

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
**КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ В.И. ВЕРНАДСКОГО**
ТАВРИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ (структурное подразделение)
факультет математики и информатики
кафедра прикладной математики

Дюличева Ю.Ю.

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ
(учебно-методическое пособие)

Симферополь, 2019

УДК 681.5.01:519 (075.1)
ББК 32.817:22.1я73

Дюличева Ю.Ю.

Учебно-методическое пособие «Теория управления». Дюличева Ю.Ю. ФГАОУ
ВО «Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского». -
Симферополь, 2019. - 46 с.

Рекомендовано: Учебно-методический совет Таврической академии
(структурное подразделение) ФГАОУ ВО «Крымский федеральный
университет имени В.И. Вернадского»

Протокол №_____ от «_____» _____ 2019 г.

Рекомендовано: Учебно-методический совет Крымского федерального
университета имени В.И. Вернадского»

Протокол №_____ от «_____» _____ 2019 г.

Рецензенты: Старков П.А., кандидат физико-математических наук, доцент
кафедры математического анализа факультета математики и информатики
Таврической академии (структурное подразделение) ФГАОУ ВО «Крымский
федеральный университет имени В.И. Вернадского»

Москалева Ю.П., кандидат физико-математических наук, доцент кафедры
прикладной информатики Крымского инженерно-педагогического
университета

В учебно-методическом пособии по дисциплине «Теория управления»
изложены основы теории автоматического управления и регулирования.
Изложение ведется в строго логической последовательности, материал
представлен полно и доступно. Теоретические положения иллюстрируются
примерами.

Учебно-методическое пособие может быть использовано обучающимися по
направлению подготовки 01.03.04 Прикладная математика

@ Дюличева Ю.Ю., КФУ, 2019

Введение

Дисциплина «Теория управления» изучается на четвертом курсе и рассчитана на 72 часа (2 з.е.) Целью изучения дисциплины является формирование представления о понятиях, концепциях и принципах построения систем управления, методах исследования систем управления, лежащих в основе теоретических исследований и практических разработок в этой области.

Рассмотрим краткое содержание дисциплины:

Тема 1. Основные понятия теории управления: модель, информация, обратная связь, управление, система

Тема 2. Математическое описание элементов системы управления при помощи дифференциальных уравнений. Преобразование Лапласа и его свойства

Тема 3. Передаточная функция. Теорема разложения Хевисайда-Карсона. Частотные характеристики линейных систем

Тема 4. Типовые динамические звенья: усилительное звено, апериодическое звено первого порядка, апериодическое звено второго порядка, колебательное звено, интегрирующее звено, дифференцирующее звено

Тема 5. Структурные схемы АСУ. Основные виды соединения звеньев. Правила структурных преобразований

Тема 6. Использование графов для преобразования структурных схем. Теорема Мезона (Мейсона)

Тема 7. Устойчивость и переходные процессы в АСУ

Тема 8. Алгебраические критерии устойчивости АСУ

Тема 9. Частотные критерии устойчивости АС

Тема 10. Многомерные системы управления

В учебно-методическом пособии по дисциплине «Теория управления» для обучающихся направления подготовки 01.03.04 Прикладная математика кратко изложена теория по перечисленным темам, соответствующим содержанию дисциплины, и подробно разобраны решения типовых задач по теории управления, приведены задания для самостоятельной работы.

1. Описание объектов управления с помощью дифференциальных уравнений. Изображение Лапласа

Пусть объект управления описывается дифференциальным уравнением вида

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = b_0 x^{(m)} + b_1 x^{(m-1)} + \dots + b_{m-1} \dot{x} + b_m x \quad (1.1)$$

Традиционное решение дифференциального уравнения для определения выходного сигнала $y(t)$ по входному сигналу $x(t)$ сводится к нахождению общего решения неоднородного дифференциального уравнения в виде суммы общего решения однородного дифференциального уравнения и частного решения неоднородного дифференциального уравнения.

В реальных системах управления входной сигнал $x(t)$ обычно является случайной функцией времени. Для сопоставления переходных процессов в системах управления используют типовые входные сигналы, которые описываются единичной ступенчатой и импульсной функциями.

Единичная ступенчатая функция или функция Хевисайда описывает мгновенное изменение входного сигнала и задается

$$x(t) = l(t) = \begin{cases} 0, & \forall t < 0; \\ 1, & \forall t \geq 0. \end{cases}$$

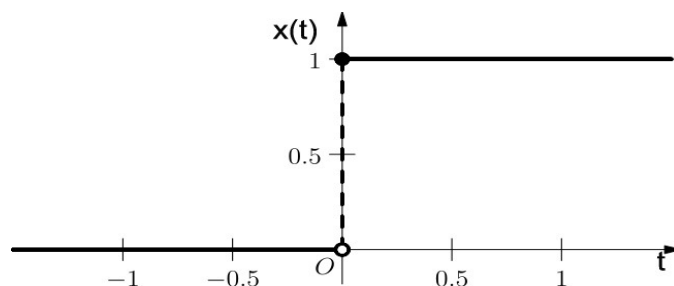


Рис.1.1. График единичной ступенчатой функции

Единичная импульсная функция или дельта-функция (функция Дирака) задается

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t=0; \\ 0, & \forall t \neq 0 \end{cases}, \text{ причем } \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

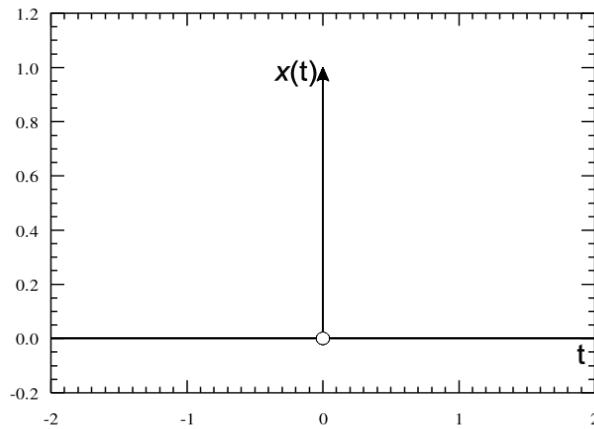


Рис.1.2. Схематический график одномерной дельта-функции.

Единичная степенная и импульсная функции связаны между собой соотношением $\delta(t) = l'(t)$.

Для сведения решения неоднородного дифференциального уравнения к решению алгебраического уравнения используют изображение Лапласа. Любой непрерывно-дифференцируемой функции $f(t)$ вещественного переменного t , определенной на интервале $[0; \infty)$, можно сопоставить функцию комплексного переменного p , называемую изображением Лапласа, вида:

$$L[f(t)] = F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \quad (1.2)$$

Найдем изображение Лапласа для единичной ступенчатой функции, которая на интервале $[0; \infty)$ равна единице, т. е. $f(t) = l(t) = 1$. По определению изображения Лапласа

$$L[f(t)=1] = F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = \frac{1}{p}$$

Таблица изображений Лапласа некоторых оригиналов

Оригинал	Изображение	Оригинал	Изображение
$f(t)=1$	$F(p)=\frac{1}{p}$	$f(t)=e^{\alpha t} \sin(\beta t)$	$F(p)=\frac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
$f(t)=t^n, n \in N$	$F(p)=\frac{n!}{p^{n+1}}$	$f(t)=e^{\alpha t} \cos(\beta t)$	$F(p)=\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
$f(t)=t^n e^{\alpha t}, n \in N$	$F(p)=\frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$	$f(t)=t \sin(\omega t)$	$F(p)=\frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$
$f(t)=\sin(\omega t)$	$F(p)=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$f(t)=t \cos(\omega t)$	$F(p)=\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
$f(t)=\cos(\omega t)$	$F(p)=\frac{p}{p^2+\omega^2}$	$f(t)=sh(\omega t)$	$F(p)=\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
$f(t)=\frac{\sin(t)}{t}$	$F(p)=arcctg p$	$f(t)=ch(\omega t)$	$F(p)=\frac{p}{p^2-\omega^2}$

Задача 1.1. Найти изображение Лапласа для оригинала $f(t)=\cos^2(t)$

Решение. Воспользуемся формулой Эйлера $\cos(t)=1/2 \cdot (e^{it}+e^{-it})$

и табличным изображением $\cos(\omega t)=\frac{p}{p^2+\omega^2}$ и $1(t)=1/p$.

$$\begin{aligned} \cos^2(t) &= 1/2 \cdot (e^{it} + e^{-it})^2 = 1/4 \cdot (e^{2it} + 2 + e^{-2it}) = 1/2 \cdot (1/2 \cdot (e^{2it} + e^{-2it}) + 1) = \\ &= 1/2 \cdot (\cos(2t) + 1) \rightarrow \frac{1}{2} \frac{p}{p^2+4} + \frac{1}{2p} \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{1}{2} \frac{p}{p^2+4} + \frac{1}{2p}$

Задача 1.2. Найти изображение Лапласа для оригинала $f(t)=\sin(\omega t)$

Решение. 1 способ. Найдем изображение Лапласа по определению, дважды интегрируя по частям:

$$F(p) = \int_0^{\infty} \sin(\omega t) e^{-pt} dt = -1/p \cdot \left| \begin{array}{ll} u = \sin(\omega t) & du = \omega \cdot \cos(\omega t) dt \\ dv = e^{(-pt)} & d(-pt) \end{array} \right| =$$

$$\begin{aligned}
&= -1/p \cdot \sin(\omega t) \cdot e^{-pt} + 1/p \cdot \int_0^{\infty} e^{-pt} \omega \cos(\omega t) dt = \\
&= -\omega/p^2 \cdot \left| \begin{array}{ll} u = \cos(\omega t) & du = -\omega \cdot \sin(\omega t) dt \\ dv = e^{(-pt)} d(-pt) & v = e^{-pt} \end{array} \right| = -\omega/p^2 \cdot \cos(\omega t) e^{-pt} - \\
&- \omega^2/p^2 \cdot \int_0^{\infty} \sin(\omega t) e^{(-pt)} dt
\end{aligned}$$

В результате получили: $\int_0^{\infty} \sin(\omega t) e^{-pt} dt = \omega/p^2 - \omega^2/p^2 \cdot \int_0^{\infty} \sin(\omega t) e^{(-pt)} dt$.

О т к у д а $\int_0^{\infty} \sin(\omega t) e^{-pt} dt \cdot (1 + \omega^2/p^2) = \omega/p^2$ и, следовательно,

$$F(p) = \int_0^{\infty} \sin(\omega t) e^{-pt} dt = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} .$$

2 способ. Найдем изображения Лапласа оригинала $f(t) = \sin(\omega t)$, используя свойство линейности и табличное значение

$$e^{\alpha t} \rightarrow \frac{1}{p - \alpha} .$$

$$\begin{aligned}
&\text{По формуле Эйлера } \sin(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \rightarrow \frac{1}{2i} \cdot \left(\frac{1}{p - i\omega} - \frac{1}{p + i\omega} \right) = \\
&= \frac{1}{2i} \cdot \frac{2i\omega}{(p - i\omega)(p + i\omega)} = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} .
\end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \sin(\omega t) \rightarrow \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} .$$

Рассмотрим некоторые свойства изображения Лапласа. Первое свойство линейности вытекает из свойства линейности интеграла — линейная комбинация

Теорема дифференцирования.

$$L[f'(t)] = \int_0^{\infty} f'(t) e^{-pt} dt = pF(p) - f(0)$$

При нулевых начальных условиях следствие из теоремы дифференцирования имеет вид: $L[f^{(n)}(t)] = p^n F(p)$ (1.2)

Используя следствие из теоремы дифференцирования (1.2), можно перейти от дифференциального уравнения (1.1) к

алгебраическому при нулевых начальных условиях.

По дифференциальному уравнению $a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = b_0 x^{(m)} + b_1 x^{(m-1)} + \dots + b_{m-1} \dot{x} + b_m x$, получим $a_0 p^n Y(p) + a_1 p^{n-1} Y(p) + \dots + a_{n-1} p Y(p) + a_n Y(p) = b_0 p^m X(p) + b_1 p^{m-1} X(p) + \dots + b_{m-1} p X(p) + b_m X(p)$, где $Y(p), X(p)$ — изображения Лапласа соответственно выхода $y(t)$ и входа $x(t)$.

В левой части вынесем общий множитель $Y(p)$, а в правой части — общий множитель $X(p)$, получим

$$Y(p)(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n) = X(p)(b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m)$$

$$\frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n} = \frac{B(p)}{A(p)} \quad \text{или}$$

$$Y(p) = \frac{B(p)}{A(p)} X(p) = W(p) X(p), \quad \text{откуда} \quad W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}.$$

Функция $W(p)$, равная отношению изображения Лапласа выходного сигнала к изображению Лапласа входного сигнала, называется *передаточной функцией*.

Рассмотрим обратную задачу нахождения оригинала по изображению Лапласа. В случае, когда изображение представимо в виде дробно-рациональной функции $Y(p) = \frac{B(p)}{A(p)}$ оригинал можно найти на основе теоремы Хевисайда-Карсона, согласно которой оригинал определяется как $y(t) = \sum_{k=0}^n \frac{B(p_k)}{A'(p_k)} e^{p_k t}$, где p_k — корни уравнения $A(p) = 0$.

Задача 1.3. Найти оригинал функции $F(p) = \frac{p}{p^2 - 4p + 20}$.

Решение. Разложим дробь на сумму таких дробей, оригиналы которых можно найти по таблице

$$F(p) = \frac{p}{p^2 - 4p + 20} = \frac{p-2}{(p-2)^2 + 16} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{(p-2)^2 + 4^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow e^{2t} \cdot \cos(4t) + \frac{1}{2} \cdot e^{2t} \cdot \sin(4t) \quad , \text{ т.к. } \frac{p-2}{(p-2)^2 + 4^2} \rightarrow e^{2t} \cdot \cos(4t) \quad ;$$

$$\frac{4}{(p-2)^2 + 4^2} \rightarrow e^{2t} \cdot \sin(4t)$$

$$\text{Ответ: } F(p) = \frac{p}{p^2 - 4p + 20} \rightarrow e^{2t} \cdot \cos(4t) + \frac{1}{2} \cdot e^{2t} \cdot \sin(4t) \quad .$$

$$\text{Задача 1.4. Найти оригинал функции } F(p) = \frac{1}{p^3 - 8} \quad .$$

Решение. Разложим исходную дробь на элементарные дроби

$$F(p) = \frac{1}{p^3 - 8} = \frac{A}{p-2} + \frac{Bp+C}{p^2+2p+4} = \frac{A \cdot (p^2+2p+4) + (Bp+C)(p-2)}{(p-2)(p^2+2p+4)} \quad .$$

Приравниваем числители $A \cdot (p^2+2p+4) + (Bp+C)(p-2) = 1$, получим систему уравнений

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2A+C-2B=0 \\ 4A-2C=1 \end{cases} \quad ,$$

решение которой имеет вид:

$$\begin{cases} A=1/12 \\ B=-1/12 \\ C=-1/3 \end{cases}$$

$$F(p) = \frac{1}{p^3 - 8} = \frac{A}{p-2} + \frac{Bp+C}{p^2+2p+4} = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{p-2} - \frac{1}{12} \cdot \frac{p+4}{p^2+2p+4} =$$

$$= \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{p-2} - \frac{1}{12} \cdot \left[\frac{(p+1) + (\sqrt{3})^2}{(p+1)^2 + (\sqrt{3})^2} \right] = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{p-2} - \frac{1}{12} \cdot \frac{p+1}{(p+1)^2 + (\sqrt{3})^2} - \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot$$

$$\frac{\sqrt{3}}{(p+1)^2 + (\sqrt{3})^2} \quad .$$

$$\text{С учётом разложений } e^{\alpha t} \rightarrow \frac{1}{p-\alpha} \quad ; \quad e^{\alpha t} \cos \beta t \rightarrow \frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2 + \beta^2} \quad ;$$

$$e^{\alpha t} \sin \beta t \rightarrow \frac{\beta}{(p-\alpha)^2 + \beta^2} \quad , \text{ получим оригинал}$$

$$f(t) = \frac{1}{12} \cdot e^{2t} - \frac{1}{12} e^{-t} (\cos(t\sqrt{3}) + \sqrt{3} \sin(t\sqrt{3}))$$

Ответ: $f(t) = \frac{1}{12} \cdot e^{2t} - \frac{1}{12} e^{-t} (\cos(t\sqrt{3}) + \sqrt{3} \sin(t\sqrt{3}))$

Задача 1.5. Найти оригинал $f(t)$ по заданному изображению

$F(p) = \frac{p}{(p+1) \cdot (p+3)}$, используя теорему разложения Хевисайда-Карсона

Решение. По теореме Хевисайда-Карсона для дробно-рациональной функции можно найти оригинал на основе разложения

$$f(t) = \sum_{k=0}^n \frac{B(p_k)}{A'(p_k)} e^{p_k t}, \text{ где } p_k \text{ — корни уравнения } A(p) = 0.$$

В нашем случае $A(p) = (p+1)(p+3) = 0$. Получим два корня $p_1 = -1$, $p_2 = -3$. При этом, $A'(p) = 2p + 4$ и $A'(-1) = -2 + 4 = 2$, $A'(-3) = 2 \cdot (-3) + 4 = -2$, $B(p) = p$, $B(-1) = -1$, $B(-3) = -3$.

Оригинал определяется как

$$f(t) = \sum_{k=0}^n \frac{B(p_k)}{A'(p_k)} e^{p_k t} = \frac{-1}{2} \cdot e^{-t} + \frac{-3}{-2} \cdot e^{-3t} = -\frac{1}{2} \cdot e^{-t} + \frac{3}{2} \cdot e^{-3t}.$$

Ответ: $f(t) = -\frac{1}{2} \cdot e^{-t} + \frac{3}{2} \cdot e^{-3t}$.

Задача 1.6. Найти передаточную функцию объекта управления, описываемого дифференциальным уравнением

$$0,05 \ddot{y} + 0,3 \dot{y} + 0,1 y = 0,1 \dot{x} + 0,3 x$$

Решение. Воспользуемся следствием из теоремы дифференцирования при нулевых начальных условиях:

$$0,05 p^2 Y(p) + 0,3 p Y(p) + 0,1 Y(p) = 0,1 p X(p) + 0,3 X(p)$$

$$(0,05 p^2 + 0,3 p + 0,1) Y(p) = (0,1 p + 0,3) X(p)$$

Передаточная функция определяется как:

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{0,1 p + 0,3}{0,05 p^2 + 0,3 p + 0,1}.$$

$$\text{Ответ: } W(p) = \frac{0,1p + 0,3}{0,05p^2 + 0,3p + 0,1}$$

Задача 1.7. Найти двумя способами переходную функцию и функцию веса для объекта управления, описываемого дифференциальным уравнением $0,07\ddot{y} + 0,8\dot{y} + y = 0,2x(t)$ с нулевыми начальными условиями.

Решение. 1 способ. На вход объекта управления подадим единичный сигнал $x(t) = l(t) = 1$, тогда дифференциальное уравнение примет вид: $0,07\ddot{y} + 0,8\dot{y} + y = 0,2$ - неоднородное дифференциальное уравнение, решение которого будем искать в виде суммы общего решения однородного дифференциального уравнения и частного решения неоднородного дифференциального уравнения

$$y_{\text{он}}(t) = y_{\text{оо}}(t) + y_{\text{чн}}(t) \text{ .}$$

Запишем однородное дифференциальное уравнение

$$0,07\ddot{y} + 0,8\dot{y} + y = 0$$

и соответствующее ему характеристическое уравнение $0,07p^2 + 0,8p + 1 = 0$. Корнями характеристического уравнения являются $p_1 = -10/7, p_2 = -10$ — вещественные корни, тогда общее решение дифференциального уравнения имеет вид:

$$y_{\text{оо}}(t) = C_1 e^{-10/7t} + C_2 e^{-10t} \text{ .}$$

Частное решение неоднородного дифференциального уравнения будем искать в том же виде, что и правая часть дифференциального уравнения, т. е. в виде константы $y_{\text{чн}} = C_3$. Подставив $y_{\text{чн}} = C_3$ в исходное уравнение, получим $C_3 = 0,2$. Окончательно,

$y_{\text{он}}(t) = C_1 e^{-10/7t} + C_2 e^{-10t} + 0,2$. Найдем постоянные интегрирования и из начальных условий:

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 + 0,2 = 0 \\ \dot{y}(0) = -10/7 C_1 - 10 C_2 = 0 \end{cases}$$

Из второго уравнения $C_2=10/7 \cdot (-1/10)C_1=-1/7C_1$, а из первого уравнения $C_1=1/7C_1-2/10$. Откуда $C_1=-7/30, C_2=1/30$. Окончательно, $h(t)=y(t)=-7/30e^{-10/7t}+1/30e^{-10t}+0,2$ - переходная функция.

Функция веса $w(t)=h'(t)=1/3e^{-10/7t}-1/3e^{-10t}$.

2 способ. Найдем передаточную функцию. Для этого воспользуемся следствием из теоремы дифференцирования $Y(p)(0,07p^2+0,8p+1)=0,2X(p)$.

Следовательно, $W(p)=\frac{Y(p)}{X(p)}=\frac{0,2}{0,07p^2+0,8p+1}$.

Для нахождения функции веса на вход подаются значения единичной импульсной функции, изображение Лапласа которой $X(p)=1$ и, следовательно, передаточная функция

$W(p)=Y(p)=\frac{0,2}{0,07p^2+0,8p+1}$. Для нахождения оригинала $w(t)$

воспользуемся теоремой Хевисайда-Карсона $w(t)=\sum_{k=1}^2 \frac{B(p_k)}{A'(p_k)}$, где

p_k — корни уравнения $A(p)=0,07p^2+0,8p+1=0$, т.е. $p_1=-10/7, p_2=-10$. Найдем $A'(p)=0,14p+0,8$ и значения $A'(-10/7)=7/50 \cdot (-10/7)+4/5=3/5$, $A'(-10)=7/50 \cdot (-10)+4/5=-3/5$.

Следовательно, $w(t)=\frac{1/5}{3/5}e^{-10/7t}-\frac{1/5}{3/5}e^{-10t}=1/3e^{-10/7t}-1/3e^{-10t}$.

Для нахождения передаточной функции на вход подаются значения единичной ступенчатой функции, изображение Лапласа которой $X(p)=1/p$ и, следовательно, передаточная функция

$W(p)=\frac{Y(p)}{1/p}=\frac{0,2}{0,07p^2+0,8p+1}$ и $Y(p)=\frac{0,2}{p(0,07p^2+0,8p+1)}$. Для

нахождения оригинала $y(t)$ воспользуемся теоремой Хевисайда-

Карсона $y(t) = \sum_{k=1}^3 \frac{B(p_k)}{A'(p_k)}$, где p_k — корни уравнения

$$A(p) = p(0,07p^2 + 0,8p + 1) = 0, \text{ т. е. } p_1 = -10/7, p_2 = -10, p_3 = 0.$$

Найдем $A'(p) = 0,21p^2 + 1,6p + 1$ и значения

$$A'(-10/7) = 21/100 \cdot (100/49) + 8/5 \cdot (-10/7) + 1 = -42/49,$$

$$A'(-10) = 21/100 \cdot (100) + 8/5 \cdot (-10) + 1 = 6, \quad A'(0) = 1.$$

Следовательно,

$$h(t) = y(t) = \frac{1/5}{-42/49} e^{-10/7t} + \frac{1/5}{6} e^{-10t} + \frac{0,2}{1} e^{0t} = -7/30 e^{-10/7t} + 1/30 e^{-10t} + 0,2.$$

$$\text{Ответ: } h(t) = -7/30 e^{-10/7t} + 1/30 e^{-10t} + 0,2 \quad w(t) = 1/3 e^{-10/7t} - 1/3 e^{-10t}$$

Задания для самостоятельной работы

1. Найти изображения Лапласа для оригинала $f(t)$

a) $f(t) = \cos^3(t)$;

b) $f(t) = sh(\alpha t) \sin(\beta t)$;

c) $f(t) = \cos(\omega t)$

d) $f(t) = t^n, n \in N$

e) $f(t) = ch(\omega t)$

2. Найти оригинал $f(t)$ по заданному изображению $F(p)$

a) $F(p) = \frac{1}{p^2 + 4p + 5}$;

b) $F(p) = \frac{1}{7 - p + p^2}$;

c) $F(p) = \frac{p+3}{p \cdot (p^2 - 4p + 3)}$;

d) $F(p) = \frac{p}{p^2 - 2p + 5}$;

e) $F(p) = \frac{1}{p^3 - 8}$;

f) $F(p) = \frac{1}{p \cdot (p-1) \cdot (p^2 + 4)}$

3. Найти оригинал $f(t)$ по заданному изображению $F(p)$, используя теорему разложения Хевисайда-Карсона

a) $F(p) = \frac{1}{p^4 - 6p^3 + 11p^2 - 6p}$;

b) $F(p) = \frac{4 - p + p^2}{p^3 - p}$.

4. Найти двумя способами переходную функцию и функцию веса для объекта управления, описываемого дифференциальным уравнением с нулевыми начальными условиями:

a) $0,07 \ddot{y} + 0,8 \dot{y} + y = 0,2 x(t)$

b) $0,05 \ddot{y} + 0,4 \dot{y} + y = 0,4 x(t)$

c) $0,03 \ddot{y} + 0,4 \dot{y} + y = 0,5 x(t)$

d) $\ddot{y} + 0,4 \dot{y} + 0,05 y = 0,4 x(t)$

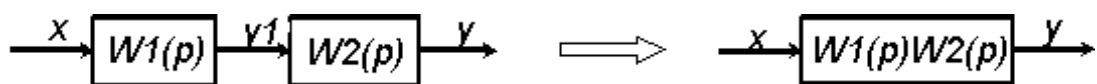
e) $\ddot{y} + 0,4 \dot{y} + 0,03 y = 0,5 x(t)$

f) $0,07 \ddot{y} + 0,8 \dot{y} + 0,03 y = 0,2 x(t)$

2. Правила преобразования структурных схем

Системы автоматического управления состоят из функциональных элементов и могут быть представлены в виде структурной схемы, состоящей из динамических звеньев, сопоставляемых функциональным элементам. Структурная схема описывает взаимосвязи между элементами системы управления.

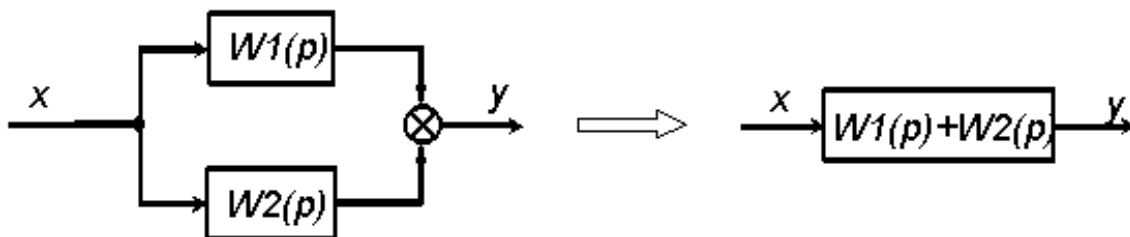
1. Последовательное соединение звеньев



Пусть $Y_1(p) = W_1(p)X(p)$ и $Y(p) = W_2(p)Y_1(p)$, тогда $Y(p) = W_2(p)Y_1(p) = W_1(p)W_2(p)X(p)$. Таким образом, два последовательно соединенных звена структурной схемы с

передаточными функциями $W_1(p)$ и $W_2(p)$ могут быть заменены эквивалентным звеном с передаточной функцией $W_1(p)W_2(p)$.

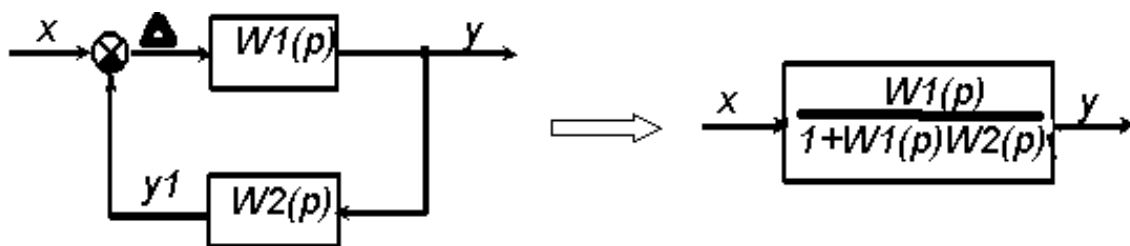
2. Параллельное соединение звеньев



Пусть $Y_1(p) = W_1(p)X(p)$ и $Y_2(p) = W_2(p)X(p)$, тогда $Y(p) = Y_1(p) + Y_2(p) = W_1(p)X(p) + W_2(p)X(p) = (W_1(p) + W_2(p))X(p)$.

Таким образом, два параллельно соединенных звена структурной схемы с передаточными функциями $W_1(p)$ и $W_2(p)$ могут быть заменены эквивалентным звеном с передаточной функцией $W_1(p) + W_2(p)$.

3. Параллельно-встречное соединение звеньев (отрицательная обратная связь (ОС))



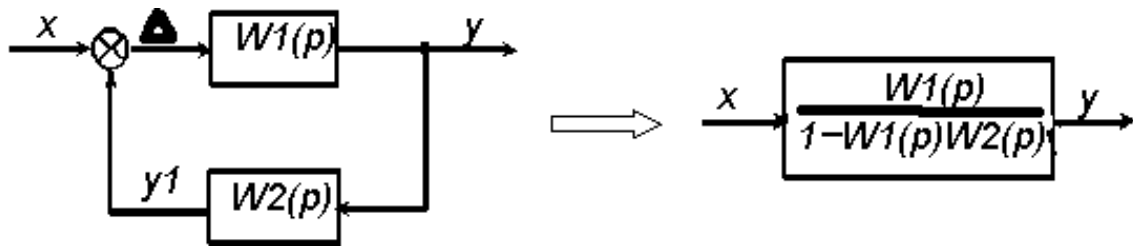
Пусть $\Delta(p) = X(p) - Y_1(p)$, $Y_1(p) = W_2(p)Y(p)$ и $Y(p) = W_1(p)\Delta(p)$, тогда
 $Y(p) = W_1(p) \cdot (X(p) - Y_1(p)) = W_1(p) \cdot (X(p) - W_2(p)Y(p)) = W_1(p)X(p) -$
 $- W_1(p)W_2(p)Y(p)$ и, следовательно, $Y(p) = \frac{W_1(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)} X(p)$.

Таким образом, параллельно-встречное соединение звеньев (обратную связь) структурной схемы можно заменить эквивалентным

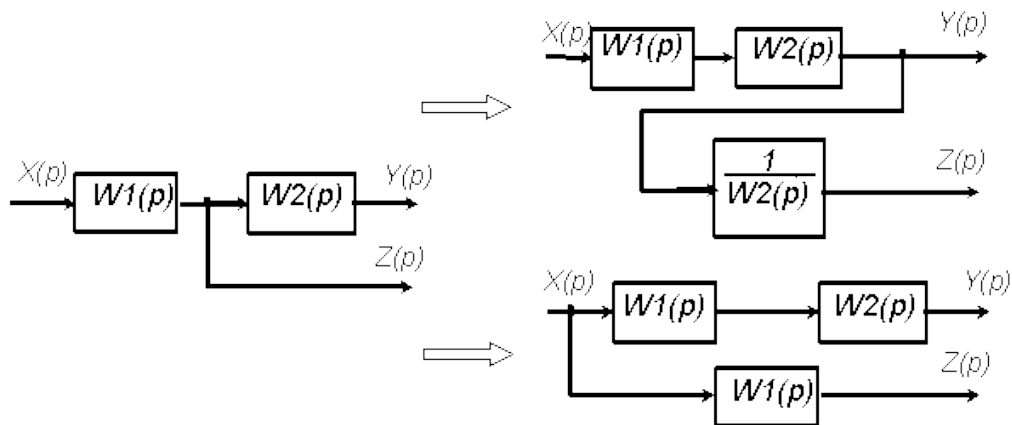
звеном с передаточной функцией $\frac{W_1(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)}$.

При положительной обратной связи *передаточная функция*

имеет вид $\frac{W_1(p)}{1 - W_1(p)W_2(p)}$



4. Перенос точки ветвления через динамическое звено



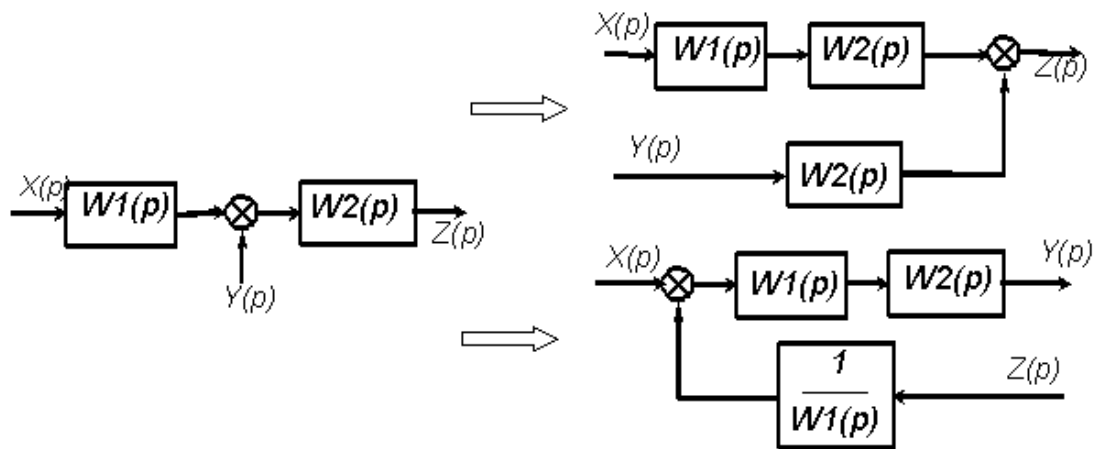
Рассмотрим первый случай переноса точки ветвления через звено с передаточной функцией $W_2(p)$. На основании исходной структурной схемы можно записать $Y(p) = W_2(p)Z(p)$ и $Z(p) = W_1(p)X(p)$. При переносе точки ветвления получим, что

$$Y(p) = W_1(p)W_2(p)X(p) \text{ и } Z(p) = W_1(p)W_2(p) \frac{1}{W_2(p)} X(p) =$$

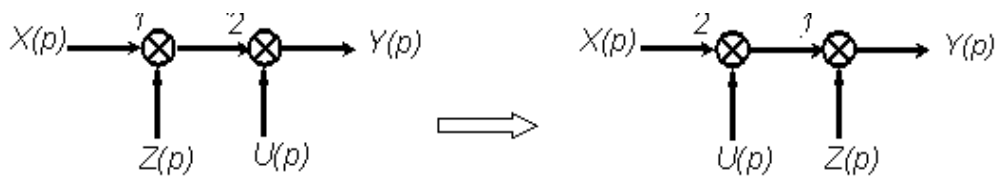
$$= Y(p) \frac{1}{W_2(p)} X(p) .$$

5. Перенос суммирующего звена (сумматора) через динамическое

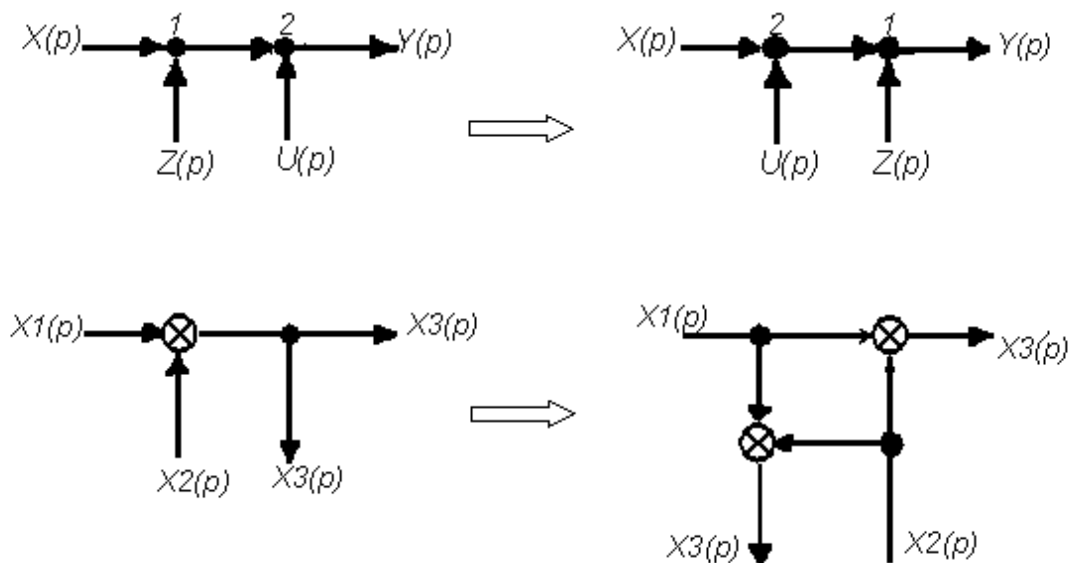
ЗВЕНО



6. Перестановка суммирующих звеньев

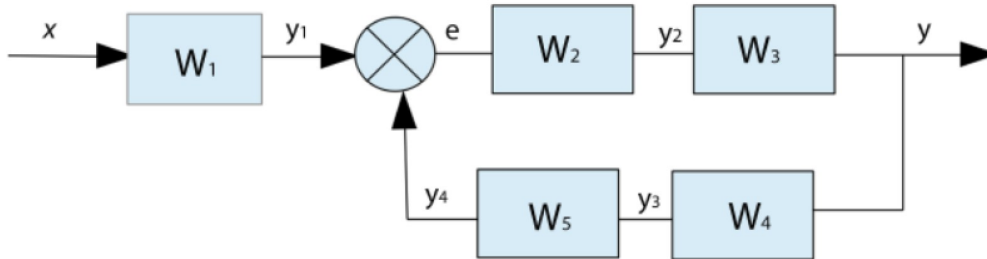


7. Перестановка точек ветвления

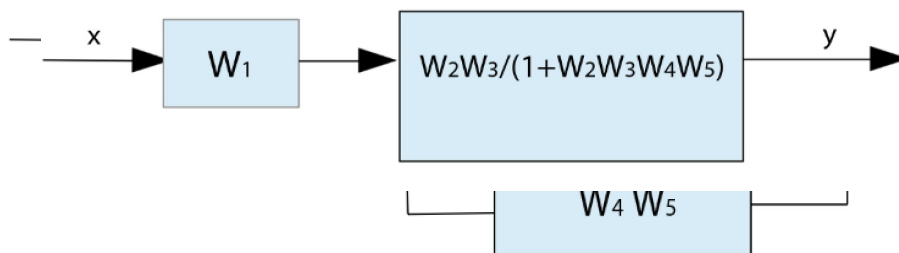


8. Перенос точки ветвления с выхода на вход сумматора

Задача 2.1. Упростить структурную схему и найти эквивалентную передаточную функцию:

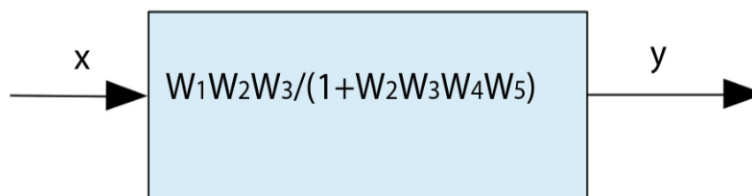


Решение. 1 шаг. Применим дважды эквивалентное преобразование последовательно соединенных звеньев.



2 шаг. Используем эквивалентное преобразование для параллельно-встречного соединения звеньев

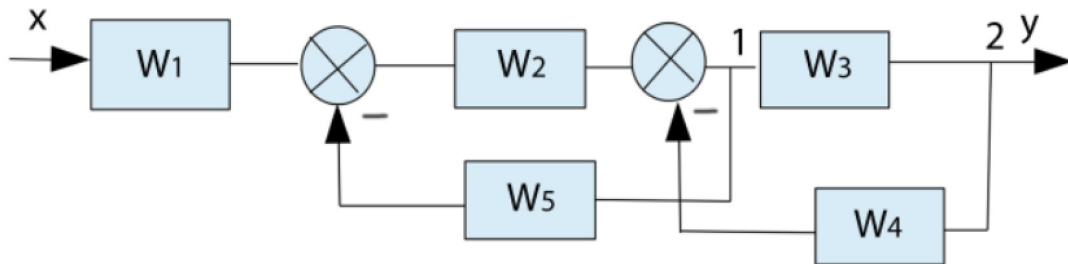
3 шаг. Выполним эквивалентное преобразование последовательного соединения звеньев



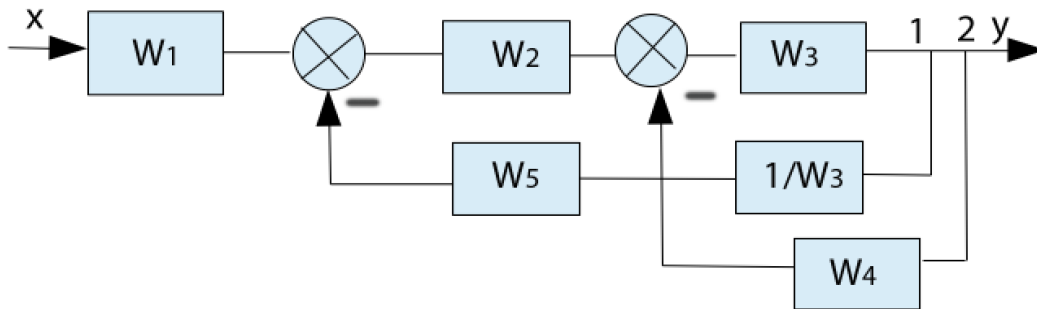
Ответ:
$$W_{\text{экв}} = \frac{W_1 W_2 W_3}{1 + W_2 W_3 W_4 W_5}$$

Задача 2.2. Упростить структурную схему и найти

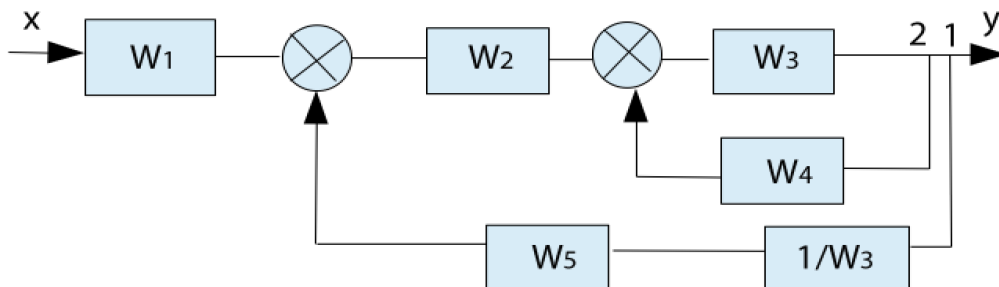
эквивалентную передаточную функцию:



Решение. 1 шаг. Уберем пересечение связей на структурной схеме. Для этого перенесем первый узел с входа на выход через динамическое звено, при этом добавляется дополнительное звено с передаточной функцией обратной передаточной функции, соответствующей звену через которого переносился узел ветвления:

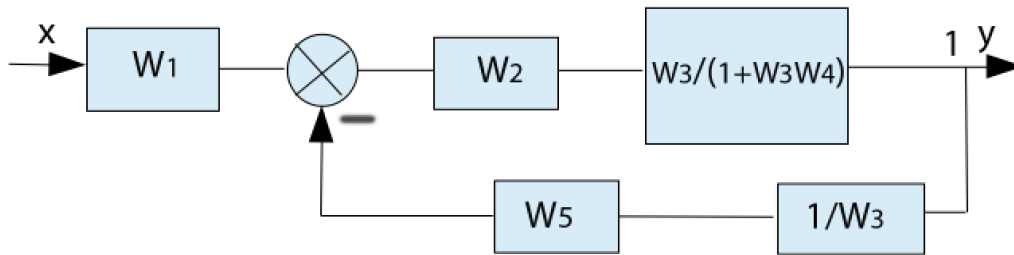


2 шаг. Поменяем местами узла ветвления 1 и 2. Получим структурную схему без пересечений соединений звеньев.

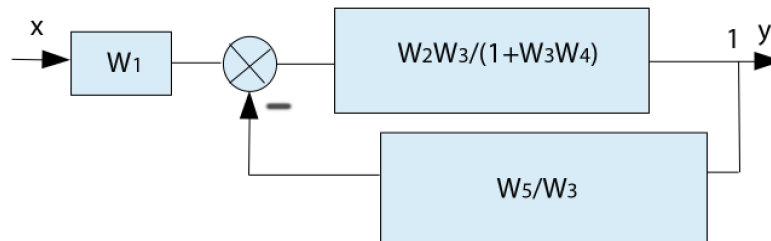


3 шаг. Выполним эквивалентное преобразование обратной связи со звеньями, которым соответствуют передаточные функции W_3 и

W_4 . Получим:

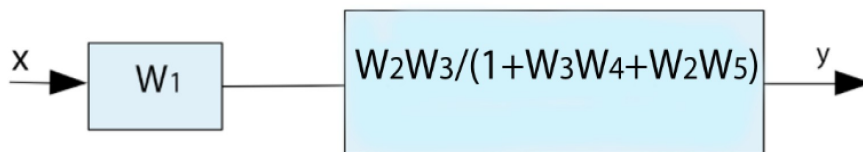


4 шаг. Дважды применим эквивалентное преобразование последовательно соединенных звеньев:

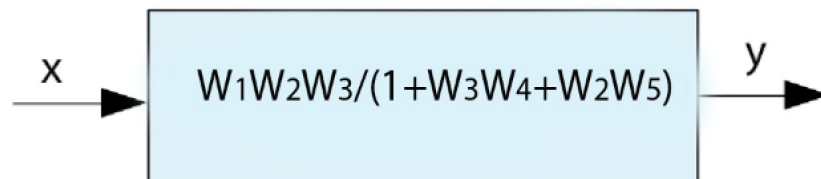


5 шаг. Выполним эквивалентное преобразование обратной связи со звеньями, которым соответствуют передаточные функции

$\frac{W_2 W_3}{1 + W_3 W_4}$ и $\frac{W_5}{W_3}$. Получим:



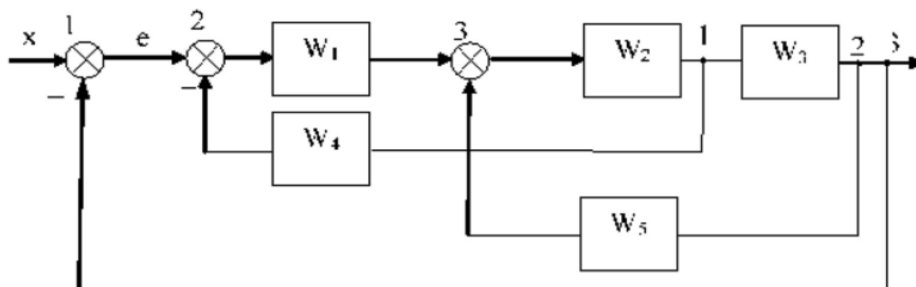
6 шаг. Применим эквивалентное преобразование последовательно соединенных звеньев



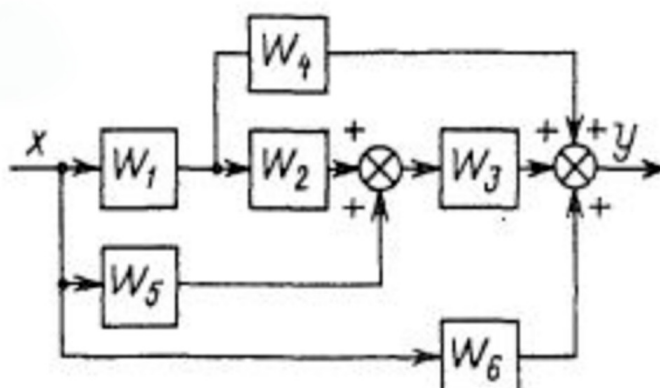
Ответ:
$$W_{\text{экв}} = \frac{W_1 W_2 W_3}{1 + W_3 W_4 + W_2 W_5}$$

Задания для самостоятельной работы

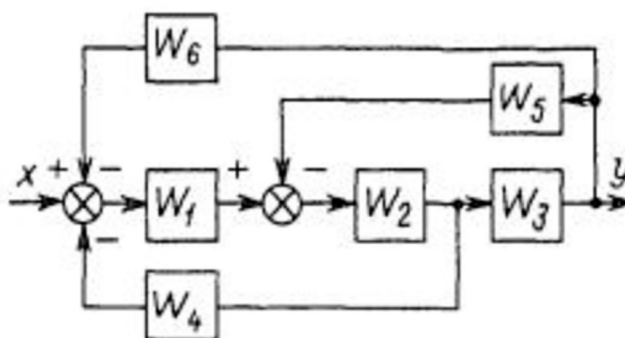
1. Найти эквивалентную передаточную функцию для заданной структурной схемы



2.



3.



3. Представление структурных схем в виде графа.

Теорема Мезона

Элементы системы управления и связи между ними можно представить с помощью графа. Рассмотрим правила преобразования структурной схемы в оргграф:

- 1) каждый сумматор структурной схемы заменяется вершиной оргграфа, которой ставится в соответствие выходная переменная сумматора;
- 2) каждое динамическое звено заменяется ориентированным ребром с меткой, равной передаточной функции, которая приписана звену;
- 3) каждой переменной, соответствующей входному и выходному сигналу, соответствует вершина с меткой сигнала x и y соответственно;
- 4) изменить структурную схему надо так, чтобы в сумматорах все переменные складывались. Этого можно достичь путем внесения знака минус к передаточной функции для соответствующего звена.

Введем вспомогательные определения. *Передачей s -го пути* называется произведение передаточных функций, приписанных ребрам s -го пути. *Передачей контура L* называется произведение передаточных функций, приписанных ребрам контура L .

Теорема Мезона (Мейсона). Передача графа определяется как:

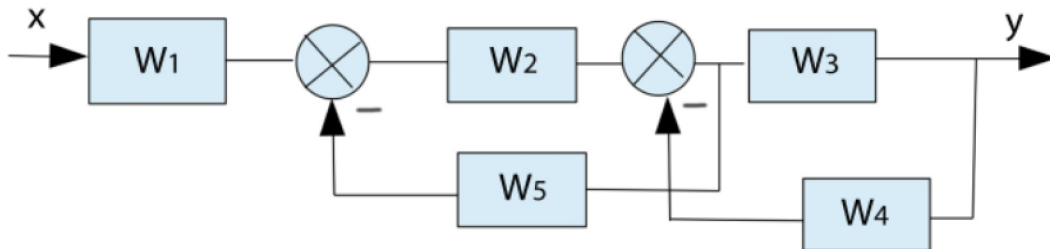
$$T_{xy} = \frac{\sum_s P_s \Delta_s}{\Delta}, \text{ где}$$

Δ - определитель графа, в котором учитывается только произведение некасающихся даже в точке контуров; P_s - передача s -го пути; Δ_s - алгебраическое дополнение s -го пути, которое

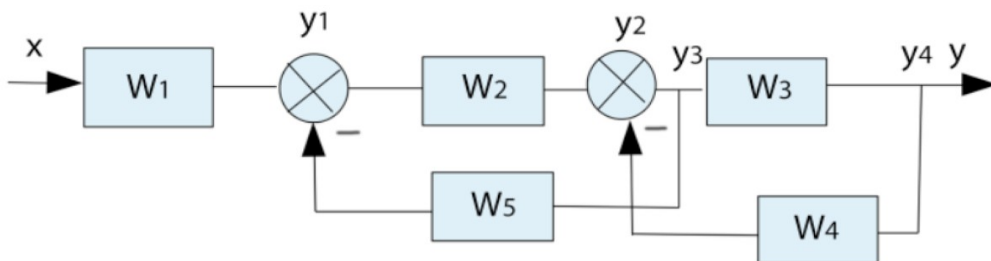
получается из определителя графа, путем исключения всех контуров, которых касается s -ый путь.

Передача графа $T_{xy} = \frac{\sum_s P_s \Delta_s}{\Delta}$ совпадает с эквивалентной передаточной функцией W_{xy} .

Задача 3.1. Упростить структурную схему с помощью формулы Мезона и найти эквивалентную передаточную функцию:

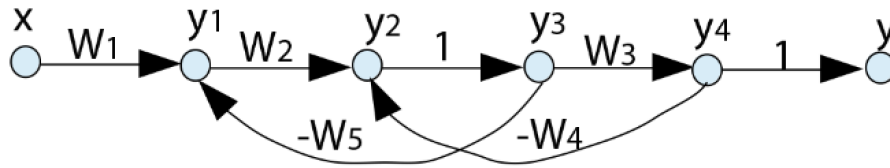


Решение. 1 шаг. Введем вспомогательные переменные для обозначения узлов ветвления и сумматоров



2 шаг. Построим граф по структурной схеме. Входу x сопоставим вершину графа и сумматору y_1 сопоставим вершину графа, затем соединим эти вершины направленным ребром, которому припишем передаточную функцию W_1 . Затем соединим вершину y_1 с вершиной, которую сопоставим сумматору, обозначенному y_2 , соединим y_1 и y_2 направленным ребром, которому припишем передаточную функцию W_2 . Вершину y_2 соединим с

вершиной, которую сопоставим узлу ветвления, обозначенному y_3 . Между сумматором и узлом ветвления нет звена, с приписанной ему передаточной функцией, поэтому между вершинами y_2 и y_3 построим направленное ребро, которому припишем единичный сигнал и т. п. Получим граф:



3 шаг. Выпишем все пути из вершины x в вершину y . Существует один путь из вершины x в вершину y и его передача определяется как $P_{x,y} = W_1 W_2 W_3$

4 шаг. Выпишем все контуры построенного графа. Существует два контура: первый проходит через рёбра с метками W_2 , 1 и $-W_5$ и второй контур проходит через рёбра с метками 1 , W_3 и $-W_4$. Передачи этих контуров определяются как $L_1 = -W_2 W_5$ и $L_2 = -W_3 W_4$.

5 шаг. Вычислим определитель Δ_1 для пути с передачей $P_{x,y} = W_1 W_2 W_3$. Поскольку каждый из контуров касается пути (первый контур касается пути $P_{x,y} = W_1 W_2 W_3$ по ребру W_2 , а второй — по ребру W_1), то $\Delta_1 = 1$.

6 шаг. Вычислим определитель графа $\Delta = (1 - L_1)(1 - L_2)$, исключив из рассмотрения произведения передач взаимно касающихся, хотя бы по вершине, контуров. Поскольку контуры $L_1 = -W_2 W_5$ и $L_2 = -W_3 W_4$ имеют общее ребро с меткой 1 , т. е. касаются, то $\Delta = 1 - L_1 - L_2 = 1 + W_2 W_5 + W_3 W_4$.

7 шаг. Для вычисления эквивалентной передаточной функции

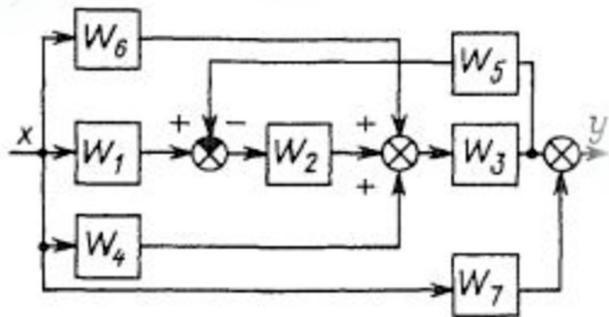
воспользуемся формулой Мезона $W_{\text{экв}} = \frac{P_{xy} \Delta_1}{1 - L_1 - L_2} = \frac{W_1 W_2 W_3}{1 + W_2 W_5 + W_3 W_4}$.

Ответ: $W_{\text{экв}} = \frac{W_1 W_2 W_3}{1 + W_2 W_5 + W_3 W_4}$.

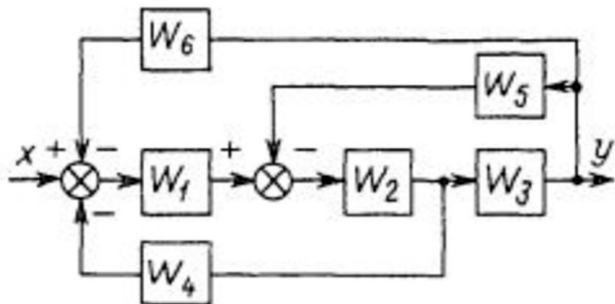
Задания для самостоятельной работы

1. Найти эквивалентную передаточную функцию для заданной структурной схемы по теореме Мезона (Мейсона):

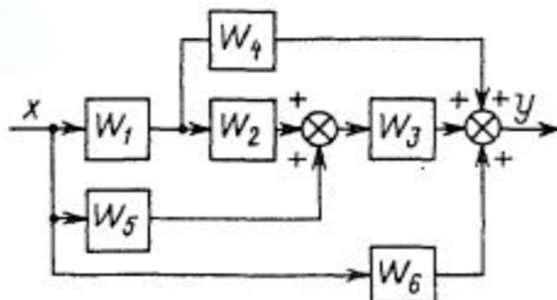
a)



b)



c)



4. Соответствие между структурной схемой и дифференциальным уравнением

Структурные схемы состоят из элементарных типовых звеньев, сумматоров и узлов ветвления. Покажем алгоритм построения структурной схемы по заданному дифференциальному уравнению, описывающему систему управления.

Алгоритм построения структурной схемы по дифференциальному уравнению.

1 шаг. В дифференциальном уравнении выразить член со старшей производной через остальные члены дифференциального уравнения (слева член со старшей степенью, справа — остальные члены дифференциального уравнения). На структурной схеме этому «разделению» будет соответствовать сумматор, слева от которого будут расположены дифференцирующие и усилительные звенья, а справа — интегрирующие и усилительные звенья.

2 шаг. Все производные низшего порядка получают как сигналы на выходе из последовательно соединенных интегрирующих и усилительных звеньев.

3 шаг. Производные входных сигналов получаются на выходе из дифференцирующих и усилительных звеньев.

4 шаг. Начальные условия дифференциального уравнения воспринимаются как постоянные во времени воздействия на выходах из соответствующих интегрирующих звеньев.

Задача 4.1. Построить структурную схему системы управления, описываемой дифференциальным уравнением:

$$5 \ddot{y} - 4 \dot{y} + 2y = 4 \dot{x}$$

с начальными условиями $y(0) = y_0$, $\dot{y}(0) = \dot{y}_0$.

Решение. На первом шаге выразим из дифференциального

уравнения член со старшей степенью:

$$5\ddot{y} = 4\dot{x} + 4\dot{y} - 2y$$

На втором шаге на выходе из сумматора получим член со старшей производной, а все производные низших порядков для выходных сигналов получим путем последовательного соединения усилительных звеньев с коэффициентами усиления обратными коэффициентам при производных старшего порядка и более низших порядков выходных сигналов. Так, на выходе из сумматора имеем $5\ddot{y}$, применим усилительное звено с коэффициентом усиления $1/5$ и получим на выходе из этого звена $\ddot{y}$, применим интегрирующее звено $1/p$ и на выходе получим $\dot{y}$, последовательно применяя интегрирующее звено еще раз на выходе получим y (рис.4.1).

Справа от сумматора на вход подается сигнал x , затем применяется дифференцирующее звено для получения на выходе этого звена $\dot{x}$ и последовательно располагаем усилительное звено с коэффициентом усиления 4. На выходе из усилительного звена при последовательном соединении получим сигнал, соответствующий $4\dot{x}$, который подается на вход сумматора с выходом, соответствующим сигналу $5\ddot{y}$ (рис.4.2.).

Результирующая структурная схема приведена на рисунке 4.3.

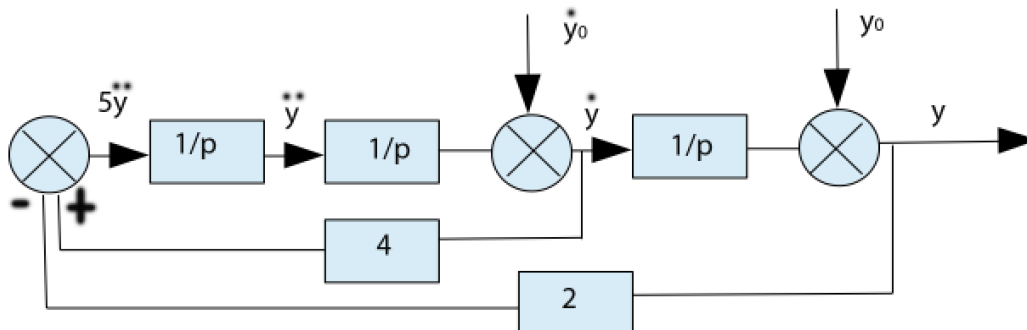


Рис.4.1. Фрагмент структурной схемы для выходных сигналов

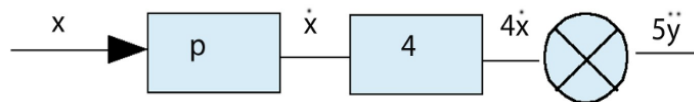


Рис.4.2. Фрагмент структурной схемы для входных сигналов

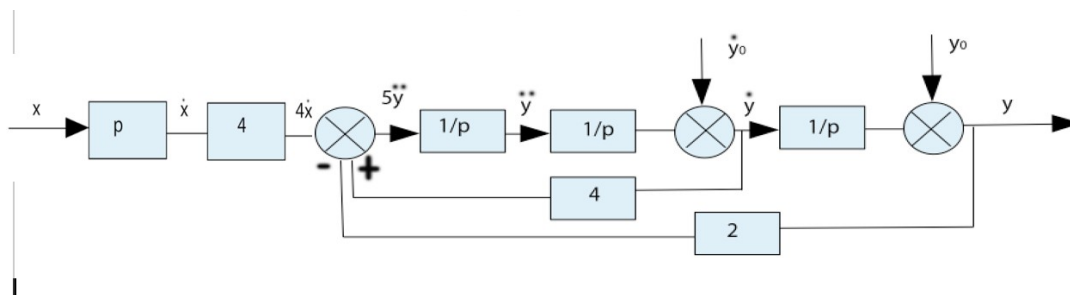


Рис.4.3. Структурная схема, построенная

по дифференциальному уравнению $5\ddot{y} - 4\dot{y} + 2y = 4\dot{x}$

Рассмотрим алгоритм построения дифференциального уравнения по структурной схеме.

Алгоритм построения дифференциального уравнения по структурной схеме.

1 шаг. Для каждого выхода из элемента схемы введем вспомогательные переменные.

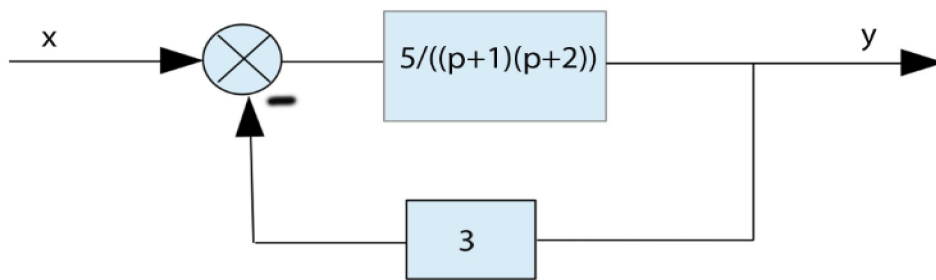
2 шаг. Составим уравнения, связывающие вход и выход для каждого элемента структурной схемы.

3 шаг. Исключим вспомогательные переменные из уравнений, описывающих звенья структурной схемы.

4 шаг. Запишем уравнение, связывающее входной сигнал x с выходным сигналом y .

5 шаг. Применим теорему дифференцирования при нулевых начальных условиях для построения дифференциального уравнения.

Задача 4.2. Построить дифференциальное уравнение, описывающее систему управления по заданной структурной схеме:



Решение. 1 шаг. Введем вспомогательные переменные на выходе из сумматора и на выходе из усилительного звена с коэффициентом усиления 3. Получим структурную схему, представленную на рисунке 4.4.

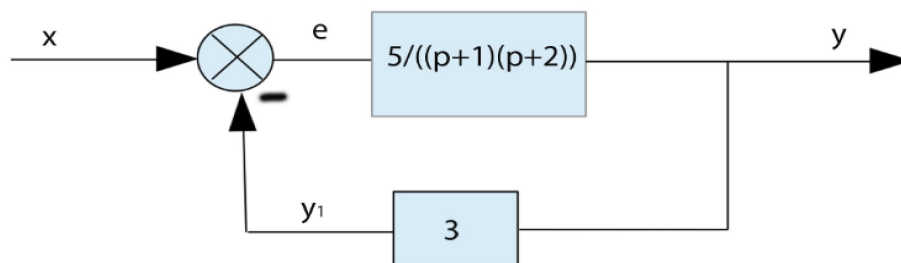


Рис.4.4. Структурная схема с введенными вспомогательными переменными e и y_1

2 шаг. Составим уравнения, связывающие вход и выход, для каждого элемента структурной схемы:

$$\begin{cases} y = \frac{5}{(p+1)(p+2)} e \\ y_1 = 3y \\ e = x - y_1 \end{cases}$$

3 шаг. Исключим вспомогательные переменные из уравнений системы, описывающей звенья структурной схемы:

$$y = \frac{5}{(p+1)(p+2)} (x - y_1) = \frac{5}{(p+1)(p+2)} (x - 3y)$$

$$y = \frac{5}{(p+1)(p+2)} (x - 3y) = \frac{5x}{p^2 + 3p + 2} - \frac{15y}{p^2 + 3p + 2}$$

$$(p^2 + 3p + 17)y = 5x$$

$$p^2 y + 3 p y + 17 y = 5 x$$

4 шаг. Применим теорему дифференцирования при нулевых начальных условиях и перейдем от алгебраического уравнения к дифференциальному:

$$\ddot{y} + 3 \dot{y} + 17 y = 5 x$$

Ответ: $\ddot{y} + 3 \dot{y} + 17 y = 5 x$

Задания для самостоятельной работы

1. Построить структурную схему системы управления, описываемой дифференциальным уравнением:

1.1. $4 \ddot{y} - 2 \dot{y} + 3 y = 3 \dot{x} + x$ с начальными условиями $y(0) = y_0$, $\dot{y}(0) = \dot{y}_0$, $\ddot{y}(0) = \ddot{y}_0$;

1.2. $7 \ddot{y} + 2 \dot{y} - y = 4 \dot{x} + 3 x$ с начальными условиями $y(0) = y_0$, $\dot{y}(0) = \dot{y}_0$, $\ddot{y}(0) = \ddot{y}_0$;

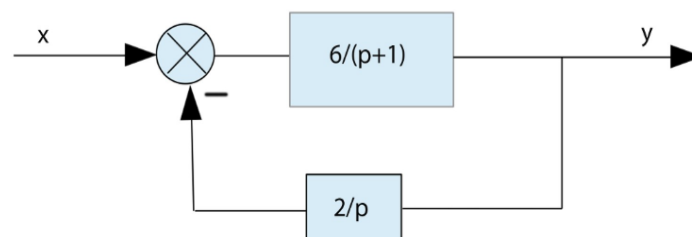
1.3. $\ddot{y} - 2 \dot{y} + 3 \dot{y} + 5 y = 3 \dot{x} + 5 x$ с начальными условиями $y(0) = y_0$, $\dot{y}(0) = \dot{y}_0$, $\ddot{y}(0) = \ddot{y}_0$;

1.4. $\ddot{y} + 2 \dot{y} - 7 y = 3 \ddot{x} + 4 \dot{x} - 2 x$ с начальными условиями $y(0) = y_0$, $\dot{y}(0) = \dot{y}_0$;

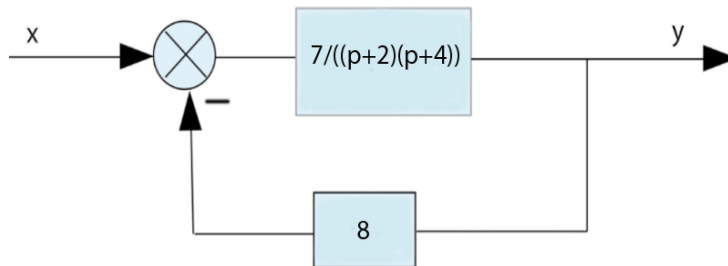
1.5. $6 \ddot{y} - 3 \dot{y} - 9 y = 8 \dot{x} - 5 x$ с начальными условиями $y(0) = y_0$, $\dot{y}(0) = \dot{y}_0$.

2. Построить структурную схему по дифференциальному уравнению:

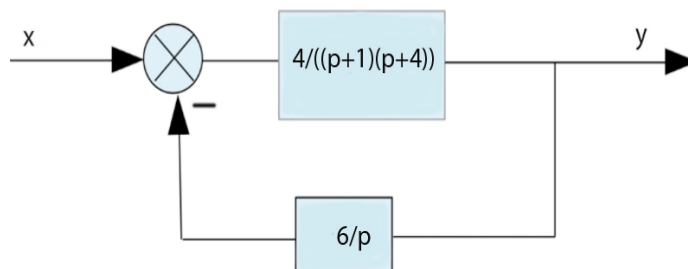
2.1.



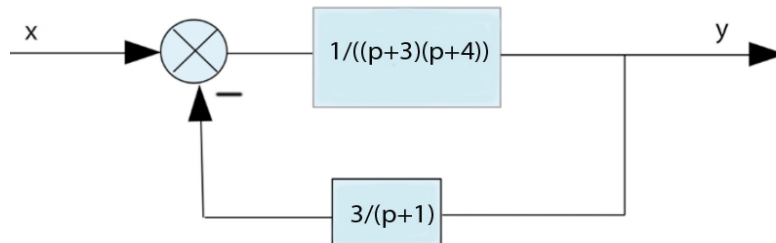
2.2.



2.3.



2.4.

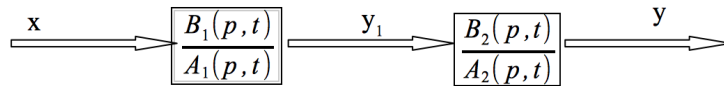


5. Построение дифференциальных уравнений для последовательного соединения звеньев.

Метод уравнивающих операторов

Последовательное соединение звеньев

Для последовательно соединенных звеньев вида:



требуется построить $Y(p) = \frac{B(p,t)}{A(p,t)} X(p)$ и соответствующее дифференциальное уравнение.

Операторные уравнения, описывающие последовательно соединенные звенья, имеют вид:

$$\begin{cases} A_1(p,t)x = B_1(p,t)y_1 \\ A_2(p,t)y_1 = B_2(p,t)y \end{cases}$$

Исключим вспомогательную переменную y_1 . Для воспользуемся методом уравнивающих операторов. Умножим первое уравнение слева на U_1 , второе уравнение – на U_2 , тогда:

$$\begin{aligned} [U_1 * A_1]x &= [U_1 * B_1]y_1 \\ [U_2 * A_2]y_1 &= [U_2 * B_2]y \end{aligned}$$

Потребуем, по методу уравнивающих операторов, чтобы

$$U_1 * B_1 = U_2 * A_2, \text{ где } U_1 = \sum_{i=0}^v \alpha_i p^i, \quad U_2 = \sum_{j=0}^u \beta_j p^j, \text{ тогда степень } v$$

многочлена U_1 определяется степенью многочлена A_2 , а степень многочлена U_2 определяется степенью многочлена B_1 .

Исключим вспомогательную переменную y_1 , тогда $[U_1 * A_1]x = [U_2 * B_2]y$ и, следовательно, $A(p,t) = U_1 * A_1, B(p,t) = U_2 * B_2$.

Рассмотрим правило перемножения двух операторов D_1 и D_2 :

$$D_1 * D_2 = \sum_{j=0}^n \frac{d^j D_1}{dp^j} D_2 \frac{p^j}{j!}.$$

Для примера рассмотрим частный случай при $n=1$:

$$D_1 * D_2 = D_1 D_2 + \frac{dD_1}{dp} D_2 p$$

Рассмотрим пример операторного умножения при $n=1$.

Дано: $D_1 = p + t$, $D_2 = \cos(t) * p + 1$

Найти: $D_1 * D_2$

Решение. $D_1 * D_2 = (p + t) * (\cos(t) p + 1) = p * \cos(t) * p + t * \cos(t) * p + p * 1 + t * 1 + 1 * (\cos(t) * p + 1) * p = -\sin(t) * p + t * \cos(t) * p + t + \cos(t) * p^2 + p = (-\sin(t) + t * \cos(t) + 1) * p + \cos(t) * p^2 + t$.

Задача 5.1. Найти дифференциальное уравнение для последовательно соединенных звеньев:

$$\begin{cases} (t^2 + \cos t p) y_1 = t x \\ t^2 y = \cos t p y_1 \end{cases}$$

Решение. Потребуем по методу уравнивающих операторов $U_1 * B_1 = U_2 * A_2$. Тогда степень ν многочлена U_1 определяется степенью многочлена $A_2 = \cos t \cdot p$, т.е. $\nu = 1$, а степень многочлена U_2 определяется степенью многочлена $B_1 = t^2 + \cos t \cdot p$, т.е. $\mu = 1$. Следовательно, $U_1 = \alpha_0 + \alpha_1 p$ и $U_2 = \beta_0 + \beta_1 p$. Найдем неизвестные коэффициенты $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$ из уравнения уравнивающих операторов

$$U_1 * B_1 = U_2 * A_2.$$

$$U_1 * B_1 = (\alpha_0 + \alpha_1 p) * (t^2 + \cos t \cdot p) = \alpha_0 t^2 + \alpha_1 p \cdot t^2 + \alpha_0 \cos t \cdot p + \alpha_1 p \cdot \cos t \cdot p + \alpha_1 \cdot (t^2 + \cos t \cdot p) \cdot p = \alpha_0 t^2 + 2 \alpha_1 t + \alpha_0 \cos t \cdot p - \alpha_1 \sin t \cdot p + \alpha_1 t^2 \cdot p + \alpha_1 \cos t \cdot p^2$$

$$U_2 * A_2 = (\beta_0 + \beta_1 p) * (\cos t \cdot p) = \beta_0 \cos t \cdot p + \beta_1 p \cdot \cos t \cdot p + \beta_1 \cos t \cdot p^2 = \beta_0 \cos t \cdot p - \beta_1 \sin t \cdot p + \beta_1 \cos t \cdot p^2.$$

$$\begin{aligned} \text{Имеем } & \alpha_0 t^2 + 2 \alpha_1 t + \alpha_0 \cos t \cdot p - \alpha_1 \sin t \cdot p + \alpha_1 t^2 \cdot p + \alpha_1 \cos t \cdot p^2 = \\ & = \beta_0 \cos t \cdot p - \beta_1 \sin t \cdot p + \beta_1 \cos t \cdot p^2 \end{aligned}$$

Приравняем коэффициенты при соответствующих степенях p и получим систему уравнений трех уравнений относительно четырех неизвестных $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$:

$$\begin{cases} p^2: \alpha_1 \cdot \cos t = \beta_1 \cos t \\ p^1: \alpha_0 \cos t - \alpha_1 \sin t + \alpha_1 t^2 = \beta_0 \cos t - \beta_1 \sin t \\ p^0: \alpha_0 t^2 + 2 \alpha_1 t = 0 \end{cases}$$

Положим $\alpha_1 = 1$, тогда из первого уравнения $\beta_1 = \alpha_1 = 1$. Из третьего уравнения $\alpha_0 = -2t/t^2 = -2/t$. Из второго уравнения

$$\beta_0 = \cos t - 2/t - \sin t + t^2/\cos t = t^2/\cos t - 2/t.$$

Таким образом, $U_1 = -2/t + 1 \cdot p$ и $U_2 = (t^2/\cos t - 2/t) + 1 \cdot p$.

Найдем $A(p, t)x = B(p, t)y$, где $A(p, t) = U_1 * A_1$, $B(p, t) = U_2 * B_2$.

$$A(p, t) = U_1 * A_1 = (-2/t + 1 \cdot p) * t = -2/t \cdot t + 1 \cdot p \cdot t + 1 \cdot t \cdot p = -1 + t p$$

$$B(p, t) = U_2 * B_2 = ((t^2/\cos t - 2/t) + 1 \cdot p) * t^2 = t^4/\cos t - 2/t \cdot t^2 + 1 \cdot p \cdot t^2 + 1 \cdot t^2 \cdot p = t^2/\cos t + t^2 \cdot p.$$

Получим $(-1 + t p)x = (t^2/\cos t + t^2 p)y$, откуда дифференциальное уравнение для последовательно соединенных звеньев имеет вид:

$$-x + t \dot{x} = \frac{t^2}{\cos t} y + t^2 \dot{y}$$

$$\text{Ответ: } t^2 \dot{y} + \frac{t^2}{\cos t} y = t \dot{x} - x.$$

Задания для самостоятельной работы

1. Найти дифференциальное уравнение для последовательно соединенных звеньев:

$$1.1. \begin{cases} (t^4 + \sin t p) y_1 = t^2 x \\ t^3 y = \cos t p y_1 \end{cases}$$

$$1.2. \begin{cases} (t^2 + \sin^2 t p) y_1 = t x \\ t^3 y = \sin t p^2 y_1 \end{cases}$$

$$1.3. \begin{cases} \sin t p y_1 = t^3 p x \\ (t^2 + \sin t) y = \cos t p y_1 \end{cases}$$

$$1.4. \begin{cases} t^3 y_1 = \sin t p x \\ (t + \sin^2 t) y = t p y_1 \end{cases}$$

$$1.5. \quad \begin{cases} \cos^2 t \, p \, y_1 = t^2 \, p \, x \\ t \sin t \, y = \cos t \, p \, y_1 \end{cases}$$

6. Критерии устойчивости разомкнутых и замкнутых систем управления, описываемых линейным дифференциальным уравнением

При проектировании систем управления важнейшим вопросом является устойчивость этих систем к внешним возмущениям.

Рассмотрим *критерий устойчивости Ляпунова*. Система управления, описываемая линейным дифференциальным уравнением, устойчива тогда и только тогда, когда все вещественные части комплексных корней соответствующего характеристического уравнения отрицательны. Система на границе устойчивости или нейтральная, когда один из корней равен нулю, а остальные вещественные части комплексных корней отрицательны. Система является неустойчивой, если нарушаются условия критерия устойчивости Ляпунова.

Задача 6.1. Исследовать устойчивость по критерию Ляпунова системы управления, описываемой характеристическим уравнением

$$p^3 + 2p^2 + 2p + 1 = 0$$

Решение. Найдем корни характеристического уравнения

$$p^3 + 2p^2 + 2p + 1 = 0$$

Первый корень можно найти среди делителей свободного члена:

$p_1 = -1$ - отрицательный вещественный корень. Тогда

$p^3 + 2p^2 + 2p + 1 = (p+1)(p^2 + p + 1) = 0$. Найдем корни квадратного

уравнения $p^2 + p + 1 = 0$, получим: $p_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$. Комплексные

корни p_2 , p_3 имеют отрицательную вещественную часть.

Следовательно, по критерию Ляпунова система является устойчивой.

На практике критерий Ляпунова использовать сложно при степени характеристического уравнения больше 3, поэтому рассмотрим альтернативный алгебраический критерий устойчивости — *критерий устойчивости Раусса-Гурвица*: система управления, описываемая характеристическим уравнением

$D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n$ устойчива тогда и только тогда, когда $a_0 > 0$ и все диагональные определители Гурвица строго больше нуля. Если один из диагональных определителей Гурвица равен нулю, а все остальные больше нуля, то систему управления находится на границе устойчивости. Если один из определителей меньше нуля, то система неустойчива.

Рассмотрим построение определителя Гурвица:

- 1) по диагонали располагаются все элементы $a_1, a_2, \dots, a_n$, кроме коэффициента при старшем члене;
- 2) выше диагональных элементов в столбце располагаются элементы по возрастанию индекса по отношению к соответствующему диагональному элементу если индекс выходит за диапазон допустимых значений, то элемент определителя полагается равным нулю;
- 3) ниже диагональных элементов в столбце располагаются элементы по убыванию индекса по отношению к соответствующему диагональному элементу, если индекс выходит за диапазон допустимых значений, то элемент определителя полагается равным нулю.

Определитель Гурвица n -го порядка, построенный по характеристическому уравнению $D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n$,

имеет вид:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

и диагональные определители $\Delta_1 = a_1$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}$, ..., Δ_n .

Задача 6.2. Исследовать устойчивость по критерию Гурвица системы управления, описываемой характеристическим уравнением

$$p^3 + 2p^2 + 2p + 1 = 0$$

Решение. По критерию Гурвица проверим, что коэффициент при старшем члене больше нуля $a_0 = 1 > 0$. Построим определитель Гурвица 3-го порядка:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Д и а г о н а л ь н ы е о п р е д е л и т е л и $\Delta_1 = a_1 = 2 > 0$,

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \Delta_2 = 1 \cdot 3 = 3 > 0 \quad - \text{ больше нуля,}$$

поэтому по критерию Гурвица система является устойчивой.

В случае, когда система управления описывается характеристическим уравнением 3 степени удобно применять алгебраический критерий *Вышнеградского*: система устойчива, если все коэффициенты характеристического уравнения положительны и произведение средних коэффициентов больше произведения крайних.

Задача 6.3. Исследовать устойчивость системы управления по критерию Вышнеградского описываемой характеристическим уравнением $p^3 + 2p^2 + 2p + 1 = 0$.

Решение. Все коэффициенты характеристического уравнения больше нуля. Найдем произведения средних и крайних членов. Так как $2 \cdot 2 > 1 \cdot 1$. Следовательно, по критерию Вышнеградского система является устойчивой.

Рассмотрим частотный критерий устойчивости Михайлова. Пусть система управления описывается характеристическим уравнением $D(p)$. Полагая $p = j\omega$ и получим $D(j\omega) = a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1}(j\omega) + a_n$, причем $j^2 = -1, j^3 = -j, j^4 = 1, \dots$. Выделяем вещественную $\Re(\omega)$ и мнимую части $\Im(\omega)$ и строим кривую на комплексной плоскости, называемую годографом Михайлова, показывающим как изменяются $\Re(\omega)$ и $\Im(\omega)$ с ростом частоты $\omega \in [0; \infty)$.

Критерий Михайлова: система управления устойчива, если годограф Михайлова начинается на положительной части вещественной оси комплексной плоскости и с ростом частоты ω поворачивается против часовой стрелки, последовательно проходя n квадрантов (n — старшая степень характеристического уравнения) и нигде не обращается в нуль, при этом в n -ом квадранте годограф Михайлова уходит на бесконечность. Если годограф Михайлова начинается в нуле, то система находится на границе устойчивости. Если условия критерия Михайлова нарушаются, то система управления не является устойчивой.

Задача 6.4. Исследовать устойчивости системы управления, описываемой характеристическим уравнением $D(p) = p^3 + 4p^2 + 6p + 3$.

Решение. Применим критерий Ляпунова. Для этого найдем корни характеристического уравнения $p^3 + 4p^2 + 6p + 3 = 0$. Перечислим делители свободного члена: $\pm 1, \pm 3$. Подставляя числа в уравнение, получим корень $p_1 = -1$. Разделим многочлен

p^3+4p^2+6p+3 на $p+1$, получим квадратный трехчлен p^2+3p+3 .

Уравнение $p^2+3p+3=0$ имеет корни: $p_{2,3}=\frac{-3\pm\sqrt{3}j}{2}$. Вещественный корень p_1 отрицателен, корни $p_{2,3}$ имеют отрицательную вещественную часть $-3/2$. Следовательно, система управления устойчива по критерию Ляпунова.

Применим критерий Раунса-Гурвица. Коэффициент $a_0=1>0$ при старшей степени больше нуля. Составим определитель Гурвица 3-го порядка

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_1=4>0, \Delta_2=\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}=24-3=21>0, \Delta_3=3\cdot\Delta_2=3\cdot21=63.$$

Все диагональные определители Гурвица строго больше нуля и $a_0>0$. Следовательно, по критерию Раунса-Гурвица система устойчива.

Применим критерий Михайлова для исследование устойчивости системы управления, описываемой характеристическим уравнением $D(p)=p^3+4p^2+6p+3$. Подставим в характеристическое уравнение $p=j\omega$ и выделим вещественную и мнимую части. $D(j\omega)=-j\omega^3-4\omega^2+j6\omega+3=(-4\omega^2+3)+j(-\omega^3+6\omega)$. Получили вещественную часть $\Re(\omega)=-4\omega^2+3$ и мнимую часть $\Im(\omega)=-\omega^3+6\omega$.

Найдем начальную точку годографа Михайлова. Для этого возьмем начальное значение частоты $\omega=0$ и вычислим вещественную и мнимую части: $\Re(\omega=0)=-4\cdot0^2+3=3$, $\Im(\omega=0)=-0^3+6\cdot0=0$. Получили $(3;0)$ — начальную точку годографа Михайлова, т. е. годограф Михайлова начинается на положительной

части вещественной оси (см. рисунок 6.1).

Найдем, в какой точке годограф Михайлова пересекает мнимую ось. Для этого приравняем к нулю вещественную часть и найдем ω .

$\Re(\omega) = -4\omega^2 + 3 = 0$, откуда $\omega = \sqrt{3}/2$. Подставим $\omega = \sqrt{3}/2$ в мнимую часть $\Im(\omega = \sqrt{3}/2) = -3\sqrt{3}/8 + 3\sqrt{3} = 21\sqrt{3}/8 > 0$ - годограф начинает поворачиваться против часовой стрелки и пересекает мнимую ось в точке $(0; 21\sqrt{3}/8j)$.

Найдем, в какой точке годограф Михайлова пересекает вещественную ось. Для этого приравняем к нулю мнимую часть и найдем ω . $\Im(\omega) = -\omega^3 + 6\omega = \omega(-\omega^2 + 6) = 0$. Откуда $\omega = \sqrt{6}$ и подставим в вещественную часть $\Re(\sqrt{6}) = -4 \cdot 6 + 3 = -21$ и получим точку пересечения с вещественной осью $(-21; 0j)$. Поскольку при $\omega \rightarrow \infty$ мнимая часть $\Im(\omega) = -\omega^3 + 6\omega \rightarrow -\infty$, то годограф Михайлова начинается на положительной части вещественной полуоси, движется против часовой стрелки проходит первый, второй и третий квадранты и «остается» в третьем квадранте. Следовательно, выполняются все условия критерия Михайлова, поэтому система управления является устойчивой.

Рассмотрим инструментарий для построения годографа Михайлова: MatLab, модуль SymPy Python, Nyquist Response системы VisSim, для построения годографа инверсии характеристического полинома, SIMPLORER, DYNAST [10].

Модуль SymPy является эффективным инструментом для построения годографа Михайлова при устойчивости систем автоматического управления и регулирования.

```
from sympy import *  
from numpy import arange  
import matplotlib.pyplot as plt
```

```

def godograph(z):
    zr=re(z)
    zm=im(z)
    x=[zr.subs({w:q}) for q in arange(0,100,0.1)]
    y=[zm.subs({w:q}) for q in arange(0,100,0.1)]
    plt.axis([-50.0, 50.0, -50.0, 50.0])
    plt.title("Начальная точка M(%s,%s)"%
(zr.subs({w:0}),zm.subs({w:0})))
    plt.plot(x, y)
    plt.grid(True)
    plt.show()
w =symbols(' w',real=True)
z = - I*w**3-4*w**2+I*6*w+3
godograph(z)

```

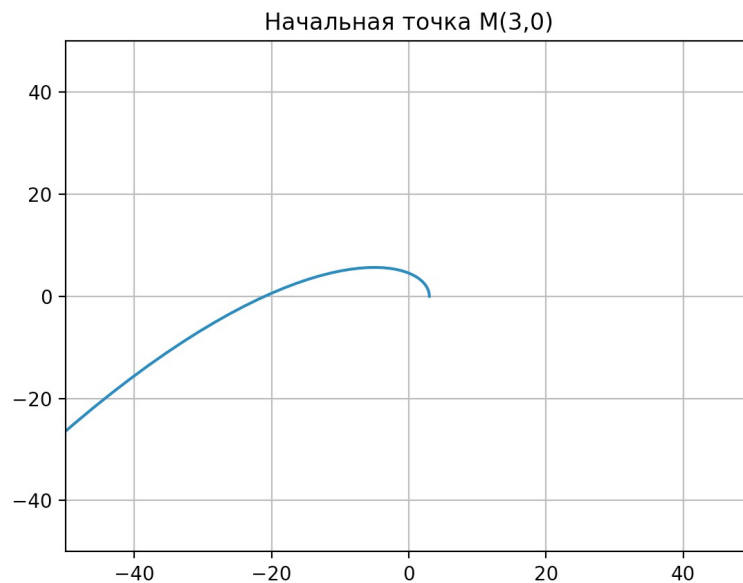


Рис. 6.1. Годограф Михайлова для $D(j\omega)=(-4\omega^2+3)+j(-\omega^3+6\omega)$

Для построения годографа Михайлова на основе Nyquist Response системы VisSim в [10] сформулирован критерий

устойчивости Михайлова на основе инверсии характеристического полинома: *система управления (автоматического регулирования) устойчива тогда и только тогда, когда годограф инверсии характеристического полинома начинается на вещественной оси комплексной плоскости и при изменении частоты от нуля до бесконечности последовательно проходит по часовой стрелке n квадрантов (n — степень характеристического полинома).*

Под инверсией характеристического полинома будем понимать дробь, в числителе которой единица, а в знаменателе — характеристический полином.

Задания для самостоятельной работы

1. Исследовать на устойчивость систему управления, описываемую характеристическим уравнением $2p^4 + 5p^3 + 5p^2 + 4p + 1 = 0$ с помощью критерия Михайлова и критерия Раussa-Гурвица.
2. Исследовать на устойчивость систему управления, описываемую характеристическим уравнением $0.14p^4 + 3.01p^3 + 15.31p^2 + 60.9p + 161 = 0$ с помощью критерия Михайлова.
3. Исследовать на устойчивость систему управления, описываемую передаточной функцией по критерию Найквиста

$$W(p) = \frac{7}{25p^2 + p + 1}$$

7. Переходная матрица многомерной стационарной системы управления

Если фундаментальная матрица $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$, столбцы

которой образуют фундаментальную систему решений однородной системы дифференциальных уравнений, описывающих многомерную стационарную систему управления, известна, то *переходная матрица* находится по формуле $\Phi(t, \tau) = \varphi(t) \varphi^{-1}(\tau)$

Задача 7.1. Найти переходную матрицу многомерной системы управления, описываемой системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{g}_1 = -g_1 - 6g_2 \\ \dot{g}_2 = 2g_1 + 6g_2 + x \end{cases}$$

Решение. 1 шаг. Составим матрицу состояния

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

2 шаг. Найдем корни характеристического уравнения $|A - \lambda E| = 0$

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -6 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

откуда $(-1-\lambda)(6-\lambda) + 12 = 0$

$$-6 - 6\lambda + \lambda + \lambda^2 + 12 = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

Корни квадратного уравнения: $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2$.

3 шаг. Запишем выражение общего решения для каждой компоненты

$$\begin{cases} g_1(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{2t} \\ g_2(t) = B_1 e^{3t} + B_2 e^{2t} \end{cases}$$

4 шаг. Подставим полученные соотношения в первое дифференциальное уравнение исходной системы дифференциальных уравнений, получим:

$$3C_1 e^{3t} + 2C_2 e^{2t} = -C_1 e^{3t} - C_2 e^{2t} - 6B_1 e^{3t} - 6B_2 e^{2t}$$

и приравняем коэффициенты при e^{3t} и e^{2t} :

$$\begin{cases} 4C_1 = -6B_1 \\ 3C_2 = -6B_2 \end{cases}, \text{ откуда } \begin{cases} B_1 = -2/3 C_1 \\ B_2 = -1/2 C_2 \end{cases}$$

5 шаг. Перепишем общее решение в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^{3t} + C_2 e^{2t} \\ -2/3 C_1 e^{3t} - 1/2 C_2 e^{2t} \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} e^{3t} \\ -2/3 e^{3t} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{2t} \\ -1/2 e^{2t} \end{pmatrix}$$

6 шаг. Составим фундаментальную матрицу решений:

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{2t} \\ -2/3 e^{3t} & -1/2 e^{2t} \end{pmatrix}$$

7 шаг. Построим обратную матрицу $\varphi^{-1}(t)$:

$$\varphi^{-1}(t) = 1/6 e^{5t} \begin{pmatrix} -1/2 e^{2t} & 2/3 e^{3t} \\ -e^{2t} & e^{3t} \end{pmatrix}$$

8 шаг. Найдем переходную матрицу согласно определению

$$\Phi(t, \tau) = \varphi(t) \varphi^{-1}(\tau) = 1/6 e^{5\tau} \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{2t} \\ -2/3 e^{3t} & -1/2 e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 e^{2\tau} & 2/3 e^{3\tau} \\ -e^{2\tau} & e^{3\tau} \end{pmatrix}$$

$$\text{Ответ: } \Phi(t, \tau) = 1/6 e^{5\tau} \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{2t} \\ -2/3 e^{3t} & -1/2 e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 e^{2\tau} & 2/3 e^{3\tau} \\ -e^{2\tau} & e^{3\tau} \end{pmatrix}$$

Список литературы

1. Власов К.П. Теория автоматического управления. Учебное пособие. - Х.: Издательство «Гуманитарный центр», 2006. - 322 с.

Нефьодов Ю.М. Теорія керування: Навчальний посібник. – Луганськ: Вид-во СНУ ім. В.Даля, 2003.

2. Лебедев С.К. Математические основы теории автоматического управления. - Ивановский государственный энергетический университет

3. Теория автоматического управления/ Под ред. А. А. Воронова - М.: Высшая школа, 1986, ч. 1, 2.

4. Математические основы теории автоматического регулирования/ Под ред. Б. К. Чемоданова. - М.: Высшая школа, 1972, т. 1, 240 с

5. Справочник по математике для научных работников и

инженеров. Корн Г., Корн Т. - М.: Наука, 1984.

6. Теория систем автоматического регулирования. - Бессекерский В.А., Попов Е.П. М.: Наука, 1975.

7. Справочное пособие по теории автоматического регулирования и управления/ Под ред. П. А. Санковского. - Мн.: Высшая школа, 1973.

8.Трахтенберг Р. М. Теория автоматического управления. Нелинейные, импульсные, оптимальные, инвариантные, адаптивные и многомерные САУ. - Иваново: ИвГУ, 1990.

9. Ордуянц Г.Г., Тойбич В.Я. Расчет устойчивости разомкнутых и замкнутых линейных САУ // Методические указания по курсам ТАУ и УТС для студентов очной и заочной форм обучения специальности 220301, 220200, 220700 по курсу «Теория автоматического управления». Екатеринбург, 2011. - 21 с.

10. Федосов Б.Т., Клиначёв Н.В. О применении критерия Михайлова при анализе устойчивости линейной системы стандартными средствами программ математического моделирования.

- И с т о ч н и к : http://model.exponenta.ru/krt_mich.html
(<http://model.exponenta.ru>). Дата доступа: 19.06.2019.