

**№ 4836  
620.1**

**С 646**

# **СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ**

**Методические указания**

**НОВОСИБИРСК  
2017**

620.1  
С 646

№ 4836

# СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Методические указания и варианты исходных данных  
к курсовой работе и расчетно-графической работе для студентов

II курса факультета летательных аппаратов дневной формы  
обучения по направлениям и специальностям:

17.05.01 – Боеприпасы и взрыватели, 24.05.07 – Самолето-  
и вертолетостроение, 15.03.03 – Прикладная механика,  
24.03.04 – Авиастроение, 25.03.01 – Техническая эксплуатация  
летательных аппаратов и двигателей

НОВОСИБИРСК  
2017

УДК 620.1(07)  
С 646

Составили:

канд. техн. наук, доц. А.И. Темников,  
д-р техн. наук, проф. *Г.И. Расторгуев*,  
канд. техн. наук, доц. *А.Н. Пель*,  
ст. преп. *Е.Н. Белоусова*,  
д-р техн. наук, проф. К.А. Матвеев,  
канд. техн. наук, доц. Д.В. Моховнев

Рецензент    д-р техн. наук, проф. *Е.Г. Подружин*

Работа подготовлена кафедрой прочности  
летательных аппаратов

© Новосибирский государственный  
технический университет, 2017

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Общие методические указания .....	5
<b>1. Расчет на изгиб двутавровой балки .....</b>	<b>6</b>
1.1. Условия задачи.....	6
1.2. Пример решения задачи 1 .....	7
1.2.1. Исходные данные.....	7
1.2.2. Определение перерезывающих сил и изгибающих моментов.....	9
1.2.3. Расчет балки на полную статическую прочность при изгибе.....	11
1.2.4. Определение прогибов и углов поворота балки.....	13
<b>2. Расчет статически неопределимой плоской рамы.....</b>	<b>16</b>
2.1. Условия задачи.....	16
2.2. Пример решения задачи 2 .....	18
2.2.1. Исходные данные.....	18
2.2.2. Построение эпюр внутренних силовых факторов.....	18
2.2.3. Обоснование правильности раскрытия статической неопределимости рамы статической и кинематической проверками.....	25
2.2.4. Подбор двутаврового профиля по ГОСТ 8239-72.....	27
2.2.5. Определение угла поворота заданного сечения .....	28
2.2.6. Исследование напряженного состояния рамы в случае повреждения опор.....	28
<b>3. Расчет пространственного ломаного бруса.....</b>	<b>32</b>
3.1. Условия задачи.....	32
3.2. Пример решения задачи 3 .....	34
3.2.1. Исходные данные.....	34
3.2.2. Построение эпюр внутренних силовых факторов.....	35
3.2.3. Определение опасного сечения бруса.....	37
3.2.4. Определение рационального расположения поперечного сечения и допускаемой нагрузки .....	37
3.2.5. Определение вертикального перемещения свободного конца бруса.....	42
Приложение 1. Программа для расчета многопролетной балки .....	44
Приложение 2. Программа для расчета статически неопределимой плоской рамы.....	49
Приложение 3. Некоторые формулы, используемые при выполнении курсового проекта. Универсальное уравнение упругой линии .....	59
Список использованных источников .....	63

## **ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**

1. Цель настоящей работы – дать практические рекомендации студентам по выполнению курсового проекта по курсу «Сопротивление материалов» для студентов второго курса факультета летательных аппаратов дневной формы обучения.

2. Номера вариантов исходных данных сообщает преподаватель, ведущий практические занятия.

3. Задания следует выполнять на стандартных листах писчей бумаги формата А4. Эпюры силовых факторов и графики выполняются строго с соблюдением масштаба на миллиметровой бумаге.

4. При использовании для расчетов программ, написанных для ЭВМ, тексты программ и результаты расчетов следует привести в приложении к курсовому проекту.

5. Курсовой проект должен быть сброшюрован и снабжен титульным листом стандартного образца.

# 1. РАСЧЕТ НА ИЗГИБ ДВУТАВРОВОЙ БАЛКИ

## 1.1. УСЛОВИЯ ЗАДАЧИ

Двутавровая стальная балка закреплена на двух шарнирных опорах и нагружена в соответствии с заданной расчетной схемой. Допускаемые напряжения  $[\sigma] = 160$  МПа, модуль упругости  $E = 2.0 \cdot 10^5$  МПа.

Варианты исходных данных и расчетные схемы приведены в табл. 1.1 и 1.2.

Требуется:

- 1) Записать выражения и построить эпюры для изгибающих моментов и перерезывающих сил по силовым участкам.
- 2) Из условия полной проверки на статическую прочность подобрать по ГОСТу требуемый номер двутаврового профиля.
- 3) С использованием универсального уравнения упругой линии записать выражения для прогибов и углов поворота по силовым участкам.
- 4) Построить эпюры углов поворота (в градусах) и прогибов (в миллиметрах).

Таблица 1.1

Варианты исходных данных

Номер варианта	$M_1$ [кНм]	$P_1$ [кН]	$P_2$ [кН]	$q$ [кН/м]	$a$ [м]
1	10	20	30	40	0,4
2	20	15	20	30	0,6
3	30	10	30	20	0,8
4	40	5	20	10	1,0
5	10	5	30	40	0,4
6	20	10	20	30	0,6
7	30	15	30	20	0,8
8	40	20	20	10	1,0

## 1.2. ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 1

### 1.2.1. ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

Двухтавовая балка закреплена на двух шарнирных опорах и нагружена в соответствии с расчетной схемой № 31<sup>1</sup> как показано на рис. 1.1. Исходные данные и механические характеристики представлены в табл. 1.3.

Номер варианта	Значение параметров
$M_1$ [кНм]	40,0
$P_1$ [кН]	10,0
$P_2$ [кН]	0,0
$q$ [кН/м]	30,0
$a$ [м]	0,8
$[\sigma]$ [МПа]	160,0
$E$ [МПа]	$2,0 \cdot 10^5$

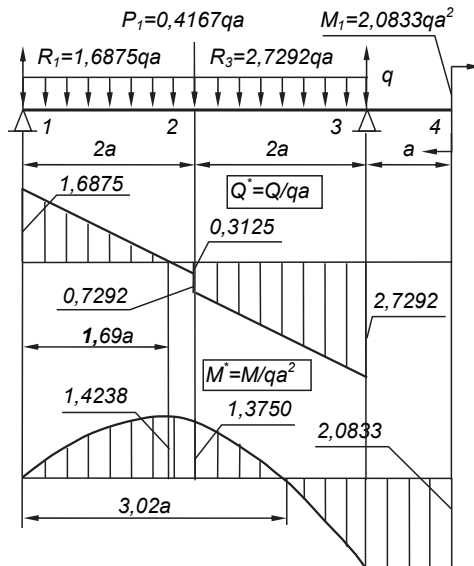
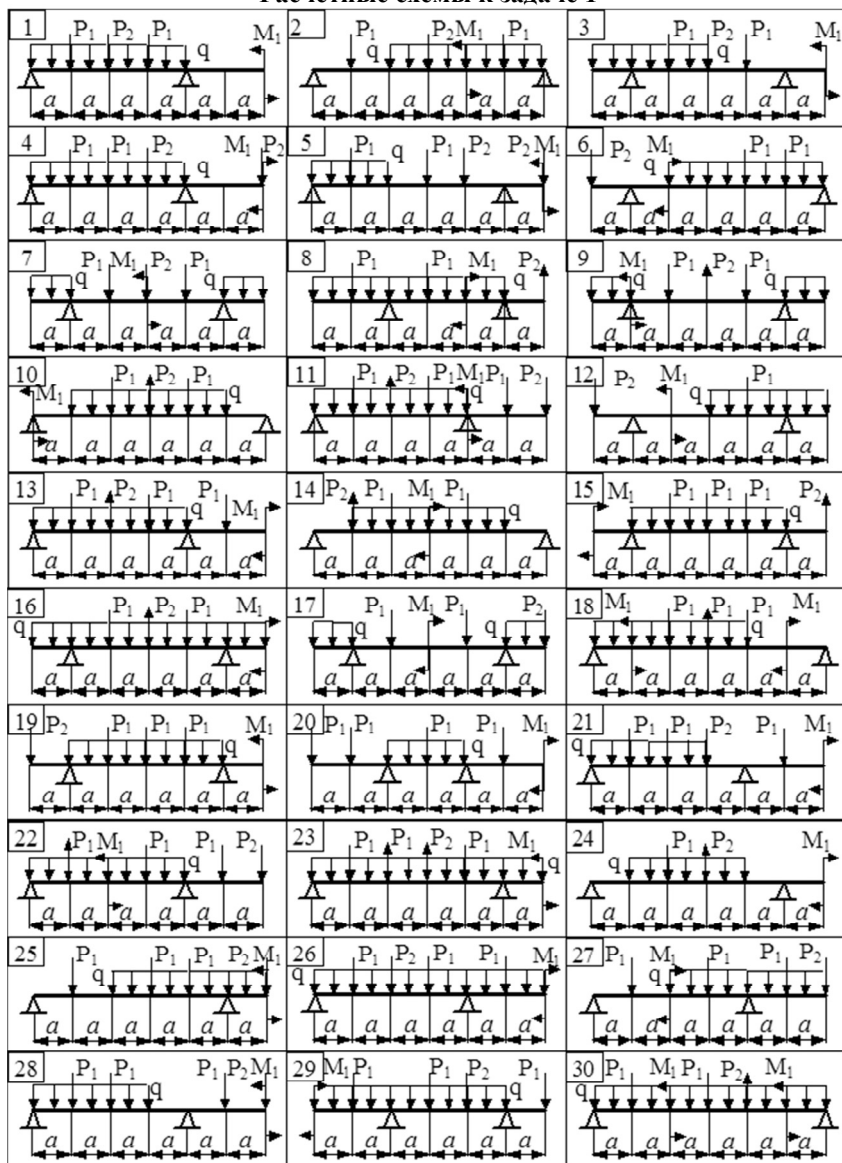


Рис. 1.1

<sup>1</sup> Здесь и далее указывать свой номер расчетной схемы, рисунка и прочее.

Таблица 1.2

Расчетные схемы к задаче 1





### 1.2.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕРЕЗЫВАЮЩИХ СИЛ И ИЗГИБАЮЩИХ МОМЕНТОВ

Выбираем систему координат (начало системы координат совмещено с левым по рис. 1.1 концом балки) и разбиваем балку на силовые участки. Границы силовых участков обозначены цифрами 1, 2, 3, 4. Используя табл. 1.3 представим заданные усилия и моменты в безразмерном виде:

$$P_1 = \alpha_1 qa, \quad M_1 = \beta_1 qa^2,$$

где 
$$\alpha_1 = \frac{P_1}{qa} = \frac{10 \cdot 10^3}{30 \cdot 10^3 \cdot 0,8} = \frac{5}{12} = 0,4167,$$

$$\beta_1 = \frac{M_1}{qa^2} = \frac{40 \cdot 10^3}{30 \cdot 10^3 \cdot 0,8^2} = \frac{25}{12} = 2,0833.$$

Определяем реакции опор:

$$\begin{aligned} \sum m_1 &= -P_1 \cdot 2a - q \cdot 4a \cdot 2a - M_1 + R_3 \cdot 4a = 0, \\ \sum m_3 &= P_1 \cdot 2a + q \cdot 4a \cdot 2a - M_1 - R_1 \cdot 4a = 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Из (1.1) находим

$$R_1 = \frac{1}{4a} \left( \frac{5}{12} qa \cdot 2a + 8qa^2 - \frac{25}{12} qa^2 \right) = \frac{27}{16} qa = 1,6875qa,$$

$$R_3 = \frac{1}{4a} \left( \frac{5}{12} qa \cdot 2a + 8qa^2 + \frac{25}{12} qa^2 \right) = \frac{131}{48} qa = 2,7292qa.$$

Проверка:

$$\sum Y = R_1 + R_3 - P_1 - 4qa = (1,6875 + 2,7292 - 0,4167 - 4)qa = 0.$$

Найденные значения для  $P_1$ ,  $M_1$ ,  $R_1$  и  $R_3$  подписываем на расчетной схеме (рис. 1.1).

Последовательно рассматриваем силовые участки и записываем уравнения для  $Q$  и  $M$ .

### Участок 1 - 2 ( $0 \leq x \leq 2a$ )

$$Q_{12} = R_1 - qx = 1,6875qa - qx, \quad M_{12} = R_1x - qx^2/2 = 1,6875qax - qx^2/2.$$

Характерные значения:

$$Q_{12|x=0} = 1,6875qa, Q_{12|x=2a} = 1,6875qa - q \cdot 2a = -0,3125qa,$$

$$M_{12|x=0} = 0, M_{12|x=2a} = 1,6875qa \cdot 2a - q \cdot (2a)^2/2 = 1,3750qa^2.$$

Так как  $Q_{12}$  на границах силового участка имеет разные знаки, в точке  $x_0$  такой, что  $Q_{12}(x_0) = 0$ , эпюра  $M_{12}$  будет иметь экстремум (в данном случае максимум, так как выпуклость эпюры изгибающего момента должна быть направлена навстречу распределенной нагрузке).

$$Q_{12}(x_0) = 1,6875qa - qx_0 = 0, \Rightarrow x_0 = 1,6875a,$$

$$M_{12}(x_0) = qa^2(1,6875 \cdot 1,6875 - 1,6875^2/2) = 1,4238qa^2.$$

### Участок 2 - 3 ( $2a \leq x \leq 4a$ )

$$Q_{23} = R_1 - qx - P_1 = 1,6875qa - qx - 0,4167qa = 1,2708qa - qx,$$

$$M_{23} = R_1x - qx^2/2 - P_1(x - 2a) = 1,6875qax - qx^2/2 - 0,4167qa(x - 2a).$$

Характерные значения:

$$Q_{23|x=2a} = (1,2708 - 2)qa = -0,7292qa,$$

$$Q_{23|x=4a} = (1,2708 - 4)qa = -2,7292qa,$$

$$M_{23|x=2a} = (1,6875 \cdot 2 - 2^2/2)qa^2 = 1,3750qa^2,$$

$$M_{23|x=4a} = (1,6875 \cdot 4 - 4^2/2 - 0,4167 \cdot 2)qa^2 = -2,0833qa^2.$$

Эпюра  $M_{23}$  в точке  $x_1$ , которая определяется из уравнения

$$1,6875qax_1 - qx_1^2/2 - 0,4167qa(x_1 - 2a) = 0, \Rightarrow x_1 = 3,02a,$$

обращается в ноль. Поэтому в этой точке эпюра углов поворотов будет иметь экстремум.

### Участок 3 - 4 ( $4a \leq x \leq 5a$ )

$$Q_{34} = 0, \quad M_{34} = -M_1 = -2,0833qa^2.$$

Эти выражения могут быть получены по методу сечений, если при составлении уравнений отбросить левую (по рис. 1.1) часть балки.

Используя полученные результаты, строим эпюры  $Q$  и  $M$  (рис. 1.1). Используя правила проверки эпюр, убеждаемся в правильности их построения.

### 1.2.3. РАСЧЕТ БАЛКИ НА ПОЛНУЮ СТАТИЧЕСКУЮ ПРОЧНОСТЬ ПРИ ИЗГИБЕ.

1) Номер двутаврового сечения балки определяем из расчета на прочность по максимальным нормальным напряжениям. В сечении с

$$M_{\max} = 2,0833qa^2 = 2,0833 \cdot 30,0 \cdot 0,8^2 = 40,0 \text{ кНм}$$

должно выполняться условие  $\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma]$ . Откуда определяем потребный момент сопротивления балки

$$W_{z \text{ потр}} \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{40,0 \cdot 10^3}{160,0 \cdot 10^6} = 250,0 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 250,0 \text{ см}^3.$$

По ГОСТу 8239-72 [1] выбираем ближайший по моменту сопротивления двутавровый профиль № 22а с  $W_z = 254 \text{ см}^3 \geq W_{z \text{ потр}}$ . Схематическое изображение сечения представлено на рис. 1.2. Геометрические и жесткостные параметры двутаврового профиля:

$$h = 220 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \quad b = 120 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \quad t = 8,9 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \quad d = 5,4 \cdot 10^{-3} \text{ м},$$

$$h_2 = h - 2t = 202,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \quad J_z = 2790 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4, \quad W_z = 254 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3,$$

$$S_{z \max}^* = 143 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

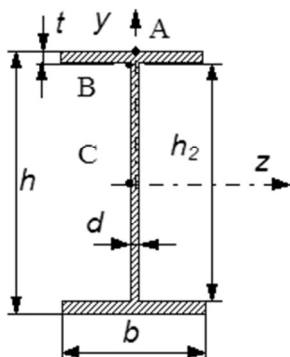


Рис. 1.2

2) Выполняем проверку по максимальным касательным напряжениям. В сечении с максимальным значением перерезывающей силы проверяем прочность в точке С поперечного сечения балки

$$Q_{\max} = 2,7292qa =$$

$$= 2,7292 \cdot 30,0 \cdot 0,8 = 65,5 \text{ кН};$$

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_{z \max}^*}{dJ_z} \leq [\tau],$$

$$[\tau] = 0,6[\sigma] = 0,6 \cdot 160 = 96 \text{ МПа};$$

$$\tau_{\max} = \frac{65,5 \cdot 10^3 \cdot 143 \cdot 10^{-6}}{5,4 \cdot 10^{-3} \cdot 2790 \cdot 10^{-8}} = 62,17 \cdot 10^6 \text{ Па} =$$

$$= 62,17 \cdot 10^6 \text{ МПа} < 96 \text{ МПа}.$$

Прочность по максимальным касательным напряжениям обеспечена.

3) Проверяем прочность (по четвертой теории прочности) точки В поперечного сечения балки (рис. 1.2), которая соответствует максимальному значению эквивалентного напряжения:

$$M = 40 \text{ кНм}, \quad Q = 65,5 \text{ кН}, \quad \sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma_B^2 + 3\tau_B^2},$$

$$y_B = h_2/2 = 101,1 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \quad S_{zB}^* = F_B^* y_{\text{ц.т}}^* = bt(h_2 + t)/2 =$$

$$= 120 \cdot 10^{-3} \cdot 8,9 \cdot 10^{-3} \cdot (202,2 + 8,9) \cdot 10^{-3} / 2 = 112,73 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3;$$

$$\sigma_B = \frac{My_B}{J_z} = \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 101,1 \cdot 10^{-3}}{2790 \cdot 10^{-8}} = 144,95 \cdot 10^6 \text{ Па} = 144,95 \text{ МПа},$$

$$\tau_B = \frac{QS_{zB}^*}{dJ_z} = \frac{65,5 \cdot 10^3 \cdot 112,73 \cdot 10^{-6}}{5,4 \cdot 10^{-3} \cdot 2790 \cdot 10^{-8}} = 49,01 \cdot 10^6 \text{ Па} = 49,01 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{\text{эKB}}^{\text{IV}} = \sqrt{144,95^2 + 49,01^2} = 167,98 \text{ МПа} > 160 \text{ МПа},$$

$$\delta \% = \frac{167,98 - 160}{160} 100 \% = 4,99 \%$$

Перенапряжение  $\delta \%$  не превышает  $5 \%$ , поэтому выбранный двутавр № 22а может быть оставлен в конструкции балки.<sup>2</sup>

#### 1.2.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОГИБОВ И УГЛОВ ПОВОРОТА БАЛКИ

Для определения прогибов и углов поворота воспользуемся универсальным уравнением упругой линии, которое для балки с постоянной жесткостью имеет вид:<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} v(x) &= v_0 + \theta_0 x + \\ &+ \frac{1}{EJ} \left\{ \sum_i M_i \frac{(x - x_{Mi})^2}{2!} + \sum_i P_i \frac{(x - x_{Pi})^3}{3!} + \sum_i q_i \frac{(x - x_{qi})^4}{4!} \right\}; \\ \theta(x) &= \theta_0 + \\ &+ \frac{1}{EJ} \left\{ \sum_i M_i \frac{(x - x_{Mi})^1}{1!} + \sum_i P_i \frac{(x - x_{Pi})^2}{2!} + \sum_i q_i \frac{(x - x_{qi})^3}{3!} \right\}; \end{aligned} \quad (1.2)$$

В (1.2) под знаками сумм следует учитывать силовые факторы лежащие слева от рассматриваемого сечения, так что выражения в круглых скобках всегда больше или равны нулю. Распределенная нагрузка  $q_i$  должна заканчиваться на правом конце балки.

---

<sup>2</sup> В данном примере  $Q_{\text{max}}$  и  $M_{\text{max}}$  действуют в одном и том же сечении по длине балки. Если же сечения эти не совпадают, то следует сделать проверку  $\sigma_{\text{эKB}}$  для всех подозрительных сечений.

<sup>3</sup> Вывод универсального уравнения упругой линии смотри в приложении 3.

В нашем случае будем иметь

$$v(x) = v_0 + \theta_0 x + \frac{1}{EJ} \left\{ R_1 \frac{x^3}{6} - q \frac{x^4}{24} - P_1 \frac{(x-2a)^3}{6} + R_3 \frac{(x-4a)^3}{6} + q \frac{(x-4a)^4}{24} \right\}; \quad (1.3)$$

$$\theta(x) = \theta_0 + \frac{1}{EJ} \left\{ R_1 \frac{x^2}{2} - q \frac{x^3}{6} - P_1 \frac{(x-2a)^2}{2} + R_3 \frac{(x-4a)^2}{2} + q \frac{(x-4a)^3}{6} \right\}.$$

Подчеркнутые в (1.3) слагаемые следует учитывать для рассматриваемого сечения лишь тогда, когда выражение в круглых скобках отрицательно.

Произвольные постоянные  $v_0$  и  $q_0$  определяются из граничных условий:

$$\begin{aligned} v|_{x=0} = v_0 = 0; \Rightarrow v_0 = 0; \\ v|_{x=4a} = v_0 + \theta_0 4a + \frac{1}{EJ} \left\{ R_1 \frac{(4a)^3}{6} - q \frac{(4a)^4}{24} - P_1 \frac{(2a-2a)^3}{6} \right\} = 0; \Rightarrow \\ \Rightarrow \theta_0 = -\frac{1}{4a} \frac{1}{EJ} \left\{ R_1 \frac{(4a)^3}{6} - q \frac{(4a)^4}{24} - P_1 \frac{(2a)^3}{6} \right\}. \end{aligned}$$

Вычисления по формулам (1.3) удобно проводить с помощью ЭВМ. Пример простой программы для расчета многопролетной балки, составленной на языке ФОРТРАН, приведен в приложении 1. Результаты расчетов представлены в виде эпюр  $Q$ ,  $M$ ,  $\theta$  и  $v$  на рис 1.3.

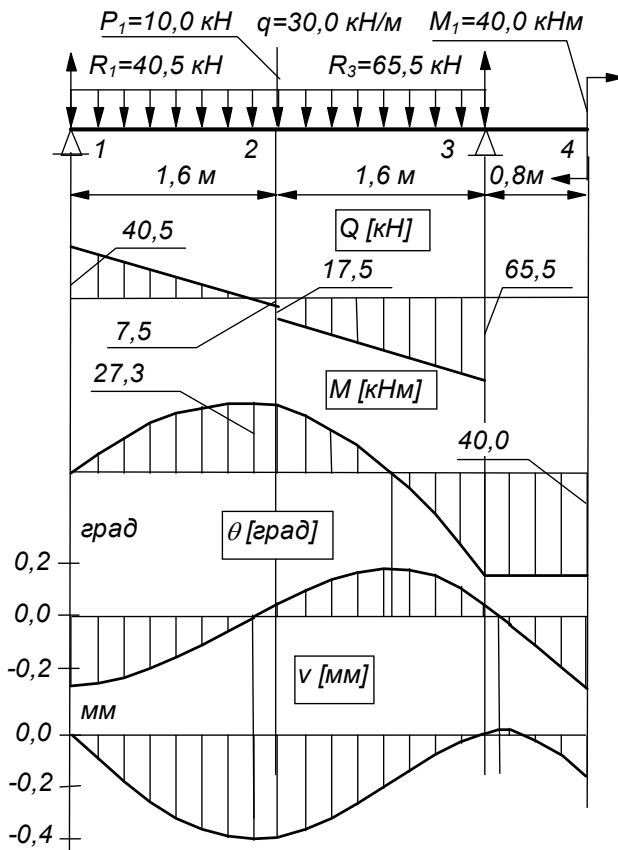


Рис. 1.3

## 2. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ ПЛОСКОЙ РАМЫ

### 2.1. УСЛОВИЯ ЗАДАЧИ

Плоская рама изготовлена из стальных балок двутаврового профиля. В точках 1, 2, 3 и 4 имеет опорные закрепления, варианты которых даются в табл. 2.1. Рама нагружена в соответствии с заданной расчетной схемой табл. 2.2. Жесткость на изгиб поперечного сечения горизонтальных стержней равна  $EJ$ , вертикальных –  $2EJ$ . Допускаемое напряжение  $[\sigma] = 140$  МПа, модуль упругости  $E = 2.0 \cdot 10^5$  МПа.

Т а б л и ц а 2.1

**Варианты исходных данных**

Номер варианта	Тип опоры				Нагрузки			$a$ [м]	Типы опор:
	1	2	3	4	$M/qa^2$	$P/qa$	$q$ [кН/м]		
1	2	3	1	2	1,0	3,0	10,0	2,0	<div style="display: flex; flex-direction: column; align-items: center;"> <div>1 - </div> <div>2 - </div> <div>3.- </div> </div>
2	3	2	1	2	2,0	2,0	20,0	1,0	
3	2	2	1	2	3,0	1,0	30,0	2,0	
4	3	3	1	3	1,0	3,0	40,0	1,0	
5	3	2	1	3	2,0	2,0	10,0	2,0	
6	2	3	1	3	3,0	1,0	20,0	1,0	
7	3	3	1	3	1,0	2,0	30,0	2,0	
8	2	2	1	2	2,0	1,0	40,0	1,0	

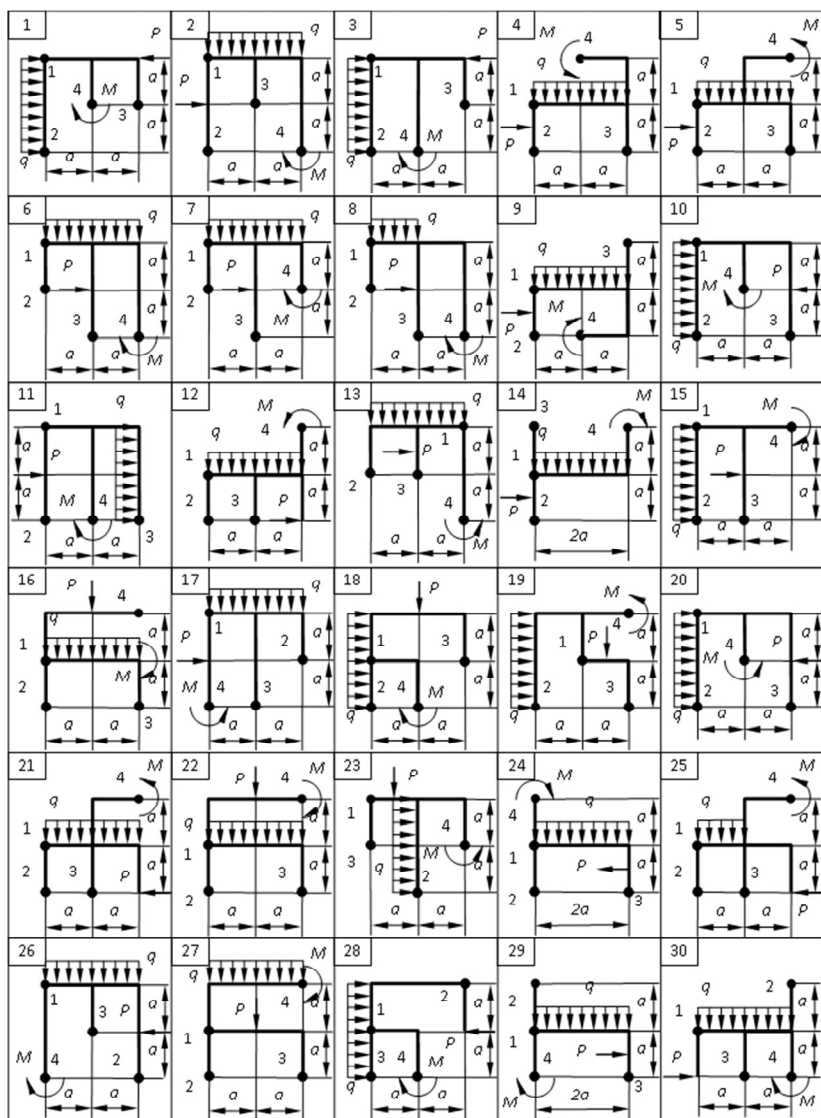
Требуется:

1) Раскрыв статическую неопределимость по методу сил, построить эпюры внутренних силовых факторов.



Таблица 2.2

## Расчетные схемы к задаче 2



2) Обосновать правильность раскрытия статической неопределимости рамы статической и кинематической проверками.

3) Подобрать двутавровый профиль по ГОСТ 8239-72, сохранив заданное соотношение жесткостей.

4) Определить угол поворота сечения <sup>4</sup>.

5) Исследовать напряженное состояние рамы при повреждении каждой из шарнирных опор.

## 2.2. ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 2

### 2.2.1. ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

Плоская рама (рис. 2.1) изготовлена из стальных балок двутаврового профиля и нагружена в соответствии с расчетной заданной схемой. Жесткость на изгиб поперечного сечения горизонтальных стержней равна  $EJ$ , вертикальных –  $2EJ$ . Допускаемое напряжение  $[\sigma] = 140$  МПа, модуль упругости  $E = 2,0 \cdot 10^5$  МПа,  $a = 1$  м.

### 2.2.2. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ

Строим эквивалентную систему.

Степень статической неопределимости  $N_x = 6 - 3 = 3$ .

Выбираем основную систему, отбрасывая три лишних связи - шарнирные опоры в точках 1, 2 и 3. Загружаем основную систему внешними нагрузками и лишними неизвестными  $X_1, X_2, X_3$ , действующими в направлении отброшенных связей (рис. 2.2). Эта схема, дополненная системой канонических уравнений метода сил

$$\sum_{j=1}^{N_x} \delta_{ij} X_j + \Delta_{ip} = 0; \quad (i = 1, 2, \dots, N_x),$$

где

$$\delta_{ij} = \sum_n \int \frac{M_i^{(n)} M_j^{(n)}}{(EJ)^n} dx; \quad \Delta_{ip} = \sum_n \int \frac{M_i^{(n)} M_p^{(n)}}{(EJ)^n} dx,$$

---

<sup>4</sup> При вычислении коэффициентов системы канонических уравнений и углового перемещения сечения 3 влиянием продольных и поперечных сил пренебречь.

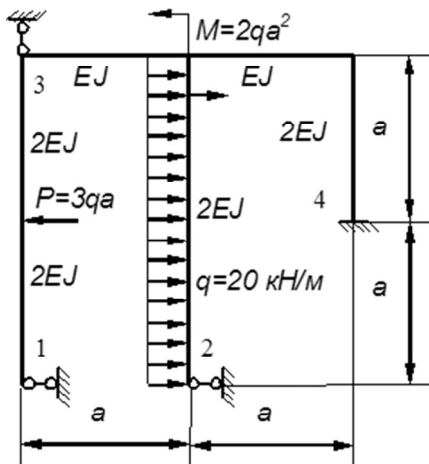


Рис. 2.1

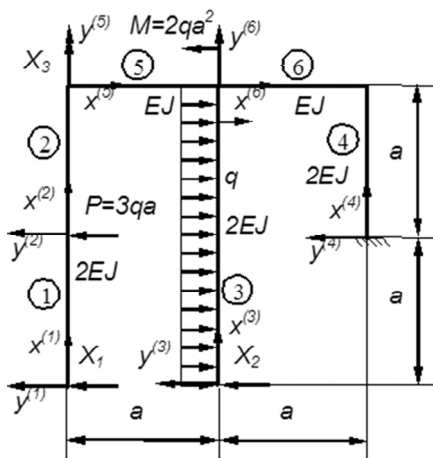


Рис. 2.2

и будет эквивалентной системой. На схеме (рис. 2.2) показаны номера силовых участков (цифры в кружках), а также направления осей системы координат  $x^{(n)}, y^{(n)}$  для каждого силового участка. Результаты сводим в табл. 2.3. Для вычисления коэффициентов системы канонических уравнений строим эпюры безразмерных моментов:  $\bar{M}_i = M_i/a$  и  $\bar{M}_P = M_P/qa^2$ .

Таблица 2.3

### Характеристики участков

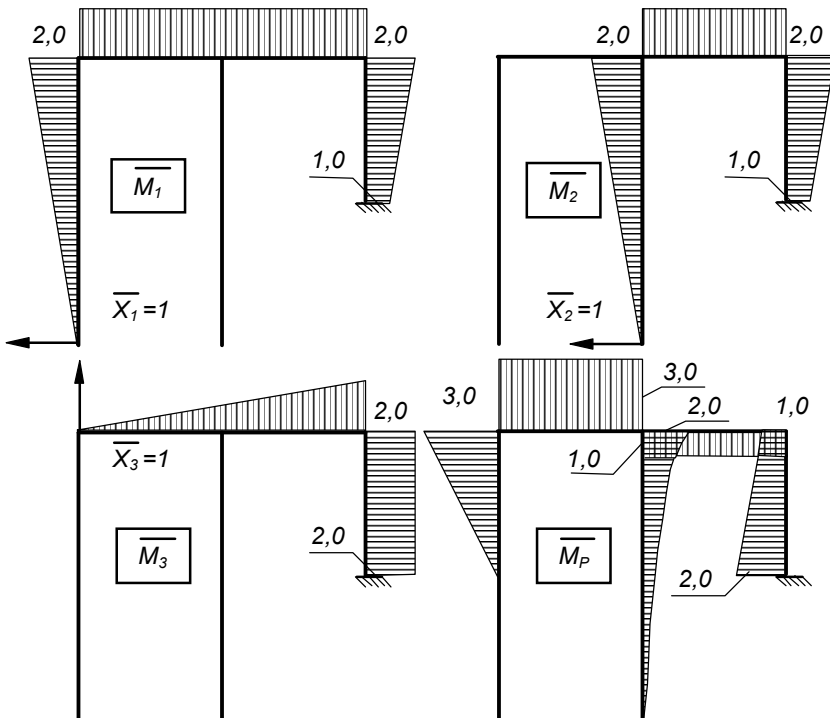
Номер участка	$EJ^{(n)}/EJ$	$l^{(n)}/a$	$q^{(n)}/q$
1	2,0	1,0	0,0
2	2,0	1,0	0,0
3	2,0	2,0	-1,0
4	2,0	1,0	0,0
4	1,0	1,0	0,0
6	1,0	1,0	0,0

Результаты построения эпюр помещаем в табл. 2.4.

### Таблица 2.4

## Результаты построения эпюр

Номер участка	$M_1^{(n)} / a$		$M_2^{(n)} / a$		$M_3^{(n)} / a$		$M_P^{(n)} / qa^2$	
	$M_0$	$M_I$	$M_0$	$M_I$	$M_0$	$M_I$	$M_0$	$M_I$
1	0,0	1,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
2	1,0	2,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	3,0
3	0,0	0,0	0,0	2,0	0,0	0,0	0,0	-2,0
4	-1,0	-2,0	-1,0	-2,0	-2,0	-2,0	2,0	1,0
5	2,0	2,0	0,0	0,0	0,0	1,0	3,0	3,0
6	2,0	2,0	2,0	2,0	1,0	2,0	-1,0	-1,0



*Рис. 2.3*

Коэффициенты системы канонических уравнений вычисляем по формулам:<sup>5</sup>

$$\begin{aligned}\bar{\delta}_{ij} &= \delta_{ij} \frac{EJ}{a^3} = \\ &= \sum_{n=1}^{N_-} \frac{\bar{l}^{(n)}}{6EJ^{(n)}} \left( 2\bar{M}_{i0}^{(n)} \bar{M}_{j0}^{(n)} + 2\bar{M}_{i1}^{(n)} \bar{M}_{j1}^{(n)} + \bar{M}_{i0}^{(n)} \bar{M}_{j1}^{(n)} + \bar{M}_{i1}^{(n)} \bar{M}_{j0}^{(n)} \right); \\ \bar{\Delta}_{iP} &= \Delta_{iP} \frac{EJ}{qa^4} = \\ &= \sum_{n=1}^{N_-} \frac{\bar{l}^{(n)}}{6EJ^{(n)}} \left\{ \begin{aligned} &\left( 2\bar{M}_{i0}^{(n)} \bar{M}_{P0}^{(n)} + 2\bar{M}_{i1}^{(n)} \bar{M}_{P1}^{(n)} + \bar{M}_{i0}^{(n)} \bar{M}_{P1}^{(n)} + \bar{M}_{i1}^{(n)} \bar{M}_{P0}^{(n)} \right) \\ &- \frac{\bar{q}^{(n)} \left( l^{(n)} \right)^2}{2} \frac{\bar{M}_{i0}^{(n)} + \bar{M}_{i1}^{(n)}}{2} \end{aligned} \right\}.\end{aligned}$$

или их частным случаем.

Здесь  $\bar{M}_i^{(n)} = M_i^{(n)} / a$ ;  $\bar{M}_P^{(n)} = M_P^{(n)} / qa^2$ ;  $\bar{q}^{(n)} = q^{(n)} / q$ . При этом значения моментов  $M_0$  и  $M_1$  в начале и конце силового участка, соответственно, берем по таблице (2.4), а значения безразмерных параметров длины  $\bar{l}^{(n)}$ , жесткости на изгиб  $\bar{EJ}^{(n)}$  и безразмерной нагрузки  $\bar{q}^{(n)}$  – по табл. (2.3).<sup>6</sup>

$$\bar{\delta}_{11} = \frac{2}{6 \cdot 2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 + \frac{1}{1} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 + \frac{2}{6 \cdot 2} (2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2) = \frac{126}{12} = 10,5;$$

$$\bar{\delta}_{22} = \frac{2}{6 \cdot 2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 + \frac{1}{1} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 + \frac{2}{6 \cdot 2} (2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2) = \frac{78}{12} = 6,5;$$

---

<sup>5</sup> См. Приложение 3

<sup>6</sup> Для уменьшения погрешности расчетов все вычисления желательно выполнять в простых дробях, представляя в десятичном виде лишь окончательный результат.

$$\bar{\delta}_{33} = \frac{2}{6} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = \frac{56}{12} = 4,6667;$$

$$\bar{\delta}_{12} = \bar{\delta}_{21} = \frac{1}{1} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 + \frac{1}{6 \cdot 2} (2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2) = \frac{62}{12} = 5,1667;$$

$$\bar{\delta}_{13} = \bar{\delta}_{31} = \frac{2}{6} (2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2) + \frac{1}{6 \cdot 2} (2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2) = \frac{66}{12} = 5,5;$$

$$\bar{\delta}_{23} = \bar{\delta}_{32} = \frac{1}{1} \frac{(2+1)}{2} \cdot 2 + \frac{1}{6 \cdot 2} (2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2) = \frac{54}{12} = 4,5;$$

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_{1P} &= \frac{1}{6 \cdot 2} (2 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 3) + \frac{1}{6} (2 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2) - \\ &- \frac{1}{6} (2 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2) - \frac{1}{6 \cdot 2} (2 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2) = \frac{50}{12} = 4,1667; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_{2P} &= -\frac{2}{6 \cdot 2} (2 \cdot 2 \cdot 2) + \frac{2^3}{12 \cdot 2} \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 2 - \frac{1}{6 \cdot 2} (2 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1) = \\ &= -\frac{49}{12} = -4,0833; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_{3P} &= -\frac{1}{6} (2 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2) - \frac{1}{6 \cdot 2} (2 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2) = \\ &= -\frac{18}{12} = -1,5; \end{aligned}$$

Вводя безразмерные неизвестные  $\bar{X}_i = X_i / qa$  и умножая все коэффициенты на общий знаменатель 12, запишем расширенную матрицу системы уравнений в виде:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 126 & 62 & 66 & -50 \\ 62 & 78 & 54 & 49 \\ 66 & 54 & 56 & 18 \end{array} \right) \quad (2.1)$$

Решая эту систему по методу Крамера<sup>7</sup>, имеем

$$\Delta = 126(78 \cdot 56 - 54 \cdot 54) - 62(62 \cdot 56 - 54 \cdot 66) + \\ + 66(62 \cdot 54 - 78 \cdot 66) = 69856;$$

$$\Delta_1 = -50(78 \cdot 56 - 54 \cdot 54) - 49(62 \cdot 56 - 54 \cdot 66) + \\ + 18(62 \cdot 54 - 78 \cdot 66) = -100492;$$

$$\Delta_2 = 50(62 \cdot 56 - 66 \cdot 54) + 49(126 \cdot 56 - 66 \cdot 66) - \\ - 18(126 \cdot 54 - 62 \cdot 66) = 78884;$$

$$\Delta_3 = -50(62 \cdot 54 - 66 \cdot 78) - 49(126 \cdot 54 - 66 \cdot 62) + \\ + 18(126 \cdot 78 - 62 \cdot 62) = 64824;$$

$$\bar{X}_1 = \frac{-100492}{69856} = -1,43856; \bar{X}_2 = \frac{78884}{69856} = 1,12924; \bar{X}_3 = \frac{64824}{69856} = 0,92797;$$

Выполним проверку решения системы, подставив полученные значения  $\bar{X}_i$  в расширенную матрицу системы

$$126 \cdot (-1,43856) + 62 \cdot 1,12924 + 66 \cdot 0,92797 = -49,99966 \cong -50;$$

$$62 \cdot (-1,43856) + 78 \cdot 1,12924 + 54 \cdot 0,92797 = 49,00038 \cong 49;$$

$$66 \cdot (-1,43856) + 54 \cdot 1,12924 + 56 \cdot 0,92797 = 18,00032 \cong 18.$$

Используя полученные значения, строим эпюры внутренних силовых факторов (рис. 2.4). При построении эпюры  $M(x)$  используем формулу:

$$M(x) = M_P + \sum_n X_i^{(n)} M_i^{(n)}.$$

---

<sup>7</sup> При решении системы можно использовать любой из известных методов.

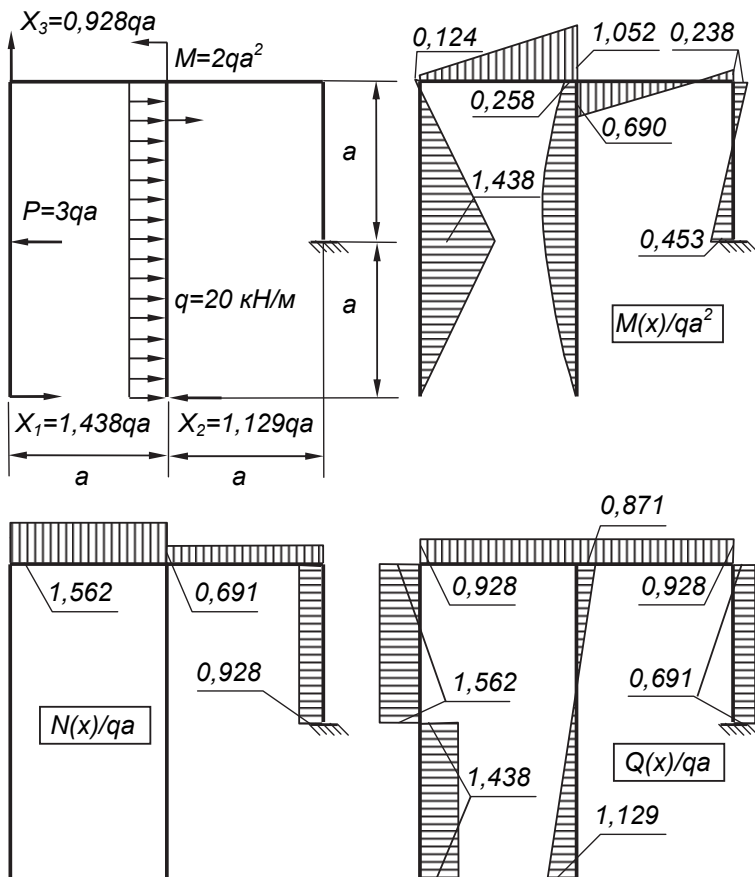


Рис. 2.4



### 2.2.3. ОБОСНОВАНИЕ ПРАВИЛЬНОСТИ РАСКРЫТИЯ СТАТИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛИМОСТИ РАМЫ СТАТИЧЕСКОЙ И КИНЕМАТИЧЕСКОЙ ПРОВЕРКАМИ

Для статической проверки рассмотрим равновесие узлов расчетной схемы (сечений, где стыкуются силовые участки балки). Из рис. 2.5 следует, что узлы расчетной схемы находятся в равновесии.

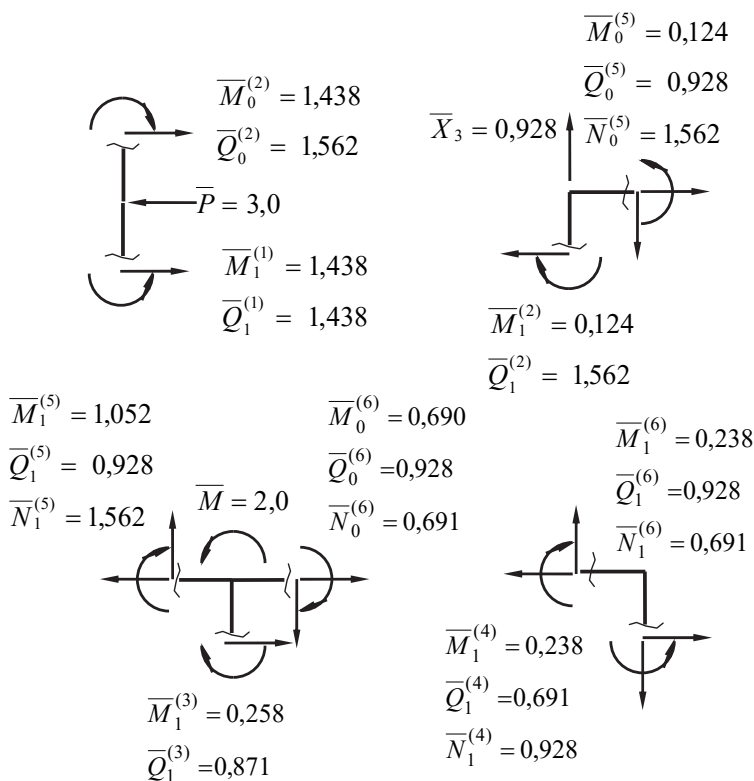


Рис. 2.5

Для выполнения кинематической проверки умножим эпюру  $M(x)$  (рис. 2.4) последовательно на эпюры от единичных сил (рис. 2.3), найдя тем самым перемещения в направлении этих сил. По смыслу метода сил эти перемещения должны быть равны нулю.

$$\begin{aligned}
& \sum \int \frac{\overline{M}^{(n)}(x) \overline{M}_1^{(n)}}{\overline{EJ}^{(n)}} dx = \\
& = \frac{0,124 + 1,052}{2} \cdot 1 \cdot 2 + \frac{0,238 - 0,690}{2} \cdot 1 \cdot 2 - \frac{1}{6 \cdot 2} 2 \cdot 1,438 \cdot 1 + \\
& + \frac{1}{6 \cdot 2} (-2 \cdot 1,438 \cdot 1 + 2 \cdot 0,124 \cdot 2 - 1,438 \cdot 2 + 0,124 \cdot 1) + \\
& + \frac{1}{6 \cdot 2} (2 \cdot 0,238 \cdot 2 - 2 \cdot 0,453 \cdot 1 + 0,238 \cdot 1 - 0,453 \cdot 2) = \\
& = \frac{0,724 \cdot 12}{12} + \frac{-2,876 - 5,132 - 0,622}{12} = \frac{8,688 - 8,630}{12} = 0,005 \approx 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum \int \frac{\overline{M}^{(n)}(x) \overline{M}_2^{(n)}}{\overline{EJ}^{(n)}} dx = \frac{2}{6 \cdot 2} 2 \cdot 0,258 \cdot 2 + \frac{2^3}{12 \cdot 2} \cdot 1 + \frac{0,238 - 0,690}{2} \cdot 1 \cdot 2 + \\
& + \frac{1}{6 \cdot 2} (2 \cdot 0,238 \cdot 2 - 2 \cdot 0,453 \cdot 1 + 0,238 \cdot 1 - 0,453 \cdot 2) = \\
& = \frac{2,064}{12} + \frac{4,000}{12} - \frac{0,452 \cdot 12}{12} - \frac{0,622}{12} = \frac{5,442 - 5,424}{12} = 0,0015 \approx 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum \int \frac{\overline{M}^{(n)}(x) \overline{M}_3^{(n)}}{\overline{EJ}^{(n)}} dx = \frac{1}{2} \frac{0,238 - 0,453}{2} \cdot 1 \cdot 2 + \frac{1}{6} (2 \cdot 1,052 \cdot 1 + 0,124 \cdot 1) + \\
& + \frac{1}{6} (-2 \cdot 0,690 \cdot 1 + 2 \cdot 0,238 \cdot 2 - 0,690 \cdot 2 + 0,238 \cdot 1) = \\
& = -\frac{0,215 \cdot 3}{6} + \frac{2,228}{6} - \frac{1,570}{6} = \frac{0,013}{6} = 0,0022 \approx 0.
\end{aligned}$$

Как видим, найденные интегралы Мора с точностью вычислений равны нулю<sup>8</sup>, следовательно система (рис. 2.4) является эквивалентной заданной (рис. 2.1).

#### 2.2.4. ПОДБОР ДВУТАВРОВОГО ПРОФИЛЯ ПО ГОСТ 8239-72

Для обеспечения заданного соотношения жесткостей принимаем, что горизонтальные стержни выполнены из профиля двутаврового сечения с  $W_z^{\text{гориз}} = W_z^{\text{потр}}$ , а вертикальные – из двух таких профилей, так что  $W_z^{\text{верт}} = 2 W_z^{\text{потр}}$ . Тогда должны выполняться соотношения:

$$\begin{aligned} \sigma_{\max}^{\text{верт}} = \frac{M_{\max}^{\text{верт}}(x)}{2 W_z^{\text{потр}}} \leq [\sigma] \Rightarrow W_z^{\text{потр}} &\geq \frac{M_{\max}^{\text{верт}}(x)}{2 [\sigma]}; \\ \sigma_{\max}^{\text{гор}} = \frac{M_{\max}^{\text{гор}}(x)}{W_z^{\text{потр}}} \leq [\sigma] \Rightarrow W_z^{\text{потр}} &\geq \frac{M_{\max}^{\text{гор}}(x)}{[\sigma]}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Подставляя в (2.2) значения  $M(x)$  из эпюры (рис. 2.4), и учитывая заданные значения  $q = 20 \text{ КН/м}$ ,  $a = 1 \text{ м}$ ,  $[\sigma] = 140 \text{ МПа}$  получаем

$$\begin{cases} W_z^{\text{потр}} \geq \frac{1,438 \cdot 20 \cdot 10^3 \cdot 1^2}{2 \cdot 140 \cdot 10^6} = 102,7 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 102,7 \text{ см}^3; \\ W_z^{\text{потр}} \geq \frac{1,052 \cdot 20 \cdot 10^3 \cdot 1^2}{140 \cdot 10^6} = 150,3 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 150,3 \text{ см}^3. \end{cases} \quad (2.3)$$

Из двух значений (2.3) выбираем наибольшее, соответствующее условию прочности на горизонтальных стержнях. По ГОСТ 8239-72 [1] выбираем двутавровую балку № 18а с

---

<sup>8</sup> Погрешность не должна превышать несколько единиц последнего значащего разряда. В рассмотренном примере вычисления проводились с точностью до третьего знака после запятой и максимальная погрешность не превышает 5 единиц этого разряда.

$$W_z = 159,0 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3; \quad J_z = 1430,0 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

При этом максимальные напряжения в раме будут составлять

$$\sigma_{\max}^{\text{гор}} = \frac{M_{\max}^{\text{гор}}(x)}{W_z^{\text{потр}}} = \frac{1,052 \cdot 20 \cdot 10^3 \cdot 1^2}{159,0 \cdot 10^{-6}} = 132,3 \text{ МПа} \leq 140 \text{ МПа}.$$

### 2.2.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УГЛА ПОВОРОТА ЗАДАННОГО СЕЧЕНИЯ

Для определения угла поворота сечения в точке 3, приложим в этой точке единичный момент и построим эпюру  $M_1^*$  для основной системы (рис. 2.6).

Перемножая эпюры  $M_1^*$  и  $M(x)$  согласно рис. 2.5, получаем

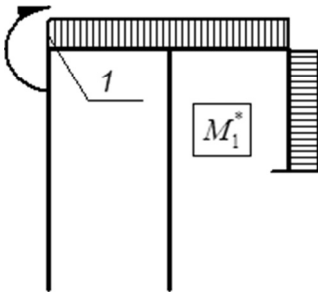


Рис. 2.6

$$\begin{aligned} \theta_3^{\circ} &= \frac{180}{\pi} \cdot \frac{qa^3}{EJ} \left( \frac{0,124 + 1,052}{2} \cdot 1 \cdot 1 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{0,238 - 0,690}{2} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{0,238 - 0,690}{2} \cdot 1 \cdot 1 \right) = \\ &= \frac{180}{\pi} \cdot \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 1^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 1430 \cdot 10^{-8}} \cdot 0,308 = 0,123^{\circ}. \end{aligned}$$

Так как в результате расчета получили положительное значение  $\theta_3^{\circ}$ , то направление угла поворота сечения в точке 3 совпадает с направлением единичного момента на рис.2.6.

### 2.2.6. ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ РАМЫ В СЛУЧАЕ ПОВРЕЖДЕНИЯ ОПОР

В процессе работы конструкции одна из опор может быть повреждена. Так как система является статически неопределимой, работоспособность конструкции будет сохранена, но при этом напряжения в раме перераспределятся, и при заданном значении  $q$  могут превысить допускаемые.

Для оценки возможности работы рамы при повреждении, например, шарнирной опоры в точке 2, следует положить неизвестное  $X_2 = 0$ , и вместо матрицы (2.1) рассматривать матрицу

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 126 & 0 & 66 & -50 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 66 & 0 & 56 & 18 \end{array} \right) \quad (2.4)$$

Решая (2.4), получаем

$$\overline{X}_1^{(2)} = \frac{-50 \cdot 56 - 18 \cdot 66}{126 \cdot 56 - 66 \cdot 66} = -\frac{3988}{2700} = -1,477;$$

$$\overline{X}_2^{(2)} = 0;$$

$$\overline{X}_3^{(2)} = \frac{50 \cdot 66 + 18 \cdot 126}{126 \cdot 56 - 66 \cdot 66} = -\frac{5568}{2700} = 2,062.$$

Здесь верхний индекс у  $X_i$  указывает на номер поврежденной опоры.

Далее следует построить эпюру  $M(x)$  и посчитать напряжения в поврежденной конструкции.

В связи с большим объемом вычислений была составлена программа, текст и описание которой приводится в приложении 2, по которой были выполнены расчеты. Результаты расчетов показаны на рис. 2.7 в виде эпюр изгибных напряжений, которые подсчитывались

по формуле  $\sigma_{\text{изг}}(x) = \frac{M(x)}{W^{(n)}}.$

Из графиков видно, что при повреждении опоры 1 максимальные напряжения составляют 374,4 МПа, что в  $374,4/140 = 2,674$  раза превышает допускаемые напряжения. Следовательно для безопасной эксплуатации поврежденной конструкции необходимо во столько же раз снизить эксплуатационную нагрузку. При этом она будет  $[q]^{(I)} = 20/2,674 = 7, \text{ кН/м}.$

Аналогичные результаты получаются и при повреждении опоры 2. Максимальные напряжения 265,2 МПа в  $265,2/140 = 1,894$  раза пре-

вышают допускаемые. Поэтому допускаемая эксплуатационная нагрузка будет  $[q]^{(II)} = 20 / 1,894 = 10,56 \text{ кН/м}$ .

Иная картина наблюдается при повреждении опоры 3. В этом случае максимальные напряжения 101,2 МПа существенно ниже допускаемых.

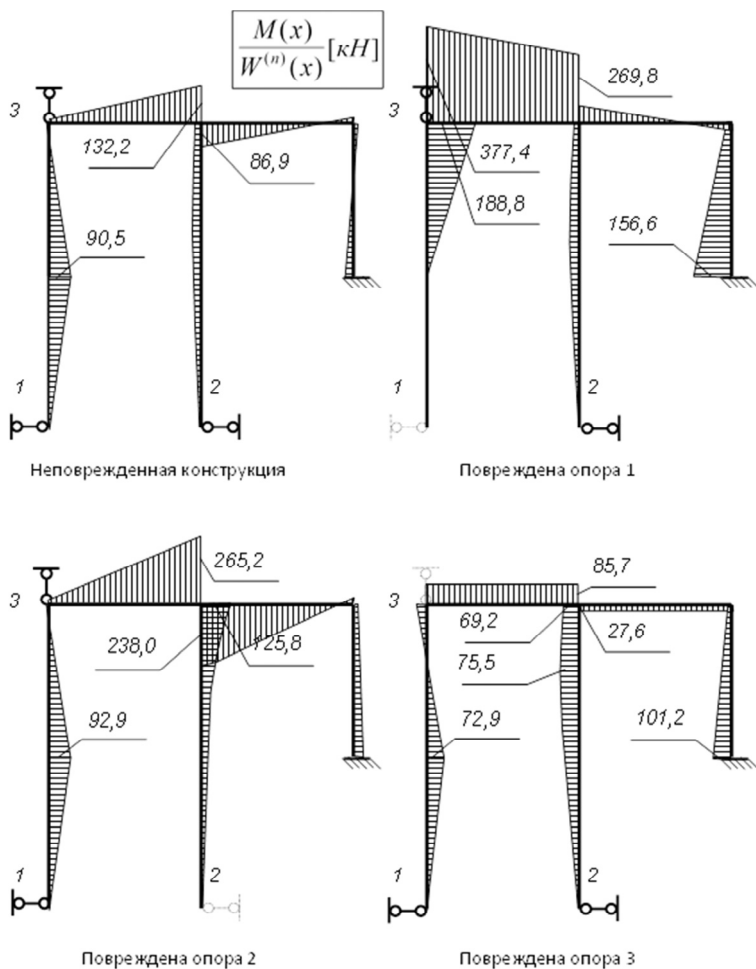


Рис. 2.7

Так что, если позволяют конструктивные особенности конструкции, эту опору желательно убрать. В этом случае  $W_z^{\text{потр}} = \frac{159 \cdot 101,2}{140} = 115,0 \text{ см}^3$ , и можно использовать швеллер № 18 с  $W_z^{\text{потр}} = 143 \text{ см}^3$ , у которого погонный вес составляет 18,4 кГ/м, вместо 19,4 кГ/м у швеллера № 18а. Выигрыш в весе составит при этом  $\frac{19,9 - 18,4}{19,9} 100 \% = 7,54 \%$ .

### 3. РАСЧЕТ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЛОМАНОГО БРУСА

#### 3.1. УСЛОВИЯ ЗАДАЧИ

Пространственный ломаный брус жестко заделан одним концом и состоит из трех прямолинейных участков. Участки перпендикулярны между собой, имеют одинаковую длину  $a$  и постоянное по длине бруса поперечное сечение в виде прямоугольника ( $b \times h$ ). Брус изготовлен из алюминиевого сплава с механическими характеристиками  $E = 7,2 \cdot 10^4$  МПа,  $G = 2,7 \cdot 10^4$  МПа,  $[\sigma] = 200$  МПа и нагружен силами в соответствии с заданной расчетной схемой (табл. 3.2). Варианты исходных данных задачи даются в табл. 3.1.

Таблица 3.1

Варианты исходных данных

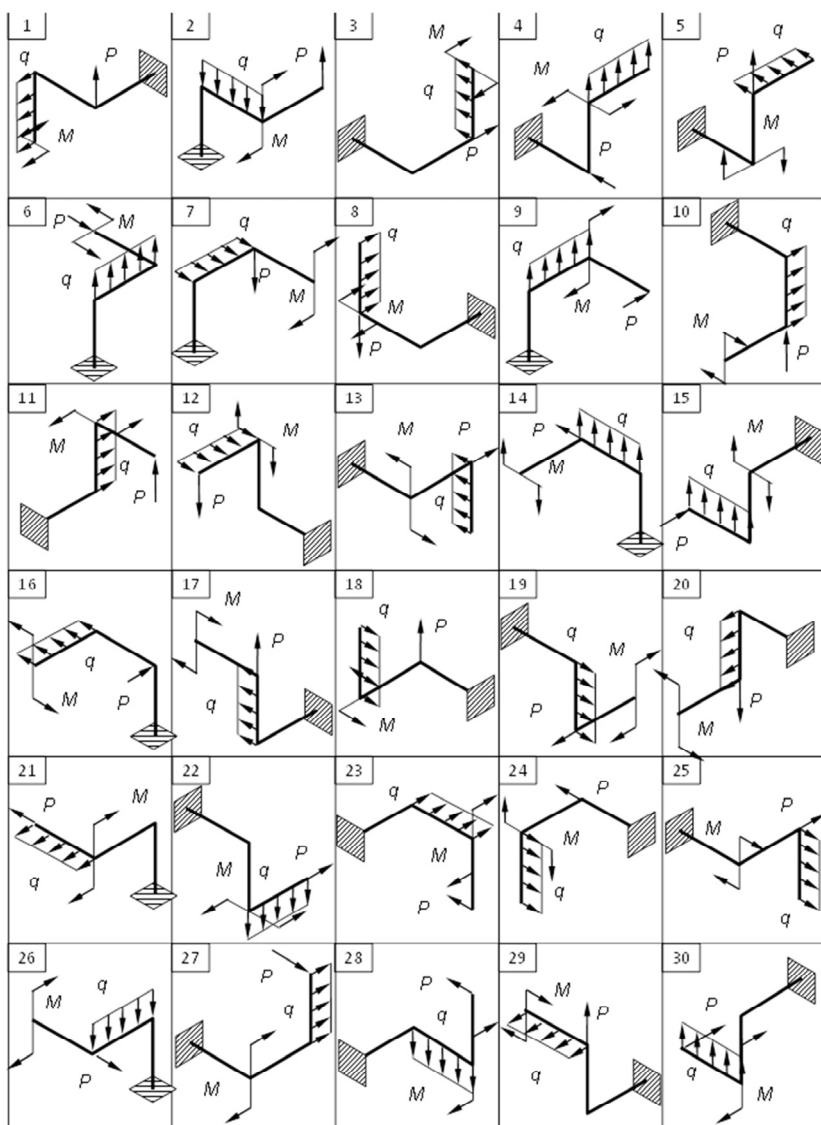
Номер варианта	Значения силовых факторов		Длина $a$ [м]	Размеры сечения	
	$P/qa$	$M/qa^2$		$b$ [м]	$h$ [м]
1	1,0	2,0	0,3	0,04	0,08
2	2,0	1,0	0,4	0,04	0,06
3	3,0	4,0	0,5	0,05	0,10
4	4,0	3,0	0,6	0,05	0,08
5	1,0	2,0	0,6	0,05	0,08
6	2,0	1,0	0,5	0,05	0,10
7	3,0	4,0	0,4	0,04	0,06
8	4,0	3,0	0,3	0,04	0,08

Требуется:

- 1) Построить эпюры всех внутренних силовых факторов.
- 2) Установить опасное сечение.



Расчетные схемы к задаче 3



3) Определить допускаемые нагрузки  $[q]$  для двух положений прямоугольного сечения из условия прочности в характерных точках опасного сечения. При вычислении эквивалентных напряжений использовать третью теорию прочности. Указать рациональное расположение сечения и соответствующую ему допускаемую нагрузку  $[q]$ .

4) Определить вертикальное перемещение свободного конца бруса при действии заданной нагрузки  $q = [q]$ , при рациональном расположении сечения. Учесть влияние всех силовых факторов. Дать анализ влияния каждого силового фактора на величину полученного перемещения.

## 3.2. ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 3

### 3.2.1. ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

Пространственный ломаный брус жестко заделан одним концом и состоит из трех прямолинейных участков. Участки перпендикулярны между собой, имеют одинаковую длину  $a$  и постоянное по длине бруса поперечное сечение в виде прямоугольника  $(b \times h)$ . Брус изготовлен из алюминиевого сплава с механическими характеристиками  $E = 7,2 \cdot 10^4$  МПа,  $G = 2,7 \cdot 10^4$  МПа,  $[\sigma] = 200$  МПа и нагружен силами в соответствии с заданной расчетной схемой (рис. 3.1). Вариант исходных данных задачи дается в табл.3.3.

Таблица 3.3

Исходные данные

Номер варианта	Значения силовых факторов		Длина $a$ [м]	Размеры сечения	
	$P/qa$	$M/qa^2$		$b$ [м]	$h$ [м]
	1,0	1,0	1,0	0,05	0,10

### 3.2.2. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ

При построении эпюр используем подвижную система координат. Для этого в пределах каждого прямолинейного участка выбираем локальную прямоугольную систему координат  $x_1z_1$ , у которой ось  $x_1$  всегда направлена вдоль бруса от заделки в сторону свободного конца, оси  $y_1, z_1$  ориентированы так, чтобы образуемая система  $x_1y_1z_1$  была бы правой и чтобы оси  $y_1, z_1$  были ориентированы одинаково для всех сечений: ось  $y_1$  направлена везде вдоль большей стороны прямоугольника, а ось  $z_1$  – вдоль наименьшей стороны или наоборот (см. рис. 3.1, 3.5).

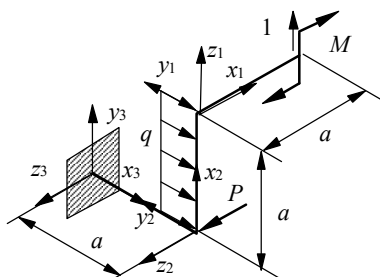


Рис 3.1

Правило знаков у  $Q_y, Q_z$  берется аналогичным правилу знаков для перерезывающих сил при построении эпюр у плоской рамы. У нормальных сил и крутящих моментов правило знаков аналогично правилу знаков [1]. Положительные значения  $Q_y, Q_z$  откладываются на прямолинейных участках бруса в сторону положительных направлений осей  $y, z$ , а эпюры изгибающих моментов  $M_y, M_z$  строятся на сжатых волокнах в соответствующих плоскостях.

Эпюры нормальных  $N$  и перерезывающих сил –  $Q_y, Q_z$ , крутящих  $M_{\text{кр}}$  и изгибающих  $M_y, M_z$  моментов от заданных внешних сил показаны на рис. 3.2.

Для определения вертикального перемещения свободного конца бруса прикладываем к концу бруса единичную силу в направлении оси  $z_1$ . Эпюры внутренних силовых факторов от этой силы показаны на рис. 3.3.

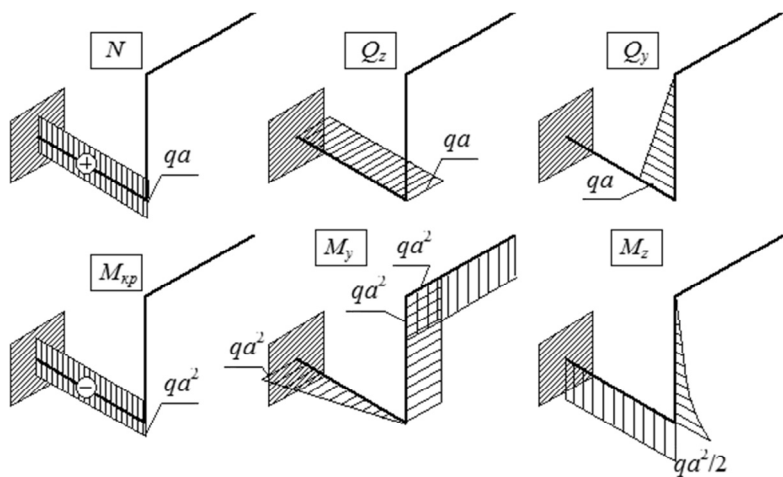


Рис. 3.2

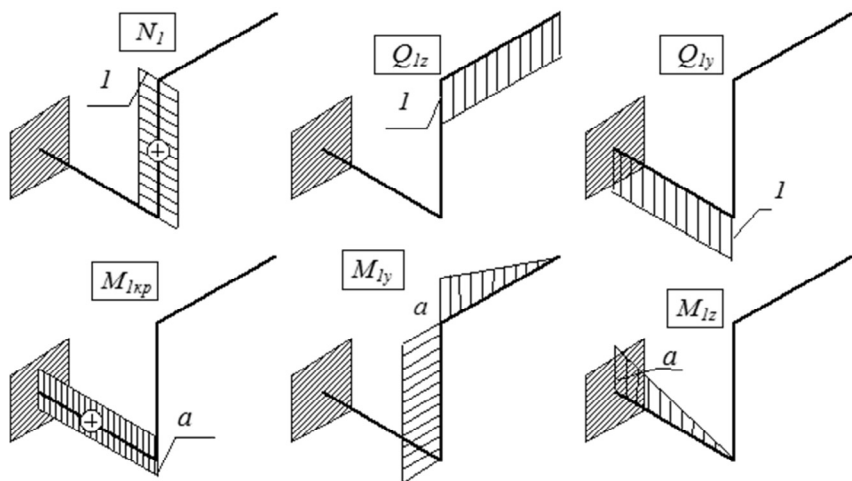


Рис. 3.3

### 3.2.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПАСНОГО СЕЧЕНИЯ БРУСА

Для выявления наиболее опасных сечений составляем табл. 3.4 значений силовых факторов на концах прямолинейных участках бруса.

Таблица 3.4

Значения внутренних силовых факторов

Сечение	$N$	$Q_y$	$Q_z$	$M_{кр}$	$M_y$	$M_z$
$x_1 = a$	0	0	0	0	$qa^2$	0
$x_1 = 0$	0	0	0	0	$qa^2$	0
$x_2 = a$	0	0	0	0	$qa^2$	0
$x_2 = 0$	0	$qa$	0	0	$qa^2$	$0,5 qa^2$
$x_3 = a$	$qa$	0	$-qa$	$-qa^2$	0	$0,5 qa^2$
$x_3 = 0$	$qa$	0	$-qa$	$-qa^2$	$qa^2$	$0,5 qa^2$

Из таблицы видно, что наиболее опасным является сечение  $x_3 = 0$ , соответствующее заделке, так как в этом сечении присутствует наибольшее количество силовых факторов.

### 3.2.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНОГО РАСПОЛОЖЕНИЯ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ И ДОПУСКАЕМОЙ НАГРУЗКИ

В сечении  $x_3 = 0$  (рис. 3.4, 3.5) действуют следующие внутренние силовые факторы:

$$N = qa, \quad Q_y = 0, \quad Q_z = -qa, \quad M_{кр} = -qa^2, \quad M_y = qa^2, \quad M_z = 0,5 qa^2$$

Рассмотрим первое положение прямоугольного сечения высота  $h$  ориентирована вдоль оси  $y$  (рис. 3.4):

$$\sigma_N = \frac{N}{F} = \frac{qa}{bh} = \frac{a^2}{bh} \frac{q}{a} = \frac{1^2}{0,05 \cdot 0,1} \frac{q}{a} = 200 \frac{q}{a};$$

$$(\sigma_{M_y})_{\max} = \frac{M_y}{W_y} = \frac{6qa^2}{hb^2} = \frac{6 \cdot 1^3}{0,1 \cdot 0,05^2} \frac{q}{a} = 24000 \frac{q}{a};$$

$$(\sigma_{M_z})_{\max} = \frac{M_z}{W_z} = \frac{6 \cdot 0,5 \cdot qa^2}{bh^2} = \frac{6 \cdot 0,5 \cdot 1^3}{0,05 \cdot 0,1^2} \frac{q}{a} = 6000 \frac{q}{a};$$

$$(\tau_{Q_z})_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{|Q_z|}{F} = \frac{3}{2} \cdot \frac{qa}{bh} = \frac{3 \cdot 1^2}{2 \cdot 0.05 \cdot 0.1} \frac{q}{a} = 300 \frac{q}{a};$$

$$(\tau_{M_{kp}})_{\max} = \frac{|M_{kp}|}{W_{kp}} = \frac{qa^2}{\alpha hb^2} = \frac{1^3}{0.246 \cdot 0.1 \cdot 0.05^2} \frac{q}{a} = 16260 \frac{q}{a};$$

$$\tau_{kp}^1 = \eta (\tau_{M_{kp}})_{\max} = 0.795 \cdot 16260 \frac{q}{a} = 12926 \frac{q}{a}.$$

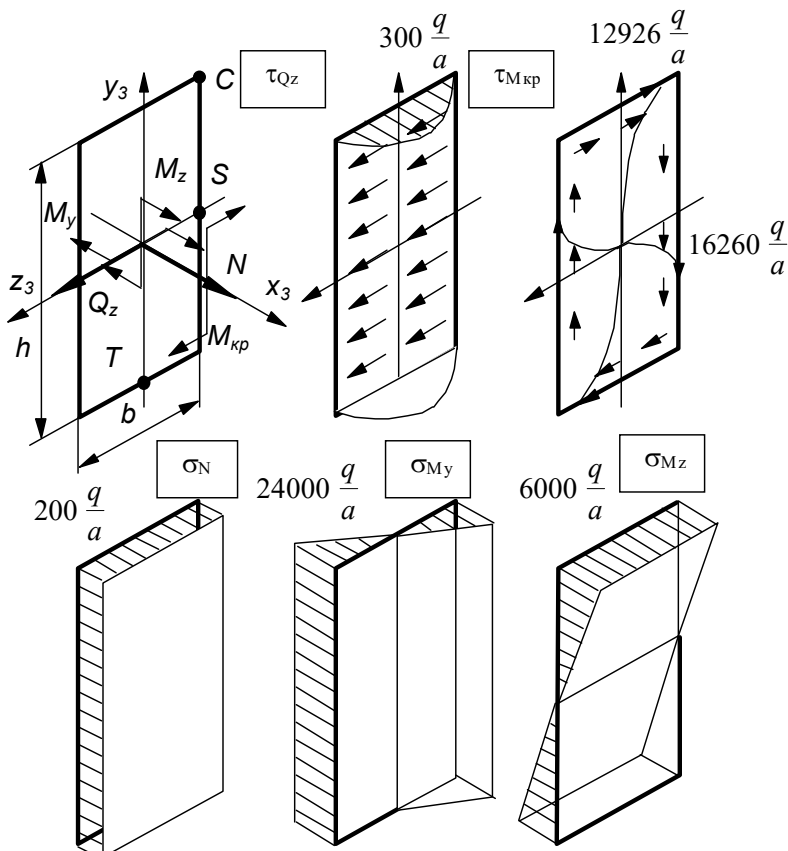


Рис. 3.4

При определении  $\alpha$  и  $\eta$  использовались данные из справочника

$$\frac{h}{b} = 2, \quad \alpha = 0.246, \quad \eta = 0.795.$$

В нашем случае опасными точками являются точки **C**, **T**, **S** (рис. 3.4).  
Точка **C**:

$$\sigma_C = \sigma_N + (\sigma_{M_y})_{\max} + (\sigma_{M_z})_{\max} = (200 + 24000 + 6000) \frac{q}{a} = 30200 \frac{q}{a},$$

$$\tau_C = 0, \quad \sigma_{\text{ЭКВ}} = \sigma_C.$$

Точка **T**:

$$\sigma_T = \sigma_N + (\sigma_{M_z})_{\max} = (200 - 6000) \frac{q}{a} = -5800 \frac{q}{a},$$

$$\tau_T = (\tau_{Q_z})_{\max} + \tau_{M_{\text{кр}}} = (300 + 12926) \frac{q}{a} = 13226 \frac{q}{a},$$

$$\sigma_{T_{\text{ЭКВ}}} = \sqrt{\sigma_T^2 + 4\tau_T^2} = \frac{q}{a} \sqrt{(-5800)^2 + 4 \cdot 13226^2} = 27080 \frac{q}{a}.$$

Точка **S**:

$$\sigma_S = \sigma_N + (\sigma_{M_y})_{\max} = (200 + 24000) \frac{q}{a} = 24200 \frac{q}{a},$$

$$\tau_S = (\tau_{M_x})_{\max} = 16260 \frac{q}{a},$$

$$\sigma_{S_{\text{ЭКВ}}} = \sqrt{\sigma_S^2 + 4\tau_S^2} = \frac{q}{a} \sqrt{24200^2 + 4 \cdot 16260^2} = 40536,5 \frac{q}{a}.$$

Наиболее опасной из всех точек расчетного поперечного сечения является точка **S**.

Из условия  $\sigma_{S_{\text{ЭКВ}}} \leq [\sigma]$ , найдем допускаемую нагрузку  $[q]_I$

$$40536,5 \frac{[q]_I}{a} \leq 200 \cdot 10^6, \quad [q]_I \leq 4933,8 \text{ Н/м} \cong 4,93 \text{ кН/м}.$$

Рассмотрим второе положение прямоугольного поперечного сечения, когда высота  $h$  ориентирована вдоль оси  $z_3$ , (рис. 3.5):

$$\sigma_N = \frac{N}{F} = \frac{aq}{bh} = 200 \frac{q}{a}; \quad (\sigma_{M_y})_{\max} = \frac{M_y}{W_y} = \frac{6qa^2}{bh^2} = \frac{6 \cdot 1^3}{0.05 \cdot 0.1^2} \frac{q}{a} = 12000 \frac{q}{a};$$

$$(\sigma_{M_z})_{\max} = \frac{M_z}{W_z} = \frac{6 \cdot 0.5qa^2}{hb^2} = \frac{6 \cdot 0.5 \cdot 1^3}{0.1 \cdot 0.05^2} \frac{q}{a} = 12000 \frac{q}{a};$$

$$(\tau_{Q_z})_{\max} = \frac{3}{2} \frac{|Q_z|}{F} = \frac{3a}{2bh} q = \frac{3 \cdot 1^2}{2 \cdot 0.05 \cdot 0.1} \frac{q}{a} = 300 \frac{q}{a};$$

$$(\tau_{M_{\text{кр}}})_{\max} = \frac{|M_{\text{кр}}|}{W_{\text{кр}}} = \frac{qa^2}{\alpha hb^2} = \frac{1^3}{0.246 \cdot 0.1 \cdot 0.05^2} \frac{q}{a} = 16260 \frac{q}{a};$$

$$\tau'_{M_{\text{кр}}} = \eta (\tau_{M_{\text{кр}}})_{\max} = 0.795 \cdot 16260 \frac{q}{a} = 12926 \frac{q}{a}.$$

Эпюры напряжений изображены на рис. 3.5.

Определяем эквивалентные напряжения в опасных точках поперечного сечения бруса **C**, **T**, **S**.

Точка **C**.

$$\sigma_C = \sigma_N + (\sigma_{M_y})_{\max} + (\sigma_{M_z})_{\max} = (200 + 12000 + 12000) \frac{q}{a} = 24200 \frac{q}{a},$$

$$\tau_C = 0, \quad \sigma_{C \text{ экв}} = \sigma_C.$$

Точка **T**.

$$\sigma_T = \sigma_{NT} + (\sigma_{M_z})_{\max} = (200 - 12000) \frac{q}{a} = -11800 \frac{q}{a},$$

$$\tau_T = (\tau_{Q_z})_{\max} + (\tau_{M_x})_{\max} = (300 + 16260) \frac{q}{a} = 16560 \frac{q}{a},$$

$$\sigma_{T \text{ экв}} = \sqrt{\sigma_T^2 + 4\tau_T^2} = \frac{q}{a} \sqrt{(-11800)^2 + 4 \cdot 16560^2} = 34594.7 \frac{q}{a}.$$



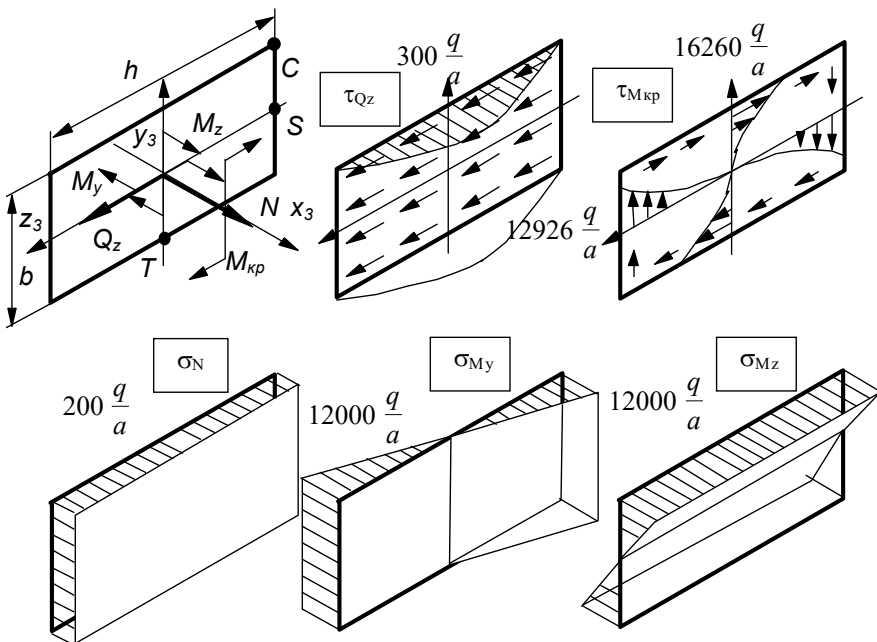


Рис. 3.5

Точка  $S$ .

$$\sigma_S = \sigma_N + (\sigma_{M_y})_{\max} = (200 + 12000) \frac{q}{a} = 12200 \frac{q}{a},$$

$$\tau_S = \tau'_{M_x} = 12926q,$$

$$\sigma_{S_{\text{экв}}} = \sqrt{\sigma_S^2 + 4\tau_S^2} = \frac{q}{a} \sqrt{12200^2 + 4 \cdot 12926^2} = 28587.6 \frac{q}{a}.$$

Наиболее опасной является точка  $T$ . Допускаемую нагрузку найдем из условия прочности в точке  $T$ :

$$\sigma_{T_{\text{экв}}} \leq [\sigma], \quad 34594,7 \frac{[q]_{II}}{a} \leq 200 \cdot 10^6,$$

$$[q]_{II} \leq 5781,2 \text{ Н/м} = 5,7812 \approx 5,78 \text{ кН/м}.$$

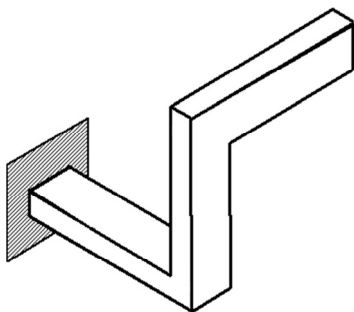


Рис. 3.6

Сравнивая значения допускаемых нагрузок  $[q]_I$  и  $[q]_{II}$ , заключаем, что рациональным является второе положение прямоугольного поперечного сечения, при котором высота  $h$  на участке 3 (рис. 3.5) ориентирована вдоль оси  $z$ .

Допускаемая нагрузка  $[q]$  при рациональном расположении сечения

$$[q] = [q]_{II} = 5781,2 \text{ Н/м} \approx 5,78 \text{ кН/м.}$$

Рациональное положение сечения показано на рис. 3.6.

### 3.2.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРТИКАЛЬНОГО ПЕРЕМЕЩЕНИЯ СВОБОДНОГО КОНЦА БРУСА

Вертикальное перемещение  $\Delta$  свободного конца бруса под действием заданной нагрузки

$$\Delta = \Delta_N + \Delta_Q + \Delta_{M_{кр}} + \Delta_{M_{изг}};$$

где 
$$\Delta_N = \sum \int \frac{N \cdot N_1}{EF} dx, \quad \Delta_Q = \sum \int \frac{k_y Q_y Q_{1y}}{GF} dx + \sum \int \frac{k_z Q_z Q_{1z}}{GF} dx,$$

$$\Delta_{M_{кр}} = \sum \int \frac{M_{кр} \cdot M_{1кр}}{GJ_{кр}} dx, \quad \Delta_{M_{изг}} = \sum \int \frac{M_y M_{1y}}{EJ_y} dx + \sum \int \frac{M_z M_{1z}}{EJ_z} dx.$$

Интегрирование ведется по всем участкам ломаного бруса.

1. Определяем геометрические характеристики поперечного сечения бруса.

Так как на всех участках высота поперечного сечения  $h$  ориентирована вдоль оси  $z$  (см. рис. 3.6), то главные центральные моменты инерции  $J_z, J_y$  постоянны для всех участков бруса:

$$J_z = \frac{hb^3}{12} = \frac{0,1 \cdot 0,05^3}{12} = 104,166 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$J_y = \frac{bh^3}{12} = \frac{0,05 \cdot 0,1^3}{12} = 416,666 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$J_{кр} = \beta hb^3 = 0,229 \cdot 0,1 \cdot 0,05^3 = 286,25 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$F = bh = 0,05 \cdot 0,1 = 0,005 \text{ м}^2.$$

Для прямоугольного поперечного сечения  $k_y = k_z = 1,2$ .

2. Определяем вертикальное перемещение с помощью интегралов Мора и способа Верещагина.

Приняв нагрузку  $q$  равной допускаемой величине при рациональном расположении сечения  $q = 5781,2 \text{ Н/м}$ , вычисляем интегралы по методу Верещагина. Для этого перемножим эпюры, приведенные на рис. 3.2 и 3.3.

$$\Delta_N = 0; \Delta_Q = 0;$$

$$\begin{aligned} \Delta_{M_{кр}} &= -\frac{1}{GJ_{кр}} qa^2 \cdot a \cdot a = -\frac{qa^4}{GJ_{кр}} = -\frac{5781,2 \cdot 1^4}{2,7 \cdot 10^{10} \cdot 286,25 \cdot 10^{-8}} = \\ &= -7,48 \cdot 10^{-2} \text{ м.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{M_{изг}} &= \frac{-1}{EJ_y} \left( qa^2 \cdot a \cdot \frac{1}{2} a + qa^2 \cdot a \cdot a \right) - \frac{1}{EJ_z} \cdot \frac{1}{2} qa^2 \cdot a \cdot \frac{a}{2} = \\ &= -\frac{qa^4}{2E} \left( \frac{3}{J_y} + \frac{1}{2J_z} \right) = -\frac{5781,2 \cdot 1^4}{2 \cdot 7,2 \cdot 10^{10}} \left( \frac{3}{416,7 \cdot 10^{-8}} + \frac{1}{2 \cdot 104,2 \cdot 10^{-8}} \right) = \\ &= -4,82 \cdot 10^{-2} \text{ м.} \end{aligned}$$

$$\Delta = -7,48 \cdot 10^{-2} - 4,82 \cdot 10^{-2} = -12,3 \cdot 10^{-2} \text{ м} = -12,3 \text{ см.}$$

Так как полученное значение  $\Delta < 0$ , то действительное направление вертикального перемещения свободного конца бруса противоположно направлению единичной силы (рис. 3.1), и направлено против оси  $z_1$ .

## ПРОГРАММА ДЛЯ РАСЧЕТА МНОГОПРОЛЕТНОЙ БАЛКИ

Ниже приводится текст программы на языке ФОРТРАН

```

DIMENSION XI(20),AMI(20),PI(20),QI(20),NWR(20)
      CHARACTER(80) TEXT

C      ВВОД ИСХОДНЫХ ДАННЫХ

      OPEN (UNIT = 4, FILE = 'INZAD1.TXT')

C      ИДЕНТИФИКАЦИОННАЯ СТРОКА
      READ (4, '(A80)') TEXT

C      КОЛИЧЕСТВО УЗЛОВ,
C      КООРДИНАТА, МОМЕНТ, СИЛА, РАСПРЕД. НАГРУЗКА, ШАГ ДЛЯ ВЫ-
ДАЧИ
      READ (4, 100) NUZ, (XI(I),AMI(I),PI(I),QI(I),I=1,NUZ)
100    FORMAT (I10/(4E10.0))
C      НОМЕРА ЗАКРЕПЛЕННЫХ УЗЛОВ
      READ (4, 110) NZ1,NZ2
110    FORMAT (2I10)
C      МОДУЛЬ УПРУГОСТИ, МОМЕНТ ИНЕРЦИИ, КОЛ-ВО ТОЧЕК ДЛЯ ВЫДАЧИ
      READ (4, 120) E,AJ
120    FORMAT (2E10.0)
      READ (4, 130) (NWR(I),I=1,NUZ-1)
130    FORMAT (I10)
      CLOSE (4)

C      ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПОРНЫХ РЕАКЦИЙ
      EJ = E*AJ
      PI(NZ1) = 0.0
      PI(NZ2) = 0.0
      R1 =( QТЕК (XI(NUZ),1,NUZ,XI,PI,QI) *(XI(NUZ) - XI(NZ2))
-
      *      АМТЕК(XI(NUZ),1,NUZ,XI,AMI,PI,QI)) /
      *      (XI(NZ2) - XI(NZ1))
      R2 =(-QТЕК (XI(NUZ),1,NUZ,XI,PI,QI) *(XI(NUZ) - XI(NZ1)) +
      *      АМТЕК(XI(NUZ),1,NUZ,XI,AMI,PI,QI)) /
      *      (XI(NZ2) - XI(NZ1))
      PI(NZ1) = R1
      PI(NZ2) = R2

```

```

C      ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПОСТОЯННЫХ V0, ТЕТА0
      V0 = (VTEK(XI(NZ2),0.0,0.0,EJ,NUZ,XI,AMI,PI,QI)*XI(NZ1) -
*
VTEK(XI(NZ1),0.0,0.0,EJ,NUZ,XI,AMI,PI,QI)*XI(NZ2))/
*      (XI(NZ2) - XI(NZ1))
      T0 = (VTEK(XI(NZ1),0.0,0.0,EJ,NUZ,XI,AMI,PI,QI) -
*      VTEK(XI(NZ2),0.0,0.0,EJ,NUZ,XI,AMI,PI,QI))/
*      (XI(NZ2) - XI(NZ1))

C      ВЫВОД РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТА
      OPEN (UNIT = 4, FILE = 'OUTZAD1.TXT')
C      ИДЕНТИФИКАЦИОННАЯ СТРОКА
      WRITE (4, '(A80)') ТЕХТ
C      ЗАГОЛОВОК ДЛЯ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ
      WRITE (4, '(1X)')
      WRITE (4,*)
*      '                                ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ'
      WRITE (4, '(1X)')
      WRITE (4,*)
*      '          X[м]          М[кНм]          Р[кН]          q[кН/м]'
      WRITE (4,310)
*      (I,XI(I),AMI(I)*1E-3,PI(I)*1E-3,QI(I)*1E-3, I=1,NUZ)
310  FORMAT (I3,5X,F8.3,5X,3F10.2)
C      ЗАГОЛОВОК ДЛЯ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТОВ
      WRITE (4, '(1X)')
      WRITE (4,*)
*      '                                РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ'
      WRITE (4, '(1X)')
      WRITE (4,*)
*      '          X[м]          Q[кН]          М[кНм]          ТЕТА0[град]          V0[мм]'

C      ЦИКЛ ПО СИЛОВЫМ УЧАСТКАМ

      DO 2 N = 1,NUZ-1
      WRITE (4,330)
330  FORMAT (60('-'))
      DX = (XI(N+1) - XI(N))/NWR(N)
      DO 1 I = 0,NWR(N)
      X = XI(N) + I*DX
      LEFT = 1
      IF (I .EQ. NWR(N)) LEFT = -1
      WRITE (4,340) X,
*      QTEK(X,LEFT,NUZ,XI,PI,QI)*1E-3,
*      AMTEK(X,LEFT,NUZ,XI,AMI,PI,QI)*1E-3,

```

```

*      TETATEK(X,T0,EJ,NUZ,XI,AMI,PI,QI)*(180/3.1415926),
*      VTEK(X,V0,T0,EJ,NUZ,XI,AMI,PI,QI)*1E3
340  FORMAT (1X,F8.3,5X, 2F10.2, 5X, 2F9.3)
1    CONTINUE
2    CONTINUE
    WRITE (4,330)
    CLOSE (4)
    END

C    ПОДПРОГРАММА ВЫЧИСЛЕНИЯ Q(x)
    FUNCTION QTEK(X,LEFT,NUZ,XI,PI,QI)
    DIMENSION XI(1),PI(1),QI(1)
    QTEK = 0
    XR = X + LEFT*0.001
    DO 1 N = 1,NUZ
    IF (XI(N) .GT. XR) RETURN
1  QTEK = QTEK + PI(N) + QI(N)*(X - XI(N))
    RETURN
    END

C    ПОДПРОГРАММА ВЫЧИСЛЕНИЯ M(x)
    FUNCTION AMTEK(X,LEFT,NUZ,XI,AMI,PI,QI)
    DIMENSION XI(1),AMI(1),PI(1),QI(1)
    AMTEK = 0
    XR = X + LEFT*0.001
    DO 1 N = 1,NUZ
    IF (XI(N) .GT. XR) RETURN
1  AMTEK = AMTEK +
*      AMI(N) +
*      PI(N)*(X - XI(N)) +
*      QI(N)*(X - XI(N))**2/2.0
    RETURN
    END

C    ПОДПРОГРАММА ВЫЧИСЛЕНИЯ TETA(x)
    FUNCTION TETATEK(X,TETA0,EJ,NUZ,XI,AMI,PI,QI)
    DIMENSION XI(1),AMI(1),PI(1),QI(1)
    TETATEK = TETA0
    DO 1 N = 1,NUZ
    IF (XI(N) .GT. X) RETURN
1  TETATEK = TETATEK + (
*      AMI(N)*(X - XI(N)) +
*      PI(N)*(X - XI(N))**2/2.0 +
*      QI(N)*(X - XI(N))**3/6.0)/EJ
    RETURN
    END

```

```

С      ПОДПРОГРАММА ВЫЧИСЛЕНИЯ V(x)
      FUNCTION VTEK(X,V0,TETA0,EJ,NUZ,XI,AMI,PI,QI)
      DIMENSION XI(1),AMI(1),PI(1),QI(1)
      VTEK = V0 + TETA0*X
      DO 1 N = 1,NUZ
      IF (XI(N) .GT. X) RETURN
1 VTEK = VTEK + (
*      AMI(N)*(X - XI(N))**2/2.0 +
*      PI(N)*(X - XI(N))**3/6.0 +
*      QI(N)*(X - XI(N))**4/24.0)/EJ
      RETURN
      END

```

Для работы программы должен быть задан файл исходных данных под именем 'INZAD1.TXT', текст которого для рассматриваемого варианта приводится ниже:

```

ИВАНОВ И.И.  ГР.  ПС-70  ВАР.  30
4                                     //КОЛ-ВО УЗЛОВ РАСЧ. СХЕМЫ
0.0,   0.0,       0.0,   -30.0Е3      //xi, mi, pi, qi
1.6,   0.0,   -10.0Е3,    0.0
3.2,   0.0,       0.0,   30.0Е3
4.0,  40.0Е3,    0.0,    0.0
1,  3                                     //НОМЕРА ЗАКРЕПЛЕННЫХ УЗЛОВ
2.0Е11,   2790Е-8                       //Е, Jz
8
8                                     //КОЛ-ВО ИНТЕРВАЛОВ ДЛЯ ВЫДАЧИ
4

```

Первая строка содержит идентификатор конкретной задачи. Во второй строке нужно указать количество точек  $n$ , определяющих границы силовых участков(узлы расчетной схемы). Следующие  $n$  строк содержат информацию о координате  $x$ , и внешних нагрузках, приложенных в этом узле. Далее идут две строки, где указаны номера узлов с опорами и значение модуля и момента инерции сечения. Последние  $n-1$  строк определяют количество точек на силовом участке, в которых программа должна выдать результаты расчетов.

Результаты расчета записываются в файл 'OUTZAD1.TXT'. В процессе решения программа определяет опорные реакции и при выдаче они рассматриваются как заданные внешние нагрузки. Ниже приводится распечатка файла 'OUTZAD1.TXT' для рассматриваемой задачи.

```

ИВАНОВ И.И.  ГР.  ПС-70  ВАР.  30

```

ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

	X[м]	M[кНм]	P[кН]	q[кН/м]
1	.000	.00	40.50	-30.00
2	1.600	.00	-10.00	.00
3	3.200	.00	65.50	30.00
4	4.000	40.00	.00	.00

# РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

X[м]	Q[кН]	M[кНм]	ТЕТА0 [град]	V0 [мм]
-----				
.000	40.50	.00	-.267	.000
.200	34.50	7.50	-.259	-.924
.400	28.50	13.80	-.237	-1.794
.600	22.50	18.90	-.203	-2.566
.800	16.50	22.80	-.160	-3.204
1.000	10.50	25.50	-.111	-3.679
1.200	4.50	27.00	-.057	-3.971
1.400	-1.50	27.30	-.001	-4.071
1.600	-7.50	26.40	.055	-3.976
-----				
1.600	-17.50	26.40	.055	-3.976
1.800	-23.50	22.30	.105	-3.695
2.000	-29.50	17.00	.146	-3.254
2.200	-35.50	10.50	.174	-2.693
2.400	-41.50	2.80	.188	-2.057
2.600	-47.50	-6.10	.185	-1.401
2.800	-53.50	-16.20	.162	-.790
3.000	-59.50	-27.50	.117	-.296
3.200	-65.50	-40.00	.048	.000
-----				
3.200	.00	-40.00	.048	.000
3.400	.00	-40.00	-.034	.025
3.600	.00	-40.00	-.116	-.237
3.800	.00	-40.00	-.198	-.786
4.000	.00	-40.00	-.280	-1.621
-----				



## ПРОГРАММА ДЛЯ РАСЧЕТА СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ ПЛОСКОЙ РАМЫ

Ниже приводится текст программы на языке ФОРТРАН

```

COMMON E,AJ,W,A,Q,
*      NGR, NX,
*      EJI_(20),ALI_(20),QI_(20),
*      AMIJ0_(20,21),AMIJ1_(20,21)

      DIMENSION A_(20,20), B_(20), NOUT(20)
      DIMENSION A1(20,20), B1(20)
      DIMENSION AMXIJ_(20,3),XIJ_(20,3),
*      AMXIJ_(20,3),XIJ_(20,3)

      CHARACTER(80) TEXT

C      ВВОД ИСХОДНЫХ ДАННЫХ

      OPEN (UNIT = 4, FILE = 'INZAD2.TXT')

C      ИДЕНТИФИКАЦИОННАЯ СТРОКА
      READ (4, '(A80)') TEXT
C      МОДУЛЬ УПРУГОСТИ, МОМЕНТ ИНЕРЦИИ,
C      ХАРАКТЕРНАЯ ДЛИНА, РАСПРЕДЕЛЕННАЯ НАГРУЗКА
      READ (4, 100) E,AJ,W,A,Q
100    FORMAT (5E10.0)
C      КОЛИЧЕСТВО СИЛОВЫХ УЧАСТКОВ, КОЛИЧЕСТВО НЕИЗВЕСТНЫХ
      READ (4, 101) NGR, NX
101    FORMAT (2I10)
C      EJI_, ALI_,QI_ ПО УЧАСТКАМ
      DO I = 1,NGR
      READ (4, 102) N,EJI_(N),ALI_(N),QI_(N)
102    FORMAT (I10,3E10.0)
      END DO

      DO I = 1,NGR
      READ (4, 103) N,(AMIJ0_(N,J),AMIJ1_(N,J),J=1,NX+1)
103    FORMAT (I10,42E10.0)
      END DO

      CLOSE (4)

```

```

C      ВЫВОД ИСХОДНЫХ ДАННЫХ В ФАЙЛ

      OPEN (UNIT = 4, FILE = 'OUTZAD2.TXT')

C      ИДЕНТИФИКАЦИОННАЯ СТРОКА
      WRITE (4, '(A80)') TEXT

C      ЗАГОЛОВОК
      WRITE (4, '(1X)')
      WRITE (4, *)
*      '                                ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ'
      WRITE (4, '(1X)')
      WRITE (4,200)  E,AJ,W,A,Q
200    FORMAT (5X,'МОДУЛЬ УПРУГОСТИ:                ',E12.4/
*              5X,'МОМЕНТ ИНЕРЦИИ:                  ',E12.4/
*              5X,'МОМЕНТ СОПРОТИВЛЕНИЯ:            ',E12.4/
*              5X,'ХАРАКТЕРНАЯ ДЛИНА:                ',E12.4/
*              5X,'РАСПРЕДЕЛЕННАЯ НАГРУЗКА:          ',E12.4/)

      WRITE (4,201) NGR, NX
201    FORMAT (5X,'КОЛИЧЕСТВО СИЛОВЫХ УЧАСТКОВ:      ',I2/
*            5X,'КОЛИЧЕСТВО НЕИЗВЕСТНЫХ РЕАКЦИЙ:    ',I2/)

      WRITE (4,*)
*      'N уч-ка  EJiotn  Liotn  Qiotn'
      WRITE (4, '(1X)')
      DO I = 1,NGR
      WRITE (4, 202) I,EJI_(I),ALI_(I),QI_(I)
202    FORMAT (I5,3X,3F8.3)
      END DO

      WRITE (4, '(1X)')
      WRITE (4,*)
*      'N уч-ка      (Mij0      Mij1)'
      WRITE (4, '(1X)')

      DO I = 1,NGR
      WRITE (4, 203) I, (AMIJ0_(I,J),AMIJ1_(I,J),J=1,NX+1)
203    FORMAT (I3, 21(2X,2F7.3))
      END DO

C      ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ СИСТЕМЫ КАНОНИЧЕСКИХ УР-НИЙ

      DO I=1,NX
      B_(I) = -DLTIJ_(I,NX+1)

```

```

DO J=1,NX
A_(I,J) = DLTIJ_(I,J)
END DO
END DO

C      ВЫВОД РАСШИРЕННОЙ МАТРИЦЫ В ФАЙЛ

WRITE (4, '(1X)')
WRITE (4,*) '      КОЭФФИЦИЕНТЫ РАСШИРЕННОЙ МАТРИЦЫ'
WRITE (4, '(1X)')
DO I = 1,NX
WRITE (4, 204) (A_(I,J),J=1,NX), B_(I)
204  FORMAT (21F10.5)
END DO

KOUT = 0
DO I = 1,NX
NOUT(I) = 0.0
END DO

WRITE (4, '(1X)')
WRITE (4,*) '      НЕПОВРЕЖДЕННАЯ КОНСТРУКЦИЯ'

1      DO I=1,NX
B1(I) = B_(I)
DO J=1,NX
A1(I,J) = A_(I,J)
END DO
END DO

C      ОБНУЛЕНИЕ ОТБРОШЕННЫХ НЕИЗВЕСТНЫХ
IF (KOUT .GT. 0) THEN
DO K = 1,KOUT
B1(NOUT(K)) = 0.0
DO I=1,NX
A1(I,NOUT(K)) = 0.0
A1(NOUT(K),I) = 0.0
END DO
A1(NOUT(K),NOUT(K)) = 1.0
END DO
END IF

C      РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ КАНОНИЧЕСКИХ УР-НИЙ
CALL LEGAUS(A1,B1,20,NX)

```

C      ВЫВОД РЕШЕНИЯ СЛАУ В ФАЙЛ

```
WRITE (4, '(1X)')
WRITE (4,*) ' РЕШЕНИЕ СЛАУ'
WRITE (4, '(1X)')
205  WRITE (4, 205) (I,B1(I),I=1,NX)
      FORMAT (5X,'X['',I2,''] = ',F10.5)

PRINT *, ''
PRINT 205, (I,B1(I),I=1,NX)
```

C      ВЫЧИСЛЕНИЕ MX

```
DO I = 1,NGR
  AMXIJ_(I,1) = AMIJ0_(I,NX+1)
  AMXIJ_(I,3) = AMIJ1_(I,NX+1)
  XIJ_(I,1) = 0.
  XIJ_(I,3) = 1.
  XIJ_(I,1) = 0.
  XIJ_(I,3) = A*ALI_(I)
  DO J = 1,NX
    AMXIJ_(I,1) = AMXIJ_(I,1) + B1(J)*AMIJ0_(I,J)
    AMXIJ_(I,3) = AMXIJ_(I,3) + B1(J)*AMIJ1_(I,J)
  END DO
  AMXIJ_(I,1) = AMXIJ_(I,1)*Q*A**2/1000.
  AMXIJ_(I,3) = AMXIJ_(I,3)*Q*A**2/1000.

  R = 0.5
  IF (ABS(QI_(I)).GT.0.0001) THEN
    R = 0.5-(AMXIJ_(I,3)-AMXIJ_(I,1))/(QI_(I)*ALI_(I)**2)
    IF (R.LE.0. .OR. R.GE.1.) THEN
      R = 0.5
    END IF
  END IF
  XIJ_(I,2) = R
  AMXIJ_(I,2) =
*  AMXIJ_(I,1) + (AMXIJ_(I,3) - AMXIJ_(I,1))*R +
*  0.5*QI_(I)*ALI_(I)**2*(R-1.0)*R
  XIJ_(I,2) = A*ALI_(I)*XIJ_(I,2)
  AMXIJ_(I,2) = Q*A**2/1000.*AMXIJ_(I,2)
END DO
```

C      ВЫВОД M(X) В ФАЙЛ

```
WRITE (4, '(1X)')
WRITE (4,*)
```

```

*      РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ M(x) '
WRITE (4, ' (1X) ')
WRITE (4, *)
*      'N уч-ка  X/Li  Mi/qa**2      Xi [м]      Mi [кН]
Mi/Wi [МПа]'
WRITE (4, ' (1X) ')
DO I = 1,NGR
WRITE (4, 211)
*      I, XIJ_(I,1),AMXIJ_(I,1),XIJ(I,1),AMXIJ(I,1),
*      AMXIJ(I,1)/(1000.* EJI_(I)*W)
WRITE (4, 212)
*      XIJ_(I,2),AMXIJ_(I,2),XIJ(I,2),AMXIJ(I,2),
*      AMXIJ(I,2)/(1000.* EJI_(I)*W)
WRITE (4, 212)
*      XIJ_(I,3),AMXIJ_(I,3),XIJ(I,3),AMXIJ(I,3),
*      AMXIJ(I,3)/(1000.* EJI_(I)*W)
WRITE (4, ' (1X) ')
END DO
211  FORMAT (I2, 2(3X,F8.3,F10.4),3X,F8.1)
212  FORMAT (2X, 2(3X,F8.3,F10.4),3X,F8.1)

DO I = 1,NGR
PRINT *, ''
PRINT 211, I, XIJ_(I,1),AMXIJ_(I,1),XIJ(I,1),AMXIJ(I,1),
*      AMXIJ(I,1)/(1000.* EJI_(I)*W)
PRINT 212, XIJ_(I,2),AMXIJ_(I,2),XIJ(I,2),AMXIJ(I,2),
*      AMXIJ(I,2)/(1000.* EJI_(I)*W)
PRINT 212, XIJ_(I,3),AMXIJ_(I,3),XIJ(I,3),AMXIJ(I,3),
*      AMXIJ(I,3)/(1000.* EJI_(I)*W)
END DO

PRINT *, ' KOUT >'
READ *,KOUT
IF ((KOUT .EQ. 0) .OR. (KOUT .GT. NX)) GO TO 2
PRINT *, ' NOUT (I1,I2, ...) >'
READ *, (NOUT(I), I=1,KOUT)

WRITE (4, ' (1X) ')
WRITE (4, 206) (NOUT(I), I=1,KOUT)
206  FORMAT (' НОМЕРА ПОВРЕЖДЕННЫХ ОПОР: ',21I4)
GOTO 1

2    CLOSE (4)
END

```

C      ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ СЛАУ

```

      FUNCTION DLTIJ (I,J)
      COMMON E,AJ,W,A,Q,
      *      NGR, NX,
      *      EJI_(20),ALI_(20),QI_(20),
      *      AMIJ0_(20,21),AMIJ1_(20,21)
      DLTIJ_ = 0.0
      DO N = 1,NGR
      DLTIJ_ = DLTIJ_ + (ALI_(N)/(6.0*EJI_(N))) *
      * (2.0*AMIJ0_(N,I)*AMIJ0_(N,J) +
2.0*AMIJ1_(N,I)*AMIJ1_(N,J) +
      *      AMIJ0_(N,I)*AMIJ1_(N,J) +
AMIJ1_(N,I)*AMIJ0_(N,J))
      IF (J.EQ.NX+1) DLTIJ_ = DLTIJ_ - (1.0/EJI_(N)) *
      * (QI_(N)*ALI_(N)**3/12.0)*0.5*(AMIJ0_(N,I) +
AMIJ1_(N,I))
      END DO
      RETURN
      END

```

C      РЕШЕНИЕ СЛАУ ПО ГАУССУ

```

      SUBROUTINE LEGAUS(A,B,NA,NX)
      DIMENSION A(NA,NA),B(NA)
C      ПРЯМОЙ ХОД ПО ГАУССУ
      DO N=1,NX-1
      DO I=N+1,NX
      B(I) = B(I) - (A(I,N)/A(N,N))*B(N)
      DO J=N+1,NX
      A(I,J) = A(I,J) - (A(I,N)/A(N,N))*A(N,J)
      END DO
      END DO
      END DO
C      ОБРАТНЫЙ ХОД ПО ГАУССУ
      B(NX) = B(NX)/A(NX,NX)
      DO N=1,NX-1
      DO J=1,N
      B(NX-N) = B(NX-N) - A(NX-N,NX-N+J)*B(NX-N+J)
      END DO
      B(NX-N) = B(NX-N)/A(NX-N,NX-N)
      END DO
      END

```

Для работы программы должен быть задан файл исходных данных под именем 'INZAD2.TXT', текст которого для рассматриваемого варианта приводится ниже:

```

ИВАНОВ И.И.  ГР.  ПС-70  ВАР.  30
2E11, 1430E-8, 159E-6, 1.0, 20E3      //E,AJ,W,A,Q
6, 3                                     //NGR, NX
1, 2.0, 1.0, 0.0                       //EJi/EJ, Li/A, Qi/Q
2, 2.0, 1.0, 0.0
3, 2.0, 2.0, -1.0
4, 2.0, 1.0, 0.0
5, 1.0, 1.0, 0.0
6, 1.0, 1.0, 0.0
1, 0.0, 1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0
2, 1.0, 2.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 3.0
3, 0.0, 0.0, 0.0, 2.0, 0.0, 0.0, -2.0
4, -1.0, -2.0, -1.0, -2.0, -2.0, 2.0, 1.0
5, 2.0, 2.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 3.0
6, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 1.0, 2.0, -1.0, -1.0

```

Первая строка содержит идентификатор конкретной задачи. Во второй строке вводятся модуль упругости, момент инерции двутаврового профиля, момент сопротивления, длина участка и величина распределенной нагрузки. В третьей строке нужно указать количество силовых и число лишних неизвестных. Далее вводится информация из таблиц 2.3 и 2.4 о силовых участках и значениях эпюр безразмерных моментов.

Программа работает в интерактивном режиме. После решения задачи расчета неповрежденной конструкции, на экран выводится таблица результатов расчета. При выводе результатов для изгибающего момента значения выдаются в начале, середине и конце силового участка. Если на участке приложена распределенная нагрузка, так что эпюра изгибающего момента является квадратной параболой, и на участке имеется экстремум этой параболы, то выдается координата и значение этого экстремума. Для удобства анализа результатов

в таблице выведены также величины изгибных напряжений  $\sigma_{\text{изг}}^{(n)} = \frac{M_{\text{изг}}^{(n)}}{W^{(n)}}$ .

Далее выдается запрос ' KOUT >', на который следует ввести число поврежденных опор. После чего на запрос ' NOUT (I1,I2, ...) >' нужно через запятую ввести номера (по номерам лишних неизвестных) поврежденных опор. Выход из программы происходит при вводе KOUT = 0.

Результаты работы программы записываются в файл 'OUTZAD2.TXT'. Ниже приводится распечатка файла 'OUTZAD2.TXT' для рассматриваемой задачи.

ИВАНОВ И.И. ГР. ПС-70 ВАР. 30

# ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

МОДУЛЬ УПРУГОСТИ: .2000E+12  
 МОМЕНТ ИНЕРЦИИ: .1430E-04  
 МОМЕНТ СОПРОТИВЛЕНИЯ: .1590E-03  
 ХАРАКТЕРНАЯ ДЛИНА: .1000E+01  
 РАСПРЕДЕЛЕННАЯ НАГРУЗКА: .2000E+05  
 КОЛИЧЕСТВО СИЛОВЫХ УЧАСТКОВ: 6  
 КОЛИЧЕСТВО НЕИЗВЕСТНЫХ РЕАКЦИЙ: 3

N уч-ка	EJiotн	Liотн	Qiотн
1	2.000	1.000	.000
2	2.000	1.000	.000
3	2.000	2.000	-1.000
4	2.000	1.000	.000
5	1.000	1.000	.000
6	1.000	1.000	.000

N уч-ка	(Mij0	Mij1)						
1	.000	1.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
2	1.000	2.000	.000	.000	.000	.000	.000	3.000
3	.000	.000	.000	2.000	.000	.000	.000	-2.000
4	-1.000	-2.000	-1.000	-2.000	-2.000	-2.000	2.000	1.000
5	2.000	2.000	.000	.000	.000	1.000	3.000	3.000
6	2.000	2.000	2.000	2.000	1.000	2.000	-1.000	-1.000

## КОЭФИЦИЕНТЫ РАСШИРЕННОЙ МАТРИЦЫ

10.50000	5.16667	5.50000	-4.16667
5.16667	6.50000	4.50000	4.08333
5.50000	4.50000	4.66667	1.50000

## НЕПОВРЕЖДЕННАЯ КОНСТРУКЦИЯ

### РЕШЕНИЕ СЛАУ

X[ 1] = -1.43856  
 X[ 2] = 1.12924  
 X[ 3] = .92797

### РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ M(x)

N уч-ка	X/Li	Mi/qa**2	Xi [м]	Mi [кН]	Mi/Wi [МПа]
1	.000	.0000	.000	.0000	.0
	.500	-.7193	.500	-14.3856	-45.2
	1.000	-1.4386	1.000	-28.7712	-90.5
2	.000	-1.4386	.000	-28.7712	-90.5
	.500	-.6578	.500	-13.1568	-41.4
	1.000	.1229	1.000	2.4576	7.7
3	.000	.0000	.000	.0000	.0
	.565	.6376	1.129	12.7518	40.1
	1.000	.2585	2.000	5.1695	16.3
4	.000	.4534	.000	9.0678	28.5
	.500	.1081	.500	2.1610	6.8



	1.000	-.2373	1.000	-4.7458	-14.9
5	.000	.1229	.000	2.4576	15.5
	.500	.5869	.500	11.7373	73.8
	1.000	1.0508	1.000	21.0170	132.2
6	.000	-.6907	.000	-13.8136	-86.9
	.500	-.2267	.500	-4.5339	-28.5
	1.000	.2373	1.000	4.7458	29.8

НОМЕРА ПОВРЕЖДЕННЫХ ОПОР: 1

РЕШЕНИЕ СЛАУ

X[ 1] = .00000

X[ 2] = 1.22039

X[ 3] = -.85537

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ M(x)

N уч-ка	X/Li	Mi/qa**2	Xi [м]	Mi [кН]	Mi/Wi [МПа]
1	.000	.0000	.000	.0000	.0
	.500	.0000	.500	.0000	.0
	1.000	.0000	1.000	.0000	.0
2	.000	.0000	.000	.0000	.0
	.500	1.5000	.500	30.0000	94.3
	1.000	3.0000	1.000	60.0000	188.7
3	.000	.0000	.000	.0000	.0
	.610	.7447	1.220	14.8934	46.8
	1.000	.4408	2.000	8.8154	27.7
4	.000	2.4904	.000	49.8072	156.6
	.500	1.3802	.500	27.6033	86.8
	1.000	.2700	1.000	5.3995	17.0
5	.000	3.0000	.000	60.0000	377.4
	.500	2.5723	.500	51.4463	323.6
	1.000	2.1446	1.000	42.8926	269.8
6	.000	.5854	.000	11.7080	73.6
	.500	.1577	.500	3.1543	19.8
	1.000	-.2700	1.000	-5.3995	-34.0

НОМЕРА ПОВРЕЖДЕННЫХ ОПОР: 2

РЕШЕНИЕ СЛАУ

X[ 1] = -1.47704

X[ 2] = .00000

X[ 3] = 2.06222

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ M(x)

N уч-ка	X/Li	Mi/qa**2	Xi [м]	Mi [кН]	Mi/Wi [МПа]
1	.000	.0000	.000	.0000	.0
	.500	-.7385	.500	-14.7704	-46.4
	1.000	-1.4770	1.000	-29.5407	-92.9
2	.000	-1.4770	.000	-29.5407	-92.9

	.500	-.7156	.500	-14.3111	-45.0
	1.000	.0459	1.000	.9185	2.9
3	.000	.0000	.000	.0000	.0
	.500	-.5000	1.000	-10.0000	-31.4
	1.000	-2.0000	2.000	-40.0000	-125.8
4	.000	-.6474	.000	-12.9482	-40.7
	.500	-.4089	.500	-8.1778	-25.7
	1.000	-.1704	1.000	-3.4074	-10.7
5	.000	.0459	.000	.9185	5.8
	.500	1.0770	.500	21.5407	135.5
	1.000	2.1081	1.000	42.1630	265.2
6	.000	-1.8919	.000	-37.8370	-238.0
	.500	-.8607	.500	-17.2148	-108.3
	1.000	.1704	1.000	3.4074	21.4

НОМЕРА ПОВРЕЖДЕННЫХ ОПОР: 3

РЕШЕНИЕ СЛАУ

X[ 1] = -1.15943

X[ 2] = 1.54980

X[ 3] = .00000

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ M(x)

N уч-ка	X/Li	Mi/qa**2	Xi[m]	Mi[kH]	Mi/Wi [МПа]
1	.000	.0000	.000	.0000	.0
	.500	-.5797	.500	-11.5942	-36.5
	1.000	-1.1594	1.000	-23.1885	-72.9
2	.000	-1.1594	.000	-23.1885	-72.9
	.500	-.2391	.500	-4.7828	-15.0
	1.000	.6811	1.000	13.6230	42.8
3	.000	.0000	.000	.0000	.0
	.775	1.2009	1.550	24.0188	75.5
	1.000	1.0996	2.000	21.9920	69.2
4	.000	1.6096	.000	32.1925	101.2
	.500	.9144	.500	18.2888	57.5
	1.000	.2193	1.000	4.3850	13.8
5	.000	.6811	.000	13.6230	85.7
	.500	.6811	.500	13.6230	85.7
	1.000	.6811	1.000	13.6230	85.7
6	.000	-.2193	.000	-4.3850	-27.6
	.500	-.2193	.500	-4.3850	-27.6
	1.000	-.2193	1.000	-4.3850	-27.6

## НЕКОТОРЫЕ ФОРМУЛЫ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ КУРСОВОГО ПРОЕКТА. УНИВЕРСАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ УПРУГОЙ ЛИНИИ

При решении задачи об определении прогибов балки, имеющих несколько силовых участков, приходится интегрировать уравнение упругой линии [1] для каждого силового участка в отдельности, что приводит в конечном итоге к системе  $2N$  линейных уравнений ( $N$  – число силовых участков) для определения произвольных постоянных интегрирования. Эту процедуру можно существенно упростить, если при интегрировании уравнений воспользоваться алгоритмом универсального уравнения упругой линии.

Рассмотрим балку имеющую  $N$  силовых участков, нагруженную самоуравновешенной системой внешних нагрузок. Положительные направления нагрузок показаны на рис. ПЗ.1.

Начало системы координат совмещаем с левым (по рисунку) концом балки. Все распределенные нагрузки  $q_i$  должны заканчиваться на правом конце балки. Если для какой либо нагрузки это условие не выполняется, вводим фиктивную нагрузку так, как это показано на рис. ПЗ.2.

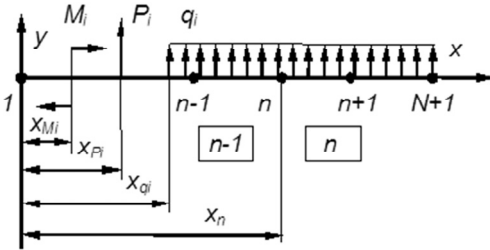


Рис. ПЗ.1

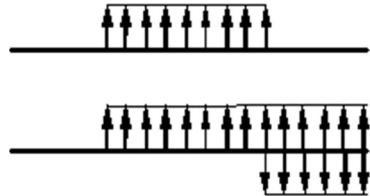


Рис. ПЗ.2

Для силового участка  $n-1$  ( $x_{n-1} < x < x_n$ ) выражение для изгибающего момента можно представить в виде:

$$M^{(n-1)} = \sum_i M_i + \sum_i P_i (x - x_{Pi}) + \sum_i q_i \frac{(x - x_{qi})^2}{2},$$

где под знаком сумм учитываются все силовые факторы, приложенные левее рассматриваемого сечения.

Интегрируя дважды дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2 v^{(n-1)}}{dx^2} = \frac{M^{(n-1)}}{EJ^{(n-1)}};$$

получаем:

$$\begin{aligned}\theta^{(n-1)} &= \theta_0^{(n-1)} + \frac{1}{EJ^{(n-1)}} \left\{ \sum_i M_i \frac{(x-x_{Mi})^1}{1!} + \sum_i P_i \frac{(x-x_{Pi})^2}{2!} + \sum_i q_i \frac{(x-x_{qi})^3}{3!} \right\} = \\ &= \theta_0^{(n-1)} + \frac{\bar{\theta}^{(n-1)}}{EJ^{(n-1)}};$$

$$\begin{aligned}v^{(n-1)} &= v_0^{(n-1)} + \frac{1}{EJ^{(n-1)}} \left\{ \sum_i M_i \frac{(x-x_{Mi})^2}{2!} + \sum_i P_i \frac{(x-x_{Pi})^3}{3!} + \sum_i q_i \frac{(x-x_{qi})^4}{4!} \right\} = \\ &= v_0^{(n-1)} + \frac{\bar{v}^{(n-1)}}{EJ^{(n-1)}}.\end{aligned}$$

Аналогичные выражения получаются при интегрировании уравнения для участка  $n (x_n < x < x_{n+1})$

$$\theta^{(n)} = \theta_0^{(n)} + \frac{\bar{\theta}^{(n)}}{EJ^{(n)}}; \quad v^{(n)} = v_0^{(n)} + \frac{\bar{v}^{(n)}}{EJ^{(n)}}.$$

В месте стыка участков при  $x = x_n$  должны выполняться условия  $\theta_{x=x_n}^{(n-1)} = \theta_{x=x_n}^{(n)}$ ,  $v_{x=x_n}^{(n-1)} = v_{x=x_n}^{(n)}$ , так что для определения произвольных постоянных будем иметь систему уравнений:

$$\begin{cases} \theta_0^{(n)} = \theta_0^{(n-1)} + \left( \frac{1}{EJ^{(n-1)}} - \frac{1}{EJ^{(n)}} \right) \bar{\theta}_n; \\ v_0^{(n)} = v_0^{(n-1)} + \left( \frac{1}{EJ^{(n-1)}} - \frac{1}{EJ^{(n)}} \right) (\bar{v}_n - x_n \bar{\theta}_n). \end{cases}$$

$$(n = 2, 3, \dots, N)$$

Эти  $2N - 2$  уравнений позволяют выразить  $2N - 2$  произвольных постоянных через любые две (например  $\theta_0^{(0)}$  и  $v_0^{(0)}$ ), которые, в свою очередь определяются из условия на опорах.

Наиболее простой вид этот алгоритм имеет для случая балки постоянной жесткости. В этом случае  $EJ^{(n)} = EJ$ ;  $\theta_0^{(n)} = \theta_0$ ;  $v_0^{(n)} = v_0$  и прогибы и углы поворота такой балки могут быть определены по формулам:

$$\theta(x) = \theta_0 + \frac{1}{EJ} \left\{ \sum_i M_i \frac{(x - x_{Mi})^1}{1!} + \sum_i P_i \frac{(x - x_{Pi})^2}{2!} + \sum_i q_i \frac{(x - x_{qi})^3}{3!} \right\};$$

$$v(x) = v_0 + \theta_0 x + \frac{1}{EJ} \left\{ \sum_i M_i \frac{(x - x_{Mi})^2}{2!} + \sum_i P_i \frac{(x - x_{Pi})^3}{3!} + \sum_i q_i \frac{(x - x_{qi})^4}{4!} \right\};$$

где  $v_0$  и  $\theta_0$  прогиб и угол поворота левого конца балки  $x=0$ , находятся из условия равенства прогиба нулю на опорах.

### ФОРМУЛЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

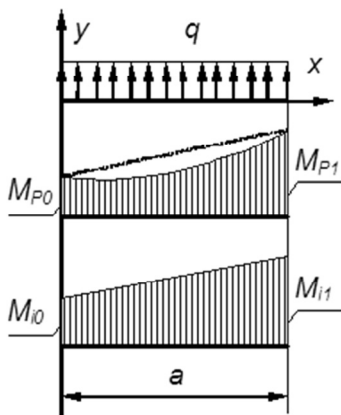


Рис. ПЗ.3

При вычислении интегралов Мора широко используется формула Верещагина [1], которая может применяться для случая, когда первая эпюра имеет произвольный закон изменения, а вторая - линейная функция. При использовании этой формулы необходимо уметь вычислять площади фигур и координаты их центров тяжести.

Однако часто приходится иметь дело с функциями вполне определенного вида, и в этом случае процедура интегрирования может быть упрощена.

Рассмотрим случай, когда первая эпюра - квадратная парабола, обусловленная действием на участке равномерно распределенной нагрузки  $q$ , а вторая произвольная линейная функция (рис. ПЗ.3).

Выражения для моментов при этом будут иметь вид:

$$M_P = M_{P0} + \frac{M_{P1} - M_{P0}}{a} x + \frac{q}{2} x(x-a);$$

$$M_i = M_{i0} + \frac{M_{i1} - M_{i0}}{a} x.$$

Подставляя эти выражения в интегралы Мора и интегрируя, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{EJ} \int_0^a M_P M_i dx &= \frac{1}{EJ} M_{P0} M_{i0} a + \\ + \frac{1}{EJ} &\left\{ \frac{M_{P1} - M_{P0}}{a} M_{i0} \frac{a^2}{2} + M_{P0} \frac{M_{i1} - M_{i0}}{a} \frac{a^2}{2} + \frac{M_{P1} - M_{P0}}{a} \frac{M_{i1} - M_{i0}}{a} \frac{a^3}{6} \right\} + \\ &+ \frac{q}{2EJ} \left\{ M_{i0} \left( \frac{a^3}{3} - a \frac{a^2}{2} \right) + \frac{M_{i1} - M_{i0}}{a} \left( \frac{a^4}{4} - a \frac{a^3}{3} \right) \right\} = \\ &= \frac{a}{6EJ} \{ 2M_{P0} M_{i0} + 2M_{P1} M_{i1} + M_{P0} M_{i1} + M_{P1} M_{i0} \} - \frac{qa^3}{12} \frac{M_{i0} + M_{i1}}{2}. \end{aligned}$$

Подчеркнутое есть известная формула трапеций.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Феодосьев В.И.* Сопротивление материалов: [учебник для втузов] / В.И. Феодосьев. – М., 2005. – 590 с.: ил., портр., табл. – На авантит.: к 175-летию МГТУ им. Н.Э. Баумана.
2. *Атапин В.Г.* Сопротивление материалов: учебник / В.Г. Атапин, А.Н. Пель, А.И. Темников. – Новосибирск, 2006. – 555 с.: ил. – Режим доступа: <http://www.ciu.nstu.ru/fulltext/textbooks/2006/atapin.pdf>.
3. *Атапин В.Г.* Механика. Сопротивление материалов: учебное пособие / В.Г. Атапин, Д.А. Красноруцкий; Новосиб. гос. техн. ун-т. – Новосибирск, 2017. – 146, [2] с.: ил. – Режим доступа: [http://elibrary.nstu.ru/source?bib\\_id=vtls000235416](http://elibrary.nstu.ru/source?bib_id=vtls000235416)

# **СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ**

## **Методические указания**

Редактор *И.Л. Кескевич*

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции  
Издание соответствует коду 95 3000 ОК 005-93 (ОКП)

---

Подписано в печать 18.09.2017. Формат 60 × 84 1/16. Бумага офсетная. Тираж 250 экз.  
Уч.-изд. л. 3,72. Печ. л. 4,0. Заказ № 876/8. Цена договорная.

---

Отпечатано в типографии  
Новосибирского государственного технического университета  
630073, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20