

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»
(Самарский университет)

МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» в качестве методических указаний для студентов Самарского университета, обучающихся по программам высшего образования по специальностям 24.05.01 Проектирование, производство и эксплуатация ракет и ракетно-космических комплексов, 24.05.02 Проектирование авиационных и ракетных двигателей, 24.05.07 Самолето- и вертолетостроение и направлениям подготовки 13.03.03 Энергетическое машиностроение, 15.03.04 Автоматизация технологических процессов и производств, 23.03.01 Технология транспортных процессов, 24.03.01 Ракетные комплексы и космонавтика, 24.03.04 Авиастроение, 24.03.05 Двигатели летательных аппаратов, 25.03.02 Техническая эксплуатация авиационных электросистем и пилотажно-навигационных комплексов

Составители: Л.В. Коломиец,
Н.Ю. Поникарова

САМАРА
Издательство Самарского университета
2017

УДК 519.6 (075)
ББК 22.193я7

Составители: *Л.В. Коломиец, Н.Ю. Поникарова*

Рецензент канд. техн. наук, доц. Т.А. Б а я н д и н а

Метод наименьших квадратов: метод. указания / сост.: *Л.В. Коломиец, Н.Ю. Поникарова.* – Самара: Изд-во Самарского университета, 2017. – 32 с.

Методические указания составлены в соответствии с действующей программой по курсу высшей математики для студентов инженерно-технических специальностей Самарского национального исследовательского университета.

Указания содержат краткие теоретические сведения, примеры выполнения расчетных работ и варианты индивидуальных заданий по теме «Метод наименьших квадратов».

Предназначены для подготовки студентов первого курса к выполнению расчетных работ по разделу «Функции нескольких переменных».

УДК 519.6 (075)
ББК 22.193я7

СОДЕРЖАНИЕ

1 Общие положения метода наименьших квадратов	4
1.1 Линейная функция $y = ax + b$	7
1.2 Степенная функция $y = \beta \cdot x^a$	11
1.3 Показательная функция $y = \beta \cdot e^{ax}$	12
1.4 Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$	13
2 Образец решения задания	15
Варианты индивидуальных заданий	25
Список литературы.....	30

1 Общие положения метода наименьших квадратов

Пусть две величины x и y связаны табличной зависимостью, полученной, например, из опытов.

x	x_1	x_2	...	x_n
y	y_1	y_2	...	y_n

На плоскости xOy данной таблице соответствует n точек $M_i(x_i, y_i)$, где $i=1, 2, 3, \dots, n$. Точки M_i называют экспериментальными точками (Рисунок 1).

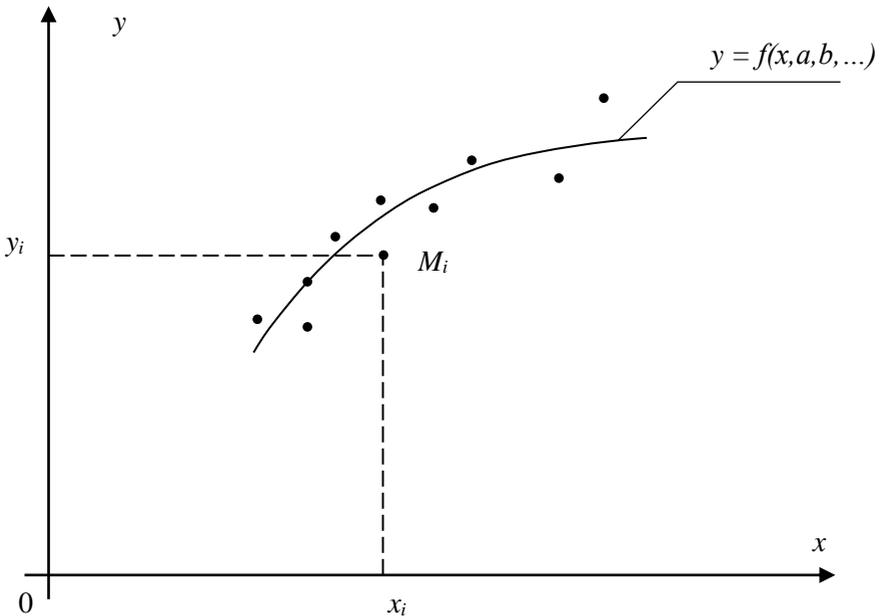


Рисунок 1 - Экспериментальные точки

Требуется установить функциональную зависимость $y = f(x)$ между переменными x и y по результатам экспериментальных исследований, приведенных в таблице.

Применение интерполяции в данном случае нецелесообразно, так как значения y_i в узлах x_i получены экспериментально и поэтому являются сомнительными (в ходе эксперимента возникает неустранимая погрешность, обусловленная неточностью измерений). Кроме того, совпадение значений в узлах не означает совпадения характеров поведения исходной и интерполирующей функций. Поэтому необходимо найти такой метод подбора эмпирической формулы, который не только позволяет найти саму формулу, но и оценить погрешность подгонки.

В общем случае искомая функция $y = f(x)$ будет зависеть не только от x , но и от некоторого количества параметров:

$$y = f(x, a, b, \dots).$$

Постановка задачи

Найти *аппроксимирующую* функцию

$$y = f(x, a, b, \dots) \tag{1}$$

такую, чтобы в точках $x = x_i$ она принимала значения по возможности близкие к табличным, то есть график искомой функции должен проходить как можно ближе к экспериментальным точкам. Вид функции (1) может быть известен из теоретических соображений или определяться характером расположения экспериментальных точек M_i на плоскости xOy .

Для отыскания коэффициентов a, b, \dots в функции (1) применяется *метод наименьших квадратов*, который состоит в следующем. Между искомой функцией и табличными значениями в точках x_i наблюдаются отклонения. Обозначим их $\Delta y_i = f(x_i, a, b, \dots) - y_i$, где $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Выбираем значения коэффициентов a, b, \dots так, чтобы сумма квадратов отклонений принимала минимальное значение:

$$S(a, b, \dots) = \sum_{i=1}^n (\Delta y_i)^2 = \sum_{i=1}^n [f(x_i, a, b, \dots) - y_i]^2 \rightarrow \min \quad (2)$$

Сумма $S(a, b, \dots)$ является функцией нескольких переменных. *Необходимый* признак экстремума функции нескольких переменных состоит в том, что обращаются в нуль частные производные:

$$S'_a = 0, \quad S'_b = 0, \quad \dots \quad (3)$$

План решения задачи

- 1) Выбираем функцию $y = f(x, a, b, \dots)$.
- 2) Для отыскания коэффициентов a, b, \dots составляем систему уравнений (3).
- 3) Решая систему уравнений (3), находим значения коэффициентов a, b, \dots .
- 4) Подставляя a, b, \dots в уравнение (1), получаем искомую функцию $y = f(x, a, b, \dots)$.

5) По достаточному признаку экстремума функции нескольких переменных следует убедиться в постоянстве знака дифференциала второго порядка этой функции: $d^2S > 0$ при любых приращениях аргументов da, db, \dots .

Такая проверка делается в теоретической части метода наименьших квадратов и на практике не повторяется.

6) Обычно рассматривают несколько видов функций $y = f(x, a, b, \dots)$ и выбирают ту функцию, для которой суммарная погрешность $\sum_{i=1}^n [f(x_i, a, b, \dots) - y_i]^2$ окажется наименьшей.

Рассмотрим несколько случаев подбора аппроксимирующей функции $y = f(x, a, b, \dots)$.

1.1 Линейная функция

$$y = ax + b. \quad (4)$$

Решение

Составим функцию двух переменных и найдем, при каких значениях a, b эта функция принимает минимальное значение:

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2 \rightarrow \min. \quad (5)$$

По необходимому признаку экстремума частные производные функции (5) должны быть равны нулю:

$$\begin{cases} S'_a(a,b) = \sum_{i=1}^n 2(ax_i + b - y_i) \cdot x_i = 0, \\ S'_b(a,b) = \sum_{i=1}^n 2(ax_i + b - y_i) \cdot 1 = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Преобразуем уравнения системы (6) следующим образом:

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \cdot a + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \cdot b = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i, \\ \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \cdot a + n \cdot b = \sum_{i=1}^n y_i. \end{cases} \quad (7)$$

Таким образом, получается система линейных уравнений с двумя неизвестными a и b . Коэффициенты при неизвестных a и b (соответствующие суммы) находятся из исходной табличной зависимости и являются постоянными для данной выборки. При различных значениях x_i главный определитель этой системы отличен от нуля:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & n \end{vmatrix} = n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i - x_j)^2 \neq 0.$$

Следовательно, система линейных уравнений (7) имеет единственное решение, которое находится по формулам Крамера:

$$a = \frac{\Delta_a}{\Delta} = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2},$$

$$b = \frac{\Delta b}{\Delta} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n y_i - a \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i.$$

Подставим найденные значения a и b в уравнение (4), и получим искомую линейную функцию $y = ax + b$.

Убедимся, что в стационарной точке $M_0(a, b)$ функция $S(a, b)$ имеет минимум.

Достаточным условием того, что функция двух переменных принимает минимальное значение, является постоянство знака второго дифференциала этой функции: $d^2S(a, b) > 0$ при любых приращениях аргументов da, db .

Дифференциал второго порядка функции $S(a, b)$ имеет вид:

$$\begin{aligned} d^2S(a, b) &= S''_{aa} \cdot da^2 + 2S''_{ab} \cdot da db + S''_{bb} \cdot db^2 = \\ &= \left(2 \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) da^2 + 2 \left(2 \sum_{i=1}^n x_i \right) da db + (2n) db^2. \end{aligned}$$

Второй дифференциал является квадратичной формой второго порядка от переменных da и db . Квадратичная форма принимает только положительные значения при $da \neq 0$ и $db \neq 0$, если соответствующая ей матрица положительно определена.

Матрица квадратичной формы дифференциала второго порядка (матрица Гессе) будет иметь вид:

$$M = \begin{pmatrix} S''_{aa} & S''_{ab} \\ S''_{ab} & S''_{bb} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 & 2 \cdot \sum_{i=1}^n x_i \\ 2 \cdot \sum_{i=1}^n x_i & 2n \end{pmatrix}.$$

Найдем ее главные миноры:

$$H_1 = S''_{aa} = 2 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 > 0,$$

$$\begin{aligned} H_2 &= \begin{vmatrix} S''_{aa} & S''_{ab} \\ S''_{ab} & S''_{bb} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 & 2 \cdot \sum_{i=1}^n x_i \\ 2 \cdot \sum_{i=1}^n x_i & 2n \end{vmatrix} = \\ &= 4n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - 4 \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = 2 \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i - x_j)^2 > 0. \end{aligned}$$

Так как главные миноры матрицы Гессе положительны, то по критерию Сильвестра матрица положительно определена, и квадратичная форма дифференциала $d^2S(a, b)$, соответствующая этой матрице, принимает только положительные значения. Из условия $d^2S(a, b) > 0$ следует, что $M_0(a, b)$ – точка минимума функции $S(a, b)$. Итак, коэффициенты a и b , найденные с помощью метода наименьших квадратов, всегда определяют именно минимум функции $S(a, b)$. Более того, так как функция $S(a, b)$ имеет единственную стационарную точку $M_0(a, b)$, минимум функции является *наименьшим* значением $S(a, b)$.

Если коэффициенты линейной функции найдены, можно вычислить суммарную погрешность:

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^n [(ax_i + b) - y_i]^2.$$

Метод наименьших квадратов для линейной функции широко применяется при обработке данных не только в теории измерений, но и в математической статистике при нахождении статистических оценок параметров и построении уравнения линейной регрессии, в эконометрике при нахождении трендов, а также в других прикладных дисциплинах.

1.2 Степенная функция

$$y = \beta \cdot x^a. \tag{8}$$

Решение

Прологарифмируем по основанию e функцию (8) и получим новое уравнение:

$$\ln y = a \cdot \ln x + \ln \beta. \tag{9}$$

Обозначим $Y = \ln y$, $X = \ln x$, $b = \ln \beta$.

Тогда равенство (9) примет вид $Y = aX + b$, где переменные X и Y связаны следующей табличной зависимостью:

$X = \ln x$	$X_1 = \ln x_1$	$X_2 = \ln x_2$...	$X_n = \ln x_n$
$Y = \ln y$	$Y_1 = \ln y_1$	$Y_2 = \ln y_2$...	$Y_n = \ln y_n$

Таким образом, задача 2 свелась к задаче 1. Решая эту задачу, находим значения коэффициентов a и b . Учитывая, что $b = \ln \beta$, находим $\beta = e^b$.

Подставим найденные значения a и β в уравнение (8) и получим искомую степенную функцию $y = \beta \cdot x^a$.

Суммарная погрешность равна
$$S(a, b) = \sum_{i=1}^n \left[\beta \cdot x_i^a - y_i \right]^2.$$

1.3 Показательная функция

$$y = \beta \cdot e^{ax}. \tag{10}$$

Решение

Прологарифмируем по основанию e функцию (10) и получим новое уравнение:

$$\ln y = ax + \ln \beta. \tag{11}$$

Обозначим $Y = \ln y$, $b = \ln \beta$.

Тогда равенство (11) примет вид $Y = ax + b$, где переменные x и Y связаны следующей табличной зависимостью:

x	x_1	x_2	...	x_n
$Y = \ln y$	$Y_1 = \ln y_1$	$Y_2 = \ln y_2$...	$Y_n = \ln y_n$

Таким образом, задача 3 свелась к задаче 1. Решая эту задачу, находим значения коэффициентов a и b .

Учитывая, что $b = \ln \beta$, находим $\beta = e^b$.

Подставим значения коэффициентов a и β в уравнение (10) и получим искомую показательную функцию $y = \beta \cdot e^{ax}$.

Суммарная погрешность равна $S(a, b) = \sum_{i=1}^n \left[\beta \cdot e^{ax_i} - y_i \right]^2$.

1.4 Квадратичная функция

$$y = ax^2 + bx + c. \quad (12)$$

Решение

Составим функцию трех переменных и найдем, при каких значениях a, b, c эта функция принимает минимальное значение:

$$S(a, b, c) = \sum_{i=1}^n (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2 \rightarrow \min. \quad (13)$$

Функция $S(a, b, c)$ будет принимать минимальное значение, если частные производные $S'_a(a, b, c)$, $S'_b(a, b, c)$ и $S'_c(a, b, c)$ обращаются в нуль:

$$\begin{cases} S'_a(a, b, c) = \sum_{i=1}^n 2(ax_i^2 + bx_i + c - y_i) \cdot x_i^2 = 0, \\ S'_b(a, b, c) = \sum_{i=1}^n 2(ax_i^2 + bx_i + c - y_i) \cdot x_i = 0, \\ S'_c(a, b, c) = \sum_{i=1}^n 2(ax_i^2 + bx_i + c - y_i) \cdot 1 = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Преобразуем уравнения системы (14) следующим образом:

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n x_i^4 \right) \cdot a + \left(\sum_{i=1}^n x_i^3 \right) \cdot b + \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \cdot c = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot y_i, \\ \left(\sum_{i=1}^n x_i^3 \right) \cdot a + \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \cdot b + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \cdot c = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i, \\ \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \cdot a + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \cdot b + n \cdot c = \sum_{i=1}^n y_i. \end{cases}$$

Получили систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными a, b, c . Аналогично случаю двух переменных, эта система имеет единственное решение. Кроме того, можно доказать, что коэффициенты, найденные с помощью метода наименьших квадратов, всегда определяют именно минимум функции $S(a, b, c)$.

Решая систему уравнений, найдем значения коэффициентов a, b, c . Подставим найденные значения a, b, c в уравнение (9), и получим искомую квадратичную функцию $y = ax^2 + bx + c$.

Суммарная погрешность равна

$$S(a, b, c) = \sum_{i=1}^n (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2.$$

2 Образец решения задания

Дана таблица значений некоторой функциональной зависимости, полученной из $n = 6$ опытов.

x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	1,0	1,5	3,0	4,5	7,0	8,5

Задание:

1. Методом наименьших квадратов по данной табличной зависимости найти аппроксимирующую функцию в виде:

1.1 линейной функции $y = ax + b$;

1.2 степенной функции $y = \beta \cdot x^a$;

1.3 показательной функции $y = \beta \cdot e^{ax}$;

1.4 квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$.

Промежуточные вычисления вести с точностью до 0,0001.

Значения параметров a , b , c округлить до 0,01.

2. Построить в плоскости xOy графики полученных функций и нанести экспериментальные точки.

3. Сравнить полученные результаты.

Решение

1.1 Найдем зависимость y от x в виде линейной функции $y = ax + b$.

Выберем значения коэффициентов a и b так, чтобы сумма квадратов отклонений $S(a, b) = \sum_{i=1}^n (\Delta y_i)^2 = \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2$ была минимальной.

Функция $S(a, b)$ будет принимать минимальное значение, если обращаются в нуль частные производные S'_a и S'_b :

$$\begin{cases} S'_a(a, b) = \sum_{i=1}^n 2(ax_i + b - y_i) \cdot x_i = 0, \\ S'_b(a, b) = \sum_{i=1}^n 2(ax_i + b - y_i) \cdot 1 = 0. \end{cases}$$

Преобразуем уравнения системы:

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \cdot a + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \cdot b = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i, \\ \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \cdot a + n \cdot b = \sum_{i=1}^n y_i, \end{cases} \quad (14)$$

где $\sum_{i=1}^6 x_i = 21$, $\sum_{i=1}^6 y_i = 25,5$, $\sum_{i=1}^6 x_i^2 = 91$, $\sum_{i=1}^6 x_i \cdot y_i = 117$.

Тогда система уравнений (14) примет вид:

$$\begin{cases} 91a + 21b = 117, \\ 21a + 6b = 25,5. \end{cases}$$

Решим систему уравнений по формулам Крамера:

$$a = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad b = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} 91 & 21 \\ 21 & 6 \end{vmatrix} = 105, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 117 & 21 \\ 25,5 & 6 \end{vmatrix} = 166,5,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 91 & 117 \\ 21 & 25,5 \end{vmatrix} = -136,5.$$

Тогда $a = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1,59$ и $b = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -1,30$.

Следовательно, искомая линейная функция будет иметь вид:

$$y = 1,59x - 1,30.$$

1.2 Найдем зависимость y от x в виде степенной функции

$$y = \beta \cdot x^a.$$

Прологарифмируем равенство $y = \beta \cdot x^a$ по основанию e и получим $\ln y = a \cdot \ln x + \ln \beta$.

Обозначим $Y = \ln y$, $X = \ln x$, $b = \ln \beta$.

Тогда получим линейную функцию $Y = aX + b$, где переменные X и Y связаны следующей табличной зависимостью:

$X = \ln x$	0	0,6931	1,0986	1,3863	1,6094	1,7918
$Y = \ln y$	0	0,4055	1,0986	1,5041	1,9459	2,1401

Таким образом, данная задача свелась к задаче 1.1.

Система (14) имеет вид:

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n \ln^2 x_i \right) \cdot a + \left(\sum_{i=1}^n \ln x_i \right) \cdot b = \sum_{i=1}^n \ln x_i \cdot \ln y_i, \\ \left(\sum_{i=1}^n \ln x_i \right) \cdot a + n \cdot b = \sum_{i=1}^n \ln y_i, \end{cases} \quad (15)$$

Найдем коэффициенты системы (15):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^6 \ln x_i &= 6,5792, & \sum_{i=1}^6 \ln y_i &= 7,0942, \\ \sum_{i=1}^6 \ln^2 x_i &= 9,4099, & \sum_{i=1}^6 \ln x_i \cdot \ln y_i &= 10,5395. \end{aligned}$$

Система уравнений (15) будет иметь вид:

$$\begin{cases} 9,4099 a + 6,5792 b = 10,5395, \\ 6,5792 a + 6 b = 7,0942. \end{cases}$$

Определители системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 9,4099 & 6,5792 \\ 6,5792 & 6 \end{vmatrix} = 13,1735, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 10,5395 & 6,5792 \\ 7,0942 & 6 \end{vmatrix} = 16,5628,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 9,4099 & 10,5395 \\ 6,5792 & 7,0942 \end{vmatrix} = -2,5858.$$

$$\text{Тогда } a = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1,26 \text{ и } b = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -0,20.$$

Учитывая, что $b = \ln \beta$, находим $\beta = e^b = e^{-0,20} = 0,82$, и получаем искомую степенную функцию $y = 0,82 \cdot x^{1,26}$.

1.3 Найдем зависимость y от x в виде показательной функции

$$y = \beta \cdot e^{ax}.$$

Прологарифмируем равенство $y = \beta \cdot e^{ax}$ по основанию e и получим $\ln y = ax + \ln \beta$.

Обозначим $Y = \ln y$, $b = \ln \beta$.

Тогда получим линейную функцию $Y = ax + b$, где переменные x и Y связаны следующей табличной зависимостью:

x	1	2	3	4	5	6
$Y = \ln y$	0	0,4055	1,0986	1,5041	1,9459	2,1401

Таким образом, задача свелась к задаче 1.1.

Система (14) имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \cdot a + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \cdot b = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \ln y_i, \\ \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \cdot a + n \cdot b = \sum_{i=1}^n \ln y_i, \end{array} \right. \quad (15)$$

Коэффициенты системы (15):

$$\sum_{i=1}^6 x_i = 21, \quad \sum_{i=1}^6 \ln y_i = 7,0942$$

$$\sum_{i=1}^6 x_i^2 = 91, \quad \sum_{i=1}^6 x_i \cdot \ln y_i = 32,6933.$$

Система уравнений (15) будет иметь вид:

$$\begin{cases} 91a + 21b = 32,6933, \\ 21a + 6b = 7,0942. \end{cases}$$

Определители системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 91 & 21 \\ 21 & 6 \end{vmatrix} = 105, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 32,6933 & 21 \\ 7,0942 & 6 \end{vmatrix} = 47,1816,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 91 & 32,6933 \\ 21 & 7,0942 \end{vmatrix} = -40,9871.$$

Тогда $a = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 0,45$ и $b = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -0,39$.

Учитывая, что $b = \ln \beta$, находим $\beta = e^b = e^{-0,39} = 0,68$.

Получаем искомую показательную функцию $y = 0,68 \cdot e^{0,45x}$.

1.4 Найдем зависимость y от x в виде квадратичной функции

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Выберем коэффициенты a , b и c так, чтобы сумма квадратов

отклонений $S(a, b, c) = \sum_{i=1}^n (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2$ была минимальной.

Функция $S(a, b, c)$ будет принимать минимальное значение, если

частные производные $S'_a(a, b, c)$, $S'_b(a, b, c)$, $S'_c(a, b, c)$

обращаются в нуль:

$$\left\{ \begin{array}{l} S'_a(a,b,c) = \sum_{i=1}^n 2(ax_i^2 + bx_i + c - y_i) \cdot x_i^2 = 0, \\ S'_b(a,b,c) = \sum_{i=1}^n 2(ax_i^2 + bx_i + c - y_i) \cdot x_i = 0, \\ S'_c(a,b,c) = \sum_{i=1}^n 2(ax_i^2 + bx_i + c - y_i) \cdot 1 = 0. \end{array} \right.$$

Преобразуем уравнения системы следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\sum_{i=1}^n x_i^4 \right) \cdot a + \left(\sum_{i=1}^n x_i^3 \right) \cdot b + \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \cdot c = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot y_i, \\ \left(\sum_{i=1}^n x_i^3 \right) \cdot a + \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \cdot b + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \cdot c = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i, \\ \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \cdot a + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \cdot b + n \cdot c = \sum_{i=1}^n y_i, \end{array} \right.$$

где $\sum_{i=1}^6 x_i^4 = 2275$, $\sum_{i=1}^6 x_i^3 = 441$, $\sum_{i=1}^6 x_i^2 = 91$,

$$\sum_{i=1}^6 x_i = 21, \quad \sum_{i=1}^6 x_i^2 \cdot y_i = 587,$$

$$\sum_{i=1}^6 x_i \cdot y_i = 117, \quad \sum_{i=1}^6 y_i = 25,5.$$

Тогда система уравнений примет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2275a + 441b + 91c = 587, \\ 441a + 91b + 21c = 117, \\ 91a + 21b + 6c = 25,5. \end{array} \right.$$

Решим систему уравнений по формулам Крамера:

$$a = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad b = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad c = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

где $\Delta = 3920$, $\Delta_1 = 630$, $\Delta_2 = 1806$, $\Delta_3 = 784$.

Тогда $a = 0,16$, $b = 0,46$, $c = 0,20$.

Следовательно, искомая квадратичная функция будет иметь вид:

$$y = 0,16x^2 + 0,46x + 0,20.$$

2. Построим в плоскости xOy графики полученных функций и нанесем экспериментальные точки (Рисунок 2).

Для этого составим таблицу значений полученных функций

x	1	2	3	4	5	6
y	1,0	1,5	3,0	4,5	7,0	8,5
$y = 1,59x - 1,30$	0,29	1,88	3,47	5,06	6,65	8,24
$y = 0,82 \cdot x^{1,26}$	0,82	1,96	3,27	4,70	6,23	7,84
$y = 0,68 \cdot e^{0,45x}$	1,07	1,67	2,62	4,11	6,45	10,12
$y = 0,16x^2 + 0,46x + 0,20$	0,82	1,76	3,02	4,60	6,50	8,72

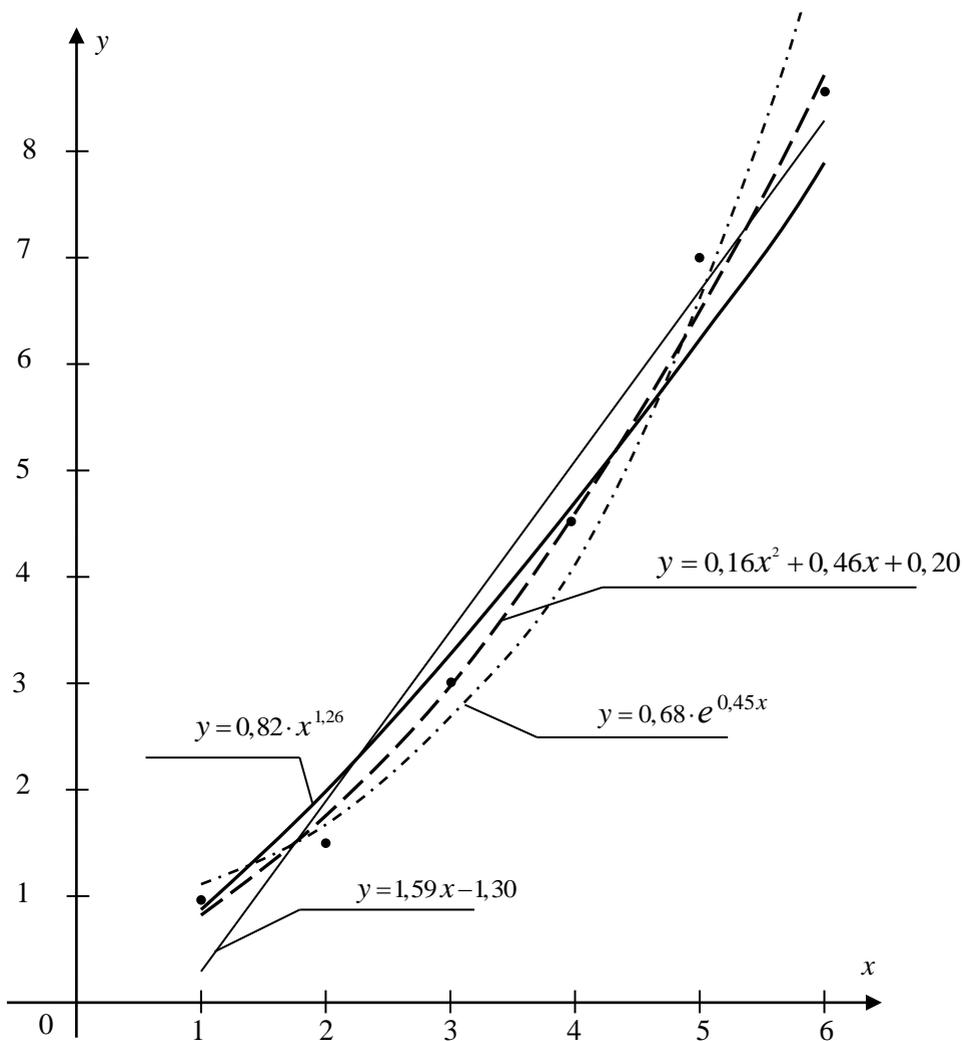


Рисунок 2 - Графики аппроксимирующих функций и экспериментальные точки

3. Сравним полученные результаты. Для этого найдем соответствующие суммарные погрешности

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^6 (\Delta y_i)^2.$$

$$S_1(a, b) = (1,0 - 0,29)^2 + (1,5 - 1,88)^2 + \dots = 1,36,$$

$$S_2(a, b) = (1,0 - 0,82)^2 + (1,5 - 1,96)^2 + \dots = 1,38,$$

$$S_3(a, b) = (1,0 - 1,07)^2 + (1,5 - 1,67)^2 + \dots = 3,24,$$

$$S_4(a, b) = (1,0 - 0,82)^2 + (1,5 - 1,76)^2 + \dots = 0,41.$$

Вывод:

В данной задаче лучшей *аппроксимирующей функцией* является квадратичная функция $y = 0,16x^2 + 0,46x + 0,20$.

Варианты индивидуальных заданий

Вариант 1

x	2	3	4	5	6	7
y	100	190	270	400	500	690

Вариант 2

x	10	20	30	40	50	60
y	1,06	1,33	1,52	1,68	1,81	1,91

Вариант 3

x	3	5	7	9	11	13
y	26	76	150	240	360	500

Вариант 4

x	2	6	10	14	18	22
y	3,1	6,7	9,5	11,9	14,0	15,5

Вариант 5

x	1	3	5	7	9	11
y	2,0	10,1	22,6	37,1	54,5	73,2

Вариант 6

x	1	4	7	10	13	16
y	3,0	7,6	11,2	13,8	17,1	19,5

Вариант 7

x	3	5	7	9	11	13
y	3,5	4,4	5,7	6,1	6,5	7,3

Вариант 8

x	2	5	8	11	14	17
y	2,1	1,3	1,0	0,9	0,8	0,72

Вариант 9

x	1	5	9	13	17	21
y	2,0	3,4	4,2	4,6	5,2	5,4

Вариант 10

x	3	4	5	6	7	8
y	13	31	64	105	170	252

Вариант 11

x	2	4	6	8	10	12
y	2,4	2,9	3,0	3,5	3,6	3,7

Вариант 12

x	10	14	18	22	26	30
y	4,2	4,5	4,8	5,1	5,2	5,4

Вариант 13

x	1	16	13	46	61	76
y	0,5	4,0	6,9	8,8	10,9	12,1

Вариант 14

x	5	15	25	35	45	55
y	2,2	2,4	2,6	2,7	2,8	2,9

Вариант 15

x	1	2	3	4	5	6
y	2,0	0,68	0,44	0,24	0,12	0,14

Вариант 16

x	2	3	4	5	6	7
y	2,0	4,3	8,1	12,1	18,1	36,2

Вариант 17

x	2	5	8	11	14	17
y	4,8	8,8	12,1	15,0	17,4	19,7

Вариант 18

x	5	7	9	11	13	15
y	5,6	9,2	13,6	18,3	23,5	29,1

Вариант 19

x	25	40	55	70	85	100
y	2,4	3,2	3,8	4,3	4,7	5,1

Вариант 20

x	2	3	4	5	6	7
y	2,8	2,4	2,0	1,5	1,3	1,2

Вариант 21

x	21	32	43	54	65	76
y	5,4	6,3	7,1	7,6	8,1	8,5

Вариант 22

x	2	5	8	11	14	17
y	1,6	24,9	102,8	266,8	549,0	982,0

Вариант 23

x	100	150	200	250	300	350
y	9,6	10,4	11,2	12,1	12,7	13,2

Вариант 24

x	220	320	420	520	620	720
y	5,2	5,2	5,4	5,6	5,8	6,1

Вариант 25

x	10	35	60	85	110	135
y	11,2	28,8	43,2	56,2	67,8	79,2

Вариант 26

x	10	15	20	25	30	35
y	10,8	18,4	27,1	36,6	46,6	57,2

Вариант 27

x	2	4	6	8	10	12
y	1,08	0,36	0,21	0,12	0,09	0,04

Вариант 28

x	10	15	20	25	30	35
y	4,30	3,30	2,68	2,25	1,90	1,70

Вариант 29

x	10	20	30	40	50	60
y	1,08	1,31	1,53	1,69	1,80	1,92

Вариант 30

x	3	5	7	9	11	13
y	27	75	152	241	362	498

Список литературы

1. *Пискунов, Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисления для вузов: учеб. пособие. В 2 т. / *Н.С. Пискунов.* – М.: Интеграл – Пресс, 2001–2004. – 584 с.

2. *Беклемишев, Д.В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учебник для вузов / *Д.В.Беклемишев.* – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 309 с.

Учебное издание

МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Методические указания

Составители: *Коломиец Людмила Вадимовна,*
Поникарова Наталья Юрьевна

Редактор А.В. Ярославцева
Компьютерная вёрстка А.В. Ярославцевой

Подписано в печать 25.12.2017. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Печ. л. 2,0.
Тираж 25 экз. Заказ . Арт. 68/2017.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»
(Самарский университет)
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

Изд-во Самарского университета.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

