

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

В.А. ФУРСОВ

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» в качестве учебного пособия для обучающихся по основной образовательной программе высшего образования по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика

САМАРА
Издательство Самарского университета
2021

УДК 004(075)
ББК 32.81я7
Ф954

Рецензенты: д-р техн. наук, проф. П. К. Кузнецов,
д-р физ.-мат. наук, проф. В. А. Соболев

Фурсов, Владимир Алексеевич

Ф954 **Лекции по теории управления** : учебное пособие /
В.А. Фурсов. – Самара : Издательство Самарского университета,
2021. – 136 с.: ил.

ISBN 978-5-7883-1632-1

Излагаются методы теории систем автоматического управления. Пособие является записью курса лекций, прочитанных автором студентам 3-го курса Самарского университета. Значительная часть посвящена изложению теории линейных систем. Детально рассмотрены как непрерывные, так и дискретные системы автоматического управления. Пособие включает также разделы, посвященные теории нелинейных, оптимальных и адаптивных систем. Материал представлен в виде 16 лекций, каждая из которых является завершенной темой и рассчитана на 2 академических часа.

Предназначено для обучающихся по основной образовательной программе высшего образования по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика, но может быть полезным также студентам других направлений и специальностей.

Подготовлено на кафедре суперкомпьютеров и общей информатики

УДК 004(075)
ББК 32.81я7

ISBN 978-5-7883-1632-1

© Самарский университет, 2021

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	7
Лекция 1. Классификация систем, составление дифференциальных уравнений объекта управления	9
1.1. Классификация САУ.....	9
1.2. Основные характеристики САУ	12
1.3. Составление уравнений объектов управления.....	13
1.4. Линеаризация нелинейных моделей САУ	15
Лекция 2. Передаточные функции и структурные схемы САУ	18
2.1. Операторные уравнения и передаточные функции.....	18
2.2. Определение и свойства преобразования Лапласа.....	18
2.3. Применение преобразования Лапласа для описания САУ.....	20
2.4. Структурные схемы и структурные преобразования	22
Лекция 3. Временные и частотные характеристики звена	25
3.1. Переходная и весовая функции звена	25
3.2. Понятие частотной характеристики.....	26
3.3. Амплитудно-фазовая частотная характеристика.....	28
3.4. Связь частотных и временных характеристик	30
Лекция 4. Типовые звенья САУ	32
4.1. Аperiodическое звено первого порядка.....	32
4.2. Пропорциональное (усилительное) звено	33
4.3. Статическое колебательное звено второго порядка	33
4.4. Идеальное интегрирующее звено.....	35
4.5. Идеальное дифференцирующее звено	36
Лекция 5. Анализ устойчивости систем	38
5.1. Понятие устойчивости системы	38
5.2. Критерий устойчивости Михайлова	39
5.3. Частотный критерий устойчивости Найквиста.....	40
5.4. Алгебраический критерий устойчивости Гурвица.....	42
5.5. Построение областей устойчивости методом D-разбиения	43
Лекция 6. Критерии качества переходных процессов	45
6.1. Показатели качества переходных характеристик САУ	45
6.2. Корневые оценки качества переходных процессов.....	46

6.2.1. Оценка длительности переходного процесса	46
6.2.2. Оценка колебательности переходного процесса	48
6.3. Интегральные оценки качества	50
Лекция 7. Синтез и коррекция линейных систем	51
7.1. Цели и критерии синтеза и коррекции систем.....	51
7.2. Последовательная коррекция САУ	52
7.2.1. Коррекция путем изменения общего коэффициента усиления	53
7.2.2. Введение производной от ошибки	54
7.2.3. Введение интеграла от ошибки	56
7.2.4. Введение изодромного корректирующего звена.....	58
7.3. Коррекция введением обратной связи	58
Лекция 8. Описание линейных систем в пространстве состояний.....	61
8.1. Векторная запись дифференциальных уравнений систем.....	61
8.2. Связь уравнений состояния с передаточными функциями	62
8.3. Фундаментальная система решений	62
8.4. Фундаментальная матрица	64
8.5. Переходная матрица состояний.....	65
8.6. Общее решение неоднородной системы	65
8.7. Построение матрицы переходных состояний	67
Лекция 9. Временные модели импульсных систем	69
9.1. Описание ЦАС в виде свертки решетчатых функций.....	69
9.2. Описание импульсных систем разностными уравнениями.....	72
9.3. Построение векторно-матричных разностных уравнений	73
9.4. Решение линейных разностных уравнений.....	74
9.5. Построение уравнений импульсных систем в пространстве состояний	75
Лекция 10. Описание импульсных САУ в пространстве комплексных переменных.....	77
10.1. Описание импульсных систем с помощью дискретного преобразования Лапласа.....	77
10.2. Описание импульсных систем с помощью Z-преобразования	78
10.3. Связь дискретного преобразования Лапласа с Z-преобразованием.....	79
10.4. Частотные характеристики импульсных систем	80
10.5. Псевдочастотные характеристики импульсных систем.....	81

10.6. Получение Z-передаточной функции по уравнению состояний...	82
10.7. Структурные преобразования импульсных систем.....	82
Лекция 11. Устойчивость и качество переходных процессов	
линейных импульсных систем	85
11.1. Анализ устойчивости по корням характеристического уравнения	85
11.2. Алгебраический критерий Гурвица для импульсных систем	86
11.3. Частотный критерий устойчивости (аналог критерия Михайлова)	87
11.4. Аналог критерия Найквиста.....	88
11.5. Расчет переходных процессов в импульсных системах	90
Лекция 12. Методы описания и анализа нелинейных систем	93
12.1. Особенности и методы исследования нелинейных систем	93
12.2. Метод фазового пространства	94
12.3. Исследование систем второго порядка на фазовой плоскости	95
12.4. Построение фазовых траекторий линейной системы второго порядка.....	97
12.5. Понятие макроструктуры фазового пространства.....	98
12.6. Метод точечных отображений.....	99
12.7. Определение и исследование устойчивости предельных циклов по диаграмме Ламерея	100
Лекция 13. Устойчивость нелинейных систем	102
13.1. Общее определение понятия устойчивости по Ляпунову	102
13.2. Исследование устойчивости нелинейных систем по уравнениям первого приближения.....	103
13.3. Второй (прямой) метод Ляпунова	104
13.4. Анализ устойчивости дискретных нелинейных систем прямым методом Ляпунова	106
13.5. Исследование устойчивости дискретных нелинейных систем в малом прямым методом Ляпунова	107
Лекция 14. Приближенные методы анализа нелинейных систем	109
14.1. Метод гармонической линеаризации	109
14.2. Определение коэффициентов гармонической линеаризации	111
14.3. Определение параметров автоколебаний с использованием критерия Михайлова	113

14.4. Определение автоколебаний с использованием критерия Найквиста.....	114
14.5. Исследование устойчивости периодических решений	115
Лекция 15. Оптимальные системы управления	117
15.1. Постановка задачи оптимального управления.....	117
15.2. Построение оптимального управления с помощью классического вариационного исчисления.....	118
15.3 Уравнения Эйлера-Лагранжа	119
15.4. Принцип максимума Понтрягина.....	121
15.5. Метод динамического программирования	123
Лекция 16. Адаптивные системы управления	125
16.1. Основные понятия и определения, классификация адаптивных систем.....	125
16.2. Проблемы построения адаптивных систем, система с поэтапной адаптацией.....	126
16.3. Построение алгоритмов адаптации	128
16.4. Алгоритм идентификации	132
Библиографический список	135

ПРЕДИСЛОВИЕ

Основным мотивом для написания этого учебного пособия, как это не покажется странным, явилась пандемия коронавируса. Переход на удаленный режим чтения лекций оказался не простым. Слайды с небольшим количеством формальных математических выкладок не позволяли полностью и достаточно глубоко вскрыть важные закономерности функционирования и синтеза САУ. Попытки дополнить слайды комментариями и объяснениями не всегда достигали результата. Оказалось, что в режиме живого общения важным индикатором успешности понимания материала является эмоциональные реакции студентов, что, обычно, не удается наблюдать в дистанционном режиме.

Обучение в удаленном режиме по существу в значительной степени является близким к заочной форме образования. Однако заочная форма обучения предполагает разработку полного комплекта учебно-методических материалов, которые позволяют студентам самостоятельно с минимальным числом консультаций освоить материал и подготовить контрольные и расчетно-графические работы. Конечно, по курсу теории автоматического управления имеется огромное число учебников и монографий, в которых можно найти исчерпывающее изложение материала. Однако автор не решился бросить обучающихся на самостоятельное выживание. Иногда такая методика обучения эффективна, но большинству студентов, впервые приступающих к изучению теории систем автоматического управления, ориентироваться в этом огромном «океане» книг нелегко.

В поисках выхода автор перед каждым дистанционным занятием готовил краткий конспект очередной лекции и рассылал студентам для предварительного ознакомления. По мере того, как эти тексты (при активном участии студентов) прирастали новыми разделами, сформировался полный краткий курс лекций. Тогда появилась идея издать эти лекции и «выложить» в открытый доступ на портале университета.

Автор отдает себе отчет, что эти лекции не вполне совершенны, т.к. писались в режиме реального времени. Тем не менее, опыт проведения дистанционных занятий по курсу «Теория управления» на факультете инфор-

матики Самарского университета подтвердил эффективность их использования в качестве дополнительного материала.

Учитывая, что карантинные мероприятия могут продлиться, автор стремился так скоро, насколько возможно, сделать их доступными студентам, несмотря на возможные погрешности. Автор будет признателен всем, кто сообщит автору о найденных неточностях и ошибках, а также выскажет предложения по совершенствованию структуры и содержания настоящего учебного пособия.

Часть I

ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ (САУ)

Лекция 1. КЛАССИФИКАЦИЯ СИСТЕМ, СОСТАВЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ОБЪЕКТА УПРАВЛЕНИЯ

1.1. Классификация САУ

Системы автоматического управления (САУ) обычно представляют в виде совокупности звеньев, исходя из следующих принципов:

- звенья должны быть, насколько возможно, простыми;
- они должны обладать свойством направленного действия.

Звено *направленного действия* передает воздействие только в одном направлении – от входа к выходу, т.е. его состояние не влияет на состояние предшествующего звена (*детектирующее свойство*).

Любая САУ в самом общем виде всегда включает (рис. 1.1):

- объект управления (ОУ);
- управляющее устройство (УУ).

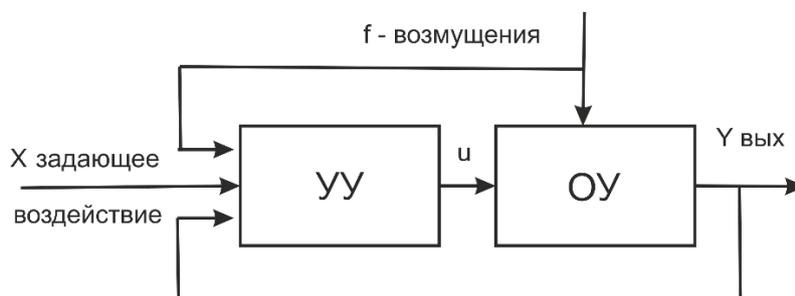


Рис. 1.1. Типовая функциональная схема САУ

В свою очередь управляющее устройство обычно включает (рис. 1.2):

- измерительный элемент (ИЭ);
- вычислительное устройство (ВУ);

- исполнительный элемент (ИЭ).

По виду связей элементов система САУ может быть разомкнутой и замкнутой. На рис. 1.1 показан случай комбинированной системы, когда САУ содержит как разомкнутый, так и замкнутый контур управления.

В разомкнутых системах реализуется принцип программного управления. Измеряется либо задающее воздействие, либо возмущение, действующее на объект, либо и то и другое. В соответствии с этим рассматривают разомкнутые системы по *задающему воздействию* либо с управлением по *возмущению*. Разомкнутая система может включать также оба типа управления: по задающему воздействию и по возмущению, так как показано на рис. 1.1.

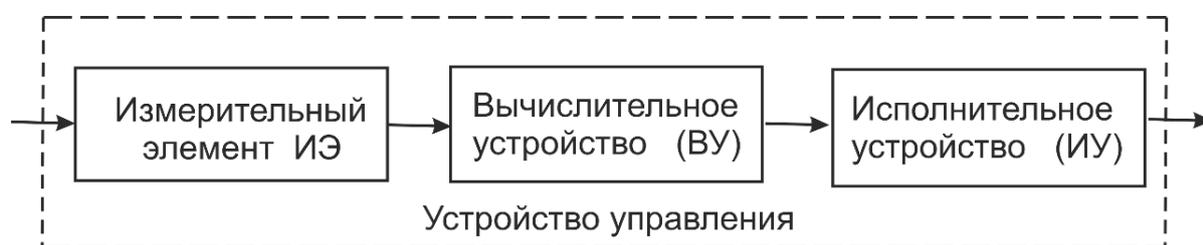


Рис. 1.2. Схема устройства управления (УУ)

В замкнутых системах реализуется *управление по отклонению*. Такая система имеет цепь *обратной связи* (ОС), по которой выходной сигнал САУ подается на вход и вычисляется разность сигнала обратной связи и заданного входного сигнала. В зависимости от величины отклонения сигнала обратной связи от задающего воздействия УУ вырабатывает управляющий сигнал, который компенсирует это отклонение. Важным преимуществом систем с ОС является то, что отклонения выходного сигнала компенсируются независимо от причины их возникновения. В разомкнутых системах компенсируются лишь те возмущения, измерение которых возможно, поэтому вследствие неизбежно присутствующих неконтролируемых возмущений эти системы обычно имеют более низкую точность. Примером исторически первой системы с обратной связью является регулятор Уатта, показанный на рис. 1.3.

Для использования всех возможностей систем как по точности, так и по быстродействию чаще всего строят комбинированные системы.

В зависимости от числа выходных координат объекта управления САУ могут быть одномерные и многомерные.

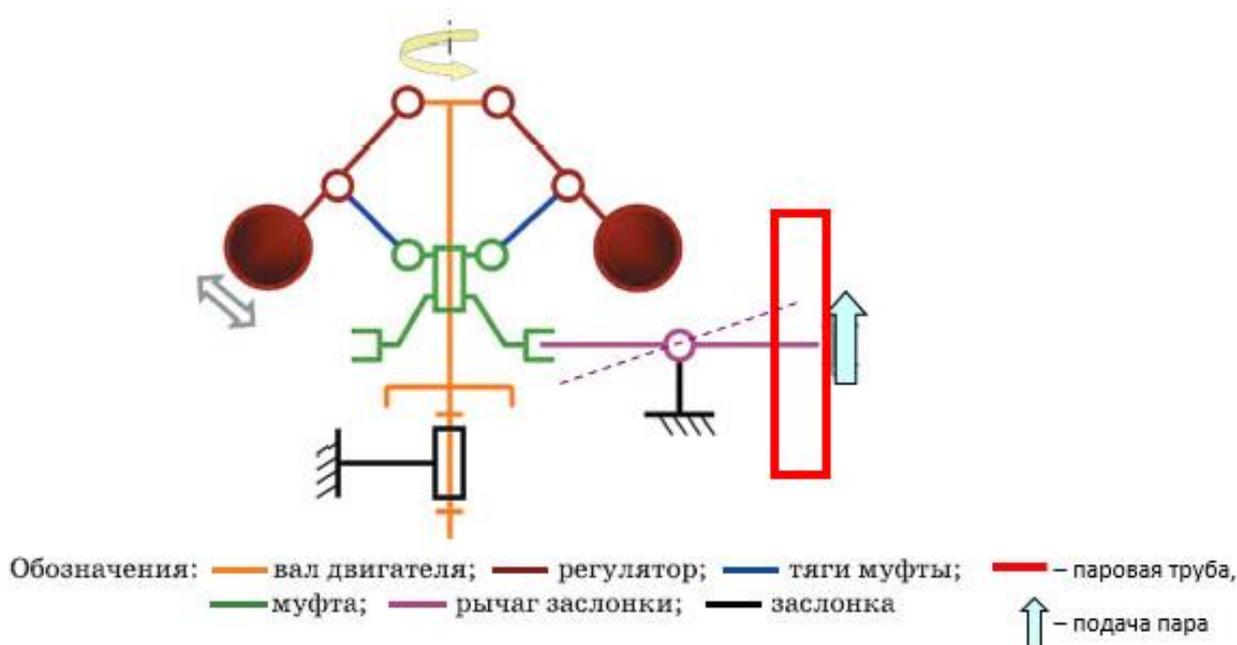


Рис. 1.3. Регулятор Уатта

По виду математической модели, описывающей процессы в САУ, рассматривают *линейные* и *нелинейные* системы. Нелинейной является система, у которой имеется хотя бы один нелинейный элемент системы. Принципиальное отличие линейных систем от нелинейных – для них справедлив *принцип суперпозиции*: реакция системы на суммарное воздействие равна сумме реакций на каждое воздействие в отдельности. Для нелинейных систем этот принцип не выполняется.

Если параметры системы не изменяются со временем, система называется *стационарной*. *Нестационарные* системы – это системы с переменными параметрами.

Если все элементы системы описываются непрерывными математическими моделями, такие системы называют *непрерывными*. Если в системе присутствует хотя бы один элемент дискретного действия, система называется *дискретной*.

При исследовании САУ решают одну из двух задач:

- задача *анализа системы*;
- задача *синтеза системы*.

Задача анализа состоит в определении свойств системы, описание которой задано. При решении задачи синтеза, наоборот, задают желаемые свойства, необходимо построить систему (описание системы), удовлетворяющую этим свойствам.

1.2. Основные характеристики САУ

При изучении САУ рассматриваются следующие характеристики:

- устойчивость системы;
- качество процесса управления;
- точность системы управления.

Дадим, пока, нестрогие формулировки этих понятий.

Устойчивость – способность системы возвращаться к желаемому исходному состоянию. Классические примеры устойчивой и неустойчивой системы приведены на рис. 1.4.

Качество процесса управления оценивают по степени близости переходного процесса к желаемому. Обычно при сравнении рассматривают поведение системы в переходном процессе после подачи импульса и/или ступенчатого сигнала.

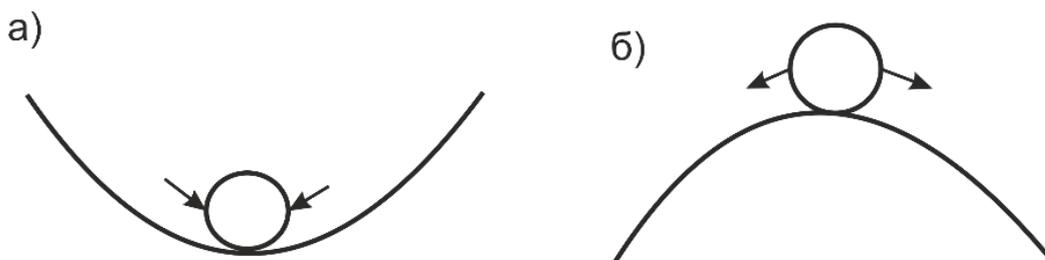


Рис. 1.4. Иллюстрация устойчивой (а) и неустойчивой (б) систем

На рис. 1.5 приведены три переходных процесса с различной степенью колебательности при подаче в момент $t=0$ на вход системы единичного ступенчатого сигнала.

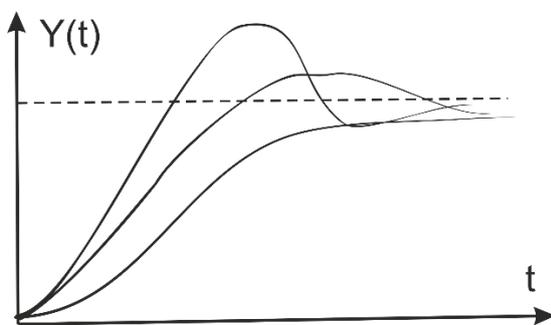


Рис. 1.5. Примеры процессов с разной степенью колебательности

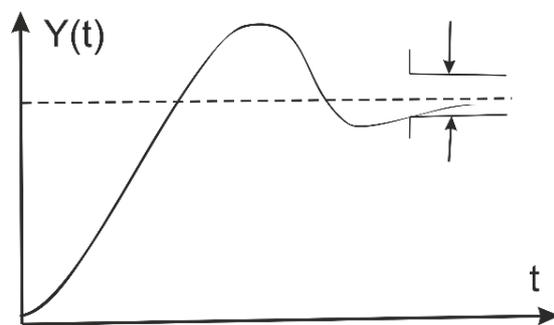


Рис. 1.6. Пример задания требований по точности

Точность – отклонение от заданного значения регулируемого параметра в установившемся режиме, т.е. после затухания реакции системы на воздействие. Время полного затухания реакции может быть чрезвычайно большим, поэтому обычно устанавливают некоторую «трубку», окончательное попадание внутрь которой свидетельствует о достижении заданной точности (см. рис. 1.6).

1.3. Составление уравнений объектов управления

Для построения САУ необходимо знать модель объекта управления. В настоящем курсе мы будем рассматривать математические модели динамических объектов в виде дифференциальных и разностных уравнений. Составление уравнений, описывающих динамику объектов, опирается на законы, изучаемые в различных разделах физики. В качестве примера мы рассмотрим составление уравнений движения ЛА (рис. 1.7).

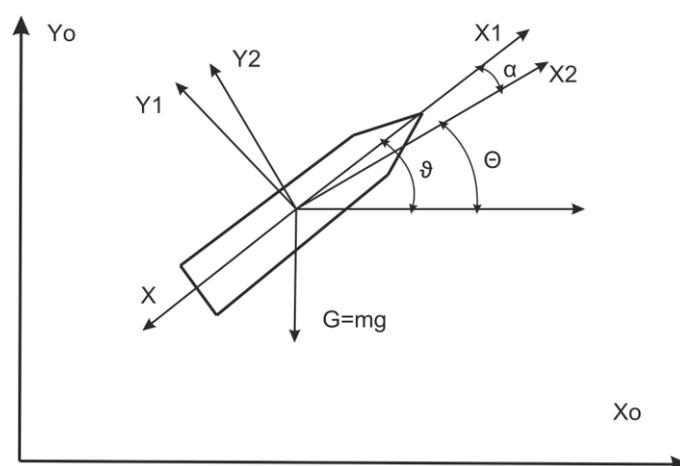


Рис. 1.7. Схема сил, действующих на ЛА в продольном движении.

Рассмотрим продольное движение ЛА, при котором вектор скорости центра масс лежит в вертикальной плоскости симметрии, перпендикулярной плоскости местного горизонта. Это движение характеризуется двумя составляющими скорости движения центра масс и угловой скоростью вращения в этой плоскости. Угол между продольной осью ЛА и плоскостью местного горизонта называют углом тангажа. Управление углом тангажа является одной из задач автоматического управления ЛА. Для ее решения надо построить уравнения продольного движения.

На рис. 1.7 приведена схема сил, действующих на ЛА в продольном движении. Здесь

ϑ – угол тангажа;

θ – угол наклона траектории;

α – угол атаки;

P – суммарная тяга двигателей по оси ракеты;

x_1, y_1 – оси системы координат, связанной с ЛА;

x_2, y_2 – оси системы координат, связанной с вектором скорости;

X – лобовое сопротивление (противоположно вектору скорости);

V – скорость

Для составления уравнения продольного движения нам понадобится также величина S – площадь миделева сечения.

Ограничимся составлением уравнения сил в проекциях на ось x_2 , совпадающую с вектором скорости:

$$m \frac{dV}{dt} = P \cos \alpha - X - mg \sin \theta + F(t), \quad (1.1)$$

где $F(t)$ – возмущения, действующие на ЛА.

Уравнение (1.1) является нелинейным. В частности, лобовое сопротивление является нелинейной функцией:

$$X = C_x(h, \dot{m}, V) \cdot q \cdot S, \quad (1.2)$$

где $C_x(h, \dot{m}, V)$ – коэффициент лобового сопротивления, зависит от высоты полета h , скорости изменения массы ЛА \dot{m} , связанного со скоростью расхода топлива. Входящий в (1.2) скоростной напор q также является нелинейной функцией скорости V ЛА:

$$q = \frac{\rho V^2}{2}. \quad (1.3)$$

Таким образом, модель объекта, описываемая уравнением (1.1), является нелинейной. Следовательно, и система управления в целом также является нелинейной. Синтез и анализ нелинейных систем является достаточно сложной задачей. Поэтому обычно осуществляют переход от нелинейной системы к линейной путем линеаризации.

1.4. Линеаризация нелинейных моделей САУ

Общую схему линеаризации рассмотрим на примере нелинейного дифференциального уравнения второго порядка

$$F(\ddot{y}, \dot{y}, y, \dot{x}, x) = 0. \quad (1.4)$$

Если система (1.4) устойчива, то при $t \rightarrow \infty$, $\ddot{y} \rightarrow 0$, $\dot{y} \rightarrow 0$, $\dot{x} \rightarrow 0$, т.е.

$$F(0, 0, y, 0, x) = 0. \quad (1.5)$$

Уравнение (1.5) описывает связь выхода и входа в установившемся режиме, т.е. является статической характеристикой объекта. Это уравнение можно представить в виде

$$y = \psi(x). \quad (1.6)$$

На рис. 1.8 в качестве примера приведен возможный вид статической характеристики. Если статическая характеристика достаточно гладкая, в малой окрестности некоторой точки возможна замена этой характеристики линейной функцией. Рассмотрим основанную на этом принципе схему линеаризации.

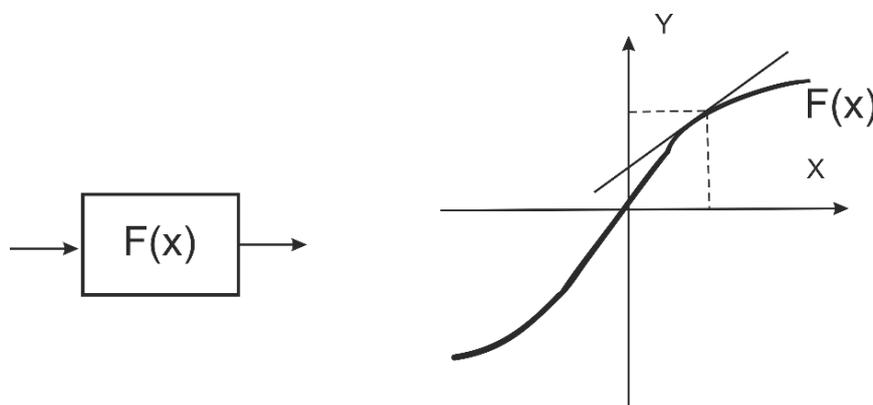


Рис. 1.8. Линеаризация статической характеристики

Вначале рассмотрим простейший случай линеаризации статической характеристики. Пусть установившийся режим соответствует значениям x_0, y_0 , а отклонения от этого режима малы. В этом случае нелинейную зависимость (1.6) можно разложить в ряд Тейлора в окрестности точки x_0, y_0 . Ограничиваясь членами первого порядка, можно записать

$$y \approx \varphi(x_0) + \left(\frac{d\varphi}{dx} \right) \Big|_{x_0} (x - x_0) \quad (1.7)$$

или
$$\delta y \approx k \cdot \delta x, \quad (1.8)$$

где $\delta y = y - \varphi(x_0)$, $k = (d\varphi / dx) \Big|_{x_0}$, $\delta x = x - x_0$. Уравнение (1.8) является уравнением касательной нелинейной функции $y = \varphi(x)$ в точке x_0, y_0 , поэтому оно справедливо лишь в малой окрестности этой точки.

Рассмотрим теперь общий случай линеаризации уравнения (1.4), включающего производные по времени от входной и выходной величин. Разложив, как и выше, нелинейную функцию в левой части (1.4) в ряд Тейлора в окрестности точки x_0, y_0 можно записать

$$\frac{dF}{d\ddot{y}} \Big|_0 \delta \ddot{y} + \frac{dF}{d\dot{y}} \Big|_0 \delta \dot{y} + \frac{dF}{dy} \Big|_0 \delta y + \frac{dF}{d\dot{x}} \Big|_0 \delta \dot{x} + \frac{dF}{dx} \Big|_0 \delta x. \quad (1.9)$$

Введя обозначения

$$\frac{dF}{d\ddot{y}} \Big|_0 = a_0, \quad \frac{dF}{d\dot{y}} \Big|_0 = a_1, \quad \frac{dF}{dy} \Big|_0 = a_2, \quad \frac{dF}{d\dot{x}} \Big|_0 = b_0, \quad \frac{dF}{dx} \Big|_0 = b_1,$$

уравнение (1.9) можно переписать в следующем простом виде

$$a_0 \delta \ddot{y} + a_1 \delta \dot{y} + a_2 \delta y = k \delta x. \quad (1.10)$$

В общем случае линеаризованное дифференциальное уравнение, имеющее старшие производные в левой и правой части порядка n и m соответственно, можно представить в виде

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y + a_n = b_0 x^{(m)} + b_1 x^{(m-1)} + \dots + b_{m-1} x + b_n. \quad (1.11)$$

Здесь, для простоты записей, вместо δy , δx мы применяем обозначения y, x имея в виду, что эти переменные имеют смысл отклонений от некоторого заданного режима. Кроме того, для производных различного порядка здесь и далее мы применяем широко используемые обозначения

$$\frac{d^n y}{dt^n} = y^{(n)}, \quad n = 1, 2, \dots \quad \frac{d^m x}{dt^m} = x^{(m)}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Уравнения (1.10), (1.11) являются линейными дифференциальными уравнениями в отклонениях. Иногда их называют уравнениями в вариациях.

Эти уравнения могут использоваться только для исследования динамики объектов в окрестности установившихся режимов, при которых имеют место малые отклонения параметров движения и их производных от этих режимов движения. Коэффициенты этого уравнения имеют смысл чувствительности объекта к отклонениям от режима, в окрестности которого осуществляется линеаризация.

Лекция 2. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ И СТРУКТУРНЫЕ СХЕМЫ САУ

2.1. Операторные уравнения и передаточные функции

Линеаризованное дифференциальное уравнение (1.11), старшие производные которого в левой и правой части имеют порядок n и m соответственно, можно записать в компактной операторной форме:

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n) y = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m) x, \quad (2.1)$$

где $p = \frac{d}{dt}$ – символ дифференцирования по времени.

Другой формой записи линейных дифференциальных уравнений является передаточная функция:

$$y = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n} x \quad (2.2)$$

или

$$y = W(p) x,$$

где

$$W(p) = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n}. \quad (2.3)$$

Дробь $W(p)$ называется передаточной функцией. Далее мы дадим строгое обоснование понятия передаточной функции с использованием преобразования Лапласа. Для удобства читателя вначале мы приведем основные сведения из теории операционного исчисления, которые будут использованы в дальнейшем для построения передаточной функции.

2.2. Определение и свойства преобразования Лапласа

Операционное исчисление широко применяется в теории управления. Сущность этого подхода состоит в следующем. Пусть задана функция $f(t)$

вещественной переменной t , для которой существует преобразование Лапласа:

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt. \quad (2.4)$$

В этом случае функция $f(t)$ называется *оригиналом*, а функция $F(s)$ – *изображением*. Если функции $f(t)$ соответствует изображение $F(s)$, то это соответствие обычно записывают следующим образом

$$f(t) \triangleleft F(s).$$

Для нахождения оригинала по изображению используется формула обратного преобразования Лапласа:

$$L^{-1}[F(s)] = f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c_0 - j\infty}^{c_0 + j\infty} F(s) e^{st} ds. \quad (2.5)$$

Преобразование Лапласа обладает следующими свойствами. Дифференцирование оригинала $f(t)$ по переменной t соответствует операции умножения изображения $F(s)$ на комплексную переменную s , а интегрирование оригинала $f(t)$ соответствует операции деления $F(s)$ на s . Покажем это. Выполним интегрирование (2.4) по частям. Пусть $u = e^{-st}$, $dv = f'(t) dt$, тогда $v = \int f'(t) dt = \int df(t) = f(t)$, $du = d(e^{-st}) = -s \cdot e^{-st} dt$ и

$$L[f'(t)] = uv \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} v du = f(t) e^{-st} \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = sF(s) - f(0). \quad (2.6)$$

Если начальное значение $f(0) = 0$, из (2.6) получаем

$$L[f'(t)] = sF(s). \quad (2.7)$$

Ясно, что $L[f''(t)] = s(sF(s)) = s^2 F(s)$.

Последовательно применяя формулы (2.4), (2.7) для вычисления изображений более высоких производных функции $f(t)$ легко установить, что изображение, например, k -й производной $f(t)$ при нулевых начальных значениях имеет вид

$$L[p^k f(t)] = s^k F(s). \quad (2.8)$$

Преобразование Лапласа (2.4) существует при выполнении следующих условий:

1. Функция $f(t)$ непрерывна или имеет конечное число точек разрыва первого рода для всех $t \geq 0$.

2. Функция $f(t) = 0$ для всех $t < 0$.

3. Скорость возрастания функции $f(t)$ ограничена, т.е. можно указать числа $M > 0$, $c_0 \geq 0$, при которых

$$f(t) < M \cdot e^{c_0 t}, \quad t > 0.$$

Можно показать, что интеграл Лапласа (2.5) при $\text{Re}(s) > c_0$ является абсолютно сходящимся (т.е. существует интеграл модуля подынтегрального выражения). Поэтому число c_0 называют абсциссой абсолютной сходимости. Для *затухающих* переходных процессов устойчивых систем абсцисса абсолютной сходимости равна нулю, при этом область существования преобразования Лапласа – правая полуплоскость комплексной переменной s (рис. 2.1).

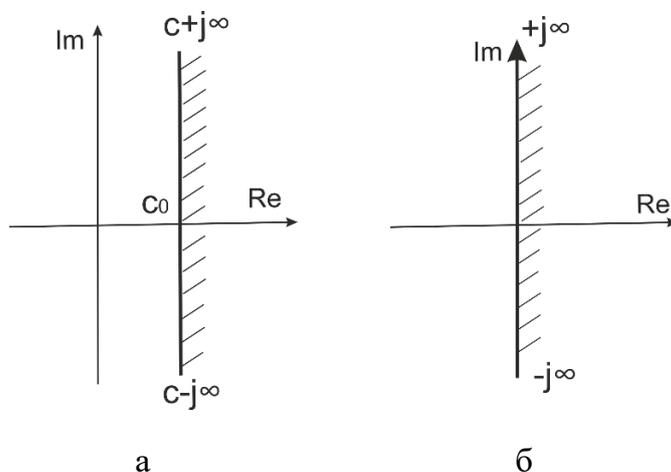


Рис. 2.1. Области существования преобразования Лапласа:
для $c_0 > 0$ – (а) и $c_0 = 0$ – (б)

2.3. Применение преобразования Лапласа для описания САУ

Пусть уравнение системы задано в операторной форме:

$$D(p)y(t) = M(p)x(t), \quad (2.9)$$

где $D(p)$, $M(p)$ – многочлены от p :

$$D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n;$$

$$M(p) = b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m.$$

Здесь p – оператор дифференцирования, $x(t)$ – входной, а $y(t)$ – выходной сигналы.

Предположив, что начальные условия нулевые подвергнем обе части уравнения преобразованию Лапласа. Получим

$$D(s)Y(s) = M(s)X(s), \quad (2.10)$$

где, в соответствии с (2.8)

$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n;$$

$$M(s) = b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m.$$

Из соотношения (2.10) следует, что

$$Y(s) = \frac{M(s)}{D(s)} X(s) = W(s) X(s), \quad (2.11)$$

где

$$W(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}. \quad (2.12)$$

Дробно-рациональная функция $W(s)$ совпадает с передаточной функцией (2.3) при замене в исходных многочленах $M(p)$, $D(p)$ оператора дифференцирования p на s . Таким образом, передаточную функцию, с одной стороны, можно определить как отношение входного оператора $M(p)$ к собственному оператору $D(p)$. С другой стороны, ее можно трактовать как отношение изображения по Лапласу выходной координаты системы к изображению по Лапласу входного воздействия *при нулевых начальных условиях*. Далее мы будем использовать операторное представление передаточной функции, которое мы формально ввели в (2.3), имея при этом в виду, что передаточная функция $W(p)$ всегда может быть представлена как отношение изображений по Лапласу входа и выхода системы формальной заменой p на s .

2.4. Структурные схемы и структурные преобразования

Описание звеньев систем передаточными функциями плодотворно используется для представления систем в виде структурных схем. Опираясь на детектирующее свойство направленного действия звеньев, система может быть описана как совокупность передаточных функций звеньев, составленных независимо друг от друга. При этом *структурная схема САУ* может быть представлена в виде блоков, соединенных стрелками, а каждому блоку ставится в соответствие своя *передаточная функция*. Стрелками показываються также приложенные к звеньям системы, задающие и возмущающие воздействия. На рис. 2.2 в качестве примера приведена структурная схема системы, функциональная схема которой была приведена на рис. 1.1.

Удобство представления системы в виде структурных схем состоит в наглядности. Кроме того, структурная схема может быть приведена к желаемому виду с использованием простых и очевидных правил преобразования. Рассмотрим эти правила.

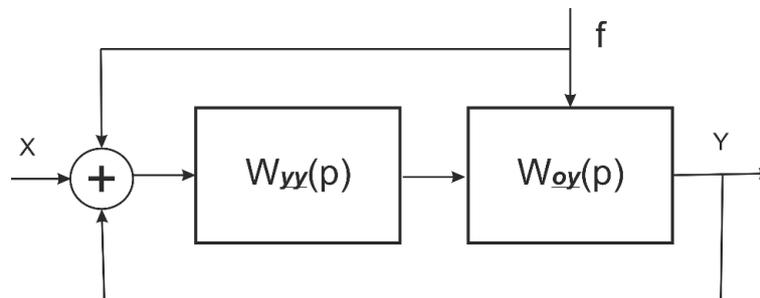


Рис. 2.2. Структурная схема системы

Передаточная функция последовательного соединения, например, n звеньев равна произведению передаточных функций этих звеньев:

$$W(p) = \prod_i W_i(p). \quad (2.13)$$

Это правило следует из свойства направленного действия звеньев.

Передаточная функция параллельного соединения звеньев в соответствии с *принципом суперпозиции* определяется как сумма передаточных функций звеньев:

$$W(p) = \sum_i W_i(p). \quad (2.14)$$

При исследовании систем часто необходимо осуществлять переход от разомкнутой системы к замкнутой системе, охваченной обратной связью. Пусть система с обратной связью имеет вид, показанный на рис. 2.3, где $W_1(p)$ – передаточная функция прямой цепи, а $W_2(p)$ – передаточная функция цепи обратной связи. С использованием обозначений, принятых на этой схеме, соотношения, описывающие замкнутую систему, имеют вид

$$y = W_1(p)(x \mp x_{oc}); \quad (2.15)$$

$$x_{oc} = W_2(p)y, \quad (2.16)$$

где знак « \mp » соответствует отрицательной, а « $+$ » – положительной обратной связи.

После подстановки (2.16) в (2.15) получаем

$$y = W_1(p)(x \mp W_2(p)y) = W_1(p)x \mp W_1(p)W_2(p)y$$

или

$$(1 \pm W_1(p)W_2(p))y = W_1(p)x. \quad (2.17)$$

Тогда передаточная функция замкнутой системы $\Phi(p)$ с учетом (2.17) запишется в виде

$$\Phi(p) = \frac{y}{x} = \frac{W_1(p)}{1 \pm W_1(p)W_2(p)}. \quad (2.18)$$

Если разомкнутая система охвачена единичной обратной связью ($W_2(p)=1$)

$$\Phi(p) = \frac{W_0(p)}{1 \pm W_0(p)}. \quad (2.19)$$

Здесь отрицательной обратной связи соответствует знак «плюс», а знак «минус» – положительной обратной связи.

Приведенные правила используются для объединения групп простейших звеньев в общую передаточную функцию системы. Если вдобавок требуется преобразовать многоконтурную схему в одноконтурную применяются

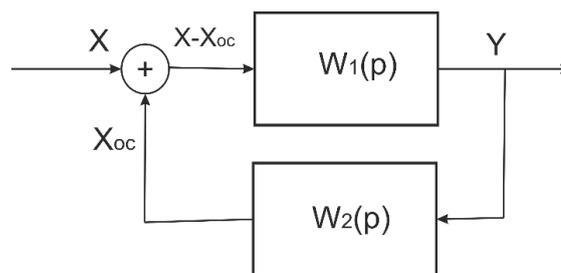


Рис 2.3. Схема системы с обратной связью

правила переноса воздействий из одной точки в другую. Поскольку существует огромное число структурных схем с разнообразными связями, рассмотреть все возможные варианты преобразований не представляется возможным. В каждом конкретном случае приходится проявлять изобретательность. При построении этих преобразований следует соблюдать основной принцип: сохранение неизменными сигналов на выходе системы после преобразования.

Лекция 3. ВРЕМЕННЫЕ И ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗВЕНА

3.1. Переходная и весовая функции звена

Переходная функция звена – это его реакция на единичное ступенчатое воздействие (рис. 3.1):

$$1(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } t \geq 0, \\ 0, & \text{при } t < 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Переходная функция обозначается $h(t)$.

Таким образом, $h(t)$ – это выходной сигнал $y(t)$ при подаче на вход сигнала $x(t) = 1(t)$.

С использованием формулы (2.4) предыдущего раздела можно записать преобразование Лапласа этой функции. Для единичной ступенчатой функции абсцисса абсолютной сходимости равна нулю (см. свойство 3 преобразования Лапласа), поэтому изображение этой функции при $\text{Re}(s) > 0$:

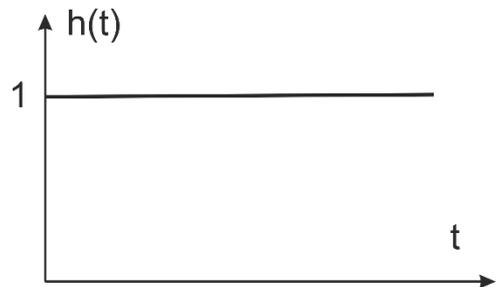


Рис. 3.1. График единичной ступенчатой функции

$$L[1(t)] = \int_0^{\infty} 1(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{e^{-st}}{s} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s}. \quad (3.2)$$

Импульсная переходная функция – это реакция звена на единичный импульс. Единичный импульс называют дельта-функцией. Математически она определяется формулами:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & \text{при } t = 0, \\ 0, & \text{при } t \neq 0; \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (3.4)$$

Дельта-функция связана с единичной ступенчатой функцией:

$$\delta(t) = 1'(t). \quad (3.5)$$

Из (3.5), с учетом (2.7), можно записать изображение дельта-функции:

$$L[\delta(t)] = L[1'(t)] = sL[1(t)] = s \cdot \frac{1}{s} = 1. \quad (3.6)$$

Таким образом, весовая функция $w(t)$ – это выходной сигнал звена $y(t)$ при подаче на вход сигнала $x(t) = \delta(t)$. Импульсную переходную функцию часто называют также *весовой* функцией и обозначают $w(t)$.

По аналогии с соотношением связи входных воздействий (3.5) выходные реакции на эти воздействия – весовая и переходная функции, связаны аналогичными соотношениями:

$$w(t) = h'(t); \quad (3.7)$$

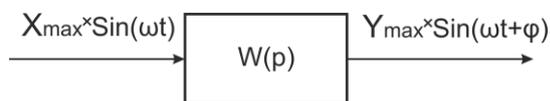
$$h(t) = \int_0^t w(t) dt. \quad (3.8)$$

3.2. Понятие частотной характеристики

Частотные характеристики звена получаются путем подачи на вход звена гармонического сигнала (рис. 3.2). При этом, в силу линейности, на выходе будет также гармонический сигнал, но с другой амплитудой и фазой.

Пусть на вход звена подано гармоническое воздействие

$$x = x_{\max} \sin \omega t, \quad (3.9)$$



где x_{\max} – амплитуда, ω – круговая частота.

Рис. 3.2. Схема эксперимента для получения частотных характеристик

По окончании переходного процесса на выходе звена будут гармонические колебания с той же частотой, отличающиеся амплитудой и фазой:

$$y = y_{\max} \sin(\omega t + \varphi), \quad (3.10)$$

где y_{\max} – амплитуда, φ – фазовый сдвиг между входом и выходом.

Задавая сигналы с различными частотами, можно построить совокупность точек, которые связывают зависимость амплитуды и фазы от частоты. Множества значений $A = y_{\max} / x_{\max}$ и φ образуют, соответственно, амплитудную частотную характеристику (АЧХ) – $A(\omega)$ и фазовую частотную характеристику (ФЧХ) – $\varphi(\omega)$.

В теории управления используют также логарифмические амплитудные частотные характеристики (ЛАЧХ) и логарифмические фазовые частотные характеристики (ЛФЧХ). Часто слово частотные подразумевается и эти характеристики обозначают сокращенной аббревиатурой – ЛАХ и ЛФХ. Удобство использования этих характеристик связано со свойствами ЛАХ. Дело в том, что при последовательном соединении амплитудная характеристика цепи звеньев равна произведению амплитудных частотных характеристик звеньев:

$$A = \prod_{i=1}^n A_i. \quad (3.11)$$

Это следует из того, что по определению

$$A_i = \frac{x_{\max}(i)}{x_{\max}(i-1)}; \quad i = \overline{2, n}; \quad A_n = \frac{y_{\max}(n)}{x_{\max}(n)}; \quad A = \frac{y_{\max}(n)}{x_{\max}(1)}.$$

При этом общая ЛАХ цепочки звеньев определяется простым суммированием:

$$\lg A = \sum_{i=1}^n \lg A_i. \quad (3.12)$$

ЛАХ обозначается буквой L и определяется в виде зависимости $L = 20 \lg A$ от $\lg \omega$, а ЛФХ – в виде зависимости φ от $\lg \omega$. Единицей измерения ЛАХ является децибел – одна десятая бела. Бел – это единица измерения десятичного логарифма коэффициента усиления мощности сигнала, т.к. $\lg 10 = 1$, то 1 бел соответствует усилению мощности в 10 раз. Поскольку мощность сигнала пропорциональна квадрату амплитуды сигнала, то $\lg A^2 = 2 \lg A$, то усиление, выраженное в белах, равно $2 \lg A$. Соответственно в децибелах оно равно $20 \lg A$.

3.3. Амплитудно-фазовая частотная характеристика

Амплитудную и фазовую частотные характеристики можно объединить в одну – амплитудно-фазовую частотную характеристику (АФЧХ), используя $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ в качестве полярных координат (рис. 3.3). АФЧХ можно строить в комплексной плоскости. Если начало полярной системы координат совпадает с точкой $(0, j0)$ комплексной плоскости, а вектор $A(0)$ – с вещественной осью, координатами будут проекции $U(\omega)$ и $V(\omega)$ вектора $A(\omega)$ на соответствующие оси. Зависимость $U(\omega)$ называют *вещественной*, а $V(\omega)$ – *мнимой* частотной характеристикой.

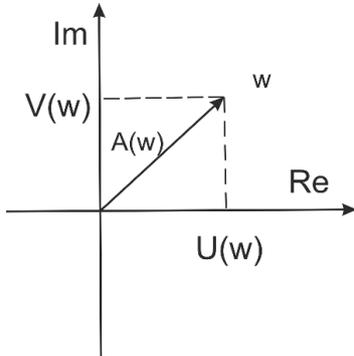


Рис. 3.3. Представление АФЧХ для фиксированной частоты ω

Для уравнения системы (2.9), заданного в операторной форме:

$$D(p)y(t) = M(p)x(t), \quad (3.13)$$

применяя к его обоим частям преобразование Лапласа ранее, мы получили выражение (2.11) для передаточной функции и изображения выхода системы:

$$\Phi(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} = \frac{Y(s)}{X(s)}; \quad (3.14)$$

$$Y(s) = \Phi(s)X(s). \quad (3.15)$$

Для устойчивых систем абсцисса абсолютной сходимости c_0 комплексной переменной $s = c_0 + j\omega$ равна нулю. Поэтому частотная передаточная функция и частотное представление выходного сигнала могут быть получены из (2.10), (2.11) простой заменой $s = j\omega$:

$$\Phi(j\omega) = \frac{b_0 (j\omega)^m + b_1 (j\omega)^{m-1} + \dots + b_{m-1} (j\omega) + b_m}{a_0 (j\omega)^n + a_1 (j\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1} (j\omega) + a_n} = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}; \quad (3.16)$$

$$Y(j\omega) = \Phi(j\omega)X(j\omega). \quad (3.17)$$

Нетрудно заметить, что при переходе от изображений по Лапласу к спектрам сигналов и частотным передаточным функциям вида (3.16) имеют

место свойства аналогичные соотношениям (2.7), (2.8): при дифференцировании сигнала во временной области спектральная характеристика умножается на $j\omega$.

Частотную передаточную функцию (3.16), как всякую функцию комплексной переменной, можно представить в показательной форме

$$\Phi(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} \quad (3.18)$$

и в алгебраической форме

$$\Phi(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega), \quad (3.19)$$

где $U(\omega)$ и $V(\omega)$ – указанные выше вещественная и мнимая частотные характеристики, связаны с амплитудной и фазовой характеристиками соотношениями

$$A(\omega) = |\Phi(j\omega)| = \sqrt{U(\omega)^2 + V(\omega)^2}; \quad (3.20)$$

$$\varphi(\omega) = \text{arctg}(-V(\omega)/U(\omega)); \quad (3.21)$$

$$U(\omega) = A(\omega)\cos\varphi(\omega); \quad (3.22)$$

$$V(\omega) = A(\omega)\sin\varphi(\omega). \quad (3.23)$$

Амплитудно-фазовую характеристику (АФХ) можно представить в виде кривой на комплексной плоскости (рис. 3.4). Каждая точка АФХ соответствует определенному значению частоты (рис. 3.3), а геометрическое место точек концов вектора амплитудно-частотной характеристики при изменении частоты от 0 до ∞ – называется *годографом*. Покажем справедливость представления $\Phi(j\omega)$ в виде (3.18).

Установившиеся колебания на входе и выходе системы зададим в виде гармонических функций:

$$x(t) = x_{\max} e^{j\omega t}; \quad (3.24)$$

$$y(t) = y_{\max} e^{j(\omega t + \varphi)}. \quad (3.25)$$

Подставим в (3.13) входной и выходной сигналы из (3.24) и (3.25). С учетом того, что производные $x(t)$ и $y(t)$ k -го порядка опре-

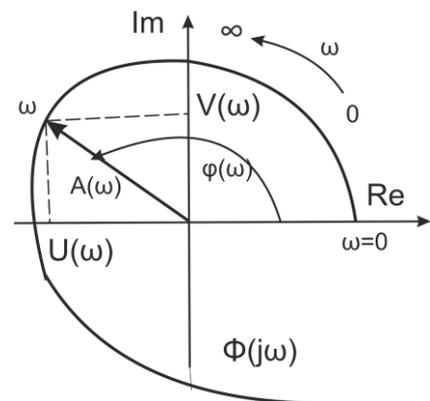


Рис. 3.4. Представление АФЧХ для изменяющейся частоты ω

деляются как $p^k(x_{\max} e^{j\omega t}) = (j\omega)^k x_{\max} e^{j\omega t}$, $p^k(y_{\max} e^{j(\omega t + \varphi)}) = (j\omega)^k y_{\max} e^{j(\omega t + \varphi)}$, соответственно, имеем

$$D(j\omega) y_{\max} e^{j(\omega t + \varphi)} = M(j\omega) x_{\max} e^{j\omega t}.$$

Откуда для произвольных значений ω и φ

$$\Phi(j\omega) = \frac{M(j\omega)}{D(j\omega)} = \frac{y_{\max} e^{j(\omega t + \varphi)}}{x_{\max} e^{j\omega t}} = \frac{y_{\max}}{x_{\max}} e^{j\varphi} = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}. \quad (3.26)$$

3.4. Связь частотных и временных характеристик

Зная передаточную функцию системы $W(p)$ и операторное представление $X(p)$ входного воздействия, с использованием формальной замены p на s , можно по формуле (2.11) найти изображение $Y(s)$ выходной координаты системы. В частности, для построенных выше (см. формулы (3.2), (3.6)) изображений для входных воздействий в виде единичной ступенчатой функции $-1/s$ и дельта функции -1

$$Y(s) = \Phi(s) \frac{1}{s}; \quad (3.27)$$

$$Y(s) = \Phi(s) \cdot 1. \quad (3.28)$$

Переходя от изображения $Y(s)$ к оригиналу в соответствии с (2.5) можно получить выходной сигнал $y(t)$. В данном примере это будут переходная и весовая функции.

Выше мы уже отмечали, что для устойчивых систем область существования преобразования Лапласа – правая полуплоскость комплексной переменной s . В этом случае переменная s является чисто мнимой: $s = j\omega$, а преобразование Лапласа превращается в одностороннее преобразование Фурье, определяемое формулами

$$F(j\omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt; \quad (3.29)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-j\infty}^{+j\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (3.30)$$

Поэтому если известно изображение сигнала по Лапласу, спектр этого сигнала определяется простой заменой переменной Лапласа $s = j\omega$. В частности, в соответствии с (3.27), (3.28) спектр выходного сигнала при подаче на вход единичного ступенчатого воздействия

$$Y_h(j\omega) = \Phi(j\omega) \frac{1}{j\omega}, \quad (3.31)$$

а спектр сигнала на выходе при входном воздействии в виде дельта-функции

$$Y_w(j\omega) = \Phi(j\omega). \quad (3.32)$$

Представленные соотношения для $Y_h(j\omega)$, $Y_w(j\omega)$ являются спектрами переходной функции и весовой функции, поэтому применяя к ним обратное преобразование Фурье (3.30) получаем

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(j\omega)}{j\omega} e^{j\omega t} d\omega; \quad (3.33)$$

$$w(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (3.34)$$

Выражение (3.34) для весовой функции можно также получить из (3.33) с использованием следующего свойства: умножению спектральной характеристики на $j\omega$ соответствует операция дифференцирования во временной области, поэтому

$$\frac{dh(t)}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (3.35)$$

Как и следовало ожидать $dh(t)/dt = w(t)$.

Лекция 4. ТИПОВЫЕ ЗВЕНЬЯ САУ

4.1. Аперiodическое звено первого порядка

Уравнение звена в операторной форме

$$(Tp + 1)y = kx. \quad (4.1)$$

Передаточная функция

$$W(p) = \frac{k}{Tp + 1}. \quad (4.2)$$

Переходная функция является решением уравнения (4.1) при $x = 1(t)$.

Решение:

Характеристическое уравнение

$$Tp + 1 = 0$$

имеет один вещественный корень $p_1 = -\frac{1}{T}$, следовательно общий интеграл имеет вид

$$y(t) = C_1 e^{-\frac{1}{T}t}.$$

Подставив полученное решение однородного уравнения в исходное уравнение (4.1) с учетом того, что $x = 1$, производная $\dot{y}(0) = 0$, а $y(0) = C_1$ получаем $C_1 = -k$.

Общее решение является суммой решения однородного уравнения и частного решения:

$$h(t) = k(1 - e^{-t/T}). \quad (4.3)$$

Весовая функция

$$w(t) = h'(t) = \frac{k}{T} e^{-t/T}. \quad (4.4)$$

Амплитудно-фазовая частотная передаточная функция

$$W(j\omega) = \frac{k}{1 + jT\omega} = \frac{k - jkT\omega}{1 + T^2\omega^2} = U(\omega) + jV(\omega), \quad (4.5)$$

где
$$U(\omega) = \frac{k}{1+T^2\omega^2} \text{ и } V(\omega) = -\frac{kT\omega}{1+T^2\omega^2};$$

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{U(\omega)^2 + V(\omega)^2} = \frac{k}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}; \quad (4.6)$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{V(\omega)}{U(\omega)} = -\arctg T\omega. \quad (4.7)$$

Логарифмическая амплитудная частотная характеристика

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{1+T^2\omega^2}. \quad (4.8)$$

4.2. Пропорциональное (усилительное) звено

Это звено является частным случаем апериодического звена при $T = 0$:

$$y = kx. \quad (4.9)$$

Нетрудно заметить, что в этом случае

$$W(p) = k; \quad (4.10)$$

$$h(t) = k \cdot 1(t); \quad (4.11)$$

$$W(j\omega) = k. \quad (4.12)$$

4.3. Статическое колебательное звено второго порядка

Уравнение звена в операторной форме

$$(T^2 p^2 + 2T\xi p + 1)y = kx. \quad (4.13)$$

Передаточная функция

$$W(p) = \frac{k}{Tp^2 + 2T\xi p + 1}. \quad (4.14)$$

Переходную функцию найдем, решая уравнения (4.13) при $x = 1(t)$.

1-й шаг – находим корни характеристического уравнения

$$T^2 p^2 + 2T\xi p + 1 = 0;$$

$$p_{1,2} = \frac{1}{T} \left(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1} \right).$$

Предположим, что $0 < \xi < 1$, тогда имеем пару комплексно сопряженных корней $p_1 = \alpha + j\beta$, $p_2 = \alpha - j\beta$, где

$$\alpha = -\frac{\xi}{T}; \quad \beta = \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{T}. \quad (4.15)$$

При этом решение соответствующего однородного уравнения имеет вид

$$y_o = e^{\alpha t} (C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t). \quad (4.16)$$

При построении переходного процесса, мы всегда предполагаем, что при $t = 0$ выходная координата и ее производные равны нулю:

$$y(0) = 0; \quad \dot{y}(0) = 0; \quad \ddot{y}(0) = 0.$$

Подставляя решение (4.16) в исходное уравнение (4.13) при $t = 0$ получаем

$$C_1 = k. \quad (4.17)$$

Еще одно уравнение

$$0 = \alpha C_1 + C_2 \beta \quad (4.18)$$

запишем, приравняв к нулю производную (4.16):

$$\dot{y}_o = \alpha e^{\alpha t} (C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t) + e^{\alpha t} (-C_1 \beta \sin \beta t + C_2 \beta \cos \beta t).$$

Из (4.17) с учетом (4.16)

$$C_2 = -\frac{\alpha}{\beta} C_1 = -\frac{\alpha}{\beta} k. \quad (4.19)$$

Следовательно

$$y_o = \frac{k}{\beta} e^{\alpha t} (\beta \cos \beta t - \alpha \sin \beta t). \quad (4.20)$$

Общее решение равно сумме решений соответствующего однородного уравнения и частного решения:

$$y = k - \frac{k}{\beta} e^{\alpha t} (\beta \cos \beta t - \alpha \sin \beta t) = k \left(1 - \frac{e^{\alpha t}}{\beta} (\beta \cos \beta t - \alpha \sin \beta t) \right). \quad (4.21)$$

Соотношение (4.20) можно преобразовать к виду

$$y = k \left[1 - \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\beta} e^{\alpha t} \sin \left(\beta t + \arctg \frac{\beta}{\alpha} \right) \right]. \quad (4.22)$$

Весовая функция

$$w(t) = h'(t) = \frac{k}{T} e^{-t/T}. \quad (4.23)$$

Амплитудно-фазовая частотная передаточная функция

$$W(j\omega) = \frac{k}{(1 - T^2 \omega^2) + j2T\xi\omega} = \frac{k(1 - T^2 \omega^2) - jk2T\xi\omega}{(1 + T^2 \omega^2)^2 + 4T^2 \xi^2 \omega^2} = U(\omega) + jV(\omega), \quad (4.24)$$

$$\text{где } U(\omega) = \frac{k(1 - T^2 \omega^2)}{(1 + T^2 \omega^2)^2 + 4T^2 \xi^2 \omega^2} \text{ и } V(\omega) = -\frac{k2T\xi\omega}{(1 + T^2 \omega^2)^2 + 4T^2 \xi^2 \omega^2};$$

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{U(\omega)^2 + V(\omega)^2} = \frac{k\sqrt{(1 - T^2 \omega^2)^2 + 4T^2 \xi^2 \omega^2}}{(1 + T^2 \omega^2)^2 + 4T^2 \xi^2 \omega^2}; \quad (4.25)$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{V(\omega)}{U(\omega)} = \arctg -\frac{2T\xi\omega}{(1 - T\omega^2)}. \quad (4.26)$$

Логарифмическая амплитудная частотная характеристика

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \frac{\sqrt{(1 - T^2 \omega^2)^2 + 4T^2 \xi^2 \omega^2}}{(1 + T^2 \omega^2)^2 + 4T^2 \xi^2 \omega^2}. \quad (4.27)$$

4.4. Идеальное интегрирующее звено

Уравнение

$$p y = k x \quad (4.28)$$

или в интегральной форме

$$y = \frac{k}{p} x = k \int_0^t x \cdot dt + x_0. \quad (4.29)$$

Переходная функция

$$h(t) = k \int_0^t 1 \cdot dt = kt. \quad (4.30)$$

Весовая функция

$$w(t) = h'(t) = k. \quad (4.31)$$

Передаточная функция

$$W(p) = \frac{k}{p}. \quad (4.32)$$

Амплитудно-фазовая частотная характеристики

$$W(j\omega) = \frac{k}{j\omega} = -j \frac{k}{\omega}. \quad (4.33)$$

Амплитудная и фазовая характеристики соответственно

$$A(\omega) = \frac{k}{\omega}; \quad (4.34)$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \left(\frac{-k / \omega}{0} \right) = -\frac{\pi}{2}. \quad (4.35)$$

ЛАХ

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{k}{\omega} = 20 \lg k - 20 \lg \omega. \quad (4.36)$$

4.5. Идеальное дифференцирующее звено

Уравнение

$$y = kpx. \quad (4.37)$$

Переходная функция

$$h(t) = k \frac{d1(t)}{dt} = k\delta(t). \quad (4.38)$$

Передаточная функция

$$W(p) = kp. \quad (4.39)$$

Амплитудно-фазовая частотная характеристика

$$W(j\omega) = jk\omega. \quad (4.40)$$

Амплитудная и фазовая характеристики соответственно

$$A(\omega) = k\omega; \quad (4.41)$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}\left(\frac{k\omega}{0}\right) = +\frac{\pi}{2}. \quad (4.42)$$

ЛАХ

$$L(\omega) = 20\lg k\omega = 20\lg k + 20\lg \omega. \quad (4.43)$$

Идеальное дифференцирующее звено практически нереализуемо. Любое устройство дифференцирования сигнала обладает инерционностью. Поэтому уравнение реального дифференцирующего звена имеет вид

$$(Tp + 1)y = kpx. \quad (4.44)$$

Это уравнение можно переписать в виде системы уравнений:

$$z = kpx;$$

$$(Tp + 1)y = z.$$

Это означает, что реальное дифференцирующее звено можно представить как последовательное соединение идеального дифференцирующего и апериодического звеньев.

Лекция 5. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ

5.1. Понятие устойчивости системы

Устойчивость – это свойство системы возвращаться в установившийся режим после выхода из него в результате какого-либо воздействия. Известно, что решение линейного дифференциального уравнения

$$D(p)x(t) = M(p)g(t), \quad (5.1)$$

в общем виде состоит из двух составляющих:

$$x(t) = x_{уст}(t) + x_n(t),$$

где $x_{уст}(t)$ – частное решение (установившийся процесс);

$x_n(t)$ – общее решение соответствующего однородного уравнения

$$D(p)x(t) = 0, \quad (5.2)$$

описывающее переходный процесс в системе. Таким образом, система будет устойчива, если переходный процесс $x_n(t)$, вызванный каким-либо воздействием, является затухающим.

Решение уравнения (5.2) порядка n в случае, когда корни характеристического уравнения имеют, например, r вещественных – $\lambda_i, i = \overline{1, r}$ и l комплексно-сопряженных пар – $\lambda_{i, i+1} = \alpha_i \pm j\beta_i, i = \overline{1, l}$

корней ($r + 2l = n$) имеет вид

$$x(t) = \sum_{i=1}^r C_i e^{\lambda_i t} + \sum_{i=1}^l C_i e^{\alpha_i t} \sin(\beta_i t + \varphi_i). \quad (5.3)$$

Как видно из (5.3) переходная составляющая будет затухать, если все вещественные корни λ_i и/или вещественные части α_i комплексно-сопряженных корней отрицательны (в случае равенства нулю система на границе устойчивости). Другими

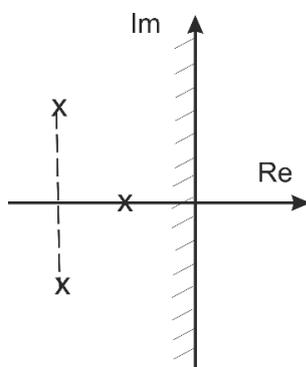


Рис. 5.1. Пример расположения корней устойчивой системы

словами, условием устойчивости является расположение всех корней характеристического уравнения в левой полуплоскости комплексной плоскости (рис. 5.1).

5.2. Критерий устойчивости Михайлова

В соответствии со сказанным для анализа устойчивости достаточно рассмотреть левую часть уравнения (5.1) или однородное уравнение (5.2). Запишем полином $D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n$ в виде

$$D(p) = a_0 (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n), \quad (5.4)$$

где $p_i, i = \overline{1, n}$ – корни характеристического уравнения. Подставляя в этот многочлен $p = j\omega$ имеем

$$D(j\omega) = a_0 (j\omega - p_1)(j\omega - p_2) \dots (j\omega - p_n). \quad (5.5)$$

$D(j\omega)$ – называют годографом Михайлова.

Рассмотрим отдельный сомножитель $(j\omega - p_i)$. Если p_i – вещественный отрицательный корень, то при $\omega = 0$ этот сомножитель отобразится точкой на вещественной положительной полуоси. При изменении ω в интервале $[0, \infty]$ произойдет поворот вектора, представляющего комплексное число $(j\omega - p_i)$ на угол $\pi/2$. $[0, \pi/2]$, т.е. изменение аргумента $\Delta \arg(j\omega - p_i) = \pi/2$ (рис. 5.2).

Нетрудно заметить (рис. 5.3), что в случае, когда $p_{i,i+1}$ – пара комплексно-сопряженных корней, таких, что $\alpha < 0$, то для пары соответствующих множителей $(j\omega - \alpha - j\beta), (j\omega - \alpha + j\beta)$

$$\Delta \arg(\alpha + j\omega) + \arg(\alpha - j\omega) = \pi.$$

Таким образом, если все вещественные и комплексно-сопряженные корни всех сомножителей в (5.5) находятся в левой полуплоскости, то

$$\Delta \arg D(j\omega) = \sum_{i=1}^n \Delta \arg D(j\omega - p_i) = n\pi/2. \quad (5.6)$$

Теперь можно сформулировать критерий Михайлова.

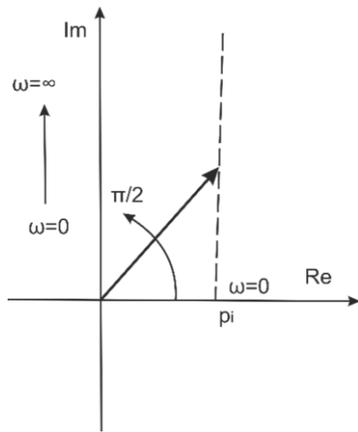


Рис. 5.2. Изменение аргумента множителя $(j\omega - p_i)$

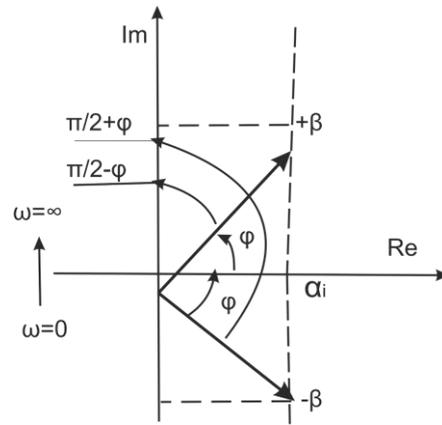


Рис. 5.3. Изменение аргумента пары сопряженных корней

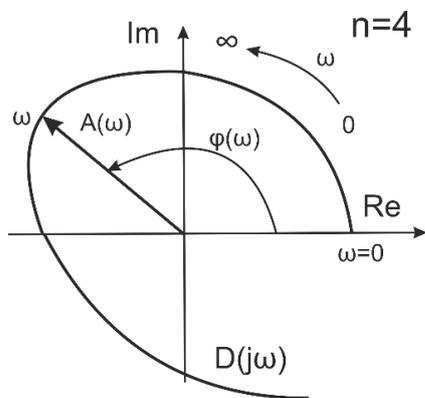


Рис. 5.4. Пример годографа устойчивой системы при $n = 4$

Система устойчива, если годограф $D(j\omega)$, начинаясь на действительной положительной полуоси, охватывает против часовой стрелки начало координат, проходя последовательно n квадрантов.

Если система на границе устойчивости, годограф Михайлова пройдет через начало координат. Пример годографа устойчивой системы при $n = 4$ приведен на рис. 5.4.

5.3. Частотный критерий устойчивости Найквиста

Рассмотрим замкнутую систему (систему с обратной связью), показанную на рис. 5.3. Пусть передаточная функция разомкнутой части системы

$$W(p) = \frac{K(p)}{Q(p)}. \quad (5.7)$$

Тогда передаточная функция соответствующей замкнутой системы

$$\Phi(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)} = \frac{K(p)}{Q(p) + K(p)}. \quad (5.8)$$

С другой стороны, с использованием (5.7), (5.8) можно также записать

$$1 + W(p) = \frac{W(p)}{\Phi(p)} = \frac{Q(p) + K(p)}{Q(p)}. \quad (5.9)$$

Предположим, порядок характеристического полинома разомкнутой системы $Q(p)$ равен n . Поскольку порядок полинома $K(p)$ не может превышать порядка полинома $Q(p)$ ясно, что порядок характеристического полинома замкнутой системы $D(p) = Q(p) + K(p)$ также равен n . Чтобы замкнутая система была устойчива, вектор $D(j\omega)$ должен повернуться на угол $n\pi / 2$.

Пусть разомкнутая система неустойчива и характеристическое уравнение $Q(p) = 0$ имеет r корней с положительной вещественной частью. Тогда изменение аргумента $Q(j\omega)$ определится как разность угла $(n - r) \cdot \pi / 2$, соответствующего повороту в положительном (против часовой стрелки) направлении и угла $r \cdot \pi / 2$ в отрицательном направлении (по часовой стрелке):

$$\Delta \arg Q(j\omega) = (n - r) \frac{\pi}{2} - r \frac{\pi}{2} = n \frac{\pi}{2} - 2r \frac{\pi}{2}.$$

Ясно, что при этом изменение аргумента вектора $D(j\omega)Q^{-1}(j\omega)$:

$$\Delta \arg \frac{D(j\omega)}{Q(j\omega)} = \Delta \arg D(j\omega) - \Delta \arg Q(j\omega) = (n - n + 2r) \frac{\pi}{2} = r\pi. \quad (5.10)$$

При переносе единицы в (5.9) вправо все точки годографа сдвигаются на -1 . С учетом этого критерий Найквиста формулируется следующим образом. *Для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой цепи охватывала точку $(-1, j0)$ против часовой стрелки на угол $r\pi$, где r – число полюсов с положительной вещественной частью в передаточной функции разомкнутой системы.*

В случае, когда разомкнутая система устойчива $r = 0$, условие устойчивости замкнутой системы сводится к требованию, чтобы АФЧХ разомкнутой системы не охватывала точку $(-1, j0)$.

5.4. Алгебраический критерий устойчивости Гурвица

Приведенные выше критерии требуют либо построения АФЧХ, либо определения корней характеристического уравнения. Для систем высокого порядка это представляет серьезные трудности. Поэтому для анализа устойчивости используются также алгебраические критерии, не требующие нахождения корней. Рассмотрим критерий Гурвица.

Пусть характеристический полином имеет вид

$$D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n. \quad (5.11)$$

Составим из коэффициентов этого многочлена определитель:

$$\Delta_n = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & \cdot & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdot & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n-2} & a_n \end{bmatrix}. \quad (5.12)$$

Это так называемая матрица Гурвица. Схема ее формирования проста: на главной диагонали все коэффициенты по возрастанию кроме a_0 . Первая строка содержит все нечетные коэффициенты до исчерпания и завершается нулями. Вторая строка содержит все четные коэффициенты и также завершается нулями. Третья строка получается из первой, а четвертая из второй сдвигом вправо на один элемент. Аналогично сдвигом получают остальные строки.

Критерий Гурвица. Для устойчивости необходимо, чтобы все определители Гурвица, построенные из диагональных миноров, были положительны:

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \dots, \Delta_n > 0. \quad (5.13)$$

Можно показать, что в общем случае необходимым условием устойчивости является требование положительности всех коэффициентов уравнения. Если это требование не выполняется, то система точно неустойчива. Но положительность всех коэффициентов не гарантирует устойчивости. Поэтому далее необходимо применять необходимые и достаточные условия (5.13).

5.5. Построение областей устойчивости методом D-разбиения

При синтезе САУ часто интересно знать область изменения параметров, при которых система устойчива. Тогда строят область устойчивости в пространстве искомых параметров. Первый шаг состоит в определении границ этих областей. Для этого используется метод *D-разбиения*.

Используется свойство системы на границе области изменять устойчивость на неустойчивость. По критерию Михайлова система находится на границе устойчивости, когда годограф $D(j\omega) = U(j\omega) + jV(j\omega)$ проходит через начало координат. Поэтому уравнения границы устойчивости в пространстве параметров, например, k , T можно записать в виде

$$U(k, T, \omega) = 0; \quad (5.14)$$

$$V(k, T, \omega) = 0. \quad (5.15)$$

Исключив из этих уравнений параметр ω , можно получить уравнение границы устойчивости, связывающее параметры k , T . На практике часто проще построить область устойчивости, задавая последовательность значений параметра ω от 0 до ∞ .

При построении границ в пространстве параметров может образоваться несколько замкнутых областей. Второй шаг заключается в определении какие из них являются областями устойчивости. Для этого используется следующая методика. Составляется определитель:

$$\Delta = \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial k} & \frac{\partial U}{\partial T} \\ \frac{\partial V}{\partial k} & \frac{\partial V}{\partial T} \end{bmatrix}. \quad (5.16)$$

Граничная линия штрихуется слева при движении по этой линии в сторону возрастающих значений ω , если знак определителя Δ в (5.16) положителен и справа – в противном случае.

При использовании для определения границ областей устойчивости критерия Найквиста, соответствующие уравнения имеют вид.

$$U(k, T, \omega) = -1; \quad (5.17)$$

$$V(k, T, \omega) = 0. \quad (5.18)$$

где $U(k, T, \omega)$ и $V(k, T, \omega)$ – действительная и мнимая части АФЧХ разомкнутой системы – $W(j\omega)$. Эти уравнения соответствуют прохождению годографа разомкнутой системы через точку $(-1, j0)$. При этом будут получены те же границы областей, как и при помощи критерия Михайлова.

Лекция 6. КРИТЕРИИ КАЧЕСТВА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

6.1. Показатели качества переходных характеристик САУ

В предыдущем разделе мы рассмотрели критерии устойчивости систем. Все рассмотренные выше критерии являются необходимыми и достаточными. Поэтому при выборе критерия устойчивости обычно руководствуются доступной исходной информацией и соображениями вычислительного характера.

После того как проанализирована устойчивость САУ необходимо обеспечить требуемые свойства переходных процессов: точность в установившемся режиме и качество переходного процесса (длительность, колебательность). Приступая к решению этой задачи, мы должны сформулировать цель, которую мы хотим достичь. Поэтому необходимо проанализировать и выбрать формальные показатели, обеспечивающие достижение приемлемых значений указанных характеристик. Рассмотрим важнейшие показатели качества переходных процессов.

Длительность (время протекания) переходного процесса характеризует быстродействие системы и определяется как интервал времени от начала переходного процесса до момента, начиная с которого отклонение не превышает допустимого значения, определяемого заданной точностью.

Колебательность переходного процесса обычно определяется числом колебаний за время переходного процесса. Колебательность оценивают отношением соседних максимумов (в %).

Максимальное отклонение в переходный период (*перерегулирование*) обычно определяется относительно установившегося значения (в %):

$$\sigma = \frac{x_{\max} - x_{уст}}{x_{уст}} 100\% . \quad (6.1)$$

Переходный процесс в системе определяется как сумма частного и общего решений. Поэтому его качество зависит как от собственных свойств

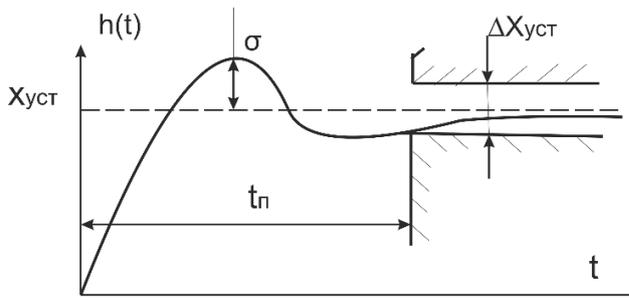


Рис. 6.1. Иллюстрация показателей качества переходного процесса

системы (корней характеристического уравнения), так и от внешних воздействий и начальных условий. На рис. 6.1 показаны перечисленные выше характеристики переходного процесса.

Кривая переходного процесса, полученная путем решения

дифференциального уравнения, дает полное представление о его качестве. Однако при синтезе систем необходимо иметь возможность судить об основных показателях переходных процессов без построения самих процессов. Важнейшие критерии качества переходных процессов, основанные на косвенных признаках: *корневые* оценки качества, *частотные* оценки, *интегрированные* оценки.

6.2. Корневые оценки качества переходных процессов

6.2.1. Оценка длительности переходного процесса

Длительность переходного процесса характеризуется показателем *степени устойчивости* – η , который определяется как расстояние от мнимой оси до ближайшего корня (рис. 6.2, а). Если η – вещественный корень: $\eta < 0$, в переходном процессе ему соответствует составляющая вида

$$x_\eta = C_\eta e^{-\eta t}. \quad (6.2)$$

В начальный момент при $t_\eta = 0$ $x_\eta(0) = C_\eta$. Из (6.2) видно, что с течением времени x_η убывает. Зададимся некоторым числом Δ (например $\Delta=0.05$), показывающим долю исходного значения $x_\eta(0) = C_\eta$, при котором переходный процесс можно считать завершившимся (рис. 6.2, б). Запишем равенство (6.2) для этого момента времени:

$$x_\eta(t_\eta) = C_\eta e^{-\eta t_\eta} = C_\eta \Delta. \quad (6.3)$$

Откуда $e^{-\eta t_\eta} = \Delta$ или

$$t_\eta = \frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{\Delta} \cong \frac{3}{\eta}. \quad (6.4)$$

В случае пары комплексно-сопряженных корней $\eta = \alpha + j\beta$ составляющая переходного процесса $x_\eta(t_\eta) = e^{-\alpha t_\eta} (C_1 \cos \beta t + C_1 \sin \beta t)$. Легко понять, что и в этом случае приведенная выше приближенная оценка длительности переходного процесса (6.3) справедлива, если вместо η подставить α (рис. 6.2,в).

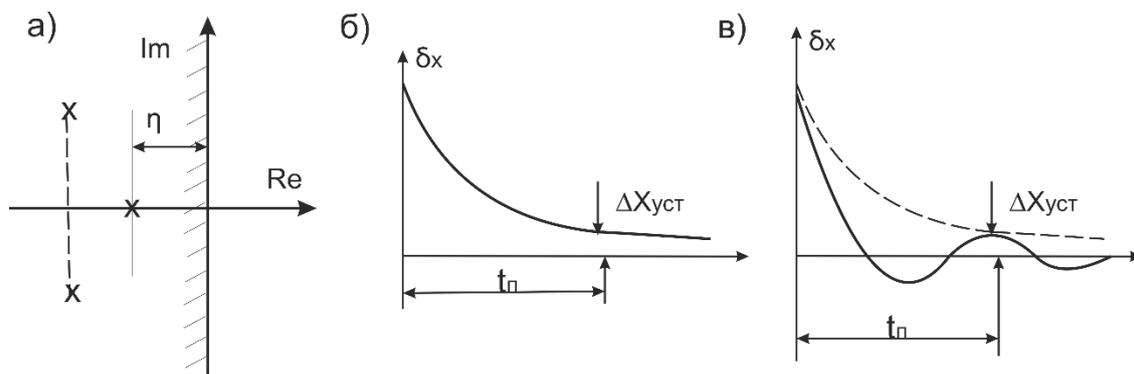


Рис. 6.2. Степень устойчивости (а) и оценки длительности переходного процесса: б – случай вещественного корня; в – случай комплексного корня

Определение степени устойчивости. Пусть

$$D(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n \quad (6.5)$$

характеристический полином системы. Сделаем подстановку

$$\lambda = q - \eta, \quad (6.6)$$

где η – пока неизвестная положительная величина (степень устойчивости).

Раскрывая по формуле бинома Ньютона

$$(a + b)^n = a^n + \frac{n!}{1!(n-1)!} a^{n-1} b + \frac{n!}{2!(n-2)!} a^{n-2} b^2 + \dots + b^n \quad (6.7)$$

двучлены $(q - \eta)^i$, $i = \overline{1, n}$ получаем новый многочлен

$$D(q) = b_0 q^n + b_1 q^{n-1} + \dots + b_{n-1} q + b_n. \quad (6.8)$$

Из (6.7) нетрудно заметить, что коэффициенты этого многочлена будут зависеть от коэффициентов a_i , $i = \overline{0, n}$ и искомого параметра η . Нули этого многочлена отличаются от нулей многочлена (6.4) $-D(\lambda)$ уменьшением дей-

ствительной части на величину η , т.к. переход от $D(\lambda)$ к $D(q)$ соответствует смещению мнимой оси влево на величину η , при которой многочлен $D(q)$ окажется на границе устойчивости, т.е. будет иметь корень на этой смещенной границе.

Таким образом, если решается задача синтеза, т.е. выбора параметров системы, обеспечивающих требуемое качество переходного процесса, можно поступить следующим образом. Записать многочлен (6.4) в виде функции варьируемого параметра. Задать степень величины η , при которой обеспечивается заданная длительность переходного процесса и перейти к многочлену (6.6), так как описано выше. Этот многочлен также будет зависеть от варьируемого параметра. Далее, применяя один из рассмотренных в предыдущем разделе критериев устойчивости, можно записать уравнения, соответствующие нахождению многочлена (6.6) на границе устойчивости, решение которых даст значение искомого варьируемого параметра. В случае двух варьируемых параметров можно определить области устойчивости в плоскости двух параметров при заданном η методом D -разбиения.

6.2.2. Оценка колебательности переходного процесса

Колебательность компонента переходного процесса определяется величиной

$$\mu = |\beta / \alpha|, \quad (6.9)$$

где α – вещественная, β – мнимая части корня (рис. 6.3). Эта величина характеризует быстроту затухания амплитуды за период.

Действительно при $\lambda_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$ соответствующая составляющая процесса имеет вид

$$x(t) = C_1 e^{-\alpha t} \sin(\beta t + C_2). \quad (6.10)$$

Период колебаний $T = 2\pi / \beta$. Сравним амплитуды A_1, A_2 на интервале времени через один период. Пусть $A_1 = C_1 e^{-\alpha t}$, тогда

$$A_2 = C_1 e^{-\alpha(t+2\pi/\beta)} = C_1 e^{-\alpha t} e^{-\alpha(2\pi/\beta)}. \quad (6.11)$$

Следовательно

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{C_1 e^{-\alpha t}}{C_1 e^{-\alpha t} e^{-\frac{|\alpha|}{\beta} 2\pi}} = e^{\frac{|\alpha|}{\beta} 2\pi}. \quad (6.12)$$

Из (6.12) видно, чем больше будет величина $\mu = |\beta / \alpha|$, тем меньше будет отношение амплитуд, т.е. амплитуда A_2 на следующем периоде уменьшается в меньшей степени, следовательно затухание колебаний будет слабее.

Оценка степени колебательности аналогична определению степени устойчивости. Делается следующая замена переменной

$$\lambda = -jqe^{j\gamma}, \quad \gamma = \arctg \mu. \quad (6.13)$$

Подстановка (6.13) в (6.5) приводит к повороту мнимой оси на угол $(\pi / 2 + \gamma)$ в положительном направлении (против часовой стрелки). Искомое значение $\mu = tg \gamma$, а параметр γ определяется из условия нахождения многочлена $D(q)$ на границе устойчивости, т.е. будет иметь корень на мнимой оси после ее поворота.

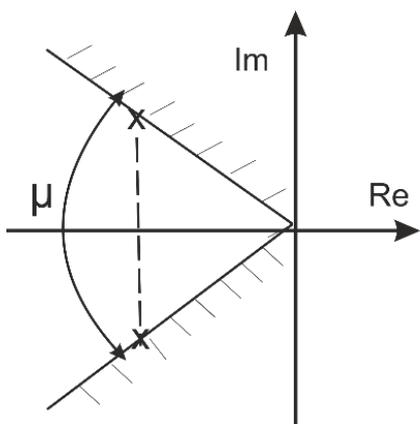


Рис. 6.3. Оценка степени колебательности

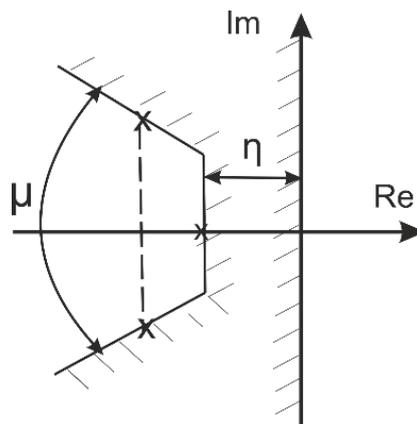


Рис. 6.4. Совместная оценка степени устойчивости и колебательности

Если решается задача определения некоторого параметра системы, обеспечивающего требуемую степень колебательности, может быть применена описанная выше схема. Многочлен (6.4) представляется в виде функции варьируемого параметра. Задается значение γ , при котором обеспечивается заданная степень колебательности и осуществляется замена (6.13). Далее искомый параметр определяется из условия нахождения многочлена $D(q)$ на границе устойчивости. Часто требования степени устойчивости и колебательности объединяют в один критерий и формулируют как требования нахождения корней внутри сектора, показанного на рис. 6.4.

6.3. Интегральные оценки качества

Для оценки качества переходных процессов используются также следующие интегралы

$$I_1 = \int_0^{\infty} \Delta x \cdot dt; \quad (6.14)$$

$$I_2 = \int_0^{\infty} (\Delta x)^2 \cdot dt, \quad (6.15)$$

где $\Delta x = x(\infty) - x(t)$ – отклонение переходного процесса $x(t)$ от установившегося значения $x(\infty)$.

Критерий I_1 применяется в случаях, когда заведомо известно, что переходный процесс монотонный и не меняет знака. Квадратичный критерий I_2 может применяться для оценки качества колебательного процесса. Однако он не «чувствует» разницу в скорости нарастания процесса. Поэтому часто применяется критерий вида

$$I_3 = \int_0^{\infty} [x^2(\tau) + T^2 \dot{x}^2(\tau)] \cdot d\tau. \quad (6.16)$$

При минимизации этого критерия переходный процесс приближается к экспоненте с постоянной времени T . Действительно, т.к. $\dot{x}d\tau = dx$, а $x(\infty) = 0$:

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^{\infty} [x^2(\tau) + T^2 \dot{x}^2(\tau)] \cdot d\tau = \int_0^{\infty} [x(\tau) + T\dot{x}(\tau)]^2 \cdot d\tau - \\ &- \int_0^{\infty} 2Tx(\tau)\dot{x}(\tau) \cdot d\tau = \int_0^{\infty} [x(\tau) + T\dot{x}(\tau)]^2 \cdot d\tau - Tx_0. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Очевидно, что минимум в (6.17) будет достигаться при

$$x(\tau) + T\dot{x}(\tau) = 0. \quad (6.18)$$

Решение дифференциального уравнения (6.18)

$$x(t) = x_0 e^{-\frac{t}{T}}, \quad (6.19)$$

что и требовалось доказать.

Лекция 7. СИНТЕЗ И КОРРЕКЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

7.1. Цели и критерии синтеза и коррекции систем

Задача синтеза САУ заключается в определении алгоритмов или устройств управления заданным объектом. При этом должны выполняться требования по устойчивости, точности и качеству управления, а также требования к надежности, весу, габаритам, потребляемой мощности и др. Задача синтеза всегда состоит в определении оптимального управления. Однако большое число перечисленных выше требований, к сожалению, невозможно объединить в один глобальный критерий качества и строго сформулировать задачу оптимизации. Поэтому задача синтеза САУ разбивается на ряд этапов, на каждом из которых может решаться какая-то локальная оптимизационная задача.

Поскольку глобальный критерий оптимальности отсутствует, обычно осуществляют расчет нескольких вариантов решения задачи, из которых затем выбирается приемлемый. Важнейшим этапом такой технологии синтеза является коррекция САУ. Коррекция систем осуществляется для выполнения требований по точности, устойчивости и качеству переходных процессов.

Приступая к коррекции САУ мы должны сформулировать цель, которую мы хотим достичь на данном этапе. Поэтому необходимо проанализировать и выбрать формальные показатели, обеспечивающие достижение указанных характеристик. При решении задачи коррекции систем задается математическая модель объекта, формулируются требования к характеристикам устойчивости, точности и качества управления.

Для достижения желаемого качества переходного процесса имеется, по крайней мере, два пути: изменение параметров системы и/или изменение структуры системы. Изменение параметров системы – это, конечно, наиболее простой путь, однако если изменением параметров системы достичь желаемого качества не удастся, необходимо подобрать и ввести в систему *корректирующие звенья*, обеспечивающие заданные характеристики.

Действие корректирующих звеньев сводится к созданию дополнительных воздействий по производным и интегралам в контуре САУ. Рассматривают основные 4 типа коррекции:

1. Введение последовательных корректирующих звеньев (рис. 7.1).
2. Параллельные корректирующие звенья (рис. 7.2).
3. Коррекция по внешнему воздействию (рис. 7.3).
4. Введение неединичной главной обратной связи (рис. 7.4).

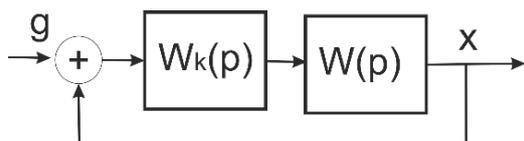


Рис. 7.1

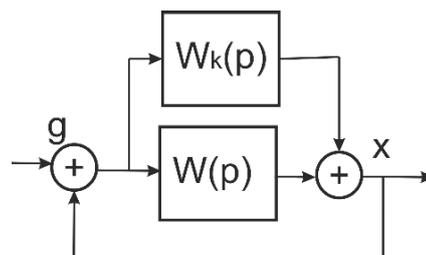


Рис. 7.2

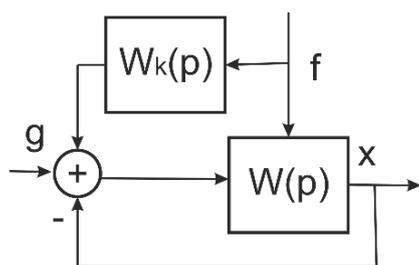


Рис. 7.3W0

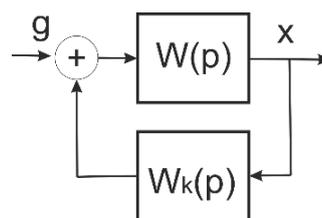


Рис. 7.4

Разработано огромное число вариантов коррекции, основанных на изменении структуры системы, рассмотреть которые в рамках настоящего курса не представляется возможным. Мы сконцентрируем внимание на некоторых ключевых подходах, которые иллюстрируют за счет чего достигается повышение точности системы и как при этом изменяется устойчивость систем. Для анализа устойчивости мы будем использовать критерий Найквиста в силу его простоты и наглядности.

7.2. Последовательная коррекция САУ

Рассмотрим четыре варианта последовательной коррекции: изменение общего коэффициента усиления, введение производной от ошибки, введение интеграла от ошибки и введение изодромного корректирующего звена.

7.2.1. Коррекция путем изменения общего коэффициента усиления

Предположим, исходная система имеет вид, показанный на рис. 7.1, а передаточная функция разомкнутой системы $W(p) = W_k(p)W_0(p)$ представляется в виде

$$W(p) = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n}. \quad (7.1)$$

Соответствующая передаточная функция замкнутой системы по ошибке имеет вид

$$\Phi_\varepsilon(p) = \frac{\varepsilon(p)}{G(p)} = \frac{1}{1 + W(p)}. \quad (7.2)$$

Введем в последовательную цепь корректирующее звено с передаточной функцией $W_k(p) = k_{kor}$, изменяющее общий коэффициент разомкнутой цепи. Из (7.1) нетрудно заметить, что в установившемся режиме (при $t \rightarrow \infty$ $p^j = 0, j = \overline{1, m}, p^i = 0, i = \overline{1, n}$) мы получим $W_0(p) = b_m/a_n$. Тогда в соответствии с (7.2) ошибка в установившемся режиме

$$\varepsilon = \frac{1}{1 + k_{kor} k} g_0, \quad (7.3)$$

где k_{kor} – коэффициент усиления корректирующего звена, а $k = b_m/a_n$ – коэффициент передачи части разомкнутой системы с передаточной функцией $W_0(p)$.

На рис. 7.5 штрих-пунктирной линией показано как при $k_{kor} > 1$ изменяются логарифмические амплитудно-частотные характеристики (ЛАЧХ и ЛФЧХ) разомкнутой системы при введении коэффициента усиления k_{kor} , а на рис. 7.6 приведен соответствующий этим ЛАЧХ и ЛФЧХ годограф разомкнутой системы. Из (7.3) видно, что при $k_{kor} > 1$ точность повышается, при $k_{kor} < 1$ точность, наоборот, уменьшается.

Замечание. Здесь и далее скорректированные характеристики изображаются в виде штрих-пунктирных линий, а примеры коррекции иллюстрируются с использованием амплитудно-частотных характеристик разомкнутой системы. Поэтому все рассматриваемые ниже выводы из примеров интерпретируются с использованием критерия Найквиста.

При использовании для анализа устойчивости критерия Найквиста, из рисунков нетрудно заметить, что увеличение точности при $k_{кор} > 1$ сопровождается уменьшением запаса устойчивости системы. Более того, может оказаться, что при значениях коэффициента усиления, обеспечивающих требуемую точность, система вовсе становится неустойчивой (на рис. 7.6 годограф охватывает точку $[-1, j0]$).

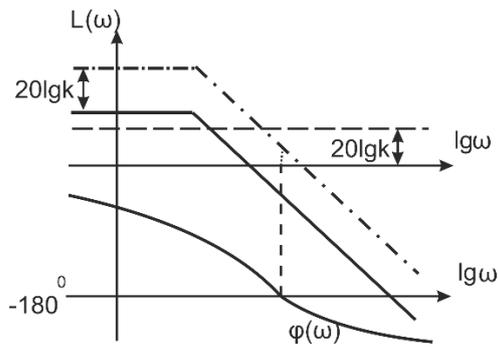


Рис. 7.5

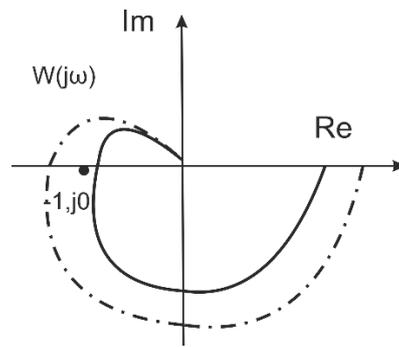


Рис. 7.6

Задача обеспечения высокой точности при сохранении устойчивости – основная проблема синтеза САУ. Она решается путем введения более сложных корректирующих звеньев.

7.2.2. Введение производной от ошибки

Производную от ошибки в последовательность звеньев разомкнутой части системы можно ввести добавлением в цепь ошибки параллельного дифференцирующего звена с передаточной функцией

$$W_{диф}(p) = Tp, \quad (7.4)$$

так как показано пунктирной линией на рис. 7.7. При этом передаточная функция корректирующего звена

$$W_{кор}(p) = 1 + Tp, \quad (7.5)$$

а передаточная функция $W(p)$ разомкнутой скорректированной системы

$$W(p) = W_0(p)(1 + Tp). \quad (7.6)$$

Соответствующие этой передаточной функции АФЧХ и ФЧХ имеют вид

$$A(\omega) = A_0(\omega)A_{кор}(\omega) = A_0(\omega)\sqrt{1+T^2\omega^2}; \quad (7.7)$$

$$\varphi(\omega) = \varphi_0(\omega) + \arctg T\omega. \quad (7.8)$$

В соответствии с (7.6) ЛАЧХ разомкнутой системы

$$L(\omega) = L_0(\omega) + L_{кор}(\omega) = L_0(\omega) + 20\lg\sqrt{1+T^2\omega^2}. \quad (7.9)$$

Таким образом, в ЛАЧХ исходной системы корректирующее звено вносит «подъем» характеристики с углом наклона $20 \text{ дБ} / \text{декаду}$ на частотах выше $\omega > 1/T$ и уменьшение отрицательного фазового сдвига на величину $\arctg T\omega$. На рис. 7.8 приведены соответствующие годографы исходной и скорректированной разомкнутой системы. Хотя частота среза за счет «подъема» амплитудной характеристики сдвигается вправо, тем не менее запас устойчивости системы возрастает за счет положительного фазового сдвига в (7.7), вносимого дифференцирующим корректирующим звеном.

В действительности, реализовать идеальное дифференцирующее звено с передаточной функцией (7.4) невозможно. Реальное дифференцирующее звено имеет передаточную функцию

$$W_{диф}(p) = \frac{Tp}{T_1p+1}. \quad (7.10)$$

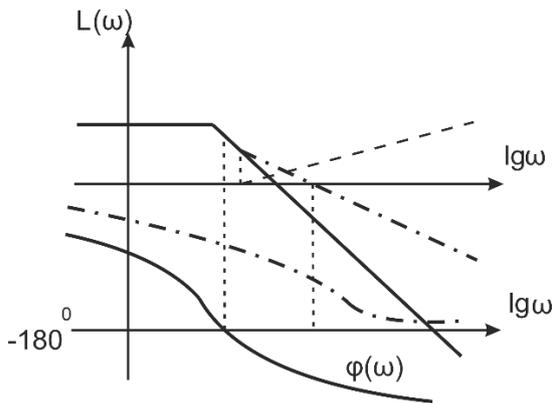


Рис. 7.7

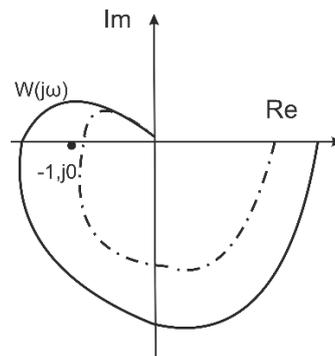


Рис. 7.8

При этом

$$W_{кор}(p) = \frac{(T+T_1)p+1}{T_1p+1}. \quad (7.11)$$

Если постоянные времени T, T_1 реального дифференцирующего звена подобраны так, что

$$\frac{1}{T+T_1} \ll \frac{1}{T_1}, \quad (7.12)$$

будет достигаться корректирующий эффект, близкий к описанному выше. На рис. 7.9 приведены ЛАЧХ и ЛФХ реального корректирующего дифференцирующего звена и скорректированной системы, а на рис. 7.10 – соответствующие годографы.

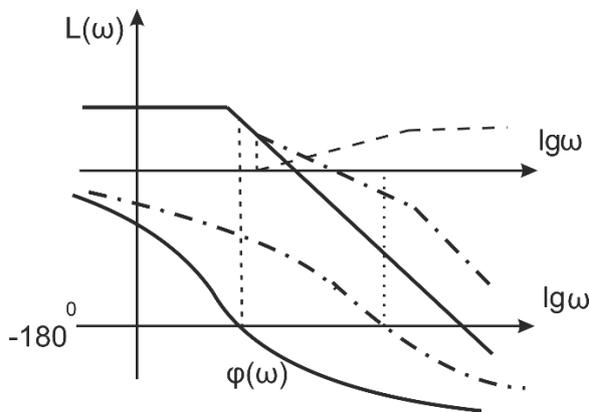


Рис. 7.9

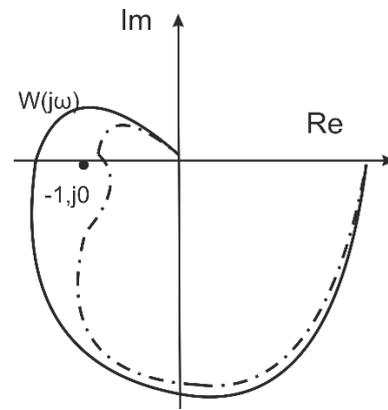


Рис. 7.10

Легко заметить, что «подъем» ЛАЧХ в диапазоне частот, соответствующих левой и правой части неравенства (7.12), также, как и в случае идеального дифференцирующего звена приводит к сдвигу частоты среза вправо. Однако именно в этом диапазоне происходит положительный фазовый сдвиг, который сохраняет запас устойчивости системы. При этом годограф разомкнутой системы (рис. 7.10) в этом диапазоне частот деформируется таким образом, что увеличивается расстояние до точки $[-1, j0]$.

7.2.3. Введение интеграла от ошибки

Интеграл от ошибки вводится для повышения точности системы. В этом случае передаточная функция по ошибке (рис. 7.14)

$$W_\varepsilon(p) = \frac{\varepsilon(p)}{G(p)} = \frac{p}{p + W_0(p)}. \quad (7.13)$$

При этом ошибка в установившемся режиме в соответствии с (7.13) равна нулю:

$$\varepsilon|_{p=0} = \frac{0}{0 + W_0(0)} g_0 = 0. \quad (7.14)$$

Введение интегрирующего звена трансформирует статическую систему в астатическую. При включении последовательно двух интегрирующих звеньев имеет место астатизм второго порядка.

Передаточная функция разомкнутой системы, обладающей астатизмом первого порядка

$$W(p) = W_0(p) \frac{1}{p}. \quad (7.15)$$

Амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики

$$A(\omega) = A_0(\omega) \frac{1}{\omega}; \quad (7.16)$$

$$\varphi(\omega) = \varphi_0(\omega) + \operatorname{arctg} \frac{-1/\omega}{0} = \varphi_0(\omega) - \frac{\pi}{2}. \quad (7.17)$$

Соответствующая (7.16) ЛАЧХ

$$L(\omega) = L_0(\omega) - 20 \lg \omega; \quad (7.18)$$

$$\varphi(\omega) = \varphi_0(\omega) - \pi / 2. \quad (7.19)$$

Из (7.18) следует, что частота среза сдвигается влево, однако отрицательный фазовый сдвиг на угол $-\pi/2$ при введении астатизма, как правило, приводит к потере устойчивости. На рис. 7.11 показано как изменяется исходный годограф разомкнутой системы при введении интегрирующего звена. В данном случае трансформация состоит в том, что каждая точка годографа исходной разомкнутой системы поворачивается на угол $-\pi/2$ (по часовой стрелке). При этом уменьшается запас устойчивости. Обычно астатизм в системе возможен в сочетании с введением производных, т.е. форсирующих звеньев. Далее мы рассмотрим такую коррекцию.

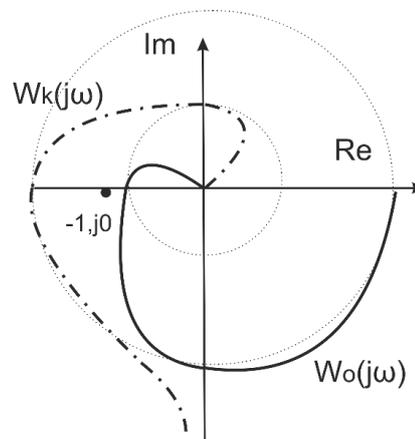


Рис. 7.11

7.2.4. Введение издромного корректирующего звена

Передаточная функция издромного корректирующего устройства соответствует последовательному соединению интегрирующего и форсирующего звена:

$$W_{кор}(p) = \frac{Tp + 1}{p}. \quad (7.20)$$

Амплитудно-фазовая частотная характеристика скорректированной разомкнутой системы имеет вид

$$W_{кор}(p) = W_0(j\omega) \frac{1 + jT\omega}{j\omega}. \quad (7.21)$$

Амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики соответственно

$$A(\omega) = A_0(\omega) \frac{\sqrt{1 + T^2\omega^2}}{\omega}; \quad (7.22)$$

$$\varphi(\omega) = \varphi_0(\omega) + \arctg \frac{-1/\omega}{T} = \varphi_0(\omega) - \arctg \frac{1}{T\omega}. \quad (7.23)$$

Соответствующая (7.16) ЛАЧХ

$$L(\omega) = L_0(\omega) - 20 \lg \omega + 20 \lg \sqrt{1 + T^2\omega^2}. \quad (7.24)$$

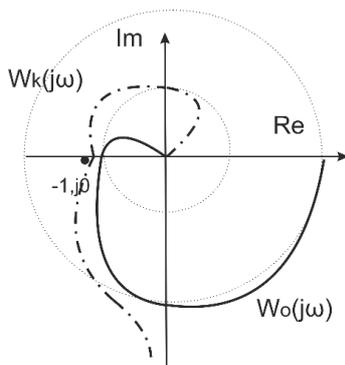


Рис. 7.12

На рис. 7.12 приведены годографы исходной (сплошная линия) и скорректированной (штрих-пунктирная линия) системы. При правильном подборе постоянной времени T в числителе $Tp + 1$ корректирующего звена можно добиться деформации годографа в окрестности точки $(-1, j0)$, обеспечивающей устойчивость системы при удовлетворительных показателях точности.

7.3. Коррекция введением обратной связи

Пусть передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{A(p)}{B(p)}, \quad (7.25)$$

а

$$W_{кор}(p) = \frac{C(p)}{D(p)} \quad (7.26)$$

– передаточная функция корректирующего звена в цепи обратной связи.

Тогда, воспользовавшись соотношением (2.24),

$$\Phi(p) = \frac{y}{x} = \frac{W(p)}{1 \pm W(p)W_{кор}(p)}, \quad (7.27)$$

передаточную функцию замкнутой системы можно представить в виде

$$\Phi(p) = \frac{A(p)D(p)}{A(p)C(p) + B(p)D(p)}. \quad (7.28)$$

В зависимости от характеристик звена в цепи обратной связи рассматриваю следующие типы параллельной коррекции (рис. 7.13,а,б,в,г).

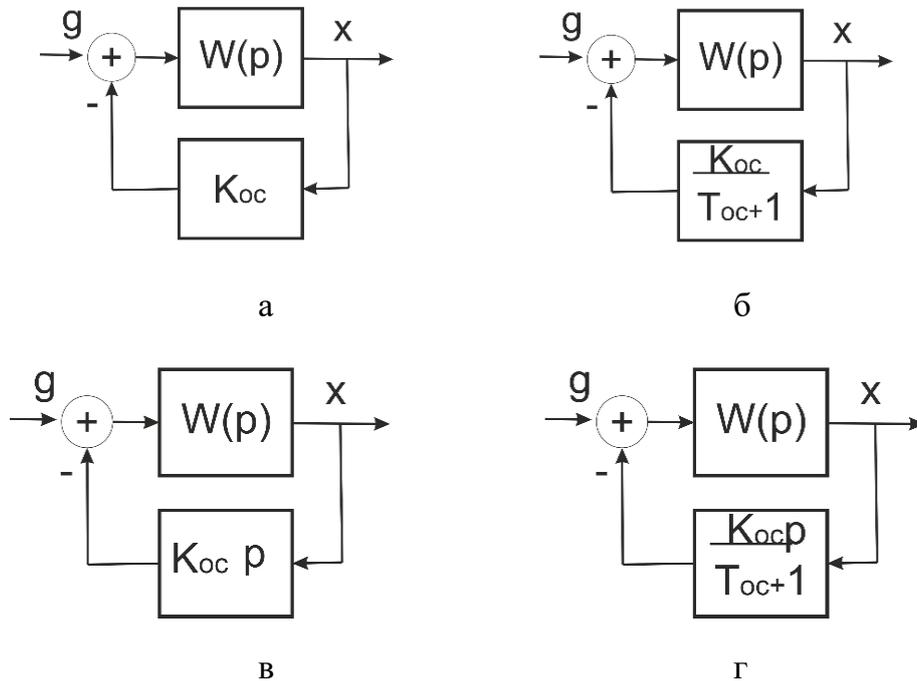


Рис. 7.13. Типы обратной связи: жесткая (а), инерционная жесткая (б), гибкая (в), инерционная гибкая (г)

1. Жесткая обратная связь $C(p) = k_{oc}$, $D(p) = 1$ (рис. 7.13,а).

2. Инерционная жесткая обратная связь $C(p) = k_{oc}$, $D(p) = T_{oc}p + 1$.
(рис. 7.13,б).

3. Гибкая обратная связь $C(p) = k_{oc}p$, $D(p) = 1$ (рис. 7.13,в).

4. Инерционная гибкая обратная связь $C(p) = k_{oc}p$, $D(p) = T_{oc}p + 1$
(рис. 7.13,г).

Задача состоит в выборе типа параллельной коррекции и подборе параметров k_{oc} , T_{oc} цепи обратной связи, обеспечивающих устойчивость и требуемые показатели точности и качества переходного процесса. Эта задача, как обычно, решается путем реализации и сравнения различных вариантов, с использованием рассмотренных выше показателей и критериев.

Лекция 8. ОПИСАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ

8.1. Векторная запись дифференциальных уравнений систем

Технику записи векторных уравнений состояния рассмотрим на примере дифференциального уравнения второго порядка:

$$T^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2\xi T \frac{dy}{dt} + y = ku. \quad (8.1)$$

Введем новые переменные:

$$y = x_1; \quad (8.2)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dx_1}{dt} = x_2; \quad (8.3)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{dx_2}{dt}. \quad (8.4)$$

С использованием этих обозначений уравнение (8.1) можно записать в виде системы

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\frac{1}{T^2} x_1 - \frac{2\xi}{T} x_2 + \frac{k}{T^2} u, \\ y &= x_1. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Эта система в векторно-матричных обозначениях имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u; \\ y &= \mathbf{C}^T \mathbf{x}, \end{aligned} \quad (8.6)$$

$$\text{где } \mathbf{x} = [x_1, x_2]^T, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{T^2} & -\frac{2\xi}{T} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k}{T^2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^T = [1, 0].$$

Здесь \mathbf{x} – вектор *состояния*. Первое уравнение в (8.6) называют *уравнением состояния*, а второе – *уравнением наблюдения*. В данном случае переменные u, y – скаляры. В общем случае они могут быть векторами.

8.2. Связь уравнений состояния с передаточными функциями

Если задана передаточная функция системы, например, в виде

$$W(p) = \frac{y(p)}{u(p)} = \frac{G(p)}{D(p)}, \quad (8.7)$$

можно записать соответствующее дифференциальное уравнение:

$$D(p)y = G(p)u. \quad (8.8)$$

Далее действуя так, как описано выше, можно перейти к уравнениям состояния вида (8.6).

Для обратного перехода от уравнений состояния к передаточной функции представим уравнение состояния в (8.6) в виде

$$(\mathbf{E}p - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{B}u, \quad (8.9)$$

где \mathbf{E} – единичная матрица, а p – оператор дифференцирования. Подставим вектор $\mathbf{x} = (\mathbf{E}p - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}u$ из (8.9) в уравнение наблюдения в (8.6):

$$y = \mathbf{C}^T (\mathbf{E}p - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}u. \quad (8.10)$$

Произведя указанные в (8.10) действия, получим искомую передаточную функцию. Заметим, что

$$D(p) = \det(\mathbf{E}p - \mathbf{A}); \quad (8.11)$$

$$G(p) = \mathbf{C}^T \overline{(\mathbf{E}p - \mathbf{A})} \mathbf{B}, \quad (8.12)$$

где $\overline{(\mathbf{E}p - \mathbf{A})}$ – присоединенная матрица.

8.3. Фундаментальная система решений

Переходный процесс в системе, описываемой уравнениями в пространстве состояний

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u; \quad (8.13)$$

$$y = \mathbf{C}^T \mathbf{x},$$

является их решением при $u = 1(t)$. Для этого необходимо построить матрицу переходных состояний, которая тесно связана с фундаментальной системой решений. Для ее построения рассмотрим однородную систему

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}. \quad (8.14)$$

Множество S всех решений $\{\xi(t)\}$ системы (8.14) образует линейное пространство. Действительно, если $\xi_1(t) \in S$ и $\xi_2(t) \in S$, то подстановкой в (8.14) легко проверить, что $C_1\xi_1(t) + C_2\xi_2(t) \in S$. Покажем, что в S существует n и только n линейно-независимых решений $\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_n(t)$.

Пусть заданы начальные условия в виде

$$\begin{aligned} \xi_1(t) &= [1, 0, \dots, 0] = e_1, \\ \xi_2(t) &= [0, 1, \dots, 0] = e_2, \\ &\vdots \\ \xi_n(t) &= [0, 0, \dots, 1] = e_n. \end{aligned} \quad (8.15)$$

Этим начальным условиям соответствует n решений $\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_n(t)$. Если предположить, что они линейно-зависимы, то должны существовать n коэффициентов $C_i, i = \overline{1, n}$, одновременно не обращающихся в нуль таких, что

$$\xi(t) = C_1\xi_1(t) + C_2\xi_2(t) + \dots + C_n\xi_n(t) \equiv 0.$$

Легко заметить, что $\xi(t) \in S$ также является решением (8.14), следовательно

$$C_1\xi_1(t_0) + C_2\xi_2(t_0) + \dots + C_n\xi_n(t_0) = 0$$

или

$$C_1e_1 + C_2e_2 + \dots + C_n e_n = 0.$$

Но это невозможно, т.к. e_1, e_2, \dots, e_n — ортогональные орты из (8.15).

Таким образом, n линейно-независимых решений $\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_n(t)$ образуют базис пространства S , а любой элемент $\xi(t) \in S$ представляется в виде

$$\xi(t) = \sum_{i=1}^n C_i \xi_i(t) \quad (8.16)$$

единственным образом.

Определение: Любые n линейно-независимых решений системы (8.14), образующих базис пространства решений S , являются *фундаментальной системой решений*.

8.4. Фундаментальная матрица

Совокупность n решений $\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_n(t)$ однородной системы (8.14) можно представить в виде $n \times n$ -матрицы:

$$\mathbf{X}(t) = [\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_n(t)]. \quad (8.17)$$

Матрица $\mathbf{X}(t)$ удовлетворяет своему матричному уравнению (8.14):

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}(t). \quad (8.18)$$

Это легко проверить подставив n векторов из (8.17) в правую часть и их производных в левую часть (8.14) в соответствующем порядке.

Если совокупность решений $\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_n(t)$ является фундаментальной системой решений, то матрица $\mathbf{X}(t)$ называется *фундаментальной матрицей*. Поскольку фундаментальная система решений образована множеством n линейно-независимых решений, ясно, что $\det \mathbf{X}(t) \neq 0$.

Определение. Любая $n \times n$ -матрица такая, что $\det \mathbf{X}(t) \neq 0$, для которой существует $\dot{\mathbf{X}}(t)$ при всех $t \geq t_0$ определяет однородную систему дифференциальных уравнений вида

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t), \quad (8.19)$$

$$\text{где } \mathbf{A} = \dot{\mathbf{X}}(t) [\mathbf{X}(t)]^{-1}. \quad (8.20)$$

Это означает, что фундаментальная матрица для однородного уравнения (8.19) не единственна, т.е. любая матрица $\hat{\mathbf{X}}(t)$, определяемая как

$$\hat{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{X}(t) \cdot \mathbf{C}, \quad (8.21)$$

где \mathbf{C} – невырожденная $n \times n$ -матрица, является фундаментальной матрицей.

8.5. Переходная матрица состояний

Переходная матрица состояний – это матрица $\Phi(t, t_0)$, обладающая следующими свойствами:

1. $\Phi(t, t_0)$ удовлетворяет однородному уравнению $\dot{\Phi}(t, t_0) = \mathbf{A} \cdot \Phi(t, t_0)$.
2. $\Phi(t_0, t_0) = \mathbf{E}$.

Матрица $\Phi(t, t_0)$ является фундаментальной матрицей для системы

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t). \quad (8.22)$$

Можно показать, что для начальных условий $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ переходная матрица $\Phi(t, t_0)$ доставляет единственное решение системы (8.22):

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{x}_0. \quad (8.23)$$

Действительно из (8.23) имеем

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{d}{dt}[\Phi(t, t_0)\mathbf{x}_0] = [\dot{\Phi}(t, t_0)]\mathbf{x}_0 = \mathbf{A} \cdot \Phi(t, t_0)\mathbf{x}_0 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t).$$

Имеет место связь переходной матрицы состояний с фундаментальной матрицей. Пусть $\mathbf{X}(t)$ – фундаментальная матрица:

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}(t),$$

а $\mathbf{X}(t_0)$ – невырожденная $n \times n$ -матрица при любом t_0 . Припасовывая векторы из (8.23), соответствующие разным $\mathbf{x}(t_0)$ можно записать

$$\mathbf{X}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{X}(t_0),$$

откуда

$$\Phi(t, t_0) = \mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(t_0). \quad (8.24)$$

8.6. Общее решение неоднородной системы

Рассмотрим теперь более общий случай уравнений состояния

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t), \\ y(t) &= \mathbf{C}^T \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}u(t), \end{aligned} \quad (8.25)$$

при $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$.

Решение соответствующей однородной системы

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \quad (8.26)$$

имеет вид

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t, t_0)\mathbf{x}_0, \quad (8.27)$$

где $\mathbf{\Phi}(t, t_0)$ – пока неизвестная, $n \times n$ -матрица переходных состояний.

Частное решение неоднородной системы (8.25) будем искать в виде

$$\mathbf{x}_q(t) = \mathbf{X}(t)\boldsymbol{\eta}(t), \quad (8.28)$$

где $\mathbf{X}(t)$ – фундаментальная матрица, удовлетворяющая своему однородному уравнению (8.26), а $\boldsymbol{\eta}(t)$ – произвольный вектор. В силу указанного свойства фундаментальной матрицы подставим ее в (8.26) и умножим справа обе части полученного равенства на вектор $\boldsymbol{\eta}(t)$:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{X}(t)\boldsymbol{\eta}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t)\boldsymbol{\eta}(t). \quad (8.29)$$

Теперь подставим частное решение (8.28) в уравнение состояния из системы (8.25):

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{X}(t)\boldsymbol{\eta}(t)] = \dot{\mathbf{X}}(t)\boldsymbol{\eta}(t) + \mathbf{X}(t)\dot{\boldsymbol{\eta}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t)\boldsymbol{\eta}(t) + \mathbf{B}u(t). \quad (8.30)$$

Сравнивая (8.29) и (8.30) легко заметить, что

$$\mathbf{X}(t)\dot{\boldsymbol{\eta}}(t) = \mathbf{B}u(t), \quad (8.31)$$

откуда

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}(t) = [\mathbf{X}(t)]^{-1}\mathbf{B}u(t). \quad (8.32)$$

Интегрируем (8.32) при $\boldsymbol{\eta}(t_0) = 0$:

$$\boldsymbol{\eta}(t) = \int_{t_0}^t [\mathbf{X}(\tau)]^{-1}\mathbf{B}u(\tau)d\tau. \quad (8.33)$$

Подставляя (8.33) в (8.28) с учетом свойства (8.24) $\mathbf{\Phi}(t, t_0) = \mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(t_0)$ получаем частное решение в виде

$$\mathbf{x}_q(t) = \int_{t_0}^t \mathbf{\Phi}(t - \tau)\mathbf{B}u(\tau)d\tau. \quad (8.34)$$

Общее решение неоднородного уравнения является суммой частного решения и решения (8.27) однородного уравнения:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t - t_0)\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{\Phi}(t - \tau)\mathbf{B}u(\tau)d\tau. \quad (8.35)$$

Подставляя полученное общее решение в уравнение наблюдения, окончательно получаем

$$y(t) = \mathbf{C}^T \mathbf{\Phi}(t - t_0)\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{C}^T \mathbf{\Phi}(t - \tau)\mathbf{B}u(\tau)d\tau + \mathbf{D}u(t). \quad (8.36)$$

8.7. Построение матрицы переходных состояний

Вначале получим аналог матрицы переходных состояний для случая скалярных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) + ax(t) &= bu(t), \\ y(t) &= cx(t) + du(t) \end{aligned} \quad (8.37)$$

при $x(t_0) = x_0$.

Соответствующую однородную систему можно представить в виде

$$\frac{d}{dt} x(t) = ax(t) \quad (8.38)$$

или $\frac{1}{x} dx = a \cdot dt$.

Интегрируя обе части последнего равенства в пределах $[t_0, t]$ получаем:

$$\ln x(t) - \ln x(t_0) = \ln \frac{x(t)}{x(t_0)} = a \cdot (t - t_0),$$

откуда

$$x(t) = x(t_0)e^{a(t-t_0)}. \quad (8.39)$$

Сравнивая (8.39) с (8.27) можно заметить, что в данном случае для системы первого порядка скалярный аналог матрицы переходных состояний

$$\Phi(t - t_0) = e^{a(t-t_0)}. \quad (8.40)$$

По аналогии с (8.39), (8.40) для многомерной системы запишем решение в виде

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t - t_0)\mathbf{x}_0 = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}_0, \quad (8.41)$$

где $\mathbf{\Phi}(t - t_0) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}$ – представляется в виде разложения матричной экспоненты в ряд:

$$\mathbf{\Phi}(t - t_0) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} = \mathbf{E} + \mathbf{A}(t - t_0) + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2(t - t_0)^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{A}^3(t - t_0)^3 + \dots \quad (8.42)$$

С учетом (8.41) общее решение линейного дифференциального уравнения (8.36) запишется в виде

$$y(t) = \mathbf{C}^T e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{C}^T \mathbf{X}(t) [\mathbf{X}(\tau)]^{-1} \mathbf{B}u(\tau) d\tau + \mathbf{D}u(t). \quad (8.43)$$

Матрица $\mathbf{\Phi}(t - t_0) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}$ обладает всеми декларированными ранее свойствами матрицы переходных состояний:

1. $\frac{d}{dt} \mathbf{\Phi}(t - t_0) = \frac{d}{dt} [e^{\mathbf{A}(t-t_0)}] = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}(t-t_0)} = \mathbf{A}\mathbf{\Phi}(t - t_0).$
2. $\mathbf{\Phi}(t_0 - t_0) = e^{\mathbf{A}(t_0-t_0)} = \mathbf{E}.$
3. $\mathbf{\Phi}(t_1 - t_0)\mathbf{\Phi}(t_2 - t_1) = e^{\mathbf{A}(t_1-t_0)}e^{\mathbf{A}(t_2-t_1)} = e^{\mathbf{A}(t_2-t_0)} = \mathbf{\Phi}(t_2 - t_0).$
4. $\mathbf{\Phi}(t - t_0) = \mathbf{X}(t) [\mathbf{X}(t_0)]^{-1} = e^{\mathbf{A}t} [e^{\mathbf{A}t_0}]^{-1} = e^{\mathbf{A}t} e^{-\mathbf{A}t_0} = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}$

Подчеркнем, что $\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}t}$ – фундаментальная матрица, удовлетворяющая однородному уравнению (8.26).

Лекция 9. ВРЕМЕННЫЕ МОДЕЛИ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ

9.1. Описание ЦАС в виде свертки решетчатых функций

В настоящее время техническая реализация САУ преимущественно осуществляется на основе компьютерных систем. Поэтому в настоящем разделе мы сконцентрируем внимание на изучении *цифровых автоматических систем* (ЦАС), в которых алгоритмы управления реализуются в виде вычислительных алгоритмов на *бортовых цифровых вычислительных машинах* (БЦВМ). Цифровые системы характеризуются квантованием сигнала по времени, запаздыванием и квантованием по уровню. Таким образом, ЦАС является специальным классом нелинейной импульсной системы.

На этапе предварительного выбора структуры и алгоритмов управления используется линейная математическая модель ЦАС – *линейная импульсная система*. Эта модель получается из исходной путем линеаризации уравнений движения объекта и исполнительных органов, а также путем пренебрежения эффектом квантования сигналов по уровню в устройствах ввода-вывода БЦВМ.

Общая схема ЦАС представляется в виде, показанном на рис. 9.1

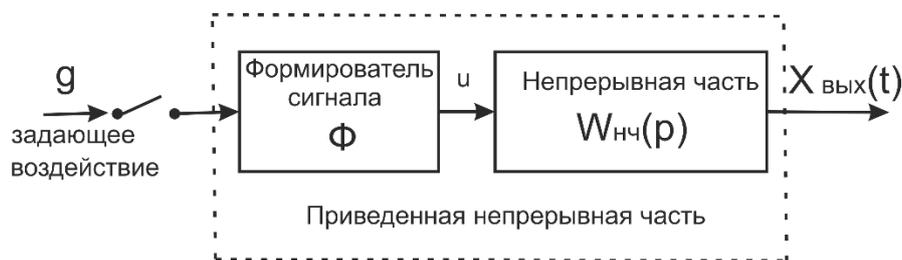


Рис. 9.1. Общая схема ЦАС

Здесь \bullet / \bullet – идеальный ключ, Φ – формирователь импульса, а $W_{н,ч}(p)$ – передаточная функция объекта, исполнительных и управляющих органов.

Ключ преобразует входную (задающее воздействие $g(t)$) в решетчатую функцию:

$$x(nT_0) = \sum_{n=0}^{\infty} x(t)\delta(t - nT_0), \quad (9.1)$$

где

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & \text{при } t = nT, \\ 0, & \text{при } t \neq nT. \end{cases} \quad (9.2)$$

Таким образом, идеальный ключ преобразует задающее воздействие $x(t)$ в последовательность идеальных импульсов.

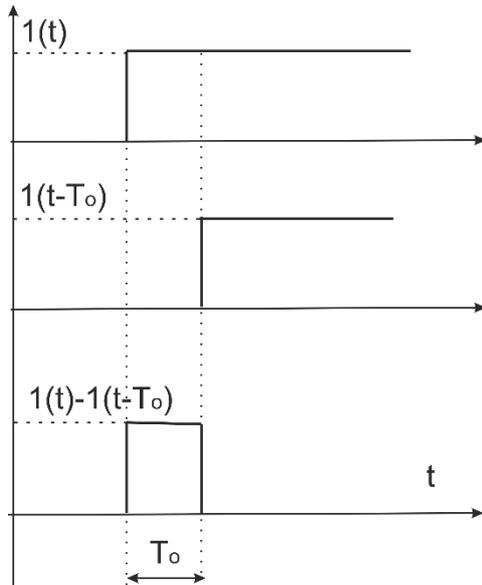


Рис. 9.2. Формирование весовой функции фиксатора

Формирователь импульса Φ может формировать импульсы различной длительности в пределах интервала дискретизации T . Мы ограничимся рассмотрением модели формирователя импульса, наиболее часто используемого в ЦАС — в виде экстраполятора нулевого порядка (фиксатора).

При подаче на вход фиксатора δ -функции на его выходе возникает единственный прямоугольный импульс длительности T_0 (рис. 9.2). Этот импульс по определению является весовой функцией фиксатора и представляется в виде разности двух единичных ступенчатых функций:

$$w_{\phi}(t) = 1(t) - 1(t - T_0). \quad (9.3)$$

Фиксатор и непрерывную часть системы обычно объединяют в общую, так называемую, приведенную непрерывную часть системы. Весовая функция приведенной части системы может быть представлена как свертка весовой функции $w_{\phi}(t)$ с весовой функцией $w_{нч}(t)$:

$$w(t) = \int_0^t w_{нч}(t - \tau)w_{\phi}(\tau)d\tau. \quad (9.4)$$

Если идеальный импульс приложен к приведенной непрерывной части в момент $t = mT_0$, где m — целое число, то ее реакция на этот импульс будет

$$w(t) = \begin{cases} w(t - mT_0), & \text{при } t \geq mT_0, \\ 0, & \text{при } t < mT_0. \end{cases} \quad (9.5)$$

Реакцию $y(t)$ непрерывной части на последовательность идеальных импульсов $x[nT_0]$ найдем следующим образом. В интервале $0 \leq t < T_0$

$$y(t) = x(0)w(t). \quad (9.6)$$

В интервале $T_0 \leq t < 2T_0$

$$y(t) = x(0)w(t) + x[T_0]w(t - T_0). \quad (9.7)$$

В интервале $2T_0 \leq t < 3T_0$

$$y(t) = x(0)w(t) + x[T_0]w(t - T_0) + x[2T_0]w(t - 2T_0). \quad (9.8)$$

Продолжая подобным образом для произвольного n в интервале $nT_0 \leq t < (n+1)T_0$ получаем

$$y(t) = \sum_{m=0}^n x[mT_0]w(t - mT_0). \quad (9.9)$$

В непрерывных переменных $y(t)$ и $w(t - mT_0)$ выделим только дискретные моменты времени, введя фиктивный ключ: $t = nT_0$ (рис 9.3).

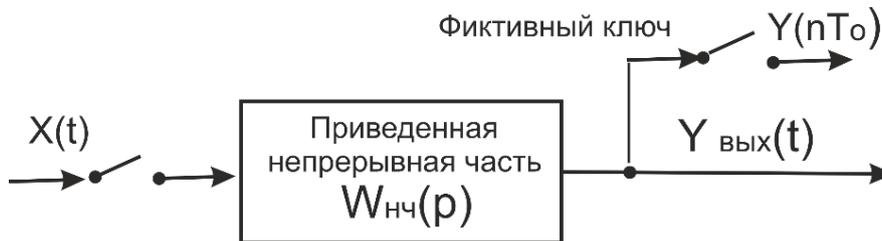


Рис. 9.3. Схема с фиктивным ключом

Тогда

$$y[nT_0] = \sum_{m=0}^n x[mT_0]w[(n-m)T_0]. \quad (9.10)$$

Часто масштаб времени выбирают так, что $T_0 = 1$, а уравнение разомкнутой системы во временной области записывают в виде

$$y[n] = \sum_{m=0}^n x[m]w[n-m]. \quad (9.11)$$

Соотношения (9.10), (9.11) являются сверткой решетчатых функций.

9.2. Описание импульсных систем разностными уравнениями

Разностным уравнением называется соотношение

$$F(x, \Delta x, \dots, \Delta^n x, t) = 0, \quad (9.12)$$

где $\Delta x, \dots, \Delta^n x$ – разности различных порядков:

$$\begin{aligned} \Delta x &= f(t + T_0) - f(t), \\ \Delta^2 f &= \Delta(\Delta f) = \Delta(f(t + T_0) - f(t)) = \\ &= f(t + 2T_0) - f(t + T_0) - f(t + T_0) + f(t) = \\ &= f(t + 2T_0) - 2f(t + T_0) + f(t) \dots \text{и т.д.} \end{aligned} \quad (9.13)$$

Подставляя выражения для разностей различных порядков из соотношений (9.13) в (9.12) при $T_0 = 1$ уравнение (9.12) можно записать в виде

$$F[(t, x(t), x(t+1), \dots, x(t+n-1), x(t+n))] = 0. \quad (9.14)$$

Если уравнение (9.14) содержит в явном виде $x(t+n)$ и $x(t)$, то число n называется порядком разностного уравнения. Если уравнение (9.14) не содержит явно $x(t), x(t+1), \dots, x(t+m)$, то замена независимой переменной $t+m$ на новую переменную $t' = t+m$ приводит это уравнение к уравнению порядка $n - m$. Это свойство существенно отличает конечно-разностные уравнения от дифференциальных.

Важным частным случаем являются линейные разностные уравнения с постоянными коэффициентами. Простейший вариант такого уравнения можно представить в виде

$$\sum_{i=0}^n a_i x[k+i] = u[k], \quad (9.15)$$

где a_i – постоянные числа; $x[k]$ – неизвестная функция; $u[k]$ – заданная функция времени. В общем случае, когда входное воздействие описывается соотношением, включающим разности до m -го порядка включительно, линейное разностное уравнение с постоянными коэффициентами имеет вид

$$\sum_{i=0}^n a_i x[k+i] = \sum_{j=0}^m d_j u[k+j], \quad a_n = 1. \quad (9.16)$$

9.3. Построение векторно-матричных разностных уравнений

Для простоты в уравнении (9.16) положим

$$d_1 = d_2 = \dots = d_m = 0, \quad d_0 \neq 0$$

и представим его в виде

$$x[k+n] = -\sum_{i=1}^n \bar{a}_i x[k+i] + \bar{d}_0 u[k], \quad (9.17)$$

где $\bar{a}_i = a_i / a_n, i = 0, n-1, \quad \bar{d}_0 = d_0 / a_n$.

Введем обозначения

$$\begin{aligned} x_1[k] &= x[k], \\ x_2[k] &= x_1[k+1] = x[k+1], \\ x_3[k] &= x_2[k+1] = x[k+2], \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots, \\ x_{n-1}[k] &= x_n[k+1] = x[k+n]. \end{aligned}$$

С использованием этих обозначений неоднородное разностное уравнение (9.17) может быть приведено к системе n уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} x_1[k+1] &= x_2[k], \\ x_2[k+1] &= x_3[k], \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots, \\ x_n[k+1] &= \sum_{i=0}^{n-1} \bar{a}_i x[k+i] + \bar{d}_0 u[k]. \end{aligned} \quad (9.18)$$

Систему (9.18) удобно представлять в компактной векторно-матричной форме:

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{A}\mathbf{x}[k] + \mathbf{b}u[k], \quad (9.19)$$

$$\text{где } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots \\ \dots & \dots & & \ddots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\bar{a}_0 & -\bar{a}_1 & \dots & -\bar{a}_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}[k+1] = \begin{bmatrix} x_1[k+1] \\ x_2[k+1] \\ \vdots \\ x_n[k+1] \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \bar{d}_0 \end{bmatrix}.$$

Если линейное неоднородное уравнение имеет вид (9.16), его по этой же схеме можно привести к форме (9.18). При этом соответствующие компоненты вектора, где $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$ будут ненулевыми. Уравнение (9.19) является представлением модели дискретной системы в пространстве состояний.

9.4. Решение линейных разностных уравнений

Запишем однородное уравнение

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{A}\mathbf{x}[k], \quad (9.20)$$

соответствующее неоднородному уравнению (9.18). Если

$$\mathbf{x}^{(1)}[k], \mathbf{x}^{(2)}[k], \dots, \mathbf{x}^{(n)}[k] \quad (9.21)$$

– фундаментальная система решений уравнения (9.20), то общее решение векторно-матричного уравнения (9.19) может быть записано в виде

$$\mathbf{x}[k] = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{x}^{(i)}[k] + \tilde{\mathbf{x}}[k], \quad (9.22)$$

где c_i – произвольные постоянные, а $\tilde{\mathbf{x}}[k]$ – какое-либо частное решение системы (9.19).

Решение однородного уравнения ищем в виде

$$\mathbf{x}[k] = \boldsymbol{\gamma} z^k, \quad (9.23)$$

где $\boldsymbol{\gamma}$ – вектор, а z – числа, подлежащие определению. Подставляя (9.23) в (9.20) имеем

$$\boldsymbol{\gamma} z^{k+1} = \mathbf{A}\boldsymbol{\gamma} z^k$$

или

$$(\mathbf{E}z - \mathbf{A})\boldsymbol{\gamma} = 0, \quad (9.24)$$

где \mathbf{E} – единичная матрица. Так как $\boldsymbol{\gamma} \neq 0$, то из (9.24) следует, что

$$\det(\mathbf{E}z - \mathbf{A}) = 0. \quad (9.25)$$

Уравнение (9.25) называется *характеристическим уравнением* системы (9.20). Его решение дает n корней z_i – характеристических чисел мат-

рицы \mathbf{A} . Каждому корню z_i соответствует с точностью до постоянного множителя вектор $\gamma^{(i)}$, так что

$$\mathbf{x}^{(i)}[k] = \gamma^{(i)} z_i^k \quad (9.26)$$

и общее решение векторного однородного конечно-разностного уравнения может быть записано в виде

$$\mathbf{x}[k] = \sum_{i=1}^n c_i \gamma^{(i)} z_i^k. \quad (9.27)$$

9.5. Построение уравнений импульсных систем в пространстве состояний

Для построения линейных дискретных уравнений состояния рассмотрим поведение системы на интервале времени $t = [t_0, t]$, $t_0 = 0, t = T_0$. Если в качестве фиксатора используется экстраполятор нулевого порядка, то внутри указанного интервала поведение системы описывается векторным дифференциальным уравнением (8.6), которое для простейшего случая системы с одним входом и одним выходом имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u, \\ y &= \mathbf{C}^T \mathbf{x}, \end{aligned} \quad (9.28)$$

где \mathbf{x} – $n \times 1$ -вектор *состояния*; u, y – скалярные вход и выход системы; \mathbf{A} – $n \times n$ -матрица, а \mathbf{B}, \mathbf{C} – $n \times 1$ -векторы.

В соответствии с (8.35) общее решение уравнения (9.28) на интервале времени $t = [t_0, t]$, $t_0 = 0, t = T_0$ имеет вид

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t - t_0) \mathbf{x}_0 + \int_0^{T_0} \Phi(t - \tau) \mathbf{B}u(\tau) d\tau, \quad (9.29)$$

где

$$\Phi(t - t_0) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} = \sum_{r=0}^{\infty} \mathbf{A}^r \frac{(t - t_0)^r}{r!}, \quad t_0 = 0, t = T_0 \quad (9.30)$$

– матрица переходных состояний.

Предполагается, что шаг дискретизации T_0 постоянный и используется фиксатор в виде экстраполятора нулевого порядка. Поэтому сигнал управ-

ления на интервале дискретизации БЦВМ также можно считать постоянным. Тогда

$$\Phi(T_0) = e^{A(T_0)},$$

$$\mathbf{Q}(T_0) = \left[\int_0^{T_0} \Phi(\tau) d\tau \right] \mathbf{B} \quad (9.31)$$

– постоянные $n \times n$ -матрицы, зависящие от T_0 , как от параметра. Поскольку \mathbf{B} $n \times 1$ -вектор, то $\mathbf{Q}(T_0)$ также вектор. Таким образом можно окончательно записать

$$\mathbf{x}[k+1] = \Phi(T_0)\mathbf{x}[k] + \mathbf{Q}(T_0)u(k),$$

$$y[k] = \mathbf{C}^T [k] \mathbf{x}[k]. \quad (9.32)$$

Уравнение (9.32) представляет собой рекуррентное соотношение для определения вектора состояния объекта в момент времени $k+1$ по значениям вектора состояния и сигнала управления в момент времени k . Матрица переходных состояний линейной дискретной модели объекта $\Phi(T_0)$ рассматривается на интервале $(k, k+1)$ и обладает теми же свойствами, которые мы рассмотрели в предыдущем разделе.

Лекция 10. ОПИСАНИЕ ИМПУЛЬСНЫХ САУ В ПРОСТРАНСТВЕ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

10.1. Описание импульсных систем с помощью дискретного преобразования Лапласа

Дискретное преобразование Лапласа (*D-преобразование*) решетчатой функции $f[n]$ определяется как

$$F(q) = D\{f[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-qn} f[n], \quad (10.1)$$

где $q = \sigma + j\bar{\omega}$ – комплексная переменная.

D-преобразование решетчатой функции $f[n]$ можно рассматривать как обычное преобразование Лапласа функции, состоящей из последовательности смещенных дельта-функций:

$$g[\bar{t}] = \sum_{n=0}^{\infty} f[n] \delta(\bar{t} - n). \quad (10.2)$$

Применяя к этой функции преобразование Лапласа, на основании фильтрующего свойства дельта-функции получим

$$\begin{aligned} L\{g(\bar{t})\} &= \int_0^{\infty} g(\bar{t}) e^{-q\bar{t}} d\bar{t} = \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f[n] \delta(\bar{t} - n) e^{-q\bar{t}} d\bar{t} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f[n] \int_0^{\infty} \delta(\bar{t} - n) e^{-q\bar{t}} d\bar{t} = \sum_{n=0}^{\infty} f[n] e^{-qn} = D\{f[n]\}. \end{aligned} \quad (10.3)$$

Непосредственно из определения *D-преобразования* (10.1) следует, что $F(q)$ является периодической функцией с периодом 2π . Действительно для любого целого k

$$F(q + 2\pi jk) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(q+2\pi jk)n} f[n] = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-qn} f[n] = F(q). \quad (10.4)$$

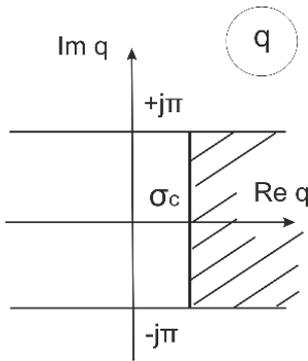


Рис. 10.1. Основная полоса комплексной плоскости q

Поэтому достаточно изучить свойства $F(q)$ в любой полосе шириной 2π . Наиболее удобна для этого полоса $-\pi < \text{Im} \leq \pi$ (рис. 10.1).

Если ввести фиктивный ключ на выходе разомкнутой системы (рис. 9.3) для решетчатых функций $x[n]$, $y[n]$ можно записать дискретные преобразования Лапласа – $X(q)$, $Y(q)$. Выше мы показали, что D -преобразование является обычным преобразованием

Лапласа решетчатых функций. Поэтому по определению имеет место передаточная функция, как отношение изображений по Лапласу выходного и входного сигналов системы:

$$W(q) = \frac{Y(q)}{X(q)} = \frac{b_0 e^{mq} + b_1 e^{(m-1)q} + \dots + b_{m-1} e^q + b_m}{a_0 e^{nq} + a_1 e^{(n-1)q} + \dots + a_{n-1} e^q + a_n} \quad (10.5)$$

10.2. Описание импульсных систем с помощью Z -преобразования

Z -преобразование решетчатой функции $f[n]$ определяется как

$$F(z) = Z\{f[nT_0]\} = \sum_{n=0}^{\infty} f[nT_0] z^{-n}. \quad (10.6)$$

Функция $f[nT_0]$ – является оригиналом, а $F(z)$ – изображением.



Рис. 10.2

Все основные свойства Z -преобразования могут быть получены из соответствующих свойств D -преобразования. В частности, имеет место теорема свертки. Если для системы,

показанной на рис. 10.2 $X(z) = Z\{x[n]\}$, $W(z) = Z\{w[n]\}$, то

$$Y(z) = W(z)X(z). \quad (10.7)$$

Основные свойства Z -преобразования

1. Линейность: $X(z) = Z\{a \cdot f[t]\} = a \cdot F(z)$.

2. Сдвиг во временной области: $Z\{f(t \pm nT_0)\} = z^{\pm n} \cdot F(z)$.

3. Теорема о начальном значении. Если

$$f(t) \rightarrow F(z) \text{ и } \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) < \infty, \text{ то } \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t).$$

4. Теорема о конечном значении. Если нет полюсов на окружности единичного радиуса комплексной z -плоскости, то $\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$.

10.3. Связь дискретного преобразования Лапласа с Z -преобразованием

Нетрудно заметить, что (10.1) совпадает с (10.6) при замене

$$z = e^q. \quad (10.8)$$

И наоборот, если известно изображение $F(q)$ некоторой решетчатой функции, то соответствующее изображение $F(z)$ может быть найдено с помощью замены комплексной переменной q по формуле $q = \ln z$. Таким образом принципиальной разницы между D -преобразованием и Z -преобразованием не существует. Опираясь на эту связь для системы, показанной на рис. 10.2, с учетом (9.16) можно записать Z -передаточную функцию:

$$W(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_{m-1} z + b_m}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n}. \quad (10.9)$$

Замена (10.8) отображает основную полосу на всю комплексную плоскость z . При этом отрезок мнимой оси $(-\pi, \pi)$ отображается в окружность единичного радиуса (рис. 10.3)

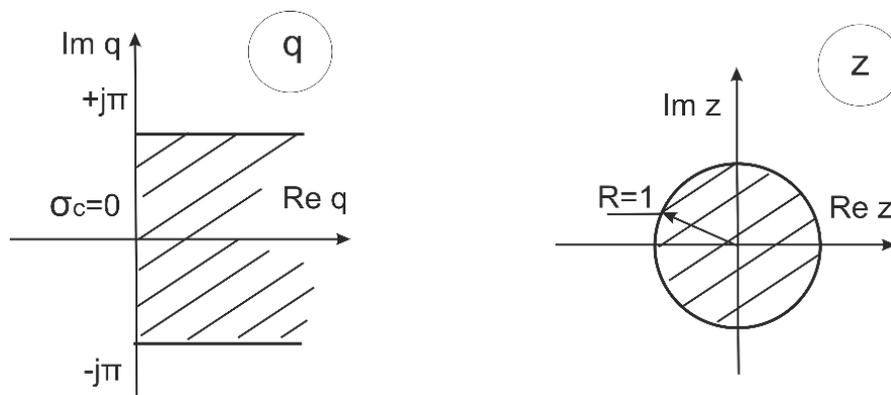


Рис. 10.3. Отображение q -плоскости на z -плоскость

Часто D -преобразование и Z -преобразование считают идентичными и различающимися обозначениями и формами записи дискретного преобразования Лапласа. Однако, как видно из рис. 10.3. свойства комплексных аргументов существенно различны.

10.4. Частотные характеристики импульсных систем

Поскольку дискретное преобразование Лапласа является обычным преобразованием Лапласа решетчатой функции в определении D -преобразования (10.1) можно произвести формальную замену $q = j\omega$, тогда при $T_0 = 1$

$$F(j\omega) = F(q) \Big|_{q=j\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-qn} f[n] \Big|_{q=j\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-j\omega n} f[n]. \quad (10.10)$$

Частотную характеристику импульсной системы можно получить также из Z -преобразования с учетом связи $z = e^q = e^{j\omega}$, действительно

$$F(j\omega) = F(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=0}^{\infty} f[nT_0] z^{-n} \Big|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-j\omega n} f[n]. \quad (10.11)$$

Аналогично частотная передаточная функция импульсной системы имеет вид

$$W(j\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} w[n] e^{-j\omega n}. \quad (10.12)$$

В отличие от непрерывных систем реакция импульсной цепи на гармонический сигнал может быть не гармонической и даже не периодической, тем не менее частотная характеристика в ряде случаев оказывается полезной.

Свойства частотных характеристик импульсных систем.

1. $W(j\omega)$ является периодической с периодом $\frac{2\pi}{T_0}$, т.к.

$$e^{-j\omega n} = e^{-\left(j\omega + j\frac{2\pi k}{T_0}\right)n}$$

2. $\lim_{\omega \rightarrow 0} W(j\omega) = \text{Re}$, $\lim_{\omega \rightarrow \frac{\pi}{T_0}} W(j\omega) = \text{Re}$.

3. $A(\omega)$, $U(\omega)$ – четные, а фазовая частотная характеристика нечетная.

10.5. Псевдочастотные характеристики импульсных систем

Переход к псевдочастотным характеристикам осуществляется с целью использовать методы анализа устойчивости линейных непрерывных систем. Для этого надо отобразить внутренность круга единичного радиуса Z -плоскости в левую полуплоскость комплексного аргумента (рис. 10.4). Это осуществляется формальной заменой:

$$z = \frac{1+w}{1-w}, \quad (10.13)$$

т.е.
$$w = \frac{z-1}{z+1} = \frac{e^{j\omega T_0} - 1}{e^{j\omega T_0} + 1} = \frac{\cos \omega T_0 - 1 + j \sin \omega T_0}{\cos \omega T_0 + 1 + j \sin \omega T_0} = j \frac{\sin \omega T_0}{1 + \cos \omega T_0} = j\nu, \quad (10.14)$$

где $\nu = \operatorname{tg}(\omega T_0 / 2)$ (по формуле половинного угла $\operatorname{tg}(\alpha / 2) = \sin \alpha / (1 + \cos \alpha)$).

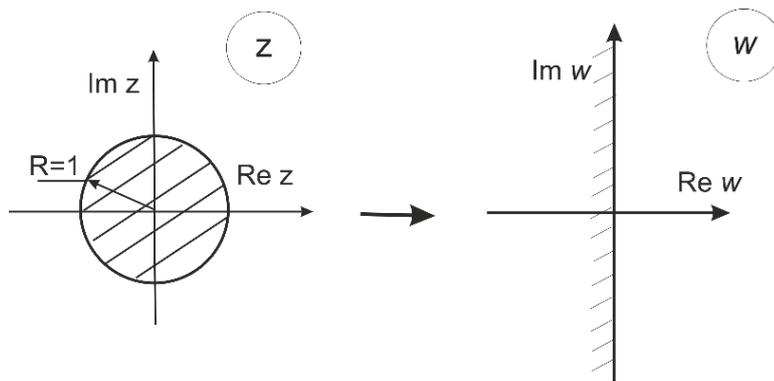


Рис 10.4. Переход от Z -плоскости в левую полуплоскость w

Используется также модифицированное w -преобразование:

$$z = \left(1 + \frac{T_0}{2} w\right) / \left(1 - \frac{T_0}{2} w\right); \quad (10.15)$$

$$w = \frac{2}{T_0} \frac{z-1}{z+1} = \frac{2}{T_0} \frac{e^{j\omega T_0} - 1}{e^{j\omega T_0} + 1} = \frac{2}{T_0} j \cdot \operatorname{tg} \frac{\omega T_0}{2} = \frac{2}{T_0} j\nu = j\lambda. \quad (10.16)$$

Здесь $\lambda = \frac{2}{T_0} \operatorname{tg} \frac{\omega T_0}{2}$ – абсолютная псевдочастота.

Из последнего равенства следует, что $\lambda \cong \omega$, т.к. при малом интервале дискретности БЦВМ $T_0 \operatorname{tg} \frac{\omega T_0}{2} \cong \frac{\omega T_0}{2}$. Следует иметь в виду, выполнение этого примерного равенства зависит также от значения круговой частоты ω .

Следовательно, выбор (малого) интервала дискретности T_0 должен осуществляться с учетом максимального значения ω из диапазона частот, в котором функционирует САУ.

10.6. Получение Z-передаточной функции по уравнению состояний

С использованием теоремы сдвига во временной области Z-изображение уравнений состояния (9.32) представляется в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(z)z &= \Phi \mathbf{x}(z) + \mathbf{Q}u(z) \\ y(z) &= \mathbf{C}^T \mathbf{x}(z). \end{aligned} \quad (10.17)$$

(далее для краткости будем обозначать $\mathbf{x}(z) \rightarrow \mathbf{x}$, $u(z) = u$, $y(z) = y$). Уравнение состояния в (10.17) можно записать в виде $(\mathbf{E}z - \Phi)\mathbf{x} = \mathbf{Q}u$, откуда

$$\mathbf{x} = (\mathbf{E}z - \Phi)^{-1} \mathbf{Q}u = \frac{\overline{(\mathbf{E}z - \Phi)} \cdot \mathbf{Q}}{\det(\mathbf{E}z - \Phi)} u, \quad (10.18)$$

где $\overline{(\mathbf{E}z - \Phi)}$ – присоединенная матрица, составленная из алгебраических дополнений со своим знаком. Подставляя \mathbf{x} из (10.18) в уравнение наблюдений системы (10.17) окончательно получаем

$$y(z) = \frac{\mathbf{C}^T \overline{(\mathbf{E}z - \Phi)} \cdot \mathbf{Q}}{\det(\mathbf{E}z - \Phi)} u(z), \quad (10.19)$$

где $\frac{\mathbf{C}^T \overline{(\mathbf{E}z - \Phi)} \cdot \mathbf{Q}}{\det(\mathbf{E}z - \Phi)} = \frac{y(z)}{u(z)} = W(z)$ – Z-передаточная функция системы.

10.7. Структурные преобразования импульсных систем

Правила преобразования структурных схем импульсных систем имеют ряд существенных отличий от структурных преобразований непрерывных систем. Это связано с количеством и местом включения импульсных элементов. Рассмотрим ряд характерных случаев.

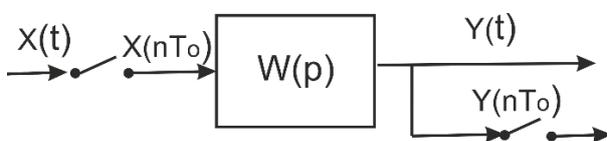


Рис. 10.5. Система с ключом на входе

Разомкнутая система с ключом на входе. Из структурной схемы, представленной на рис. 10.5, непосредственно следует

$$Y(z) = U(z)W(z), \quad (10.20)$$

где $W(z) = Z\{w(t)\}$.

Последовательное соединение звеньев, разделенных ключом. Соответствующая структурная схема представлена на рис. 10.6. Для этого случая можно записать

$$R(z) = U(z)W_1(z), \quad Y(z) = R(z)W_2(z), \quad (10.21)$$

откуда $Y(z) = U(z)W_1(z)W_2(z)$

или $W(z) = Y(z) / U(z) = W_1(z)W_2(z), \quad (10.22)$

т.е. Z-передаточная функция системы равна произведению Z-передаточных функций звеньев.

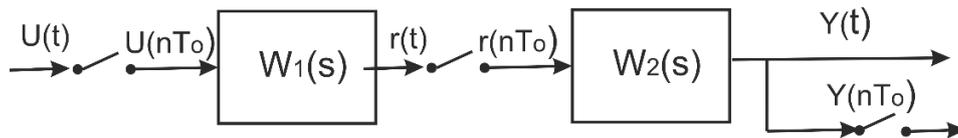


Рис. 10.6. Последовательное соединение звеньев, разделенных ключом

Последовательное соединение звеньев, не разделенных ключом. Структурная схема представлена на рис. 10.7, откуда следует, что

$$Y(z) = W(z)U(z), \quad (10.23)$$

где $W(z) = Z\{W_1(s)W_2(s)\} \neq W_1(z)W_2(z)$.

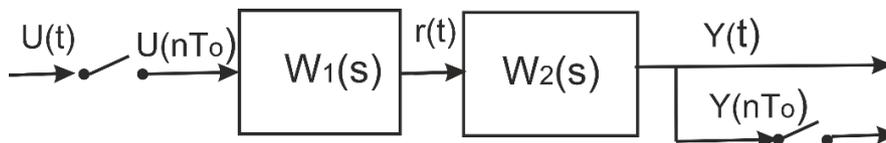


Рис. 10.7. Последовательное соединение звеньев, не разделенных ключом

Замкнутая система с корректирующим звеном в обратной связи и прерыванием ошибки. Структурная схема представлена на рис. 10.8.

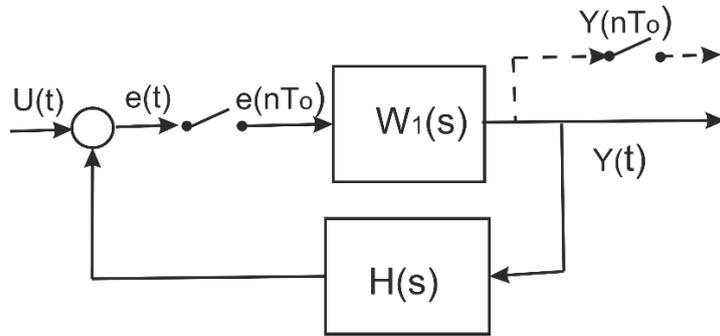


Рис. 10.8. Замкнутая система с корректирующим звеном в обратной связи

Система описывается следующими соотношениями:

$$Y(z) = W(z)E(z); \quad (10.24)$$

$$E(z) = U(z) - E(z)Z\{W(s)H(s)\}. \quad (10.25)$$

В соответствии с (10.25)

$$E(z) = \frac{U(z)}{1 + Z\{W(s)H(s)\}}. \quad (10.26)$$

Подставляя полученное $E(z)$ из (10.26) в (10.24) получаем

$$Y(z) = \frac{W(z)}{1 + Z\{W(s)H(s)\}} \cdot U(z). \quad (10.27)$$

Замкнутая система с единичной обратной связью и прерыванием ошибки. Соответствующая структурная схема является частным случаем схемы, приведенной на рис. 10.8. В данном случае $H(z) \equiv 1$ и Z -преобразование $Y(z)$ выхода $y(t)$ системы определяется как

$$Y(z) = \Phi(z)U(z), \quad (10.28)$$

где $\Phi(z) = \frac{W(z)}{1 + W(z)}$.

Лекция 11. УСТОЙЧИВОСТЬ И КАЧЕСТВО ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ ЛИНЕЙНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ

11.1. Анализ устойчивости по корням характеристического уравнения

При анализе устойчивости непрерывных линейных САУ мы установили, что для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения замкнутой системы лежали в левой полуплоскости комплексного переменного s .

При изучении импульсных систем используется дискретное преобразование Лапласа $F(q)$, которое является периодической функцией с периодом 2π , поэтому свойства $F(q)$ изучаются в полосе $-\pi < \text{Im} \leq \pi$ (рис. 10.1). При этом свойства левой полуплоскости комплексного переменного s аналогичны свойствам левой полуполосы комплексного аргумента q . Следовательно для устойчивости импульсной системы необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения замкнутой системы лежали в левой полуполосе ($-\pi < \text{Im} q \leq \pi$) комплексной плоскости q .

При переходе к Z -преобразованию эта полуполоса отображается в круг единичного радиуса комплексной плоскости z . Граница этой области соответствует отрезку $-\pi < \text{Im} q \leq \pi$ мнимой оси основной полосы. Следовательно, для устойчивости замкнутой системы, описание которой представлено в виде Z - передаточной функции, необходимо и достаточно, чтобы все корни $z_i = e^{q_i}$ характеристического уравнения располагались внутри круга единичного радиуса комплексной плоскости z : $|z_i| < 1, i = \overline{1, n}$.

Пусть Z -передаточная функция разомкнутой системы имеет вид $W(z) = B(z) / A(z)$. Тогда передаточная функция замкнутой системы

$$\Phi(z) = \frac{W(z)}{1 + W(z)} = \frac{B(z)}{A(z) + B(z)}, \quad (11.1)$$

а характеристическое уравнение принимает вид

$$A(z) + B(z) = 0. \quad (11.2)$$

Если замкнутая система представлена уравнениями состояния (9.32), то характеристическое уравнение в соответствии с (10.19) имеет вид

$$\det(\mathbf{E}z - \mathbf{\Phi}) = 0. \quad (11.3)$$

Таким образом, анализ устойчивости системы сводится к вычислению всех корней уравнений (11.2) или (11.3) и проверке выполнения условий $|z_i| < 1$, $i = \overline{1, n}$.

Вычисление корней полиномов высокого порядка иногда может представлять вычислительные трудности. Поэтому для анализа устойчивости широко используют критерии и алгоритмы, не требующие вычислений корней характеристического уравнения. Большинство критериев устойчивости импульсных систем строятся как аналоги соответствующих методов и алгоритмов для линейных непрерывных систем. Далее рассматриваются алгебраические критерии (по коэффициентам характеристического уравнения) и частотные критерии (по амплитудно-фазовой частотной характеристике).

11.2. Алгебраический критерий Гурвица для импульсных систем

Существуют различные варианты построения алгебраических критериев устойчивости. Читатель может найти их в обширной литературе на эту тему. Мы рассмотрим простейший подход.

Пусть характеристический полином имеет вид

$$D(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n. \quad (11.4)$$

Осуществим конформное отображение внутренности круга единичного радиуса на левую полуплоскость с использованием w -преобразования (10.13):

$$z = \frac{1+w}{1-w}. \quad (11.5)$$

При этом полином $D(z)$ (11.4) преобразуется в полином

$$D(w) = \bar{a}_0 w^n + \bar{a}_1 w^{n-1} + \dots + \bar{a}_{n-1} w + \bar{a}_n, \quad (11.6)$$

а корни $z_i, i = \overline{1, n}$ характеристического уравнения $D(z) = 0$ отображаются в корни характеристического уравнения $D(w) = 0$ аргумента:

$$w_i = \frac{z_i - 1}{z_i + 1}. \quad (11.7)$$

Далее строится матрица Гурвица (5.12):

$$\Delta_n = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & \cdot & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdot & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n-2} & a_n \end{bmatrix}.$$

Правила формирования этой матрицы мы описали в разделе 5. Кратко они сводятся к следующим: на диагонали располагаем все коэффициенты по возрастанию индексов, в каждой следующей строке индексы уменьшаем на 1. Коэффициенты с отсутствующими индексами заменяем нулями.

Для устойчивости системы необходимо, чтобы все определители Гурвица, построенные из диагональных миноров, были положительны:

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \cdots, \Delta_n > 0. \quad (11.8)$$

11.3. Частотный критерий устойчивости (аналог критерия Михайлова)

Критерий основан на принципе аргумента:

Число n корней уравнения $D(z) = 0$ внутри единичной окружности равно числу полных оборотов вектора $D(z)$ вокруг начала координат при однократном обходе точкой z единичной окружности $|z|=1$ в положительном направлении, т.е.

$$-\pi < \arg z \leq \pi, \quad |z|=1, \quad \Delta \arg D(z) = 2\pi n. \quad (11.9)$$

Для иллюстрации принципа аргумента представим характеристический полином в виде

$$D(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = a_0 \prod_{i=1}^n (z_1 - z), \quad (11.10)$$

где $z_i, i = \overline{1, n}$ – корни характеристического уравнения $D(z) = 0$.

Если произвести замену

$$z = e^q = e^{j\bar{\omega}}, \quad -\pi < \bar{\omega} \leq \pi, \quad (11.11)$$

внутренность круга единичного радиуса отображается в полосу $-\pi < \text{Im } q \leq \pi$ на комплексной плоскости аргумента q . Нахождение корней многочлена $D(q)$ левее мнимой оси основной полосы соответствует нахождению корней многочлена $D(z)$ внутри окружности единичного радиуса круга, т.к. граница области устойчивости в этой основной полосе соответствует границе $|z|=1$. Следовательно, однократному обходу единичной окружности соответствует изменение частоты $-\pi < \bar{\omega} \leq \pi$. При этом вектор, соответствующий одному сомножителю в (1.10) совершит один полный оборот, т.е. $\Delta \arg D(z_{uu} - z) = 2\pi$. Если же все корни внутри круга единичного радиуса – $\Delta \arg D(z) = 2\pi n$.

Таким образом, для соответствующего полиному (11.10) годографа Михайлова:

$$D(j\bar{\omega}) = a_0 e^{j\bar{\omega}n} + a_1 e^{j\bar{\omega}(n-1)} + \dots + a_{n-1} e^{j\bar{\omega}} + a_n = U(\bar{\omega}) + jV(\bar{\omega}) \quad (11.12)$$

частотный критерий устойчивости формулируется следующим образом:

Замкнутая система устойчива тогда и только тогда, когда при изменении $\bar{\omega}$ в интервале $-\pi < \bar{\omega} \leq \pi$ ($0 < \bar{\omega} \leq \pi$) число полных оборотов вектора Михайлова на плоскости $U(\bar{\omega}), jV(\bar{\omega})$ в положительном направлении равно n ($n/2$), где n – степень многочлена $D(z)$.

11.4. Аналог критерия Найквиста

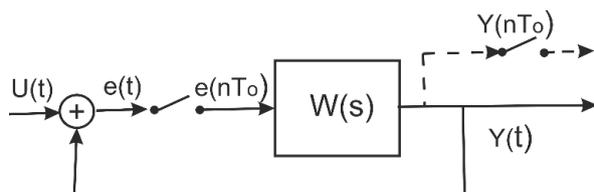


Рис. 11.1. Замкнутая импульсная система с единичной обратной связью

Рассмотрим замкнутую импульсную систему с единичной обратной связью, показанную на рис. 11.1. Здесь $W(s)$ – передаточная функция приведенной непрерывной части системы, включающая

объект, исполнительные и управляющие устройства и фиксатор нулевого порядка.

Поскольку, поступающий на вход приведенной непрерывной части сигнал ошибки является решетчатой функцией, передаточной функции $W(s)$ будет соответствовать некоторая Z -передаточная функция $W(z)$. Пусть

$$W(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}. \quad (11.13)$$

Тогда передаточная функция замкнутой системы

$$\Phi(z) = \frac{W(z)}{1 + W(z)} = \frac{P(z)}{Q(z) + P(z)} = \frac{P(z)}{D(z)}, \quad (11.14)$$

где $D(z) = Q(z) + P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$.

С другой стороны

$$W(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{P(z) + Q(z) - Q(z)}{Q(z)} = \frac{D(z) - Q(z)}{Q(z)} = \frac{D(z)}{Q(z)} - 1 \quad (11.15)$$

или

$$W(z) + 1 = \frac{D(z)}{Q(z)}. \quad (11.16)$$

Далее воспользуемся принципом аргумента, который мы проиллюстрировали в предыдущем разделе. В соответствии с этим принципом, если z совершает однократный обход единичной окружности $|z|=1$,

$$\Delta \arg [1 + W(z)] = \Delta \arg D(z) - \Delta \arg Q(z). \quad (11.17)$$

Для устойчивости замкнутой системы все корни многочлена $D(z)$ должны быть внутри круга единичного радиуса, т.е. должно выполняться

$$\Delta \arg D(z) = 2\pi n. \quad (11.18)$$

Если полином $Q(z)$ имеет m корней (т.е. $W(z) = P(z) / Q(z)$ имеет m полюсов) вне круга единичного радиуса, то

$$\Delta \arg Q(z) = 2\pi n - 2\pi m. \quad (11.19)$$

Из (11.18), (11.19) следует, что для устойчивости замкнутой системы, имеющей в разомкнутом состоянии m полюсов вне круга единичного радиуса должно выполняться

$$\Delta \arg[1 + W(z)] = 2\pi n - (2\pi n - 2\pi m) = 2\pi m. \quad (11.20)$$

Рассмотрим теперь годограф частотной характеристики $W(j\bar{\omega})$ разомкнутой системы. Эта кривая, в соответствии с (11.16) образуется из кривой $W(j\bar{\omega}) + 1 = [Q(j\bar{\omega}) + P(j\bar{\omega})] / Q(j\bar{\omega})$ простым переносом последней влево на единицу. Начало вектора теперь находится в точке $(-1, j0)$, а его конец при изменении $\bar{\omega}$ скользит по годографу частотной характеристики $W(j\bar{\omega})$. Отсюда с учетом (11.18), (11.20) приходим к следующей формулировке критерия устойчивости Найквиста для линейных моделей импульсных систем.

Для того, чтобы замкнутая импульсная система, неустойчивая в разомкнутом состоянии и содержащая m полюсов вне круга единичного радиуса, была устойчивой необходимо и достаточно, чтобы годограф частотной характеристики $W(j\bar{\omega})$ разомкнутой системы охватывал в положительном направлении точку $(-1, j0)$ m раз при изменении $\bar{\omega}$ от $-\pi$ до π или $m/2$ раз при изменении $\bar{\omega}$ от 0 до π .

11.5. Расчет переходных процессов в импульсных системах

После установления факта устойчивости системы необходимо убедиться в том, что качество переходного процесса удовлетворяет заданным требованиям. Мы рассмотрим два наиболее простых и эффективных метода расчета переходных процессов.

Метод степенных рядов. Если известно Z-преобразование решетчатой функции выходного сигнала $y[n]$ вида (10.17):

$$Y(z) = Z \{y[nT_0]\} = \sum_{n=0}^{\infty} y[nT_0] z^{-n}, \quad (11.21)$$

переходный процесс легко выписывается в виде коэффициентов при z^{-n} разложения в степенной ряд функции $Y(z)$:

$$y(t) = y[0]\delta(t) + y[T_0]\delta(t - T_0) + \dots + y[kT_0]\delta(t - kT_0) + \dots \quad (11.22)$$

Если $Y(z)$ представлено в виде отношения двух полиномов по отрицательным степеням z , то коэффициенты $y[kT_0]$ могут быть получены путем простого деления числителя $Y(z)$ на его знаменатель:

$$Y(z) = \frac{\sum_{n=0}^m p_n z^{-n}}{\sum_{j=0}^n g_j z^{-j}} = y[0] + y[T_0]z^{-1} + \dots + y[kT_0]z^{-k} + \dots \quad (11.23)$$

Если нули полиномов числителя и знаменателя близки при достаточно большом k могут накапливаться большие ошибки округления. Поэтому этим методом следует пользоваться с осторожностью.

Метод разностных уравнений. Наиболее простым и естественным способом расчета процессов на выходе ЦАС является метод конечно-разностных уравнений. Пусть передаточная функция цифровой системы с одним входом и одним выходом задана в виде

$$W(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\sum_{n=0}^m p_n z^{-n}}{\sum_{j=0}^n g_j z^{-j}}. \quad (11.24)$$

Тогда можно записать следующее соотношение

$$\left(\sum_{j=0}^n g_j z^{-j} \right) Y(z) = \left(\sum_{n=0}^m p_n z^{-n} \right) U(z). \quad (11.25)$$

С использованием теоремы сдвига Z-преобразованию (11.25) может быть поставлено в соответствие следующее конечно-разностное уравнение:

$$\sum_{j=0}^n q_j y[(k-j)T_0] = \sum_{i=0}^m p_i u[(k-i)T_0], \quad (11.26)$$

которое по существу является рекуррентной формулой записи решения. Выполнив нормировку в (11.26) так, что $q_0 = 1$, представим соотношение (11.26) в виде

$$y[kT_0] = -\sum_{j=1}^n \bar{q}_j y[(k-j)T_0] + \sum_{i=0}^m \bar{p}_i u[(k-i)T_0], \quad (11.27)$$

где $\bar{q}_j = q_j / q_0, j = \overline{1, n}$ $\bar{p}_i = p_i / q_0, i = \overline{0, m}$. Из (11.27) нетрудно заметить, что если заданы начальные значения по выходной координате: $y[(k-1)T_0] = y_{k-1}, \dots, y[(k-n)T_0] = y_{k-n}$ и значения входного сигнала

$u[kT_0], u[(k-1)T_0], \dots, u[(k-m)T_0]$ в соответствии с (11.27), можно рассчитать значения выходного сигнала $y[kT_0]$ для произвольных моментов времени kT_0 .

Для устойчивых ЦАС алгоритмы расчета процессов на основе конечно-разностных уравнений являются устойчивыми к возмущениям и широко применяются на практике.

Часть II

НЕЛИНЕЙНЫЕ, ОПТИМАЛЬНЫЕ И АДАПТИВНЫЕ САУ

Лекция 12. МЕТОДЫ ОПИСАНИЯ И АНАЛИЗА НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

12.1. Особенности и методы исследования нелинейных систем

Система называется нелинейной, если она содержит хотя бы одно нелинейное звено. Звено считается нелинейным, если оно не поддается линеаризации с требуемой точностью одним из рассмотренных нами методов. На рис. 12.1 приведены примеры таких характеристик нелинейных звеньев.

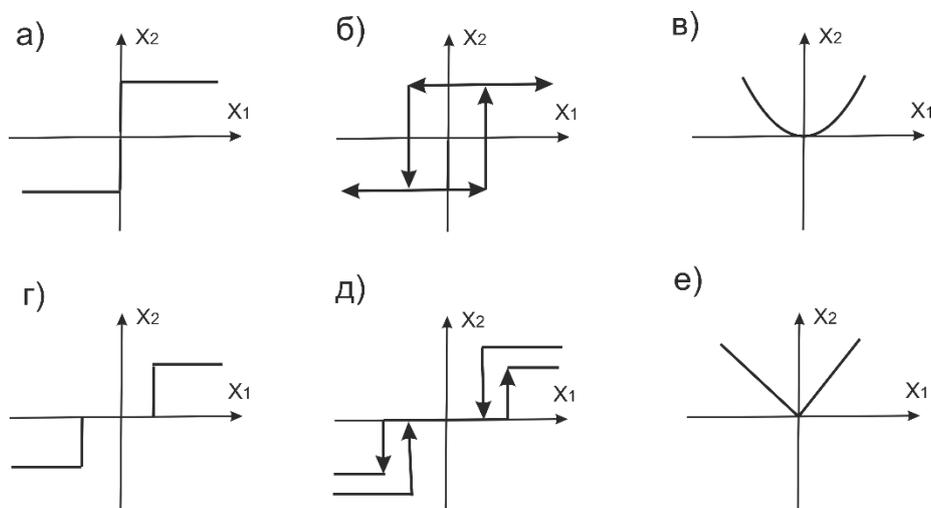


Рис. 12.1. Нелинейные характеристики:

а – релейная; б – релейная с гистерезисом; в – квадратичная; г – релейная с зоной нечувствительности; д – релейная с зоной нечувствительности и гистерезисом; е – модуль сигнала

Нелинейные звенья бывают статические и динамические. У динамических нелинейных звеньев, в отличие от статических, нелинейными являются не только координаты, но и производные от этих координат.

Принципиальное отличие нелинейных систем от линейных состоит в том, что для них не выполняется принцип суперпозиции (реакция системы на сумму воздействий равна сумме реакций на каждое воздействие в отдельности).

В линейных системах устойчивость определяется расположением корней характеристического уравнения. В частности, система устойчива, если все корни в левой полуплоскости. В линейной системе колебания с неизменной амплитудой возможны в случае, когда корни находятся на мнимой оси комплексной плоскости. В нелинейных системах возникновение устойчивых автоколебаний связано с видом нелинейных характеристик. Далее мы подробно рассмотрим эти случаи.

Используются как точные, так и приближенные методы исследования нелинейных систем. Далее мы рассмотрим следующие точные методы: метод фазового пространства, метод точечных отображений, прямой метод Ляпунова, а также приближенный метод гармонической линеаризации.

12.2. Метод фазового пространства

Этот метод исследования нелинейных динамических систем основан на изучении возможных движений системы в *фазовом пространстве*. Термин фазовое пространство применяется преимущественно в теории нелинейных систем и в некотором смысле является синонимом термина *пространство состояний*.

Фазовым пространством (пространством состояний) называется пространство переменных x_1, x_2, \dots, x_n динамической системы, описываемой дифференциальным уравнением

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \quad i = \overline{1, n}, \quad (12.1)$$

где x_1, x_2, \dots, x_n – зависимые переменные; t – независимая переменная; $f_i(*)$ – функции, удовлетворяющие условиям существования решений при заданных начальных условиях ($t = t_0$):

$$x_1(0) = x_1^0, x_2(0) = x_2^0, \dots, x_n(0) = x_n^0. \quad (12.2)$$

В фазовом пространстве (пространстве состояний) текущие значения $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ в каждый момент времени t являются координатами *изображающей точки*.

При изменении времени t образуется геометрическое место (изображающих) точек, которые образуют *фазовую траекторию*.

Множеству всех возможных начальных значений (12.2) будет соответствовать множество фазовых траекторий. Совокупность этих траекторий в фазовом пространстве x_1, x_2, \dots, x_n образует *фазовую картину движения*. Если фазовое пространство 2-х мерное, т.е. может быть представлено в виде фазовой картины на плоскости, то говорят о *фазовом портрете движения*.

Точки фазового пространства, для которых

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (12.3)$$

называются *особыми*. Они являются состояниями равновесия системы, т.к. при этом $\dot{x}_i = 0, \quad i = \overline{1, n}$. Особые точки могут быть изолированными или образовывать некоторую область (отрезок).

Замкнутые фазовые траектории, для которых

$$f_i(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, t_0) = f_i(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, t_0 + T), \quad i = \overline{1, n}, \quad (12.4)$$

где $T = const$ изображают периодические движения с периодом T . Эти движения могут быть изолированными или образовывать некоторую область.

Особые точки и замкнутые траектории могут быть как устойчивыми, так и неустойчивыми в зависимости от того являются они элементами притяжения или отталкивания для окрестных траекторий. Поверхности в фазовом пространстве (линии на фазовой плоскости), которые служат элементами притяжения или отталкивания для всех окрестных траекторий, называются *сепаратрисными*.

Метод фазового пространства состоит в определении либо отдельных фазовых траекторий, либо всей фазовой картины движения, характеризующей такие свойства системы как существование и устойчивость установившихся движений, характер переходных процессов и др. Метод наиболее наглядный, если пространство состояний имеет 2-й порядок, т.е. фазовая картина движения является фазовым портретом.

12.3. Исследование систем второго порядка на фазовой плоскости

Пусть система описывается уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + P(x_1, x_2); \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + Q(x_1, x_2), \end{aligned} \right\} \quad (12.5)$$

где $a_{i,j}$ – постоянные коэффициенты; $P(x_1, x_2)$, $Q(x_1, x_2)$ – члены, обращающиеся в нуль в начале координат ($x_1 = x_2 = 0$). При этом систему (12.5) можно записать в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (12.6)$$

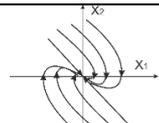
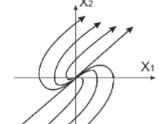
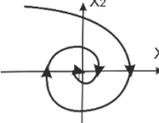
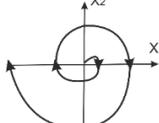
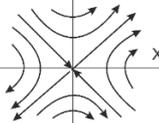
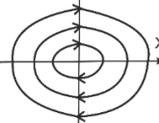
где $A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}$.

Запишем соответствующее характеристическое уравнение:

$$\det(\mathbf{E}\lambda - \mathbf{A}) = \lambda^2 - (a_{1,1} + a_{2,2})\lambda + a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2} = 0. \quad (12.7)$$

А. Пуанкаре показал, что в зависимости от значений корней λ_1, λ_2 характеристического уравнения (12.7) исходная система может иметь типы особых точек, показанные в табл. 12.1.

Таблица 12.1

№ п/п	Тип корней	Тип особой точки	Фазовая картина
1	Веществ. $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$	Устойчивый узел	
2	Веществ. $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$	Неустойчивый узел	
3	Комплексные $\alpha_1 < 0, \alpha_2 < 0$	Устойчивый фокус	
4	Комплексные $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$	Неустойчивый фокус	
5	Вещественные, разных знаков	Седло	
6	Чисто мнимые $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$	Особая точка типа центр	

Если нелинейные члены $P(x_1, x_2) \equiv 0, Q(x_1, x_2) \equiv 0$ при любых x_1, x_2 на фазовой плоскости, то указанные типы особых точек при $x_1 = x_2 = 0$ сохраняются, а характерные для них траектории охватывают всю фазовую плоскость. В следующем разделе мы рассмотрим такой пример.

12.4. Построение фазовых траекторий линейной системы второго порядка

Пусть имеется линейная система второго порядка

$$\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_2x = 0. \quad (12.8)$$

Дифференциальное уравнение (12.8) описывает свободное (невозмущенное) движение системы при начальных условиях

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0. \quad (12.9)$$

Выбрав вектор состояния $x = [x_1, x_2]^T$ так, что $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$ имеем

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -a_1x_2 - a_2x_1 \end{aligned} \right\}$$

или

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= -a_1x_2 - a_2x_1. \end{aligned} \right\} \quad (12.10)$$

Разделив второе уравнение системы (12.9) на первое получаем

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -a_1 - a_2 \frac{x_1}{x_2}. \quad (12.11)$$

Решение этого уравнения при заданных начальных условиях (12.9) является искомой фазовой траекторией

$$x_2 = f(x_1), \quad (12.12)$$

вид которой зависит от расположения корней λ_1, λ_2 характеристического уравнения, соответствующего уравнению (12.8):

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0. \quad (12.13)$$

Рассмотрим конкретный пример. Пусть, например, $a_1 \equiv 0$. Тогда в соответствии с (12.13) имеем пару чисто мнимых корней, а уравнение (12.11) можно записать в виде

$$x_2 dx_2 = -a_2 x_1 dx_1. \quad (12.14)$$

Интегрируя обе части (12.14) получаем

$$x_2^2 + a_2 x_1^2 = C. \quad (12.15)$$

Подставляя в (2.15) начальные условия (12.9) $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ получаем постоянную интегрирования:

$$C = \dot{x}_0^2 + a_2 x_0^2. \quad (12.16)$$

Таким образом мы получили уравнение эллипса с полуосями

$$\dot{x}_0^2 + a_2 x_0^2, \quad (\dot{x}_0^2 + a_2 x_0^2) / a_2, \quad (12.17)$$

т.е. траекторию (12.12) с особой точкой типа центр, что, как и следовало ожидать, соответствует случаю пары чисто мнимых корней (п. 6 в табл. 12.1).

Тот же результат можно получить, записав решение, соответствующее паре чисто мнимых корней, в виде

$$\begin{aligned} x_1 = x &= A \sin(\omega t + \varphi); \\ x_2 = \dot{x} &= A \omega \cos(\omega t + \varphi), \end{aligned} \quad (12.18)$$

где $\omega = \sqrt{a_2}$. Перепишем соотношения (12.18) в виде

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{A} &= \sin(\omega t + \varphi); \\ \frac{x_2}{A \omega} &= \cos(\omega t + \varphi). \end{aligned} \quad (12.19)$$

Возведем обе части равенств в (2.19) в квадрат и сложим их. Тогда с учетом того $\sin^2(\omega t + \varphi) + \cos^2(\omega t + \varphi) = 1$, как и следовало ожидать, получаем уравнение эллипса (12.16).

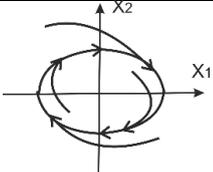
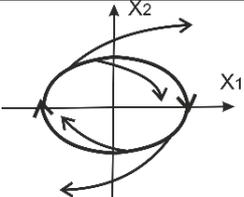
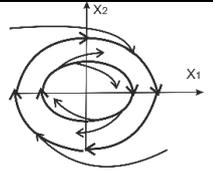
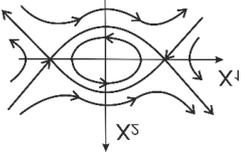
12.5. Понятие макроструктуры фазового пространства

Если $P(x_1, x_2)$, $Q(x_1, x_2)$ – кусочно-линейные функции, исходная нелинейная система (12.5) может быть представлена в виде совокупности различных линейных систем дифференциальных уравнений, каждая из которых будет справедлива в некоторой подобласти фазовой плоскости x_1, x_2 .

В каждой подобласти фазовые траектории могут быть определены так, как описано выше. «Сшивая» траектории, принадлежащие соседним областям с совпадающими координатами на границах, можно построить фазовый портрет на всей плоскости. Фазовые траектории в разных подобластях могут иметь различный характер. Границы этих областей называют *особыми линиями*. Они определяют *макроструктуру* пространства нелинейной системы.

В табл. 12.2 приведены примеры простейших макроструктур нелинейных систем.

Таблица 12.2

№ п/п	Типы особых точек и особых линий	Фазовая картина
1	Устойчивый предельный цикл (неустойчивый в малом, устойчивый в большом)	
2	Неустойчивый предельный цикл (устойчивый в малом, неустойчивый в большом)	
3	Неустойчивый предельный цикл, «вложенный» в устойчивый предельный цикл	
4	Область с устойчивой точкой типа центр, ограниченная сепаратрисами, пересечения которых образуют два седла	

Если построен фазовый портрет системы, то можно сделать заключение о характере движений в системе и ее устойчивости при различных начальных условиях.

12.6. Метод точечных отображений

Метод предназначен для анализа нелинейных систем, макроструктура которых представляет собой множество подобластей с различными типами движений в каждой области. Идея метода состоит в том, чтобы в фазовом пространстве построить соотношение, позволяющее множеству точек од-

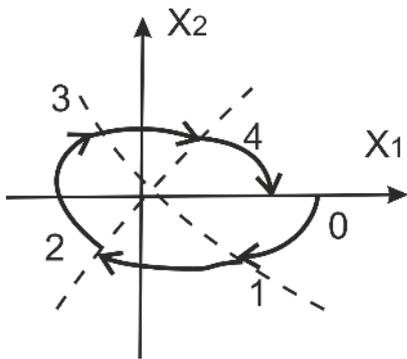


Рис. 12.2. Пример точечных отображений на плоскости

ной поверхности поставить в соответствие множество точек другой поверхности, которые могут быть особыми для разных областей.

Для систем второго порядка существо дела сводится к отображению множества точек одной особой линии в другую. Для этого фазовая плоскость разбивается линиями на области (рис. 12.2), для каждой из которых может быть получено точное аналитическое

соотношение фазовой траектории вида (12.12). Затем траектории областей, имеющих общую особую линию, последовательно «сшиваются» так, чтобы выписать необходимое отображение точек x_0 начальной особой линии в точки x_N конечной:

$$x_1 = f(x_0) \rightarrow x_2 = f(x_1) = f(f(x_0)) = f_1(x_0) \rightarrow \dots \rightarrow x_N = f_{N-1}(x_0), \quad (12.20)$$

Чаще всего рассматривают точечное отображение полупрямой Ox самой в себя:

$$x = f(x_0). \quad (12.21)$$

Такое представление значительно упрощает анализ устойчивости систем:

$x < x_0$ – система устойчива;

$x > x_0$ – система неустойчива;

$x = x_0$ – предельный цикл, который может быть как устойчивым автоколебательным процессом, так и быть границей устойчивости системы в малом, либо может соответствовать особому случаю бифуркации.

12.7. Определение и исследование устойчивости предельных циклов по диаграмме Ламерея

Для того, чтобы избежать проверки указанных выше неравенств для каждой точки x_0 полуоси Ox можно воспользоваться диаграммой Ламерея. Диаграмма имеет вид, показанный на рис. 12.3 Здесь в координатах x_0, x изображены два графика:

$$\left. \begin{array}{l} x = x_0, \\ x = f(x_0). \end{array} \right\} \quad (12.22)$$

Обычная схема анализа фазовых траекторий состоит в последовательном выполнении следующих шагов:

1-й шаг – задаем начальное x_0^1 ;

2-й шаг – определяем отображение $x = f(x_0^1)$;

3-й шаг – полагая полученное x новым начальным условием $x = x_0^2$, повторяем шаги 1 и 2.

На диаграмме (рис. 12.3) указанные шаги изображены в виде стрелок. Несомненным достоинством диаграммы Ламерея является наглядность. В частности, из приведенной диаграммы нетрудно догадаться, что точка $x = x_0^*$ является точкой предельного цикла. Основная трудность в данном случае состоит в построении отображения $x = f(x_0)$. Поэтому метод обычно применяется для систем невысокого (обычно второго) порядка.

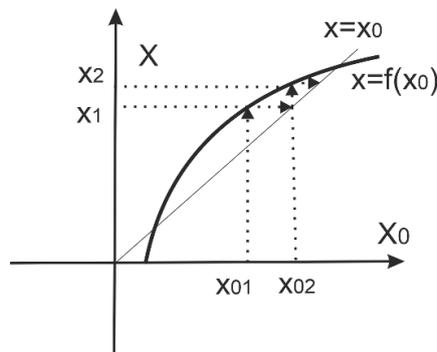


Рис. 12.3. Диаграмма Ламерея

Лекция 13. УСТОЙЧИВОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

13.1. Общее определение понятия устойчивости по Ляпунову

Пусть уравнения динамики системы имеют вид

$$\frac{dy}{dt} = \Phi_i(y_1, y_2, \dots, y_n), \quad i = \overline{1, n}, \quad (13.1)$$

а $\mathbf{y}^*(t) = [y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*]^T$ – некоторый установившийся процесс (невозмущенное движение). Запишем отклонения возмущенного движения от указанного невозмущенного в виде

$$x_i(t) = y_i(t) - y_i^*(t), \quad i = \overline{1, n}. \quad (13.2)$$

Тогда уравнения возмущенного движения можно записать в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = \overline{1, n}. \quad (13.3)$$

В соответствии с (13.1), (13.3)

$$F_i(\mathbf{x}) = \Phi_i(\mathbf{y}) - \Phi_i(\mathbf{y}^*), \quad i = \overline{1, n}. \quad (13.4)$$

Очевидно, что

$$F_i(\mathbf{0}) \equiv 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (13.5)$$

т.е. система имеет тривиальное решение:

$$x_i(t) \equiv 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (13.6)$$

Определение устойчивости по Ляпунову (А.М. Ляпунов, 1892).

Тривиальное решение $\mathbf{x}(t) = 0$ является устойчивым по Ляпунову, если при заданном $\varepsilon > 0$, сколько бы малым оно ни было, существует $\delta > 0$, зависящее от ε , такое, что если

$$\|\mathbf{x}(t_0)\| < \delta;$$

$$\|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon, \quad \text{для всех } t_0 < t < \infty.$$

Если

$$\mathbf{x}(t) \rightarrow 0, \quad \text{при } t \rightarrow \infty,$$

то невозмущенное движение $F_i^*(0) \equiv 0, \quad i = \overline{1, n}$ называется *асимптотически устойчивым*.

13.2. Исследование устойчивости нелинейных систем по уравнениям первого приближения

Пусть

$$\dot{x}_i(t) = f_i(\mathbf{x}), \quad i = \overline{1, n} \quad (13.7)$$

заданная нелинейная система, а $f_i(0) \triangleq 0, \quad i = \overline{1, n}$ – состояние равновесия в начале координат. В предположении непрерывности частных производных разложим в ряд Тейлора в окрестности точки $\mathbf{x} = 0$:

$$f_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j + \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = \overline{1, n}, \quad (13.8)$$

где

$$a_{i,j} x_j = \left. \frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}=0}, \quad \text{а} \quad \lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow 0} \frac{\varphi_i(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|} = 0. \quad (13.9)$$

Перепишем (13.8) в матричном виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}), \quad (13.10)$$

где

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T, \quad \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = [\varphi_1(\mathbf{x}), \varphi_2(\mathbf{x}), \dots, \varphi_n(\mathbf{x})]^T.$$

Систему

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} \quad (13.11)$$

называют системой первого приближения для исходной нелинейной системы (13.8). Имеют место следующие теоремы Ляпунова об устойчивости (и неустойчивости) по первому приближению.

Тривиальное решение $x_i(t) \equiv 0, \quad i = \overline{1, n}$ системы (13.10) асимптотически устойчиво по Ляпунову, если все корни характеристического уравнения

матрицы \mathbf{A} системы (13.10) имеют отрицательные вещественные части, т.е. $\operatorname{Re} \lambda_i(\mathbf{A}) < 0, \forall i = \overline{1, n}$.

Если же существуют собственные значения, такие что $\operatorname{Re} \lambda_i(\mathbf{A}) > 0$, то точка покоя неустойчива (теорема Ляпунова о неустойчивости по первому приближению).

Теоремы Ляпунова об устойчивости (и неустойчивости) по первому приближению являются содержанием, так называемого, *первого метода Ляпунова*. Первый метод применим только для исследования *устойчивости систем в малом*, притом только линеаризуемых систем. Поскольку к таким системам полностью применима описанная ранее теория устойчивости линейных систем, включая все рассмотренные частотные и алгебраические критерии устойчивости, далее мы не будем останавливаться на этом методе.

13.3. Второй (прямой) метод Ляпунова

Прямой метод Ляпунова позволяет исследовать устойчивость решений нелинейных систем, не производя решений самих уравнений. Исследуется устойчивость тривиального решения уравнения вида

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}), \quad (13.12)$$

где

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T, \quad f(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x})]^T.$$

Для формулировки теоремы прямого метода Ляпунова нам понадобятся следующие понятия.

Пусть некоторая функция $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ определена в некоторой окрестности $G: \mathbf{x} \in G$ начала координат $\mathbf{x} = 0$ и имеет непрерывные частные производные

$$\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (13.13)$$

$V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется:

– знакопостоянной (знакоположительной или знакоотрицательной) в области G , если для любого $\mathbf{x} \in G, V(\mathbf{x}) \geq 0 (V(\mathbf{x}) \leq 0)$.

– знакоопределенной (определенно положительной или определено отрицательной) в области G , если для любого $\mathbf{x} \in G, V(\mathbf{x}) > 0 (V(\mathbf{x}) < 0)$, но $V(\mathbf{x}) = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{x} = 0$.

Полной производной функции $V(\mathbf{x})$ по времени t называется функция

$$\frac{dV(\mathbf{x})}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_i} f_i(\mathbf{x}). \quad (13.14)$$

По определению

$$\left[\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right]^T = \text{grad}V(\mathbf{x}). \quad (13.15)$$

Тогда с учетом (13.15) полную производную (13.14) можно представить в виде

$$\frac{dV(\mathbf{x})}{dt} = (\text{grad}V(\mathbf{x}), f(\mathbf{x})). \quad (13.16)$$

Из (13.12) видно, что $f(\mathbf{x})$ – в пространстве состояний является вектором фазовых скоростей. Следовательно, если в (13.16)

$$\frac{dV(\mathbf{x})}{dt} < 0. \quad (13.17)$$

Фазовые траектории пересекают поверхность $V(\mathbf{x}) = c$ в сторону убывания. Это свойство является основой теоремы Ляпунова об устойчивости.

Если для системы (13.12) существует положительно определенная функция (Ляпунова) $V(\mathbf{x})$, производная которой в силу системы (13.12) знакоотрицательна, то тривиальное решение $\mathbf{x}(t) \equiv 0$ системы (13.12) устойчиво по Ляпунову.

Доказательство. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим множество \mathbf{x} , $\|\mathbf{x}\| < \varepsilon$:

$$\inf_{\|\mathbf{x}\|=\varepsilon} V(\mathbf{x}) = \alpha > 0. \quad (13.18)$$

Так как $V(0) = 0$ и $V(\mathbf{x})$ непрерывна можно указать окрестность δ начала координат такую, что если $\|\mathbf{x}(t_0)\| < \delta$, то $V(\mathbf{x}(t_0)) < \alpha$. Рассмотрим некоторое решение $\mathbf{x}(t)$, удовлетворяющее условию $\|\mathbf{x}(t_0)\| < \delta$. Т.к. $\frac{dV(\mathbf{x})}{dt} < 0$ $V(\mathbf{x}(t))$ убывает с ростом аргумента t , т.е. $V(\mathbf{x}(t)) < V(\mathbf{x}(t_0)) < \alpha$. Следовательно, $V(\mathbf{x}(t)) < \alpha$, и в силу (13.18)

$$\|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon,$$

что соответствует определению устойчивости по Ляпунову.

13.4. Анализ устойчивости дискретных нелинейных систем прямым методом Ляпунова

Формулировка и теоремы прямого метода Ляпунова для импульсных систем аналогичны приведенным выше формулировкам для непрерывных систем. Однако имеются некоторые отличия, связанные с дискретностью процессов. Рассмотрим автономную нелинейную импульсную систему

$$\mathbf{x}[k+1] = \Phi(\mathbf{x}[k]), \quad (13.19)$$

где $\Phi(0) = 0$ и $\Phi(\mathbf{x})$ однозначная и кусочно-непрерывная в окрестности H начала координат.

Определение устойчивости по Ляпунову для импульсных систем формулируется также как и выше, только вместо $\mathbf{x}(t)$ рассматривается $\mathbf{x}[k]$.

Положение равновесия $\mathbf{x}[k]$ устойчиво по Ляпунову, если для любого $\delta > 0$ найдется $\varepsilon(\delta) > 0$ такое, что произвольная траектория, начальная точка которой в ε – окрестности начала координат, т.е. $\|\mathbf{x}(0)\| < \varepsilon$ не покидает δ – окрестности начала координат при всех $k > 0$.

Функция Ляпунова в данном случае определяется как вещественная скалярная функция $V(\mathbf{x}[k]) = V_k(\mathbf{x})$, которая при всех $\mathbf{x} \in H$:

1. Однозначна и непрерывна по \mathbf{x} .
2. $V_k(\mathbf{x}) > 0$ при $\mathbf{x} \neq 0$.
3. $V_k(0) = 0$ и $V_k(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ при \mathbf{x} стремящемся к границе области H .
4. $\Delta V_k(\mathbf{x}) = V_k(\mathbf{x}[k+1]) - V_k(\mathbf{x}[k]) \leq 0$ при всех $\mathbf{x} \in G \subset H$.

Нетрудно заметить, что в данном определении функции Ляпунова вместо производной фигурирует разность $\Delta V_k(\mathbf{x})$.

Теоремы прямого метода Ляпунова для цифровых систем являются естественным обобщением непрерывных аналогов на дискретный случай. В частности, имеет место аналог теоремы об устойчивости положения равновесия.

Если в некоторой окрестности $G \subset H$ начала координат системы (13.18) существует функция Ляпунова $V_k(\mathbf{x})$, то начало координат устойчиво по Ляпунову.

Если, кроме того, $-\Delta V_k(\mathbf{x})$ – является положительно-определенной функцией в окрестности G , то начало координат устойчиво асимптотически.

Доказательства этих утверждений аналогичны доказательству, приведенному в разделе 13.3 для непрерывных систем. Отличие состоит в том, что в данном случае вместо производной функции Ляпунова рассматривается последовательность функций Ляпунова $V_k(\mathbf{x})$, убывающих с ростом дискретного аргумента k в силу того, что $\Delta V_k(\mathbf{x}) < 0$.

13.5. Исследование устойчивости дискретных нелинейных систем в малом прямым методом Ляпунова

В качестве исходной рассматриваем дискретную нелинейную систему, описываемую уравнением (13.19). Предполагается, что нелинейная функция $\Phi(\mathbf{x})$ допускает разложение в степенной ряд в окрестности точки $\mathbf{x} = 0$. Тогда систему (13.19) можно представить в виде

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{A}\mathbf{x}[k] + \Phi_n(\mathbf{x}[k]), \quad (13.20)$$

где $\mathbf{A} = (a_{i,j})$ – постоянная матрица; $a_{i,j} = (\partial\Phi_i / \partial x_j)_{\mathbf{x}=0}$; $\Phi_n(\mathbf{x})$ – нелинейная вектор функция, представленная степенным рядом, начинающимся с членов не ниже второго порядка малости.

Линейная система

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{A}\mathbf{x}[k], \quad (13.21)$$

полученная из (13.20) путем отбрасывания нелинейных членов $\Phi_n(\mathbf{x})$, называется *системой первого приближения* для системы (13.20). Пусть известно, что исходная система (13.21) устойчива по Ляпунову асимптотически, т.е. все собственные значения матрицы \mathbf{A} удовлетворяют соотношению $|z(\mathbf{A})| < 1$. Требуется ответить на вопрос: устойчива ли при этом исходная нелинейная система (13.20)?

Построим квадратичную форму

$$V_k(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T [k] \mathbf{B} \mathbf{x}[k], \quad (13.22)$$

где \mathbf{B} – квадратная симметрическая матрица. Вычислим ее первую разность в силу уравнений движения системы (13.21)

$$\begin{aligned} \Delta V_k(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}^T [k+1] \mathbf{B} \mathbf{x}[k+1] - \mathbf{x}^T [k] \mathbf{B} \mathbf{x}[k] = \\ &= \mathbf{x}^T [k] \mathbf{A}^T \mathbf{B} \mathbf{A} \mathbf{x}[k] - \mathbf{x}^T [k] \mathbf{B} \mathbf{x}[k] = \\ &= \mathbf{x}^T [k] (\mathbf{A}^T \mathbf{B} \mathbf{A} - \mathbf{B}) \mathbf{x}[k] = -\mathbf{x}^T [k] \mathbf{C} \mathbf{x}[k], \end{aligned} \quad (13.23)$$

где матрица \mathbf{C} определяется соотношением

$$\mathbf{A}^T \mathbf{B} \mathbf{A} - \mathbf{B} = -\mathbf{C}, \quad (13.24)$$

которое называется *матричным уравнением Ляпунова*. Если система (13.20) асимптотически устойчива, т.е. $|z(\mathbf{A})| < 1$, а матрица \mathbf{C} произвольная положительно определенная матрица, то матрица \mathbf{B} – единственное симметрическое решение уравнения (13.24), будет также положительно определена.

Таким образом, если матрицу \mathbf{B} в (13.22) определить как решение матричного уравнения Ляпунова (13.24), где \mathbf{C} любая вещественная положительно определенная симметрическая матрица, то квадратичная форма (13.22) будет являться функцией Ляпунова, т.к. при этом она обязана обладать указанными выше свойствами 2 и 3. Теперь мы можем сформулировать аналог теоремы об устойчивости по уравнениям первого приближения.

Пусть линейная система (13.21) асимптотически устойчива и матрица \mathbf{C} в квадратичной форме (13.23) является положительно определенной. Тогда функция $V_k(\mathbf{x})$, определяемая соотношением (13.22), является функцией Ляпунова для системы (13.20), т.е. положение равновесия исходной системы (13.20) устойчиво асимптотически.

Действительно вычислим первую разность функции $V_k(\mathbf{x})$ в силу системы (13.20)

$$\Delta V_k(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^T [k] \mathbf{C} \mathbf{x} [k] + W(\mathbf{x}[k]), \quad (13.25)$$

где

$$W(\mathbf{x}[k]) = \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{B} \Phi_n(\mathbf{x}) + \Phi_n^T(\mathbf{x}) \mathbf{B} \mathbf{A} \mathbf{x} + \Phi_n^T(\mathbf{x}) \mathbf{B} \Phi_n(\mathbf{x})$$

– скалярная функция, начинающаяся с членов не ниже третьего порядка малости относительно \mathbf{x} (первое слагаемое в (13.25) является членом второго порядка). Но тогда обязательно существует некоторая окрестность точки $\mathbf{x} = 0$, внутри которой $\Delta V_k(\mathbf{x}) < 0$. Кроме того, поскольку для исходной системы (13.19) $\Phi(0) = 0$ оба слагаемые в (13.25) при $\mathbf{x} = 0$ обращаются в нуль. Поэтому выполняется также условие 3 определения функции Ляпунова: $\Delta V_k(0) = 0$. Таким образом, мы доказали аналог теоремы об устойчивости по уравнениям первого приближения.

Лекция 14. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

14.1. Метод гармонической линеаризации

Метод гармонической линеаризации (гармонического баланса) – это метод приближенного анализа нелинейных систем, основанный на замене нелинейного элемента

$$x_2 = F(x_1) \quad (14.1)$$

линейным

$$x_2 = k \cdot x_1. \quad (14.2)$$

Этот метод позволяет приближенно определять условия существования и устойчивости периодических режимов в нелинейных динамических системах.

Рамки применимости метода ограничены случаем, когда нелинейная характеристика является нечетной функцией входного сигнала, а линейная часть является фильтром низких частот, т.е. при прохождении сигнала через линейную часть системы происходит подавление высокочастотных составляющих. В результате сигнал на выходе линейной части системы оказывается близким к синусоидальному (рис. 14.1). Здесь

$$x_1 = A \sin \psi, \quad (14.3)$$

где $\psi = \omega t$ (переход от ωt к новой переменной ψ , обозначающей угол поворота вектора на круговой диаграмме будет ясен из примера в разделе 14.2).

Если выполняются указанные предположения, то сигнал на выходе нелинейного звена будет также периодическим, хотя и не синусоидальным. Тем не менее, свойство периодичности сигнала

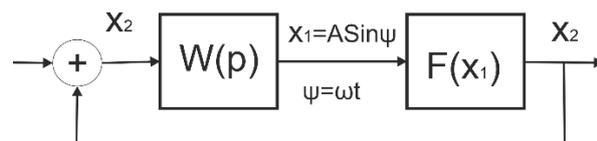


Рис. 14.1. Нелинейная система с низкочастотной линейной частью

произвольной формы позволяет осуществлять его разложение в ряд Фурье и притом ограничиться лишь первой главной гармоникой:

Если выполняются указанные предположения, то сигнал на выходе нелинейного звена будет также периодическим, хотя и не синусоидальным. Тем не менее, свойство периодичности сигнала произвольной формы позволяет осуществлять его разложение в ряд Фурье и притом ограничиться лишь первой главной гармоникой:

$$x_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi) d\psi + \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi) \sin \psi d\psi \right] \sin \psi + \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi) \cos \psi d\psi \right] \cos \psi. \quad (14.4)$$

В силу того, что по предположению нелинейная характеристика нечетная и, следовательно, отсутствует постоянная составляющая, будем также полагать

$$\int_0^{2\pi} F(A \sin \psi) d\psi = 0. \quad (14.5)$$

Далее в соответствии с (14.3)

$$\sin \psi = \frac{x_1}{A}. \quad (14.6)$$

Заменив левую и правую часть в (14.6) их производными можно записать

$$\cos \psi = \frac{p x_1}{A \omega}. \quad (14.7)$$

С учетом соотношений (14.5), (14.6), (14.7) формулу (14.4) можно переписать в следующем виде

$$x_2 = q(A) \cdot x_1 + \frac{q'(A)}{\omega} p \cdot x_1 = \left[q(A) + \frac{q'(A)}{\omega} p \right] \cdot x_1 = k(A, \omega) \cdot x_1, \quad (14.8)$$

где $q(A)$ и $q'(A)$ – коэффициенты гармонической линеаризации, определяемые формулами

$$q(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi) \sin \psi d\psi; \quad (14.9)$$

$$q'(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi) \cos \psi d\psi. \quad (14.10)$$

Коэффициент

$$k(A, \omega) = q(A) + \frac{q'(A)}{\omega} p \quad (14.11)$$

является коэффициентом гармонической линеаризации, зависящим от амплитуды и частоты сигнала. В случае периодического процесса в установившемся режиме системы $A = const$, $\omega = const$. При этом коэффициент гармонической линеаризации (14.11) также становится постоянным. Тогда в соответствии со структурной схемой, показанной на рис. 14.1, можно записать следующее характеристическое уравнение

$$1 + k(A, \omega, p) \cdot W(p) = 0. \quad (14.12)$$

При замене в этом уравнении $p = j\omega$ можно определить амплитуду A и частоту периодического решения. Таким образом, задача определения автоколебаний в нелинейной системе распадается на два этапа: определение вида соотношения (14.11) для коэффициента гармонической линеаризации $k(A, \omega, p)$ (1-й этап) и нахождение решений уравнения (14.12) – второй этап.

14.2. Определение коэффициентов гармонической линеаризации

Сначала рассмотрим общий случай, когда выходной сигнал нелинейного элемента зависит не только от входного сигнала, но и от его производной. Ближайшим примером является нелинейный элемент с гистерезисом, у которого выходной сигнал зависит от направления изменения (производной) входного сигнала. В этом случае

$$x_2 = F(x_1, \dot{x}_1). \quad (14.13)$$

В соответствии с (14.6), (14.7) $x_1 = A \sin \psi$, $\dot{x}_1 = A\omega \cos \psi$. С учетом этих соотношений нелинейную зависимость (14.13) можно переписать в виде

$$x_2 = F(A \sin \psi, A\omega \cos \psi). \quad (14.14)$$

При этом коэффициенты гармонической линеаризации (14.9), (14.10) представляются в виде:

$$q(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi, A \omega \cos \psi) \sin \psi d\psi ; \quad (14.15)$$

$$q'(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi, A \omega \cos \psi) \cos \psi d\psi . \quad (14.16)$$

Если выходной сигнал нелинейного элемента не зависит от производной входного сигнала, т.е. имеет место нелинейная зависимость (14.1), определяемая формулой $x_2 = F(x_1)$ то $q'(A) = 0$.

С учетом того, что $\cos \psi d\psi = d(\sin \psi)$ из соотношения (14.16) введя замену $y = A \sin \psi$ можно записать

$$q'(A) = \frac{1}{\pi A^2} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi) d(A \sin \psi) = \frac{1}{\pi A^2} \int_0^0 F(y) d(y) = 0. \quad (14.17)$$

Здесь мы использовали тот факт, что при замене $y = A \sin \psi$ оба предела у интеграла оказываются нулевыми:

$$\left. \begin{array}{l} y = 0, \quad \text{при } \psi = 0 \\ y = 0, \quad \text{при } \psi = 2\pi \end{array} \right\}.$$

Таким образом, получаем следующее линеаризованное уравнение (14.2):

$$x_2 = q(A) \cdot x_1.$$

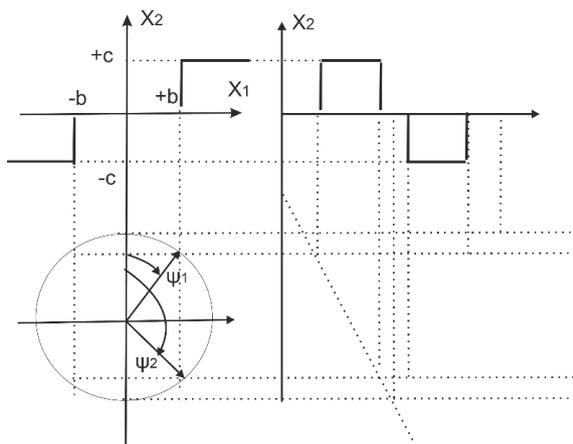


Рис. 14.2. Прохождение синусоидального сигнала через релейный элемент с зоной нечувствительности

Приведем пример вычисления коэффициента $q(A)$. На рис. 14.2 показано как формируется выходной сигнал релейного нелинейного элемента с зоной нечувствительности при подаче на его вход синусоиды.

С использованием представления (14.3)

$$x_2 = F(A \sin \omega t) = F(A \sin \psi),$$

в соответствии с (14.9) имеем

$$q(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi) \sin \psi d\psi = \frac{2}{\pi A} \int_0^{\pi} F(A \sin \psi) \sin \psi d\psi.$$

С другой стороны, как нетрудно видеть из рисунка 14.2

$$F(A \sin \psi) = \begin{cases} 0, & \text{при } \psi < \psi_1, \\ c, & \text{при } \psi_1 < \psi < \psi_2, \\ 0, & \text{при } \psi > \psi_2. \end{cases}$$

Следовательно

$$q(A) = \frac{2}{\pi A} \int_{\psi_1}^{\psi_2} c \sin \psi d\psi = \frac{2c}{\pi A} \cos \psi \Big|_{\psi_1}^{\psi_2} = \frac{4c}{\pi A} \cos \psi \Big|_{\psi_1}^{\pi/2}$$

(в последнем равенстве мы удвоили коэффициент, т.к. интервал интегрирования $[\psi_1, \psi_2]$ с учетом симметрии уменьшен вдвое: $[\psi_1, \pi/2]$). С учетом того, что

$$\psi_1 = \arcsin \frac{b}{A}, \quad \psi_2 = \frac{\pi}{2}, \quad \text{а} \quad \cos \psi = \sqrt{1 - \sin^2 \psi},$$

окончательно получаем

$$q(A) = \frac{4c}{\pi A} \cos \left(\arcsin \frac{b}{A} \right) - \frac{4c}{\pi A} \cos \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{4c}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{b}{A} \right)^2}.$$

14.3. Определение параметров автоколебаний с использованием критерия Михайлова

Для замкнутой системы, схема которой приведена на рис. 14.1, характеристическое уравнение (14.12) в общем случае (14.11) имеет вид

$$1 + \left[q(A) + \frac{q'(A)}{\omega} p \right] \cdot W(p) = 0. \quad (14.18)$$

Пусть передаточная функция линейной части системы задана в виде

$$W(p) = \frac{R(p)}{Q(p)}, \quad Q(p) \neq 0. \quad (14.19)$$

Тогда характеристическое уравнение (14.18) можно записать в виде

$$Q(p) + R(p) \left[q(A) + \frac{q'(A)}{\omega} p \right] = 0. \quad (14.20)$$

Из (14.20) видно, что коэффициент гармонической линеаризации зависит от амплитуды и частоты. Если в системе возникают периодические колебания с постоянной амплитудой и частотой этот коэффициент также становится постоянным. При этом характеристическое уравнение обязано иметь пару чисто мнимых корней, что соответствует нахождению системы на границе устойчивости.

Из этих соображений следует общая схема выявления и определения параметров автоколебаний в нелинейной системе. Вначале формируется характеристическое уравнение (14.20) и осуществляется подстановка в него $p = j\omega$. Далее для определения параметров автоколебаний A , ω можно применить любой из методов определения границы устойчивости. Наиболее удобным во многих отношениях является применение критерия Михайлова (требование прохождения кривой Михайлова через начало координат).

Метод реализуется так же, как при построении D -разбиения. Для выполнения условия прохождения кривой Михайлова через начало координат вещественная и мнимая часть и одновременно приравняются нулю:

$$\left. \begin{aligned} U(\omega, A) &= 0 \\ V(\omega, A) &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (14.21)$$

Решая систему уравнений (14.21) относительно A , ω получаем искомое решение. Заключительным этапом является исследование устойчивости найденного периодического решения.

14.4. Определение автоколебаний с использованием критерия Найквиста

Критерий Найквиста позволяет определять параметры автоколебаний в замкнутой нелинейной системе с использованием свойств разомкнутой системы. После гармонической линеаризации нелинейного элемента $x_2 = F(x_1)$, с учетом того, что в результате подстановки $p = j\omega$

$$\frac{q'(A)}{\omega} p = jq'(A) \quad (14.22)$$

в общем случае получаем

$$W_n(A) = q(A) + j \frac{q'(A)}{\omega} p. \quad (14.23)$$

Общая передаточная функция разомкнутой системы

$$W_{\text{общ}}(A) = W_n(A)W(p)|_{p=j\omega} = [q(A) + jq'(A)]W(j\omega). \quad (14.24)$$

Автоколебания возникают только в случае, когда система находится на границе устойчивости. По критерию Найквиста признаком того, что система находится на границе устойчивости является прохождение амплитудно-фазовой частотной характеристики разомкнутой системы через точку $(-1, j0)$. Следовательно, необходимо потребовать выполнения равенства

$$[q(A) + jq'(A)]W(j\omega) = -1 \quad (14.25)$$

или

$$[q(A) + jq'(A)]W(j\omega) + 1 = 0. \quad (14.26)$$

Далее разделяя вещественную и мнимую часть выражения в левой части (14.26) и приравнивая их одновременно к нулю, получаем систему двух уравнений, из которых определяем параметры автоколебаний A, ω .

14.5. Исследование устойчивости периодических решений

После того как найдены A, ω необходимо убедиться, что это действительно параметры автоколебаний, т.е. надо исследовать устойчивость этого решения. Автоколебания – это устойчивый предельный цикл. На рис. 14.3, а, б приведены примеры фазовых траекторий устойчивого и неустойчивого предельных циклов.

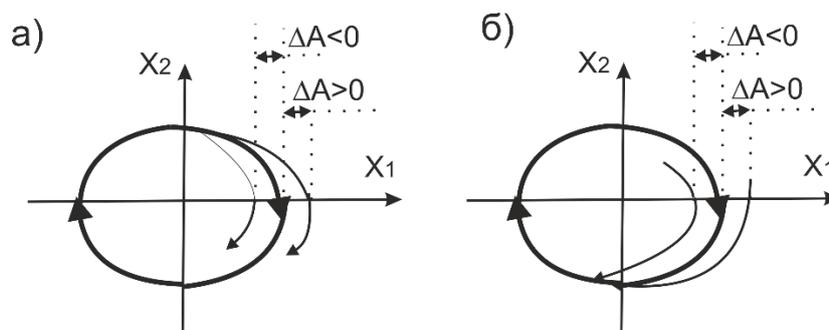


Рис. 14.3. Примеры предельных циклов:
а – неустойчивый; б – устойчивый

Из рис. 14.3,а легко заметить, если при отклонении амплитуды $\Delta A > 0$ система становится неустойчивой, а при $\Delta A < 0$ – устойчивой, то предельный цикл неустойчивый. Если же при отклонении амплитуды $\Delta A > 0$ система становится устойчивой, а при $\Delta A < 0$ – неустойчивой (рис. 14.3,б), то предельный цикл устойчивый.

Эти наглядные геометрические рассуждения легко проверить с помощью критериев Михайлова и Найквиста. На рис. 14.4,а,б приведены примеры анализа устойчивости предельного цикла по направлению смещения годографа Михайлова. В частности, на рис. 14.4, а при отклонении амплитуды $\Delta A > 0$ годограф Михайлова смещается так, что не охватывает начало координат, т.е. система неустойчива, а при $\Delta A < 0$ – охватывает начало координат, т.е. система устойчива, следовательно в соответствии с рис. 14.3,а предельный цикл неустойчивый. Для устойчивого предельного цикла смещения годографа Михайлова происходят в противоположных направлениях (рис. 14.4,б).

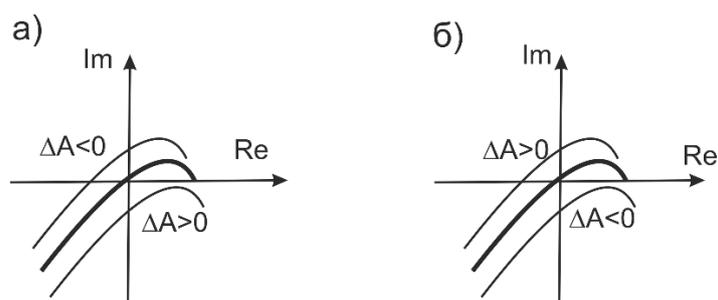


Рис. 14.4. Анализ устойчивости предельных циклов по критерию Михайлова:
а – неустойчивый; б – устойчивый.

Анализ устойчивости предельных циклов по критерию Найквиста аналогичен. Отличие состоит в том, что вместо годографа вектора Михайлова (замкнутой системы) анализируются смещения годографа разомкнутой системы (14.24) относительно точки $(-1, j0)$.

Лекция 15. ОПТИМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

15.1. Постановка задачи оптимального управления

Пусть уравнение объекта имеет вид

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad (15.1)$$

где $f(\cdot)$ – нелинейная вектор-функция, $\mathbf{x}_t \in X_t$, $\mathbf{u} \in U_t$, $X_t \subseteq R^n$, $U_t \subseteq R^r$.

Заданы краевые (граничные) условия:

$$\mathbf{x}(t_0) \in X_0, \quad \mathbf{x}(t_N) \in X_N. \quad (15.2)$$

Задан критерий оптимальности в виде функционала

$$J = J(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)). \quad (15.3)$$

Требуется найти управление $\mathbf{u}^*(t)$ и траекторию $\mathbf{x}^*(t)$, при которых функционал (15.3) принимает экстремальное значение.

В зависимости от краевых условий, ограничений и критерия рассматривают различные задачи оптимального управления.

По виду ограничений: с ограничениями в виде равенств и неравенств:

$$\varphi_k(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = 0, \quad k = \overline{1, m};$$

$$\varphi_k(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \leq 0, \quad k = \overline{1, m}$$

и с изопериметрическими ограничениями

$$\int_{t_0}^{t_N} f_j(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt = b_j, \quad j = \overline{1, l},$$

которые всегда сводятся к дополнительным уравнениям с краевыми условиями.

По виду краевых условий рассматривают следующие задачи.

1. С фиксированными (закрепленными) концами $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}(t_N) = \mathbf{x}_N$.
2. С подвижным правым (или левым) концом или с обоими.

3. Со свободным правым концом \mathbf{x}_N совпадает со всем пространством.

По виду критерия оптимальности известны следующие задачи: задача Больца, задача Лагранжа, задача Майера, задача терминального управления, задача максимального быстродействия. Мы будем приводить формулировки критериев по мере рассмотрения соответствующих задач.

15.2. Построение оптимального управления с помощью классического вариационного исчисления

Рассмотрим простейшую задачу вариационного исчисления:

$$J(y) = \int_{t_0}^{t_N} f_0(y, \dot{y}, t) dt \rightarrow \text{extr} \quad (15.4)$$

(для простоты $y(t)$ считаем скалярной функцией). Полагая, что $y^*(t)$ (пока неизвестная) экстремаль, представим $y(t)$ как вариацию:

$$y(t) = y^*(t) + \varepsilon \tilde{y}(t). \quad (15.5)$$

Производная функции (15.5) имеет вид

$$\dot{y}(t) = \dot{y}^*(t) + \varepsilon \dot{\tilde{y}}(t).$$

Подставляя введенные обозначения функции $y(t)$ и ее производной в уравнение функционала (15.4) для каждого фиксированного $y(t)$ можно записать функцию

$$\Phi(\varepsilon) = J(y^* + \varepsilon \tilde{y}) = \int_{t_0}^{t_N} f_0(y^* + \varepsilon \tilde{y}, \dot{y}^* + \varepsilon \dot{\tilde{y}}, t) dt, \quad (15.6)$$

достигающую экстремума при $\varepsilon = 0$. Следовательно, должно выполняться

$$\Phi'_\varepsilon(0) = \int_{t_0}^{t_N} \left[f'_{0y}(y^*, \dot{y}^*, t) \tilde{y} + f'_{0\dot{y}}(y^*, \dot{y}^*, t) \dot{\tilde{y}} \right] dt = 0. \quad (15.7)$$

Второе слагаемое в (15.7) интегрируем по частям по формуле $uv|_{t_0}^{t_N} - \int v du$, где $u = f'_{0\dot{y}}(y^*, \dot{y}^*, t)$, $du = \frac{d}{dt} f'_{0\dot{y}}(y^*, \dot{y}^*, t) dt$, $dv = \dot{\tilde{y}} dt$, $v = \int \frac{d\tilde{y}}{dt} dt = \tilde{y}$. С использованием этих обозначений в предположении $\tilde{y}(t_0) = 0$, $\tilde{y}(t_N) = 0$ имеем

$$\int f'_{0\dot{y}}(y^*, \dot{y}^*, t) \dot{\tilde{y}} dt = f'_{0\dot{y}}(y^*, \dot{y}^*, t) \tilde{y} \Big|_{t_0}^{t_N} - \int f'_{0\dot{y}}(y^*, \dot{y}^*, t) \dot{\tilde{y}} dt = \int f'_{0\dot{y}}(y^*, \dot{y}^*, t) \dot{\tilde{y}} dt,$$

поэтому в соответствии с (15.7)

$$\Phi'_\varepsilon(0) = \int_{t_0}^{t_N} \left[f'_{0y}(y^*, \dot{y}^*, t) - \frac{d}{dt} f'_{0\dot{y}}(y^*, \dot{y}^*, t) \right] \tilde{y} dt = 0.$$

При произвольном \tilde{y} это равенство возможно только при

$$f'_{0y}(y^*, \dot{y}^*, t) - \frac{d}{dt} f'_{0\dot{y}}(y^*, \dot{y}^*, t) = 0. \quad (15.8)$$

Мы получили уравнение Эйлера – необходимое условие экстремума. Если $y^*(t)$ является экстремалью, она удовлетворяет уравнению Эйлера, обратное в общем случае неверно.

По аналогии с (15.9) запишем также векторное уравнение Эйлера:

$$\nabla_y f_0(y^*, \dot{y}^*, t) - \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{y}} f_0(y^*, \dot{y}^*, t) = 0, \quad (15.9)$$

где ∇_y , $\nabla_{\dot{y}}$ – градиенты по y и \dot{y} соответственно.

15.3. Уравнения Эйлера-Лагранжа

Сформулируем следующую задачу

$$f_i(x, u, t) - \dot{x}_i = 0, \quad i = \overline{1, n}; \quad (15.10)$$

$$\varphi_k(x, u, t) = 0, \quad k = \overline{1, l}; \quad (15.11)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_N) = x_N; \quad (15.12)$$

$$J = \int_{t_0}^{t_N} f_0(x, u, t) dt \rightarrow \min. \quad (15.13)$$

Эта задача отличается от простейшей вариационной задачи тем, что кроме краевых условий (15.12) введены дополнительные ограничения в виде равенств (15.10), (15.11). Заметим, что соотношение (15.10) является уравнением объекта (15.1).

Для того, чтобы свести задачу с ограничениями к задаче без ограничений составим функцию Лагранжа

$$L(x, \dot{x}, u, \psi, \lambda, t) = \psi_0 f_0(x, u, t) + \sum_{i=1}^p \psi_i (f_i(x, u, t) - \dot{x}_i) + \sum_{k=1}^l \lambda_k \phi_k, \quad (15.14)$$

где $\psi_i(t), i = \overline{1, p}, \lambda_k = const, k = \overline{1, l}, \psi_0 = const$ – множители Лагранжа.

Теперь задача (15.10) – (15.13) преобразуется в простейшую задачу (15.4) без ограничений:

$$\tilde{J} = \int_{t_0}^{t_N} L(x, \dot{x}, u, \psi, \lambda, t) dt \rightarrow extr \quad (15.15)$$

при $x(t_0) = x_0, x(t_N) = x_N$. Чтобы исключить тривиальное решение $\tilde{J} = 0$, надо также потребовать $\psi_i(t) \neq 0, \lambda_k \neq 0, \psi_0 \neq 0$.

В данном случае роль независимого аргумента $y(t)$, который фигурирует в задаче (15.4), играет вектор (x, u, ψ, λ) , который далее мы будем обозначать x . Тогда уравнения Эйлера (15.9) с учетом того, что $f_0(x, u, t)$ не зависит от \dot{y} можно записать в виде

$$\nabla_x L(x, \dot{x}, u, \psi, \lambda, t) - \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{x}} L(x, \dot{x}, u, \psi, \lambda, t) = 0; \quad (15.16)$$

$$\nabla_u L(x, \dot{x}, u, \psi, \lambda, t) = 0. \quad (15.17)$$

Эти уравнения называют уравнениями Эйлера-Лагранжа. Уравнения (15.16), (15.17) часто записывают с использованием Гамильтониана:

$$H = \sum_{i=0}^n \psi_i f_i(x, u, t) + \sum_{k=1}^l \lambda_k \phi_k. \quad (15.18)$$

Сравнив (15.18) с (15.14) нетрудно заметить, что

$$L = H - \sum_{i=1}^n \psi_i \dot{x}_i. \quad (15.19)$$

Тогда из (15.16), (15.17) и (15.19) получаем

$$\nabla_x H + \dot{\psi} = 0; \quad (15.20)$$

$$\nabla_u H = 0. \quad (15.21)$$

Таким образом, Гамильтониан, рассматриваемый как функция управления, удовлетворяет необходимым условиям экстремума. Это основной результат, который формулируется следующим образом: если $x(t), u(t)$ – решение задачи оптимального управления (15.10) – (15.13), то найдутся не

равные нулю множители Лагранжа, при которых эта пара удовлетворяет уравнениям Эйлера-Лагранжа.

Для нахождения оптимального управления необходимо совместно решить уравнения (15.10), (15.11) и (15.20), (15.21):

$$f_i(x, u, t) - \dot{x}_i = 0, \quad i = \overline{1, n}; \quad (15.22)$$

$$\varphi_k(x, u, t) = 0, \quad k = \overline{1, l}; \quad (15.23)$$

$$\dot{\psi} = -\nabla_x H; \quad (15.24)$$

$$\nabla_u H = 0. \quad (15.25)$$

при краевых условиях $x(t_0) = x_0, \quad x(t_N) = x_N$.

Множители Лагранжа входят в уравнения линейно и однородно, поэтому ничего не изменится, если все множители умножены на одно число. С учетом этого один (любой) множитель можно задать произвольно. Обычно полагают

$$\psi_0 = -1. \quad (15.26)$$

Тогда остается определить $2n + r + l$ неизвестных – $x_i, \psi_i, i = \overline{1, n}, u_j, j = \overline{1, r}, \lambda_k, k = \overline{1, l}$. Для этого имеется столько же уравнений (15.22) – (15.25). Среди них $2n$ дифференциальных – это (15.22), (15.24). При решении дифференциальных уравнений появятся $2n$ неизвестных, которые определяются из $2n$ краевых условий $x(t_0) = x_0, \quad x(t_N) = x_N$. Таким образом, задача сводится к решению задачи Коши.

15.4. Принцип максимума Понтрягина

Метод разработан для решения задач с ограничениями на управление в виде неравенств. Часто оптимальное управление в таких задачах имеет разрыв. В этом случае метод множителей Лагранжа не позволяет определить число и положение этих точек.

Задача формулируется следующим образом.

$$\dot{x}_i = f_i(x, u, t), \quad i = \overline{1, n}; \quad (15.27)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_N) = x_N; \quad (15.28)$$

$$J = \int_{t_0}^{t_N} f_0(x, u, t) dt \rightarrow \min. \quad (15.29)$$

Эта задача существенно отличается от сформулированной выше. В данном случае функция управления $u(t)$ может быть кусочно-непрерывной и не требуется гладкость (непрерывная дифференцируемость) $f_i(x, u, t)$ по u .

Составим функцию Лагранжа

$$L(x, u, \psi, \lambda, t) = \psi_0 f_0 + \sum_{i=1}^n \psi_i (f_i(x, u, t) - \dot{x}_i) = H - \sum_{i=1}^n \psi_i \dot{x}_i, \quad (15.30)$$

где $H = \sum_{i=0}^n \psi_i f_i(x, u, t)$ – Гамильтониан (функция Понтрягина). Далее задача сводится к следующей:

$$\tilde{J} = \int_{t_0}^{t_N} L(x, \dot{x}, u, \psi, t) dt \rightarrow \max; \quad (15.31)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_N) = x_N. \quad (15.32)$$

Функционал (15.31) максимизируется, т.к. коэффициент ψ_0 при f_0 принят $\psi_0 = -1$.

Пусть x^*, u^*, ψ^* решение задачи (15.31), (15.32). Очевидно, что эта задача равносильна следующим двум:

$$\tilde{J}_1 = \int_{t_0}^{t_N} L(x, \dot{x}, u^*, \psi, t) dt \rightarrow \max; \quad (15.33)$$

$$\tilde{J}_2 = \int_{t_0}^{t_N} L(x^*, \dot{x}^*, u, \psi^*, t) dt \rightarrow \max \quad (15.34)$$

или
$$\tilde{J}_1 = \int_{t_0}^{t_N} \left[H(x, u^*, \psi, t) - \sum_{i=1}^n \psi_i \dot{x}_i \right] dt \rightarrow \max; \quad (15.35)$$

$$\tilde{J}_2 = \int_{t_0}^{t_N} \left[H(x^*, u, \psi^*, t) - \sum_{i=1}^n \psi_i^* \dot{x}_i^* \right] dt \rightarrow \max. \quad (15.36)$$

Задача (15.35) – простейшая задача вариационного исчисления, которую мы рассмотрели выше. Для нее необходимые условия экстремума даются уравнениями Эйлера:

$$\dot{\psi} = -\nabla_x H; \quad (15.37)$$

$$\dot{x} = \nabla_{\psi} H. \quad (15.38)$$

Решение задачи (15.36) очевидно: управление $u^*(t)$ доставляет максимум исходному критерию в том и только в том случае, если всюду на интервале $[t_0, t_N]$, кроме точек разрыва $u^*(t)$

$$\max_{u \in U} H(x^*, u, \psi^*, t) = H(x^*, u^*, \psi^*, t). \quad (15.39)$$

Соотношения (15.37), (15.38) вместе с (15.39) составляют необходимые условия исходной задачи (15.27) – (15.29). Уравнение (15.37) называют сопряженными уравнениями или сопряженной системой. Уравнения (15.38) совпадают с уравнениями объекта, поэтому их можно не рассматривать.

Таким образом (*принцип максимума Понтрягина*), для того чтобы пара $u^*(t), x^*(t)$ была решением задачи (15.27) – (15.29) необходимо, чтобы существовали такие, не обращающиеся одновременно в нуль, константы $\psi^*_0 \leq 0$ и решение $\psi^* = [\psi^*_1, \psi^*_2, \dots, \psi^*_n]^T$ сопряженной системы при $x(t) = x^*(t)$ и $u(t) = u^*(t)$, что при всех $t \in [t_0, t_N]$, кроме точек разрыва $u^*(t)$, функция

$$\tilde{H}(u) = H(x^*, u, \psi^*, t) \quad (15.40)$$

достигает при $u(t) = u^*(t)$ максимума.

15.5. Метод динамического программирования

Основой метода динамического программирования является принцип оптимальности Беллмана, который формулируется следующим образом.

Каковы бы ни были начальное состояние и решение на начальном этапе, решения на последующем этапе должны составлять оптимальную стратегию относительно состояния, которое получено в результате принятия решений на начальном этапе.

Например, если $x(t) = x^*(t)$ минимизирует функционал $J(x, u, t)$ на интервале $[0, t]$, то участок траектории на интервале $[t, T]$ может рассматриваться как самостоятельная траектории, причем она оптимальна, если минимизирует функционал $J(x, u, t)$ на интервале $[t, T]$.

Построим основное функциональное уравнение Беллмана. Рассмотрим задачу

$$\dot{x}_i = f_i(x, u, t), \quad i = \overline{1, n}; \quad (15.41)$$

$$x(t_0) = x_0; \quad (15.42)$$

$$Q = \int_0^T G(x, u, t) dt \rightarrow \min, \quad (15.43)$$

где T – фиксирована, а $x(T)$ – заранее неизвестна.

Пусть существует, соответствующее оптимальной траектории, минимальное значение $S(x, \tau)$ функционала (15.43). Возьмем любое управление $u(t)$ для перехода из точки $x(\tau)$ в точку $x(T)$ и оптимальное $u^*(t)$ для перехода из точки $x(s)$ в точку $x(T)$.

Тогда функционал примет значение

$$Q_0 = \int_0^T G(x, u, t) dt + S(x, s). \quad (15.44)$$

Ясно, что
$$S(x, \tau) \leq \int_{\tau}^s G(x, u, t) dt + S(x, s). \quad (15.45)$$

Если $S(x, \tau)$ дифференцируема, то ее можно представить в виде

$$S(x, s) = S(x, \tau) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial x_i} \frac{dx_i}{ds} (s - \tau) + \frac{dS}{d\tau} (s - \tau) + o(s - \tau). \quad (15.46)$$

Подставим $S(x, s)$ из (15.46) в (15.45), при этом вместо $\frac{dx_i}{ds}$ подставим правую часть (15.41):

$$-\frac{\partial S}{\partial \tau} \leq \frac{1}{s - \tau} \int_{\tau}^s G(x, u, t) dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial x_i} f_i(x, u, t) + \frac{(s - \tau)}{(s - \tau)}. \quad (15.47)$$

Переходя к пределу при $s \rightarrow \tau$ получаем

$$-\frac{\partial S}{\partial \tau} \leq G(x, u, t) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial x_i} f_i(x, u, \tau). \quad (15.48)$$

Причем, если управление оптимальное, то неравенство превращается в равенство:

$$-\frac{\partial S}{\partial \tau} = G(x^*, u^*, t) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial x_i} f_i(x^*, u^*, \tau). \quad (15.49)$$

Это линейное уравнение первого порядка типа Гамильтона-Якоби называется уравнением Беллмана. Оно дает лишь необходимые условия оптимальности.

Лекция 16. АДАПТИВНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

16.1. Основные понятия и определения, классификация адаптивных систем

Адаптивные системы управления – это класс систем, в которых имеется возможность изменять параметры алгоритмов управления или структуру блока управления в зависимости от изменения характеристик объекта управления или действующих на объект управления внешних возмущений. Адаптивное управление широко применяется при построении систем автоматического управления (САУ).

Адаптивные САУ делятся на две большие группы:

1. *Самонастраивающиеся* системы, в которых перестраиваются только параметры алгоритмов управления.
2. *Самоорганизующиеся* системы, в которых перестройке подвергается также структура блока (алгоритмов) управления.

По способу определения текущих характеристик объекта системы автоматического управления делятся на

1. Поисковые.
2. Беспойсковые.

Целью поисковых систем является поддержание системы в точке экстремума заданного критерия эффективности САУ. В таких системах для определения управляющих воздействий, обеспечивающих движение к экстремуму, к управляющему сигналу добавляется поисковый сигнал. Поисковые системы, в которых задан критерий эффективности, часто называют также экстремальными.

В беспойсковых системах отсутствует поисковый сигнал, а перестройка параметров блока управления осуществляется либо по заданной эталонной динамической модели системы с заданным качеством, либо с использованием параметров модели объекта, определяемых путем идентификации. В соответствии с указанными способами *получения информации* рассматривают:

1. Системы с эталонной моделью (ЭМ).
2. Системы с настраиваемой моделью (НМ).

В адаптивных системах с настраиваемой моделью могут быть реализованы следующие принципы управления:

1. Прямой.
2. Косвенный (непрямой).

При косвенном адаптивном управлении сначала делается оценка (идентификация) параметров объекта. После этого на основании полученных оценок определяются требуемые значения параметров блока управления и производится их подстройка.

При прямом адаптивном управлении используется связь между параметрами объекта и блока управления. В силу этой связи осуществляется непосредственная оценка и перестройка параметров блока управления в зависимости от текущих параметров объекта.

16.2. Проблемы построения адаптивных систем, система с поэтапной адаптацией

Трудности технической реализации адаптивных систем связаны со сложностью их динамического поведения. Дело в том, что задачи управления динамическими объектами и определения их характеристики (идентификация) противоречивы. Противоречие проявляется в том, что управляющие сигналы носят двойственный (дуальный) характер. Они одновременно являются как источником информации для изучения (идентификации) характеристик объекта, так и средством приведения его к требуемому состоянию.

Управление считается хорошим, если параметры движения в течение достаточно длительного времени удерживаются близкими к заданному установившемуся состоянию и не испытывают заметных колебаний, не предусмотренных программой движения. Такое успешное управление возможно, если в реальном времени решается задача построения достаточно точных оценок (идентификации) параметров объекта. Однако если сигналы на входе и выходе объекта не изменяются в течение длительного времени, выполнить идентификацию параметров объекта в темпе с процессами управления не удастся. В этом случае они оказываются неинформативными.

Указанные трудности наиболее успешно преодолеваются при использовании принципа поэтапного адаптивного управления. В системах этого

класса задачи идентификации, перестройки алгоритмов и управления разделены во времени. Теоретические и методологические основы проектирования систем с поэтапной адаптацией изложены в монографии Е.Д. Теряева, Б.М. Шамрикова «Цифровые системы управления и поэтапное адаптивное управление». В настоящем пособии мы ограничимся рассмотрением этого класса систем, которые в рамках рассмотренной выше классификации могут быть отнесены к импульсным системам с настраиваемой моделью и косвенным адаптивным управлением.

Блок-схема системы управления с поэтапной адаптацией приведена на рис. 16.1. Здесь ОУ – объект управления, БАИ – блок алгоритмов идентификации, БАА – блок алгоритмов адаптации, АУ – алгоритмы управления, Ф – формирователь сигнала управления из последовательности дельта-импульсов (фиксатор). Фиксатор и объект управления образуют непрерывную часть системы. По дискретным сигналам входа и выхода в БАИ осуществляется идентификация параметров дискретной модели непрерывной части системы. По вектору оценок параметров \hat{c} , полученных в результате идентификации, в БАА вычисляются параметры алгоритмов управления А.

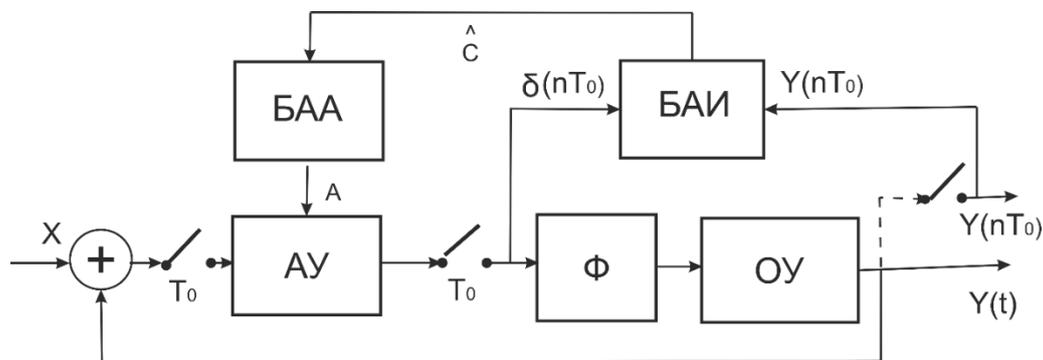


Рис. 16.1. Структурная схема системы с поэтапной адаптацией

В основу построения адаптивных систем управления с поэтапной адаптацией заложен медицинский принцип «не навреди». На интервалах работы системы, когда информативные данные для решения задачи идентификации отсутствуют, система работает в обычном режиме, используя оценки параметров модели объекта, полученные на предшествующем этапе. По мере получения оценок параметров при «хороших» процессах на входе–выходе объекта осуществляется определение параметров алгоритмов управления и их перестройка.

Хорошие с точки зрения идентификации процессы могут возникать как вследствие быстрого перехода системы на другой режим в соответствии с программой, так и вследствие неконтролируемых колебаний, возникающих из-за недостаточно хорошей настройки алгоритмов управления. Указанные ситуации, как раз, и являются наглядной иллюстрацией противоречивости задач управления и идентификации объекта. Однако в рассматриваемой схеме построения системы эти противоречия снимаются, т.к. система фактически является двухуровневой, в которой контур адаптации и перестройки не вмешивается в работу основного контура управления.

При практической реализации блока адаптации (БАА) и блока идентификации (БАИ) в адаптивных системах управления преимущественно используются управляющие цифровые вычислительные машины, которые обеспечивают возможность реализации сложных алгоритмов. Поэтому в следующем разделе мы рассмотрим пример формирования цифровой адаптивной системы с поэтапной адаптацией. Рассмотрение этого примера будет полезно, т.к. в нем привлекается материал из различных разделов настоящего курса.

16.3. Построение алгоритмов адаптации

Рассмотрим пример построения адаптивной цифровой системы управления объектом с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{K}{s(Ts + 1)} \quad (16.1)$$

(для упрощения полагаем, что постоянная времени привода намного меньше величины T объекта, а коэффициент усиления привода входит множителем в параметр K). В качестве формирователя сигнала управления Φ используется экстраполятор нулевого порядка, передаточная функция которого определяется как

$$W_\phi(s) = L\{1(t) - 1(t - T_0)\} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-sT_0} = \frac{1 - e^{-sT_0}}{s}. \quad (16.2)$$

Передаточную функцию цифрового корректирующего устройства, реализуемого БАУ в БЦВМ, примем в виде

$$W_y(z) = \frac{T_1 z + T_2}{z + T_3}, \quad (16.3)$$

где T_1, T_2, T_3 – параметры алгоритма управления, выбор которых должен обеспечить заданное качество переходного процесса. Определение этих параметров осуществляется в БАА с использованием оценок параметров объекта, полученных в БАИ. Решение задачи идентификации является самостоятельной проблемой, которую мы рассмотрим в следующем разделе. В настоящем разделе мы рассмотрим один из возможных способов формирования алгоритмов адаптации в БАА. Для этого нам необходимо в общем виде построить Z-передаточную функцию замкнутой системы.

Для этого нам понадобится Z-передаточная функция прямой цепи. В данном случае алгоритмы управления и объект управления с фиксатором разделены ключом. Поэтому Z-передаточная функция прямой цепи определяется как произведение Z-передаточных функций алгоритма управления и приведенной непрерывной части.

Получим Z-передаточную функцию приведенной непрерывной части. С учетом последовательного соединения фиксатора и объекта, теоремы сдвига и свойств линейности Z-преобразований, а также соотношений (16.1), (16.2) можно записать

$$\begin{aligned} W_{нч}(z) &= Z \left\{ \frac{W_{о\bar{o}}(s)}{s} - \frac{W_{о\bar{o}}(s)}{s} e^{-sT_0} \right\} = \\ &= Z \left\{ \frac{W_{о\bar{o}}(s)}{s} \right\} - z^{-1} Z \left\{ \frac{W_{о\bar{o}}(s)}{s} \right\} = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{W_{о\bar{o}}(s)}{s} \right\}. \end{aligned} \quad (16.4)$$

Теперь с использованием (16.1) найдем Z-передаточную функцию

$$Z \left\{ \frac{W_{о\bar{o}}(s)}{s} \right\} = Z \left\{ \frac{K}{s^2(Ts+1)} \right\}. \quad (16.5)$$

Для этого разложим $K / s^2(Ts+1)$ на простейшие дроби:

$$\frac{K}{s^2(Ts+1)} = K \left(-\frac{T}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{T}{s + \frac{1}{T}} \right). \quad (16.6)$$

Для каждого слагаемого в правой части формулы (16.6) в справочниках можно найти соответствующие формулы Z-изображений. Тогда с учетом (16.4) Z-передаточную функцию приведенной непрерывной части можно записать в виде:

$$W_{нчч}(z) = \frac{z-1}{z} K \left\{ -\frac{Tz}{z-1} + \frac{T_0z}{(z-1)^2} + \frac{Tz}{z-d} \right\} =$$

$$= \frac{KT_0 \{ [1-\eta(1-d)]z + \eta(1-d) - d \}}{z^2 - (1+d)z + d}, \quad (16.7)$$

где $d = e^{-\frac{T_0}{T}}$, $\eta = \frac{T}{T_0}$. Для удобства дальнейших выкладок запишем Z-передаточную функцию (16.7) в виде

$$W_{нчч}(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = K_z \frac{\beta_1 z + \beta_0}{z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0}, \quad (16.8)$$

где $\beta_1 = 1 - \eta(1-d)$, $\beta_0 = \eta(1-d) - d$, $\alpha_1 = -(1+d)$, $\alpha_0 = d$. Кроме того мы ввели также общий коэффициент усиления в прямой цепи $K_z = K_{кор} KT_0$, который мы будем назначать из соображений достижения требуемой точности в установившемся режиме. Это будет достигаться с помощью дополнительного корректирующего коэффициента $K_{кор}$, который, как нетрудно заметить, определяется как $K_{кор} = K_z / KT_0$.

С использованием (16.3) и (16.7) запишем Z-передаточную функцию прямой цепи:

$$W_{нчч}(z) = K_z \frac{T_1 z + T_2}{z + T_3} \frac{\beta_1 z + \beta_0}{z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0} = K_z \frac{b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0}, \quad (16.9)$$

где $b_2 = T_1 \beta_1$, $b_1 = T_1 \beta_0 + T_2 \beta_1$, $b_0 = T_2 \beta_0$,

$$a_2 = T_3 + \alpha_1, \quad a_1 = T_3 \alpha_1 + \alpha_0, \quad a_0 = T_3 \alpha_0.$$

Соответствующая Z-передаточная функция замкнутой системы

$$\Phi(z) = K_z \frac{b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{z^3 + c_2 z^2 + c_1 z + c_0}, \quad (16.10)$$

где b_2 , b_1 , b_0 , те же, что и в (16.9), а коэффициенты знаменателя определяются следующими соотношениями

$$c_2 = T_3 + \alpha_1 + K_z b_2, \quad c_1 = T_3 \alpha_1 + \alpha_0 + K_z b_1, \quad c_0 = T_3 \alpha_0 + K_z b_0. \quad (16.11)$$

С учетом соотношений для b_1, b_2, b_0 в (16.9) эти соотношения перепишем в виде

$$\begin{aligned}c_2 &= T_3 + \alpha_1 + K_z T_1 \beta_1; \\c_1 &= T_3 \alpha_1 + \alpha_0 + K_z (T_1 \beta_0 + T_2 \beta_1); \\c_0 &= T_3 \alpha_0 + K_z T_2 \beta_0.\end{aligned}\tag{16.12}$$

Теперь с использованием соотношений для коэффициентов c_1, c_2, c_0 мы можем построить соотношения для определения параметров алгоритмов управления. Для этого можно использовать широкий набор критериев, в т.ч. рассмотренных в настоящем курсе. Для определенности мы рассмотрим методику, основанную на корневых оценках качества переходного процесса.

Потребуем, чтобы корни характеристического уравнения

$$z^3 + c_2 z^2 + c_1 z + c_0 = 0\tag{16.13}$$

имели заданное расположение внутри круга единичного радиуса, с некоторым запасом, обеспечивающим заданную степень устойчивости. Очевидно, что с использованием заданных корней можно сформировать эталонный характеристический полином

$$D^*(z) = z^3 + c_2^* z^2 + c_1^* z + c_0^*,\tag{16.14}$$

при достижении коэффициентов которого, будет обеспечиваться заданное качество переходного процесса. Подставляя эталонные коэффициенты c_2^*, c_1^*, c_0^* в части равенств (16.12) после соответствующих преобразований можно записать следующую систему уравнений

$$\mathbf{Xc} = \mathbf{Y};\tag{16.15}$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} K_z \beta_1 & 0 & 1 \\ K_z \beta_0 & K_z \beta_1 & \alpha_1 \\ 0 & K_z \beta_0 & \alpha_0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} c_2^* - \alpha_1 \\ c_1^* - \alpha_0 \\ c_0^* \end{bmatrix}.$$

Из (16.15) наилучшее, в среднеквадратическом смысле, приближение к искомому параметрам алгоритмов управления

$$\hat{\mathbf{c}} = [\mathbf{X}^T \mathbf{X}]^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y}.\tag{16.16}$$

Формирование системы (16.15) с использованием приведенных выше соотношений и построение оценки (16.16) в рамках рассмотренной методики является содержанием алгоритмов адаптации. Как мы указывали выше для их реализации необходимо знать параметры объекта. Эта задача решается в блоке алгоритмов идентификации.

16.4. Алгоритм идентификации

Как легко заметить из уравнения (16.15) задача БАИ состоит в определении коэффициентов α_1 , α_0 , β_1 , β_0 объекта. Для этого с использованием теоремы сдвига из передаточной функции (16.8) запишем разностное уравнение (мы полагаем, что коэффициент KT_0 входит сомножителем в параметры β_1 , β_0 , а потом определяется $K_{кор} = K_z / KT_0$):

$$y[k] = -\alpha_1 y[k-1] - \alpha_0 y[k-2] + \beta_1 u[k-1] - \beta_0 u[k-2]. \quad (16.17)$$

Проведя наблюдения входа и выхода объекта, например, на N тактах можно записать систему уравнений

$$\mathbf{X}\mathbf{c} = \mathbf{Y}; \quad (16.18)$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} y[k-1] & y[k-2] & u[k-1] & u[k-2] \\ y[k] & y[k-1] & u[k] & u[k-1] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y[k+N-2] & y[k+N-3] & u[k+N-2] & u[k+N-3] \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_0 \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y[k] \\ y[k+1] \\ \vdots \\ y[k+N-1] \end{bmatrix}$$

Теперь искомые оценки параметров определяются также как и оценки параметров алгоритмов управления

$$\hat{\mathbf{c}} = [\mathbf{X}^T \mathbf{X}]^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y}. \quad (16.19)$$

Мы намеренно применили здесь такие же как и в (16.15) обозначения для совершенно иных матриц и векторов, чтобы подчеркнуть возможность реализации алгоритмов адаптации и идентификации с помощью унифицированных программ. Это может иметь существенное значение, т.к. подобные алгоритмы обычно должны выполняться в реальном времени.

Заметим, что оценки параметров объекта могут быть получены при условии, что на вход замкнутой системы подаются энергичные входные сигналы, с целью перехода с одного режима на другой. Если в системе происходит свободное движение под действием начальных условий вместо параметров объекта, скорее всего, будут получены параметры алгоритма управления, т.к. порядок передаточной функции объекта выше порядка полиномов алгоритма управления. Этот результат является следствием всеобщего принципа природы: идти по пути «наименьшего сопротивления».

Пример.

В заключение приведем результаты реализации описанной технологии формирования алгоритмов управления, в соответствии с приведенными выше соотношениями. Параметры объекта, желаемые характеристики и полученные входе эксперимента характеристики приведены в таблице 16.1. На рис. 16.2 приведен переходный процесс, полученный при подаче на вход замкнутой системы единичной ступенчатой функции.

Таблица 16.1

Параметры объекта	$K_z = 10; K = 1; T = 1$
Параметры передаточной функции объекта	$\beta_1 = 0,0012; \beta_2 = 0,0012;$ $\alpha_1 = -1,9512 \quad \alpha_0 = 0,9512$
Желаемые корни	$z_1 = 0,5; z_{2,3} = 0,6 \pm j0,5$
Желаемые коэффициенты характеристического уравнения	$c_3^* = 1,0; c_2^* = -1,7; c_1^* = 1,21; c_0^* = -0,305$
Коэффициенты характеристического уравнения по формуле (16.16)	$c_3 = 1,0; c_2 = -1,81; c_1 = 1,21; c_0 = -0,305$
Коэффициенты числителя передаточной функции замкнутой системы	$b_2 = 0,25; b_1 = 0,044; b_0 = 0,0012$

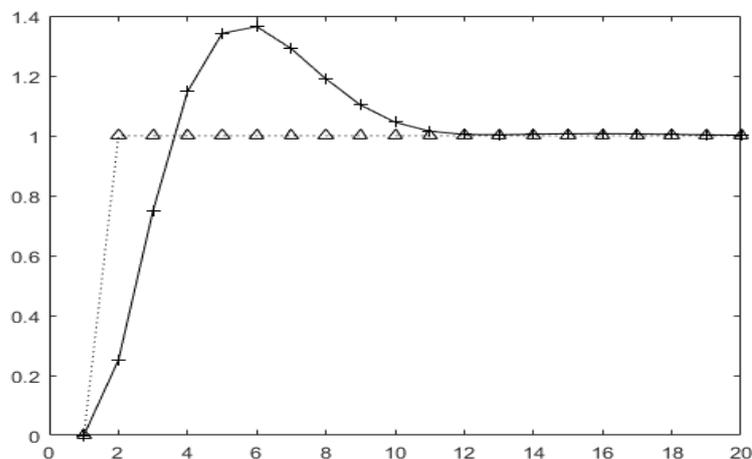


Рис. 16.2. Переходный процесс в замкнутой системе

В заключение приведем результаты реализации описанной технологии формирования алгоритмов управления на одном из режимов, характеризующемся следующими значениями параметров объекта и БЦВМ:

$$K_z = 10; K = 1; T = 1,0.$$

При указанных характеристиках были получены следующие параметры объекта:

$$\beta_1 = 0,0012; \quad \beta_2 = 0,0012 \quad \alpha_1 = -1,9512 \quad \alpha_0 = 0,9512$$

Задавались желаемые корни характеристического уравнения:

$$z_1 = 0,5; \quad z_{2,3} = 0,6 \pm j0,5.$$

Для этих корней желаемые коэффициенты характеристического уравнения:

$$c_2^* = -1,7; \quad c_1^* = 1,21 \quad c_0^* = -0,305.$$

Коэффициенты характеристического уравнения по формуле (16.16)

$$c_3 = 1,0 \quad c_2 = -1,81; \quad c_1 = 1,21 \quad c_0 = -0,305.$$

Коэффициенты числителя передаточной функции замкнутой системы:

$$b_2 = 0,25; \quad b_1 = 0,044; \quad b_0 = 0,0012.$$

На рис. 16.2 приведен переходный процесс, полученный при подаче на вход замкнутой системы единичной ступенчатой функции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андронов, А.А. Теория колебаний / А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин. – М.: Физматгиз, 1959. – 915 с.
2. Динамика систем управления ракет с ботовыми вычислительными машинами / В.Д. Аренс, С.М. Федоров, М.С. Хитрик, С.В. Лучко ; под ред. М.С. Хитрика, С.М. Федорова. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1976. – 272 с.
3. Бесекерский, В.А. Теория систем автоматического регулирования / В.А. Бесекерский, Е.П. Попов. – М.: Наука, 1972. – 767 с.
4. Гноенский, Л.С. Математические основы теории управляемых систем / Л.С. Гноенский, Г.А. Каменский, Л.Э. Эльсгольц. – М.: Наука, 1969. – 512 с.
5. Шамриков, Б.М. Основы теории цифровых систем управления: учебник для высших технических учебных заведений / Б.М. Шамриков. – М.: Машиностроение, 1985. – 296 с.
6. Юревич, Е.И. Теория автоматического управления: учебник для высших технических учебных заведений / Е.И. Юревич. – 2-е изд., перераб. и доп. – Л.: «Энергия», 1975. – 416 с.

Учебное издание

Фурсов Владимир Алексеевич

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

Учебное пособие

Редактор Л.Р. Дмитриенко
Компьютерная верстка Л.Р. Дмитриенко

Подписано в печать 29.06.2021. Формат 60x84 1/16.

Бумага офсетная. Печ. л. 8,5.

Тираж 25 экз. Заказ . Арт. – 8(P1У)/2021

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
443086, Самара, Московское шоссе, 34.

Издательство Самарского университета.
443086, Самара, Московское шоссе, 34.