 0) RETURN
      CALL MULT (NUMCHS,NUMCHS,TEMP2,TEMP5,B(1,1,M))
      GO TO 35
C
C     Вычислите матрицу оцененной частной корреляции (15.98) (только алго-
C     ритм Наттолла — Странда)
C
30    CALL INVERT (NUMCHS,PF,TEMP1,ISTAT)
      IF (ISTAT .NE. 0) RETURN
      CALL MULT (NUMCHS,NUMCHS,PFHAT,TEMP1,TEMP2)
      CALL INVERT (NUMCHS,PB,TEMP3,ISTAT)
      IF (ISTAT .NE. 0) RETURN
      CALL MULT (NUMCHS,NUMCHS,TEMP3,PBHAT,TEMP4)
      S=(2.,0.)
      CALL SCALE (NUMCHS,NUMCHS,S,PFBHAT,TEMP5)
      CALL BILINEAR (NUMCHS,TEMP2,TEMP4,TEMP5,RHO,ISTAT)
      IF (ISTAT .NE. 0) RETURN
C
C     Обновите прямые и обратные коэффициенты отражения (15.73), (15.74),
C     (15.78) (только алгоритм Наттолла — Странда)
C
      CALL MULT (NUMCHS,NUMCHS,RHO,TEMP3,A(1,1,M))
```

```
      CALL XPOSE (NUMCHS,RHO,TEMP2)
      CALL MULT (NUMCHS,NUMCHS,TEMP2,TEMP1,B(1,1,M))
35    S=(-1.,0.)
      CALL SCALE (NUMCHS,NUMCHS,S,A(1,1,M),A(1,1,M))
      CALL SCALE (NUMCHS,NUMCHS,S,B(1,1,M),B(1,1,M))
C
C     Обновите ковариации прямых и обратных ошибок (15.75), (15.76)
C
      CALL MULT (NUMCHS,NUMCHS,A(1,1,M),B(1,1,M),TEMP1)
      CALL MULT (NUMCHS,NUMCHS,TEMP1,PF,TEMP2)
      CALL SUB (NUMCHS,NUMCHS,PF,TEMP2,PF)
      CALL MULT (NUMCHS,NUMCHS,B(1,1,M),A(1,1,M),TEMP1)
      CALL MULT (NUMCHS, NUMCHS,TEMP1,PB,TEMP2)
      CALL SUB (NUMCHS,NUMCHS,PB,TEMP2,PB)
C
C     Обновите коэффициенты предсказания вперед и назад (15.84), (15.85)
C
      IF (M .EQ. 1) GO TO 50
      DO 40 K=1,M-1
         MK=M-K
         CALL ASSIGN (NUMCHS,NUMCHS,A(1,1,K),TEMP1)
         CALL ASSIGN (NUMCHS,NUMCHS,B(1,1,MK),TEMP2)
         CALL MULT (NUMCHS,NUMCHS,A(1,1,M),TEMP2,TEMP3)
         CALL ADD (NUMCHS,NUMCHS,TEMP1,TEMP3,A(1,1,K))
         CALL MULT (NUMCHS, NUMCHS,B(1,1,M),TEMP1,TEMP3)
40       CALL ADD (NUMCHS,NUMCHS,TEMP2,TEMP3,B(1,1,MK))
C
C     Проследите за правильным порядком
C
50    IF (M .EQ. IP) RETURN
C
C     Обновите остатки
C
      DO 60 K=N,M+1,-1
         CALL ASSIGN (NUMCHS,1,EF(1,K),COL1)
         CALL ASSIGN (NUMCHS,1,EB(1,K-1),COL2)
         CALL MULT (NUMCHS,1,A(1,1,M),COL2,COL3)
         CALL ADD (NUMCHS,1,COL1,COL3,EF(1,K))
         CALL MULT (NUMCHS,1,B(1,1,M),COL1,COL3)
60       CALL ADD (NUMCHS,1,COL2,COL3,EB(1,K))
      GO TO 100
      END
```

Приложение 15.B.
Программа вычисления многоканальной авторегрессионной оценки СПМ

Если используются авторегрессионные коэффициенты предсказания вперед из MCAR, вызов этой подпрограммы принимает вид

```
CALL MCARPSD (IP, F, PF, A, PSD, ISTAT).
```

Если используются авторегрессионные коэффициенты предсказания назад из MCAR, вызов этой подпрограммы принимает вид

```
CALL MCARPSD (IP, —F, PB, B, PSD, ISTAT).
```

Знак «минус» перед F нужен для того, чтобы получить результаты для СПМ такие же, как в случае с коэффициентами предсказания вперед. Сопряженность входов массива B эквивалентна вводу отрицательной частоты в подпрограмму.

```
      SUBROUTINE MCARPSD (IP,F,P,A,PSD,ISTAT)
C
C  Эта подпрограмма вычисляет многоканальную матрицу спектральной плот-
C  ности мощности на данной частоте F.
C
C  Входные параметры:
C    IP      — порядок авторегрессионной модели (целый)
C    F       — доли частоты отсчетов (интервал от −0,5 до 0,5)
C    P       — комплексный массив ковариации возбуждающего шума
C    A       — комплексные массивы матричных коэффициентов авто-
C              регрессии
C
C  Выходные параметры:
C    PSD     — комплексные массивы значений спектральной плотности
C              мощности
C    ISTAT   — целый индикатор состояния во время промежуточного вы-
C              вода подпрограммы
C              0 — для нормального вывода
C              1 — если несингулярность матрицы устанавливается посред-
C                  ством INVERT
C
C  Примечание:
C    Размеры массива устанавливаются операторами PARAMETER, приво-
C    димыми ниже. Вспомогательные программы представлены в приложе-
C    нии 15.Г.
      PARAMETER NUMCHS=2       ! Число каналов
      PARAMETER MAXORDER=32    ! Максимальный разрешенный порядок
                               ! модели
      PARAMETER TWOPI=6.283185
      COMPLEX P(NUMCHS,NUMCHS),
                                    A(NUMCHS,NUMCHS,MAXORDER)
      COMPLEX PSD(NUMCHS,NUMCHS), R(NUMCHS,NUMCHS),
                                          S(NUMCHS,NUMCHS)
      COMPLEX T(NUMCHS,NUMCHS),TEMP
      ISTAT=0
      ARG=−TWOPI*F
      CALL IDENT (NUMCHS,T)
      DO 10 K=1,IP
         TEMP=CEXP(CMPLX(0.,ARG*FLOAT(K)))
         CALL SCALE (NUMCHS,NUMCHS,TEMP,A(1,1,K),R)
10       CALL ADD (NUMCHS,NUMCHS,T,R,T)
      CALL INVERT (NUMCHS,T,R,ISTAT)
      IF (ISTAT .NE. 0) RETURN
      CALL XPOSE (NUMCHS,R,S)
      CALL MULT (NUMCHS,NUMCHS,R,P,T)
      CALL MULT (NUMCHS,NUMCHS,T,S,PSD)
      RETURN
      END
```

Приложение 15.Г.
Вспомогательные подпрограммы для подпрограмм MCAR и MCARPSD

Следующие подпрограммы — утилиты, дополняющие подпрограмму MCAR оценивания AP-параметра и многоканальную подпрограмму MCARPSD получения ARPSD. Все программы применимы для любого числа каналов, кроме подпрограмм BILINEAR, INVERT и SQROOT. Последние три подпрограммы работают только для случаев одного или двух каналов. Если затребовано больше двух каналов, срабатывает индикация ошибки. Чтобы иметь дело более чем с двумя каналами, читатель может использовать сложные модификации подпрограмм BILINEAR, INVERT и SQROOT.

```
      SUBROUTINE ADD (M,N,A,B,C)
C     Матрица C является результатом сложения M×N-матриц A и B
      COMPLEX A(M,N), B(M,N), C(M,N)
      DO 10 J=1,N
      DO 10 I=1,M
10       C(I,J)=A(I,J)+B(I,J)
      RETURN
      END

      SUBROUTINE ASSIGN (M,N,A,B)
C     Переносит содержимое M×N-матрицы A в матрицу B
      COMPLEX A(M,N), B(M,N)
      DO 10 J=1,N
      DO 10 I=1,M
10       B(I,J)=A(I,J)
      RETURN
      END

      SUBROUTINE BILINEAR (M,A,B,C,X,ISTAT)
C     Решает билинейное уравнение AX+XB=C только для случаев M=1, 2
      COMPLEX A(M,M), B(M,M), C(M,M), X(M,M), TEMP(2,2)
      REAL C1, C2
      IF (M .EQ. 1) GO TO 10
      IF (M .EQ. 2) GO TO 20
      ISTAT=1
      RETURN
10    X(1,1)=C(1,1)/(A(1,1)+B(1,1))
      RETURN
20    C1=REAL(A(1,1)+A(2,2)+B(1,1)+B(2,2))
      C2=REAL(A(1,1)*A(2,2)-A(1,2)*A(2,1)-B(1,1)*B(2,2)+
                                          +B(1,2)*B(2,1))
      CALL MULT (M,M,C,B,TEMP)
      X(1,1)=A(2,2)
      X(1,2)=-A(1,2)
      X(2,1)=-A(2,1)
      X(2,2)=A(1,1)
      CALL MULT (M,M,X,C,A)
      CALL ADD (M,M,TEMP,A,TEMP)
      B(1,1)=C1*B(1,1)+C2
      B(2,2)=C1*B(2,2)+C2
      B(1,2)=C1*B(1,2)
```

```
      B(2,1)=C1*B(2,1)
      CALL INVERT (M,B,A,ISTAT)
      IF (ISTAT .NE. 0) RETURN
      CALL MULT (M,M,TEMP,A,X)
      RETURN
      END

      SUBROUTINE IDENT (M,A)
C     Возвращает идентифицированную матрицу в A
      COMPLEX A(M,M)
      DO 10 J=1,M
      DO 10 I=1,M
         A(I,J)=(0.,0.)
         IF (I .EQ. J) A(I,J)=(1.,0.)
10       CONTINUE
      RETURN
      END

      SUBROUTINE INVERT (M,A,B,ISTAT)
C     Матрица B является результатом обращения матрицы A только для слу-
C     чаев M=1, 2
      COMPLEX A(M,M), B(M,M), DET, T
      IF (M .EQ. 1) GO TO 10
      IF (M .EQ. 2) GO TO 20
      ISTAT=1
      RETURN
10    B(1,1)=1./A(1,1)
      RETURN
20    DET=A(1,1)*A(2,2)-A(1,2)*A(2,1)
      IF (CABS(DET) .NE. 0.) GO TO 30
      ISTAT=2
      RETURN
30    T=1./DET
      B(1,1)=A(2,2)*T
      B(1,2)=-A(1,2)*T
      B(2,1)=-A(2,1)*T
      B(2,2)=A(1,1)*T
      RETURN
      END

      SUBROUTINE MULT (M,N,A,B,C)
C     M×N-матрица C является результатом перемножения M×M-матрицы A
C     с M×N-матрицей B
      COMPLEX A(M,M) B(M,N), C(M,N), S
      DO 10 J=1,N
      DO 10 I=1,M
         S=(0.,0.)
         DO 20 K=1,M
20          S=S+A(I,K)*B(K,J)
10       C(I,J)=S
      RETURN
      END

      SUBROUTINE OUTPROD (M,X,Y,A)
C     Матрица A является результатом векторного произведения векторов X и Y
      COMPLEX X(M), Y(M), A(M,M)
      DO 10 J=1,M
      DO 10 I=1,M
10       A(I,J)=X(I)*CONJG(Y(J))
```

```
      RETURN
      END

      SUBROUTINE SCALE (M,N,S,A,B)
C     Матрица B является результатом масштабирования M×N-матрицы A ска-
C     ляром S
      COMPLEX S,A(M,N), B(M,N)
      DO 10 J=1,N
      DO 10 I=1,M
10       B(I,J)=S*A(I,J)
      RETURN
      END

      SUBROUTINE SQROOT (M,A,B,ISTAT)
C     Матрица B является результатом вычисления нижней треугольной матри-
C     цы «корня квадратного» эрмитовой матрицы A только для случаев M=
C     =1, 2
      COMPLEX A(M,M), B(M,M)
      REAL C
      IF (M .LE. 2) GO TO 10
      ISTAT=1
      RETURN
10    C=SQRT(REAL(A(1.1)))
      B(1,1)=CMPLX(C,0.)
      IF (M .EQ. 1.) RETURN
      B(2,1)=A(2,1)/C
      B(1,2)=0.
      C=REAL(A(2,2)-A(1,2)*A(2,1)/A(1,1))
      B(2,2)=CMPLX(SQRT(C),0.)
      RETURN
      END

      SUBROUTINE SUB (M,N,A,B,C)
C     Матрица C является результатом вычитания M×N-матрицы B из матри-
C     цы A
      COMPLEX A(M,N), B(M,N), C(M,N)
      DO 10 J=1,N
      DO 10 I=1,M
10       C(I,J)=A(I,J)-B(I,J)
      RETURN
      END

      SUBROUTINE XPOSE (M,A,B)
C     Матрица B является комплексно-сопряженной транспозицией матрицы A
      COMPLEX A(M,M), B(M,M)
      DO 10 J=1,M
      DO 10 I=1,M
10       B(I,J)=CONJG(A(J,I))
      RETURN
      END

      SUBROUTINE ZERO (M,N,A)
C     Размещает нули в M×N-матрице A
      COMPLEX A(M,N)
      DO 10 J=1,N
      DO 10 I=1,M
10       A(I,J)=(0.,0.)
      RETURN
      END
```

Глава 16
ДВУМЕРНОЕ СПЕКТРАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ

16.1. Введение

В связи с появлением процедур одномерного спектрального оценивания с высоким разрешением (гл. 5—13) многие исследователи ожидали их обобщения как на двумерный, так и на случай более высокой размерности (там, где эти обобщения возможны). Двумерный спектральный анализ может быть использован для пространственно-пространственных массивов данных (например, обработка изображений), пространственно-временны́х массивов данных (например, обработка сигналов гидролокационных, сейсмических и радиолокационных в случае синтезируемой апертуры) или даже временно-временны́х массивов данных (например, анализ интервала повторения радиолокационных импульсов в зависимости от момента их прихода). При обобщении одномерных методов на двумерные часто возникают трудности из-за различий в теории одномерных и двумерных линейных систем, особенно это относится к невозможности разложить двумерный полином по полиномам более низкой размерности[1]. Таким образом, одномерную концепцию изолированных полюсов, нулей и корней в общем случае нельзя обобщить на двумерный случай. У двумерных систем намного больше степеней свободы, чем у одномерных. Вычислительные трудности в использовании некоторых перспективных двумерных методов спектрального оценивания ограничили их испытания и применения малыми двумерными наборами данных для простых сигнальных ситуаций, как, например, нескольких синусоид в пространственном белом шуме. Эти две причины объясняют, почему двумерное спектральное оценивание продолжает оставаться областью активного поиска. Только двумерная периодограмма, двумерные гибридные методы и двумерный метод на основе минимума дисперсии применяются практически при анализе расширенных двумерных наборов данных, в основном благодаря тому, что эти методы не связаны с факторизацией двумерных полиномов.

---

[1] Полезные сведения о разложении многочленов от двух и трех переменных, а также по интерполированию функций многих переменных читатель может найти, например, в [23*] и [9*, *б*, гл. 2, § 12]. — *Прим. ред.*

Одна глава позволяет лишь кратко осветить методы двумерного спектрального оценивания. Хотя математический аппарат, приведенный в данной главе, может быть применен для многомерного спектрального анализа, в настоящее время наибольший интерес представляет двумерный случай. Именно поэтому содержание главы фокусируется только на двумерном случае. Проблемы и математические тонкости, обусловленные значительными теоретическими различиями между одно- и двумерными спектральными методами, могли бы стать предметом самостоятельной книги. Предлагаем читателю за дополнительными деталями и ссылками по вопросам многомерной обработки цифровых сигналов и спектральному оцениванию обращаться к первоисточникам, как, например, книге Д. Даджиона, Р. Мерсеро [5] или статье Дж. Х. Макклеллана [21]. Изложение материала в этой главе будет строго придерживаться тематической последовательности материала, принятой по одномерным методам в гл. 2—13.

16.2. Краткая сводка результатов

Для удобства математических выкладок и упрощения их представления принято, что двумерные сигналы получены с помощью отсчетов в узлах прямоугольной сетки. Именно этот путь обычно используется на практике для получения двумерных дискретных сигналов. Ограниченность объема книги позволяет включить в эту главу только две программы двумерного спектрального анализа: по процедурам двумерного классического периодограммного спектрального оценивания и двумерного авторегрессионного спектрального оценивания в пределах одного квадранта. На рис. 16.1 дана краткая схема последовательности этапов получения спектров по двум этим программам, а также на основе двумерного метода минимума дисперсии. Примеры двумерных спектральных оценок показаны на рис. 16.2. Три выбранных метода демонстрируют возможность улучшения разрешения по сравнению с классическими процедурами двумерного оценивания.

После обзора в разд. 16.3 и 16.4 двумерных линейных систем, преобразования Фурье и теории случайных процессов в остальных разделах рассматриваются пять методов двумерного спектрального оценивания. В разд. 16.5 обсуждаются процедуры классического двумерного спектрального оценивания. В разд. 16.6 показано, как можно использовать разделимость двумерной экспоненты на множители для разработки модифицированной процедуры классического спектрального оценивания, которая в одном измерении является стандартным БПФ, а в другом — процедурой одномерной спектральной оценки с высоким разре-

● СБОР ДАННЫХ $N1 \times N2$ отсчетов; $T1 \times T2$ отсчетов/с		
Двумерная периодограмма	Двумерная авторегрессионная СПМ	Двумерная СПМ с минимальной дисперсией
● ВЫЧИСЛЕНИЕ ДВУМЕРНОЙ ПЕРИОДОГРАММЫ (Подпрограмма TDPERIOD, приложение 16.А)	● ВЫБОР ПОРЯДКОВ IP1, IP2 ● ОЦЕНИВАНИЕ ДВУМЕРНЫХ АР-ПАРАМЕТРОВ (Подпрограмма TDAR, приложение 16.В) ● ВЫЧИСЛЕНИЕ ДВУМЕРНОЙ АР СПМ (Подпрограмма TDARPSD, приложение 16.Г)	● ВЫБОР ПОРЯДКОВ IP1, IP2 ● ВЫЧИСЛЕНИЕ ДВУМЕРНОЙ СПМ С МИНИМАЛЬНОЙ ДИСПЕРСИЕЙ (Подпрограмма TDMINVAR, подразд. 16.9)

Рис. 16.1. Краткая запись трех подходов к двумерному спектральному оцениванию. *Примечание.* $T1 \times T2$ **отсчетов/с следует читать** $T1 \times T2$ **с/отсчет.**

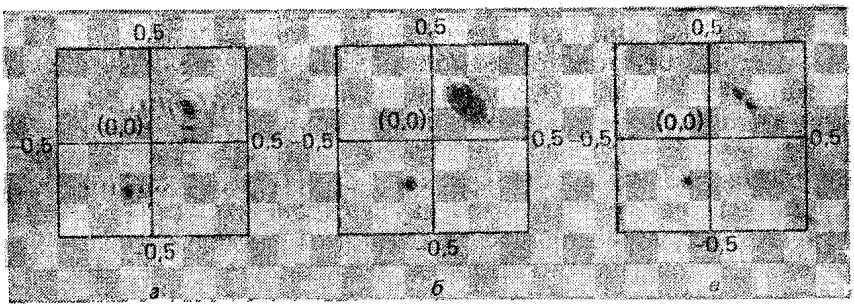


Рис. 16.2. Три двумерные спектральные оценки, полученные по известной двумерной автокорреляционной последовательности для трех комплексных двумерных синусоид в белом шуме: *а* **— двумерный коррелограммный метод;** *б* **— двумерный метод минимальной дисперсии;** *в* **— двумерный авторегрессионный метод.**

шением. Это позволяет все ранее разработанные одномерные методы использовать в гибридном двумерном спектральном методе. Такой подход особенно плодотворен при пространственно-временны́х данных, где часто имеется избыток временны́х данных и нехватка пространственных. Разд. 16.7 посвящен

обстоятельному рассмотрению двумерного авторегрессионного спектрального оценивания. В разд. 16.8 коротко рассказано о двумерной процедуре оценки СПМ по методу максимума энтропии, которую нельзя считать идентичной процедуре двумерной спектральной АР-оценки. Наконец, разд. 16.9 освещает процедуру двумерной спектральной оценки по методу минимума дисперсии.

Ввиду крайней ограниченности экспериментальных результатов, представленных в литературе по процедурам двумерного спектрального оценивания, весьма трудно проводить сравнение их характеристик. Высокая сложность вычислений (даже при использовании быстрых алгоритмов) ограничивает применение двумерных процедур оценивания СПМ случаем малых наборов данных и только несколькими двумерными параметрами.

16.3. Теория двумерных линейных систем и их преобразования

Дискретный двумерный сигнал — это любая функция $x[m, n]$, являющаяся двумерной последовательностью, или *множеством* действительных или комплексных чисел, определенных для упорядоченных пар целых чисел m и n при $-\infty<m, n<\infty$. Дискретный двумерный сигнал может представлять собой отсчеты непрерывной двумерной функции $x(t_1, t_2)$, где t_1 и t_2 принадлежат континууму величин. Хотя можно построить много различных двумерных сеток, в узлах которых берутся отсчеты непрерывной функции $x(t_1, t_2)$, в данной главе рассматривается только прямоугольная сетка

$$x[m, n]=x(mT_1, nT_2). \tag{16.1}$$

Интервалы отсчетов вдоль каждой из осей, обозначенные как T_1 и T_2, могут быть выражены во временны́х или пространственных единицах. Диапазон значений индексов m и n, для которого двумерная последовательность отлична от нуля, называют *опорной областью.* В данной главе предполагается, что типичная конечная запись данных имеет прямоугольную опорную область, $0\leqslant m\leqslant M-1$ и $0\leqslant n\leqslant N-1$, поскольку это — наиболее распространенная ситуация на практике.

Двумерная единичная импульсная (или отсчетная) функция определяется следующим образом:

$$\delta[m, n]=\delta[m]\,\delta[n]=\begin{cases}1, & m=n=0;\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases} \tag{16.2}$$

Двумерная *дискретная свертка* для двумерной инвариантной к сдвигу системы имеет вид

$$y[m, n]=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}h[m-i, n-j]\,x[i, j]=h[m, n]\star x[m, n] \tag{16.3}$$

для входа $x[i, j]$ и выхода $y[m, n]$. Двумерная последовательность $h[m, n]$, определенная на интервалах бесконечной протяженности вдоль каждой из осей, является *последовательностью значений двумерной импульсной характеристики системы*, которая представляет собой выходную последовательность, когда на вход подается функция $x[i, j]=\delta[i, j]$. Как и в одномерном случае, говорят, что двумерная линейная система, инвариантная к сдвигу, устойчива, если ее выходная последовательность остается ограниченной для всех ограниченных последовательностей на входе [1]. Двумерные системы значительно сложнее исследовать на устойчивость, чем одномерные.

Одномерная линейная система характеризовалась как каузальная, если ее выход $y[n]$ определялся на основе свертки, включавшей только текущие и прошлые входы $x[k]$ системы:

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} h[n-k]\,x[k] \qquad (16.4)$$

для n, $n+1$, $n+2$ и т. д. В этом случае последовательность значений одномерной дискретной импульсной характеристики является ненулевой только для $h[0]$, $h[1]$, ..., $h[\infty]$. Это имело физический смысл, когда сигналы являлись функциями времени. Однако каузальность несвойственна двумерным сигналам, для которых одно или оба измерения являются скорее функциями пространства, чем времени. Одна опорная область для последовательностей значений двумерной дискретной импульсной характеристики, которую условились считать опорной областью для «каузальной» двумерной системы, является *несимметричной полуплоскостью* (НСПП), показанной на рис. 16.3, *а*. Это определение двумерной каузальности предполагает, что выходная последовательность $y[m, n]$ вычисляется по методу, аналогичному телевизионному растру: сканирование по строкам сверху вниз при движении слева направо на каждой строке. Если представить выход $y[m, n]$ как позицию n на строке m, то выходной процесс формируют рекурсивно, сначала вычисляя значения от $y[m, -\infty]$ до $y[m, \infty]$, затем увеличивая индекс строки m. Заметим, что обе последовательности, входная и выходная, в качестве опорной области могут иметь неограниченную *полную плоскость* (ПП), даже несмотря на то, что импульсная характеристика имеет область НСПП.

В частном случае опорная область для каузальных двумерных систем ограничивает двумерную импульсную характеристику *квадрантом плоскости* (КП), как показано на рис. 16.3, *б*.

---

[1] Такой вид устойчивости иногда называется ОВОВ-устойчивостью (ограниченный вход — ограниченный выход) (см., например, [13*], т. 1, с. 187). — *Прим. ред.*

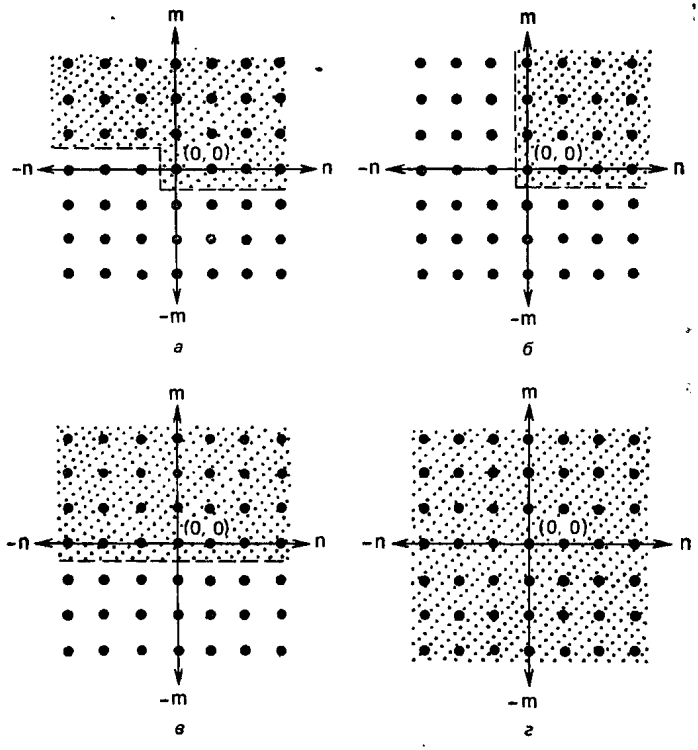


Рис. 16.3. Опорные области для дискретной системной последовательности (ненулевым значениям соответствуют затемненные области): *а* — каузальная (несимметричная полуплоскость, НСПП); *б* — каузальная (квадрант плоскости, КП); *в* — полукаузальная (симметричная полуплоскость, СПП); *г* — некаузальная (полная плоскость).

С точки зрения двумерного спектрального анализа случай опорной плоскости в виде КП представляет наибольший интерес. На рис. 16.3, *в* и *г* показаны еще две опорные области для двумерной дискретной импульсной характеристики. Полукаузальная опорная область покрывает *симметричную полуплоскость* (СПП). Она каузальна в одном измерении и некаузальна в другом. Некаузальная опорная область — это просто вся полная плоскость (ПП), которой соответствует уравнение (16.3).

Двумерное рекурсивное разностное уравнение, связывающее выход двумерной системы со входом, имеет вид

$$\sum_i \sum_j a[i, j]\, x[m-i, n-j] = \sum_i \sum_j b[i, j]\, u[m-i, n-j]. \qquad (16.5)$$

Без потери общности можно положить $a[0, 0]=1$, так что

уравнение (16.5) можно записать иначе:

$$x[m, n] = -\sum_{\substack{i \\ (i, j) \neq (0, 0)}} \sum_{j} a[i, j]\, x[m-i, n-j] + \sum_{i} \sum_{j} b[i, j]\, u[m-i, n-j]. \quad (16.6)$$

Пределы суммирования определяют *порядок* двумерного разностного уравнения. Например, порядок массива $a[i, j]$ должен быть равен $p_1 \times p_2$, если его опорная область — прямоугольник в КП, ограниченный $0 \leqslant i \leqslant p_1$ и $0 \leqslant j \leqslant p_2$. Можно показать [5], что выбор опорной НСПП-области для обоих массивов, $a[i, j]$ и $b[i, j]$, и соответствующих начальных условий для $x[i, j]$ дает каузальную двумерную выходную последовательность, т. е. дискретная импульсная характеристика, описываемая уравнением (16.3), также имеет опорную НСПП-область (см. Задачи), и, следовательно, оно может быть решено рекурсивно по описанной выше растровой схеме.

Функции вида $x[m, n] = z_1^m z_2^n$ являются собственными функциями двумерных линейных инвариантных к сдвигу систем, потому что реакция на выходе $y[m, n]$ на $z_1^m z_2^n$ как входное воздействие в свертке (16.3) дает

$$y[m, n] = H(z_1, z_2)\, z_1^m z_2^n, \quad (16.7)$$

где

$$H(z_1, z_2) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} h[i, j]\, z_1^{-i} z_2^{-j} = \mathcal{Z}\{h[i, j]\} \quad (16.8)$$

— *дискретная двумерная системная функция*, или *дискретная двумерная передаточная функция* для последовательности значений двумерной дискретной импульсной характеристики, определенная в области z_1 и z_2, в которой сходится выражение (16.8). Формула (16.8) является также общим определением *двумерного z-преобразования* для любой двумерной последовательности $h[i, j]$. Двумерная системная функция, соответствующая рекурсивному разностному уравнению (16.5), как легко показать, равна отношению двумерных полиномов

$$H(z_1, z_2) = \frac{B(z_1, z_2)}{A(z_1, z_2)} \quad (16.9)$$

где $A(z_1, z_2)$ и $B(z_1, z_2)$ — z-преобразования массивов $a[i, j]$ и $b[i, j]$:

$$A(z_1, z_2) = \sum_{i} \sum_{j} a[i, j]\, z_1^{-i} z_2^{-j}, \quad (16.10)$$

$$B(z_1, z_2) = \sum_{i} \sum_{j} b[i, j]\, z_1^{-i} z_2^{-j}, \quad (16.11)$$

причем пределы суммирования определяются соответствующими опорными областями. Каузальная одномерная рациональная системная функция включает в интервал суммирования *только* положительные значения индексов. Двумерная системная функция (16.9) для «каузальной» НСПП содержит одну сумму только с положительными значениями индексов в обеих формулах (16.10) и (16.11) и вторую сумму как с положительными, так и с отрицательными индексами. Говорят, что $H(z_1, z_2)$ имеет двумерный «нуль» (z_1, z_2), если $B(z_1, z_2)=0$ и $A(z_1, z_2)\neq 0$ и двумерный «полюс» (z_1, z_2), если $A(z_1, z_2)=0$ и $B(z_1, z_2)\neq 0$. Полюсы и нули двумерных рациональных системных функций в основе своей отличаются от соответствующих одномерных аналогов. Корни одномерных полиномов представляют собой изолированные точки в z-плоскости, тогда как корни двумерных полиномов в общем случае чаще представляют собой непрерывные кривые, а не изолированные точки. Рассмотрим простой двумерный полином

$$A(z_1, z_2)=1-az_1^{-1}z_2^{-1}, \qquad (16.12)$$

который обращается в нуль везде, где $z_1z_2=a$. Это непрерывная поверхность в двумерном комплексном z-пространстве. Невозможность разложить двумерные полиномы на множители с изолированными нулями и полюсами (т. е. свести к одномерным полиномам) очень затрудняет исследование устойчивости в двумерном случае.

Для непрерывного двумерного сигнала $x(t_1, t_2)$ существует *непрерывного времени преобразование Фурье* (двумерное НВПФ):

$$X_{\text{НВПФ}}(f_1, f_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(t_1, t_2)\exp(-j2\pi[f_1t_1+f_2t_2])\,dt_1\,dt_2 \qquad (16.13)$$

при условиях, аналогичных приведенным в гл. 2 для одномерного НВПФ. Если отсчеты непрерывного сигнала берутся через интервалы T_1 по переменной t_1 и через интервалы T_2 по переменной t_2, образуя последовательность отсчетов $x[m, n]=x[mT_1, nT_2]$, то соответствующее ей *дискретного времени двумерное преобразование Фурье* (двумерное ДВПФ) имеет вид

$$X_{\text{ДВПФ}}(f_1, f_2)=T_1T_2X(z_1, z_2)\Big|_{\substack{z_1=\exp(j2\pi f_1T_1)\\ z_2=\exp(j2\pi f_2T_2)}}= \qquad (16.14)$$

$$=T_1T_2\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[m, n]\exp(-j2\pi[f_1mT_1+f_2nT_2]). \qquad (16.15)$$

Если непрерывный двумерный сигнал во времени или в пространстве является сигналом с ограниченным спектром, так что

вне прямоугольной области $|f_1| \leqslant 1/2T_1$ и $|f_2| \leqslant 1/2T_2$

$$X_{\text{НВПФ}}(f_1, f_2) = 0, \tag{16.16}$$

то

$$X_{\text{ДВПФ}}(f_1, f_2) = X_{\text{НВПФ}}(f_1, f_2) \tag{16.17}$$

только в опорной области $|f_1| \leqslant 1/2T_1$ и $|f_2| \leqslant 1/2T_2$. ДВПФ является периодическим, $X_{\text{ДВПФ}}(f_1 + \alpha/2T_1, f_2 + \beta/2T_2) = X_{\text{ДВПФ}}(f_1, f_2)$ для любых целых α и β. В этом случае исходный непрерывный двумерный сигнал может быть восстановлен по двумерной последовательности отсчетов с помощью двумерной интерполяционной функции

$$x(t_1, t_2) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[m, n] \operatorname{sinc}[(t_1 - mT_1)/T_1] \operatorname{sinc}[(t_2 - nT_2)/T_2], \tag{16.18}$$

являющейся следствием двумерной теоремы отсчетов.

Квадрат модуля двумерного ДВПФ можно интерпретировать как *двумерную спектральную плотность энергии*

$$S(f_1, f_2) = |X_{\text{ДВПФ}}(f_1, f_2)|^2, \tag{16.19}$$

исходя из соотношений для *двумерной энергетической теоремы*[1]:

$$\begin{aligned} \text{Энергия} &= T_1 T_2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[m, n]|^2 = \\ &= \int_{-1/2T_1}^{1/2T_1} \int_{-1/2T_2}^{1/2T_2} |X_{\text{ДВПФ}}(f_1, f_2)|^2 \, df_1 \, df_2. \end{aligned} \tag{16.20}$$

Нижний индекс ДВПФ в последующих ссылках на это преобразование в данной главе для удобства будет опущен.

Полагаем, что дискретная двумерная последовательность — периодическая с периодом M в одном измерении и с периодом N — в другом, т. е.

$$x[m + \alpha M, n + \beta N] = x[m, n] \tag{16.21}$$

для всех целых α и β, так что последовательность полностью определена значениями MN в КП-опорной плоскости области $0 \leqslant m \leqslant M-1$ и $0 \leqslant n \leqslant N-1$. Для этой периодической последовательности можно записать *двумерный дискретный во времени ряд Фурье* (ДВРФ):

$$X_{\text{ДВРФ}}[k, l] = T_1 T_2 \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} x[m, n] \exp(-j2\pi [mk/M + nl/N]), \tag{16.22}$$

---

[1] Это соотношение является следствием двумерной формулы Парсеваля [24*, гл. 3, с. 100] и ее дискретного аналога. — *Прим. ред.*

который представляет периодическую функцию с периодами M и N в соответствующих измерениях. Для вычисления всех MN значений, получаемых в результате преобразования с помощью ДВРФ, потребовалось бы M^2N^2 комплексных операций (умножений и сложений). Можно применить одномерное БПФ из приложения 2.В, чтобы уменьшить объем вычислений приблизительно до $(MN \log_2 MN)/2$ комплексных операций. При этом используется возможность разделения аргумента экспоненты в выражении (16.22) для первоначального вычисления промежуточного массива, который соответствует преобразованию в одном измерении:

$$X_{\text{промежут}}[m,\ l] = T_2 \sum_{n=0}^{N-1} x[m,\ n] \exp(-j2\pi nl/N). \quad (16.23)$$

Затем вычисляется ДВРФ промежуточного массива, что соответствует преобразованию в другом измерении:

$$X_{\text{ДВРФ}}[k,\ l] = T_1 \sum_{m=0}^{M-1} X_{\text{промежут}}[m,\ l] \exp(-j2\pi mk/M). \quad (16.24)$$

Эти ряды представляют собой строчно-столбцевое разложение двумерного ДВРФ на два множества операций, являющихся одномерными ДВРФ. В процессе этих операций сначала вычисляется N одномерных БПФ по *столбцам* массива исходных данных, а затем M БПФ по *строкам* промежуточного массива.

16.4. Теория двумерных случайных процессов

Понятие двумерной спектральной плотности мощности (СПМ) требует, как и в одномерном случае, чтобы двумерный массив $x[m, n]$ отсчетов из двумерного случайного процесса был стационарным в широком смысле. Говорят, что такие двумерные случайные процессы образуют *однородные* последовательности, поскольку двумерное среднее процесса не зависит от расположения на двумерной плоскости и двумерная автокорреляционная последовательность (АКП) является функцией расстояния между двумя точками на двумерной плоскости [1]. Дискретное двумерное среднее, автокорреляционная последовательность, автоковариационная последовательность и взаимно-корреляци-

[1] Однородными обычно называют временные процессы с указанными свойствами, тогда как пространственные при таких же свойствах называют изотропными. Для тех и других в двумерном случае корреляционная функция зависит только от евклидова расстояния между точками плоскости (см., например, [25*], гл. 2, § 10, с. 110—114). — *Прим. ред.*

онная последовательность для однородных случайных процессов, соответственно, имеют вид

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \mathcal{E}\{x[m,\ n]\} = \text{const},\\
r_{xx}[k,\ l] &= \mathcal{E}\{x[m+k,\ n+l]\,x^*[m,\ n]\},\\
c_{xx}[k,\ l] &= \mathcal{E}\{(x[m+k,\ n+l]-\bar{x})(x^*[m,\ n]-\bar{x}^*)\} =\\
&= r_{xx}[k,\ l]-|\bar{x}|^2,\\
r_{yx}[k,\ l] &= \mathcal{E}\{y[m+k,\ n+l]\,x^*[m,\ n]\}.
\end{aligned} \tag{16.25}$$

Как правило, считают, что среднее равно нулю, так что двумерные автокорреляционная и автоковариационная последовательности совпадают. Значение автокорреляции $r_{xx}[0,\ 0]$ действительно и положительно (см. Задачи). Можно показать [5], что двумерная АКП образует положительно полуопределенную последовательность, т. е.

$$\sum_i \sum_j \sum_k \sum_l a[i,\ j]\,a^*[k,\ l]\,r_{xx}[i-k,\ j-l] \geqslant 0$$

для всех последовательностей $a[i,\ j]$. Свойство положительной определенности гарантирует, что двумерное ДВПФ двумерной АКП будет неотрицательным и что корреляционные матрицы, образованные из двумерной АКП, имеют обратные матрицы.

Двумерная спектральная плотность мощности (СПМ) $P_{xx}(f_1,\ f_2)$ определяется аналогично одномерной СПМ как двумерное ДВПФ двумерной автокорреляционной последовательности

$$P_{xx}(f_1,\ f_2) = T_1T_2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_{xx}[m,\ n] \exp\left(-j2\pi\left[f_1mT_1+f_2nT_2\right]\right) \tag{16.26}$$

на интервале $|f_1| \leqslant 1/2T_1$ и $|f_2| \leqslant 1/2T_2$. Выражение (16.26) — это двумерная версия теоремы Винера — Хинчина. Можно показать (см. Задачи), что двумерная СПМ действительна и положительна.

Предположение об эргодичности двумерной автокорреляционной последовательности обосновывает применение среднего по времени

$$r_{xx}[m,\ n] = \lim_{\substack{N\to\infty\\ M\to\infty}} \frac{1}{2M+1}\frac{1}{2N+1} \sum_{i=-M}^{M} \sum_{j=-N}^{N} x[i+m,\ \ j+n]\,x^*[i,\ j] \tag{16.27}$$

одиночной реализации двумерного случайного процесса для получения двумерной АКП. Используя подход, подобный приме-

ненному в гл. 4, можно показать, что эквивалентным представлением двумерной функции СПМ является

$$P_{xx}(f_1, f_2) = \lim_{\substack{N\to\infty \\ M\to\infty}} \mathscr{E}\left\{\frac{T_1}{2M+1}\frac{T_2}{2N+1} \times \right.$$

$$\left. \times \left| \sum_{m=-M}^{M} \sum_{n=-N}^{N} x[m, n] \exp\left(-j2\pi\left[f_1 m T_1 + f_2 n T_2\right]\right) \right|^2 \right\}. \tag{16.28}$$

Важной разновидностью двумерного случайного процесса является двумерная последовательность белого шума $w[m, n]$, которая по определению имеет двумерную АКП вида

$$r_{ww}[k, l] = \rho_w \delta[k, l], \tag{16.29}$$

т. е. это процесс, характеризующийся отсутствием корреляции при всех сдвигах, кроме точки с нулевым сдвигом [0, 0]. СПМ для двумерного белого шума просто равна $P_{ww}(f_1, f_2) = T_1 T_2 \rho_w$.

Если $y[m, n]$ — двумерный случайный процесс, представляющий собой результат прохождения стационарного двумерного случайного процесса $x[m, n]$ через линейную систему вида (16.3), то выходная АКП $r_{yy}[k, l]$ и входная АКП $r_{xx}[k, l]$ связаны соотношением

$$r_{yy}[k, l] = h[k, l] \star h^*[-k, -l] \star r_{xx}[k, l]. \tag{16.30}$$

Если двумерное z-преобразование двумерной АКП $r_{xx}[k, l]$ равно

$$\mathrm{P}_{xx}(z_1, z_2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} r_{xx}[k, l] z_1^{-k} z_2^{-l}$$

и если $\mathrm{P}_{yy}(z_1, z_2)$ — аналогичное z-преобразование для $r_{yy}[k, l]$, то z-преобразование выражения (16.30) свяжет $\mathrm{P}_{xx}(z_1, z_2)$ и $\mathrm{P}_{yy}(z_1, z_2)$ следующим образом:

$$\mathrm{P}_{yy}(z_1, z_2) = \mathrm{H}(z_1, z_2)\,\mathrm{H}^*(1/z_1^*, 1/z_2^*)\,\mathrm{P}_{xx}(z_1, z_2), \tag{16.31}$$

где $H(z_1, z_2)$ — z-преобразование (16.8), являющееся системной функцией. Следовательно, соотношение между двумерными спектральными плотностями мощности входного и выходного процессов записывается в виде

$$P_{yy}(f_1, f_2) = T_1 T_2 \mathrm{P}_{yy}(z_1, z_2)\Big|_{\substack{z_1=\exp(j2\pi f_1 T_1) \\ z_2=\exp(j2\pi f_2 T_2)}} = |H(f_1, f_2)|^2 P_{xx}(f_1, f_2). \tag{16.32}$$

Если входной процесс — белый шум с АКП, описываемой выражением (16.29), и фильтр имеет двумерную передаточную функцию, выражаемую рациональной функцией (16.9), содержащей

двумерные полиномы, то выходной процесс представляет собой *двумерный процесс авторегрессии и скользящего среднего* (двумерный АРСС) с СПМ вида

$$P_{\text{АРСС}}(f_1, f_2) = T_1 T_2 \rho_w \left| \frac{B(f_1, f_2)}{A(f_1, f_2)} \right|^2, \tag{16.33}$$

в которой

$$A(f_1, f_2) = \sum_m \sum_n a[m, n] \exp(-j2\pi [f_1 m T_1 + f_2 n T_2]),$$

$$B(f_1, f_2) = \sum_m \sum_n b[m, n] \exp(-j2\pi [f_1 m T_1 + f_2 n T_2])$$

определены в некоторой произвольной опорной области. Если $B(f_1, f_2) = 1$, то СПМ соответствует *двумерному авторегрессионному процессу* (двумерному АР). Если $A(f_1, f_2) = 1$, то СПМ соответствует *двумерному процессу скользящего среднего* (двумерному СС). Двумерные процессы допускают также различные представления процесса в каждом измерении. Если, например, числитель является функцией только от f_1, т. е. $B(f_1, f_2) = B(f_1)$, то двумерный процесс — это процесс АРСС в измерении, соответствующем f_1, и АР в измерении, соответствующем f_2.

16.5. Классическое двумерное спектральное оценивание

Двумерные версии процедур классического спектрального оценивания непосредственно вытекают из одномерных представлений периодограммного и коррелограммного методов. Для удобства будем считать, что данные имеют опорную область типа квадранта плоскости, а именно MN отсчетов данных $x[m, n]$ доступны в прямоугольной области $0 \leqslant m \leqslant M-1$ и $0 \leqslant n \leqslant N-1$. Возможны другие, непрямоугольные опорные области, однако они здесь не рассматриваются, так как редко встречаются на практике.

Несмещенная оценка двумерной автокорреляционной функции при сдвиге $[k, l]$ имеет следующий вид:

$$\hat{r}_{xx}[k, l] = \begin{cases} \dfrac{1}{(M-k)(N-l)} \displaystyle\sum_{m=0}^{M-1-k} \sum_{n=0}^{N-1-l} x[m+k, n+l]\, x^*[m, n], \\ \qquad\qquad k \geqslant 0, \; l \geqslant 0; \\ \dfrac{1}{(M-k)(N-l)} \displaystyle\sum_{m=0}^{M-1-k} \sum_{n=-l}^{N-1} x[m+k, n+l]\, x^*[m, n], \\ \qquad\qquad k \geqslant 0, \; l < 0; \\ \hat{r}^*_{xx}[-k, -l], \qquad k \leqslant 0, \text{ для всех } l, \end{cases} \tag{16.34}$$

в диапазоне сдвигов $|k| \leqslant p_1$ и $|l| \leqslant p_2$. Максимальные значения сдвига ограничены соотношениями $p_1 \leqslant M-1$ и $p_2 \leqslant N-1$. Смещенную оценку двумерной АКП $\check{r}_{xx}[k, l]$ можно вычислить, просто заменив делитель $(M-k)(N-l)$ в формуле (16.34) на MN.

Процедура оценки СПМ на основе коррелограммного метода для двумерных отсчетов данных имеет вид

$$\hat{P}_{\text{КОРР}}(f_1, f_2) = T_1 T_2 \sum_{k=-p_1}^{p_1} \sum_{l=-p_2}^{p_2} w[k, l]\, \hat{r}[k, l] \exp(-j2\pi \times [f_1 k T_1 + f_2 l T_2]), \tag{16.35}$$

где $w[k, l]$ — корреляционная взвешивающая последовательность[1] (последовательность корреляционного окна), используемая, как и в одномерном случае, для достижения разумного компромисса между разрешением, уровнем боковых лепестков и дисперсией оценки. В литературе имеется не много сведений о двумерных функциях окна для спектрального оценивания. Двумерные окна часто стремятся сформировать в виде произведения одномерных окон. Так, например, построено двумерное окно Хэмминга

$$w[k, l] = [0{,}54 + 0{,}46 \cos(\pi k/p_1)]\,[0{,}54 + 0{,}46 \cos(\pi l/p_2)],$$

для $|k| \leqslant p_1$ и $|l| \leqslant p_2$. Хуанг [8] уделил большее внимание исследованию двумерных окон с круговой симметрией, чем прямоугольным окнам. Если использовать смещенную оценку АКП $\check{r}_{xx}[k, l]$ (т. е. $w[k, l]$ записывают для треугольного окна), тогда альтернативное выражение матрично-векторного произведения для СПМ, вычисляемой на основе коррелограммного метода, имеет вид

$$\hat{P}_{\text{КОРР}}(f_1, f_2) = T_1 T_2 \underline{\mathbf{e}}^H(f_1, f_2)\, \underline{\check{\mathbf{R}}}\, \underline{\mathbf{e}}(f_1, f_2), \tag{16.36}$$

где блочно-тёплицева автокорреляционная матрица блочной размерности $(p_1+1) \times (p_1+1)$

$$\underline{\check{\mathbf{R}}} = \begin{pmatrix} \check{\mathbf{R}}[0] & \check{\mathbf{R}}[1] & \dots & \check{\mathbf{R}}[p_1] \\ \check{\mathbf{R}}[-1] & \check{\mathbf{R}}[0] & \dots & \check{\mathbf{R}}[p_1-1] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \check{\mathbf{R}}[-p_1] & \check{\mathbf{R}}[-p_1+1] & \dots & \check{\mathbf{R}}[0] \end{pmatrix} \tag{16.37}$$

[1] Термин характеризует взвешивание корреляционных функций в области сдвигов подобно временно́му взвешиванию временны́х функций. — *Прим. ред.*

имеет тёплицевы матричные элементы размера $(p_2+1)\times(p_2+1)$:

$$\check{\mathbf{R}}[k]=\begin{pmatrix} \check{r}_{xx}[k,\ 0] & \check{r}_{xx}[k,\ 1] & \dots & \check{r}_{xx}[k,\ p_2] \\ \check{r}_{xx}[k,\ -1] & \check{r}_{xx}[k,\ 0] & \dots & \check{r}_{xx}[k,\ p_2-1] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \check{r}_{xx}[k,\ -p_2] & \check{r}_{xx}(k,\ -p_2+1] & \dots & \check{r}_{xx}[k,\ 0] \end{pmatrix}. \tag{16.38}$$

Двумерный блочный вектор $\underline{\mathbf{e}}(f_1,\ f_2)$ комплексных синусоид определяется следующим образом:

$$\underline{\mathbf{e}}(f_1,\ f_2)=\begin{pmatrix} \mathbf{e}_0(f_1,\ f_2) \\ \mathbf{e}_1(f_1,\ f_2) \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{p1}(f_1,\ f_2) \end{pmatrix},\quad \mathbf{e}_k(f_1,\ f_2)=\exp(j2\pi f_1 kT_1)\begin{pmatrix} 1 \\ \exp(j2\pi f_2 T_2) \\ \vdots \\ \exp(j2\pi f_2 p_2 T_2) \end{pmatrix}. \tag{16.39}$$

Заметим, что каждый из векторов $\mathbf{e}_k(f_1,\ f_2)$ имеет (p_2+1) элементов.

Выражение двумерной периодограммы повторяет по форме одномерную периодограмму:

$$\hat{P}_{\mathrm{PER}}(f_1, f_2)= =\frac{T_1T_2}{MN}\left|\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} w[m,\ n]\,x[m,\ n]\exp(-j2\pi[f_1mT_1+f_2nT_2])\right|^2, \tag{16.40}$$

где $w[m,\ n]$ — соответствующее окно наблюдаемых данных. Можно уменьшить дисперсию двумерной периодограммной процедуры оценки, если разбить данные на меньшие двумерные массивы, которые могут перекрываться, записать двумерную периодограмму для каждого подмассива и усреднить периодограммы подмассивов. Последовательности значений данных из пространственно-временны́х массивов часто так ограничены в пространственной области, что усреднение по подмассивам можно осуществить только во временно́м измерении, так как обычно нельзя допускать потери в спектральном разрешении из-за усреднения по подмассивам в пространственном измерении. Если отдельные подмассивы статистически независимы, то дисперсия уменьшится в число раз, соответствующее числу усредняемых подмассивов. Если они не являются независимыми, то уменьшение дисперсии будет меньше. В приложении 16.А содержится подпрограмма TDPERIOD, по которой вычисляется двумерная периодограмма, использующая алгоритм одномерного БПФ.

Складывается впечатление, что статистические характеристики двумерных классических процедур оценки весьма схожи с характеристиками одномерных классических спектральных процедур оценки, несмотря на то, что аналитические результаты получить затруднительно. Разрешение в каждом измерении зависит от протяженности интервала данных в каждом измерении и в общем случае будет различным, если $MT_1 \neq NT_2$. Одномерное разрешение, проанализированное в гл. 5, в основном сохраняется в двумерном случае для спектральных компонент, соответствующих одному из двух частотных измерений.

16.6. Модифицированные процедуры классического двумерного спектрального оценивания

В разд. 16.3 было показано, что двумерное дискретно-временно́е преобразование Фурье (ДВПФ), используемое для вычисления периодограммы, может быть вычислено сначала как последовательность одномерных ДВПФ столбцов, а затем как последовательность одномерных ДВПФ строк. Можно построить процедуру *гибридного двумерного спектрального оценивания*, применяя к ДВПФ строк любой из методов одномерного спектрального оценивания с высоким разрешением, представленных в гл. 6—13 (рис. 16.4). Промежуточный массив, образованный ДВПФ столбцов, состоит из величин, полученных в результате комплекснозначного преобразования, поэтому следует использовать комплексную форму процедуры высокого разрешения. Гибридная схема предназначена для улучшения разрешения в том измерении, где протяженность записи данных может быть ограничена. Это часто происходит с пространственно-временны́ми массивами данных, где пространственное разрешение может быть недостаточным вследствие малого числа пространственных датчиков при относительно бо́льшем числе временны́х отсчетов, получаемых от каждого датчика. Запишем математически две стадии гибридного подхода к двумерному спектральному оцениванию:

$$X_{\text{промежут}}[m, f_2] = T_2 \sum_{n=0}^{N-1} x[m, n] \exp(-j2\pi f_2 n T_2), \quad (16.41)$$

$$\hat{P}_{\text{гибр}}(f_1, f_2) = \text{одномерная СПМ высокого разрешения для } X_{\text{промежут}}[m, f_2], \quad (16.42)$$

вычисляемой на каждой частоте f_2 с помощью уравнения (16.41). Джойс [12] описывает одну такую процедуру гибридного двумерного спектрального оценивания, основанную на одномерном БПФ и одномерном комплексном алгоритме Берга. Гибридные

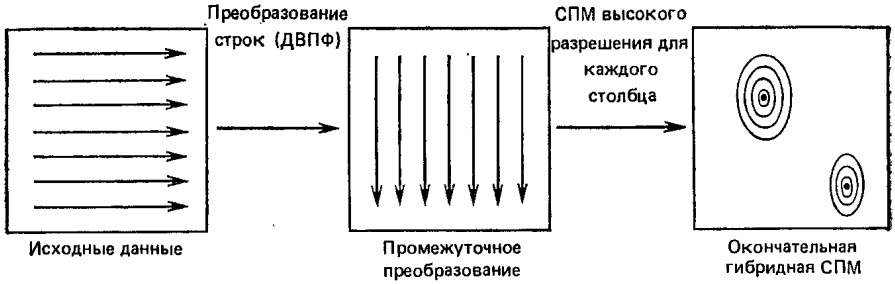


Рис. 16.4. Гибридный метод двумерного спектрального оценивания.

схемы имеют тенденцию, как правило, давать лучшие результаты, когда в измерении с ограниченной протяженностью записи отношение сигнал/шум достаточно высоко.

Другой подход, с помощью которого стремятся улучшить разрешение, достижимое на основе процедур классического двумерного спектрального оценивания, — это использование методов линейного предсказания для того, чтобы экстраполировать исходный двумерный массив данных расширенным массивом. Затем расширенный массив данных обрабатывают обычным образом, с помощью какой-либо из двух процедур классического спектрального оценивания. Фрост [7], Фрей [6], Пендрел [25] и Ульрих и Уолкер [28] исследовали процедуры двумерного линейного предсказания в случае квадранта плоскости (КП) для одновременного расширения массива данных по обоим измерениям. По-видимому, процедура экстраполяции данных обеспечивает ограниченное улучшение разрешения, возможно, до двух раз при высоком отношении сигнал/шум.

16.7. Двумерное авторегрессионное спектральное оценивание

Параметрические модели двумерных случайных процессов, как и в одномерном случае, применяют в надежде улучшить характеристики спектрального оценивания по сравнению с достижимыми при классических двумерных периодограммном и коррелограммном методах. Наибольшее внимание в литературе уделено двумерной авторегрессионной (АР) модели, и это будет единственная параметрическая двумерная модель, рассматриваемая в данной главе. Двумерное спектральное оценивание на основе скользящего среднего, насколько известно автору, не описано в литературе. Метод двумерного спектрального оценивания на основе авторегрессии — скользящего среднего был предложен Кадзоу и Огино [1].

16.7.1. Двумерный авторегрессионный процесс

Двумерная авторегрессионная последовательность $x[m, n]$ генерируется двумерным линейным инвариантным к сдвигу фильтром, возбуждаемым двумерной последовательностью белого шума $w[m, n]$:

$$x[i, j] = -\sum_m \sum_n a[m, n]\, x[i-m, j-n] + w[i, j], \quad (16.43)$$

где интервалы изменения индексов m и n зависят от опорной области, принятой для массива АР-параметров. Соответствующая двумерная АР-спектральная плотность мощности, как показано в разд. 16.4, имеет вид

$$P_{\text{АР}}(f_1, f_2) = \frac{T_1 T_2 \rho_w}{\left|1 + \sum_m \sum_n a[m, n] \exp\left(-j2\pi [f_1 m T_1 + f_2 n T_2]\right)\right|^2}, \quad (16.44)$$

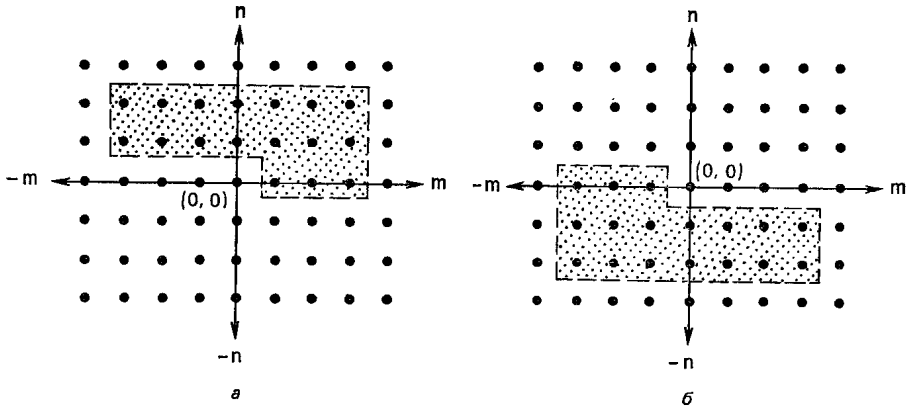
где ρ_w — дисперсия двумерного белого шума.

При двумерном АР-моделировании вопрос первостепенного значения — выбор опорной области [20]. Здесь будут исследоваться только каузальные двумерные АР-процессы, хотя требование устойчивости и каузальности авторегрессионного процесса не обязательно обеспечивает лучшую двумерную спектральную оценку, чем та, которая могла бы быть получена при полукаузальных[1] или некаузальных авторегрессионных процессах. Даже при допущении каузальности двумерный АР-процесс определяется неоднозначно, так как возможны две опорные области: НСПП и КП. Массив авторегрессионных параметров $a_U[m, n]$ НСПП-области, соответствующих верхней полуплоскости, и массив авторегрессионных параметров $a_L[m, n]$ НСПП-области, соответствующих нижней полуплоскости, можно определить следующим образом:

$$a[m, n] = \begin{cases} a_U[m, n], & -p_1 \leqslant m \leqslant p_1, \text{ если } 1 \leqslant n \leqslant p_2 \text{ или} \\ & 1 \leqslant m \leqslant p_1, \text{ если } n = 0; \\ a_L[m, n], & -p_1 \leqslant m \leqslant p_1, \text{ если } -p_2 \leqslant n \leqslant -1 \text{ или} \\ & -p_1 \leqslant m \leqslant -1, \text{ если } n = 0, \end{cases} \quad (16.45)$$

для положительных целых чисел p_1 и p_2. Полное число АР-параметров в случае НСПП, следовательно, равно $2p_1p_2 + p_1 + p_2$. На рис. 16.5 показана опорная область для этих двух авторегрессионных НСПП-массивов. Массивы авторегрессионных параметров первого, второго, третьего и четвертого квадрантов в

[1] Определение полукаузальности см. в разд. 16.3. — *Прим. ред.*



а *б*

Рис. 16.5. Типичные опорные НСПП-области для двумерных массивов АР-параметров в случае $p_1=3$ и $p_2=2$: *а* — НСПП-область в верхней полуплоскости; *б* — НСПП-область в нижней полуплоскости.

случае КП $a_1[m, n]$, $a_2[m, n]$, $a_3[m, n]$ и $a_4[m, n]$ можно определить следующим образом:

$$a[m, n]=$$

$$=\begin{cases} a_1[m, n], & 0\leqslant m\leqslant p_1, \text{ если } 1\leqslant n\leqslant p_2 \text{ или} \\ & 1\leqslant m\leqslant p_1, \text{ если } n=0; \\ a_2[m, n], & -p_1\leqslant m\leqslant 0, \text{ если } 1\leqslant n\leqslant p_2 \text{ или} \\ & -p_1\leqslant m\leqslant -1, \text{ если } n=0; \\ a_3[m, n], & -p_1\leqslant m\leqslant 0, \text{ если } -p_2\leqslant n\leqslant -1 \text{ или} \\ & -p_1\leqslant m\leqslant -1, \text{ если } n=0; \\ a_4[m, n], & 0\leqslant m\leqslant p_1, \text{ если } -p_2\leqslant n\leqslant -1 \text{ или} \\ & 1\leqslant m\leqslant p_1, \text{ если } n=0. \end{cases} \tag{16.46}$$

Полное число АР-параметров в случае КП для любого из четырех квадрантов равно $p_1p_2+p_1+p_2$. На рис. 16.6 показаны опорные области авторегрессионных массивов для этих четырех КП.

16.7.2. Двумерное линейное предсказание

Оценка на основе двумерного линейного предсказания по массиву отсчетов данных $x[m, n]$ принимает следующий вид:

$$\hat{x}[m, n]=-\sum_i\sum_j \alpha[i, j]\,x[m-i, n-j], \tag{16.47}$$

где $\alpha[i, j]$ — двумерный коэффициент линейного предсказания.

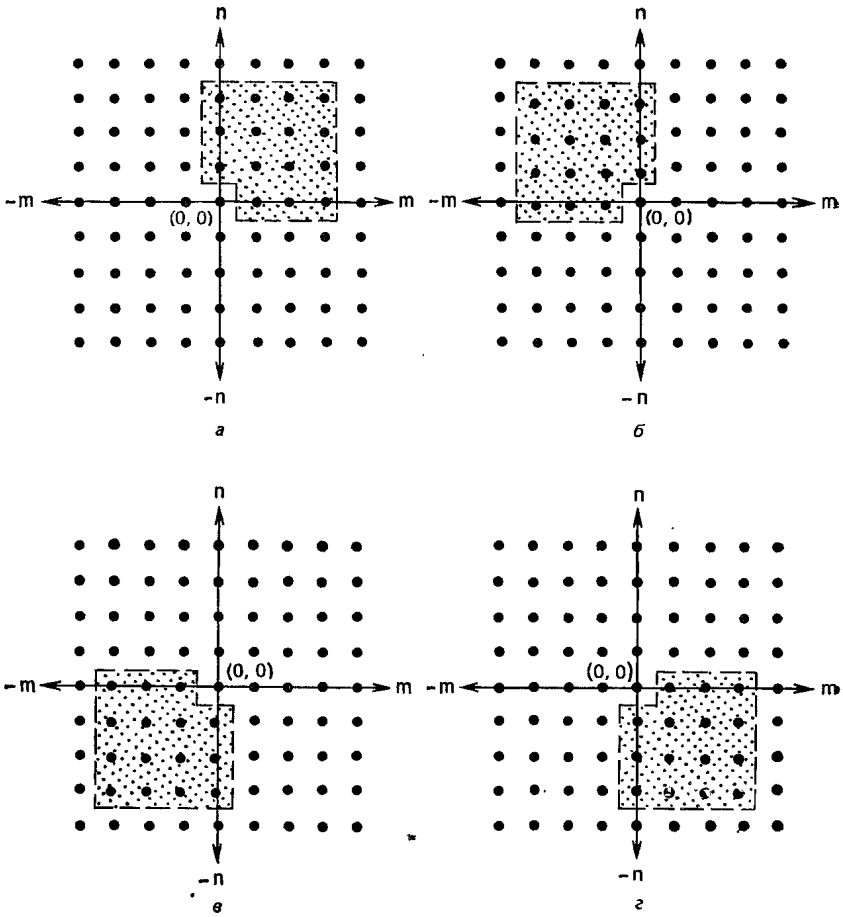


Рис. 16.6. Типичные опорные КП-области носителя для двумерных массивов АР-параметров в случае $p_1=p_2=3$, расположенные в первом (*а*), втором (*б*), третьем (*в*) и четвертом (*г*) квадрантах.

Если выбрана каузальная опорная область для массива коэффициентов линейного предсказания, то коэффициенты двумерного линейного предсказания, которые минимизируют дисперсию ошибки $x[m, n]-\hat{x}[m, n]$,

$$\rho_{LP}=\mathcal{E}\{|x[m, n]-\hat{x}[m, n]|^2\},$$

превращают ошибку линейного предсказания в двумерный белый шум. Это аналогично интерпретации одномерного фильтра ошибки линейного предсказания как отбеливающего шум (см. гл. 7). Нормальные уравнения, из которых определяются дву-

мерные коэффициенты линейного предсказания по известным двумерным АКП, идентичны двумерным уравнениям Юла — Уолкера для каузального двумерного АР-процесса, описываемым в разд. 16.7.3. Коэффициенты отражения в случае двух измерений здесь не рассматриваются, они обсуждаются в работе [20].

Использование двумерных фильтров линейного предсказания с полукаузальными и некаузальными опорными областями изучалось в работах [10, 11, 23, 25] с целью применения в двумерном спектральном оценивании. По-видимому, полукаузальные процедуры двумерного спектрального оценивания на основе линейного предсказания несколько более точны в определении расположения пиков, чем каузальные процедуры в случае КП или НСПП. [10]. Можно показать [10], что дисперсия ошибки в случае полукаузального линейного предсказания соответствует спектральной плотности белого шума в каузальном измерении и процесса скользящего среднего в некаузальном измерении, имеющего «спектральную плотность» P_{SCLP}, выражаемую в виде z-преобразования:

$$P_{SCLP}(z_1, z_2) = \frac{\rho_{LP}\left[1 + \sum \alpha[i, 0] z_1^{-i}\right]}{A(z_1, z_2)\, A^*(1/z_1^*, 1/z_2^*)}, \qquad (16.48)$$

где $A(z_1, z_2)$ определяется как $A(z_1, z_2) = 1 + \Sigma\Sigma a[i, j] z_1^{-i} z_2^{-j}$. Это больше не двумерный АР-, а двумерный АРСС-процесс. Подобно этому можно показать, что дисперсия ошибки линейного предсказания в некаузальном случае соответствует спектральной плотности процесса скользящего среднего в обоих измерениях. Эта «спектральная плотность», P_{NCLP} выраженная через z-преобразование, имеет вид

$$P_{NCLP}(z_1, z_2) = \frac{\rho_{LP}}{A(z_1, z_2)}. \qquad (16.49)$$

В (16.49) выполнено сокращение на член $A^*(1/z_1^*, 1/z_2^*)$, содержащийся в числителе и знаменателе. Процедуры полукаузального и некаузального спектрального оценивания на основе линейного предсказания не гарантируют неотрицательной СПМ, когда параметры модели оцениваются по записи данных конечной протяженности, тогда как процедуры каузального спектрального оценивания на основе линейного предсказания всегда гарантируют неотрицательность СПМ.

16.7.3. Двумерные уравнения Юла — Уолкера

Умножая обе части уравнения (16.43) на $x^*[m-k, n-l]$ и беря математическое ожидание, получим двумерные уравнения

Юла — Уолкера[1] для каузального двумерного АР-процесса:

$$\sum_i \sum_j a[i, j]\, r_{xx}[k-i, l-j] = \begin{cases} \rho_w, & [k, l] = [0, 0]; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Пределы суммирования можно выбрать в соответствии с любой из шести опорных областей в (16.45) или (16.46). Таким образом, соотношение между двумерными АР-параметрами и двумерной АКП устанавливается системой линейных уравнений.

Наибольшее внимание в литературе уделено двумерному АР-процессу с опорной областью в КП, что в основном обусловлено тесной связью между двумерным АР-процессом и многоканальным АР-процессом, описанным в гл. 15. Это соответствие позволяет искать способы разработки двумерного алгоритма левинсоновского типа, основанного на многоканальном алгоритме Левинсона, для решения двумерных уравнений Юла — Уолкера относительно массива двумерных АР-параметров.

Двумерные уравнения Юла — Уолкера для опорных областей в КП можно привести к двум удобным блочно-матричным формам, упорядочивающим двумерные АР-параметры либо по строкам, либо по столбцам. В краткой записи упорядоченные по строкам двумерные АР-уравнения Юла — Уолкера для опорной области в первом квадранте можно выразить следующим образом:

$$\underline{\mathbf{R}}^r \underline{\mathbf{a}}_1^r = \underline{\rho}_1^r, \tag{16.50}$$

где блочная матрица

$$\underline{\mathbf{R}}^r = \begin{pmatrix} \mathbf{R}^r[0] & \mathbf{R}^r[1] & \dots & \mathbf{R}^r[p_1] \\ \mathbf{R}^r[-1] & \mathbf{R}^r[0] & \dots & \mathbf{R}^r[p_1-1] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{R}^r[-p_1] & \mathbf{R}^r[-p_1+1] & \dots & \mathbf{R}^r[0] \end{pmatrix} \tag{16.51}$$

определяется матричными элементами

$$\mathbf{R}^r[i] = \begin{pmatrix} r_{xx}[i, 0] & r_{xx}[i, 1] & \dots & r_{xx}[i, p_2] \\ r_{xx}[i, -1] & r_{xx}[i, 0] & \dots & r_{xx}[i, p_2-1] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xx}[i, -p_2] & r_{xx}[i, -p_2+1] & \dots & r_{xx}[i, 0] \end{pmatrix}, \tag{16.52}$$

---

[1] Для получения указанных уравнений Юла — Уолкера надо записать уравнение (16.43) в виде $x[m, n] = -\sum_i \sum_j a[i, j] x[m-i, n-j] + w[i, j]$, а затем его умножить на $x^*[m-k, n-l]$ и усреднить по m и n. — *Прим. ред.*

а блочные векторы

$$\underline{\mathbf{a}}_1^r = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^r[0] \\ \mathbf{a}_1^r[1] \\ \vdots \\ \mathbf{a}_1^r[p_1] \end{pmatrix}, \quad \underline{\rho}_1^r = \begin{pmatrix} \rho_1^r \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

определяются через вектор-элементы

$$\mathbf{a}_1^r[i] = \begin{pmatrix} a_1[i, 0] \\ a_1[i, 1] \\ \vdots \\ a_1[i, p_2] \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\rho}_1^r = \begin{pmatrix} \rho_w \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{16.53}$$

Каждый элемент, обозначенный жирным **0**, — это вектор-столбец из p_2+1 нулей и, по определению, $a_1[0, 0] = 1$. Блочная тёплицева матрица $\underline{\mathbf{R}}^r$ составлена из $(p_1+1)\times(p_1+1)$ автокорреляционных матриц $\mathbf{R}^r[i]$, которые сами являются тёплицевыми. Поэтому говорят, что матрица $\underline{\mathbf{R}}^r$ дважды тёплицева или блочно-тёплицева-тёплицева. Верхний индекс r указывает читателю, что используется упорядочение по строкам. Каждая матрица $\mathbf{R}^r[i]$ имеет размер $(p_2+1)\times(p_2+1)$. Блочный вектор $\underline{\mathbf{a}}_1{}^r$ из p_2+1 авторегрессионных параметров, имеющий нижний индекс 1 для обозначения принадлежности к множеству АР-параметров из первого квадранта, составлен из p_1+1 векторов $\mathbf{a}_1{}^r[i]$, каждый размера p_2+1. У блочного вектора $\underline{\boldsymbol{\rho}}_1{}^r$ все компоненты нулевые, за исключением верхней — дисперсии шума ρ_w.

Упорядоченные по столбцам двумерные АР-уравнения Юла — Уолкера для опорной области в первом квадранте имеют вид

$$\underline{\mathbf{R}}^c \underline{\mathbf{a}}_1^c = \underline{\boldsymbol{\rho}}_1^c, \tag{16.54}$$

где блочная матрица

$$\underline{\mathbf{R}}^c = \begin{pmatrix} \mathbf{R}^c[0] & \mathbf{R}^c[1] & \dots & \mathbf{R}^c[p_2] \\ \mathbf{R}^c[-1] & \mathbf{R}^c[0] & \dots & \mathbf{R}^c[p_2-1] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{R}^c[-p_2] & \mathbf{R}^c[-p_2+1] & \dots & \mathbf{R}^c[0] \end{pmatrix} \tag{16.55}$$

определена матричными элементами

$$\mathbf{R}^c[j]=\begin{pmatrix} r_{xx}[0,\ j] & r_{xx}[1,\ j] & \dots & r_{xx}[p_1,\ j] \\ r_{xx}[-1,\ j] & r_{xx}[0,\ j] & \dots & r_{xx}[p_1-1,\ j] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xx}[-p_1,\ j] & r_{xx}[-p_1+1,\ j] & \dots & r_{xx}[0,\ j] \end{pmatrix}, \tag{16.56}$$

а блочные векторы

$$\underline{\mathbf{a}}_1^c=\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^c[0] \\ \mathbf{a}_1^c[1] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{a}_1^c[p_2] \end{pmatrix}, \quad \underline{\boldsymbol{\rho}}_1^c=\begin{pmatrix} \boldsymbol{\rho}_1^c \\ \mathbf{0} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

определены через вектор-элементы

$$\mathbf{a}_1^c[j]=\begin{pmatrix} a_1[0,\ j] \\ a_1[1,\ j] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_1[p_1,\ j] \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\rho}_1^c=\begin{pmatrix} \rho_w \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{16.57}$$

В этом случае размер блочной матрицы $\underline{\mathbf{R}}^c$ равен $(p_2+1)\times$ $\times(p_2+1)$, размер обоих блочных векторов $\underline{\mathbf{a}}_1^c$ и $\underline{\boldsymbol{\rho}}_1^c$ равен (p_2+1), размер матрицы $\mathbf{R}^c[j]-(p_1+1)\times(p_1+1)$; размер обоих векторов $\mathbf{a}_1^c[j]$ и $\boldsymbol{\rho}_1^c-(p_1+1)$; $\mathbf{0}$ — вектор-столбец из p_1+1 нулей.

Двумерные уравнения Юла — Уолкера для опорных областей во втором, третьем и четвертом квадрантах также можно выразить в форме либо упорядоченной по строкам блочной матрицы $\underline{\mathbf{R}}^r$, либо упорядоченной по столбцам блочной матрицы $\underline{\mathbf{R}}^c$. Например, строчно-упорядоченные формы имеют вид

$$\underline{\mathbf{R}}^r\underline{\mathbf{a}}_2^r=\underline{\boldsymbol{\rho}}_2^r, \tag{16.58}$$

$$\underline{\mathbf{R}}^r\underline{\mathbf{a}}_3^r=\underline{\boldsymbol{\rho}}_3^r, \tag{16.59}$$

$$\underline{\mathbf{R}}^r\underline{\mathbf{a}}_4^r=\underline{\boldsymbol{\rho}}_4^r, \tag{16.60}$$

где

$$\underline{\mathbf{a}}_2^r = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_2^r[0] \\ \mathbf{a}_2^r[1] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{a}_2^r[p_1] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2^r[i] = \begin{pmatrix} a_2[i,\ p_2] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_2[i,\ 1] \\ a_2[i,\ 0] \end{pmatrix}, \quad \underline{\boldsymbol{\rho}}_2^r = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\rho}_2^r \\ \mathbf{0} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\rho}_2^r = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ \rho_w \end{pmatrix}$$

и

$$\underline{\mathbf{a}}_3^r = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_3^r[p_1] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{a}_3^r[1] \\ \mathbf{a}_3^r[0] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3^r[i] = \begin{pmatrix} a_3[i,\ p_2] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_3[i,\ 1] \\ a_3[i,\ 0] \end{pmatrix}, \quad \underline{\boldsymbol{\rho}}_3^r = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\rho}_3^r \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\rho}_3^r = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ \rho_w \end{pmatrix},$$

а

$$\underline{\mathbf{a}}_4^r = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_4^r[p_1] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{a}_4^r[1] \\ \mathbf{a}_4^r[0] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_4^r[i] = \begin{pmatrix} a_4[i,\ 0] \\ a_4[i,\ 1] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_4[i,\ p_2] \end{pmatrix}, \quad \underline{\boldsymbol{\rho}}_4^r = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\rho}_4^r \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\rho}_4^r = \begin{pmatrix} \rho_w \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Автокорреляционные матрицы $\mathbf{R}^r[i]$ не эрмитовы, но удовлетворяют соотношению $\mathbf{R}^r[-i] = (\mathbf{R}^r[i])^{\kappa}$. Этого, однако, достаточно, чтобы сделать блочную матрицу $\underline{\mathbf{R}}^r$ эрмитовой, для которой $\underline{\mathbf{R}}^r = (\underline{\mathbf{R}}^r)^{\kappa}$. Матрица $\underline{\mathbf{R}}^r$ также обладает свойством

$$\mathbf{J}\underline{\mathbf{R}}^r\mathbf{J} = (\underline{\mathbf{R}}^r)^*, \tag{16.61}$$

где $\mathbf{J} - (p_1+1)(p_2+1) \times (p_1+1)(p_2+1)$ — матрица отражения. Это свойство следует из эрмитова и тёплицева свойств $\underline{\mathbf{R}}^r$. Поскольку $\mathbf{JJ} \neq \mathbf{I}$, где $\mathbf{I}$ — единичная матрица, можем записать уравнения (16.59) и (16.60) в следующем виде:

$$\mathbf{J}(\underline{\mathbf{R}}^r)^*\mathbf{JJ}\underline{\mathbf{a}}_3^r = \mathbf{J}\underline{\boldsymbol{\rho}}_3^r, \tag{16.62}$$

$$\mathbf{J}(\underline{\mathbf{R}}^r)^*\mathbf{JJ}\underline{\mathbf{a}}_4^r = \mathbf{J}\underline{\boldsymbol{\rho}}_4^r. \tag{16.63}$$

Учитывая, что $\mathbf{J}\underline{\boldsymbol{\rho}}_3{}^r = \underline{\boldsymbol{\rho}}_1{}^r$ и $\mathbf{J}\underline{\boldsymbol{\rho}}_4{}^r = \underline{\boldsymbol{\rho}}_2{}^r$, а также используя свойство (16.61), для уравнений (16.62) и (16.63) получаем

$$\underline{\mathbf{R}}^r(\mathbf{J}\underline{\mathbf{a}}_3^r)^* = (\underline{\boldsymbol{\rho}}_1^r)^* = \underline{\boldsymbol{\rho}}_1^r, \tag{16.64}$$

$$\underline{\mathbf{R}}^r(\mathbf{J}\underline{\mathbf{a}}_4^r)^* = (\underline{\boldsymbol{\rho}}_2^r)^* = \underline{\boldsymbol{\rho}}_2^r. \tag{16.65}$$

Здесь использован тот факт, что $\rho_w = \rho_w^*$, так как дисперсия ρ_w — величина действительная. Сравнивая выражения (16.64) с (16.58) и (16.65) с (16.59), можно сделать вывод, что

$$\underline{\mathbf{a}}_1' = (\mathbf{J}\underline{\mathbf{a}}_3')^*, \tag{16.66}$$

$$\underline{\mathbf{a}}_2' = (\mathbf{J}\underline{\mathbf{a}}_4')^*. \tag{16.67}$$

Следовательно, АР-параметры третьего квадранта являются комплексно-сопряженными с АР-параметрами первого квадранта:

$$a_3[m, n] = a_1^*[m, n], \tag{16.68}$$

а АР-параметры четвертого квадранта комплексно сопряжены с АР-параметрами второго квадранта:

$$a_4[m, n] = a_2^*[m, n]. \tag{16.69}$$

Равенства (16.68) и (16.69) аналогичны соотношению комплексной сопряженности коэффициентов линейного предсказания вперед и назад, полученному при одномерном АР-анализе.

В гл. 7 было показано, что существует однозначное соответствие между последовательностью из $p+1$ значений АКП и последовательностью из p одномерных авторегрессионных параметров и дисперсией шума ρ_w. Если задана одна последовательность, то другую последовательность можно определить однозначно. Это свойство взаимно однозначного соответствия в литературе часто называют *свойством автокорреляционного согласования* в одномерном авторегрессионном анализе. У двумерного АР-процесса этого свойства автокорреляционного согласования не существует. Исследование нормальных уравнений (16.54) и (16.58)—(16.60) выявляет, что требуется $2p_1p_2 - p_1 - p_2$ значений двумерной АКП для однозначного определения $p_1p_2 + p_1 + p_2$ двумерных АР-параметров и дисперсии ρ_w[1]. Следовательно, для однозначного определения значений АКП одних лишь АР-параметров недостаточно, т. е. не может существовать взаимно однозначного соответствия между этими двумя альтернативными представлениями двумерного АР-процесса. Обратное преобразование функции двумерной спектральной плотности мощности [формула (16.44)] порождает двумерную автокорреляционную последовательность, которая в общем слу-

---

[1] Для сравнения числа значений АКП и числа значений АР-параметров и дисперсии их удобно представить в следующей форме: $2p_1p_2 - p_1 - p_2 = p_1(p_2 - 1) + p_2(p_1 - 1)$ и $p_1p_2 + p_1 + p_2 = p_1(p_2 + 1) + p_2$, из которой ясно видно соотношение этих количеств. — *Прим. ред.*

чае не согласуется со значениями АКП, используемыми для вычисления двумерных АР-параметров из двумерных уравнений Юла — Уолкера. Однако полученная таким образом АКП будет иметь тенденцию *аппроксимировать* исходные значения АКП. Следует также подчеркнуть, что положительная определенность матрицы $\mathbf{R}^r$ гарантирует однозначность решения двумерных уравнений Юла — Уолкера, но не обязательно будет гарантировать устойчивость АР-модели. Вопрос об автокорреляционном согласовании будет центральным при обсуждении метода двумерной максимальной энтропии в разд. 16.8.

16.7.4. Решение двумерных уравнений Юла — Уолкера для квадранта плоскости (КП)

Быстрый алгоритм для решения двумерных КП-уравнений Юла — Уолкера можно получить, используя связь с многоканальными уравнениями Юла — Уолкера (гл. 15), для решения которых имеется многоканальный алгоритм Левинсона [27]. Эта процедура позволяет вычислять АР-параметры одновременно для всех четырех квадрантов плоскости. Представленный здесь алгоритм — это упорядоченный по строкам двумерный алгоритм Левинсона, в котором порядок по столбцам p_2 фиксирован, а решение для порядка по строкам p_1 получают рекурсивно, начиная с порядка 1. Сопутствующий ему двумерный алгоритм Левинсона, упорядоченный по столбцам, можно получить, просто меняя ролями p_1 и p_2. При $p_1 \gg p_2$ или $p_2 \gg p_1$ выбор упорядочения с наименьшим p_i, $i=1,2$, по столбцам может обеспечить вычислительные преимущества, даже если эти упорядочения приводят к одинаковым решениям. Возможны также другие двумерные алгоритмы Левинсона [13], как, например, алгоритм, который работает рекурсивно одновременно по обоим измерениям, или тот, который работает по каждому измерению попеременно.

Было показано [уравнение (15.57)], что многоканальные уравнения Юла — Уолкера для (p_2+1)-канального АР-процесса порядка p_1, содержащего каналы от 0 до p_2, имеют вид

$$\begin{pmatrix} \mathbf{R}_{xx}[0] & \mathbf{R}_{xx}[1] & \dots & \mathbf{R}_{xx}[p_1] \\ \mathbf{R}_{xx}[-1] & \mathbf{R}_{xx}[0] & \dots & \mathbf{R}_{xx}[p_1-1] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{R}_{xx}[-p_1] & \mathbf{R}_{xx}[-p_1+1] & \dots & \mathbf{R}_{xx}[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{A}_{p_1}^H[1] \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{p_1}^H[p_1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{p_1}^f \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \tag{16.70}$$

для многоканальных АР-параметров вперед и

$$\begin{pmatrix} \mathbf{R}_{xx}[0] & \dots & \mathbf{R}_{xx}[p_1-1] & \mathbf{R}_{xx}[p_1] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{R}_{xx}[-p_1+1] & \dots & \mathbf{R}_{xx}[0] & \mathbf{R}_{xx}[1] \\ \mathbf{R}_{xx}[-p_1] & \dots & \mathbf{R}_{xx}[-1] & \mathbf{R}_{xx}[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{B}^H_{p_1}[p_1] \\ \vdots \\ \mathbf{B}^H_{p_1}[1] \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{P}^b_{p_1} \end{pmatrix} \tag{16.71}$$

для многоканальных АР-параметров назад, где

$$\mathbf{R}_{xx}[k] = \begin{pmatrix} r_{00}[k] & \dots & r_{0p_2}[k] \\ \vdots & & \vdots \\ r_{p_20}[k] & \dots & r_{p_2p_2}[k] \end{pmatrix} = \mathbf{R}^H_{xx}[-k] \tag{16.72}$$

— многоканальная корреляционная матрица для сдвига k. Корреляционная матрица, фигурирующая в уравнениях (16.70) и (16.71), эрмитова и имеет блочно-тёплицеву структуру. Эти свойства были также характерной особенностью двумерных КП-уравнений Юла — Уолкера. Эта особенность предполагает, что решения двумерных уравнений Юла — Уолкера и многоканальных уравнений Юла — Уолкера связаны между собой. Сравнивая уравнения (16.54) и (16.70), видим, что можно установить взаимно однозначное соответствие между $\underline{\mathbf{R}}_{p_1}$ и $\underline{\mathbf{R}}^r$, если многоканальную взаимную корреляцию $r_{ij}[k]$ и двумерную автокорреляцию $r_{xx}[k, l]$ связать следующим образом:

$$r_{ij}[k] = r_{xx}[k,\ i-j], \tag{16.73}$$

для $0 \leqslant i,\ j \leqslant p_2$. Если теперь сравнить уравнения (16.54) и (16.70), то становится ясно, что если

$$\boldsymbol{\rho}^r_1 = \mathbf{R}^f_{p_1}\mathbf{a}^r_1[0], \tag{16.74}$$

то отсюда следует, что

$$\mathbf{a}^r_1[k] = \mathbf{A}^H_{p_1}[k]\,\mathbf{a}^r_1[0] \tag{16.75}$$

для $1 \leqslant k \leqslant p_1$. Итак, *многоканальный алгоритм Левинсона можно использовать для получения решения двумерных уравнений Юла — Уолкера.* С этой целью сначала находят решения для матриц $\mathbf{P}^f_{p_1}$ и $\mathbf{A}_{p_1}[k]$ для $k=1, \dots, p_1$, а затем используют урав-

нения (16.74) и (16.75) для получения двумерных авторегрессионных параметров и дисперсии.

Аналогично можно вычислить двумерные АР-параметры для второго квадранта опорной области из многоканального решения, используя

$$\rho_2^r = \mathbf{P}_{p_1}^f \mathbf{a}_2^r[0] \tag{16.76}$$

и

$$\mathbf{a}_2^r[k] = \mathbf{A}_{p_1}^H[k]\,\mathbf{a}_2^r[0] \tag{16.77}$$

для $1 \leqslant k \leqslant p_1$.

Тёплицеву структуру двумерных автокорреляционных матриц $\mathbf{R}_{xx}[k]$ можно использовать для дальнейшего уменьшения вычислительной сложности многоканального алгоритма Левинсона. Можно показать (см. Задачи), что дважды тёплицева структура приводит к соотношению

$$\mathbf{B}_{p_1}[k] = \mathbf{A}_{p_1}^H[k] \tag{16.78}$$

для $1 \leqslant k \leqslant p_1$, а соотношение

$$\mathbf{P}_{p_1}^f = \mathbf{P}_{p_1}^b \tag{16.79}$$

становится истинным, что, однако, в общем многоканальном случае не выполняется. Эти соотношения упрощают многоканальный алгоритм Левинсона в применении к двумерному случаю:

$$\Delta_{p_1+1} = [\mathbf{I}\ \mathbf{A}_{p_1}[1]\ \ldots\ \mathbf{A}_{p_1}[p_1]) \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{xx}[p_1+1] \\ \mathbf{R}_{xx}[p_1] \\ \vdots \\ \mathbf{R}_{xx}[1] \end{pmatrix} \tag{16.80}$$

$$\mathbf{A}_{p_1+1}[p_1+1] = -\Delta_{p_1+1}(\mathbf{P}_{p_1}^f)^{-1}, \tag{16.81}$$

$$\mathbf{A}_{p_1+1}[k] = \mathbf{A}_{p_1}[k] + \mathbf{A}_{p_1+1}[p_1+1]\,\mathbf{A}_{p_1}^H[p_1-k], \quad 1 \leqslant k \leqslant p_1, \tag{16.82}$$

$$\mathbf{P}_{p_1+1}^f = (\mathbf{I} - \mathbf{A}_{p_1+1}[p_1+1]\,\mathbf{A}_{p_1+1}^H[p_1+1])\mathbf{P}_{p_1}^f, \tag{16.83}$$

с начальным условием $\mathbf{P}_0^f = \mathbf{R}_{xx}[0]$. Это уменьшает объем вычислений общего многоканального алгоритма Левинсона почти вдвое [14, 29]. В приложении 16.Б содержится подпрограмма TDAR, предназначенная для вычисления двумерных АР-параметров в первом и втором квадрантах, при заданных значениях двумерной АКП.

16.7.5. Модифицированная процедура АР-спектральной оценки для квадранта плоскости

Запишем процедуру двумерной авторегрессионной спектральной оценки в первом квадранте

$$\hat{P}_{\text{АР1}}(f_1, f_2) = \frac{T_1 T_2 \hat{\rho}_w}{\left| \sum_{m=0}^{p_1} \sum_{n=0}^{p_2} \hat{a}_1[m, n] \exp(-j2\pi[f_1 m T_1 + f_2 n T_2]) \right|^2} = \frac{T_1 T_2 \hat{\rho}_w}{|\underline{e}(f_1, f_2)\underline{\hat{a}}_1^r|^2}, \quad (16.84)$$

где $\underline{e}(f_1, f_2)$ — двумерный блочный вектор комплексных синусоид из соотношений (16.39) и $\hat{\mathbf{a}}_1^r$ — оценка вектора (16.53) авторегрессионных параметров в первом квадранте (заметим, что $\hat{a}_1[0, 0] = 1$ по определению). Процедура двумерной спектральной оценки во втором квадранте имеет вид

$$\hat{P}_{\text{АР2}}(f_1, f_2) = \frac{T_1 T_2 \hat{\rho}_w}{\left| \sum_{m=-p_1}^{0} \sum_{n=0}^{p_2} \hat{a}_2[m, n] \exp(-j2\pi[f_1 m T_1 + f_2 n T_2]) \right|^2}, \quad (16.85)$$

где $\hat{a}_2[0, 0] = 1$. В случае одной синусоиды в белом шуме с известной АКП эти процедуры дадут асимметрично смещенные спектральные оценки, как показано на рис. 16.7, *а* и *б*, из которых видно, что спектральные характеристики представляют собой эллипсы, углы наклона которых имеют противоположные знаки. Джексон и Чен [9] предложили комбинированную АР-процедуру оценки в КП $\hat{P}_{\text{АРК}}(f_1, f_2)$ в виде

$$\frac{1}{\hat{P}_{\text{АРК}}(f_1, f_2)} = \frac{1}{\hat{P}_{\text{АР1}}(f_1, f_2)} + \frac{1}{\hat{P}_{\text{АР2}}(f_1, f_2)}. \quad (16.86)$$

Комбинированная КП-процедура оценки дает спектральные характеристики с круговой симметрией, показанные на рис. 16.7, *в*. Джексон и Чен также установили на практике, что применение комбинированной процедуры оценки снижает вероятность появления ложных пиков при спектральном оценивании. Это связано с тем, что выражения для оценки в первом и втором квадрантах не могут обратиться в нуль в одном и том же месте двумерной частотной плоскости, если в этом месте действительно отсутствует компонента сигнала. Заметим, что быстрый алгоритм в приложении 16.Б позволяет одновременно получить решение для векторов АР-параметров в двух квадрантах, необходимое для вычисления соотношения (16.86).

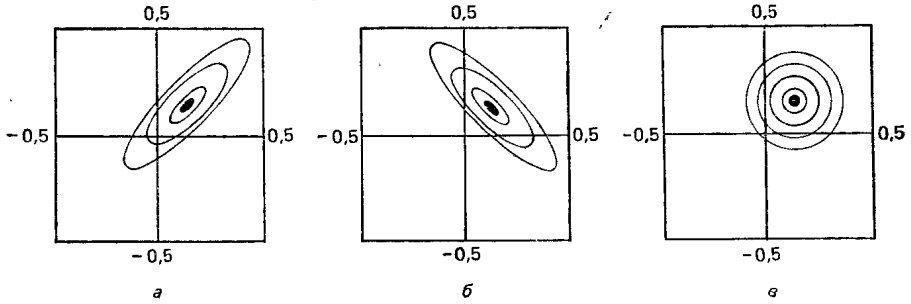


Рис. 16.7. Иллюстрация смещения спектральной КП — АР-оценки для случая одной синусоиды в белом шуме: *а* — двумерная АР-оценка СПМ в первом квадранте; *б* — двумерная АР-оценка СПМ во втором квадранте; *в* — комбинированная двумерная АР-оценка СПМ.

16.7.6. Оценивание двумерных авторегрессионных параметров на основе данных

Алгоритмический аппарат, примененный в гл. 8 для одномерного оценивания АР-параметров, можно обобщить и на двумерный случай. Можно использовать данные для оценивания значений двумерных АКП в конечной опорной области и затем решать двумерные уравнения Юла — Уолкера относительно массива авторегрессионных параметров в желаемой области, КП или НСПП. Можно также применить двумерные алгоритмы линейного предсказания с использованием метода наименьших квадратов, основанные на ковариационном и модифицированном ковариационном аппарате гл. 8 [22, 23, 28]. Полагая, что отсчетам данных $x[m, n]$ соответствует прямоугольная опорная область $1 \leqslant m \leqslant M$ и $1 \leqslant n \leqslant N$, получаем, что полная квадратичная ошибка E_1 в случае линейного предиктора в первом квадранте имеет вид

$$E_1 = \frac{1}{2NM} \sum_{m=p_1+1}^{M} \sum_{n=p_2+1}^{N} \left| \sum_{i=0}^{p_1} \sum_{j=0}^{p_2} a_1[i, j]\, x[m-i, n-j] \right|^2, \quad (16.87)$$

где полагаем $a_1[0, 0]=1$. Это выражение можно минимизировать, чтобы получить систему двумерных ковариационных уравнений линейного предсказания с коэффициентами, выраженными через параметры линейного предсказания $a_1[i, j]$. Модифицированную систему ковариационных нормальных уравнений линейного предсказания можно также получить (см. Задачи), минимизируя сумму квадратичных ошибок E_1+E_3 в первом и третьем квадрантах, с учетом соотношения комплексного сопряжения (16.68), связывающего двумерные АР-параметры в первом и третьем квадрантах.

16.8. Двумерное спектральное оценивание на основе метода максимальной энтропии

Процедура двумерной оценки СПМ на основе метода максимальной энтропии $P_{ММЭ}(f_1, f_2)$ максимизирует двумерную удельную энтропию

$$h = \int_{-1/2T_1}^{1/2T_1} \int_{-1/2T_2}^{1/2T_2} \ln P_{ММЭ}(f_1, f_2)\, df_1\, df_2. \qquad (16.88)$$

При этом наложено условие согласования ее с известными значениями двумерной АКП:

$$r_{xx}[k, l] = \int_{-1/2T_1}^{1/2T_1} \int_{-1/2T_2}^{1/2T_2} P_{ММЭ}(f_1, f_2) \exp\left(j2\pi\left[f_1 kT_1 + f_2 lT_2\right]\right) df_1\, df_2. \qquad (16.89)$$

В отличие от параметрических процедур двумерной спектральной оценки, например, АР-процедуры оценки в КП, для ММЭ-оценки СПМ не требуется, чтобы известные значения двумерной АКП имели равномерную опорную сетку; допускается использовать произвольные сдвиги. В гл. 7 было показано, что одномерный оптимальный спектр, полученный методом максимальной энтропии, является обратным положительному полиному, который может быть факторизован как квадрат модуля полинома конечного порядка. Для двумерных полиномов теорема факторизации отсутствует, так как полином, обратный двумерной СПМ, вычисляемой по максимальной энтропии, нельзя разложить на множители. Поэтому приходится привлекать нелинейные методы решения для нахождения по методу максимальной энтропии СПМ, которые не всегда гарантируют ее существование при произвольно заданном множестве значений двумерной АКП. В разд. 16.7.3 было показано, что двумерный АР-процесс не обладает свойством АКП-согласования, которое имеет место для одномерных АР-процессов. Таким образом, процедуры ММЭ и АР в двумерном случае не дают тождественных спектральных оценок, в отличие от одномерного случая, где они были идентичны.

Если сдвиги известной АКП соответствуют равномерной сетке опорного квадранта плоскости, то можно показать [11], что ММЭ-оценка СПМ имеет вид

$$P_{ММЭ}(f_1, f_2) = \frac{1}{\sum\limits_{k=-p_1}^{p_1} \sum\limits_{l=-p_2}^{p_2} \alpha[k, l] \exp\left(-j2\pi\left[f_1 kT_1 + f_2 lT_2\right]\right)} \qquad (16.90)$$

во всей области существования. Это выражение совпадает с выражением для процедуры некаузальной двумерной спектральной оценки на основе линейного предсказания. В общем случае

невозможно разложить знаменатель на два сопряженных полинома подобно выражению (16.48). Для $\alpha[k, l]$ не было найдено решения в конечном виде, но были разработаны методы, позволяющие вычислять $P_{\text{ММЭ}}(f_1, f_2)$ непосредственно по известным значениям двумерной АКП, без необходимости находить решения для параметров $\alpha[k, l]$. Для этих методов требуются либо итерационные алгоритмы, которые имеют слабую сходимость, либо нелинейные оптимизации, гарантирующие сходимость, но вычислительно неэффективные [15, 16, 18, 19, 26, 30].

Выражение (16.90) подразумевает обобщение двумерной АКП. АР-параметры в одномерном случае обычно используют для экстраполяции одномерной АКП, пока сохраняется свойство положительной определенности продолженной автокорреляционной последовательности. Задав конечную положительно определенную одномерную АКП, ее всегда можно проэкстраполировать в корректно определенную одномерную АКП. Однако в двумерном случае конечная двумерная положительно определенная АКП не может быть всегда проэкстраполирована в корректно определенную двумерную АКП (т. е. она не может быть *продолжаемой*) [3]. Хотя заметим, что пока $P_{\text{ММЭ}}(f_1, f_2) > 0$ для всех f_1 и f_2, обратное ДВПФ выражения (16.90) всегда генерирует корректную положительно определенную двумерную АКП [17, 24]. Можно ли получить процедуру, лучшую двумерной спектральной АР-оценки, при ограничениях, налагаемых на нее требованием АКП-согласования? Ограниченное число экспериментов, проведенных до настоящего времени, еще не дало утвердительного ответа, особенно когда используются оцененные значения АКП, а не точно известные.

16.9. Двумерное спектральное оценивание по методу минимума дисперсии

Процедура двумерной спектральной оценки по методу минимума дисперсии (МД) первоначально была развита Кейпоном [2] как процедура пространственно-временно́го спектрального оценивания. Обобщение процедуры одномерной спектральной оценки по методу минимума дисперсии на двумерную требует математических выкладок, которые очень близки выкладкам гл. 12 и разд. 15.13, и базируется на идее использования двумерного фильтра с конечной импульсной характеристикой, пропускающего двумерную комплексную синусоиду определенной частоты при одновременной минимизации выходной мощности. В отличие от параметрических методов двумерного СПМ-анализа двумерный метод МД СПМ не ограничен использованием значений АКП с равномерной сеткой. Если, однако, известна сетка сдвигов АКП в первом квадранте, то двумерная процедура

спектрального оценивания на основе метода минимума дисперсии имеет вид

$$P_{\text{МД}}(f_1, f_2) = \frac{T_1 T_2}{\underline{\mathbf{e}}^H(f_1, f_2)\,(\underline{\mathbf{R}}^r)^{-1}\,\underline{\mathbf{e}}(f_1, f_2)}, \tag{16.91}$$

где $\underline{\mathbf{e}}(f_1, f_2)$ — блочный вектор комплексных синусоид из формулы (16.39) и $(\underline{\mathbf{R}}^r)^{-1}$ — матрица, обратная дважды тёплицевой блочной автокорреляционной матрице (16.51). Другие варианты выражения (16.91) зависят от выбора опорной области. Доул и Лим [4] показали, что двумерная МД-оценка СПМ в 1-м квадранте и двумерная АР-оценка СПМ в 1-м квадранте связаны соотношением, сравнимым с соотношением уравнения (12.18). Это означает, что минимальной дисперсии СПМ в первом квадранте свойственно такое же смещение, как двумерной АР СПМ в первом квадранте. Применение комбинированной МД СПМ $P_{\text{МДК}}$, использующей процедуры оценок МД СПМ в первом и втором квадрантах,

$$\frac{1}{\hat{P}_{\text{МДК}}(f_1, f_2)} = \frac{1}{\hat{P}_{\text{МД1}}(f_1, f_2)} + \frac{1}{\hat{P}_{\text{МД2}}(f_1, f_2)}, \tag{16.92}$$

уменьшает это смещение.

Обращение матрицы $\underline{\mathbf{R}}^r$ просто получить, применяя формулу обращения (15.86) с дальнейшим сокращением вычислений, что возможно при использовании свойств (16.78) и (16.79) и того факта, что автокорреляционная матрица $\underline{\mathbf{R}}^r$ дважды тёплицева. Сравнимые выражения, соответствующие формулам (12.24) и (12.25), тогда могут быть развиты для двумерной МД СПМ (см. Задачи).

О некоторых проблемах, возникающих при процедурах двумерного спектрального оценивания по методу минимума дисперсии в условиях недостаточности данных для получения хороших автокорреляционных оценок, которые используются при обращении матрицы $\underline{\mathbf{R}}^r$, рассказано в работе [5]. Сообщается [23] что при обработке данных ЭКГ от медицинских датчиков были получены лучшие результаты при использовании двумерной МД, чем при двумерной периодограмме или двумерной АР.

Литература

[1] *Cadzow J. A., Ogino K.* Two-Dimensional Spectral Estimation, IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., vol. ASSP-29, pp. 396—401, June 1981.

[2] *Capon J.* High Resolution Frequency-Wavenumber Spectrum Analysis, Proc. IEEE, vol. 57, pp. 1408—1418, August 1969. [Имеется русский перевод: *Кейпон Дж.* Пространственно-временно́й спектральный анализ с высоким разрешением, ТИИЭР, 1969, т. 57, № 8, с. 69—79.]

[3] *Dickinson B. W.* Two-Dimensional Markov Spectrum Estimates Need Not Exist, IEEE Trans. Inf. Theory, vol. IT-26, pp. 120—121, January 1980.

[4] *Dowla F. U., Lim J. S.* Relationship between Maximum Likelihoof Method and Autoregressive Modeling in Multidimensional Power Spectrum Estimation, IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., vol. ASSP-32, pp. 1083—1087, October 1984.

[5] *Dudgeon D. E., Mersereau R. M.* Multidimensional Digital Signal Processing, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1984. [Имеется русский перевод: *Даджион Д., Мерсеро Р.* Цифровая обработка многомерных сигналов. — М.: Мир, 1988.]

[6] *Frey E. J.* Two-Dimensional Spectral Estimation: Comparison of Current Techniques, M. S. thesis, University of Colorado, Boulder, Colo., April 1982.

[7] *Frost O. L. III.* High-Resolution 2-D Spectral Analysis at Low SNR, Proceedings of the 1980 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Denver, Colo., pp. 580—583, April 1980.

[8] *Huang T. S.* Two-Dimensional Windows, IEEE Trans. Audio Electroacoust., vol. AU-20, pp. 88—90, March 1972.

[9] *Jackson L. B., Chien H. C.* Frequency and Bearing Estimation by Two-Dimensional Linear Prediction, Proceedings of the 1979 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processin, Washington, D. C., pp. 665—668, April 1979.

[10] *Jain A. K.* Advances in Mathematical Models for Image Processing, Proc. IEEE, vol. 69, pp. 502—528, May 1981. [Имеется русский перевод: *Джайн А. К.* Успехи в области математических моделей для обработки изображений. — ТИИЭР, 1981, т. 9, № 5, с. 9—39]

[11] *Jain A. K., Ranganath S.* High Resolution Spectrum Estimation in Two Dimensions, Proceedings of the First ASSP Workshop on Spectrum Estimation, Hamilton, Ontario, Canada, pp. 3.4.1—3.4.5, August 1981.

[12] *Joyce L. S.* A Separable 2-D Autoregressive Spectral Estimation Algorithm, Proceedings of the 1979 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Washington, D. C., pp. 677—680, April 1979.

[13] *Justice J. H.* A Levinson-Type Algorithm for Two-Dimensional Wiener Filtering Using Bivariate Szego Polynomials, Proc. IEEE, vol. 65, pp. 882—886, June 1977.

[14] *Kalouptsidis N., Carayannis G., Manolakis D.* Fast Algorithms for Block Toeplitz Matrices with Toeplitz Entries, Signal Process., vol. 6, pp. 77—81, January 1984.

[15] *Lang S. W., Marzetta T. L.* Image Spectral Estimation, Chapter 4 in Digital Image Processing Techniques, M. P. Ekstrom, ed., Academic Press, Inc., Orlando, Fla., 1984.

[16] *Lang S. W., McClellan J. H.* Multidimensional MEM Spectral Estimation, IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., vol. ASSP-30, pp. 880—887, December 1982.

[17] *Lang S. W., McClellan J. H.* Spectral Estimation for Sensor Arrays, IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., vol. ASSP-31, pp. 349—358, April 1983.

[18] *Lim J. S., Malik N. A.* A New Algorithm for Two-Dimensional Maximum Entropy Power Spectrum Estimation, IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., vol. ASSP-29, pp. 401—413, June 1981.

[19] *Malik N. A., Lim J. S.* Properties of Two-Dimensional Maximum Entropy Power Spectrum Estimates, IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., vol. ASSP-30, pp. 788—797, October 1982.

[20] *Marzetta T. L.* Two-Dimensional Linear Prediction: Autocorrelation Arrays, Minimum-Phase Prediction Error Filters, and Reflection Coefficient Arrays, IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., vol. ASSP-28, pp. 725—733, December 1980.

[21] *McClellan J. H.* Multidimensional Spectral Estimation, Proc. IEEE, vol. 70,

pp. 1029—1039, September 1982. [Имеется русский перевод: *Макклелан Дж. Х.* Многомерный спектральный анализ/Заказная статья.— ТИИЭР, т. 70, № 9, 1982, с. 139—152.]
[22] *Nikias C. L., Raghuveer M. R.* Multi-Dimensional Parametric Spectral Estimation, Signal Process., vol. 9, pp. 191—205, October 1985.
[23] *Nikias C. L., Scott P. D., Siegel J. H.* Computer Based Two-Dimensional Spectral Estimation for the Detection of Prearrhythmic States after Hypothermic Myocardial Preservation, Comput. Biol. Med., vol. 14, pp. 159—178, 1984.
[24] *Nikias C. L., Venetsanopoulos A. N.* Sufficient Condition for Extendibility and Two-Dimensional Power Spectrum Estimation, Proceedings of the 1985 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Tampa, Fla., pp. 792—795, March 1985.
[25] *Pendrel J. V.* The Maximum Entropy Principle in Two-Dimensional Spectral Analysis, Ph. D. dissertation, York University, Ontario, Canada, November 1979.
[26] *Sharma G., Chellappa R. A.* Model-Based Approach for Estimation of Two-Dimensional Macsimum Entropy Power Spectra, IEEE Trans. Inform. Theory, vol. IT-31, pp. 90—99, January 1985.
[27] *Therrien C. W.* Relations between 2-d and Multichannel Linear Prediction, IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., vol. ASSP-29, pp. 454—456, June 1981.
[28] *Ulrych T. J., Walker C. J.* High Resolution Two-Dimensional Power Spectral Estimation, in Applied Time Series II, D. F. Findley, ed., Academic Press, Inc., New York, pp. 71—99, 1981.
[29] *Wax M., Kailath T.* Efficient Inversion of Toeplitz-Block Toeplitz Matrix, IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., vol. ASSP-31, pp. 1221, October 1983.
[30] *Wernecke S. J.* Two-Dimensional Maximum Entropy Reconstruction of Radio Brightness, Radio Sci., vol. 12, pp. 831—844, September—October 1977.

Задачи

1. Разделимая двумерная последовательность такова, что может быть выражена в виде произведения двух независимых последовательностей: $x[m,n]=x_1[m]x_2[n]$. Доказать, что двумерная свертка разделимой последовательности также разделима.
2. Доказать, что двумерное ДВПФ является двумерной периодической функцией.
3. Показать, что частотная характеристика для прямоугольной импульсной функции

$$h[m,\ n]=\begin{cases} 1, & |m|\leqslant a/2,\quad |n|\leqslant b/2; \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

равна

$$H(f_1,\ f_2)=\operatorname{sinc}(f_1/a)\operatorname{sinc}(f_2/b)/ab.$$

4. Доказать, что член двумерной АКП $r_{xx}[0, 0]$ — действительный и положительный и удовлетворяет соотношению

$$r_{xx}[0,\ 0]\geqslant|r_{xx}[m,\ n]|$$

для всех m и n. Кроме того, показать, что двумерная автокорреляция эрмитово симметрична, $r_{xx}^*[m, n]=r_{xx}[-m, -n]$.
5. Показать, что определяемая выражением (16.26) двумерная СПМ — действительная и положительная. Показать также, что $P(f_1, f_2)=P(-f_1, -f_2)$, если двумерная АКП действительна.

6. Пусть известны следующие отсчеты из двумерной АКП:

$$r_{xx}[0,\ 0]=1,$$
$$r_{xx}[1,\ 0]=r_{xx}[-1,\ 0]=\alpha,$$
$$r_{xx}[0,\ 1]=r_{xx}[0,\ -1]=\beta,$$
$$r_{xx}[1,\ 1]=r_{xx}[1,\ -1]=r_{xx}[-1,\ 1]=r_{xx}[-1,\ -1]=0,$$

где α и β — действительные параметры. Вычислить и изобразить графически оценку двумерной СПМ по коррелограммному методу.

7. Используя значения двумерной АКП из задачи 6, по формуле (16.51) построить автокорреляционную 4×4-матрицу и аналитически определить обратную ей. Записать процедуру спектральной оценки по методу минимума дисперсии [формула (16.91)] и построить СПМ.
8. Используя значения двумерной АКП из задачи 6 и автокорреляционную матрицу из задачи 7, аналитически определить КП-авторегрессионные параметры для опорной области в 1-ом и 2-ом квадрантах. Вычислить и графически построить АР-оценки СПМ в первом и втором квадрантах и в комбинированном случае [формулы (16.84)—(16.86)].
9. Объяснить, почему в двумерном случае требуется больше отсчетов АКП, чем неизвестных АР-параметров, в отличие от одномерного случая, где число отсчетов АКП на один больше, чем число АР-параметров.
10. Написать матричное выражение для уравнений Юла — Уолкера в каузальной опорной НСПП-области [11].
11. Написать нормальные уравнения для двумерного модифицированного ковариационного метода двумерного линейного предсказания для опорной области линейного предсказания в первом квадранте.
12. Показать, что процедуру двумерной спектральной оценки по методу минимума дисперсии можно выразить в виде

$$\hat{P}_{\text{МД}}(f_1,\ f_2)=\frac{T_1T_2}{\sum_{k=-p}^{p}\sum_{l=-q}^{q}\alpha[k,\ l]\exp\left(-j2\pi\left[f_1kT_1+f_2lT_2\right]\right)}.$$

Какое соотношение связывает коэффициенты $\alpha[k, l]$ с элементами обратной автокорреляционной матрицы?

13. Записать двумерную версию формулы (4.53) для двумерной блочной автокорреляционной матрицы в случае M двумерных комплексных синусоид в двумерном белом шуме. Как выглядела бы процедура двумерной частотной оценки MUSIC из гл. 13, заданная этой блочной автокорреляционной матрицей?
14. Доказать соотношения (16.78) и (16.79).
15. Закончить программу TDAR приложения 16.Б в двух областях, указанных в листинге.

Приложение 16.А. Программа вычисления двумерной периодограммы

```
      SUBROUTINE TDPERIOD (N1,N2,T1,T2,X,PSD)
C
C     Эта подпрограмма  предназначена для вычисления двумерной периодо-
C     граммы
C
C     Входные параметры:
C
C       N1   — число отсчетов в столбце
```

```
C       N2   — число отсчетов в строке
C       T1   — интервал отсчетов в направлении столбцов
C       T2   — интервал отсчетов в направлении строк
C       X    — комплексный двумерный массив размера N1×N2 отсчетов дан-
C              ных
C
C     Выходные параметры:
C
C       PSD — действительный двумерный массив размером NPSD1×NPSD2
C             значений спектральной плотности мощности
C
        PARAMETER NPSD1=512  ! Число значений PSD в столбцевом на-
                             правлении
        PARAMETER NPSD2=512  ! Число значений PSD в строчном на-
                             правлении
        PARAMETER N2MAX=16   ! Максимально ожидаемый размер для N2
        COMPLEX X(N1,N2), Z1(NPSD1), Z2(NPSD2), TEMP(NPSD1,N2MAX)
        COMPLEX W1(NPSD1), W2(NPSD2)
        REAL PSD (NPSD1,NPSD2)
C
        SCALE=T1*T2/FLOAT(N1*N2)
        CALL PREFFT (NPSD1,0,NEXP1,W1)
        CALL PREFFT (NPSD2,0,NEXP2,W2)
C     Вычислить преобразования столбцов
        DO 100 K=1,N2
           DO 110 J=1,N1
110           Z1(J)=X(J,K)
           DO 120 J=N1+1,NPSD1
120           Z1(J)=(0.,0.)
           CALL FFT (NPSD1,0,1.,NEXP1,W1,Z1)
           DO 130 J=1,NPSD1
130           TEMP(J,K)=Z1(J)
100        CONTINE
C     Вычислить преобразования строк и квадрат модуля для получения PSD
        DO 200 K=1,NPSD1
           DO 210 J=1,N2
210           Z2(J)=TEMP(K,J)
           DO 220 J=N2+1,NPSD2
220           Z2(J)=(0.,0.)
        CALL FFT (NPSD2,0,1.,NEXP2,W2,Z2)
           DO 230 J=1,NPSD2
230           PSD(K,J)=(REAL(Z2(J))**2+AIMAG(Z2(J))**2)*SCALE
200        CONTINUE
        RETURN
        END
```

Приложение 16.Б.
Программа для вычисления двумерных авторегрессионных параметров в первом и втором квадрантах

```
        SUBROUTINE TDAR (IP1, IP2, R, RHO, A1, A2, ISTAT)
C
C     Предназначена для вычисления двумерных массивов авторегрессионных
C     параметров в КП. Задан двумерный автокорреляционный массив. Ис-
C     пользуется модифицированный многоканальный алгоритм Левинсона.
C     АР-массивы предусмотрены только в первом и втором квадрантах, так
C     как АР-массивы в третьем и четвертом квадрантах можно получить
```

комплексным сопряжением массивов в первом и втором квадрантах соответственно.

Входные параметры:

IP1 — число строк в АР-массиве
IP2 — число столбцов в АР-массиве
R — комплексный трехмерный массив блочных автокорреляционных матриц

Выходные параметры:

RHO — дисперсия белого шума, возбуждающего двумерный АР-процесс
A1 — комплексный двумерный массив АР-параметров в первом квадранте
A2 — комплексный двумерный массив АР-параметров во втором квадранте
ISTAT — целочисленный индикатор положения

Примечание:

В этой подпрограмме используется пакет подпрограмм из приложения 15.Г. Элементы массивов A1 и A2 с индексами от [0,0] до [IP1, IP2] в тексте заменяются элементами с индексами от [1,1] до [IP1+1, IP2+1] в этой подпрограмме. Массивы A, PF, DELTA, TEMP1 и TEMP2 должны иметь память, размещенную в COMMON.

```
COMPLEX R(IP2+1, IP2+1, IP1+1), A1(IP1+1, IP2+1), A2(IP1+1,
                                                  IP2+1)
COMPLEX A(IP2+1, IP2+1, IP1), PF(IP2+1, IP2+1), DELTA(IP2+1,
                                                  IP2+1)
COMPLEX TEMP1(IP2+1, IP2+1), TEMP2(IP2+1, IP2+1), S
```

Инициализация

```
ISTAT=0
J=IP2+1
CALL ASSIGN (J,J,R(1,1,1),PF)
M=0
```

Основной цикл

```
   CONTINUE
   M=M+1
Вычислить частную корреляционную матрицу, (16.80)
   CALL ASSIGN (J,J,R(1,1,M+1),DELTA)
   DO 10 K=1,M
      CALL MULT (J,J,A(1,1,K),R(1,1,M-K),TEMP1)
      CALL ADD (J,J,TEMP1,DELTA,DELTA)
Вычислить многоканальную матрицу отражения, (16.81)
   CALL INVERT (J,PF,TEMP1,ISTAT)
   CALL MULT (J,J,DELTA,TEMP1,TEMP2)
   S=(-1.,0.)
   CALL SCALE (J,J,S,TEMP2,A(1,1,M)
Обновить многоканальную ковариационную матрицу ошибок, (16.83)
   CALL XPOSE (J,A(1,1,M),TEMP1)
```

```
      CALL MULT (J,J,A(1,1,M),TEMP1,TEMP2)
      CALL IDENT (J,TEMP1)
      CALL SUB (J,J,TEMP1,TEMP2,TEMP1)
      CALL MULT (J,J,TEMP1,PF,TEMP2)
      CALL ASSIGN (J,J,TEMP2,PF)
C     Обновить многоканальные матрицы коэффициентов предсказания
      IF (M .EQ. 1) GO TO 40
      DO 30 K=1,(M-1)/2
         MK=M-K
         CALL ASSIGN (J,J,A(1,1,K),TEMP1)
         CALL ASSIGN (J,J,A(1,1,MK),TEMP2)
         CALL XPOSE (J,TEMP2,TEMP3)
         CALL MULT (J,J,A(1,1,M),TEMP3,TEMP4)
         CALL ADD (J,J,TEMP1,TEMP4,A(1,1,K))
         IF (K .EQ. MK) GO TO 30
         CALL XPOSE (J,TEMP1,TEMP3)
         CALL MULT (J,J,A(1,1,M),TEMP3,TEMP4)
         CALL ADD (J,J,TEMP2,TEMP4,A(1,1,MK))
30       CONTINUE
C
C     Контроль порядка
C
40    IF (M .LT. IP1) GO TO 100
C
C     Вычислить двумерный массив AP-параметров в первом квадранте
C     *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *
C     Установить подпрограмму, которая вызывает CHOLESKY, чтобы решить
C     для RHO и для A1 от A1[1, 2] до A1[1, IP1+1]. Элемент A1[1, 1]=1
C     по определению. Это уравнение (16.74).
C     *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *
      DO 50 K=1,IP1
         CALL XPOSE (J,J,A(1,1,K),TEMP1)
50       CALL MULT (J,1,TEMP1,A1(1,1),A1(K+1,1))  ! (16.75)
C
C     Вычислить двумерный массив AP-параметров во втором квадранте
C     *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *
C     Установить подпрограмму, которая вызывает CHOLESKY, чтобы решить
C     для RHO (должны быть одинаковыми с RHO, вычисленными для перво-
C     го квадранта) и для A[1, 2] до A2[1, IP1+1]. Элемент A2[1, 1]=1 по
C     определению. Это уравнение (16.76).
C     *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *
      DO 60 K=1,IP1
         CALL XPOSE (J,J,A(1,1,K),TEMP1)
60       CALL MULT (J,1,TEMP1,A2(1,1),A2(K+1,1))  ! (16.77)
      RETURN
      END
```

Приложение 16.В.
Программа для вычисления двумерного авторегрессионного спектра в первом квадранте

```
      SUBROUTINE TDARPSD (IP1,IP2,RHO,T1,T2,A1,PSD)
C
C     Эта подпрограмма для вычисления авторегрессионной PSD первого квад-
C     ранта при заданных AP-параметрах в первом квадранте.
C
C     Входные параметры:
```

```
C     IP1   — число строк в АР-массиве
C     IP2   — число столбцов в АР-массиве
C     RHO   — дисперсия белого шума, возбуждающего АР-процесс
C     T1    — выборочный интервал сдвигов в строчном измерении
C     T2    — выборочный интервал сдвигов в столбцевом измерении
C     A1    — комплексный двумерный массив АР-параметров в первом квад-
C             ранте
C
C  Выходные параметры:
C
C     PSD   — действительный двумерный массив значений спектральной АР
C             плотности мощности от NPSD1 до NPSD2
C
C  Примечание:
C     Используется подпрограмма TDPERIOD в приложении 16.А.
      PARAMETER NPSD1=512     ! Число значений PSD в строчном изме-
                                рении
      PARAMETER NPSD2=512     ! Число значений PSD в столбцевом из-
                                мерении
      COMPLEX A1(IP1+1,IP2+1)
      REAL PSD(NPSD1,NPSD2)
C
      CALL TDPERIOD (IP1+1,IP2+1,1.,1.,A1,PSD)
      DO 10 J=1,NPSD1
         DO 10 K=1,NPSD2
10          PSD(J,K)=T1*T2*RHO/PSD(J,K)
      RETURN
      END
```

Глава 17
ЭПИЛОГ

> Я приступил к решению этой проблемы, ... используя метод, казавшийся наилучшим в то время; но опыт может предложить и лучшие методы.
>
> *Джордж Адни Юл, 1927 г.*

Цифровое спектральное оценивание продолжает оставаться областью активных исследований, цель которых — отыскание все более совершенных методов спектрального оценивания и более быстрых вычислительных алгоритмов. По мере того, как практика будет вскрывать недостатки в старых и вновь появляющихся методах, особенно при спектральном оценивании коротких записей данных, будут предлагаться различные улучшения и испытываться новые идеи. Некоторые из так называемых современных методов спектрального оценивания начинают перерастать в полезные средства обработки сигнала, о чем свидетельствует увеличение числа журнальных публикаций и докладов на научных конференциях, посвященных приложениям этих методов к реальным данным. Авторегрессионная спектральная оценка — один из таких методов, которые начинают все шире применяться в промышленных приложениях. Теперь уместно задаться двумя вопросами. Что мы собираемся исследовать в области спектрального оценивания? Что следовало бы в ней сделать?

Наибольший интерес для специалистов по цифровой обработке сигналов представляют методы спектрального АРСС-оценивания, методы анализа собственных значений и методы многомерного спектрального оценивания. В частности, методы анализа собственных значений все чаще начинают использоваться для спектрального анализа записей пространственных данных, получаемых с помощью решеток приемных элементов (датчиков), поскольку эти методы позволяют формировать узкие приемные лучи с высоким угловым разрешением. Областью повышенного интереса будет продолжать оставаться разработка быстрых вычислительных алгоритмов, которые позволят снизить огромные вычислительные затраты некоторых современных методов спектрального оценивания и реализовать их в реальном масштабе времени. Архитектура некоторых из подобных быстрых алгоритмов теперь уже влияет на конструкцию сверхбольших интегральных схем (СБИС), предназначенных для обработки сигналов. Совсем недавно началось распространение параметрических методов на статистики третьего и более высо-

ких порядков, что уже привело к появлению новых спектральных функций, таких как биспектр и триспектр.

Область, которой сейчас уделяется меньше внимания, — это проверка робастности характеристик существующих методов оценивания СПМ применительно к большому классу сигналов. Пока еще преобладающим в исследованиях по спектральному оцениванию остается использование тест-последовательностей состоящих из смеси одной, двух или трех синусоид и аддитивного белого шума. Необходимо также точно установить характеристики этих методов. Много внимания в последние два десятилетия было уделено спектральному анализу узкополосных сигналов. В связи с этим больше усилий следует направить на исследование вопросов спектрального анализа широкополосных сигналов и очень слабых сигналов в шуме. Больше внимания следует уделить многомерному спектральному анализу, с тем чтобы разработать пригодные для практики алгоритмы, требуемые для обработки очень больших массивов данных и для определения характеристик сигналов, отличных от синусоидальных.

Приложение I
Числа солнечных пятен

Информация относительно международных относительных чисел солнечных пятен R_I была любезно предоставлена сотрудником Геофизической лаборатории ВВС США д-ром Полом Фужером. Дополнительную информацию о числах солнечных пятен можно найти в книге Уолдмайра [2] и статье Черноски и Хогана [1]. Новые сведения об активности солнечных пятен ежемесячно публикуются в журнале *Sky and Telescope*. Значения R_I первоначально публиковались Федеральной обсерваторией в Цюрихе, Швейцария. Начиная с 1980 г. они стали публиковаться Центром обработки данных об индексе солнечных пятен (Sunspot Index Data Center) в Брюсселе, Бельгия. Отметим, что только значения чисел R_I после 1835 г. следует рассматривать как надежные; числа до 1835 г. имеют меньшую инструментальную точность, поэтому использовать их следует с осторожностью.

Литература

[1] *Chernosky E. J., Hogan M. P.* The Zurich Sunspot Number and Its Variations for 1700—1957. J. Geophys. Res., vol. 63, pp. 775—788, December 1958.

[2] *Waldmeir M.* The Sunspot Activity in Years 1610—1960, Schulthess and Co., Zurich, 1961.

Среднемесячные относительные числа солнечных пятен

Год	Месяцы											
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
1700	6,0	6,0	6,0	6,0	6,0	6,0	6,0	6,0	6,0	6,0	6,0	6,0
1701	11,0	11,0	11,0	11,0	11,0	11,0	11,0	11,0	11,0	11,0	11,0	11,0
1702	17,0	17,0	17,0	17,0	17,0	17,0	17,0	17,0	17,0	17,0	17,0	17,0
1703	23,0	23,0	23,0	23,0	23,0	23,0	23,0	23,0	23,0	23,0	23,0	23,0
1704	35,0	35,0	35,0	35,0	35,0	35,0	35,0	35,0	35,0	35,0	35,0	35,0
1705	54,0	54,0	54,0	54,0	54,0	54,0	54,0	54,0	54,0	54,0	54,0	54,0
1706	29,0	29,0	29,0	29,0	29,0	29,0	29,0	29,0	29,0	29,0	29,0	29,0
1707	21,0	21,0	21,0	21,0	21,0	21,0	21,0	21,0	21,0	21,0	21,0	21,0
1708	11,0	11,0	11,0	11,0	11,0	11,0	11,0	11,0	11,0	11,0	11,0	11,0
1709	8,0	8,0	8,0	8,0	8,0	8,0	8,0	8,0	8,0	8,0	8,0	8,0
1710	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0
1711	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
1712	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
1713	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0
1714	11,0	11,0	11,0	11,0	11,0	11,0	11,0	11,0	11,0	11,0	11,0	11,0
1715	27,0	27,0	27,0	27,0	27,0	27,0	27,0	27,0	27,0	27,0	27,0	27,0
1716	44,0	44,0	44,0	44,0	44,0	44,0	44,0	44,0	44,0	44,0	44,0	44,0
1717	58,0	58,0	58,0	58,0	58,0	58,0	58,0	58,0	58,0	58,0	58,0	58,0
1718	56,0	56,0	56,0	56,0	56,0	56,0	56,0	56,0	56,0	56,0	56,0	56,0
1719	38,0	38,0	38,0	38,0	38,0	38,0	38,0	38,0	38,0	38,0	38,0	38,0
1720	28,0	28,0	28,0	28,0	28,0	28,0	28,0	28,0	28,0	28,0	28,0	28,0
1721	26,0	26,0	26,0	26,0	26,0	26,0	26,0	26,0	26,0	26,0	26,0	26,0
1722	22,0	22,0	22,0	22,0	22,0	22,0	22,0	22,0	22,0	22,0	22,0	22,0
1723	11,0	11,0	11,0	11,0	11,0	11,0	11,0	11,0	11,0	11,0	11,0	11,0
1724	22,0	22,0	22,0	22,0	22,0	22,0	22,0	22,0	22,0	22,0	22,0	22,0
1725	38,0	38,0	38,0	38,0	38,0	38,0	38,0	38,0	38,0	38,0	38,0	38,0
1726	74,0	74,0	74,0	74,0	74,0	74,0	74,0	74,0	74,0	74,0	74,0	74,0
1727	113,0	113,0	113,0	113,0	113,0	113,0	113,0	113,0	113,0	113,0	113,0	113,0
1728	98,0	98,0	98,0	98,0	98,0	98,0	98,0	98,0	98,0	98,0	98,0	98,0

1924	0,5	5,1	1,8	11,3	20,8	24,0	28,1	19,3	25,1	25,6	22,5	16,5
1925	5,5	23,2	18,0	31,7	42,8	47,5	38,5	37,9	60,2	69,2	58,6	98,6
1926	71,8	70,0	62,5	38,5	64,3	73,5	52,3	61,6	60,8	71,5	60,5	79,4
1927	81,6	93,0	69,6	93,5	79,1	59,1	54,9	53,8	68,4	63,1	67,2	45,2
1928	83,5	73,5	85,4	80,6	76,9	91,4	98,0	83,8	89,7	61,4	50,3	59,0
1929	68,9	64,1	50,2	52,8	58,2	71,9	70,2	65,8	34,4	54,0	81,1	108,0
1930	65,3	49,2	35,0	38,2	36,8	28,8	21,9	24,9	32,1	34,4	35,6	25,8
1931	14,6	43,1	30,0	31,2	24,6	15,3	17,4	13,0	19,0	10,0	18,7	17,8
1932	12,1	10,6	11,2	11,2	17,9	22,2	9,6	6,8	4,0	8,9	8,2	11,0
1933	12,3	22,2	10,1	2,9	3,2	5,2	2,8	0,2	5,1	3,0	0,6	0,3
1934	3,4	7,8	4,3	11,3	19,7	6,7	9,3	8,3	4,0	5,7	8,7	15,4
1935	18,9	20,5	23,1	12,2	27,3	45,7	33,9	30,1	42,1	53,2	64,2	61,5
1936	62,8	74,3	77,1	74,9	54,6	70,0	52,3	87,0	76,0	89,0	115,4	123,4
1937	132,5	128,5	83,9	109,3	116,7	130,3	145,1	137,7	100,7	124,9	74,4	88,8
1938	98,4	119,2	86,5	101,0	127,4	97,5	165,3	115,7	89,6	99,1	122,2	92,7
1939	80,3	77,4	64,6	109,1	118,3	101,0	97,6	105,8	112,6	88,1	68,1	42,1
1940	50,5	59,4	83,3	60,7	54,4	83,9	67,5	105,5	66,5	55,0	58,4	68,3
1941	45,6	44,5	46,4	32,8	29,5	59,8	66,9	60,0	65,9	46,3	38,3	33,7
1942	35,6	52,8	54,2	60,7	25,0	11,4	17,7	20,2	17,2	19,2	30,7	22,5
1943	12,4	28,9	27,4	26,1	14,1	7,6	13,2	19,4	10,0	7,8	10,2	18,8
1944	3,7	0,5	11,0	0,3	2,5	5,0	5,0	16,7	14,3	16,9	10,8	28,4
1945	18,5	12,7	21,5	32,0	30,6	36,2	42,6	25,9	34,9	68,8	46,0	27,4
1946	47,6	86,2	76,6	75,7	84,9	73,5	116,2	107,2	94,4	102,3	123,8	121,7
1947	115,7	133,4	129,8	149,8	201,3	163,9	157,9	188,8	169,4	163,6	128,0	116,5
1948	108,5	86,1	94,8	189,7	174,0	167,8	142,2	157,9	143,3	136,3	95,8	138,0
1949	119,1	182,3	157,5	147,0	106,2	121,7	125,8	123,8	145,3	131,6	143,5	117,6
1950	101,6	94,8	109,7	113,4	106,2	83,6	91,0	85,2	51,3	61,4	54,8	54,1
1951	59,9	59,9	55,9	92,9	108,5	100,6	61,5	61,0	83,1	51,6	52,4	45,8
1952	40,7	22,7	22,0	29,1	23,4	36,4	39,3	54,9	28,2	23,8	22,1	34,3
1953	26,5	3,9	10,0	27,8	12,5	21,8	8,6	23,5	19,3	8,2	1,6	2,5
1954	0,2	0,5	10,9	1,8	0,8	0,2	4,8	8,4	1,5	7,0	9,2	7,6
1955	23,1	20,8	4,9	11,3	28,9	31,7	26,7	40,7	42,7	58,5	89,2	76,9
1956	73,6	124,0	118,4	110,7	136,6	116,6	129,1	169,6	173,2	155,3	201,3	192,1
1957	165,0	130,2	157,4	175,2	164,6	200,7	187,2	158,0	235,8	253,8	210,9	239,4
1958	202,5	164,9	190,7	196,0	175,3	171,5	191,4	200,2	201,2	181,5	152,3	187,6
1959	217,4	143,1	185,7	163,3	172,0	168,7	149,6	199,6	145,2	111,4	124,0	125,0

1729	67,0	67,0	67,0	67,0	67,0	67,0	67,0	67,0	67,0	67,0	67,0	67,0	67,0
1730	44,0	44,0	44,0	44,0	44,0	44,0	44,0	44,0	44,0	44,0	44,0	44,0	44,0
1731	28,0	28,0	28,0	28,0	28,0	28,0	28,0	28,0	28,0	28,0	28,0	28,0	28,0
1732	11,0	11,0	11,0	11,0	11,0	11,0	11,0	11,0	11,0	11,0	11,0	11,0	11,0
1733	6,0	6,0	6,0	6,0	6,0	6,0	6,0	6,0	6,0	6,0	6,0	6,0	6,0
1734	17,0	17,0	17,0	17,0	17,0	17,0	17,0	17,0	17,0	17,0	17,0	17,0	17,0
1735	33,0	33,0	33,0	33,0	33,0	33,0	33,0	33,0	33,0	33,0	33,0	33,0	33,0
1736	64,0	64,0	64,0	64,0	64,0	64,0	64,0	64,0	64,0	64,0	64,0	64,0	64,0
1737	77,0	77,0	77,0	77,0	77,0	77,0	77,0	77,0	77,0	77,0	77,0	77,0	77,0
1738	106,0	106,0	106,0	106,0	106,0	106,0	106,0	106,0	106,0	106,0	106,0	106,0	106,0
1739	96,0	96,0	96,0	96,0	96,0	96,0	96,0	96,0	96,0	96,0	96,0	96,0	96,0
1740	67,0	67,0	67,0	67,0	67,0	67,0	67,0	67,0	67,0	67,0	67,0	67,0	67,0
1741	39,0	39,0	39,0	39,0	39,0	39,0	39,0	39,0	39,0	39,0	39,0	39,0	39,0
1742	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0	20,0
1743	16,0	16,0	16,0	16,0	16,0	16,0	16,0	16,0	16,0	16,0	16,0	16,0	16,0
1744	6,0	6,0	6,0	6,0	6,0	6,0	6,0	6,0	6,0	6,0	6,0	6,0	6,0
1745	11,0	11,0	11,0	11,0	11,0	11,0	11,0	11,0	11,0	11,0	11,0	11,0	11,0
1746	22,0	22,0	22,0	22,0	22,0	22,0	22,0	22,0	22,0	22,0	22,0	22,0	22,0
1747	39,0	39,0	39,0	39,0	39,0	39,0	39,0	39,0	39,0	39,0	39,0	39,0	39,0
1748	56,0	56,0	56,0	56,0	56,0	56,0	56,0	56,0	56,0	56,0	56,0	56,0	56,0
1749	58,0	62,6	70,0	55,7	85,0	83,5	94,8	66,3	75,9	75,5	158,6	85,2	
1750	73,3	75,9	89,2	88,3	90,0	100,0	85,4	103,0	91,2	65,7	63,3	75,4	
1751	70,0	43,5	45,3	56,4	60,7	50,7	66,3	59,8	23,5	23,2	28,5	44,0	
1752	35,0	50,0	71,0	59,3	59,7	39,6	78,4	29,3	27,1	46,6	37,6	40,0	
1753	44,0	32,0	45,7	38,0	36,0	31,7	22,0	39,0	28,0	25,0	20,0	6,7	
1754	0,0	3,0	1,7	13,7	20,7	26,7	18,8	12,3	8,2	24,1	13,2	4,2	
1755	10,2	11,2	6,8	6,5	0,0	0,0	8,6	3,2	17,8	23,7	6,8	20,0	
1756	12,5	7,1	5,4	9,4	12,5	12,9	3,6	6,4	11,8	14,3	17,0	9,4	
1757	14,1	21,2	26,2	30,0	38,1	12,8	25,0	51,3	39,7	32,5	64,7	33,5	
1758	37,6	52,0	49,0	72,3	46,4	45,0	44,0	38,7	62,5	37,7	43,0	43,0	
1759	48,3	44,0	46,8	47,0	49,0	50,0	51,0	71,3	77,2	59,7	46,3	57,0	
1760	67,3	59,5	74,7	58,3	72,0	48,3	66,0	75,6	61,3	50,6	59,7	61,0	
1761	70,0	91,0	80,7	71,7	107,2	99,3	94,1	91,1	100,7	88,7	89,7	46,0	
1762	43,8	72,8	45,7	60,2	39,9	77,1	33,8	67,7	68,5	69,3	77,8	77,2	
1763	56,5	31,9	34,2	32,9	32,7	35,8	54,2	26,5	68,1	46,3	60,9	61,4	
1764	59,7	59,7	40,2	34,4	44,3	30,0	30,0	30,0	28,2	28,0	26,0	25,7	

Продолжение

Год	Месяцы											
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
1765	24,0	26,0	25,0	22,0	20,2	20,0	27,0	29,7	16,0	14,0	14,0	13,0
1766	12,0	11,0	36,6	6,0	26,8	3,0	3,3	4,0	4,3	5,0	5,7	19,2
1767	27,4	30,0	43,0	32,9	29,8	33,3	21,9	40,8	42,7	44,1	54,7	53,3
1768	53,5	66,1	46,3	42,7	77,7	77,4	52,6	66,8	74,8	77,8	90,6	111,8
1769	73,9	64,2	64,3	96,7	73,6	94,4	118,6	120,3	148,8	158,2	148,1	112,0
1770	104,0	142,5	80,1	51,0	70,1	83,3	109,8	126,3	104,4	103,6	132,2	102,3
1771	36,0	46,2	46,7	64,9	152,7	119,5	67,7	58,5	101,4	90,0	99,7	95,7
1772	100,9	90,8	31,1	92,2	38,0	57,0	77,3	56,2	50,5	78,6	61,3	64,0
1773	54,6	29,0	51,2	32,9	41,1	28,4	27,7	12,7	29,3	26,3	40,9	43,2
1774	46,8	65,4	55,7	43,8	51,3	28,5	17,5	6,6	7,9	14,0	17,7	12,2
1775	4,4	0,0	11,6	11,2	3,9	12,3	1,0	7,9	3,2	5,6	15,1	7,9
1776	21,7	11,6	6,3	21,8	11,2	19,0	1,0	24,2	16,0	30,0	35,0	40,0
1777	45,0	36,5	39,0	95,5	80,3	80,7	95,0	112,0	116,2	106,5	146,0	157,3
1778	177,3	109,3	134,0	145,0	238,9	171,6	153,0	140,0	171,7	156,3	150,3	105,0
1779	114,7	165,7	118,0	145,0	140,0	113,7	143,0	112,0	111,0	124,0	114,0	110,0
1780	70,0	98,0	98,0	95,0	107,2	88,0	86,0	86,0	93,7	77,0	60,0	58,7
1781	98,7	74,7	53,0	68,3	104,7	97,7	73,5	66,0	51,0	27,3	67,0	35,2
1782	54,0	37,5	37,0	41,0	54,3	38,0	37,0	44,0	34,0	23,2	31,5	30,0
1783	28,0	38,7	26,7	28,3	23,0	25,2	32,2	20,0	18,0	8,0	15,0	10,5
1784	13,0	8,0	11,0	10,0	6,0	9,0	6,0	10,0	10,0	8,0	17,0	14,0
1785	6,5	8,0	9,0	15,7	20,7	26,3	36,3	20,0	32,0	47,2	40,2	27,3
1786	37,2	47,6	47,7	85,4	92,3	59,0	83,0	89,7	111,5	112,3	116,0	112,7
1787	134,7	106,0	87,4	127,2	134,8	99,2	128,0	137,2	157,3	157,0	141,5	174,0
1788	138,0	129,2	143,3	108,5	113,0	154,2	141,5	136,0	141,0	142,0	94,7	129,5
1789	114,0	125,3	120,0	123,3	123,5	120,0	117,0	103,0	112,0	89,7	134,0	135,5
1790	103,0	127,5	96,3	94,0	93,0	91,0	69,3	87,0	77,3	84,3	82,0	74,0
1791	72,7	62,0	74,0	77,2	73,7	64,2	71,0	43,0	66,5	61,7	67,0	66,0
1792	58,0	64,0	63,0	75,7	62,0	61,0	45,8	60,0	59,0	59,0	57,0	56,0
1793	56,0	55,0	55,5	53,0	52,3	51,0	50,0	29,3	24,0	47,0	44,0	45,7

1794	45,0	44,0	38,0	28,4	55,7	41,5	41,0	40,0	11,1	28,5	67,4	51,4
1795	21,4	39,9	12,6	18,6	31,0	17,1	12,9	25,7	13,5	19,5	25,0	18,0
1796	22,0	23,8	15,7	31,7	21,0	6,7	26,9	1,5	18,4	11,0	8,4	5,1
1797	14,4	4,2	4,0	4,0	7,3	11,1	4,3	6,0	5,7	6,9	5,8	3,0
1798	2,0	4,0	12,4	1,1	0,0	0,0	0,0	3,0	2,4	1,5	12,5	9,9
1799	1,6	12,6	21,7	8,4	8,2	10,6	2,1	0,0	0,0	4,6	2,7	8,6
1800	6,9	9,3	13,9	0,0	5,0	23,7	21,0	19,5	11,5	12,3	10,5	40,1
1801	27,0	29,0	30,0	31,0	32,0	31,2	35,0	38,7	33,5	32,6	39,8	48,2
1802	47,8	47,0	40,8	42,0	44,0	46,0	48,0	50,0	51,8	38,5	34,5	50,0
1803	50,0	50,8	29,5	25,0	44,3	36,0	48,3	34,1	45,3	54,3	51,0	48,0
1804	45,3	48,3	48,0	50,6	33,4	34,8	29,8	43,1	53,0	62,3	61,0	60,0
1805	61,0	44,1	51,4	37,5	39,0	40,5	37,6	42,7	44,4	29,4	41,0	38,3
1806	39,0	29,6	32,7	27,7	26,4	25,6	30,0	26,3	24,0	27,0	25,0	24,0
1807	12,0	12,2	9,6	23,8	10,0	12,0	12,7	12,0	5,7	8,0	2,6	0,0
1808	0,0	4,5	0,0	12,3	13,5	13,5	6,7	8,0	11,7	4,7	10,5	12,3
1809	7,2	9,2	0,9	2,5	2,0	7,7	0,3	0,2	0,4	0,0	0,0	0,0
1810	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
1811	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	6,6	0,0	2,4	6,1	0,8	1,1
1812	11,3	1,9	0,7	0,0	1,0	1,3	0,5	15,6	5,2	3,9	7,9	10,1
1813	0,0	10,3	1,9	16,6	5,5	11,2	18,3	8,4	15,3	27,8	16,7	14,3
1814	22,2	12,0	5,7	23,8	5,8	14,9	18,5	2,3	8,1	19,3	14,5	20,1
1815	19,2	32,2	26,2	31,6	9,8	55,9	35,5	47,2	31,5	33,5	37,2	65,0
1816	26,3	68,8	73,7	58,8	44,3	43,6	38,8	23,2	47,8	56,4	38,1	29,9
1817	36,4	57,9	96,2	26,4	21,2	40,0	50,0	45,0	36,7	25,6	28,9	28,4
1818	34,9	22,4	29,7	34,5	53,1	36,4	28,0	31,5	26,1	31,7	10,9	25,8
1819	32,5	20,7	3,7	20,2	19,6	35,0	31,4	26,1	14,9	27,5	25,1	30,6
1820	19,2	26,6	4,5	19,4	29,3	10,8	20,6	25,9	5,2	9,0	7,9	9,7
1821	21,5	4,3	5,7	9,2	1,7	1,8	2,5	4,8	4,4	18,8	4,4	0,0
1822	0,0	0,9	16,1	13,5	1,5	5,6	7,9	2,1	0,0	0,4	0,0	0,0
1823	0,0	0,0	0,6	0,0	0,0	0,0	0,5	0,0	0,0	0,0	0,0	20,4
1824	21,6	10,8	0,0	19,4	2,8	0,0	0,0	1,4	20,5	25,2	0,0	0,8
1825	5,0	15,5	22,4	3,8	15,4	15,4	30,9	25,4	15,7	15,6	11,7	22,0
1826	17,7	18,2	36,7	24,0	32,4	37,1	52,5	39,6	18,9	50,6	39,5	68,1
1827	34,6	47,4	57,8	46,0	56,3	56,7	42,9	53,7	49,6	57,2	48,2	46,1
1828	52,8	64,4	65,0	61,1	89,1	98,0	54,3	76,4	50,4	34,7	57,0	46,9
1829	43,0	49,4	72,3	95,0	67,5	73,9	90,8	78,3	52,8	57,2	67,6	56,5

Продолжение

Год	Месяцы											
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
1830	52,2	72,1	84,6	107,1	66,3	65,1	43,9	50,7	62,1	84,4	81,2	82,1
1831	47,5	50,1	93,4	54,6	38,1	33,4	45,2	54,9	37,9	46,2	43,5	28,9
1832	30,9	55,5	55,1	26,9	41,3	26,7	13,9	8,9	8,2	21,1	14,3	27,5
1833	11,3	14,9	11,8	2,8	12,9	1,0	7,0	5,7	11,6	7,5	5,9	9,9
1834	4,9	18,1	3,9	1,4	8,8	7,8	8,7	4,0	11,5	24,8	30,5	34,5
1835	7,5	24,5	19,7	61,5	43,6	33,2	59,8	59,0	100,8	95,2	100,0	77,5
1836	88,6	107,6	98,1	142,9	111,4	124,7	116,7	107,8	95,1	137,4	120,9	206,2
1837	188,0	175,6	134,6	138,2	111,3	158,0	162,8	134,0	96,3	123,7	107,0	129,8
1838	144,9	84,8	140,8	126,6	137,6	94,5	108,2	78,8	73,6	90,8	77,4	79,8
1839	107,6	102,5	77,7	61,8	53,8	54,6	84,7	131,2	132,7	90,8	68,8	63,6
1840	81,2	87,7	55,5	65,9	69,2	48,5	60,7	57,8	74,0	49,8	54,3	53,7
1841	24,0	29,9	29,7	42,6	67,4	55,7	30,8	39,3	35,1	28,5	19,8	38,8
1842	20,4	22,1	21,7	26,9	24,9	20,5	12,6	26,5	18,5	38,1	40,5	17,6
1843	13,3	3,5	8,3	8,8	21,1	10,5	9,5	11,8	4,2	5,3	19,1	12,7
1844	9,4	14,7	13,6	20,8	12,0	3,7	21,2	23,9	6,9	21,5	10,7	21,6
1845	25,7	43,6	43,3	56,9	47,8	31,1	30,6	32,3	29,6	40,7	39,4	59,7
1846	38,7	51,0	63,9	69,2	59,9	65,1	46,5	54,8	107,1	55,9	60,4	65,5
1847	62,6	44,9	85,7	44,7	75,4	85,3	52,2	140,6	161,2	180,4	138,9	109,6
1848	159,1	111,8	108,9	107,1	102,2	123,8	139,2	132,5	100,3	132,4	114,6	159,9
1849	155,7	131,7	96,5	102,5	80,6	81,2	78,0	61,3	93,7	71,5	99,7	97,0
1850	78,0	89,4	82,6	44,1	61,6	70,0	39,1	61,6	86,2	71,0	54,8	60,0
1851	75,5	105,4	64,6	56,5	62,6	63,2	36,1	57,4	67,9	62,5	50,9	71,4
1852	68,4	67,5	61,2	65,4	54,9	46,9	42,0	39,7	37,5	67,3	54,3	45,4
1853	41,1	42,9	37,7	47,6	34,7	40,0	45,9	50,4	33,5	42,3	28,8	23,4
1854	15,4	20,0	20,7	26,4	24,0	21,1	18,7	15,8	22,4	12,7	28,2	21,4
1855	12,3	11,4	17,4	4,4	9,1	5,3	0,4	3,1	0,0	9,7	4,2	3,1
1856	0,5	4,9	0,4	6,5	0,0	5,0	4,6	5,9	4,4	4,5	7,7	7,2
1857	13,7	7,4	5,2	11,1	29,2	16,0	22,2	16,9	42,4	40,6	31,4	37,2
1858	39,0	34,9	57,5	38,3	41,4	44,5	56,7	55,3	80,1	91,2	51,9	66,9

1859	83,7	87,6	90,3	85,7	91,0	87,1	95,2	106,8	105,8	114,6	97,2	81,0
1860	81,5	88,0	98,9	71,4	107,1	108,6	116,7	100,3	92,2	90,1	97,9	95,6
1861	62,3	77,8	101,0	98,5	56,8	87,8	78,0	82,5	79,9	67,2	53,7	80,5
1862	63,1	64,5	43,6	53,7	64,4	84,0	73,4	62,5	66,6	42,0	50,6	40,9
1863	48,3	56,7	66,4	40,6	53,8	40,8	32,7	48,1	22,0	39,9	37,7	41,2
1864	57,7	47,1	66,3	35,8	40,6	57,8	54,7	54,8	28,5	33,9	57,6	28,6
1865	48,7	39,3	39,5	29,4	34,5	33,6	26,8	37,8	21,6	17,1	24,6	12,8
1866	31,6	38,4	24,6	17,6	12,9	16,5	9,3	12,7	7,3	14,1	9,0	1,5
1867	0,0	0,7	9,2	5,1	2,9	1,5	5,0	4,9	9,8	13,5	9,3	25,2
1868	15,6	15,8	26,5	36,6	26,7	31,1	28,6	34,4	43,8	61,7	59,1	67,6
1869	60,9	59,3	52,7	41,0	104,0	108,4	59,2	79,6	80,6	59,4	77,4	104,3
1870	77,3	114,9	159,4	160,0	176,0	135,6	132,4	153,8	136,0	146,4	147,5	130,0
1871	88,3	125,3	143,2	162,4	145,5	91,7	103,0	110,0	80,3	89,0	105,4	90,3
1872	79,5	120,1	88,4	102,1	107,6	109,9	105,5	92,9	114,6	103,5	112,0	83,9
1873	86,7	107,0	98,3	76,2	47,9	44,8	66,9	68,2	47,5	47,4	55,4	49,2
1874	60,8	64,2	46,4	32,0	44,6	38,2	67,8	61,3	28,0	34,3	28,9	29,3
1875	14,6	22,2	33,8	29,1	11,5	23,9	12,5	14,6	2,4	12,7	17,7	9,9
1876	14,3	15,0	31,2	2,3	5,1	1,6	15,2	8,8	9,9	14,3	9,9	8,2
1877	24,4	8,7	11,7	15,8	21,2	13,4	5,9	6,3	16,4	6,7	14,5	2,3
1878	3,3	6,0	7,8	0,1	5,8	6,4	0,1	0,0	5,3	1,1	4,1	0,5
1879	0,8	0,6	0,0	6,2	2,4	4,8	7,5	10,7	6,1	12,3	12,9	7,2
1880	24,0	27,5	19,5	19,3	23,5	34,1	21,9	48,1	66,0	43,0	30,7	29,6
1881	36,4	53,2	51,5	51,7	43,5	60,5	76,9	58,0	53,2	64,0	54,8	47,3
1882	45,0	69,3	67,5	95,8	64,1	45,2	45,4	40,4	57,7	59,2	84,4	41,8
1883	60,6	46,9	42,8	82,1	32,1	76,5	80,6	46,0	52,6	83,8	84,5	75,9
1884	91,5	86,9	86,8	76,1	66,5	51,2	53,1	55,8	61,9	47,8	36,6	47,2
1885	42,8	71,8	49,8	55,0	73,0	83,7	66,5	50,0	39,6	38,7	33,3	21,7
1886	29,9	25,9	57,3	43,7	30,7	27,1	30,3	16,9	21,4	8,6	0,3	12,4
1887	10,3	13,2	4,2	6,9	20,0	15,7	23,3	21,4	7,4	6,6	6,9	20,7
1888	12,7	7,1	7,8	5,1	7,0	7,1	3,1	2,8	8,8	2,1	10,7	6,7
1889	0,8	8,5	7,0	4,3	2,4	6,4	9,7	20,6	6,5	2,1	0,2	6,7
1890	5,3	0,6	5,1	1,6	4,8	1,3	11,6	8,5	17,2	11,2	9,6	7,8
1891	13,5	22,2	10,4	20,5	41,1	48,3	58,8	33,2	53,8	51,5	41,9	32,2
1892	69,1	75,6	49,9	69,6	79,6	76,3	76,8	101,4	62,8	70,5	65,4	78,6
1893	75,0	73,0	65,7	88,1	84,7	88,2	88,8	129,2	77,9	79,7	75,1	93,8
1894	83,2	84,6	52,3	81,6	101,2	98,9	106,0	70,3	65,9	75,5	56,6	60,0

Год	Месяцы											
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
1895	63,3	67,2	61,0	76,9	67,5	71,5	47,8	68,9	57,7	67,9	47,2	70,7
1896	29,0	57,4	52,0	43,8	27,7	49,0	45,0	27,2	61,3	28,4	38,0	42,6
1897	40,6	29,4	29,1	31,0	20,0	11,3	27,6	21,8	48,1	14,3	8,4	33,3
1898	30,2	36,4	38,3	14,5	25,8	22,3	9,0	31,4	34,8	34,4	30,9	12,6
1899	19,5	9,2	18,1	14,2	7,7	20,5	13,5	2,9	8,4	13,0	7,8	10,5
1900	9,4	13,6	8,6	16,0	15,2	12,1	8,3	4,3	8,3	12,9	4,5	0,3
1901	0,2	2,4	4,5	0,0	10,2	5,8	0,7	1,0	0,6	3,7	3,8	0,0
1902	5,2	0,0	12,4	0,0	2,8	1,4	0,9	2,3	7,6	16,3	10,3	1,1
1903	8,3	17,0	13,5	26,1	14,6	16,3	27,9	28,8	11,1	38,9	44,5	45,6
1904	31,6	24,5	37,2	43,0	39,5	41,9	50,6	58,2	30,1	54,2	38,0	54,6
1905	54,8	85,8	56,5	39,3	48,0	49,0	73,0	58,8	55,0	78,7	107,2	55,5
1906	45,5	31,3	64,5	55,3	57,7	63,2	103,3	47,7	56,1	17,8	38,9	64,7
1907	76,4	108,2	60,7	52,6	43,0	40,4	49,7	54,3	85,0	65,4	61,5	47,3
1908	39,2	33,9	28,7	57,6	40,8	48,1	39,5	90,5	86,9	32,3	45,5	39,5
1909	56,7	46,6	66,3	32,3	36,0	22,6	35,8	23,1	38,8	58,4	55,8	54,2
1910	26,4	31,5	21,4	8,4	22,2	12,3	14,1	11,5	26,2	38,3	4,9	5,8
1911	3,4	9,0	7,8	16,5	9,0	2,2	3,5	4,0	4,0	2,6	4,2	2,2
1912	0,3	0,0	4,9	4,5	4,4	4,1	3,0	0,3	9,5	4,6	1,1	6,4
1913	2,3	2,9	0,5	0,9	0,0	0,0	1,7	0,2	1,2	3,1	0,7	3,8
1914	2,8	2,6	3,1	17,3	5,2	11,4	5,4	7,7	12,7	8,2	16,4	22,3
1915	23,0	42,3	38,8	41,3	33,0	68,8	71,6	69,6	49,5	53,5	42,5	34,5
1916	45,3	55,4	67,0	71,8	74,5	67,7	53,5	35,2	45,1	50,7	65,6	53,0
1917	74,7	71,9	94,8	74,7	114,1	114,9	119,8	154,5	129,4	72,2	96,4	129,3
1918	96,0	65,3	72,2	80,5	76,7	59,4	107,6	101,7	79,9	85,0	83,4	59,2
1919	48,1	79,5	66,5	51,8	88,1	111,2	64,7	69,0	54,7	52,8	42,0	34,9
1920	51,1	53,9	70,2	14,8	33,3	38,7	27,5	19,2	36,3	49,6	27,2	29,9
1921	31,5	28,3	26,7	32,4	22,2	33,7	41,9	22,8	17,8	18,2	17,8	20,3
1922	11,8	26,4	54,7	11,0	8,0	5,8	10,9	6,5	4,7	6,2	7,4	17,5
1923	4,5	1,5	3,3	6,1	3,2	9,1	3,5	0,5	13,2	11,6	10,0	2,8

1924	0,5	5,1	1,8	11,3	20,8	24,0	28,1	19,3	25,1	25,6	22,5	16,5
1925	5,5	23,2	18,0	31,7	42,8	47,5	38,5	37,9	60,2	69,2	58,6	98,6
1926	71,8	70,0	62,5	38,5	64,3	73,5	52,3	61,6	60,8	71,5	60,5	79,4
1927	81,6	93,0	69,6	93,5	79,1	59,1	54,9	53,8	68,4	63,1	67,2	45,2
1928	83,5	73,5	85,4	80,6	76,9	91,4	98,0	83,8	89,7	61,4	50,3	59,0
1929	68,9	64,1	50,2	52,8	58,2	71,9	70,2	65,8	34,4	54,0	81,1	108,0
1930	65,3	49,2	35,0	38,2	36,8	28,8	21,9	24,9	32,1	34,4	35,6	25,8
1931	14,6	43,1	30,0	31,2	24,6	15,3	17,4	13,0	19,0	10,0	18,7	17,8
1932	12,1	10,6	11,2	11,2	17,9	22,2	9,6	6,8	4,0	8,9	8,2	11,0
1933	12,3	22,2	10,1	2,9	3,2	5,2	2,8	0,2	5,1	3,0	0,6	0,3
1934	3,4	7,8	4,3	11,3	19,7	6,7	9,3	8,3	4,0	5,7	8,7	15,4
1935	18,9	20,5	23,1	12,2	27,3	45,7	33,9	30,1	42,1	53,2	64,2	61,5
1936	62,8	74,3	77,1	74,9	54,6	70,0	52,3	87,0	76,0	89,0	115,4	123,4
1937	132,5	128,5	83,9	109,3	116,7	130,3	145,1	137,7	100,7	124,9	74,4	88,8
1938	98,4	119,2	86,5	101,0	127,4	97,5	165,3	115,7	89,6	99,1	122,2	92,7
1939	80,3	77,4	64,6	109,1	118,3	101,0	97,6	105,8	112,6	88,1	68,1	42,1
1940	50,5	59,4	83,3	60,7	54,4	83,9	67,5	105,5	66,5	55,0	58,4	68,3
1941	45,6	44,5	46,4	32,8	29,5	59,8	66,9	60,0	65,9	46,3	38,3	33,7
1942	35,6	52,8	54,2	60,7	25,0	11,4	17,7	20,2	17,2	19,2	30,7	22,5
1943	12,4	28,9	27,4	26,1	14,1	7,6	13,2	19,4	10,0	7,8	10,2	18,8
1944	3,7	0,5	11,0	0,3	2,5	5,0	5,0	16,7	14,3	16,9	10,8	28,4
1945	18,5	12,7	21,5	32,0	30,6	36,2	42,6	25,9	34,9	68,8	46,0	27,4
1946	47,6	86,2	76,6	75,7	84,9	73,5	116,2	107,2	94,4	102,3	123,8	121,7
1947	115,7	133,4	129,8	149,8	201,3	163,9	157,9	188,8	169,4	163,6	128,0	116,5
1948	108,5	86,1	94,8	189,7	174,0	167,8	142,2	157,9	143,3	136,3	95,8	138,0
1949	119,1	182,3	157,5	147,0	106,2	121,7	125,8	123,8	145,3	131,6	143,5	117,6
1950	101,6	94,8	109,7	113,4	106,2	83,6	91,0	85,2	51,3	61,4	54,8	54,1
1951	59,9	59,9	55,9	92,9	108,5	100,6	61,5	61,0	83,1	51,6	52,4	45,8
1952	40,7	22,7	22,0	29,1	23,4	36,4	39,3	54,9	28,2	23,8	22,1	34,3
1953	26,5	3,9	10,0	27,8	12,5	21,8	8,6	23,5	19,3	8,2	1,6	2,5
1954	0,2	0,5	10,9	1,8	0,8	0,2	4,8	8,4	1,5	7,0	9,2	7,6
1955	23,1	20,8	4,9	11,3	28,9	31,7	26,7	40,7	42,7	58,5	89,2	76,9
1956	73,6	124,0	118,4	110,7	136,6	116,6	129,1	169,6	173,2	155,3	201,3	192,1
1957	165,0	130,2	157,4	175,2	164,6	200,7	187,2	158,0	235,8	253,8	210,9	239,4
1958	202,5	164,9	190,7	196,0	175,3	171,5	191,4	200,2	201,2	181,5	152,3	187,6
1959	217,4	143,1	185,7	163,3	172,0	168,7	149,6	199,6	145,2	111,4	124,0	125,0

Продолжение

Год	Месяцы											
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
1960	146,3	106,0	102,2	122,0	119,6	110,2	121,7	134,1	127,2	82,8	89,6	85,6
1961	57,9	46,1	53,0	61,4	51,0	77,4	70,2	55,8	63,6	37,7	32,6	39,9
1962	38,7	50,3	45,6	46,4	43,7	42,0	21,8	21,8	51,3	39,5	26,9	23,2
1963	19,8	24,4	17,1	29,3	43,0	35,9	19,6	33,2	38,8	35,3	23,4	14,9
1964	15,3	17,7	16,5	8,6	9,5	9,1	3,1	9,3	4,7	6,1	7,4	15,1
1965	17,5	14,2	11,7	6,8	24,1	15,9	11,9	8,9	16,8	20,1	15,8	17,0
1966	28,2	24,4	25,3	48,7	45,3	47,7	56,7	51,2	50,2	57,2	57,2	70,4
1967	110,9	93,6	111,8	69,5	86,5	67,3	91,5	107,2	76,8	88,2	94,3	126,4
1968	121,8	111,9	92,2	81,2	127,2	110,3	96,1	109,3	117,2	107,7	86,0	109,8
1969	104,3	120,5	135,8	106,8	120,0	106,0	96,8	98,0	91,3	95,7	93,5	97,9
1970	111,5	127,7	102,9	109,5	127,5	106,8	112,5	93,0	99,5	86,6	95,2	83,5
1971	91,3	79,0	60,7	71,8	57,5	49,8	81,0	61,4	50,2	51,7	63,2	82,2
1972	61,5	88,4	80,1	63,2	80,5	88,0	76,5	76,8	64,0	61,3	41,6	45,3
1973	43,4	42,9	46,0	57,7	42,4	39,5	23,1	25,6	59,3	30,7	23,9	23,3
1974	27,6	26,0	21,3	40,3	39,5	36,0	55,8	33,6	40,2	47,1	25,0	20,5
1975	18,9	11,5	11,5	5,1	9,0	11,4	28,2	39,7	13,9	9,1	19,4	7,8
1976	8,1	4,3	21,9	18,8	12,4	12,2	1,9	16,4	13,5	20,6	5,2	15,3
1977	16,4	23,1	8,7	12,9	18,6	38,5	21,4	30,1	44,0	43,8	29,1	43,2
1978	51,9	93,6	76,5	99,7	82,7	95,1	70,4	58,1	138,2	125,1	97,9	122,7
1979	166,6	137,5	138,0	101,5	134,4	149,5	159,4	142,2	188,4	186,2	183,3	176,3
1980	159,6	155,0	126,2	164,1	179,9	157,3	136,3	135,4	155,0	164,7	147,9	174,4
1981	114,0	141,3	135,5	156,4	127,5	90,9	143,8	158,7	167,3	162,4	137,5	150,1
1982	111,2	163,6	153,8	122,0	82,2	110,4	106,1	107,6	118,8	94,7	98,1	127,0
1983	84,3	51,0	66,5	80,7	99,2	91,1	82,2	71,8	50,3	55,8	33,3	33,4
1984	57,0	85,4	83,5	69,7	76,4	46,1	37,4	25,5	15,7	12,6	22,4	18,2

Приложение II
Тест-последовательность комплексных данных

Тест-последовательность комплексных данных содержит 64 отсчета синтезированного с помощью ЭВМ процесса, состоящего из четырех комплексных синусоид и окрашенного шума. Данные приведены в виде пар чисел, первое из которых соответствует действительной, а второе — мнимой частям соответствующего комплексного числа.

X(1) =	(1,349839091;	2,011167288)	X(33) = (0,404945314; —0,781708360)
X(2) =	(—2,117270231;	0,817693591)	X(34) = (1,293794155; —0,352723092)
X(3) =	(—1,786421657;	—1,291698933)	X(35) = (—0,119905084; 0,905150294)
X(4) =	(1,162236333;	—1,482598066)	X(36) = (—0,522588372; 0,437393655)
X(5) =	(1,641072035;	0,372950256)	X(37) = (—0,974838495; —0,670074046)
X(6) =	(0,072213709;	1,828492761)	X(38) = (0,275279552; —0,509659231)
X(7) =	(—1,564284801;	0,824533045)	X(39) = (0,854210198; —0,008278057)
X(8) =	(—1,080565453;	—1,869776845)	X(40) = (0,289598197; 0,506233990)
X(9) =	(0,927129090;	—1,743406534)	X(41) = (—0,283553183; 0,250371397)
X(10) =	(1,891979456;	0,972347319)	X(42) = (—0,359602571; —0,135261074)
X(11) =	(—0,105391249;	1,602209687)	X(43) = (0,102775671; —0,466086507)
X(12) =	(—1,618367076;	0,637513280)	X(44) = (—0,009722650; 0,030377999)
X(13) =	(—0,945704579;	—1,079569221)	X(45) = (0,185930878; 0,808869600)
X(14) =	(1,135566235;	—1,692269921)	X(46) = (—0,243692726; —0,200126961)
X(15) =	(1,855816245;	0,986030221)	X(47) = (—0,270986766; —0,460243553)
X(16) =	(—1,032083511;	1,414613724)	X(48) = (0,399368525; 0,249096692)
X(17) =	(—1,571600199;	0,089229003)	X(49) = (—0,250714004; —0,362990230)
X(18) =	(—0,243143231;	—1,444692016)	X(50) = (0,419116348; —0,389185309)
X(19) =	(0,838980973;	—0,985756695)	X(51) = (—0,050458215; 0,702862442
X(20) =	(1,516003132;	0,928058863)	X(52) = (—0,395043731; 0,140808776)
X(21) =	(0,257979959;	1,170676708)	X(53) = (0,746575892; —0,126762003)
X(22) =	(—2,057927608;	0,343388647)	X(54) = (—0,559076190; 0,523169816)
X(23) =	(—0,578682184;	—1,441192508)	X(55) = (—0,344389260; —0,913451135)
X(24) =	(1,584011555;	—1,011150956)	X(56) = (0,733228028; —0,006237417)
X(25) =	(0,614114344;	1,508176208)	X(57) = (—0,480273813; 0,509469569)
X(26) =	(—0,710567117;	1,130144477)	X(58) = (0,033316225; —0,087501869)
X(27) =	(—1,100205779;	—0,584209621)	X(59) = (—0,321229130; —0,254548967)
X(28) =	(0,150702029;	—1,217450142)	X(60) = (—0,063007891; —0,499800682)
X(29) =	(0,748856127;	—0,804411888)	X(61) = (1,239739418; —0,013479125)
X(30) =	(0,795235813;	1,114466429)	X(62) = (0,083303742; 0,673984587)
X(31) =	(—0,071512341;	1,017092347)	X(63) = (—0,762731433; 0,408971250)
X(32) =	(—1,732939839;	—0,283070654)	X(64) = (—0,895898521; —0,364855707)

Приложение III
Температурные данные

В этом приложении помещена таблица среднемесячных температур (в градусах Цельсия) для г. Сент-Луис, шт. Миссури, США. Эти данные были любезно предоставлены д-ром Робертом Дж. Карри, сотрудником Университета шт. Нью-Йорк, Стонибрук, и использовались в гл. 15 при описании методов многоканального спектрального оценивания.

Таблица среднемесячных температур

Год	Месяцы											
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
1845	4,1	5,6	7,1	16,9	17,4	23,4	26,4	24,8	22,7	12,4	5,2	—3,6
1846	3,1	—1,4	7,9	13,8	20,7	21,7	27,1	25,6	22,8	12,7	6,8	3,5
1847	—3,6	1,4	4,2	14,3	17,2	22,4	25,9	23,4	20,2	12,6	6,7	0,4
1848	2,9	3,8	6,2	11,7	19,8	22,7	24,0	23,7	17,5	12,6	3,1	—0,4
1849	—2,9	—1,3	8,7	12,1	18,1	24,4	23,8	23,1	19,7	10,9	10,1	—1,7
1850	1,8	1,8	5,8	9,4	16,9	24,6	26,6	26,4	20,1	12,9	7,7	—0,7
1851	1,2	3,0	8,4	10,9	19,9	22,6	25,7	24,6	22,2	12,9	4,4	—1,3
1852	—2,4	2,7	8,4	11,2	19,3	22,2	25,8	23,1	19,9	16,0	3,6	1,2
1853	0,8	0,1	5,7	13,4	17,9	25,6	24,2	24,7	20,6	11,0	8,4	0,3
1854	—2,9	3,3	8,2	13,3	19,4	24,1	28,2	27,6	24,2	15,6	5,7	2,0
1855	0,1	—2,2	3,3	16,0	18,6	21,7	25,9	23,1	22,3	11,4	7,6	—0,7
1856	—7,6	—3,9	1,6	14,6	18,6	25,2	28,0	23,0	18,7	14,9	4,4	—1,5
1857	—7,2	5,3	4,1	6,7	16,2	22,1	26,0	24,5	21,6	12,4	3,8	4,6
1858	4,6	—2,8	8,7	14,1	17,4	24,3	27,5	25,7	21,6	14,6	3,0	3,3
1859	0,6	2,9	9,0	10,8	19,8	22,1	25,7	24,1	18,8	11,6	8,2	1,2
1860	0,4	2,7	9,2	14,2	21,1	23,0	27,1	25,7	19,8	15,1	5,6	—0,4
1861	0,2	4,7	6,9	14,2	17,4	24,2	24,9	25,1	20,2	13,9	7,8	4,2
1862	—1,3	3,3	6,7	12,3	20,2	22,8	26,2	26,1	21,6	13,5	5,3	5,1
1863	3,0	2,0	6,8	13,7	18,9	20,8	24,1	24,1	19,7	8,3	6,2	2,1
1864	—1,6	3,2	4,7	10,4	19,8	24,9	27,9	24,8	21,4	10,8	6,6	—1,1
1865	—2,0	3,2	7,9	13,2	19,4	25,2	24,0	24,4	24,3	14,3	8,8	—0,4
1866	0,3	0,7	5,7	15,6	17,8	23,2	27,3	23,7	17,4	14,3	7,7	0,9
1867	—3,4	4,3	0,9	13,2	15,6	25,2	25,8	26,1	21,9	14,3	9,1	2,1
1868	—3,4	1,5	10,1	10,4	18,9	23,3	28,6	23,7	17,7	12,9	6,9	—1,7
1869	3,7	2,8	3,7	12,3	17,9	21,9	25,1	26,3	19,5	8,8	4,5	0,6
1870	0,9	2,3	4,4	13,6	20,3	23,1	26,6	24,0	21,7	14,7	8,2	—0,6
1871	3,2	4,4	10,5	15,8	20,4	26,5	26,6	25,6	18,9	15,0	4,3	—2,1
1872	—2,1	0,1	3,2	14,1	19,7	24,7	26,2	26,4	21,0	14,1	3,6	—3,7
1873	—3,6	0,8	5,7	10,7	18,5	25,6	25,7	25,9	19,4	11,2	5,2	2,8
1874	1,7	2,2	6,5	8,8	20,8	26,3	27,8	26,0	21,4	14,6	6,7	3,0
1875	—4,6	—3,4	4,4	11,4	18,4	23,1	26,3	23,2	19,8	12,6	5,3	6,3

1876	5,2	4,8	4,3	14,2	19,7	23,0	26,6	25,6	19,6	13,3	4,9	—4,0
1877	—0,4	5,2	3,5	12,6	17,8	23,8	26,0	24,7	21,2	15,5	5,7	8,8
1878	2,1	5,0	12,2	16,4	17,7	23,0	27,9	26,4	20,8	13,8	8,4	—2,8
1879	—2,1	1,0	8,8	12,8	20,7	23,2	27,3	24,1	18,6	16,9	8,2	0,1
1880	7,6	3,9	6,1	14,2	21,1	23,2	25,2	25,3	19,3	12,7	—0,1	—2,8
1881	—5,8	5,3	3,6	10,5	21,8	24,1	27,5	28,4	24,3	16,2	6,5	4,8
1882	0,0	6,6	8,4	14,4	15,5	23,2	23,5	23,7	20,4	16,2	7,0	0,1
1883	—4,9	—0,4	3,6	13,4	16,8	22,4	24,8	23,0	19,7	13,2	9,8	4,1
1884	—3,5	1,9	6,4	12,1	18,3	22,9	25,4	23,9	23,6	17,2	8,4	0,4
1885	—3,4	—2,8	5,1	13,7	18,5	23,3	27,2	24,0	20,5	13,3	8,8	3,8
1886	—4,1	1,7	6,9	15,2	21,0	23,7	27,2	26,9	22,6	16,7	7,6	—1,3
1887	—0,7	4,7	7,7	16,1	22,1	25,4	29,0	26,6	21,4	12,6	7,1	—0,3
1888	—4,3	0,1	4,9	15,0	17,5	23,1	26,4	23,7	19,0	12,5	6,9	3,3
1889	1,4	—0,5	7,9	14,2	17,6	21,3	25,3	24,0	19,2	12,6	5,1	9,8
1890	3,9	4,4	3,7	13,8	17,6	26,2	26,4	23,6	18,1	13,8	9,1	3,0
1891	2,4	2,0	3,7	14,7	17,5	24,2	23,7	23,7	23,1	13,9	4,9	5,9
1892	—3,5	4,3	4,4	12,1	17,1	24,7	24,9	25,3	21,1	15,4	5,1	0,4
1893	—4,1	—0,8	6,3	13,5	17,7	23,9	26,7	24,4	22,3	14,5	6,6	2,3
1894	1,8	0,1	10,4	14,2	18,8	25,7	26,1	25,8	21,3	15,1	5,7	3,7
1895	—3,3	—4,0	6,5	15,3	19,2	24,9	24,6	25,4	23,2	11,7	6,1	2,7
1896	1,6	2,5	4,6	18,1	22,7	23,2	26,0	26,2	19,9	13,7	7,7	4,8
1897	—0,9	2,5	7,9	13,2	17,4	23,9	26,9	24,8	25,0	18,8	7,7	0,3
1898	2,8	3,4	8,2	12,3	19,4	25,3	25,6	25,7	23,2	13,1	6,0	0,2
1899	0,2	—4,6	4,0	14,2	20,3	25,1	25,9	27,2	20,9	17,7	11,1	0,4
1900	2,9	—1,4	5,8	14,3	20,4	23,4	25,9	28,7	23,2	18,5	8,4	3,2
1901	2,8	—0,7	6,9	12,3	18,9	26,9	30,7	26,6	21,9	16,3	6,5	—1,1
1902	0,1	—3,3	8,0	12,8	22,1	23,3	26,7	24,6	18,9	16,5	11,7	1,0
1903	0,8	0,7	9,4	13,9	20,5	21,2	27,0	25,0	20,7	14,8	5,3	—1,3
1904	—2,4	—0,8	6,9	9,4	18,3	22,3	24,3	23,4	21,4	14,6	8,8	1,4
1905	—4,4	—4,9	9,7	13,1	19,5	24,4	24,0	25,2	21,3	13,3	7,9	1,7
1906	2,6	—0,1	0,7	15,3	19,4	22,3	24,6	25,5	22,8	13,6	6,4	2,4
1907	2,2	1,2	11,4	8,2	14,9	21,7	25,9	24,7	20,1	13,1	6,7	3,2
1908	1,0	1,1	9,7	13,2	19,3	22,8	25,3	25,2	22,8	14,1	9,1	3,7
1909	0,3	3,9	6,3	12,2	17,4	23,8	24,9	27,2	19,9	13,2	12,3	—3,2
1910	0,2	—1,7	13,9	13,1	15,9	22,3	24,8	23,9	21,1	15,7	5,4	0,0
1911	1,8	3,4	8,0	12,2	21,8	26,2	26,2	24,2	23,2	13,8	3,8	3,4
1912	—6,6	—2,4	1,8	13,8	20,1	21,2	25,9	24,4	21,3	15,7	8,4	3,6

Продолжение

Год	Месяцы											
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
1913	1,4	—0,2	5,4	13,2	19,6	25,7	27,0	28,2	20,8	13,2	11,2	5,0
1914	4,2	—2,7	6,2	13,4	20,7	27,2	28,3	25,9	20,7	15,7	10,0	—4,0
1915	—1,4	4,6	3,4	17,2	18,1	22,1	24,6	21,2	22,2	16,2	10,3	1,8
1916	1,1	0,3	7,0	12,3	19,9	21,8	28,9	25,8	19,9	14,8	9,4	0,8
1917	1,4	—1,1	7,9	11,9	15,8	22,8	25,9	23,9	20,3	10,3	8,6	—3,0
1918	—7,4	1,8	11,2	10,4	21,5	24,9	25,7	28,0	17,3	16,6	7,7	6,0
1919	3,1	2,4	8,2	14,0	17,2	25,1	27,4	24,9	22,9	15,7	6,9	—1,4
1920	—2,1	1,4	7,9	10,5	18,2	23,9	25,9	23,8	22,3	17,5	6,3	2,9
1921	3,9	5,4	12,0	14,3	20,2	25,7	28,3	25,2	23,3	15,1	8,3	3,6
1922	—1,1	2,3	7,7	14,4	20,7	25,6	25,9	26,1	23,0	16,5	9,2	2,5
1923	4,1	—1,1	5,0	12,6	17,8	23,9	26,9	25,4	20,3	12,4	8,7	6,8
1924	—3,1	1,8	4,1	14,5	15,2	22,9	23,8	25,6	18,1	17,8	8,5	—1,2
1925	0,4	4,7	9,0	16,8	17,3	25,7	26,0	25,6	24,9	9,4	6,2	0,3
1926	1,3	4,4	4,0	10,0	20,2	22,4	27,1	26,2	21,4	14,4	4,6	0,7
1927	—0,3	6,1	8,6	13,7	18,0	21,7	25,2	22,2	23,8	16,8	8,7	0,1
1928	1,4	2,9	7,6	11,2	19,2	20,2	26,5	25,2	19,4	16,5	7,6	3,6
1929	—2,6	—1,9	10,2	14,4	16,7	22,6	26,4	24,6	20,2	14,4	5,1	2,9
1930	—4,2	7,2	6,7	16,1	19,6	23,8	28,6	26,8	22,3	13,7	8,5	2,0
1931	3,1	5,2	4,6	13,9	17,1	26,3	27,8	25,0	24,7	16,9	12,5	7,2
1932	4,2	6,8	3,6	14,3	19,9	25,2	27,4	25,3	20,7	13,8	4,8	1,1
1933	6,3	1,6	6,9	12,9	19,5	27,5	27,2	25,3	25,0	13,8	7,6	4,4
1934	3,1	—0,5	4,7	13,7	21,7	28,0	30,6	26,6	19,0	17,1	10,1	0,7
1935	1,1	3,4	10,4	11,2	16,3	21,8	27,8	25,8	21,7	14,5	6,2	—1,1
1936	—3,8	—4,4	9,3	11,2	21,7	25,0	30,7	29,7	23,2	14,6	6,2	4,0
1937	—0,8	0,7	5,0	12,6	19,5	24,0	26,4	27,8	21,1	13,6	5,4	—0,1
1938	0,7	5,5	11,8	14,2	18,7	23,3	27,4	27,6	23,1	18,3	8,8	2,3
1939	4,6	1,2	8,8	11,6	20,6	24,4	26,9	24,6	24,7	16,7	7,3	4,0
1940	—8,3	0,9	6,2	12,4	17,7	24,4	26,7	25,7	21,9	18,4	6,6	4,3
1941	1,8	0,3	4,7	15,7	21,4	25,1	27,2	27,1	22,8	17,1	8,3	5,1
1942	0,2	0,9	8,1	15,4	18,6	23,8	26,9	24,8	20,7	15,3	9,3	0,6
1943	—0,1	4,2	4,6	12,7	17,9	25,2	27,6	27,1	19,4	14,6	6,3	0,2

1944	3,1	3,3	4,9	11,9	21,4	25,9	26,4	25,6	21,3	15,9	8,1	—1,7
1945	—1,9	2,2	12,2	13,7	16,1	21,3	25,2	25,4	20,9	14,4	7,7	—2,0
1946	2,9	—2,1	2,7	13,1	17,7	22,8	24,9	29,7	22,2	19,3	5,2	3,7
1947	1,3	4,6	13,8	16,0	16,9	24,5	26,9	23,0	20,9	17,1	9,3	4,9
1948	—3,1	1,4	6,6	15,4	18,4	24,1	26,1	26,0	22,4	13,8	8,9	3,7
1949	0,6	2,7	6,7	12,3	20,6	25,3	27,0	25,5	18,4	15,9	9,4	4,9
1950	3,4	2,8	5,0	10,6	20,1	23,6	24,6	22,7	19,7	18,3	3,9	—1,4
1951	0,3	1,9	4,5	11,2	19,7	22,3	25,7	24,8	19,1	15,1	3,8	0,9
1952	2,2	4,3	5,8	12,7	18,8	28,4	27,4	24,8	21,1	12,1	7,8	2,8
1953	1,8	4,4	8,2	11,2	19,6	27,5	27,4	25,7	22,4	16,7	8,7	3,2
1954	0,4	6,6	5,6	16,7	16,4	26,3	29,4	26,7	23,7	14,9	7,7	2,6
1955	0,6	2,2	7,2	17,2	20,2	21,9	28,6	26,8	23,1	14,6	5,4	0,6
1956	—1,6	2,7	7,3	11,9	19,9	24,6	25,4	26,3	21,6	18,1	7,2	3,6
1957	—2,8	4,7	6,3	13,6	19,0	24,2	26,7	26,3	20,2	12,7	6,4	4,9
1958	—0,4	—3,7	3,3	13,2	18,9	21,9	24,7	25,3	20,6	15,1	9,4	—0,9
1959	—3,2	2,1	7,6	13,8	20,9	24,7	25,6	27,1	21,8	13,9	3,9	4,1
1960	0,8	—0,7	—0,9	14,9	17,1	23,3	24,6	26,2	23,4	15,0	8,1	—0,6
1961	—2,1	2,2	7,5	10,0	14,6	21,2	24,5	24,1	21,7	15,1	6,7	0,0
1962	—4,1	2,6	4,2	11,8	22,2	23,3	24,3	24,2	19,1	16,1	7,2	—0,4
1963	—5,9	—1,9	9,3	14,6	17,7	24,1	25,2	23,8	20,3	19,4	7,6	—5,4
1964	1,5	1,3	5,7	14,8	20,9	23,8	25,8	24,7	20,7	12,2	8,5	—0,1
1965	—0,1	1,0	1,4	14,7	21,4	23,9	24,9	24,3	20,6	13,6	9,2	5,4
1966	—3,9	0,1	8,2	10,9	16,5	23,2	28,3	23,4	18,7	12,3	8,4	1,6
1967	1,5	—0,4	9,1	14,7	16,0	23,3	23,8	22,4	19,2	14,1	5,6	1,6
1968	—0,1	—1,6	7,8	13,1	16,6	25,0	25,3	25,1	19,3	13,9	6,4	0,2
1969	—1,6	1,8	3,2	13,8	18,7	22,5	26,9	25,0	20,7	13,4	6,3	0,1
1970	—4,0	0,5	4,7	14,4	20,7	22,4	25,5	24,6	22,1	13,4	6,4	2,8
1971	—2,6	1,1	5,4	13,3	16,8	26,1	24,1	24,3	22,5	17,6	7,8	4,8
1972	—1,2	1,3	7,2	13,4	19,1	23,0	25,3	24,6	21,7	12,7	4,3	—0,9
1973	0,3	1,4	10,5	12,1	16,5	23,7	25,9	24,9	21,1	15,9	8,3	—1,1
1974	—1,2	2,3	8,9	14,2	18,3	20,8	26,6	23,6	16,8	14,3	6,7	1,1
1975	0,7	0,0	3,9	11,9	19,8	23,8	25,4	25,5	18,2	15,0	9,1	1,9
1976	—2,2	6,4	9,3	13,6	16,0	22,6	26,4	23,5	20,1	10,5	2,8	—1,9
1977	—9,4	—9,8	9,8	16,0	21,7	23,7	27,3	24,7	21,5	13,1	7,1	—0,8
1978	—6,9	—6,1	3,3	13,4	17,6	23,6	25,8	24,7	22,8	13,1	8,6	1,7

Приложение IV
Преобразование программ для перехода от комплексных к действительным данным

Помещенные в книге машинные программы написаны на Фортране и предназначены для обработки комплексных данных. Однако их можно, как правило, преобразовать и для обработки действительных данных. Для этой цели в большинстве программ достаточно использовать следующие шесть модификаций:

Программа для комплексных данных	Программа для действительных данных
COMPLEX X(10), Y, и т. д.	REAL X(10), Y, и т. д.
REAL(Y)	Y
AIMAG(Y)	0. (или вычеркнуть)
CONJG(Y)	Y
CABS(Y)	ABS(Y)
CABS(Y)**2	Y*Y

С другой стороны, аналогичных результатов можно достичь, просто полагая мнимую часть массива данных равной нулю и пренебрегая мнимой частью выходного массива (массивов), которая при этом должна быть примерно, если не точно, равной нулю.

Приложение V
Список машинных программ, помещенных в книге

В круглых скобках после названия каждой машинной программы указан номер приложения, в котором помещена данная программа.

Название программы	Назначение
ARMA (10.Б)	— оценивание АР- и СС-параметров по данным.
ARMAPSD (6.А)	— вычисление СПМ по АРСС-, АР- и СС-параметрам.
BURG (8.Б)	— оценивание АР-параметров по данным.
CHOLESKY (3.А)	— решение системы линейных уравнений с эрмитовой матрицей.
CORRELATION (5.А)	— оценивание автокорреляции или взаимной корреляции.
CORRELOGRAMPSD (5.Б)	— вычисление оценки СПМ коррелограммным методом.
COVAR (8.В)	— оценивание АР-параметров по данным.
CSVD (3.Б)	— разложение по комплексным сингулярным числам.
CPOLY (11.Б)	— факторизация полинома с комплексными коэффициентами.
EIGENFREQ (13.А)	— вычисление оценок частоты с помощью методов MUSIC и EV.
ESD (11.Д)	— вычисление спектральной плотности энергии Прони.
EXPARAMS (11.Г)	— определение экспоненциальных параметров (Amp, Damp, Freq, Phase).
FASTRLS (9.В)	— быстрый рекурсивный адаптивный АР-метод наименьших квадратов.
FFT (2.В)	— быстрое преобразование Фурье (прямое и обратное).
HERMTOEP (3.Д)	— решение системы линейных уравнений с эрмитовой тёплицевой матрицей.
LEVINSON (3.В)	— определение АР-параметров с помощью алгоритма Левинсона.

LMS (9.Б) — градиентный адаптивный АР-метод наименьших средних квадратов.

MA (10.А) — оценивание СС-параметров по данным.

MCAR (15.Б) — оценивание многоканальных АР-параметров по данным.

MCARPSD (15.В) — вычисление матрицы многоканальной СПМ по АР-параметрам.

MCPERIOD (15.А) — вычисление матрицы многоканальной периодограммной СПМ.

MCSUPPORT (15.Г) — вспомогательные подпрограммы для обеспечения программ MCAR и MCARPSD.

MINEIGVAL (3.Е) — минимальное собственное значение и минимальный собственный вектор тёплицевой матрицы.

MINVAR (12.А) — вычисление оценки СПМ с минимальной дисперсией.

MODCOVAR (8.Г) — оценивание АР-параметров по данным.

PERIODOGRAM (5.В) — вычисление периодограммной оценки СПМ.

PREFFT (2.В) — составление таблицы экспонент для БПФ.

PRONY (11.В) — оценивание параметров экспоненциальной/синусоидальной модели для данных.

SHIFT (9.А) — регистр сдвига для адаптивных АР-алгоритмов.

SYMCOVAR (11.А) — симметричный ковариационный алгоритм для метода Прони.

TOEPLITZ (3.Г) — решение системы линейных уравнений с тёплицевой матрицей.

TDAR (16.Б) — оценивание двумерных АР-параметров.

TDARPSD (16.В) — вычисление двумерной АР-оценки СПМ.

TDPERIOD (16.А) — вычисление двумерной периодограммной оценки СПМ.

YULEWALKER (8.А) — оценивание АР-параметров по данным.

Литература, добавленная редактором перевода

[1] *Дженкинс Г., Ваттс Д.* Спектральный анализ и его приложения. — М.: Мир, вып. 1, 1971, вып. 2, 1972.
[2] *Кей С. М., Марпл-мл. С. Л.* Современные методы спектрального анализа. Обзор, ТИИЭР, 1981, № 11.
[3] *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1967.
[4] *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. — М.: ГИТТЛ, 1955.
[5] *Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р.* Линейная алгебра и многомерная геометрия. — М.: Наука, 1970.
[6] *Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А.* Матрицы и вычисления. — М.: Наука, 1984.
[7] *Гельфанд И. М.* Лекции по линейной алгебре. — М.: Наука, 1971.
[8] *Мальцев А. И.* Основы линейной алгебры. — М.: Наука, 1970.
[9] *Березин И. С. Жидков Н. П.* Методы вычислений. — М.: ГИФМЛ, т. I, 1959; т. II, 1960.
[10] *Мальцев А. И.* Алгоритмы и рекурсивные функции. — М.: Наука, 1965.
[11] *Уилкинсон Дж. Х.* Алгебраическая проблема собственных значений. — М.: Наука, 1970.
[12] *Гоноровский И. С.* Радиотехнические цепи и сигналы. — М.: Радио и связь, 1986.
[13] *Сиберт У.* Цепи, сигналы, системы. — М.: Мир, 1988.
[14] *Джерри А. Дж.* Теорема отсчетов Шеннона, ее различные обобщения и приложения. Обзор, ТИИЭР, 1977, 11, 53—89.
[15] *Рытов С. М.* Введение в статистическую радиофизику. — М.: Наука, 1966.
[16] *Бриллинджер Д.* Временные ряды. Обработка данных и теория. — М.: Мир, 1980, 52.
[17] *Хемминг Р. В.* Цифровые фильтры. — М.: Сов. радио, 1980.
[18] *Бейкер-мл. Дж., Грейвс-Моррис П.* Аппроксимации Паде. 1. Основы теории; 2. Обобщения и приложения. — М.: Мир, 1986.
[19] *Хинчин А. Я.* Об основных теоремах теории информации, УМН, т. XI, вып. 1 (67) янв. — февр., 1956, разд. II, §§ 5, 8.
[20] *Стратонович Р. Л.* Теория информации. — М.: Сов. радио, 1975, §§ 1.4, 1.5.
[21] *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1970, 14.5—4.
[22] *Андерсон Т.* Статистический анализ временных рядов. — М.: Мир, 1976.
[23] *Болтянский В. Г., Виленкин Н. Я.* Симметрия в алгебре. — М.: Наука, 1967.
[24] *Папулис А.* Теория систем и преобразований в оптике. — М.: Мир, 1971.
[25] *Хеннан Э.* Многомерные временные ряды. — М.: Мир, 1974.

Условные обозначения, принятые в книге

- В круглых скобках записывается аргумент непрерывной функции.
  Например: $x(t)$.
- В квадратных скобках записывается аргумент дискретной функции.
  Например: $y[t]$.
- Скалярные переменные и скалярные функции обозначаются строчными латинскими и греческими буквами. Для обозначения преобразований от скалярных функций используются соответствующие прописные буквы.

Функции времени	Преобразование
$x(t)$	$X(f)$
$y[n]$	$Y[z]$

Исключения: F — интервал дискретизации, или отсчетов, по частоте (скалярная величина);
N — число отсчетов (скалярная величина);
T — интервал дискретизации, или отсчетов, по времени (скалярная величина).

- Векторы обозначаются строчными полужирными латинскими и греческими буквами.
  Например: $\mathbf{d}$, $\boldsymbol{\gamma}$.
- Блочные векторы обозначаются подчеркнутыми снизу строчными полужирными латинскими и греческими буквами.
  Например: $\underline{\mathbf{c}}$, $\underline{\boldsymbol{\delta}}$.
- Матрицы обозначаются прописными полужирными латинскими и греческими буквами.
  Например: $\mathbf{A}$, $\boldsymbol{\Phi}$.
- Блочные матрицы обозначаются подчеркнутыми снизу прописными полужирными латинскими и греческими буквами.
  Например: $\underline{\mathbf{B}}$, $\underline{\boldsymbol{\Gamma}}$.
- Специальные обозначения:
  T — транспозиция вектора или матрицы;
  H — комплексно-сопряженная транспозиция вектора или матрицы:
  $*$ — комплексная сопряженность скаляра, вектора или матрицы;
  $\bigstar$ — оператор свертки;
  $\hat{x}$ — «крышка» используется для обозначения оценки (в данном случае величины x).

$a_p[k]$ — параметр авторегрессии (АР) p-го порядка для дискретного момента времени k;

$a_p{}^b[k]$ — коэффициент линейного предсказания (ЛП) назад p-го порядка для дискретного момента времени k;

$a_p{}^f[k]$ — коэффициент ЛП вперед p-го порядка для дискретного момента времени k;

B_e — эквивалентная ширина полосы в герцах;

B_s — эффективная статистическая ширина полосы в герцах;

$b_q[k]$ — параметр скользящего среднего q-го порядка для дискретного момента времени k;

$c_{xx}[m]$ — автоковариация дискретного процесса $x[n]$, соответствующая временно́му сдвигу m;

$c_{xy}[m]$ — взаимная ковариация дискретных процессов $x[n]$ и $y[n]$, соответствующая временно́му сдвигу m;

$\mathrm{cov}\{xy\}$ — ковариация между случайными переменными x и y;

$\det \mathbf{A}$ — определитель (детерминант) матрицы $\mathbf{A}$;

E — энергия сигнала или энергия квадратичной ошибки;

$\mathscr{E}\{x[n]\}$ — математическое ожидание случайного процесса $x[n]$;

$\mathbf{e}(f)$ — вектор, составленный из комплексных синусоид;

$e_p{}^b[k]$ — ошибка ЛП назад p-го порядка;

$e_p{}^f[k]$ — ошибка ЛП вперед p-го порядка;

$\mathscr{F}\{x(t)\}=X(f)$ — непрерывное преобразование Фурье функции непрерывного времени $x(t)$;

$\mathscr{F}^{-1}\{X(f)\}=x(t)$ — обратное непрерывное преобразование Фурье от $X(f)$;

f — частота в герцах;

F — интервал дискретизации (отсчетов) по частоте в герцах;

h — удельная энтропия (плотность энтропии);

$\mathbf{I}$ — единичная матрица;

$\mathrm{Im}\{x\}$ — мнимая часть комплексной переменной x;

j — мнимая константа, $\sqrt{-1}$;

$\mathbf{J}$ — матрица отражения (или обмена);

$k_p = a_p[p]$ — коэффициент отражения порядка p;
n — дискретное время или пространственный индекс;
N — число отсчетов данных;
p — порядок АР-модели;
$p(x)$ — плотность вероятности случайной переменной x;
$P_{xx}(f)$ — спектральная плотность мощности;
$P_{xy}(f)$ — взаимная спектральная плотность мощности;
$P_{xx}[m]$ — дискретная спектральная плотность мощности;
q — порядок модели скользящего среднего (СС-модели);
Q — статистический критерий качества оценки, определяемый отношением дисперсии оценки к квадрату ее среднего значения;
$r_{xx}[m]$ — значение автокорреляционной последовательности при временно́м сдвиге m;
$r_{xy}[m]$ — значение взаимно корреляционной последовательности при временно́м сдвиге m;
$\mathbf{R}_p$ — автокорреляционная матрица, составленная из элементов от $r_{xx}[0]$ до $r_{xx}[p]$;
$\mathrm{Re}\{x\}$ — вещественная (или действительная) часть комплексной переменной x;
s — непрерывная пространственная переменная (единицы измерения — см, м, км и т. д.);
S — интервал дискретизации (отсчетов) по пространственной переменной;
$S_{xx}(f)$ — спектральная плотность энергии;
$S_{xx}[m]$ — дискретная спектральная плотность энергии;
t — непрерывная временна́я переменная (непрерывное время), измеряемая в секундах;
$\mathrm{tr}\,\mathbf{A}$ — след матрицы $\mathbf{A}$;
T — интервал дискретизации (отсчетов) по времени в секундах;
$\mathbf{T}$ — тёплицева матрица;
T_e — эквивалентная временна́я протяженность в секундах;
TB — произведение длительности (T) на ширину полосы (B);
$\mathbf{v}_i$ — i-й собственный вектор;
$\mathrm{D}\{x\}$ — дисперсия случайной переменной x;
$x[n]$ — функция дискретного времени (или пространственной переменной);

$x(t)$ — функция непрерывного времени (или пространственной переменной);
$u[n]$ — управляющий, или возбуждающий, случайный процесс;
z — комплексная переменная;
$\mathcal{Z}\{h[n]\}=H(z)$ — z-преобразование от $h[n]$:
$Z^{-1}\{H(z)\}=h[n]$ — обратное z-преобразование от $H(z)$;
$\mathbf{0}_m$ — вектор, состоящий из m нулевых элементов;
$\delta(t)$ — дельта-функция Дирака;
$\delta[n]$ — единичная импульсная функция;
λ_i — i-е собственное значение;
ρ^b — среднеквадратичная ошибка (дисперсия) ЛП назад;
ρ^f — среднеквадратичная ошибка (дисперсия) ЛП вперед;
ρ^{fb} — среднеквадратичная ошибка (дисперсия) ЛП вперед и назад;
ρ_w — дисперсия белого шума $w[n]$;
$\text{Ш}(t)$ — функция отсчетов.

Предметный указатель

Адаптивность 316
— к данным 316, 456
Автоковариация
определение 147
последовательность 148
Автокорреляция
определение 146
оценивание 184—187, 520
последовательность (АКП) 148
двумерная 517
— синусоидального процесса 152, 431—436
Авторегрессионная передаточная функция критерия (АПФК) 283
Акаике информационный критерий 282, 350, 355, 446, 484
Арифметическое среднее 259
АР-процесс (*см.* Процесс авторегрессионный)
АРСС-процесс (*см.* Процесс авторегрессии — скользящего среднего)

Берга метод оценивания авторегрессионных (АР) параметров 254, 260, 293
Блок данных 252
Блочная обработка данных 252
Блэкмана — Тьюки спектральная оценка 190
Быстрое преобразование *Фурье* (БПФ) 27, 66—67
программа для вычисления 76—79

Взаимная ковариация
определение 147
последовательность 148
Взаимная корреляция
— — двумерная 517, 518
определение 147
оценка 187, 208
последовательность 148
Вероятность дискретного события
определение 142
Взвешивающая (или весовая) функция 172
Виеры — Морфа многоканальный метод 478, 500
Гауссовские:
метод исключения 98
окно 179, 180
плотность вероятности 144
— — многомерная 145
распределение случайной величины
— — — действительной 144
— — — комплексной 145
Гармонические:
анализ 15, 16, 61
анализатор 16—19
алгоритм 260
среднее значение 259
Геометрические:
алгоритм 258
среднее значение 259

Дельта-функция
— дискретная 47
— непрерывная 45
Диагональ матрицы
— главная (или основная) 85
— перекрестная (или кросс-диагональ) 86
Дирихле ядро 173
Длительность сигнала
— среднеквадратичная 70
— эквивалентная 68
Дискретизация
— по времени 53
— по частоте 54
теоремы 56
Дисперсия, определение 143
— выборочного спектра 162

Изменение формы корреляционного окна 200
ИКА (см. *Акаике* информационный критерий)
Импульсная функция
— — двумерная 511
— — единичная 46, 47
Интерполяция 56, 65
Интерпретация фильтра минимальной дисперсии (МД) 419—422
Итеративная предфильтрация 355

Калмана фильтр
быстрый алгоритм 326
вектор коэффициентов усиления 325
Каузальность 47, 228, 512
Квадратичная форма эрмитовой матрицы
— — — — положительно определенная 102
— — — — — полуопределенная 102

Ковариационный метод линейного предсказания 253, 266, 437
быстрый алгоритм 269, 294—305, 374
двумерный 538
многоканальный 482
Когерентность
квадрат модуля 464
матрица 464
фазовый спектр 464
функция 464
Комплексные операции и величины
демодуляция 74, 75
производная 213
сигналы 32, 74, 75
синусоида 74—76, 85, 189, 419, 433, 522
Коррелограммный метод оценивания СПМ 164, 168—171
аппроксимация пониженного ранга 439
комбинированная оценка 199
оценки 187—191, 439, 521
программа 210—211
связь с СС-оценкой 227
Коэффициент корреляции частный 241, 476, 478
Коэффициенты отражения 240—242, 257
матрица 87
Крамера — Рао неравенство 144

Левинсона алгоритм 26, 111, 239
— — двумерный 534
— — многоканальный 474
— — программа 134
Лемма об обращении
— — блочной матрицы 94
— — расширенной матрицы 93
Линейное предсказание 26, 374, 388
автокорреляционный метод 266, 349
— — вперед 237
— — вперед и назад 264—281
— — двумерное 526
ковариационный метод 253, 266, 437
быстрый алгоритм 269, 294—305, 374
— — двумерный 538
— — многоканальный 538
— — многоканальное 482
— — назад 237
— — по методу наименьших квадратов (МНК) 263—275
квадратичная ошибка МНК 96
МНК-решение с минимальной нормой 105
нормальные уравнения МНК 95—97
Линейная зависимость 92
Линейная система 45, 46
импульсная характеристика
— — двумерная 512
— — дискретная 47
— — многоканальная 462
— — непрерывная 46
— — минимально-фазовая 49
собственное значение 46
собственная функция 46

Математическое ожидание, определение 143
Матрица, определение 80
— блочная 81
— *Вандермонда* 91
— вырожденная (или сингулярная) 92
— ганкелева 89
— диагональная 86
— единичная 81
— единичного ранга 93
— коэффициентов отражения 87
— невырожденная (или несингулярная) 92
— обменная (или замещения) 87
— обратная 92—95
— обращения леммы 93, 94
— окаймленная 94
— ортогональная 101
— ортонормальная 101
— отражения 87
— перестановочная 91
— персимметричная 88
ранг по столбцам 92
— по строкам 92
— пониженный 389
— сдвига 91
след 100
— симметричная 86
собственная система 100
собственное значение 100
собственный вектор 160
— — главный 100, 434
— тёплицева 89
— — блочная 468
— — дважды (тёплицева) 530
— — обратная 109
— — обратная блочная 477
— — симметричная трехдиагональная 125
— — характеристические свойства 120—122
— — эрмитова 89, 115
— треугольная 92
— унитарная 101

характеристический полином 100
— центросимметричная 88
— циркулянтная (или циклическая) 90
— эрмитова 86
Метод линейного предсказания взвешенный (или автокорреляционный), невзвешенный (или ковариационный) и предвзвешенный 266
— максимального правдоподобия (ММП) 418
— максимальной энтропии (ММЭ) 27, 244, 539
— модифицированный ковариационный 254, 274
— — быстрый алгоритм 274, 305—312
Моменты случайной величины 143
Многоканальные:
— алгоритм *Левинсона* 474
— АР-спектр 357, 470, 478, 503
— АРСС-спектр 466
— классические спектральные оценки 466, 499
— корреляционная последовательность (МКП) 464
— спектральная плотность мощности 465
— СС-спектр 470
— уравнение *Юла — Уолкера* 472

Наложение во времени 56
— по частоте 56
Наттолла — Картера комбинированная оценка 201
Наттолла — Странда многоканальный метод 478, 500
Норма векторная 84
Нули функции 49
— — двумерной 515
Нуль-пространство (матрицы) 98

Обнаружимость сигнала 36—37
Обработка данных блочная 252
Ожидаемое значение 146
Окно 171—181
— *Бартлетта* 161, 177
— во временной области 54
— в частотной области 54, 172
— гауссовское 179, 180
— данных 172
— квадратичное 262
— корреляционное 172
— косинусное 177
— прямоугольное (или равномерное) 51, 172, 176
— равноволновое (или чебышёвское) 189
— спектральное 177
— треугольное 177
— *Ханна* 177
— *Хэмминга* 177
— эффективное корреляционное 199
Окончательная ошибка предсказания (ООП) 282
Опорная область (носитель)
квадрант плоскости (КП) 512
несимметричная полуплоскость (НСПП) 512
полная плоскость (ПП) 512
Определитель (детерминант) 93
Ортогональные подпространства 435
Оценка несмещенная 144
— смещенная 143
— состоятельная 144
— эффективная 144
Ошибка остаточная (фильтра) 319
— предсказания 319

Паде аппроксимация 223
Параметрические модели случайных процессов 214—232
Парсеваля теорема 52
Периодичность 15
— скрытая 19
Периодограмма 20, 164, 166—168, 367
— *Бартлетта* 193—194
— *Даньелла* 192—193
— двумерная 522, 544
комбинированные оценки 198
— многоканальная
— сглаженная 20
— *Шустера* (или выборочный спектр) 157
— *Уэлча* 194
Писаренко метод гармонического разложения (ГРП) 441
адаптивный вариант 443
Подпространства ортогональные 435
Полюс функции 49
— двумерный 515
Порядок
— АР-модели 219, 281
— — — многоканальной 484
— АРСС-модели 219
изменение (или закрытие) 255
— СС-модели 219, 350
Последовательные данные 252
Преобразование *Фурье* 51
z-преобразование 48, 61, 150
Программа факторизации комплексного полинома 402
Произведение «длительность×ширина полосы» 67—72
— «устойчивость×длительность×

«ширина полосы» 181—184
Прони метод 25, 209, 365—417, 436
— исходный подход 370—373
— — наименьших квадратов 373
— — — — модифицированный 376
программа 411—414
случай известных экспонент 382
— спектр 380—382
экспоненциальная модель 366
Просачивание 173
Процесс авторегрессионный (АР) 220
автокорреляционная последовательность 225
оценивание параметров
адаптивный метод НСК 320, 333
гармонический метод 260
геометрический метод 258
двумерные методы 520, 523
ковариационный метод 254, 268, 294
— — модифицированный 254, 274, 305
линейное предсказание по методу
наименьших квадратов 263—275
метод *Берга* 254, 260, 293
— *Юла — Уолкера* 254, 257, 268, 291
многоканальные методы 258, 477
рекурсивный метод максимального правдоподобия 262
— — наименьших квадратов 316, 317, 322, 334
оценивание коэффициентов отражения 257
— мощности синусоидальных составляющих 248
первое применение для целей спектрального анализа 24
связь с линейным предсказанием 240
— с МД-оценкой спектра 428
спектральная плотность мощности 220, 226, 244—249
свойства 234—243
Процесс авторегрессии — скользящего среднего (АРСС) 217
автокорреляционная последовательность 226
аппроксимация АР-процессом 222
— СС-процессом 224
оценивание параметров
— — двумерное 520
— — последовательное 357
программа 363
раздельное 350
совместное 355
связь с методом *Прони* 376
спектральная плотность мощности 219, 344
— — — многоканальная 478
Процесс синусоидальный 152—154
анализ собственных значений автокорреляционной матрицы 431
АРСС-модель 358
Процесс скользящего среднего (СС) 220, 227
автокорреляционная последовательность 227
о происхождении термина 26
оценка параметров 344, 347—350
— — двумерная 520
программа вычисления оценки 361
спектральная плотность мощности 220, 227
Псевдообращение матрицы 104

Равномерное распределение 144
Разрешение 35, 65, 67—72, 181—184, 245—248
Разложение по сингулярным числам (РСЧ) 103—105, 388
Расщепление спектральной линии 276
Рекурсивный метод наименьших квадратов (РМНК) 316, 322, 328
классический 324
быстрый алгоритм 326, 334—343
Решение линейных уравнений 97—99
— по методу НСК с минимальной нормой 105
— симметричных ковариационных нормальных уравнений 377, 378
— — — — — быстрый алгоритм 303—401
Решетчатый фильтр 242, 329
Рэлея отношение 102, 122
Свертка
— двумерная 541
— дискретная 47
— многоканальная 463
— непрерывная 46
Свойство автокорреляционного согласования 434
Сигнал
— аналоговый 44
автокорреляционная матрица 433, 434
— двумерный 511
— дискретный 44
— многоканальный 462
— непрерывный 44
подпространство 434

— цифровой 45
Сингулярные числа (или значения) 103
Системная функция
— — двумерная 514
— — дискретная 48
— — многоканальная 462
— — непрерывная 46
— — рациональная 48, 151, 217
Смещение, определение 143, 144
— авторегрессионной оценки 277
— выборочного спектра 161—163
— из-за воздействия окна 180
Спектр
— амплитудный 53
— выборочный 157, 161—163, 191
— матрицы 100
о происхождении термина 15
— фазовый 53
Спектральная оценка минимальной дисперсии (МД) 419, 422
— — — — двумерная 540
— — — — многоканальная 491
программа для вычисления 428—429
Спектральная плотность мощности (СПМ) 63, 149
— — — взаимная 149
— — — двумерная 518
— — — многоканальная 465
— — — белого шума 150
— — энергии (СПЭ) 42—43, 52—53, 63—64
— — — метода *Прони* 380
Среднее значение 146
Среднеквадратичное значение 143
Спектральная факторизация 228
СС-процесс (*см.* Процесс скользящего среднего)
Стационарность в широком смысле 147
Теорема о энергии 52
двумерный вариант 516
Тренд полиномиальный 457
устранение 279, 457

Функция sinc 52
— дискретная 173
Фурье преобразование 50—63
— — быстрое (БПФ) 27, 66—67
программа для вычисления 76—79
— — дискретновременное (ДВПФ) 59, 60, 149
— — — двумерное 515
— — — многоканальное 463
— — дискретное (ДПФ) 41, 57, 60
— — непрерывновременное (НВПФ) 3, 50, 59
— — — двумерное 515
— ряд
— — дискретновременной (ДВРФ) 59, 60, 62, 106
— — — двумерный 516
— — непрерывновременной (НВРФ) 16, 59, 60

Характеристические свойства тёплицевой матрицы 120—122
Холецкого разложение 99, 116, 375
программа 125—128

Частота
концентрация 68
— относительная 33
оценивание 37
— сворачивания 56
Частотная характеристика 53
Числа солнечных пятен 21, 23, 28—32
спектральные оценки 202, 285, 330, 390, 426, 492
таблица 551—560

Ширина полосы
— — по уровню половинной мощности 71, 175
— — среднеквадратичная 70
— — эквивалентная
— — эффективная статистическая
Шум
автокорреляционная матрица 433
— белый 150, 466, 519
— возбуждающий 219
— наблюдения 219, 284, 285
Шура дополнение (матрицы) 94

Экспоненциальная модель 369, 370, 436
Энтропия 158, 245
— удельная 159, 245
Эргодичность 142, 154—156, 518
— автокорреляционная 155, 156

Юла — Уолкера нормальные уравнения
аппроксимация с матрицей пониженного ранга 439—441
— — — — АР-процесса 226
— — — — АРСС-процесса 225
— — — — двумерные 529
— — — — метода наименьших квадратов 208
— — — — многоканальные 473
— — — — модифицированные 225, 351
программа для решения 291

Оглавление

Предисловие редактора перевода 5

Предисловие 7

Глава 1. Введение 12

1.1. Историческая перспектива 15
1.2. Солнечные пятна 28
1.3. Контрольный случай 32
1.4. Проблемы в области спектрального оценивания 34
1.5. Как пользоваться этой книгой 39
Литература 40

Глава 2. Обзор теории линейных систем и теории преобразований 43

2.1. Введение 43
2.2. Обозначения, используемые при описании сигнала 44
2.3. Непрерывные линейные системы 45
2.4. Дискретные линейные системы 47
2.5. Преобразование Фурье с непрерывным временем 50
2.6. Операции дискретизации и взвешивания 53
2.7. Соотношение между непрерывными и дискретными преобразованиями 57
2.8. Масштабирование для определения мощности 63
2.9. Дополнение нулями 65
2.10. Быстрое преобразование Фурье 66
2.11. Разрешение и произведение длительности на ширину полосы 67
Литература 72
Задачи 73
Приложение 2.А. Источник комплексных сигналов 74
Приложение 2.Б. Обработка в области волновых чисел с помощью линейных пространственных решеток 74
Приложение 2.В. Программа быстрого преобразования Фурье (БПФ) 76

Глава 3. Обзор матричной алгебры 80

3.1. Введение 80
3.2. Основы матричной алгебры 80
3.3. Специальные векторные и матричные структуры 85
3.4. Обращение матриц 92
3.5. Нормальные уравнения метода наименьших квадратов . . . 95
3.6. Решение линейных уравнений 97
3.7. Характеристические свойства матриц и разложение по сингулярным числам 99
3.8. Тёплицева матрица 109
Литература 123
Задачи 124
Приложение 3.А. Программа решения эрмитовых линейных уравнений методом Холецкого 126
Приложение 3.Б. Программа для определения разложения по комплексным сингулярным числам 129
Приложение 3.В. Программа алгоритма Левинсона 134

Приложение 3.Г. Программа для решения тёплицевых линейных уравнений в общем случае 136
Приложение 3.Д. Программа для решения эрмитовых тёплицевых линейных уравнений 138
Приложение 3.Е. Программа для определения минимального собственного значения и соответствующего ему собственного вектора эрмитовой матрицы 140

Глава 4. Обзор теории случайных процессов 142

4.1. Введение 142
4.2. Вероятность и случайные величины 142
4.3. Случайные процессы 146
4.4. Эргодичность: от средних по ансамблю к средним по времени 154
4.5 Понятие энтропии 158
Литература 159
Задачи 160
Приложение 4.А. Смещение и дисперсия выборочного спектра . . 161

Глава 5. Классические методы спектрального оценивания 164

5.1. Введение 164
5.2. Краткая сводка результатов 166
5.3. Окна 171
5.4. Разрешение и произведение «устойчивость×длительность×ширина полосы» 181
5.5. Оценивание автокорреляции и взаимной корреляции . . . 184
5.6. Коррелограммный метод оценки СПМ 187
5.7. Периодограммные оценки СПМ 191
5.8. Комбинированные периодограммно-коррелограммные оценки . 198
5.9. Приложение к оцениванию числа солнечных пятен . . . 202
5.10. Заключение 205
Литература 206
Задачи 207
Приложение 5.А. Программа для вычисления оценок корреляции 208
Приложение 5.Б. Программа для вычисления оценки СПМ с помощью коррелограммного метода 210
Приложение 5.В. Программа для вычисления оценки СПМ с помощью периодограммного метода 211

Глава 6. Параметрические модели случайных процессов . 214

6.1. Введение 214
6.2. Краткая сводка результатов 215
6.3. АР-, СС- и АРСС-модели случайных процессов 216
6.4. Соотношения между параметрами АР-, СС- и АРСС-моделей . 221
6.5. Соотношение АР-, СС- и АРСС-параметров с автокорреляционной последовательностью 224
6.6. Спектральная факторизация 228
Литература 229
Задачи 230
Приложение 6.А. Программа для вычисления спектральной плотности мощности АРСС-, АР- и СС-процессов 230

Глава 7. Авторегрессионный процесс и свойства спектра 233

7.1. Введение 233
7.2. Краткая сводка результатов 233
7.3. Свойства авторегрессионного процесса 234

7.4. Свойства спектральной плотности мощности авторегрессионного процесса 244
Литература 249
Задачи 250

Глава 8. Авторегрессионное спектральное оценивание: Алгоритмы блочной обработки данных . . . 252

8.1. Введение 252
8.2. Краткая сводка результатов 254
8.3. Метод оценивания корреляционной функции 257
8.4. Методы оценивания коэффициентов отражения 257
8.5. Оценивание линейного предсказания по методу наименьших квадратов 263
8.6. Характеристики оценок 275
8.7. Выбор порядка модели 281
8.8. Авторегрессионные процессы с шумом наблюдения 284
8.9. Применение к числам солнечных пятен 285
Литература 288
Задачи 290
Приложение 8.А. Программа алгоритма Юла — Уолкера . . . 291
Приложение 8.Б. Программа реализации алгоритма Берга (гармонического) 293
Приложение 8.В. Быстрый алгоритм и программа решения ковариационных уравнений линейного предсказания 294
Приложение 8.Г. Быстрый алгоритм и программа решения модифицированных ковариационных уравнений линейного предсказания 305

Глава 9. Авторегрессионное спектральное оценивание: Алгоритмы обработки последовательных данных 316

9.1. Введение 316
9.2. Краткая сводка результатов 317
9.3. Градиентные адаптивные авторегрессионные методы . . . 318
9.4. Рекурсивные авторегрессионные методы наименьших квадратов 322
9.5. Быстрые авторегрессионные методы на основе решетчатых фильтров 329
9.6. Приложение к числам солнечных пятен 330
Литература 331
Задачи 332
Приложение 9.А. Программа сдвигового регистра 333
Приложение 9.Б. Программа адаптивного НСК-алгоритма . . . 333
Приложение 9.В. Быстрый РНК-алгоритм и программа для решения экспоненциально взвешенных уравнений линейного предсказания 334

Глава 10. Спектральное оценивание на основе моделей авторегрессии — скользящего среднего . . . 344

10.1. Введение 344
10.2. Краткая сводка результатов 345
10.3. Оценивание параметров модели скользящего среднего . . 347
10.4. Раздельное оценивание АР- и СС-параметров 350
10.5. Одновременное оценивание АР- и СС-параметров 355
10.6. Последовательный подход к оцениванию АРСС-параметров . 357
10.7. Специальный АРСС-процесс для моделирования синусоид в белом шуме 358
10.8. Приложение к числам солнечных пятен 360
Литература 360
Задачи 361

Приложение 10.А. Программа для оценивания параметров СС-модели . . . 361
Приложение 10.Б. Программа для оценивания параметров АРСС-модели . . . 363

Глава 11. Метод Прони . . . 365

11.1. Введение . . . 365
11.2. Краткая сводка результатов . . . 366
11.3. Одновременное оценивание экспоненциальных параметров . . . 369
11.4. Исходный подход Прони . . . 370
11.5. Метод наименьших квадратов Прони . . . 373
11.6. Модифицированный метод наименьших квадратов Прони . . . 376
11.7. Спектр Прони . . . 380
11.8. Учет известных экспоненциальных компонент . . . 382
11.9. Идентификация экспонент в шуме . . . 384
11.10. Приложение к числам солнечных пятен . . . 390
Литература . . . 391
Задачи . . . 392
Приложение 11.А. Быстрый алгоритм и программа для решения симметричных ковариационных нормальных уравнений . . . 393
Приложение 11.Б. Программа для факторизации комплексного полинома . . . 402
Приложение 11.В. Программа для метода Прони . . . 411
Приложение 11.Г. Программа вычисления экспоненциальных параметров . . . 414
Приложение 11.Д. Программа для вычисления спектральной плотности энергии (СПЭ) Прони . . . 416

Глава 12. Спектральное оценивание по методу минимума дисперсии . . . 418

12.1. Введение . . . 418
12.2. Краткая сводка результатов . . . 419
12.3. Вывод выражения для спектральной оценки минимальной дисперсии . . . 419
12.4. Связь между спектральными МД- и АР-оценками . . . 423
12.5. Реализация метода спектральной оценки по минимуму дисперсии . . . 425
12.6. Приложение к числам солнечных пятен . . . 426
Литература . . . 426
Задачи . . . 427
Приложение 12.А. Программа для вычисления спектральной оценки минимальной дисперсии . . . 428

Глава 13. Методы оценивания частоты, основанные на анализе собственных значений . . . 430

13.1. Введение . . . 430
13.2. Краткая сводка результатов . . . 430
13.3. Анализ собственных значений автокорреляционной матрицы для случая синусоид в белом шуме . . . 431
13.4. Анализ собственных значений матрицы данных для случая экспонент в шуме . . . 436
13.5 Процедуры оценки частоты в подпространстве сигнала . . . 439
13.6. Оценки частоты в подпространстве шума . . . 441
13.7 Выбор порядка . . . 446
Литература . . . 446
Задачи . . . 447

Приложение 13.А. Программа для вычисления оценок частоты с помощью методов MUSIC и EV 448

Глава 14. Краткая сводка результатов по спектральным оценкам 451

Литература 459

Глава 15. Многоканальное спектральное оценивание . . 460

15.1. Введение 460
15.2. Краткая сводка результатов 460
15.3. Теория многоканальных линейных систем 462
15.4. Теория многоканальных случайных процессов 463
15.5. Многоканальные классические процедуры спектральной оценки 466
15.6. Многоканальные АРСС-, АР- и СС-процессы 469
15.7 Многоканальные уравнения Юла — Уолкера 472
15.8. Многоканальный алгоритм Левинсона 474
15.9. Многоканальное обращение блочно-тёплицевой матрицы 477
15.10. Многоканальное авторегрессионное спектральное оценивание 478
15.11. Выбор порядка авторегрессии 484
15.12. Экспериментальное сравнение многоканальных авторегрессионных процедур оценивания СПМ 484
15.13. Многоканальное спектральное оценивание на основе метода минимума дисперсии 491
15.14. Двухканальный спектральный анализ числа солнечных пятен и температуры воздуха 492
Литература 496
Задачи 497
Приложение 15.А. Программа для многоканальной периодограммы 499
Приложение 15.Б. Программа для многоканального авторегрессионного оценивания по алгоритмам Наттолла — Странда или Виеры — Морфа 500
Приложение 15.В. Программа вычисления многоканальной авторегрессионной СПМ 503
Приложение 15.Г. Вспомогательные подпрограммы для подпрограмм MCAR и MCARPSD 504

Глава 16. Двумерное спектральное оценивание . . . 508

16.1. Введение 508
16.2. Краткая сводка результатов 509
16.3. Теория двумерных линейных систем и их преобразования . . 511
16.4. Теория двумерных случайных процессов 517
16.5. Классическое двумерное спектральное оценивание . . . 520
16.6. Модифицированные процедуры классического двумерного спектрального оценивания 523
16.7. Двумерное авторегрессионное спектральное оценивание . . 524
16.8. Двумерное спектральное оценивание на основе метода максимальной энтропии 539
16.9. Двумерное спектральное оценивание по методу минимума дисперсии 540
Литература 541
Задачи 543
Приложение 16.А. Программа вычисления двумерной периодограммы 544
Приложение 16.Б. Программа для вычисления двумерных авторегрессионных параметров в первом и втором квадрантах . . 545

Приложение 16.В. Программа для вычисления двумерного авторегрессионного спектра в первом квадранте 547

Глава 17. Эпилог 549

Приложение I. Числа солнечных пятен 551

Приложение II. Тест-последовательность комплексных данных . . 561

Приложение III. Температурные данные 561

Приложение IV. Преобразование программ для перехода от комплексных к действительным данным 566

Приложение V. Список машинных программ, помещенных в книге 567

Литература, добавленная редактором перевода 569

Условные обозначения, принятые в книге 570

Список основных символов и сокращений 571

Предметный указатель . . . . . .

Оглавление . . . . . .