Преобразование Лапласа и его свойства

Преобразованием по Лапласу функции вещественной переменной *x = x(t)* называется функция *X = X(ji)* комплексной переменной *p* = ос + йо, вычисляемая по формуле

$$X(p) = \int_0^\infty x(t) e^{-pt} dt. \qquad (1)$$

Зная функцию *X(p),* можно найти функцию *x(t)* по формуле

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} X(p) e^{pt} dp, \qquad (2)$$

где *i* — мнимая единица; *a* > *c* — число, превышающее показатель роста

$$c = \lim \ln(|x(t)|/t).$$

результате вычисления интеграла (1), ункция *x(t),* подвергаемая преобразованию ое и обратное преобразования Лапласа

$$X(p) = L\{x(t)\} \text{ и } x(t) = L^{-1}\{X(p)\}.$$

В табл. 1 даны изображения функций, которые чаще всего встречаются в практике инженерных расчетов. Изображения различных комбинаций этих функций, их производных, интегралов и пр. можно определить, зная свойства преобразования Лапласа. Эти свойства сформулируем в виде 10 теорем.

$$L\{\sum a_i x_i(t)\} = \sum a_i X_i(p), \qquad (3)$$

1. Теорема линейности —

где a_j = const.

$$L\{x(at)\} = \frac{1}{a} X\left(\frac{p}{a}\right), \qquad (4)$$

2. Теорема подобия —

где a > 0.

$$L\{x(t-a)\} = e^{-ap} X(p), \qquad (5)$$

3. Теорема запаздывания— где a > 0.

4. Теорема смещения —

$$X(p-\lambda) = L\{e^{\lambda t} x(t)\}, \qquad (6)$$

где X — любое (в том числе комплексное) число.

5. Теорема о дифференцировании оригинала —

(7)

ункции $x(t)$ справа от нуля.

Распространяя эту формулу на производные более высоких порядков, можно получить изображение n-й производной функции $x(t)$

$$L\{x^{(n)}(t)\} = p^n X(p) - p^{n-1} x(0+) - p^{n-2} \dot{x}(0+) - \ldots - x^{(n-1)}(0+). \qquad (8)$$

6. Теорема о дифференцировании изображения —

$$L^{-1}\{d^n X(p)/dp^n\} = (-1)^n t^n x(t). \qquad (9)$$

7. Теорема об интегрировании оригинала —

$$L\{\int x(t)dt\} = X(p)/p. \qquad (10)$$

8. Теорема об интегрировании изображения —

$$L^{-1}\left\{\int_p^\infty X(p)dp\right\} = x(t)/t. \qquad (11)$$

9. Теорема о предельных значениях: если существуют пределы x(0+) = = lim *x(t)* и x(°°) = lim .*:(?), то их можно вычислить по формулам

t—>0+ *t*—>°°

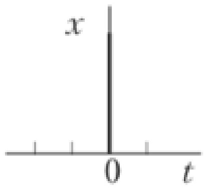
$$x(0+) = \lim_{p\to\infty} pX(p),\ x(\infty) = \lim_{p\to 0} pX(p). \qquad (12)$$

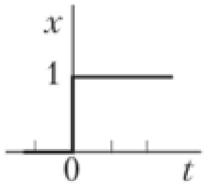
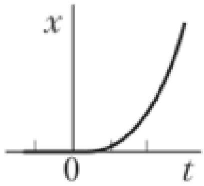
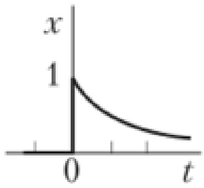
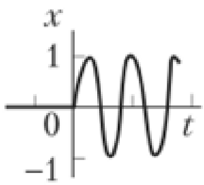
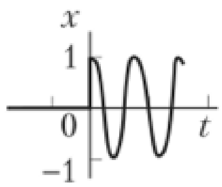
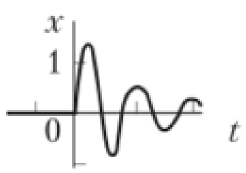
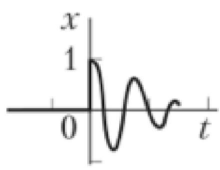
10. Теорема умножения —

$$L^{-1}\{X(p)\cdot Y(p)\} = x(t)\otimes y(t) = \int_0^t x(\tau)y(t-\tau)d\tau = \int_0^t y(\tau)x(t-\tau)d\tau, \qquad (13)$$

⁀ / *функций x(t)* и *y(t),* т.е. свертку оригиналов

тых функций

Оригинал $x(t)$	Название функции	График функции	Изображение $X(p)$
$x(t) = \delta(t)$	Функция Дирака, δ-функция		$X(p) = 1$

Оригинал $x(t)$	Название функции	График функции	Изображение $X(p)$
$x(t) = 1(t)$	Единичная, ступенчатая		$X(p) = \dfrac{1}{p}$
$x(t) = t^n \cdot 1(t)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$	Степенная		$X(p) = \dfrac{n!}{p^{n+1}}$
$x(t) = e^{-at} \cdot 1(t)$, $a \geq 0$	Показательная		$X(p) = \dfrac{1}{p+a}$
$x(t) = \sin(\omega t) \cdot 1(t)$	Гармонический синус		$X(p) = \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$x(t) = \cos(\omega t) \cdot 1(t)$	Гармонический		$X(p) = \dfrac{p}{p^2+\omega^2}$
			$X(p) = \dfrac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$
$x(t) = e^{-at}\cos(\omega t) \times$ $\times\, 1(t)$, $a \geq 0$	Затухающий косинус		$X(p) = \dfrac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$

Если изображение *X(p)* представляет собой *правильную* дробно-рациональную функцию (правильную дробь), т.е. если

$$X(p)=\frac{A_m(p)}{B_n(p)}=\frac{a_m p^m+\ldots+a_1 p+a_0}{b_n p^n+\ldots+b_1 p+b_0}, \qquad (14)$$

где *m* < *п,* то его оригиналом является функция

$$x(t)=L^{-1}\{X(p)\}=\left\{\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{(n_k-1)!}\lim_{p\to p_k}\frac{d^{(n_k-1)}}{dp^{n_k-1}}\cdot((p-p_k)^{n_k}X(p)e^{p_k t})\right\}\cdot 1(t). \quad (15)$$

Здесь $p_к$ — корни уравнения $B_п(p)$ = 0; $п_к$ — кратность корня p_k *N* - число различных корней уравнения $B_п(p)$ = 0. Оригинал такого изображения можно найти также с помощью разложения правильной рациональной дроби на сумму простых дробей.

Если все корни p_k уравнения $B_п(p)$ = 0 простые, то формула разложения (15) принимает следующий (более простой) вид:

$$x(t)=L^{-1}\{X(p)\}=\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{A_m(p_k)}{B_n'(p_k)}e^{p_k t}\right\}\cdot 1(t), \qquad (16)$$

где $B'_п(p_к)$ — производные полинома $B_п(p)$ при $p = p_к$ ($B'_п(p_к) = dB_n(p_k)/dp_k$). При использовании этой формулы исчезает необходимость разложения сложной дроби на сумму простых дробей, что часто облегчает расчеты. Покажем пример такого расчета.

Пример 1

ения

Решение

В данном случае *m* = 1, Д„(*p*) = $A_x(p)$ = *p* + , *п* = 2, $B_п(p) = B_2(p) = p^2 + 5p + 6$ = = (*p* + 2)(*p* + 4), т.е. $B'_2(p)$ = 2/? + 5, а уравнение $B_2(p)$ = 0 имеет два простых корня p_x = -2, p_2 = -3. Поэтому

$$x(t) = \left\{ \sum_{k=1}^{2} \frac{A_1(p_k)}{B_2'(p_k)} e^{p_k t} \right\} \cdot 1(t) = \left\{ \frac{(-2)+1}{2(-2)+5} e^{-2t} + \frac{(-3)+1}{2(-3)+5} e^{-3t} \right\} \cdot 1(t) =$$
$$= (-e^{-2t} + 2e^{-3t}) \cdot 1(t).$$

С целью проверки правильности расчета определим изображение найденного оригинала

$$X(p) = L\{x(t)\} = -\frac{1}{p+2} + \frac{2}{p+3} = \frac{-p-3+2p+4}{(p+2)(p+3)} = \frac{p+1}{p^2+5p+6},$$

что совпадает с исходными данными.

Приведенные формулы справедливы для случаев, когда дробь (14) *правильная,* т.е. выполняется условие *m<п.* Если *m>п,* то в результате деления полиномов числителя и знаменателя дроби образуется остаток в виде полинома *(m - п)*-й степени. В этом случае разложение дроби можно записать в виде

$$X(p) = \frac{A_m(p)}{B_n(p)} = \sum_{s=0}^{m-n} C_s p^s + \frac{D_{n-1}(p)}{B_n(p)}, \qquad (17)$$

где $D_{n\_x}\{p)$ — полином степени *п-1;* C_s — постоянные коэффициенты. Соответствующий оригинал имеет вид

$$x(t) = L^{-1}\{X(p)\} = \sum^{m-n} C_s \delta_{s+1}(t) + xp(t). \qquad (18)$$

— оригинал правильной дроби (его можно

было показано выше); 5_{5+1}(?) —

$S_{s+)}$(?) = $d^s 8(t)/dt^s$. Покажем пример такого

Пример 2

Определить оригинал изображения

$$X(p) = \frac{1+pT_1}{1+pT_2}.$$

Решение

Преобразуя заданную дробь, можно записать Переходя в этом выражении к оригиналам, получим

$$X(p)=\frac{T_1}{T_2}+\frac{1-T_1/T_2}{T_2(p+1/T_2)}.$$

$$x(t)=\frac{T_1}{T_2}\cdot\delta(t)+\frac{1}{T_2}\left(1-\frac{T_1}{T_2}\right)e^{-t/T_2}\cdot 1(t).$$

Приведем еще один пример.

Пример 3

Определить преобразования Лапласа для функции времени которая

$$x(t)=te^{-3t}\sin(2t)\cdot 1(t),$$

отсутствует в табл. 1.

Примечание: весьма распространенной ошибкой при решении подобной задачи является поиск изображений сомножителей и их последующее перемножение. Соответствующее неверное решение имеет вид

$$X(p)=\frac{1}{p^2}\cdot\frac{1}{p+3}\cdot\frac{2}{p^2+4}\cdot\frac{1}{p}.$$

Решение

му о дифференцировании изображения можно записать

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{2}{(p+3)^2+4}\right).$$

й получим

$$X(p)=4\frac{p+3}{(p^2+6p+13)^2}.$$

Способ 2: Воспользуемся теоремой смещения (теоремой 4), согласно которой X(p) = ?{tsin(2f)’l(t)}> где *p*—> *p* + 3. В свою очередь, с помощью теоремы о дифференцировании изображения (теоремы 6) можно записать

$$L\{t\sin(2t)\cdot 1(t)\} = -\frac{d}{dp}\left(\frac{2}{p^2+4}\right) = \frac{4p}{(p^2+4)^2}.$$

Осуществляя в этой формуле замену р —> *p* + 3, получим прежний результат. *Способ 3'.* Изображения по Лапласу различных функций можно вычислять в среде Mathcad [26]. В рассматриваемом случае с помощью команды *laplace* получаем

$$t\cdot e^{-3\cdot t}\cdot sin(2\cdot t)laplace \rightarrow \frac{2\cdot(2\cdot s+6)}{(s^2+6\cdot s+13)^2}.$$

С помощью команды *invlaplace* находим

$$\frac{2\cdot(2\cdot s+6)}{(s^2+6\cdot s+13)^2}\ invlaplace \rightarrow \begin{pmatrix} 4\cdot invlaplace\left(\frac{s}{156\cdot s+62\cdot s^2+12\cdot s^3+s^4+169}, s, t\right)... \\ +12\cdot invlaplace\left(\frac{1}{156\cdot s+62\cdot s^2+12\cdot s^3+s^4+169}\right), s, t \end{pmatrix},$$

т.е. обратное преобразование (оригинал) не определяется. В таких случаях оригинал находят другими методами, в частности — с помощью формулы (15), с помощью таблиц преобразований Лапласа и др.

Известно[1], что

где

$$\ldots 1+\tau s \ldots e^{-\beta t}(A\sin(\omega t) - Bt\cos(\omega t+\varphi)),$$

$$\varphi = \mathrm{arctg}\left(\frac{\omega\tau}{1-\beta\tau}\right), \beta = \frac{\xi}{T}, \omega = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}.$$

В данном случае имеем *К* =-, т = —,*T* = -т=, ? = -=, т.е. (3 = 3, со = 2. Следова-

169 3 V13 V13

1 л о 169 я

тельио, *А* = О, *В* = ср = —, что приводит к верному результату

$x(t) = te\sim^{3t}\ sh(2t)$-1(/;).

Примечания: 1) в Mathcad при выводе результата обратного преобразования Лапласа не используется множитель 1(f), что может приводить к ошибкам в последующих расчетах; 2) в Mathcad единичная функция 1(?) имеет обозначение Ф(?).

Приложение 2

---

[1] Никулин И. А. Основы теории автоматического управления. Частотные методы анализаи синтеза систем : учеб, пособие для вузов. СПб.: БХВ-Петербург, 2004.