

1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА И ЕГО СВОЙСТВА

Рассмотрим функцию $f(t)$ вещественной переменной t , удовлетворяющую следующим условиям:

1⁰. $f(t)$ непрерывна $\forall t \geq 0$. Непрерывность может быть нарушена лишь в отдельных точках, являющихся точками разрыва первого рода, причем число этих точек должно быть конечно на любом интервале ограниченной длины.

2⁰. $f(t) = 0, t < 0$.

3⁰. $f(t)$ имеет ограниченный порядок возрастания, т.е. $\exists M > 0, c_0 \geq 0$, для которых $|f(t)| < Me^{c_0 t}, t > 0$.

Число c_0 является *показателем роста* функции $f(t)$. Функция $f(t)$, удовлетворяющая условиям 1⁰-3⁰, называется *оригиналом*.

Многие функции, встречающиеся при описании процессов в автоматических системах, являются оригиналами. Например, оригиналами будут функции $1(t), A \sin \omega t * 1(t), A \cos \omega t * 1(t), t^n * 1(t), (n = 0, 1, 2, \dots), e^{at} * 1(t)$ и др. Наличие в этих функциях множителя - единичной ступенчатой функции - обеспечивает выполнение второго условия, т.е. обращение $f(t)$ в ноль при $t < 0$. Здесь

$$1(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Функция $F(s)$ комплексного переменного $s = c + i\omega$, определяемая равенством

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad (1)$$

называется *изображением* функции $f(t)$ по Лапласу. Интеграл в правой части равенства (1) называется *интегралом Лапласа*.

С помощью интеграла Лапласа устанавливается соответствие между функцией $f(t)$ и её изображением $F(s)$. Процесс получения изображения $F(s)$ по заданной функции $f(t)$ называется *преобразованием Лапласа*. Символически преобразование Лапласа записывается в виде

$$L\{f(t)\} = F(s). \quad (2)$$

Если $f(t)$ соответствует изображению $F(s)$, то это соответствие записывают следующим образом:

$$f(t) \div F(s).$$

Теорема 1. Если $f(t)$ является оригиналом, то она преобразуема по Лапласу и ее изображение $F(s)$ определено в полуплоскости $Re\ s > c_0$ (правая полуплоскость), где c_0 - показатель роста функции $f(t)$.

Теорема 2. Изображение $F(s)$ оригинала $f(t)$ в полуплоскости, для которой $Re\ s > c_0$, где c_0 - показатель роста оригинала, является аналитической функцией.

Для перехода от изображения $F(s)$ к оригиналу $f(t)$ необходимо выполнить обратное преобразование Лапласа, которое символически записывают в виде

$$L^{-1}\{F(s)\} = f(t) \quad (t \geq 0), \quad (3)$$

подчеркивая при этом, что оригинал $f(t) \equiv 0$ при $(t < 0)$.

Теорема 3. Оригинал $f(t)$ в точках непрерывности определяется равенством

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)e^{st} ds, \quad (4)$$

где $F(s)$ - изображение по Лапласу оригинала $f(t)$, а интеграл в правой части этого равенства понимается в смысле главного значения, т.е.

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)e^{st} ds = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{c-i\omega}^{c+i\omega} F(s)e^{st} ds,$$

и берется вдоль прямой, параллельной мнимой оси и расположенной в полуплоскости $Re\ s > c_0$.

Формула (4) называется **формулой обращения**. С её помощью устанавливается связь между изображением $F(s)$ и соответствующим оригиналом $f(t)$.

Теорема 4. Если функции $\{f_i(t), i = \overline{1, n}\}$ являются оригиналами и их изображения есть, соответственно, $\{F_i(s), i = \overline{1, n}\}$ и $\{\lambda_i, i = \overline{1, n}\}$ - величины, не зависящие от t и s , то справедливы следующие равенства

$$L\left\{\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(t)\right\} = \sum_{i=1}^n \lambda_i F_i(s), \quad (5)$$

$$L^{-1}\left\{\sum_{i=1}^n \lambda_i F_i(s)\right\} = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(t), \quad (6)$$

Теорема 5. Если функция $f(t)$ и её производная $f'(t)$ являются оригиналами и $F(s)$ есть изображение $f(t)$, то справедливо равенство

$$L\{f'(t)\} = sF(s) - f(0+), \quad (7)$$

где $f(0+) = \lim_{t \rightarrow 0+} f(t)$.

Если $f(0+) = 0$, то из формулы (7) получим

$$L\{f'(t)\} = sF(s),$$

т.е. операции дифференцирования оригинала соответствует операция умножения изображения этого оригинала на комплексное s .

Если производные высших порядков $f^2(t), f^3(t), \dots, f^n(t)$ являются оригиналами, то справедливы следующие равенства

$$\begin{aligned} L\{f^{(2)}(t)\} &= s^2 F(s) - f(0+)s - f'(0+), \\ L\{f^{(3)}(t)\} &= s^3 F(s) - f(0+)s^2 - f'(0+)s - f^{(2)}(0+), \\ L\{f^{(n)}(t)\} &= s^n F(s) - f(0+)s^{n-1} - f'(0+)s^{n-2} - \dots - f^{(n-1)}(0+). \end{aligned} \quad (8)$$

Теорема 6. Если функция $f(t)$ является оригиналом, причем $F(s)$ - её изображение, то $\int_0^t f(\tau) d\tau$ также является оригиналом и справедливо равенство

$$L\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}. \quad (9)$$

Теорема 7. Если функция $f(t)$ является оригиналом, причем $F(s)$ - её изображение, то изображение смещенного оригинала $f(t - \tau)$, где τ - положительное число, определяется равенством

$$L\{f(t - \tau)\} = e^{-s\tau} F(s). \quad (10)$$

При обратном преобразовании Лапласа справедливо равенство

$$L^{-1}\{e^{-\tau s} * F(s)\} = \begin{cases} f(t), & t \geq \tau; \\ 0, & t < \tau. \end{cases}$$

2. РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Теорема 8. Если функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ являются оригиналами и их изображения есть, соответственно, $F_1(s)$ и $F_2(s)$, то справедливо равенство

$$L\left\{\int_0^t f_1(t-\tau) * f_2(\tau) d\tau\right\} = L\left\{\int_0^t f_1(\tau) * f_2(t-\tau) d\tau\right\} = F_1(s)F_2(s). \quad (11)$$

Вычисление оригинала по формуле (4) удобно производить при помощи вычетов.

Рассмотрим случай, когда изображение является рациональной функцией, т.е. представляет собой отношение двух многочленов

$$F(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{a_0 s^m + a_1 s^{m-1} + \dots + a_m}{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_n}, \quad (12)$$

причем $m < n$ и коэффициенты $\{a_i, i = \overline{0, m}\}, \{b_j, j = \overline{0, n}\}$ – действительные числа. Вычислив корни знаменателя $\{s_l, l = \overline{1, v}\}$, представим это изображение в виде

$$F(s) = \frac{A(s)}{b_0(s-s_1)^{k_1}(s-s_2)^{k_2} \dots (s-s_v)^{k_v}}.$$

Здесь k_i – кратность корня s_i . Тогда

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = \sum_{i=1}^v \frac{1}{(k_i-1)!} \lim_{s \rightarrow s_i} \frac{d^{k_i-1}}{ds^{k_i-1}} [F(s)(s-s_i)^{k_i} e^{st}], t \geq 0. \quad (13)$$

Пусть теперь все корни s_i знаменателя изображения $F(s)$ будут простыми, т.е. $\{k_i = 1, i = \overline{1, n}\}$. В этом случае вместо (13) мы получаем более простую формулу:

$$f(t) = \sum_{i=1}^n \frac{A(s_i)}{B'(s_i)} e^{s_i t}, \quad t \geq 0. \quad (14)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. – Методы теории функций комплексного переменного (есть доказательства)
2. Чемоданов Б.К. – Математические основы теории автоматического регулирования
3. Ким Д.П. – Теория автоматического управления, Основы автоматического управления
4. Пугачев В.И. – Теория автоматического управления