

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Теория автоматического управления (ТАУ) изучает процессы управления, методы исследования и основы проектирования *систем автоматического управления* (САУ).

САУ – система, состоящая из *объекта управления* (ОУ) и *устройства управления* (УУ), в которой автоматически выполняется заданный процесс.

ОУ – определенное техническое устройство (самолёт, станок, паровая турбина и т.д.), для достижения результатов функционирования которого необходимы специально организованные воздействия. В зависимости от свойств или назначения объектов могут быть выделены технические, экономические, социальные и другие ОУ.

УУ – совокупность устройств, с помощью которых осуществляется управление какими-либо технологическими параметрами.

Математическими моделями *непрерывных САУ с сосредоточенными параметрами* являются обыкновенные дифференциальные уравнения. *Непрерывные САУ с распределенными параметрами* имеют своими моделями дифференциальные уравнения в частных производных. Математическими моделями *дискретных САУ* служат разностные уравнения.

Уравнения, характеризующие процессы в САУ, могут быть как линейными, так и нелинейными. В первом случае САУ относят к классу *линейных*, а во втором – к классу *нелинейных систем*. Многие линейные системы имеют постоянные параметры и описываются линейными дифференциальными или разностными уравнениями с постоянными коэффициентами. Если параметры линейной системы изменяются во времени, то подобная система описывается линейными дифференциальными или разностными уравнениями с переменными коэффициентами.

1.1. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ПРИНЦИПЫ УПРАВЛЕНИЯ

Будем понимать под *управляемой системой* техническую систему управления параметрами, характеризующими протекание некоторого технического процесса. Значения этих параметров $y(t)$ будем называть *выходными переменными*. Некоторые из выходных переменных (*управляемые переменные*) по условиям технологии должны изменяться в соответствии с заданным законом или, как говорят, - *алгоритмом функционирования системы* $y_{\phi}(t)$. В ходе эксплуатации на систему обычно действует совокупность *возмущений* $w(t)$ (помехи), которые могут привести к нарушению заданного функционирования. Для устранения этого осуществляется управление вы-

ходными переменными, состоящее в приложении к регулирующим органам или входам системы *управляющих воздействий*, для краткости называемых *управлениями* $u(t)$, которые должны изменяться в соответствии с алгоритмом управления, вырабатываемым по тому или иному принципу управления.

При построении САУ используются три основных (фундаментальных) принципа управления.

1.1.1. ПРИНЦИП РАЗОМКНУТОГО УПРАВЛЕНИЯ

Алгоритм управления строится с учетом алгоритма функционирования $y_\phi(t)$ и характеристик системы, но без учета фактического значения выходных переменных $y(t)$ и возмущений $w(t)$. Это допустимо в тех случаях, когда или $w(t)$ достаточно малы, или же когда конструкция системы достаточно хорошо противоречит этим возмущениям, в следствии чего отклонения $y(t) - y_\phi(t)$ от заданных значений будут невелики. Обобщенная функциональная схема системы с разомкнутым управлением показана на рис. 1.1.

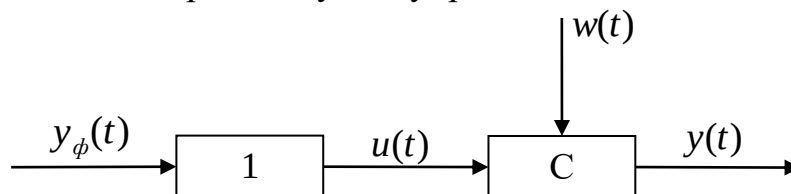


Рис. 1.1

Специальный датчик 1 перерабатывает заданный алгоритм функционирования $y_\phi(t)$ в алгоритм управления $u(t)$, и воздействия $u(t)$ прикладываются ко входам системы С.

1.1.2. ПРИНЦИП КОМПЕНСАЦИИ

Если некоторые возмущения настолько велики, что в разомкнутой системе желаемая точность выполнения алгоритма функционирования не достигается, можно ввести в схему устройство компенсации, измеряющее наиболее существенные возмущения и вносящее соответствующие коррективы в алгоритм управления (рис 1.2.). При этом алгоритм управления увязывается как с алгоритмом функционирования, так и с возмущениями.

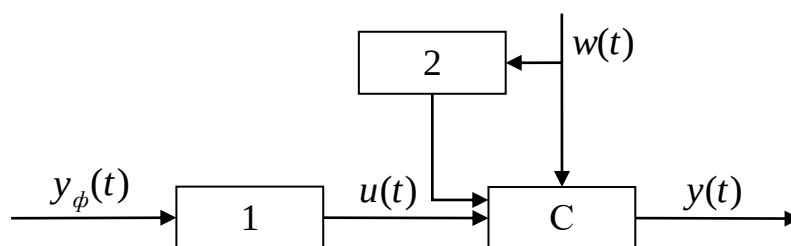


Рис 1.2

1.1.3. ПРИНЦИП ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

Алгоритм управления увязывается с алгоритмом функционирования и фактическим значением выходных переменных. Для этого осуществляется измерение текущих значений выходных переменных $y(t)$, их сравнение с заданным алгоритмом функционирования $y_\phi(t)$ и выработка воздействий $u(t)$ на входы системы в зависимости от отклонений $y(t) - y_\phi(t)$. Обобщенная функциональная схема представлена на рис. 1.3. В ней переменные $u(t)$ уже не являются независимыми от выходных величин.

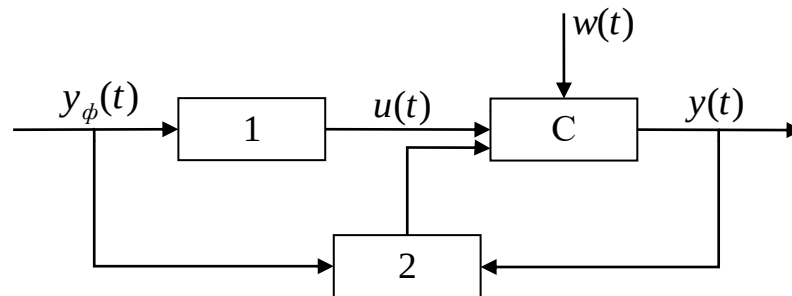


Рис. 1.3

Принцип обратной связи получил широкое распространение в технике, процессах управления в живых организмах (системы регуляции температуры, ритма кровообращения), в управлении производством (проверка исполнения распоряжений) и т.д.

Комбинирование двух последних принципов управления позволяет спроектировать САУ, обладающую хорошей реакцией на изменение возмущений и устойчиво работающую независимо от причин, вызвавших отклонение (рис. 1.4.) $y(t) - y_\phi(t)$.

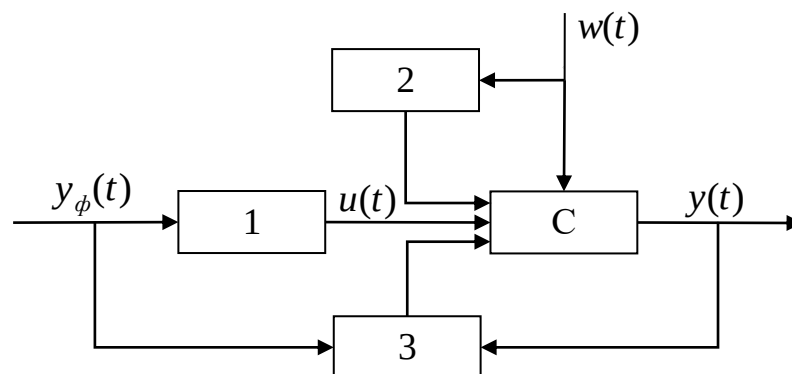


Рис. 1.4

Глава 2

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ САУ

2.1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА И ЕГО СВОЙСТВА

Рассмотрим функцию $f(t)$ вещественной переменной t , удовлетворяющую следующим условиям:

1⁰. $f(t)$ непрерывна $\forall t \geq 0$. Непрерывность может быть нарушена лишь в отдельных точках, являющихся точками разрыва первого рода, причем число этих точек должно быть конечно на любом интервале ограниченной длины.

2⁰. $f(t) = 0, t < 0$.

3⁰. $f(t)$ имеет ограниченный порядок возрастания, т.е. $\exists M > 0, c_0 \geq 0$, для которых $|f(t)| < Me^{c_0 t}, t > 0$.

Число c_0 является *показателем роста* функции $f(t)$. Функция $f(t)$, удовлетворяющая условиям 1⁰-3⁰, называется *оригиналом*.

Многие функции, встречающиеся при описании процессов в автоматических системах, являются оригиналами. Например, оригиналами будут функции $1(t)$, $A \sin \omega t \cdot 1(t)$, $A \cos \omega t \cdot 1(t)$, $t^n \cdot 1(t)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), $e^{at} \cdot 1(t)$ и др.

Наличие в этих функциях множителя - единичной ступенчатой функции - обеспечивает выполнение второго условия, т.е. обращение $f(t)$ в ноль при $t < 0$. Здесь

$$1(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Функция $F(s)$ комплексного переменного $s = c + i\omega$, определяемая равенством

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad (2.1)$$

называется *изображением* функции $f(t)$ по Лапласу. Интеграл в правой части равенства (2.1) называется *интегралом Лапласа*.

С помощью интеграла Лапласа устанавливается соответствие между функцией $f(t)$ и её изображением $F(s)$. Процесс получения изображения $F(s)$ по заданной функции $f(t)$ называется *преобразованием Лапласа*. Символически преобразование Лапласа записывается в виде

$$L\{f(t)\} = F(s). \quad (2.2)$$

Если $f(t)$ соответствует изображению $F(s)$, то это соответствие записывают следующим образом:

$$f(t) \doteq F(s).$$

Теорема 1. Если $f(t)$ является оригиналом, то она преобразуема по Лапласу и ее изображение $F(s)$ определено в полуплоскости $\text{Re } s > c_0$, где c_0 - показатель роста функции $f(t)$.

Пример. Найти изображение единичной ступенчатой функции $f(t) = 1(t)$.

$$F(s) = L\{1(t)\} = \int_0^{+\infty} 1(t)e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{s}, \quad \text{Re } s > 0.$$

Упражнения. Найти изображения по Лапласу следующих оригиналов:

$$1. \quad f(t) = \begin{cases} e^{\alpha t}, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } F(s) = \frac{1}{s - \alpha}.$$

$$2. \quad f(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } F(s) = \frac{1}{s^2}.$$

Теорема 2. Изображение $F(s)$ оригинала $f(t)$ в полуплоскости, для которой $\text{Re } s > c_0$, где c_0 - показатель роста оригинала, является аналитической функцией.

Для перехода от изображения $F(s)$ к оригиналу $f(t)$ необходимо выполнить обратное преобразование Лапласа, которое символически записывают в виде

$$L^{-1}\{F(s)\} = f(t) \quad (t \geq 0), \quad (2.3)$$

подчеркивая при этом, что оригинал $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$.

Теорема 3. Оригиналу $f(t)$ в точках непрерывности определяется равенством

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)e^{st} ds, \quad (2.4)$$

где $F(s)$ - изображение по Лапласу оригинала $f(t)$, а интеграл в правой части этого равенства понимается в смысле главного значения, т.е.

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)e^{st} ds = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{c-i\omega}^{c+i\omega} F(s)e^{st} ds,$$

и берется вдоль прямой, параллельной мнимой оси и расположенной в полуплоскости $\text{Re } s > c_0$.

Формула (2.4) называется **формулой обращения**. С её помощью устанавливается связь между изображением $F(s)$ и соответствующим оригиналом $f(t)$.

Теорема 4. Если функции $\{f_i(t), i = \overline{1, n}\}$ являются оригиналами и их изображения есть, соответственно, $\{F_i(s), i = \overline{1, n}\}$ и $\{\lambda_i, i = \overline{1, n}\}$ - величины, не зависящие от t и s , то справедливы следующие равенства

$$L\left\{\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(t)\right\} = \sum_{i=1}^n \lambda_i F_i(s), \quad (2.5)$$

$$L^{-1}\left\{\sum_{i=1}^n \lambda_i F_i(s)\right\} = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(t). \quad (2.6)$$

Упражнения. Найти изображения по Лапласу следующих оригиналов ($\alpha > 0$):

$$1. f(t) = \begin{cases} \sin \omega t, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

$$\text{OTBET: } F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

3. $f(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} \sin \omega t, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$

$$\text{Отвѣт: } F(s) = \frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}.$$

$$2. f(t) = \begin{cases} \cos \omega t, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

$$\text{OTBET: } F(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}.$$

4. $f(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} \cos \omega t, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$

ОТВЕТ: $F(s) = \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$.

Теорема 5. Если функция $f(t)$ и её производная $f'(t)$ являются оригиналами и $F(s)$ есть изображение $f(t)$, то справедливо равенство

$$L\{f'(t)\} = sF(s) - f(0+), \quad (2.7)$$

где $f(0+) = \lim_{t \rightarrow 0+} f(t)$.

Если $f(0+) = 0$, то из формулы (2.7) получим

$$L\{f'(t)\} = sF(s),$$

т.е. операции дифференцирования оригинала соответствует операция умножения изображения этого оригинала на комплексное S .

Если производные высших порядков $f^{(2)}(t), f^{(3)}(t), \dots, f^{(n)}(t)$ являются оригиналами, то справедливы следующие равенства

$$L\{f^{(2)}(t)\} = s^2 F(s) - f(0+)s - f'(0+),$$

$$L\{f^{(3)}(t)\} = s^3 F(s) - f(0+)s^2 - f'(0+)s - f^{(2)}(0+), \quad (2.8)$$

$$L\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - f(0+)s^{n-1} - f'(0+)s^{n-2} - \dots - f^{(n-1)}(0+).$$

Теорема 6. Если функция $f(t)$ является оригиналом, причем $F(s)$ - её изображение, то $\int_0^t f(\tau) d\tau$ также является оригиналом и справедливо равенство

$$L\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}. \quad (2.9)$$

Теорема 7. Если функция $f(t)$ является оригиналом и $F(s)$ - её изображение, то изображение смещенного оригинала $f(t - \tau)$, где τ - положительное число, определяется равенством

$$L\{f(t - \tau)\} = e^{-\tau s} F(s). \quad (2.10)$$

При обратном преобразовании Лапласа справедливо равенство

$$L^{-1}\{e^{-\tau s} \cdot F(s)\} = \begin{cases} f(t), & t \geq \tau; \\ 0, & t < \tau. \end{cases}$$

Упражнения. Найти изображения по Лапласу следующих оригиналов:

$$1. f(t) = \begin{cases} (t - \tau)^2, & t \geq \tau; \\ 0, & t < \tau. \end{cases} \quad 2. f(t) = A[1(t) + 1(t - \tau) + 1(t - 2\tau) + \dots].$$

$$\text{Ответ: } F(s) = \frac{2e^{-s\tau}}{s^3}. \quad \text{Ответ: } F(s) = \frac{A}{s(1 - e^{-s\tau})}.$$

Теорема 8. Если функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ являются оригиналами и их изображения есть, соответственно, $F_1(s)$ и $F_2(s)$, то справедливо равенство

$$L\left\{\int_0^t f_1(t - \tau) \cdot f_2(\tau)d\tau\right\} = L\left\{\int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau)d\tau\right\} = F_1(s)F_2(s). \quad (2.11)$$

Вычисление оригинала по формуле (2.4) удобно производить при помощи вычетов.

Рассмотрим случай, когда изображение является рациональной функцией, т.е. представляет собой отношение двух многочленов

$$F(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{a_0 s^m + a_1 s^{m-1} + \dots + a_m}{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_n}, \quad (2.12)$$

причем $m < n$ и коэффициенты $\{a_i, i = \overline{0, m}\}, \{b_j, j = \overline{0, n}\}$ - действительные числа. Вычислив корни знаменателя $\{s_l, l = \overline{1, \nu}\}$, представим это изображение в виде

$$F(s) = \frac{A(s)}{b_0 (s - s_1)^{k_1} (s - s_2)^{k_2} \dots (s - s_\nu)^{k_\nu}}.$$

Здесь k_i - кратность корня s_i . Тогда

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{(k_i - 1)!} \lim_{s \rightarrow s_i} \frac{d^{k_i-1}}{ds^{k_i-1}} [F(s)(s - s_i)^{k_i} e^{st}], \quad t \geq 0. \quad (2.13)$$

Пусть теперь все корни s_i знаменателя изображения $F(s)$ будут простыми, т.е. $\{k_i = 1, i = \overline{1, n}\}$. В этом случае вместо (2.13) мы получаем более простую формулу:

$$f(t) = \sum_{i=1}^n \frac{A(s_i)}{B'(s_i)} e^{s_i t}, \quad t \geq 0. \quad (2.14)$$

Пример. Найти оригинал для изображения $F(s) = \frac{1}{(s + \alpha)^2}$.

$$f(t) = \lim_{s \rightarrow -\alpha} \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{(s + \alpha)^2} (s + \alpha)^2 e^{st} \right] = \lim_{s \rightarrow -\alpha} t e^{st} = t e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0.$$

Упражнения и задачи.

1. Найти оригинал $f(t)$, соответствующий изображению

$$F(s) = \frac{s}{(s+1)(s+2)(s+3)}.$$

Ответ: $f(t) = -\frac{1}{2}e^{-t} + 2e^{-2t} - \frac{3}{2}e^{-3t}, \quad t \geq 0.$

2. Найти оригинал $f(t)$, изображение которого

$$F(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}.$$

Ответ: $f(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t, \quad t \geq 0.$

3. Найти решение уравнения

$$x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = 0, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$$

Ответ: $x(t) = e^{-t} - e^{-2t}, \quad t \geq 0.$

4. Выполнить интегрирование дифференциального уравнения

$$x''(t) + 5x'(t) + 6x(t) = 1, \quad x(0) = 3, \quad x'(0) = -2.$$

Ответ: $x(t) = \frac{1}{6} - \frac{11}{3}e^{-3t} + \frac{13}{2}e^{-2t}, \quad t \geq 0.$

5. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - 2y(t) - 2z(t), \\ y'(t) = 2x(t) + 7y(t) + 5z(t), \\ z'(t) = -2x(t) - 4y(t) - 2z(t) \end{cases}$$

при начальных условиях $x(0) = 0, \quad y(0) = 3, \quad z(0) = -2.$

Ответ: $x(t) = e^t - e^{3t}, \quad y(t) = -2e^t + 2e^{2t} + 3e^{3t}, \quad z(t) = 2e^t - 2e^{2t} - 2e^{3t}, \quad t \geq 0.$

2.2. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ

Будем полагать, что процессы, происходящие в САУ, описываются линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. Пусть математическая модель динамической системы с одним входом и одним выходом имеет вид

$$a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1} y'(t) + a_n y(t) = b_0 u^{(m)}(t) + b_1 u^{(m-1)}(t) + \dots + b_m u(t) \quad (2.15)$$

или в **символической (операторной) форме**

$$D(p)y(t) = M(p)u(t), \quad (2.16)$$

где

$$\frac{d}{dt} \equiv p, \quad \frac{d^i}{dt^i} = p^i \quad (p - \text{оператор дифференцирования});$$

$$D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n; \quad (2.17)$$

$$M(p) = b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m. \quad (2.18)$$

Назовем дифференциальный оператор $D(p)$ при выходной переменной $y(t)$ **собственным оператором** системы, а дифференциальный оператор $M(p)$ при управляющем воздействии $u(t)$ - **входным оператором**. Тогда отношение

$$W(p) = \frac{M(p)}{D(p)} \quad (2.19)$$

определяет **передаточную функцию в операторной форме** и

$$y(t) = W(p)u(t). \quad (2.20)$$

Преобразуем соотношение (2.15) по Лапласу, предположив, что начальные условия - нулевые. Введя обозначения

$$Y(s) = L\{y(t)\}, \quad U(s) = L\{u(t)\}, \quad (2.21)$$

получим

$$D(s)Y(s) = M(s)U(s), \quad (2.22)$$

где

$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n; \quad (2.23)$$

$$M(s) = b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m. \quad (2.24)$$

Обозначим

$$W(s) = \frac{M(s)}{D(s)}. \quad (2.25)$$

С учётом равенства (2.25) выражение (2.22) примет вид

$$Y(s) = W(s)U(s). \quad (2.26)$$

Соотношение (2.26) связывает изображение $Y(s)$ выходной переменной системы с изображением $U(s)$ управляющего воздействия. Функция $W(s)$ характеризует динамические свойства системы. Как следует из равенств (2.23)-(2.25), эта функция не зависит от воздействия, приложенного к системе, а зависит лишь от параметров системы. Учитывая равенство (2.26), функцию $W(s)$ можно записать следующим образом

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{L\{y(t)\}}{L\{u(t)\}} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}. \quad (2.27)$$

Функция $W(s)$ называется **передаточной функцией в форме изображения по Лапласу**. Из выражения (2.27) видно, что передаточная функция $W(s)$ представляет собой отношение изображения по Лапласу выходной переменной системы к изображению по Лапласу управляющего воздействия при нулевых начальных условиях.

Заметим, что последнее определение передаточной функции не противоречит ранее введенному, т. к. при нулевых начальных условиях в стационарном случае комплексная переменная s может быть отождествлена с оператором дифференцирования p .

Зная передаточную функцию системы $W(s)$ и определив изображение $U(s)$ воздействия $u(t)$, приложенного к системе, можно найти по формуле (2.26) изображение $Y(s)$ выходной переменной $y(t)$, а затем, перейдя от изображения $Y(s)$ к оригиналу $y(t)$, получить процесс изменения выходной переменной системы, отвечающий приложенному управляющему воздействию.

2.3. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Заменив p на $i\omega$ в выражении (2.19) для передаточной функции в операторной форме, получим **частотную передаточную функцию**

$$W(i\omega) = \frac{b_0 (i\omega)^m + b_1 (i\omega)^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 (i\omega)^n + a_1 (i\omega)^{n-1} + \dots + a_n}. \quad (2.28)$$

Это комплекснозначная функция от действительной переменной ω , которая называется **частотой**. Частотная передаточная функция может быть представлена в следующем виде:

$$W(i\omega) = U(\omega) + iV(\omega) = A(\omega)e^{i\varphi(\omega)} \quad (2.29)$$

где $A(\omega)$ - модуль частотной передаточной функции, $\varphi(\omega)$ - аргумент (фаза), $U(\omega)$ и $V(\omega)$ - вещественная и мнимая составляющие частотной передаточной функции.

$$A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}; \quad (2.30)$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)}, & \text{если } U(\omega) > 0; \\ \operatorname{arctg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)} + \pi, & \text{если } U(\omega) < 0, V(\omega) \geq 0; \\ \operatorname{arctg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)} - \pi, & \text{если } U(\omega) < 0, V(\omega) < 0. \end{cases} \quad (2.31)$$

Для наглядного представления частотных свойств системы используются так называемые частотные характеристики.

Амплитудно-фазовая частотная характеристика (АФЧХ) строится на комплексной плоскости. Она представляет собой геометрическое место концов векторов (годограф), соответствующих частотной передаточной функции $W(i\omega) = U(\omega) + iV(\omega)$ при изменении частоты ω от 0 до $+\infty$ (рис. 2.1).

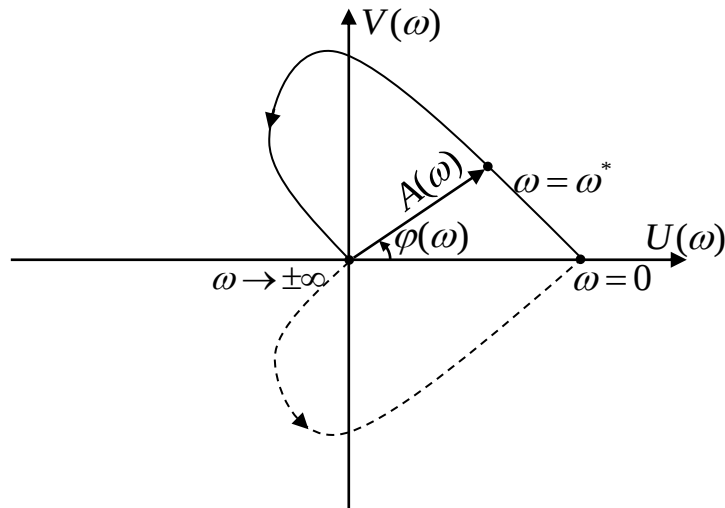


Рис 2.1

По оси абсцисс откладывается вещественная часть $U(\omega) = \operatorname{Re}W(i\omega)$ и по оси ординат - мнимая часть $V(\omega) = \operatorname{Im}W(i\omega)$. Для каждой частоты на комплексной плоскости наносится точка. Полученные точки соединяются плавной кривой.

АФЧХ может быть построена как для положительных, так и для отрицательных частот. При замене в частотной передаточной функции ω на $-\omega$ получится сопряженная комплексная величина. Поэтому АФЧХ для отрицательных частот может быть построена зеркальным отображением относительно вещественной оси АФЧХ для положительных частот. На рис. 2.1 АФЧХ для отрицательных частот показана пунктирной линией.

Длина вектора, проведенного из начала координат в точку АФЧХ, соответствующую какой-либо выбранной частоте, равна модулю частотной передаточной функции. Угол между вектором и положительным направлением

вещественной оси, отсчитываемый против часовой стрелки, равен аргументу (фазе) частотной передаточной функции.

Выясним физический смысл АФЧХ. Пусть на вход нашей системы (2.15) поступает косинусоидальное гармоническое воздействие

$$u(t) = U_m \cos(\omega t),$$

где U_m - амплитуда, а ω - угловая частота. Найдем математическое описание выхода $y(t)$. Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что общее решение неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами можно представить в виде

$$y(t) = \tilde{y}(t) + \tilde{\tilde{y}}(t).$$

Здесь $\tilde{y}(t)$ - общее решение соответствующего однородного уравнения, а $\tilde{\tilde{y}}(t)$ - частное решение неоднородного уравнения. Однородному дифференциальному уравнению

$$a_0 \tilde{y}^{(n)}(t) + a_1 \tilde{y}^{(n-1)}(t) + \dots + a_n \tilde{y}(t) = 0$$

можно поставить в соответствие характеристический многочлен:

$$\begin{aligned} P_n(\lambda) &= a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = \\ &= a_0 (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \dots (\lambda - \lambda_\nu)^{k_\nu} (\lambda - (\alpha_1 + i\beta_1))^{l_1} (\lambda - (\alpha_1 - i\beta_1))^{l_1} \dots (\lambda - (\alpha_\mu - i\beta_\mu))^{l_\mu}, \end{aligned}$$

где $\sum_{i=1}^{\nu} k_i + 2 \sum_{j=1}^{\mu} l_j = n$. При этом λ_j - различные действительные корни кратности k_j , а $\alpha_j + i\beta_j$, $\alpha_j - i\beta_j$ - различные пары комплексно сопряженных корней кратности l_j .

Отдельным сомножителям $P_n(\lambda)$ поставим в соответствие следующие функции:

$$(\lambda - \lambda_i)^{k_i} - \text{функцию } y_i(t) = (b_i^1 + b_i^2 t + \dots + b_i^{k_i} t^{k_i-1}) e^{\lambda_i t},$$

а

$$(\lambda - (\alpha_j + i\beta_j))^{l_j} (\lambda - (\alpha_j - i\beta_j))^{l_j} - \text{функцию}$$

$$z_j(t) = (c_j^1 + c_j^2 t + \dots + c_j^{l_j} t^{l_j-1}) e^{\alpha_j t} \cos \beta_j t + (d_j^1 + d_j^2 t + \dots + d_j^{l_j} t^{l_j-1}) e^{\alpha_j t} \sin \beta_j t.$$

Общее решение однородного дифференциального уравнения может быть представлено в виде

$$\tilde{y}(t) = y_1(t) + \dots + y_\nu(t) + z_1(t) + \dots + z_\mu(t). \quad (2.32)$$

Отсюда следует, что если все корни характеристического многочлена $P_n(\lambda)$ имеют отрицательные вещественные части, то $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{y}(t) = 0$. Это имеет место для **устойчивых систем**. Будем считать, что наша система устойчива.

Поскольку

$$\cos \omega t = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2},$$

гармоническое воздействие $u(t)$ можно представить в виде

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t),$$

где

$$u_1(t) = \frac{U_m}{2} e^{i\omega t}, \quad u_2(t) = \frac{U_m}{2} e^{-i\omega t}.$$

Воспользуемся **принципом суперпозиции** для линейных систем (он заключается в том, что реакция системы на несколько одновременно действующих входных воздействий равна сумме реакций на каждое воздействие в отдельности и вытекает, например, из соотношения (2.12)), частное решение $\tilde{y}(t)$ можно также представить в виде суммы:

$$\tilde{y}(t) = \tilde{y}_1(t) + \tilde{y}_2(t),$$

где $\tilde{y}_1(t)$ - частное решение неоднородного дифференциального уравнения при $u(t) = u_1(t)$, а $\tilde{y}_2(t)$ - соответствующее частное решение при $u(t) = u_2(t)$. Найдем $\tilde{y}_1(t)$ и $\tilde{y}_2(t)$. Подставим $u_1(t)$ в правую часть (2.16):

$$D(p)\tilde{y}_1(t) = M(p)u_1(t)$$

и будем искать частное решение в виде:

$$\tilde{y}_1(t) = Y_{1m}u_1(t).$$

Тогда

$$D(p)Y_{1m}u_1(t) = M(p)u_1(t)$$

и

$$Y_{1m} = \frac{M(i\omega)}{D(i\omega)} = W(i\omega) = A(\omega)e^{i\varphi(\omega)}.$$

Отсюда

$$\tilde{y}_1(t) = A(\omega) \frac{U_m}{2} e^{i(\omega t + \varphi(\omega))}.$$

Аналогично можно получить, что

$$\tilde{y}_2(t) = A(\omega) \frac{U_m}{2} e^{-i(\omega t + \varphi(\omega))}.$$

Таким образом,

$$\tilde{y}(t) = A(\omega)U_m \cos(\omega t + \varphi(\omega)). \quad (2.33)$$

При гармоническом воздействии в устойчивых системах после окончания переходного процесса выходная величина будет также гармо-

нической, но с другими амплитудой и фазой. Отношение амплитуд выходной и входной величин равно модулю $A(\omega)$, а сдвиг фаз - аргументу $\varphi(\omega)$ частотной передаточной функции.

Вместо АФЧХ можно построить отдельно *амплитудную частотную характеристику (АЧХ)* и *фазовую частотную характеристику (ФЧХ)*. Это показано на рис. 2.2

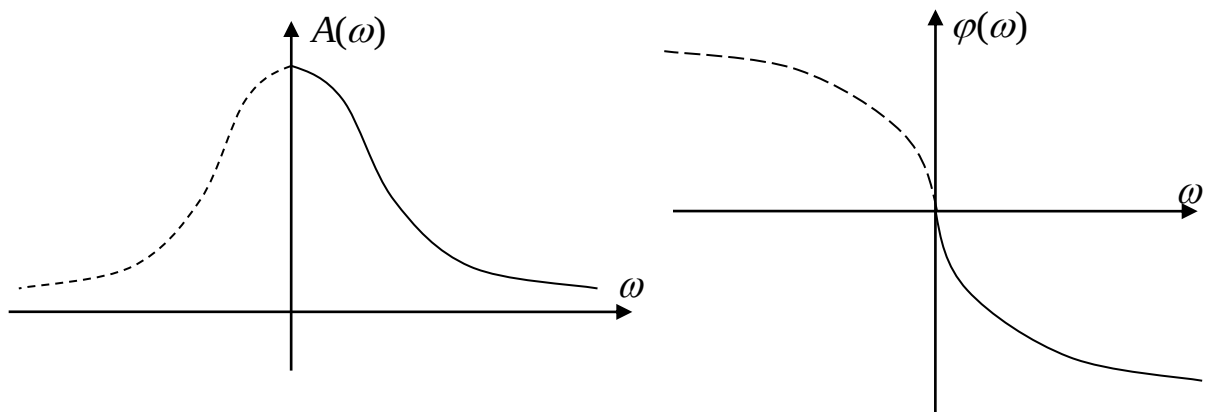


Рис 2.2

Модуль частотной передаточной функции представляет собой четную функцию частоты, а фаза - нечетную функцию частоты. Поэтому по результатам вычисления модуля и фазы для положительных частот можно сразу построить АЧХ и ФЧХ для всего диапазона частот.

АЧХ показывает изменение отношения амплитуд, а ФЧХ - сдвиг фазы выходной величины в зависимости от частоты входного гармонического воздействия.

Логарифмические амплитудную и фазовую частотные характеристики не рассматриваем.

2.4. ВРЕМЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Переходной функцией $h(t)$ системы (звена) называют функцию, описывающую изменение выходной величины системы (звена), когда на ее вход подается единичное ступенчатое воздействие $1(t)$ при нулевых начальных условиях.

Переходная функция $h(t)$ - это реакция системы (звена) на единичное ступенчатое воздействие $1(t)$ при нулевых начальных условиях.

$$1(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (2.34)$$

График $h(t)$ называют *переходной* или *разгонной характеристикой*.

Импульсной переходной (весовой) функцией $w(t)$ системы (звена) называют функцию, описывающую реакцию системы (звена) на единичное импульсное воздействие $\delta(t)$ при нулевых начальных условиях.

$$\delta(t) = 1'(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0, \\ \infty, & t = 0. \end{cases} \quad (2.35)$$

График $w(t)$ называют **импульсной переходной характеристикой**.

Переходную и импульсную переходную характеристики называют **временными характеристиками**.

Вернемся к дифференциальному уравнению (2.15). В изображении по Лапласу оно принимает вид (2.26). Пусть $u(t) = \delta(t)$. Тогда $U(s) = 1$, $y(t) = w(t)$ и

$$w(t) = L^{-1}\{W(s)\}, \quad (2.36)$$

т. е. **передаточная функция $W(s)$ равна изображению по Лапласу весовой функции $w(t)$** .

Формулу (2.36) можно использовать для вычисления весовой функции.

Пусть теперь $u(t) = 1(t)$. Тогда $U(s) = \frac{1}{s}$, $y(t) = h(t)$ и $H(s) = W(s)\frac{1}{s}$

или

$$W(s) = L\{w(t)\} = sH(s) = sL\{h(t)\}.$$

Т. к. при нулевых начальных условиях умножению изображения на s соответствует дифференцирование оригинала, из последнего равенства находим

$$w(t) = h'(t). \quad (2.37)$$

Весовая и переходная функции, как и передаточная функция, являются исчерпывающими характеристиками системы (звена) при нулевых начальных условиях. По ним можно однозначно определить выходную величину при произвольном входном воздействии. Действительно, исходя из уравнения (2.26) с помощью теоремы о свертке можем записать

$$y(t) = \int_0^t w(t-\tau)u(\tau)d\tau = \int_0^t w(\tau)u(t-\tau)d\tau. \quad (2.38)$$

Последнее соотношение называется **интегралом Дюамеля**.

Глава 3

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЗВЕНЬЯ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Снова рассмотрим математическую модель динамической системы с одним входом и одним выходом

$$D(p)y(t) = M(p)u(t), \quad (3.1)$$

где $D(p)$ и $M(p)$ - собственный и входной операторы соответственно, причем

$$D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n; \quad (3.2)$$

$$M(p) = b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m. \quad (3.3)$$

Многочлены (3.2) и (3.3) можно представить в виде

$$D(p) = a_0(p - \lambda_1) \dots (p - \lambda_n),$$

$$M(p) = b_0(p - \eta_1) \dots (p - \eta_m).$$

Здесь λ_j ($j=1, 2, \dots, n$) - корни многочлена $D(p)$, а η_k ($k=1, 2, \dots, m$) - корни многочлена $M(p)$.

Преобразуя сомножители многочленов $D(p)$ и $M(p)$, отвечающие действительным корням, к виду

$$p - \lambda_j = \frac{1}{T_j}(T_j p + 1),$$

$$p - \eta_k = \frac{1}{\tau_k}(\tau_k p + 1),$$

где $T_j = -\frac{1}{\lambda_j}$, $\tau_k = -\frac{1}{\eta_k}$, а сомножители, отвечающие комплексным корням, к виду

$$(p - \lambda_j)(p - \bar{\lambda}_j) = p^2 - 2\alpha_j p + \alpha_j^2 + \beta_j^2 = \frac{1}{T_j^2}(T_j^2 p^2 + 2\xi_j T_j p + 1),$$

$$(p - \eta_k)(p - \bar{\eta}_k) = \frac{1}{\tau_k^2}(\tau_k^2 p^2 + 2\xi_k \tau_k p + 1),$$

где

$$\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j, \quad \eta_k = \alpha_k + i\beta_k,$$

$$T_j = \frac{1}{\sqrt{\alpha_j^2 + \beta_j^2}}, \quad \xi_j = -\frac{\alpha_j}{\sqrt{\alpha_j^2 + \beta_j^2}},$$

$$\tau_k = \frac{1}{\sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2}}, \quad \xi_k = -\frac{\alpha_k}{\sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2}},$$

и полагая, что многочлен $D(p)$ имеет ν' нулевых корней, уравнение (3.1) можно переписать следующим образом

$$\left[p^{\nu'} \prod_{j=1}^{\nu'} (T_j p + 1) \prod_{j=1}^{\mu} (T_j^2 p^2 + 2\xi_j T_j p + 1) \right] y(t) =$$

$$= \left[c \prod_{k=1}^r (\tau_k p + 1) \prod_{k=1}^q (\tau_k^2 p^2 + 2\xi_k \tau_k p + 1) \right] u(t), \quad (3.4)$$

где $c = \frac{b_m}{a_n}$.

Таким образом, передаточная функция

$$W(p) = \frac{c \prod_{k=1}^r (\tau_k p + 1) \prod_{k=1}^q (\tau_k^2 p^2 + 2\xi_k \tau_k p + 1)}{p^{\nu'} \prod_{j=1}^{\nu'} (T_j p + 1) \prod_{j=1}^{\mu} (T_j^2 p^2 + 2\xi_j T_j p + 1)}. \quad (3.5)$$

В передаточную функцию (3.5) входят шесть различных видов сомножителей:

$$c, \quad \tau_k p + 1, \quad \tau_k^2 p^2 + 2\xi_k \tau_k p + 1, \quad \frac{1}{p}, \quad \frac{1}{T_j p + 1}, \quad \frac{1}{T_j^2 p^2 + 2\xi_j T_j p + 1},$$

соответствующих передаточным функциям **элементарных (типовых) звеньев**.

Таблица 3.1

Уравнения и передаточные функции элементарных звеньев

Наименование звена	Уравнение	Передаточная функция
Пропорциональное (безынерционное, усилительное)	$y(t) = ku(t), \quad k > 0$	k
Интегрирующее	$\frac{dy}{dt} = ku(t), \quad k > 0$	$\frac{k}{p}$
Дифференцирующее	$y = k \frac{du}{dt}, \quad k > 0$	kp
Апериодическое 1-го порядка	$T \frac{dy}{dt} + y = ku,$ $T > 0, \quad k > 0$	$\frac{k}{Tp + 1}$
Изодромное	$\frac{dy}{dt} = ku + k_1 \frac{du}{dt},$ $k > 0, \quad k_1 > 0$	$\frac{k(Tp + 1)}{p}$
Дифференцирующее с замедлением	$T \frac{dy}{dt} + y = k \frac{du}{dt},$ $T > 0, \quad k > 0$	$\frac{kp}{Tp + 1}$
Колебательное	$T^2 \frac{d^2y}{dt^2} + 2\xi T \frac{dy}{dt} + y = ku,$ $T > 0, \quad k > 0, \quad 0 < \xi < 1$	$\frac{k}{T^2 p^2 + 2\xi Tp + 1}$
Консервативное	$T^2 \frac{d^2y}{dt^2} + y = ku,$ $T > 0, \quad k > 0$	$\frac{k}{T^2 p^2 + 1}$
Апериодическое 2-го порядка	$T^2 \frac{d^2y}{dt^2} + 2\xi T \frac{dy}{dt} + y = ku,$ $T > 0, \quad k > 0, \quad \xi \geq 1$	$\frac{k}{T^2 p^2 + 2\xi Tp + 1}$
Интегрирующее с замедлением	$T \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = ku,$ $T > 0, \quad k > 0$	$\frac{k}{p(Tp + 1)}$

Упражнение. Построить частотные и временные характеристики элементарных звеньев из табл. 3.1.

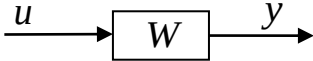
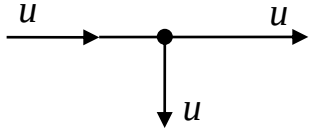
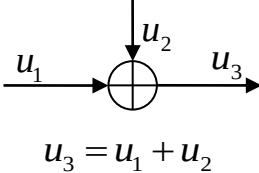
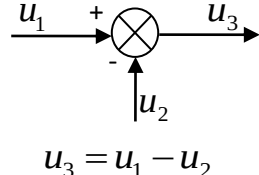
Глава 4

СТРУКТУРНЫЕ СХЕМЫ И ГРАФЫ В ТАУ

САУ можно рассматривать как комбинацию динамических звеньев с определенными типовыми или нетиповыми передаточными функциями. Изображение САУ в виде совокупности динамических звеньев с указанием связи между ними называется **структурной схемой**. Структурная схема может быть составлена на основе известных уравнений системы, и наоборот, уравнения в системе могут быть получены по структурной схеме. Первая задача может иметь различные варианты решения (различные структурные схемы), тогда как вторая задача имеет всегда единственное решение.

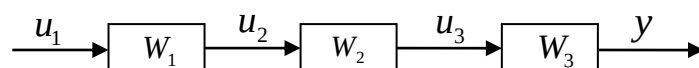
Таблица 4.1

Элементы структурных схем

Наименование	Обозначение
Звено с одним входом	
Узел (разветвление)	
Сумматор	 $u_3 = u_1 + u_2$
Элемент сравнения	 $u_3 = u_1 - u_2$

Рассмотрим простейшие сочетания звеньев.

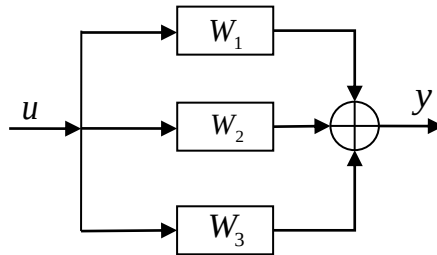
Последовательное соединение звеньев



Нетрудно показать, что результирующая передаточная функция равна произведению передаточных функций отдельных звеньев:

$$y = W_3 u_3 = W_3 (W_2 u_2) = W_3 (W_2 (W_1 u_1)) = (W_3 W_2 W_1) u_1 = W u_1.$$

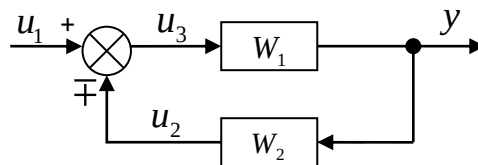
Параллельное соединение звеньев



Т. к. сигналы на выходе всех звеньев складываются, то результирующая передаточная функция равна сумме передаточных функций:

$$y = W_1 u + W_2 u + W_3 u = (W_1 + W_2 + W_3)u = Wu.$$

Обратные связи



Обратная связь может быть положительной, если сигнал u_2 , снимаемый с выхода второго звена суммируется с сигналом u_1 на входе, и отрицательным, если u_2 вычитается.

$$y = W_1 u_3 = W_1 (u_1 \mp u_2) = W_1 (u_1 \mp W_2 y);$$

$$(1 \pm W_1 W_2) y = W_1 u_1;$$

$$W = \frac{W_1}{1 \pm W_1 W_2}.$$

Знак "минус" относится к положительной обратной связи, а знак "плюс" - к отрицательной.

Таблица 4.2

Правила преобразования структурных схем

Операция	Исходная схема	Эквивалентная схема
1	2	3
Перестановка сумматоров или элементов сравнения	$u_5 = u_1 - u_2 + u_3 + u_4$	$u_5 = u_1 - u_2 + u_3 + u_4$
Перестановка звеньев		

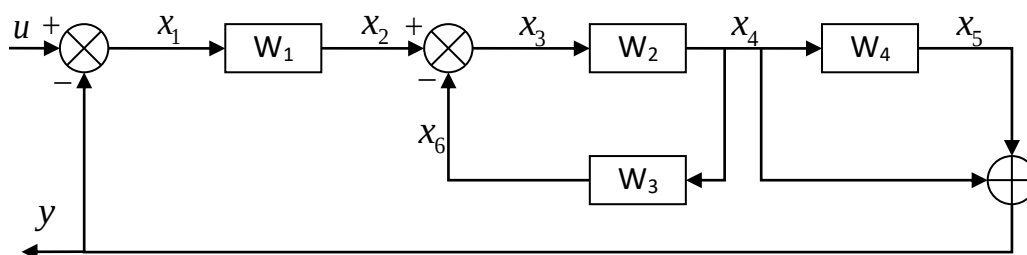
1	2	3
Перенос узла с выхода на вход сумматора		
Перенос узла с входа на выход сумматора		
Перенос узла с выхода на вход звена		
Перенос узла с входа на выход звена		
Перенос сумматора с выхода на вход звена		
Перенос сумматора с входа на выход звена		
Замена звеньев прямой и обратной цепей		
Переход к единичной обратной связи		

Подобно структурным схемам графы прохождения сигналов используются для наглядного изображения математических зависимостей в САУ.

Графом называется множество вершин и ребер. Всякому ребру отвечают две вершины - начало и конец ребра. Каждая вершина, отмеченная на графе кружком или точкой, соответствует некоторой переменной рассматриваемой системы. Каждое ребро графа, изображаемое в виде линии со стрелкой, указывающей направление прохождения сигнала, имеет вершину - начало (входную величину) и вершину - конец (выходную величину). Если из вершины выходят несколько ребер, то все они имеют одинаковую входную величину. Выходная величина ребра получается как результат преобразования, осуществляемого соответствующей ребру передаточной функцией, входной величины ребра. Если к одной вершине подходит несколько ребер, то величина, соответствующая этой вершине, получается алгебраическим суммированием выходных величин этих ребер. Между структурной схемой и графом прохождения сигналов имеется прямое соответствие: прямоугольник структурной схемы соответствует ребру, а линия передачи сигнала - вершине графа.

Пример.

Структурная схема:



Эквивалентный граф прохождения сигналов:

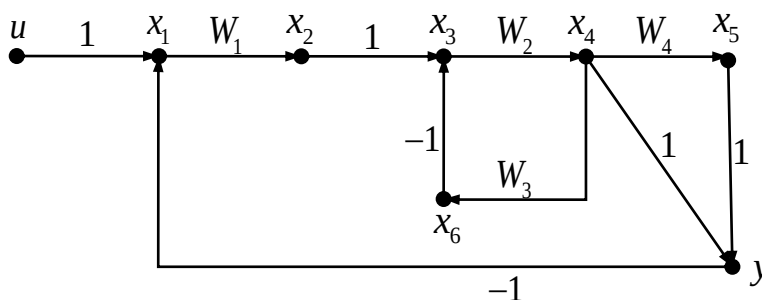
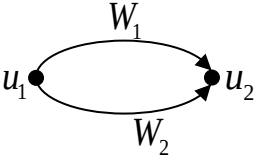
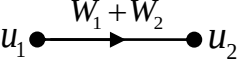
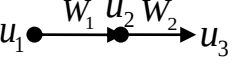
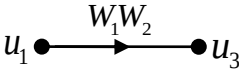
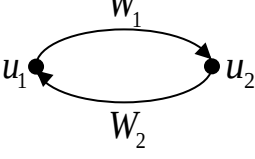
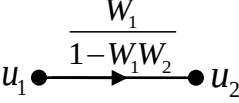
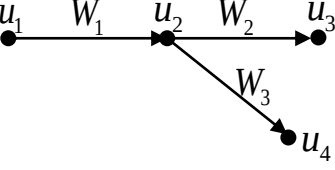
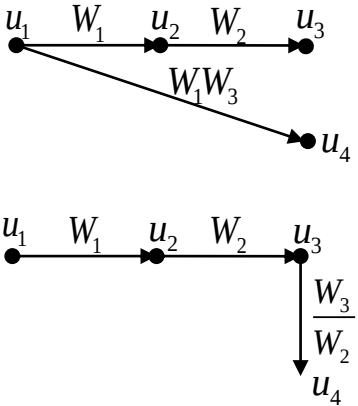
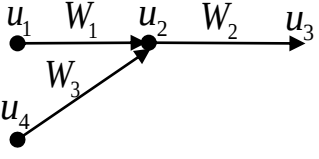
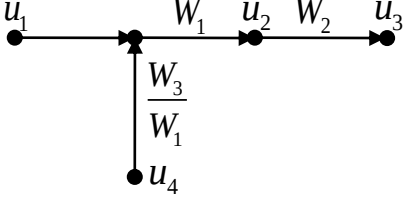


Таблица 4.3

Правила преобразования графов

Исходная схема	Эквивалентная схема
	
	
	
	
	

УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ САУ

5.1. УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ВХОДУ

Звено называется *устойчивым по входу*, если при любом ограниченном входном воздействии $u(t)$ и нулевых начальных условиях выходная реакция $y(t)$ является ограниченной при любом конечном $t \geq 0$ и при $t \rightarrow \infty$, и называется неустойчивым по входу в противном случае.

Об устойчивости по входу можно судить по свойствам весовой функции $w(t)$.

Теорема 1. Для того чтобы звено, описываемое уравнением

$$D(p)y(t) = M(p)u(t) \quad (3.6)$$

было устойчивым по входу необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:

$$\int_0^{\infty} |w(\tau)| d\tau < \infty. \quad (3.7)$$

Доказательство.

Достаточность. Запишем интеграл Дюамеля:

$$y(t) = \int_0^t w(\tau)u(t-\tau)d\tau, \quad t \geq 0.$$

Пусть $u(t)$ - произвольная ограниченная функция, т.е. $|u(t)| \leq C_u < \infty, t \geq 0$. Тогда

$$|y(t)| \leq \int_0^t |w(\tau)||u(t-\tau)|d\tau \leq C_u \int_0^t |w(\tau)|d\tau \leq C_u \int_0^{\infty} |w(\tau)|d\tau = C_y, \quad t \geq 0.$$

Необходимость (от противного). Пусть звено устойчиво по входу и условие (5.2) не выполняется. Выберем

$$u(T-\tau) = \begin{cases} C_u \operatorname{sign} w(\tau), & T \geq \tau; \\ 0, & T < \tau. \end{cases} \quad (3.8)$$

$$|y(T)| = \left| \int_0^T w(\tau)u(T-\tau)d\tau \right| = C_u \left| \int_0^T w(\tau)\operatorname{sign} w(\tau)d\tau \right| = C_u \int_0^T |w(\tau)|d\tau. \quad (3.9)$$

Если условие (5.2) нарушено, то правая часть (5.4), и, следовательно, $|y(T)|$ при достаточно большом T может оказаться больше любого наперед заданного числа. Противоречие. Теорема доказана.

Если пользоваться теоремой 1 непосредственно, то для проверки устойчивости придется вычислять весовую функцию, а затем проверять выполнения условия (5.2). Оказывается, что имеется прекрасная возможность обойти обе эти операции.

Теорема 2. Для выполнения условия (5.2) необходимо и достаточно, чтобы передаточная функция $W(s) = \frac{M(s)}{D(s)}$ была ограничена по модулю при любых значениях комплексной переменной s с неотрицательной вещественной частью.

Доказательство.

Необходимость вытекает из определения весовой функции как оригинала для $W(s)$ и оценки

$$|W(s)| = \left| \int_0^{\infty} e^{-s\tau} w(\tau) d\tau \right| \leq \int_0^{\infty} |e^{-s\tau}| |w(\tau)| d\tau \leq \int_0^{\infty} |w(\tau)| d\tau.$$

При этом использовано свойство

$$|e^{-s\tau}| = |e^{-(\text{Re } s + i \text{Im } s)\tau}| = e^{-\text{Re } s \tau} \leq 1, \quad \text{Re } s \geq 0 \quad (\tau \geq 0).$$

Доказательство *достаточности* требует более детального анализа свойств $W(s)$ как дробно-рациональной функции и выяснения общего вида функции $w(t)$.

Обозначим $\lambda_i, i=1, \dots, n$, корни многочлена $D(s)$. Для простоты предположим, что все они различны. Тогда функция $W(s)$ представима в виде

$$W(s) = \frac{M(s)}{D(s)} = \bar{M}(s) + \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{s - \lambda_i}, \quad c_i = \text{const},$$

где $\bar{M}(s) \equiv 0$, если $\deg M(s) < \deg D(s)$, в противном случае $\bar{M}(s)$ - частное от деления $M(s)$ на $D(s)$.

Ограниченность $|W(s)|$ при $\text{Re } s \geq 0$ эквивалентна требованию, чтобы

1. $\bar{M}(s) = \text{const}$, т.е. степень $M(s)$ была не выше степени $D(s)$;
2. $\text{Re } \lambda_i < 0$.

Тогда

$$w(t) = \bar{M}(s)\delta(t) + \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t}$$

и

$$\begin{aligned} \int_0^t |w(\tau)| d\tau &= \int_0^t \left| \bar{M}\delta(\tau) + \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i \tau} \right| d\tau \leq |\bar{M}| \int_0^t \delta(\tau) d\tau + \sum_{i=1}^n |c_i| \cdot \int_0^t |e^{\lambda_i \tau}| d\tau = \\ &= |\bar{M}| + \sum_{i=1}^n \frac{|c_i|}{\text{Re } \lambda_i} \cdot (e^{\text{Re } \lambda_i t} - 1), \end{aligned}$$

так что

$$\int_0^{\infty} |w(\tau)| d\tau \leq |\bar{M}| + \sum_{i=1}^n \frac{|c_i|}{|\operatorname{Re} \lambda_i|} < \infty.$$

В случае, когда имеются кратные корни, результат сохраняет силу, хотя выкладки имеют более громоздкий характер. Теорема доказана.

Как следствие из теоремы 2 можно сформулировать следующий простой окончательный результат.

Критерий устойчивости по входу. Устойчивость по входу имеет место, если выполняются два условия:

1. Степень многочлена $D(s)$ в знаменателе передаточной функции $W(s)$ не меньше степеней многочлена $M(s)$ в ее числителе (условие строгой реализуемости передаточной функции).
2. Многочлен $D(s)$ (характеристический многочлен) не имеет других корней, кроме корней с отрицательной вещественной частью (условие устойчивости характеристического многочлена).

5.2. УСТОЙЧИВОСТЬ ПО НАЧАЛЬНЫМ УСЛОВИЯМ

Формула

$$y(t) = \int_0^t w(\tau) u(t - \tau) d\tau, \quad t \geq 0,$$

была получена в результате решения дифференциального уравнения при нулевых начальных условиях.

При произвольных начальных условиях вид решения меняется. Из теории дифференциальных уравнений известно, что общее решение неоднородного уравнения (5.1) можно записать как сумму общего решения $\tilde{y}(t)$ соответствующего однородного уравнения

$$D(p)\tilde{y}(t) = 0$$

и любого частного решения $\tilde{\tilde{y}}(t)$ неоднородного уравнения

$$D(p)\tilde{\tilde{y}}(t) = M(p)u(t).$$

Решение $\tilde{y}(t)$ представимо в виде

$$\tilde{y}(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t}, \quad (3.10)$$

где λ_i - корни характеристического многочлена $D(s)$, а C_i - либо константы (если все корни простые), либо многочлены от t , имеющие степень ниже кратности корня. Если в качестве частного решения взять решение, соответствующее нулевым начальным условиям, т.е. решение

$$\tilde{y}(t) = \int_0^t w(\tau)u(t-\tau)d\tau,$$

то общее решение уравнения (5.1) можно записать в виде

$$y(t) = \tilde{y}(t) + \int_0^t w(\tau)u(t-\tau)d\tau. \quad (3.11)$$

Таким образом, наличие ненулевых начальных условий приводит к появлению $\tilde{y}(t)$, искажающего характер связи между входом и выходом в интеграле Дюамеля.

Звено называется **устойчивым по начальным условиям**, если $\tilde{y}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Из соотношения (5.6) сразу вытекает следующий результат.

Критерий устойчивости по начальным условиям. Устойчивость по начальным условиям имеет место, если характеристический многочлен не имеет других корней, кроме корней с отрицательной вещественной частью, т.е. $D(s)$ является устойчивым.

Приведенный критерий устойчивости по начальным условиям совпадает со вторым условием критерия устойчивости по входу, так что при выполнении обоих условий можно употреблять более короткий термин – **устойчивое звено**. Соответствующую передаточную функцию $W(s)$ также называют **устойчивой передаточной функцией**.

5.3. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ

Условием устойчивости линейной системы является расположение всех корней характеристического уравнения (полюсов передаточной функции) в левой комплексной полуплоскости. Вопрос о корнях $D(s)$ может быть решен непосредственно. При этом с повышением порядка системы трудности нахождения этих корней существенно возрастают. На практике для суждения об устойчивости САУ не требуется находить корни ее характеристического уравнения, т.к. существуют косвенные признаки, по которым можно судить о знаках действительных частей этих корней и тем самым об устойчивости системы, не решая самого характеристического уравнения. Эти косвенные признаки называются критериями устойчивости.

Теорема 3 (теорема Стодолы). Если многочлен

$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n \quad (3.12)$$

с $a_0 > 0$ устойчив, то все его коэффициенты положительны.

Доказательство. Используем разложение многочлена $D(s)$ на простейшие вещественные двучлены и трехчлены. Каждому вещественному корню λ_i соответствует двучлен $s - \lambda_i$, а каждой паре комплексно-

сопряженных корней $\alpha_j \pm i\beta_j$ соответствует трехчлен $(s - \alpha_j)^2 + \beta_j^2$. Если все $\lambda_k < 0$ и $\alpha_j < 0$, то коэффициенты во всех двучленах и трехчленах положительны, и, следовательно, положительны коэффициенты полинома $D(s)$, являющегося их произведением.

Отметим, что положительность коэффициентов дает только необходимое, но не достаточное условие устойчивости. Хотя (как нетрудно проверить) оно будет достаточным при $n = 1$ и $n = 2$.

5.3.1. КРИТЕРИЙ РАУСА

Критерий устойчивости Рауса (английский математик; критерий предложен в 1877 г.) формулируется в табличной форме. Таблица Рауса состоит из коэффициентов c_{ij} , связанных с коэффициентами $a_0, a_1, \dots, a_n$ характеристического полинома $D(s)$.

Таблица имеет $n + 1$ строку. В первую строку записывают коэффициенты с четными индексами: $c_{11} = a_0$, $c_{12} = a_2$, $c_{13} = a_4$ и т.д. Во вторую строку - коэффициенты с нечетными индексами: $c_{21} = a_1$, $c_{22} = a_3$, $c_{23} = a_5$ и т.д. Остальные элементы таблицы вычисляют по формулам

$$c_{ik} = c_{i-2,k+1} - \frac{c_{i-2,1}}{c_{i-1,1}} c_{i-1,k+1}, \quad i = 3, 4, \dots, n+1. \quad (3.13)$$

Критерий Рауса. Для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты первого столбца таблицы Рауса были положительны, т.е.

$$c_{11} > 0, c_{21} > 0, \dots, c_{n+1,1} > 0. \quad (3.14)$$

Если какой-либо коэффициент отрицателен, то система неустойчива. Число перемен знаков у коэффициентов первого столбца равно числу полюсов передаточной функции $W(s)$, расположенных в правой полуплоскости. При этом обращение в нуль какого-либо коэффициента трактуется как перемена знака.

Структура таблицы Рауса такова, что $c_{i,m+s} = 0$ ($s = 1, 2, \dots$), если $c_{im} = 0$.

5.3.2. КРИТЕРИИ ГУРВИЦА И ЛЬЕНАРА-ШИПАРА

Перейдем к рассмотрению критерия устойчивости Гурвица (немецкий математик; критерий предложен в 1895 г.).

Для характеристического многочлена $D(s)$ из соотношения (5.7) составим квадратную матрицу коэффициентов размера $n \times n$.

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & a_9 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & a_8 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

Эта матрица составляется следующим образом. По диагонали от левого верхнего до правого нижнего углов выписываются все коэффициенты по порядку от a_1 до a_n . Каждая строка дополняется коэффициентами с возрастающими индексами слева направо так, чтобы чередовались строки с нечетными и четными индексами. В случае отсутствия данного коэффициента, а также если индекс его меньше нуля или больше n , на месте его пишется нуль.

Критерий Гурвица сводится к тому, что при $a_0 > 0$ (это всегда можно обеспечить умножением многочлена на (-1)) должны быть больше нуля все n определителей Гурвица (главных миноров), получаемых из квадратной матрицы коэффициентов. Определители Гурвица составляются по следующему правилу:

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0 \text{ и т.д.}$$

Последний определитель включает в себя всю матрицу. Но т.к. в последнем столбце матрицы все элементы, кроме нижнего, равны нулю, то последний определитель Гурвица выражается через предпоследний следующим образом: $\Delta_n = a_n \Delta_{n-1} > 0$. В устойчивой системе $\Delta_{n-1} > 0$. Поэтому условие положительности Δ_n сводится к условию $a_n > 0$, т.е. к положительности свободного члена характеристического полинома $D(s)$.

Раскрывая определители, фигурирующие в общей формулировке критерия устойчивости Гурвица, можно получить в виде частных случаев критерий устойчивости для системы первого, второго, третьего, четвертого и более высоких порядков. Практическое использование этого критерия ограничивается системами четвертого порядка. При $n \geq 5$ удобнее применять одну из модификаций критерия Гурвица - критерий Лъенара-Шипара (1914 г.), который более прост и требует раскрытия меньшего числа определителей, чем критерий Гурвица.

Критерий Лъенара-Шипара. В случае, когда выполнены необходимые условия устойчивости характеристического многочлена ($a_i > 0, i = 0, 1, \dots, n$), необходимые и достаточные условия устойчивости сводятся к положительности определителей Гурвица с четными или нечетными индексами.

Упражнения.

1. Определить, при каких значениях параметра α устойчивы многочлены

а) $s^2 + (2 - \alpha^2)s + \alpha$;

Ответ: $0 < \alpha < \sqrt{2}$.

б) $s^3 + s^2 + \alpha^2 s + 5\alpha$.

Ответ: $\alpha > 5$.

2. Пользуясь критериями Рауса и Ляпунова-Шипара, исследовать на устойчивость следующие многочлены:

а) $s^4 + 7s^3 + 19s^2 + 23s + 10$;

Ответ: устойчив.

б) $s^5 + 7s^4 + 33s^3 + 88s^2 + 122s + 60$.

Ответ: устойчив.

5.4. ЧАСТОТНЫЕ КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ

5.4.1. КРИТЕРИЙ МИХАЙЛОВА

Критерий устойчивости Михайлова (советский ученый; критерий предложен в 1938 г.) основан на использовании принципа аргумента из теории функции комплексного переменного.

Положим в характеристическом полиноме системы $s = i\omega$. Получим

$$D(i\omega) = a_0(i\omega)^n + a_1(i\omega)^{n-1} + \dots + a_n = X(\omega) + iY(\omega),$$

где $X(\omega) = a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 - \dots$; $Y(\omega) = \omega(a_{n-1} - a_{n-3}\omega^2 + a_{n-5}\omega^4 - \dots)$.

При изменении частоты ω вектор $D(i\omega)$ будет описывать своим концом в комплексной плоскости некоторую кривую, называемую **кривой (частотным годографом) Михайлова**.

Пусть $D(s_j) = 0$, $s_j = \alpha_j + i\beta_j$, $j = \overline{1, n}$. Тогда

$$D(i\omega) = a_0(i\omega - s_1)(i\omega - s_2)\dots(i\omega - s_n)$$

и

$$\arg D(i\omega) = \arg(i\omega - s_1) + \arg(i\omega - s_2) + \dots + \arg(i\omega - s_n). \quad (3.16)$$

Если считать положительным направлением вращение против часовой стрелки, то, в соответствии с рис. 5.1, при изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$ вектор $i\omega - s_j$ повернется на угол π , а вектор $i\omega - s_k$ - на угол $(-\pi)$.

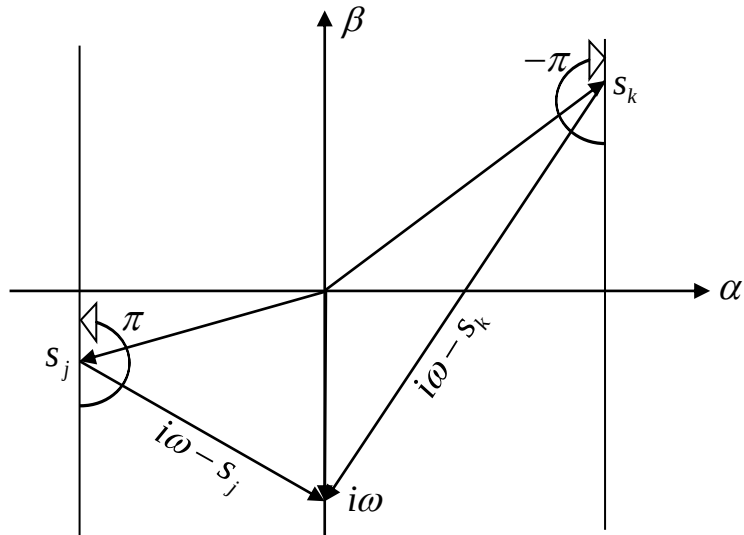


Рис. 5.1

Предположим для определенности, что характеристический полином $D(s)$ имеет m правых корней и $(n - m)$ - левых. Тогда изменение (приращение) аргумента вектора $D(i\omega)$, равное сумме углов поворота векторов $i\omega - s_l$, $l = 1, \dots, n$, при изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$ равно

$$\Delta \arg D(i\omega) \Big|_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} = \pi(n - m) - \pi m = \pi(n - 2m). \quad (3.17)$$

При изменении частоты ω от 0 до $+\infty$ вектор $i\omega - s_j$ повернется на угол $\frac{\pi}{2} - \varphi$, а вектор $i\omega - \bar{s}_j$ - на угол $\frac{\pi}{2} + \varphi$ (см. рис. 5.2).

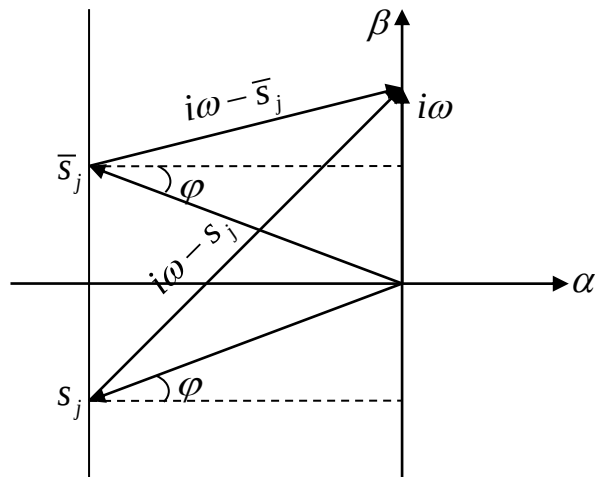


Рис. 5.2

Общее приращение аргумента произведения этих векторов при изменении ω от 0 до $+\infty$ равно π . Следовательно, изменение аргумента вектора $D(i\omega)$ при изменении ω от 0 до $+\infty$ равно

$$\Delta \arg D(i\omega) \Big|_{\omega=0}^{\omega=+\infty} = \frac{\pi}{2}(n - 2m). \quad (3.18)$$

Из соотношения (5.12) видно, что число правых корней m будет равно нулю, если

$$\Delta \arg D(i\omega) \Big|_{\omega=0}^{\omega=+\infty} = \frac{\pi}{2}n. \quad (3.19)$$

Для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы все n корней характеристического уравнения были левыми, т.е. кроме (5.13) мы должны потребовать еще выполнения условия

$$D(i\omega) \neq 0. \quad (3.20)$$

Соотношения (5.13) и (5.14) позволяют сформулировать **критерий устойчивости Михайлова**: для того, чтобы САУ была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы вектор кривой Михайлова $D(i\omega)$ при изменении ω от 0 до $+\infty$ повернулся, нигде не обращаясь в нуль, вокруг начала координат против часовой стрелки на угол $\frac{\pi}{2}n$, где n - порядок характеристического многочлена.

Для устойчивой системы все коэффициенты характеристического полинома положительны. Следовательно, $D(0) = a_n > 0$, т.е. кривая Михайлова начинается при $\omega = 0$ на вещественной положительной полуоси. Если система устойчива, то с ростом ω увеличивается аргумент вектора $D(i\omega)$ (см. соотношение (5.11)), т.е. вектор $D(i\omega)$ поворачивается только против часовой стрелки.

Для устойчивых систем кривая Михайлова имеет плавную спиралевидную форму, причем ее конец уходит в бесконечность в том квадранте координатной плоскости, номер которого равен степени характеристического уравнения.

Дадим еще одну формулировку **критерия устойчивости Михайлова**: для того, чтобы САУ была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы кривая (годограф) Михайлова при изменении ω от 0 до $+\infty$ начиналась на вещественной положительной полуоси, обходила только против часовой стрелки последовательно n квадрантов координатной плоскости, где n - порядок характеристического уравнения.

Кривые Михайлова для
устойчивых систем

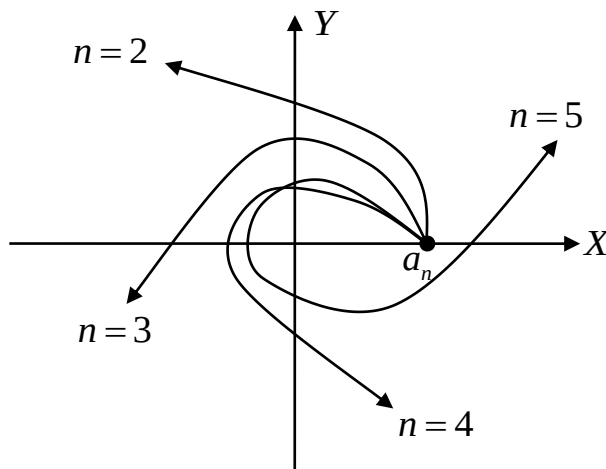


Рис. 5.3

Кривые Михайлова для
неустойчивых систем

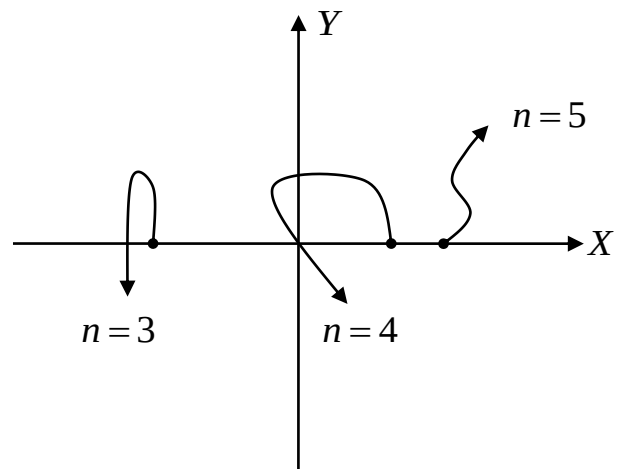


Рис. 5.4

Упражнения.

Построить кривую Михайлова для следующих характеристических многочленов, сделать вывод об устойчивости САУ:

а) $2s^3 + 6s^2 + 10s + 15$;

Ответ: устойчива.

в) $3s^5 + 10s^4 + 5s^3 - 7s^2 + s + 100$.

Ответ: неустойчива.

б) $12s^4 + 3s^3 + 2s^2 + 4s + 50$;

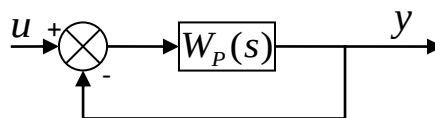
Ответ: неустойчива.

г) $s^6 + 6s^5 + 15s^4 + 20s^3 + 15s^2 + 6s + 1$.

Ответ: устойчива.

5.4.2. КРИТЕРИЙ НАЙКВИСТА

Критерий устойчивости Найквиста (американский ученый; критерий предложен в 1932 г.) позволяет судить об устойчивости замкнутой системы по АФЧХ разомкнутой системы.



Пусть передаточная функция разомкнутой системы

$$W_p(s) = \frac{R(s)}{Q(s)}, \quad m = \deg R(s) \leq \deg Q(s) = n.$$

Тогда передаточная функция замкнутой системы равна

$$W_3(s) = \frac{W_p(s)}{1 + W_p(s)} = \frac{R(s)}{R(s) + Q(s)} = \frac{R(s)}{D(s)}, \quad \deg D(s) = n.$$

Введем в рассмотрение вспомогательную функцию

$$\Psi(s) = 1 + W_p(s) = \frac{D(s)}{Q(s)}. \quad (3.21)$$

Полагая в (5.16) $s = i\omega$, получим

$$\Psi(i\omega) = \frac{D(i\omega)}{Q(i\omega)}.$$

Пусть характеристическое уравнение замкнутой системы $D(s) = 0$ имеет k правых корней и $(n - k)$ левых корней, а характеристическое уравнение разомкнутой системы $Q(s) = 0$ имеет l правых и $(n - l)$ левых корней. При изменении частоты ω от $-\infty$ до $+\infty$ изменение угла поворота вектора $\Psi(i\omega)$, с учетом формулы (5.12), будет равно

$$\begin{aligned} \Delta \arg \Psi(i\omega) \Big|_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} &= \Delta \arg D(i\omega) \Big|_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} - \Delta \arg Q(i\omega) \Big|_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} = \\ &= \pi \left[(n - 2k) - (n - 2l) \right] = 2\pi(l - k). \end{aligned}$$

Для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы все корни ее характеристического уравнения были левыми, т.е. $k = 0$. Следовательно, суммарный поворот вектора $\Psi(i\omega)$ устойчивой системы вокруг начала координат должен быть равен

$$\Delta \arg \Psi(i\omega) \Big|_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} = 2\pi l.$$

Если рассматривать только положительные частоты, угол поворота вектора $\Psi(i\omega)$ будет вдвое меньше:

$$\Delta \arg \Psi(i\omega) \Big|_{\omega=0}^{\omega=+\infty} = \pi l = 2\pi \frac{l}{2}.$$

Таким образом, если разомкнутая система является неустойчивой и имеет l правых корней, то замкнутая система будет устойчива тогда и только тогда, когда АФЧХ вспомогательной функции $\Psi(i\omega)$ при изменении частоты ω от 0 до $+\infty$ охватывает начало координат в положительном направлении $\frac{l}{2}$ раз. Отметим, что число оборотов вектора $\Psi(i\omega)$ вокруг начала координат равно числу оборотов вектора $W_p(i\omega)$ вокруг точки $(-1; 0)$.

Критерий Найквиста: если разомкнутая САУ неустойчива, то для того чтобы замкнутая САУ была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы АФЧХ разомкнутой системы $W_p(i\omega)$ при изменении частоты ω от 0 до $+\infty$ охватывала точку $(-1; 0)$ в положительном направлении $\frac{l}{2}$ раз, где l - число правых корней характеристического уравнения разомкнутой системы.

Если САУ в разомкнутом состоянии устойчива, т.е. $l = 0$, то приращение аргумента вектора $\Psi(i\omega)$ равно нулю:

$$\Delta \arg \Psi(i\omega) \Big|_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} = 0.$$

Это означает, что для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы АФЧХ $\Psi(i\omega)$ не охватывала начало координат или чтобы АФЧХ $W_p(i\omega)$ не охватывала точку $(-1; 0)$ при изменении частоты ω от 0 до $+\infty$.

Дадим еще одну формулировку **критерия Найквиста**: если разомкнутая САУ *устойчива*, то для устойчивости замкнутой САУ необходимо и достаточно чтобы АФЧХ разомкнутой САУ $W_p(i\omega)$ не охватывала точку $(-1; 0)$ при изменении частоты ω от 0 до $+\infty$.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ МНОГОМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ САУ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ

К *многомерным* относятся САУ, имеющие несколько выходных величин $y_i, i = \overline{1, m}$. Многомерная система предполагает наличие *многомерного объекта управления (ОУ)*, который характеризуется существованием нескольких входов (точек приложения управляющих и возмущающих воздействий) и нескольких выходов (см. рис. 6.1).

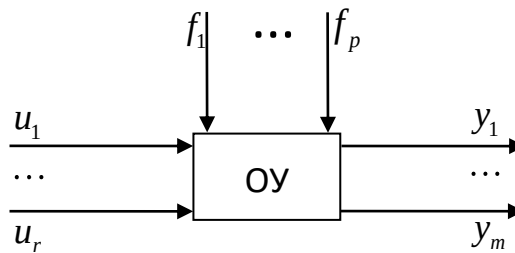


Рис. 6.1

Уравнения движения линейного многомерного объекта имеют вид:

$$D(p)y(t) = M(p)u(t) + N(p)f(t) \quad (3.22)$$

где $D(p), M(p), N(p)$ - матрицы операторных коэффициентов размерами $m \times m, m \times r$ и $m \times p$ соответственно, $y^T(t) = [y_1(t), \dots, y_m(t)]$, $u^T(t) = [u_1(t), \dots, u_r(t)]$, $f^T(t) = [f_1(t), \dots, f_p(t)]$.

Перейдя к изображениям Лапласа при нулевых начальных условиях, запишем матричное уравнение (6.1) в виде

$$D(s)Y(s) = M(s)U(s) + N(s)F(s). \quad (3.23)$$

Если матрица $D(s)$ невырожденная, то, умножив левую и правую части (6.2) слева на обратную матрицу $D^{-1}(s)$, получим

$$Y(s) = W_u(s)U(s) + W_f(s)F(s). \quad (3.24)$$

Здесь введены матрицы передаточных функций объекта для управляющих величин

$$W_u(s) = [W_{ij}^u(s)]_{m \times r} = D^{-1}(s)M(s) \quad (3.25)$$

и для возмущений

$$W_f(s) = [W_{ij}^f(s)]_{m \times p} = D^{-1}(s)N(s). \quad (3.26)$$

Соотношения (6.3) – (6.5) позволяют получить связь между выходными величинами и управляющими и возмущающими воздействиями.

Если для каждого элемента матрицы передаточных функций объекта (6.4) или (6.5) найти оригинал, то получится так называемая **матрица Коши (матрица весовых функций)**. Запишем ее, например, для управляющих воздействий

$$w_u(t) = \begin{pmatrix} w_{11}^u(t) & w_{12}^u(t) & \cdots & w_{1r}^u(t) \\ w_{21}^u(t) & w_{22}^u(t) & \cdots & w_{2r}^u(t) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ w_{m1}^u(t) & w_{m2}^u(t) & \cdots & w_{mr}^u(t) \end{pmatrix}.$$

Подав на входы управляющее воздействие $u_i(\tau)$, $i=1, \dots, r$, на основании принципа суперпозиции и интеграла Дюамеля, получим изменение j -ой выходной величины

$$y_j(t) = \sum_{i=1}^r \int_0^t u_i(\tau) w_{ji}^u(t-\tau) d\tau. \quad (3.27)$$

6.1. ПРОСТРАНСТВО СОСТОЯНИЙ

Предположим, что процессы, протекающие в некоторой динамической системе, характеризуются переменными $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, изменяющимися под влиянием воздействий $u = (u_1, \dots, u_r)^T$. Если набор переменных x , таков что задания их значений в некоторый начальный момент $t = t_0$ и задания входных переменных $u(t)$ на промежутке $[t_0; T]$ достаточно для того, чтобы можно было прогнозировать состояние системы, т.е. определить значения $x(t)$ для любого t из промежутка $[t_0; T]$, то набор можно назвать полным. Если набор переменных x полон и, кроме того, существует система дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), u(t), t), \quad (3.28)$$

то переменные x называются **переменными состояния**. Если эти переменные принадлежат n -мерному евклидову пространству X , то это пространство называется **пространством состояний**.

Число переменных состояния, как правило, больше числа интересующих исследователя физических выходных переменных. Кроме того, в результате преобразования уравнений в физических переменных к форме (6.7) не всегда удастся сделать так, чтобы x_i были физическими величинами. Иногда даже от этого отходят умышленно, чтобы получить форму уравнений, наиболее удобную для математической обработки и вычислений. Поэтому в общем

случае x_i являются абстрактными переменными, через которые, конечно, однозначно должны выражаться выходные переменные $y = (y_1, \dots, y_m)^T$:

$$y(t) = h(x(t), t). \quad (3.29)$$

Уравнение (6.7) определяет **модель состояния**, а уравнение (6.8) - **модель наблюдения** динамической системы. Если в соотношениях (6.7), (6.8) $f(\cdot), h(\cdot)$ - линейные функции, то модели называются линейными динамическими.

Представление системы в переменных состояния неоднозначно.

Покажем на примере, как можно перейти от заданной структурной схемы к уравнениям состояния.

Рассмотрим непрерывную систему управления космическим кораблем (см. рис. 6.2), структурная схема которой приведена в книге Б. Куо *Теория и проектирование цифровых систем управления*. – М.: Машиностроение, 1986.

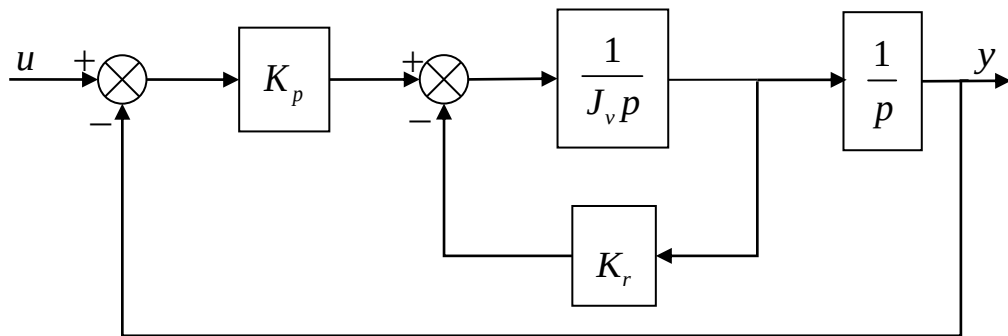


Рис. 6.2

Здесь $K_p = 1,65 \cdot 10^6$ - коэффициент усиления датчика положения; $K_r = 3,17 \cdot 10^5$ - коэффициент усиления датчика скорости; $J_v = 4,1822 \cdot 10^4$ - момент инерции космического корабля.

Система позволяет осуществлять управление положением корабля по одной координате. Для построения системы управления по трем пространственным координатам необходимо добавить две аналогичные системы (предполагается, что в динамике управление координатами может осуществляться независимо).

Найдем передаточную функцию разомкнутой системы:

$$W_p(p) = \frac{K_p}{p(J_v p + K_r)}.$$

Тогда передаточная функция замкнутой системы будет равна:

$$W_3(p) = \frac{W_p(p)}{1 + W_p(p)} = \frac{K_p}{J_v p^2 + K_r p + K_p} = \frac{y}{u},$$

откуда

$$y = \frac{1}{p} \left[\left(-\frac{K_r}{J_v} \right) y + \frac{1}{p} \left(\frac{K_p}{J_v} u - \frac{K_p}{J_v} y \right) \right],$$

что позволяет преобразовать структурную схему (см. рис. 6.3),

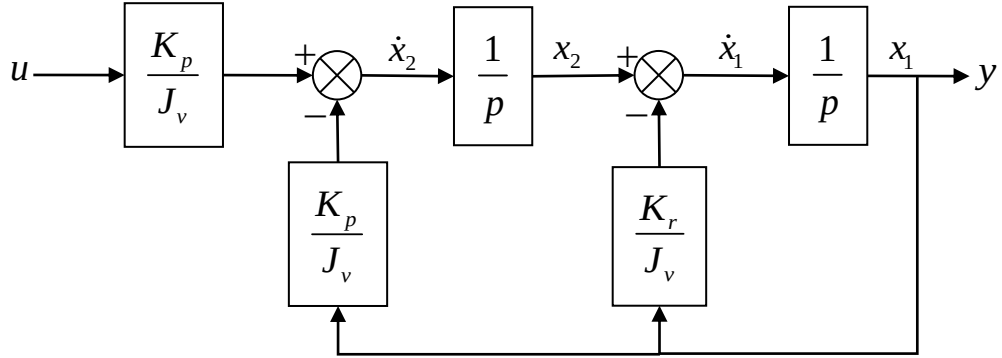


Рис. 6.3

ввести фазовые переменные x_1, x_2 и записать уравнения системы в пространстве состояний:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{K_r}{J_v} & 1 \\ -\frac{K_p}{J_v} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{K_p}{J_v} \end{pmatrix} u(t),$$

$$y(t) = (1, 0) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

6.2. НЕПРЕРЫВНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

Пусть поведение динамического объекта управления описывается обыкновенным дифференциальным уравнением вида

$$\dot{x}(t) = F(t)x(t) + C(t)u(t) + G(t)w(t), \quad (3.30)$$

где t – время, t_0 – начальный момент времени, $x(t)$ – n -вектор состояния системы, $u(t)$ – r -вектор управления системы, $w(t)$ – p -вектор возмущения, $F(t)$ – матрица состояния системы размерности $n \times n$, $C(t)$ – матрица управления системы размерности $n \times r$, $G(t)$ – матрица возмущения системы размерности $n \times p$.

Предположим, что матрицы $F(t)$, $C(t)$, $G(t)$ – непрерывны по t ; векторы $u(t)$, $w(t)$ – непрерывны по t и интегрируемы; $x(t_0)$ – задано.

Выходные данные датчиков, осуществляющих наблюдение за поведением объекта, определяются соотношением:

$$y(t) = H(t)x(t) + v(t), \quad (3.31)$$

где $y(t)$ – m -вектор измерений (наблюдений, выхода), $v(t)$ – m -вектор ошибки измерений, $H(t)$ – матрица наблюдений размерности $m \times n$.

Уравнения (6.9) и (6.10) определяют **непрерывную линейную систему**. Ее структурная схема имеет вид:

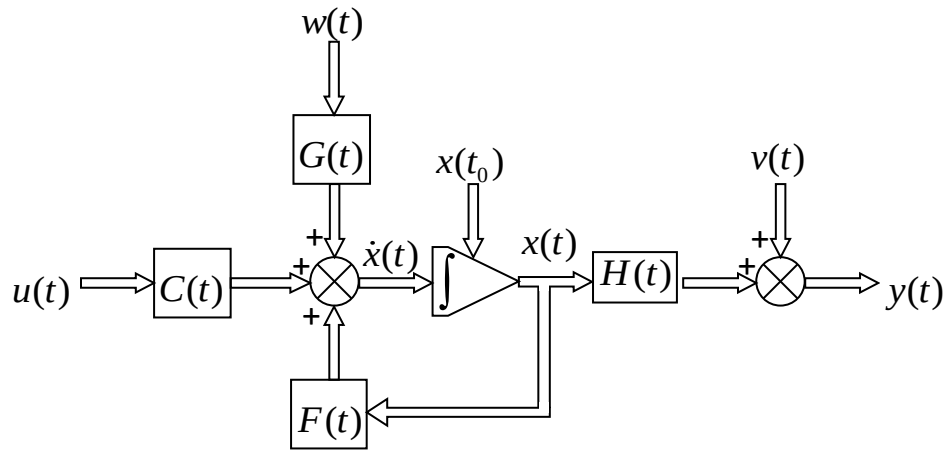


Рис. 6.4

Задача заключается в том, чтобы по входу $u(t)$ и наблюдению $y(t)$ определить состояние системы $x(t)$. Изменение вектора управления $u(t)$ имеет своей целью заставить систему функционировать некоторым желаемым образом.

6.2.1. ПЕРЕХОДНАЯ МАТРИЦА СОСТОЯНИЙ

Для многих аналитических целей или выводов желательно иметь явное решение уравнения (6.9). Такое решение можно получить с помощью переходной матрицы состояний.

Найдем общее решение однородной системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = F(t)x(t). \quad (3.32)$$

Будем искать его в виде

$$x(t) = X(t)x(t_0). \quad (3.33)$$

Тогда с учетом формул (6.11) и (6.12) получим

$$\dot{x}(t) = \dot{X}(t)x(t_0) = F(t)X(t)x(t_0).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \dot{X}(t)x(t_0) - F(t)X(t)x(t_0) &= 0, \\ (\dot{X}(t) - F(t)X(t))x(t_0) &= 0 \quad \forall x(t_0). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\dot{X}(t) = F(t)X(t). \quad (3.34)$$

Здесь $X(t)$ – фундаментальная матрица состояний размером $n \times n$.

Определим для матричного дифференциального уравнения (6.13) начальное условие:

$$\begin{aligned}x(t_0) - X(t_0)x(t_0) &= 0, \\(I - X(t_0))x(t_0) &= 0,\end{aligned}$$

поэтому

$$X(t_0) = I. \quad (3.35)$$

Частное решение неоднородной системы дифференциальных уравнений (6.9) найдем в виде

$$x(t) = X(t)z(t). \quad (3.36)$$

Тогда

$$\dot{x}(t) = \dot{X}(t)z(t) + X(t)\dot{z}(t). \quad (3.37)$$

Подставив (6.16) в (6.9), получим

$$X(t)\dot{z}(t) = C(t)u(t) + G(t)w(t)$$

и

$$\dot{z}(t) = X^{-1}(t)(C(t)u(t) + G(t)w(t)). \quad (3.38)$$

Покажем невырожденность $X(t)$:

$$\begin{aligned}\det X(t) &= \sum_{j_1, \dots, j_n}^{n!} x_{1j_1}(t)x_{2j_2}(t)\dots x_{nj_n}(t)(-1)^{N(j_1, j_2, \dots, j_n)} . \\ \frac{d \det X(t)}{dt} &= \sum_{j_1, \dots, j_n}^{n!} \dot{x}_{1j_1}(t)x_{2j_2}(t)\dots x_{nj_n}(t)(-1)^{N(j_1, j_2, \dots, j_n)} + \dots \\ &\quad + \sum_{j_1, \dots, j_n}^{n!} x_{1j_1}(t)x_{2j_2}(t)\dots \dot{x}_{nj_n}(t)(-1)^{N(j_1, j_2, \dots, j_n)} = \\ &= \begin{vmatrix} \dot{x}_{11}(t) & \dot{x}_{12}(t) & \dots & \dot{x}_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dot{x}_{n1}(t) & \dot{x}_{n2}(t) & \dots & \dot{x}_{nn}(t) \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Рассмотрим первый определитель:

$$\begin{vmatrix} \dot{x}_{11}(t) & \dot{x}_{12}(t) & \dots & \dot{x}_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum_{k=1}^n F_{1k}(t)x_{k1}(t) & \sum_{k=1}^n F_{1k}(t)x_{k2}(t) & \dots & \sum_{k=1}^n F_{1k}(t)x_{kn}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} = \\
 = \begin{vmatrix} F_{11}(t)x_{11}(t) & F_{11}(t)x_{12}(t) & \dots & F_{11}(t)x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} = \\
 = F_{11}(t) \cdot \det X(t).$$

Рассуждая аналогично, получим

$$\frac{d \det X(t)}{dt} = F_{11} \det X(t) + F_{22} \det X(t) + \dots + F_{nn} \det X(t) = \text{Sp} F(t) \cdot \det X(t).$$

Отсюда, разделяя переменные, находим

$$\frac{d \det X(t)}{\det X(t)} = \text{Sp} F(t) dt.$$

Проинтегрировав от t_0 до t , будем иметь

$$\ln \det X(t) = \int_{t_0}^t \text{Sp} F(\tau) d\tau + \ln \det X(t_0)$$

или

$$\det X(t) = \det X(t_0) \exp \left\{ \int_{t_0}^t \text{Sp} F(\tau) d\tau \right\} = \exp \left\{ \int_{t_0}^t \text{Sp} F(\tau) d\tau \right\}.$$

Следовательно, $X(t)$ – невырожденная матрица.

Из (6.17) получаем

$$z(t) = \int_{t_0}^t X^{-1}(\tau) [C(\tau)u(\tau) + G(\tau)w(\tau)] d\tau,$$

что позволяет записать общее решение (6.9) с учетом (6.12), (6.15) в виде

$$x(t) = X(t)x(t_0) + X(t) \int_{t_0}^t X^{-1}(\tau) [C(\tau)u(\tau) + G(\tau)w(\tau)] d\tau. \quad (3.39)$$

Обозначим через

$$\Phi(t, \tau) = X(t)X^{-1}(\tau) \quad (3.40)$$

и назовем $\Phi(t, \tau)$ *переходной матрицей состояний*. Тогда

$$\Phi(t, t) = I \quad (3.41)$$

$$\Phi(t, t_0) = X(t)X^{-1}(t_0) = X(t),$$

т.е. соотношение (6.18) можно переписать в виде

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)[C(\tau)u(\tau) + G(\tau)w(\tau)]d\tau. \quad (3.42)$$

Продифференцировав формулу (6.19) по t , с учетом равенства (6.13) получим

$$\dot{\Phi}_t(t, \tau) = \dot{X}(t)X^{-1}(\tau) = F(t)X(t)X^{-1}(\tau) = F(t)\Phi(t, \tau). \quad (3.43)$$

Дифференциальное уравнение (6.22) с начальным условием (6.20) позволяет определить $\Phi(t, \tau)$.

Свойства переходной матрицы состояний

1. $\Phi(t_2, t_1) = X(t_2)X^{-1}(t_1) = X(t_2)X^{-1}(\tau)X(\tau)X^{-1}(t_1) = \Phi(t_2, \tau)\Phi(\tau, t_1)$.
2. $\Phi^{-1}(t_1, t_2) = (X(t_1)X^{-1}(t_2))^{-1} = X(t_2)X^{-1}(t_1) = \Phi(t_2, t_1)$.

6.2.2. СООТНОШЕНИЕ ВХОД-ВЫХОД

Подставив выражение (6.21) в модель измерения (6.10), получим

$$y(t) = H(t)x(t) + v(t) = H(t)\Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t A(t, \tau)u(\tau)d\tau + \int_{t_0}^t B(t, \tau)w(\tau)d\tau + v(t)$$

где

$$A(t, \tau) = H(t)\Phi(t, \tau)C(\tau); \quad B(t, \tau) = H(t)\Phi(t, \tau)G(\tau).$$

Если $x(t_0) = 0$, $w(\tau) = 0$, $\tau \in [t_0, t]$ и $v(t) = 0$, то

$$y(t) = \int_{t_0}^t A(t, \tau)u(\tau)d\tau.$$

Матрицы $A(t, \tau)$ и $B(t, \tau)$ называются **весовыми** или **импульсными матрицами системы**.

6.2.3. СИСТЕМЫ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Если в (6.9), (6.10) матрицы $F(t)$, $C(t)$, $G(t)$ и $H(t)$ постоянные, то непрерывная линейная система называется системой с постоянными коэффициентами или **стационарной системой**. В этом случае

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t) + Cu(t) + Gw(t), \\ y(t) &= Hx(t) + v(t). \end{aligned} \quad (3.44)$$

Введем матричную экспоненту

$$e^{Ft} = I + Ft + \dots + F^k \frac{t^k}{k!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} F^k \frac{t^k}{k!}.$$

Тогда

$$e^{Ft} e^{F\tau} = e^{F(t+\tau)}; \quad (e^{Ft})^{-1} = e^{-Ft}; \quad \frac{de^{Ft}}{dt} = Fe^{Ft}.$$

Следовательно, матрица $X(t) = e^{Ft}$ является решением матричного дифференциального уравнения

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = FX(t), \\ X(0) = I. \end{cases}$$

Вычислим переходную матрицу $\Phi(t, \tau)$ для системы (6.23):

$$\Phi(t, \tau) = X(t)X^{-1}(\tau) = e^{Ft} e^{-F\tau} = e^{F(t-\tau)}.$$

Решение (6.23) при $t_0 = 0$ имеет вид:

$$x(t) = e^{Ft}x(0) + \int_0^t e^{F(t-\tau)} (Cu(\tau) + Gw(\tau)) d\tau.$$

6.3. ДИСКРЕТНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

Часто на практике динамические системы описываются дискретно, в виде разностных уравнений

$$x(t_{k+1}) = \Phi(t_{k+1}, t_k)x(t_k) + \Psi(t_{k+1}, t_k)u(t_k) + \Gamma(t_{k+1}, t_k)w(t_k), \quad (3.45)$$

$$y(t_{k+1}) = H(t_{k+1})x(t_{k+1}) + v(t_{k+1}), \quad (3.46)$$

где $x(t_k)$ – n -вектор состояния системы, $u(t_k)$ – r -вектор управления системы, $w(t_k)$ – p -вектор возмущения, $\Phi(t_{k+1}, t_k)$ – переходная матрица состояния размерности $n \times n$, $\Psi(t_{k+1}, t_k)$ – переходная матрица управления размерности $n \times r$, $\Gamma(t_{k+1}, t_k)$ – переходная матрица возмущения размерности $n \times p$, $y(t_{k+1})$ – m -вектор измерения, $v(t_k)$ – m -вектор ошибки измерения, $H(t_{k+1})$ – матрица наблюдений размерности $m \times n$.

Уравнения (6.24), (6.25) определяют **дискретную линейную систему**. Её структурная схема (см. рис. 6.5) имеет вид (здесь БЗ – блок задержки)

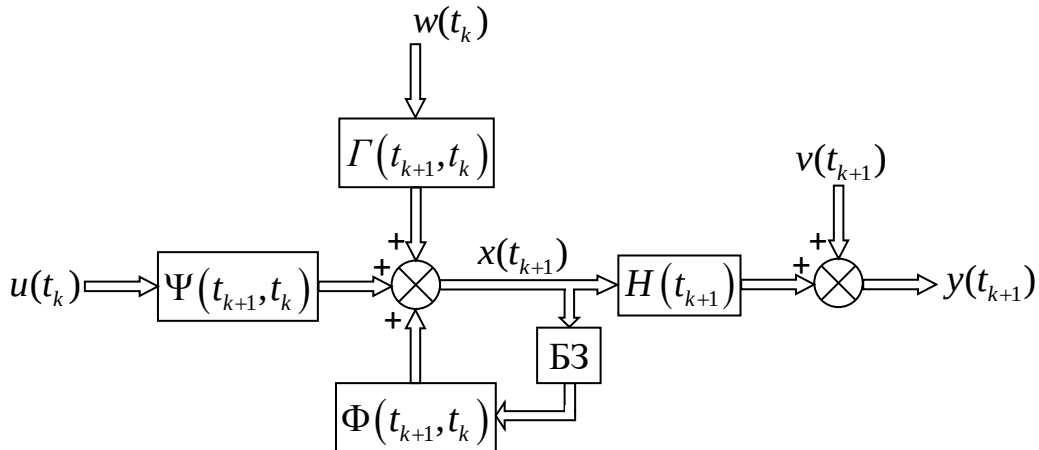


Рис. 6.5

6.4. ПЕРЕХОД ОТ НЕПРЕРЫВНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ К ДИСКРЕТНЫМ (ДИСКРЕТИЗАЦИЯ)

Будем считать, что $u(t)$ и $w(t)$ в (6.9) – кусочно-постоянные функции, изменяющие свои значения в одни и те же моменты времени.

Общее решение уравнения (6.9) определяется формулой (6.21). Полагая в ней $t_0 = t_k$ и учитывая, что $u(t) = u(t_k)$ и $w(t) = w(t_k)$ при $t_k < t \leq t_{k+1}$ для $t = t_{k+1}$ получим

$$\begin{aligned} x(t_{k+1}) &= \Phi(t_{k+1}, t_k)x(t_k) + \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau)C(\tau)d\tau \right) \cdot u(t_k) + \\ &\quad + \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau)G(\tau)d\tau \right) \cdot w(t_k) = \\ &= \Phi(t_{k+1}, t_k)x(t_k) + \Psi(t_{k+1}, t_k)u(t_k) + \Gamma(t_{k+1}, t_k)w(t_k). \end{aligned}$$

Используя соотношение (6.10) для $t = t_{k+1}$, получим модель измерения дискретной линейной системы

$$y(t_{k+1}) = H(t_{k+1})x(t_{k+1}) + v(t_{k+1}).$$

Процесс перехода от непрерывной системы к дискретной называется **дискретизацией**, а полученная при этом модель – **дискретизованной**.

Задачи.

1. Упрощенная модель задачи управления самолетом по углу рыскания в горизонтальном полете из книги Дж. Медич *Статистически оптимальные линейные оценки и управления*. – М.: Энергия, 1973 в пространстве состояний имеет вид

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} w(t).$$

Будем считать, что

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix}.$$

Выполнить дискретизацию модели.

2. Выполнить дискретизацию модели системы управления космическим кораблем из подраздела 6.1.

6.5. ПЕРЕХОД ОТ ДИСКРЕТНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ К НЕПРЕРЫВНЫМ

Поставим в соответствие $t_k \leftrightarrow t$, $t_{k+1} \leftrightarrow t + \Delta t$.

Разложим в ряд Тейлора $\Phi(t + \Delta t, t)$ в окрестности точки (t, t) :

$$\begin{aligned}\Phi(t + \Delta t, t) &= \Phi(t, t) + \dot{\Phi}_t(t, t)\Delta t + o(\Delta t^2) = I + F(t)\Phi(t, t)\Delta t + o(\Delta t^2) = \\ &= I + F(t)\Delta t + o(\Delta t^2).\end{aligned}\quad (3.47)$$

Тогда

$$\begin{aligned}\Psi(t + \Delta t, t) &= \int_t^{t+\Delta t} \Phi(t + \Delta t, \tau)C(\tau)d\tau \approx \Phi(t + \Delta t, t)C(t)\Delta t = \\ &= C(t)\Delta t + o(\Delta t^2).\end{aligned}\quad (3.48)$$

По аналогии

$$\Gamma(t + \Delta t, t) = G(t)\Delta t + o(\Delta t^2).\quad (3.49)$$

Из соотношений (6.26) – (6.28) следует, что

$$\begin{aligned}x(t + \Delta t) &= \Phi(t + \Delta t, t)x(t) + \Psi(t + \Delta t, t)u(t) + \Gamma(t + \Delta t, t)w(t) = \\ &= [I + F(t)\Delta t + o(\Delta t^2)]x(t) + [C(t)\Delta t + o(\Delta t^2)]u(t) + [G(t)\Delta t + o(\Delta t^2)]w(t) = \\ &= x(t) + F(t)x(t)\Delta t + C(t)u(t)\Delta t + G(t)w(t)\Delta t + o(\Delta t^2).\end{aligned}\quad (3.50)$$

Перенесем в (6.29) $x(t)$ влево, поделим полученное выражение на Δt и перейдем к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$. Получим

$$\dot{x}(t) = F(t)x(t) + C(t)u(t) + G(t)w(t).\quad (3.51)$$

Для модели измерений

$$y(t + \Delta t) = H(t + \Delta t)x(t + \Delta t) + v(t + \Delta t)\quad (3.52)$$

при $\Delta t \rightarrow 0$ из (6.31) имеем

$$y(t) = H(t)x(t) + v(t).\quad (3.53)$$

Соотношения (6.30), (6.32) дают уравнения состояния и наблюдения непрерывной линейной системы.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ И ЛИНЕАРИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ САУ

Простейшим методом изучения нелинейных систем является линеаризация. Суть ее состоит в том, что нелинейная система заменяется эквивалентной линейной. Очевидно, что линеаризованная модель не может полностью заменить нелинейную, но в некоторых отношениях поведение линеаризованной модели может быть почти идентично поведению нелинейной. Таким образом, имеется возможность применить некоторые хорошо разработанные методы анализа линейных систем для изучения линеаризованных моделей.

7.1. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ ВО ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ

7.1.1. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ ВБЛИЗИ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

Пусть имеется модель состояния и модель измерения следующего вида:

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x(t), u(t), t) \\ \vdots \\ f_n(x(t), u(t), t) \end{pmatrix} = f(x(t), u(t), t), \quad (3.54)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1(x(t), u(t), t) \\ \vdots \\ h_m(x(t), u(t), t) \end{pmatrix} = h(x(t), u(t), t). \quad (3.55)$$

Будем считать нелинейные вектор-функции $f(x(t), u(t), t)$ и $h(x(t), u(t), t)$ непрерывно дифференцируемыми функциями своих аргументов. Линеаризуем модель (7.1), (7.2) в окрестности положения равновесия (x_e, u_e) , для которого $f(x_e, u_e) = 0$.

Приняв $x(t) = x_e + \xi(t)$ и $u(t) = u_e + \mu(t)$ в предположении малости приращений $\xi(t)$, $\mu(t)$ после разложений в ряд Тейлора и отбрасывания слагаемых второго и более высоких порядков малости, будем иметь следующую *стационарную* линеаризованную модель состояний в отклонениях:

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \vdots \\ \xi_n(t) \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x} \bigg|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \xi(t) + \frac{\partial f}{\partial u} \bigg|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \mu(t) =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \bigg|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \cdot \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \vdots \\ \xi_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_r} \end{pmatrix} \bigg|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \cdot \begin{pmatrix} \mu_1(t) \\ \vdots \\ \mu_r(t) \end{pmatrix}. \quad (3.56)$$

Полагая $y(t) = y_e + \eta(t)$ (здесь $y_e = h(x_e, u_e)$), аналогичным образом получим линеаризованную модель измерений в отклонениях

$$\eta(t) = \begin{pmatrix} \eta_1(t) \\ \vdots \\ \eta_m(t) \end{pmatrix} = \frac{\partial h}{\partial x} \bigg|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \xi(t) + \frac{\partial h}{\partial u} \bigg|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \mu(t) =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \bigg|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \cdot \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \vdots \\ \xi_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial u_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_m}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial h_m}{\partial u_r} \end{pmatrix} \bigg|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \cdot \begin{pmatrix} \mu_1(t) \\ \vdots \\ \mu_r(t) \end{pmatrix}.$$

Задачи.

1. Математическая модель состояния смешительного бака из книги *Х. Квакуернаак, Р. Сиван Линейные оптимальные системы управления, М.: Мир, 1977.* имеет вид

$$\begin{cases} \frac{dV(t)}{dt} = F_1(t) + F_2(t) - k\sqrt{\frac{V(t)}{S}}, \\ \frac{dC(t)}{dt} = \frac{C_1 - C(t)}{V(t)} \cdot F_1(t) + \frac{C_2 - C(t)}{V(t)} \cdot F_2(t). \end{cases} \quad (3.57)$$

Здесь $V(t)$ - объём жидкости в баке; $C(t)$ - концентрация выходного потока; $F_1(t), F_2(t)$ - мгновенные расходы входных потоков растворимого вещества; k - экспериментально определяемая константа; S - площадь поперечного сечения бака; C_1, C_2 - величины концентрации растворимого вещества.

Линеаризовать модель (7.4) относительно положения равновесия, полагая $V_e = 1 \text{ м}^3$, $F_{1e} = 0,15 \text{ м}^3/\text{с}$, $F_{2e} = 0,005 \text{ м}^3/\text{с}$, $C_1 = 1 \text{ Кмоль/м}^3$, $C_2 = 2 \text{ Кмоль/м}^3$.

2. Уравнения углового движения искусственного спутника Земли (ИСЗ) при действии на него моментов силы тяги $u(t)$, относительно его главных осей инерции в форме Эйлера имеют вид

$$\begin{cases} \frac{d\omega_1(t)}{dt} = -\frac{J_3 - J_2}{J_1} \omega_2(t)\omega_3(t) + \frac{u_1(t)}{J_1}; \\ \frac{d\omega_2(t)}{dt} = -\frac{J_1 - J_3}{J_2} \omega_3(t)\omega_1(t) + \frac{u_2(t)}{J_2}; \\ \frac{d\omega_3(t)}{dt} = -\frac{J_2 - J_1}{J_3} \omega_2(t)\omega_1(t) + \frac{u_3(t)}{J_3}. \end{cases} \quad (3.58)$$

Здесь $J_i, \omega_i(t), u_i(t)$, $i=1,2,3$ - соответственно, составляющие момента инерции, угловой скорости и управляющего момента относительно одной из главных осей ИСЗ.

Линеаризовать модель (7.5) в окрестности точки $(\omega_{1e}, \omega_{2e}, \omega_{3e})$.

7.1.2. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО НОМИНАЛЬНОЙ ТРАЕКТОРИИ

Если провести линеаризацию (7.1), (7.2) относительно номинальной (опорной) траектории программного движения с параметрами $x(t) = x_H(t)$, $u(t) = u_H(t)$, $y(t) = y_H(t)$, когда $x(t) = x_H(t) + \xi(t)$, $u(t) = u_H(t) + \mu(t)$ и $y(t) = y_H(t) + \eta(t)$, получим следующую *нестационарную* линеаризованную модель состояний в отклонениях

$$\dot{\xi}(t) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_H(t) \\ u=u_H(t)}} \cdot \xi(t) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_H(t) \\ u=u_H(t)}} \cdot \mu(t); \quad (3.59)$$

$$\eta(t) = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_H(t) \\ u=u_H(t)}} \cdot \xi(t) + \left. \frac{\partial h}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_H(t) \\ u=u_H(t)}} \cdot \mu(t). \quad (3.60)$$

7.1.3. ВТОРОЙ МЕТОД ЛИНЕАРИЗАЦИИ

Вместо того, чтобы непосредственно определять частные производные, на практике линеаризацию часто выполняют следующим образом. Заменяют переменные в исходных нелинейных уравнениях состояния в соответствии с выражениями

$$\begin{cases} x(t) = x_H(t) + \xi(t); \\ u(t) = u_H(t) + \mu(t). \end{cases}$$

где $\xi(t), \mu(t)$ - отклонения от опорных значений.

Все слагаемые, стоящие в правых частях полученных выражений, разбиваются на три группы:

1. Не содержащие приращения $\xi(t)$ и $\mu(t)$;

2. Содержащие приращения $\xi(t)$ и $\mu(t)$ в виде простых множителей и производные этих приращений;
3. Содержащие произведения или степени приращений.

Полагая приращения $\xi(t)$ и $\mu(t)$ малыми по сравнению с соответствующими координатами опорной траектории $x_H(t)$ и $u_H(t)$, можем считать слагаемые 3-ей группы практически равными нулю и будем их отбрасывать. Тогда слагаемые 1-ой группы будут определять *опорное движение*, а слагаемые 2-ой группы – *движение в отклонениях* $\xi(t)$, $\mu(t)$ относительно опорной траектории $x_H(t)$, $u_H(t)$.

Задачи.

1. Уравнение устройства для замера угловых скоростей вращения выходного вала двигателя внутреннего сгорания (турбины) можно записать в виде:

$$m \cdot \frac{d^2 l}{dt^2} + k_v \cdot \frac{dl}{dt} + k_c \cdot l^3 = k\omega,$$

где l - перемещение устройства массы m для замера угловых скоростей, k_v - коэффициент скоростного трения, k_c - коэффициент жёсткости пружины, k - коэффициент пропорциональности при угловой скорости вращения выходного вала двигателя (турбины) ω .

Выполнить линеаризацию, считая что $l(t) = l_e + \xi(t)$, $\omega(t) = \omega_e + \mu(t)$.

2. Уравнение вертикально стартующей ракеты под действием силы тяги имеет вид:

$$m(t) \cdot \frac{d^2 h}{dt^2} + k_v \cdot \left(\frac{dh}{dt} \right)^2 + m(t) \cdot g = k \cdot \frac{dm(t)}{dt},$$

где h - высота полёта ракеты, $m(t)$ - переменная масса ракеты, k_v, k - постоянные коэффициенты, g - ускорение свободного падения.

Выполнить линеаризацию относительно опорной траектории вертикального взлёта, когда $m(t) = m_H(t) + \xi(t)$, $h(t) = h_H(t) + \mu(t)$.

7.2. ГАРМОНИЧЕСКАЯ ЛИНЕАРИЗАЦИЯ

Гармоническая линеаризация выполняется в частотной области. При этом нелинейный преобразующий элемент заменяется линейным, эквивалентным относительно основной составляющей.

Из методов гармонической линеаризации (в качестве примера можно привести еще *метод гармонического баланса*) метод описывающих функций является наиболее важным в теории автоматического управления. К недостаткам метода можно отнести трудность проверки точности результата.

7.2.1. МЕТОД ОПИСЫВАЮЩИХ ФУНКЦИЙ

Пусть нелинейный элемент возбуждается синусоидальным входным сигналом

$$u(U, \omega; t) = U \sin \omega t; \quad (3.61)$$

выходной сигнал $y = f(u)$ является периодическим и его основная частота совпадает с ω .

Описывающей функцией называется комплекснозначная функция

$$Z(U, i\omega) = X(U, \omega) + iY(U, \omega), \quad (3.62)$$

определяемая как отношение комплексной амплитуды $W(U, i\omega)$ основной составляющей выходного сигнала к амплитуде U синусоидального входного сигнала (7.8).

Разложим в ряд Фурье сигнал на выходе нелинейного элемента:

$$y(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t). \quad (3.63)$$

Здесь

$$\begin{aligned} A_0 &= A_0(U, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f[u(U, \omega; t)] d(\omega t); \\ A_n &= A_n(U, \omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f[u(U, \omega; t)] \cos n(\omega t) d(\omega t); \\ B_n &= B_n(U, \omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f[u(U, \omega; t)] \sin n(\omega t) d(\omega t). \end{aligned}$$

Комплексная амплитуда $W(U, i\omega)$ основной составляющей выходного сигнала будет равна

$$W(U, i\omega) = B_1(U, \omega) + iA_1(U, \omega).$$

Следовательно, $X(U, \omega)$, $Y(U, \omega)$ в (7.9) определяются так:

$$X(U, \omega) = \frac{B_1(U, \omega)}{U}, \quad Y(U, \omega) = \frac{A_1(U, \omega)}{U}.$$

В методе описывающих функций в разложении (7.10) во внимание принимаются только постоянная и основная составляющие выходного сигнала. Иными словами, считают, что высшие гармоники подавляются линеаризованным элементом, т.е.

$$\begin{aligned} \tilde{y}(t) &= A_0 + A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t = A_0 + Y(U, \omega) \cdot U \cos \omega t + X(U, \omega) \cdot U \sin \omega t = \\ &= A_0 + X(U, \omega) \cdot u(t) + \frac{1}{\omega} Y(U, \omega) \dot{u}(t). \end{aligned}$$

Аналогично рассматривается случай, когда входной сигнал содержит постоянную составляющую:

$$u(t) = U_0 + U_1 \sin \omega t.$$

Задачи.

1. Найти описывающую функцию нелинейного элемента, характеризующегося дифференциальным уравнением Ван дер Поля

$$y = \ddot{u} - \varepsilon(1 - u^2) \cdot \dot{u} + u.$$

Ответ: $Z(U, i\omega) = (1 - \omega^2) + i\varepsilon\omega \left(\frac{U^2}{4} - 1 \right).$

2. Выполнить гармоническую линеаризацию и найти описывающую функцию нелинейного элемента

$$y = f(u) = \begin{cases} u, & u \geq 0; \\ 0, & u < 0. \end{cases}$$

Ответ: $\tilde{y}(t) = \frac{U}{\pi} + \frac{U}{2} \sin \omega t; \quad Z(U, i\omega) = \frac{1}{2}.$

7.3. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ЛИНЕАРИЗАЦИЯ

Метод статистической линеаризации применяется в тех случаях, когда сигнал на входе нелинейного элемента *случайный* (для простоты обычно предполагается, что сигнал имеет *нормальное распределение*).

Будем считать, что случайный сигнал $u(t)$ состоит из полезного детерминированного сигнала $m_u(t)$ и шума $n_u(t)$:

$$u(t) = m_u(t) + n_u(t),$$

причем

$$E[u(t)] = m_u(t), \quad E[n_u(t)] = 0.$$

Для выходного сигнала $y = f(u)$ имеем

$$y(t) = m_y(t) + n_y(t),$$

где $E[y(t)] = m_y(t)$.

Статистическая линеаризация состоит в *определении приближённой линейной зависимости между выходной и входной переменными, соответствующей рассматриваемой ситуации*. При статистической линеаризации путём замены нелинейного элемента соответствующим линейным стремятся получить с достаточной точностью полезную составляющую выходного сигнала $m_y(t)$ и среднеквадратическое отклонение $\sigma_y(t)$.

В дальнейшем для упрощения обозначений условимся опускать символ t в функциях времени, т.е. будем писать u, m_u, n_u и т.д.

Отметим, что для стационарных случайных процессов математические ожидания m_u, m_y входной и выходной переменных, их среднеквадратические отклонения σ_u, σ_y и коэффициенты усиления постоянные.

7.3.1. ПЕРВЫЙ МЕТОД

Нелинейная зависимость $y = f(u)$ между выходной y и входной u переменными заменяется приближенным линейным соотношением

$$\tilde{y} = m_{\tilde{y}} + k_s n_u,$$

где $\tilde{y}$ - идеальный выходной сигнал линеаризованного элемента; $m_{\tilde{y}}$ - полезная составляющая идеальной выходной переменной $\tilde{y}$; k_s - эквивалентный статистический коэффициент усиления нелинейного элемента по отношению к шуму.

Связь составляющей $m_{\tilde{y}}$ с полезной входной составляющей m_u задается с помощью характеристики нелинейного элемента. Для нелинейности с *центрально симметричной характеристикой* среднее значение $m_{\tilde{y}}$ может быть записано в виде

$$m_{\tilde{y}} = k_m m_u \quad (3.64)$$

где k_m - эквивалентный статистический коэффициент усиления нелинейного элемента по отношению к математическому ожиданию. Следовательно,

$$\tilde{y} = k_m m_u + k_s n_u.$$

Коэффициенты k_m и k_s можно определить из предположения, что математическое ожидание $m_{\tilde{y}}$ и среднеквадратическое отклонение $\sigma_{\tilde{y}}$ идеального сигнала $\tilde{y}$ должны соответствовать математическому ожиданию m_y и среднеквадратическому отклонению σ_y действительной выходной переменной y :

$$\begin{aligned} m_y &= m_{\tilde{y}} = k_m m_u; \\ \sigma_y^2 &= \sigma_{\tilde{y}}^2 = m_{\tilde{y}^2} - m_{\tilde{y}}^2 = E \left[(m_{\tilde{y}} + k_s n_u)^2 \right] - m_{\tilde{y}}^2 = \\ &= m_{\tilde{y}}^2 + 2k_s m_{\tilde{y}} E[n_u] + k_s^2 E[n_u^2] - m_{\tilde{y}}^2 = k_s^2 \sigma_u^2. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Из (7.11), (7.12) получаем:

$$\begin{aligned} k_m &= \frac{m_y}{m_u}; \\ k_s &= \pm \frac{\sigma_y}{\sigma_u}, \quad \text{sign}(k_s) = \text{sign} \left(\frac{dy}{du} \right) \Big|_{u=m_u}. \end{aligned}$$

Индекс m у k_m соответствует отношению средних значений, а s у k_s - среднеквадратических отклонений. Отметим еще раз, что полученные формулы применимы только для центрально симметричных характеристик.

7.3.2. ВТОРОЙ МЕТОД

Во втором методе статистическая линейаризация осуществляется с помощью минимизации среднего квадрата разности между реальным y и идеальным $\tilde{y}$ выходными сигналами:

$$E[e^2] = E[(y - \tilde{y})^2] \rightarrow \min. \quad (3.66)$$

Предположим, что

$$\tilde{y} = m_{\tilde{y}} + k_v n_u \quad (3.67)$$

и необходимо из условия минимума (7.13) определить коэффициенты $m_{\tilde{y}}$ и k_v . С учетом того, что $E[n_u] = 0$, $E[n_u^2] = \sigma_u^2$, получим:

$$\begin{aligned} E[e^2] &= E\left[(y - (m_{\tilde{y}} + k_v n_u))^2\right] = \\ &= E\left[y^2 + m_{\tilde{y}}^2 + k_v^2 n_u^2 + 2k_v m_{\tilde{y}} n_u - 2m_{\tilde{y}} y - 2k_v y n_u\right] = \\ &= m_y^2 + m_{\tilde{y}}^2 + k_v^2 \sigma_u^2 - 2m_{\tilde{y}} m_y - 2k_v E[yn_u]. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Запишем необходимое условие для минимума целевой функции (7.15):

$$\begin{cases} \frac{\partial E[e^2]}{\partial m_{\tilde{y}}} = 2m_{\tilde{y}} - 2m_y = 0, \\ \frac{\partial E[e^2]}{\partial k_v} = 2k_v \sigma_u^2 - 2E[yn_u] = 0. \end{cases}$$

из которой найдем

$$m_{\tilde{y}} = m_y; \quad k_v = \frac{E[yn_u]}{\sigma_u^2}.$$

Покажем, что найденная точка является точкой минимума. Для этого составим матрицу Гессе из вторых производных:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 E[e^2]}{\partial m_{\tilde{y}}^2} & \frac{\partial^2 E[e^2]}{\partial m_{\tilde{y}} \partial k_v} \\ \frac{\partial^2 E[e^2]}{\partial m_{\tilde{y}} \partial k_v} & \frac{\partial^2 E[e^2]}{\partial k_v^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2\sigma_u^2 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что она является положительно определенной. Следовательно, найденная точка является точкой минимума $E[e^2]$.

7.3.3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ УСИЛЕНИЯ

Для определения среднего значения $m_{\tilde{y}}$ и эквивалентных коэффициентов усиления k_m, k_s, k_v требуется знание плотности распределения вероятностей $p(u, t)$ входной переменной. Эта плотность вероятностей для стационарных процессов не зависит от времени и поэтому в дальнейшем будет обозначаться через $p(u)$. С помощью плотности вероятностей рассматриваемые величины можно записать следующим образом:

$$m_{\tilde{y}} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) p(u) du;$$

$$k_m = \frac{1}{m_u} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) p(u) du;$$

$$k_s = \pm \frac{1}{\sigma_u} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(u) p(u) du - m_y^2 \right]^{\frac{1}{2}};$$

$$k_v = \frac{1}{\sigma_u^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (u - m_u) f(u) p(u) du;$$

$$\sigma_u^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (u - m_u)^2 p(u) du.$$

$$p(u) = \frac{e^{-\frac{(u-m_u)^2}{2\sigma_u^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma_u} \text{ - плотность нормального распределения.}$$

Задача. Определить $m_{\tilde{y}}, k_s, k_v$ для элемента, заданного нелинейным уравнением $y = f(u) = a_1 u + a_3 u^3$ ($a_1 > 0$) при нормально распределенном входном сигнале с нулевым математическим ожиданием, т.е. $p(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_u} \exp\left(\frac{-u^2}{2\sigma_u^2}\right)$.

$$\text{Ответ: } m_{\tilde{y}} = 0; k_s = \sqrt{a_1^2 + 6a_1 a_3 \sigma_u^2 + 15a_3^2 \sigma_u^4}; k_v = a_1 + 3a_3 \sigma_u^2.$$

Глава 8

НАБЛЮДАЕМОСТЬ И УПРАВЛЯЕМОСТЬ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

8.1. НАБЛЮДАЕМОСТЬ В НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМАХ

Вопрос рассмотрим в предположении, что возмущения и ошибки измерений в системах отсутствуют (равны нулю):

$$\dot{x}(t) = F(t)x(t) + C(t)u(t), \quad (4.1)$$

$$y(t) = H(t)x(t). \quad (4.2)$$

Система (8.1), (8.2) называется *наблюдаемой*, если начальное состояние $x(t_0)$ можно определить, зная $y(t)$ для промежутка времени $t_0 \leq t \leq t_1$. Если сказанное справедливо для любого t_0 , то система называется *полностью наблюдаемой*.

Предположим, что $H(t)$ - невырожденная матрица порядка n . Тогда

$$x(t) = H^{-1}(t)y(t).$$

В случае, когда $H(t)$ вырождена во всех точках $t \geq t_0$ за исключением точки $t = t_\alpha$, получаем:

$$x(t_\alpha) = H^{-1}(t_\alpha)y(t_\alpha) = \Phi(t_\alpha, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t_\alpha} \Phi(t_\alpha, \tau)C(\tau)u(\tau)d\tau.$$

Отсюда

$$x(t_0) = \Phi^{-1}(t_\alpha, t_0) \left[H^{-1}(t_\alpha)y(t_\alpha) - \int_{t_0}^{t_\alpha} \Phi(t_\alpha, \tau)C(\tau)u(\tau)d\tau \right].$$

Матрица $H(t)$ может оказаться вырожденной $\forall t \geq t_0$ или быть прямоугольной $m \times n$. Поскольку управление $u(t)$ предполагается известным, его воздействие $C(t)u(t)$ на систему также известно и можно от системы (8.1), (8.2) перейти к системе

$$\dot{x}(t) = F(t)x(t), \quad (4.3)$$

$$y(t) = H(t)x(t). \quad (4.4)$$

Теорема 1. Непрерывная линейная система (8.3), (8.4) является полностью наблюдаемой тогда и только тогда, когда симметричная матрица порядка n

$$M_C(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(t, t_0)H^T(t)H(t)\Phi(t, t_0)dt \quad (4.5)$$

положительно определена для некоторого конечного $t_1 > t_0$.

Доказательство.

Достаточность. Запишем решение (8.3)

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0)$$

и подставим его в (8.4):

$$y(t) = H(t)\Phi(t, t_0)x(t_0).$$

Полученное выражение умножим слева на $\Phi^T(t, t_0)H^T(t)$ и проинтегрируем по t от t_0 до t_1 :

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(t, t_0)H^T(t)y(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(t, t_0)H^T(t)H(t)\Phi(t, t_0)x(t_0)dt = M_C(t_0, t_1) \cdot x(t_0).$$

Матрица $M_C(t_0, t_1)$ положительно определена. Следовательно,

$$x(t_0) = M_C^{-1}(t_0, t_1) \int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(t, t_0)H^T(t)y(t)dt.$$

Необходимость (от противного). Предположим, что для некоторого ненулевого $x(t_0)$ выполняется

$$x^T(t_0)M_C(t_0, t_1)x(t_0) = 0.$$

Тогда

$$x^T(t_0) \int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(t, t_0)H^T(t)y(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} [H(t)\Phi(t, t_0)x(t_0)]^T y(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} y^T(t)y(t)dt = 0.$$

Отсюда следует, что $y(t) = 0, \forall t \in [t_0, t_1]$ и $x(t_0) = 0$. Противоречие.

Следствие. Стационарная непрерывная линейная система

$$\dot{x}(t) = Fx(t), \quad (4.6)$$

$$y(t) = Hx(t) \quad (4.7)$$

полностью наблюдаема тогда и только тогда, когда блочная матрица

$$\begin{bmatrix} H^T & F^T H^T & \dots & (F^T)^{n-1} H^T \end{bmatrix}_{n \times (mn)}$$

имеет ранг n .

Упражнение. Показать, что система управления космическим кораблем из главы 6 является полностью наблюдаемой.

8.2. НАБЛЮДАЕМОСТЬ В ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМАХ

В силу того, что управляющая последовательность $\{u(k), k = \overline{0, N-1}\}$ известна, вместо системы

$$x(k+1) = \Phi(k+1, k)x(k) + \Psi(k+1, k)u(k),$$

$$y(k+1) = H(k+1)x(k+1)$$

будем рассматривать систему

$$x(k+1) = \Phi(k+1, k)x(k), \quad (4.8)$$

$$y(k+1) = H(k+1)x(k+1). \quad (4.9)$$

Дискретная система (8.8), (8.9) называется **наблюдаемой**, если начальное состояние $x(0)$ можно определить по наблюдениям $\{y(k), k = \overline{1, N}\}$ при любом конечном N . Если сказанное выполняется для любого начального момента, то система называется **полностью наблюдаемой**.

Теорема 2. Дискретная система (8.8), (8.9) полностью наблюдаема тогда и только тогда, когда симметричная матрица порядка n

$$M_d(0, N) = \sum_{i=1}^N \Phi^T(i, 0) H^T(i) H(i) \Phi(i, 0)$$

положительно определена.

Доказательство.

Достаточность.

$$y(1) = H(1)x(1) = H(1)\Phi(1, 0)x(0);$$

$$y(2) = H(2)x(2) = H(2)\Phi(2, 1)x(1) = H(2)\Phi(2, 1)\Phi(1, 0)x(0) = H(2)\Phi(2, 0)x(0);$$

$$\begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y(N) = H(N)\Phi(N, 0)x(0). \end{matrix}$$

Обозначим

$$y_N = \begin{pmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(N) \end{pmatrix}; \quad H_N = \begin{pmatrix} H(1)\Phi(1, 0) \\ H(2)\Phi(2, 0) \\ \vdots \\ H(N)\Phi(N, 0) \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$y_N = H_N x(0).$$

Умножим это выражение слева на H_N^T :

$$H_N^T y_N = H_N^T H_N x(0) = M_d(0, N)x(0).$$

Отсюда

$$x(0) = M_d^{-1}(0, N) H_N^T y_N.$$

Необходимость (от противного). Пусть существует ненулевой $x(0)$, для которого

$$x^T(0) M_d(0, N) x(0) = 0.$$

Тогда

$$x^T(0) H_N^T y_N = [H_N x(0)]^T y_N = y_N^T y_N.$$

Следовательно, $y_N = 0$ или $\{y(k) = 0, k = \overline{1, N}\}$ и $x(0) = 0$. Противоречие.

Следствие. Стационарная система

$$x(k+1) = \Phi x(k),$$

$$y(k+1) = Hx(k+1)$$

полностью наблюдаема тогда и только тогда, когда блочная матрица

$$\begin{bmatrix} H^T & | & \Phi^T H^T & | & \dots & | & (\Phi^T)^{n-1} H^T \end{bmatrix}_{n \times (mn)}$$

имеет ранг n .

Доказательство. Действительно, условие полной наблюдаемости в стационарном случае эквивалентно условию существования и единственности решения системы уравнений

$$\begin{pmatrix} H\Phi \\ H\Phi^2 \\ \vdots \\ H\Phi^n \end{pmatrix} x(0) = \begin{pmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(n) \end{pmatrix},$$

которое заключается в том, что

$$\text{rg} \begin{pmatrix} H\Phi \\ H\Phi^2 \\ \vdots \\ H\Phi^n \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} H \\ H\Phi \\ \vdots \\ H\Phi^{n-1} \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{bmatrix} H^T & | & \Phi^T H^T & | & \dots & | & (\Phi^T)^{n-1} H^T \end{bmatrix} = n.$$

8.3. УПРАВЛЯЕМОСТЬ В НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМАХ

Рассмотрим непрерывную линейную систему

$$\dot{x}(t) = F(t)x(t) + C(t)u(t). \quad (4.10)$$

Считаем, что начальное состояние системы (8.10) известно. Необходимо перевести систему из заданного состояния $x(t_0)$ в некоторое требуемое состояние $x(t_1)$, подобрав управление $u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, соответствующим образом. Не ограничивая общности, будем считать, что $x(t_1) = 0$.

Непрерывная линейная система (8.10) называется **управляемой**, если существует кусочно-непрерывное управляющее воздействие $u(t)$, определенное на отрезке $[t_0, t_1]$ и зависящее от начального состояния $x(t_0)$, которое позволяет перевести систему из $x(t_0)$ в начало координат $x(t_1) = 0$. Если сказанное справедливо для любых $x(t_0)$, то система (8.10) называется **полностью управляемой**.

Теорема 3. Непрерывная линейная система (8.10) полностью управляема тогда и только тогда, когда симметричная матрица порядка n

$$W_C(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t) C(t) C^T(t) \Phi^T(t_0, t) dt$$

положительно определена для любого конечного $t_1 > t_0$.

Доказательство.

Достаточность. Из уравнения (6.21) для $t = t_1$ имеем:

$$x(t_1) = \Phi(t_1, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, t)C(t)u(t)dt. \quad (4.11)$$

Положим

$$u(t) = -C^T(t)\Phi^T(t_0, t)W_C^{-1}(t_0, t_1)x(t_0). \quad (4.12)$$

Подставляя в выражение (8.11) соотношение (8.12), получаем

$$\begin{aligned} x(t_1) &= \Phi(t_1, t_0)x(t_0) - \left[\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, t)C(t)C^T(t)\Phi^T(t_0, t)dt \right] W_C^{-1}(t_0, t_1)x(t_0) = \\ &= \Phi(t_1, t_0)x(t_0) - \Phi(t_1, t_0) \left[\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t)C(t)C^T(t)\Phi^T(t_0, t)dt \right] W_C^{-1}(t_0, t_1)x(t_0) = \\ &= \Phi(t_1, t_0)x(t_0) - \Phi(t_1, t_0)W_C(t_0, t_1)W_C^{-1}(t_0, t_1)x(t_0) = 0. \end{aligned}$$

Необходимость (от противного). Предположим, что система управляема, но для некоторого ненулевого $x(t_0)$ справедливо соотношение

$$x^T(t_0)W_C(t_0, t_1)x(t_0) = 0.$$

Выберем

$$u(t) = -C^T(t)\Phi^T(t_0, t)x(t_0). \quad (4.13)$$

Тогда

$$\int_{t_0}^{t_1} u^T(t)u(t)dt = x^T(t_0) \left[\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t)C(t)C^T(t)\Phi^T(t_0, t)dt \right] x(t_0) = x^T(t_0)W_C(t_0, t_1)x(t_0) = 0.$$

Отсюда следует, что $u(t) = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1]$.

Поскольку система полностью управляема, существует управление $\tilde{u}(t)$, для которого $x(t_1) = 0$. В этом случае уравнение (8.11) принимает вид

$$x(t_1) = \Phi(t_1, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, t)C(t)\tilde{u}(t)dt = 0,$$

или, что то же самое,

$$x(t_0) = -\Phi(t_0, t_1) \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, t)C(t)\tilde{u}(t)dt = -\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t)C(t)\tilde{u}(t)dt. \quad (4.14)$$

Теперь из формул (8.13) и (8.14) получим

$$x^T(t_0)x(t_0) = -x^T(t_0) \int_{t_0}^{t_1} \underbrace{\Phi(t_0, t)C(t)}_{u(t)} \tilde{u}(t)dt = -\int_{t_0}^{t_1} \underbrace{\left[C^T(t)\Phi^T(t_0, t)x(t_0) \right]^T}_{u(t)} \tilde{u}(t)dt = 0$$

Следовательно, $x(t_0) = 0$. Противоречие.

Следствие. Стационарная непрерывная линейная система

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Cu(t)$$

полностью управляема тогда и только тогда, когда блочная матрица

$$\begin{bmatrix} C & FC & \dots & F^{n-1}C \end{bmatrix}_{n \times (rn)}$$

имеет ранг n .

Упражнение. Показать, что система управления космическим кораблем из главы 6 является полностью управляемой.

8.4. УПРАВЛЯЕМОСТЬ В ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМАХ

Дискретная система

$$x(k+1) = \Phi(k+1, k)x(k) + \Psi(k+1, k)u(k) \quad (4.15)$$

называется **управляемой** в момент $k=0$, если существует управляющая последовательность $\{u(k), k = \overline{0, N-1}\}$, зависящая от $x(0)$, такая, что объект с помощью этой последовательности переводится в начало координат $x(N) = 0$. Если сказанное справедливо для любого $x(0)$, то система (8.15) называется **полностью управляемой**.

Теорема 4. Дискретная система (8.15) полностью управляема тогда и только тогда, когда симметричная матрица

$$W_d(0, N) = \sum_{k=1}^N \Phi(0, i) \Psi(i, i-1) \Psi^T(i, i-1) \Phi^T(0, i)$$

положительно определена для некоторого конечного $N > 0$.

Доказательство.

Достаточность. Используя соотношение (8.15), можно показать, что

$$x(N) = \Phi(N, 0)x(0) + \sum_{i=1}^N \Phi(N, i) \Psi(i, i-1)u(i-1). \quad (4.16)$$

Положим

$$u(i-1) = -\Psi^T(i, i-1) \Phi^T(0, i) W_d^{-1}(0, N) x(0). \quad (4.17)$$

Подставляя выражение (8.17) в равенство (8.16), получаем

$$\begin{aligned} x(N) &= \Phi(N, 0)x(0) - \Phi(N, 0) \left[\sum_{i=1}^N \Phi(0, i) \Psi(i, i-1) \Psi^T(i, i-1) \Phi^T(0, i) \right] \cdot W_d^{-1}(0, N) x(0) = \\ &= \Phi(N, 0)x(0) - \Phi(N, 0) W_d(0, N) \cdot W_d^{-1}(0, N) x(0) = 0. \end{aligned}$$

Необходимость (от противного). Предположим, что система управляема, но для некоторого ненулевого $x(0)$ справедливо соотношение

$$x^T(0) W_d(0, N) x(0) = 0.$$

Введем в рассмотрение вспомогательную управляющую последовательность

$$u(i-1) = -\Psi^T(i, i-1) \Phi^T(0, i) x(0). \quad (4.18)$$

Тогда

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N u^T(i-1)u(i-1) &= x^T(0) \left[\sum_{i=1}^N \Phi(0,i)\Psi(i,i-1)\Psi^T(i,i-1)\Phi^T(0,i) \right] x(0) = \\ &= x^T(0)W_d(0,N)x(0) = 0.\end{aligned}$$

Следовательно, $u(i-1) = 0 \quad \forall i = \overline{1, N}$.

Поскольку система (8.15) полностью управляема, то существует управляющая последовательность $\{\tilde{u}(i-1), i = \overline{0, N}\}$, такая, что

$$x(N) = \Phi(N,0)x(0) + \sum_{i=1}^N \Phi(N,i)\Psi(i,i-1)\tilde{u}(i-1) = 0.$$

Выразим отсюда $x(0)$:

$$x(0) = -\sum_{i=1}^N \Phi(0,i)\Psi(i,i-1)\tilde{u}(i-1).$$

Умножив обе части последнего равенства на $x^T(0)$ слева, получим

$$\begin{aligned}x^T(0)x(0) &= \sum_{i=1}^N \left[-x^T(0)\Phi(0,i)\Psi(i,i-1) \right] \tilde{u}(i-1) = \\ &= \sum_{i=1}^N \left[-\Psi^T(i,i-1)\Phi^T(0,i)x(0) \right]^T \tilde{u}(i-1) = \sum_{i=1}^N u(i-1)\tilde{u}(i-1) = 0.\end{aligned}$$

Следовательно, $x(0) = 0$. Противоречие.

Следствие. Стационарная система

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Psi u(k) \quad (4.19)$$

полностью управляема тогда и только тогда, когда блочная матрица

$$\left[\Psi \mid \Phi\Psi \mid \dots \mid \Phi^{n-1}\Psi \right]_{n \times (rn)} \quad (4.20)$$

имеет ранг n .

Доказательство. Поскольку

$$x(n) = \Phi^n x(0) - \Phi^{n-1}\Psi u(0) + \dots + \Psi u(n-1),$$

условие полной управляемости эквивалентно условию существования и единственности решения системы уравнений

$$\left[\Psi \mid \Phi\Psi \mid \dots \mid \Phi^{n-1}\Psi \right] \begin{bmatrix} u(n-1) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix} = x(n) - \Phi^n x(0),$$

которое как раз и обеспечивается полным строчным рангом матрицы (8.20).

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРЕДСКАЗАНИЕ И ФИЛЬТРАЦИЯ В ДИСКРЕТНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

9.1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Условное математическое ожидание скалярной или векторной функции $g(\cdot)$ случайного вектора x относительно другого случайного вектора y определяется так:

$$E_x [g(x)|y=y] = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x|y) dx_1 \dots dx_n.$$

Индекс x при E означает, что операция усреднения, т.е. интегрирования, проводится относительно x . Этот индекс далее будем опускать, если это не будет вызывать недоразумений.

Если $g(x) = x$, то

$$E [x|y=y] = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x|y) dx_1 \dots dx_n.$$

Свойства условного математического ожидания

Пусть x, y, z - случайные векторы, для которых существуют все необходимые плотности распределения. Тогда

1. $E_x [g(x)|x=x] = g(x)$;
2. $E_x [Ax|y=y] = AE_x [x|y=y]$, где A -матрица соответствующего размера;
3. $E_{xy} [x+y|z=z] = E_x [x|z=z] + E_y [y|z=z]$;
4. $E_y [E_x (x|y=y)] = E_x [x]$.

Случайный вектор x имеет нормальное (гауссовское) распределение, если его плотность распределения имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det P}} \exp \left[-\frac{1}{2} (x - \bar{x})^T P^{-1} (x - \bar{x}) \right],$$

где $\bar{x} = E[x]$ - вектор математических ожиданий, $P = E[(x - \bar{x})(x - \bar{x})^T]$ - ковариационная матрица.

Два гауссовских вектора x и y размерности n и m соответственно имеют совместное нормальное распределение, если их совместная плотность равна

$$f(x, y) = f(z) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{n+m} \det P}} \exp \left[-\frac{1}{2} (z - \bar{z})^T P^{-1} (z - \bar{z}) \right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{n+m} \det P}} \exp \left[-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} x - \bar{x} \\ y - \bar{y} \end{pmatrix}^T P^{-1} \begin{pmatrix} x - \bar{x} \\ y - \bar{y} \end{pmatrix} \right].$$

Здесь

$$P = \begin{pmatrix} P_{xx} & P_{xy} \\ P_{xy}^T & P_{yy} \end{pmatrix};$$

$$P_{xx} = E \left[(x - \bar{x})(x - \bar{x})^T \right];$$

$$P_{xy} = E \left[(x - \bar{x})(y - \bar{y})^T \right];$$

$$P_{yy} = E \left[(y - \bar{y})(y - \bar{y})^T \right].$$

Если обозначить

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix},$$

то по формулам Фробениуса

$$A = P_{xx}^{-1} + P_{xx}^{-1} P_{xy} C P_{yy} P_{xy}^T P_{xx}^{-1} = \left(P_{xx} - P_{xy} P_{yy}^{-1} P_{yx} \right)^{-1}; \quad (4.21)$$

$$B = -P_{xx}^{-1} P_{xy} C = -A P_{xy} P_{yy}^{-1}; \quad (4.22)$$

$$C = \left(P_{yy} - P_{yx} P_{xx}^{-1} P_{xy} \right)^{-1} = P_{yy}^{-1} + P_{yy}^{-1} P_{yx} A P_{xy} P_{yy}^{-1}. \quad (4.23)$$

Учитывая, что

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m \det P_{yy}}} \exp \left[-\frac{1}{2} (y - \bar{y})^T P_{yy}^{-1} (y - \bar{y}) \right],$$

с помощью формулы Байеса найдем

$$f(x|y) = \frac{f(x, y)}{f(y)} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \frac{\det P}{\det P_{yy}}}} \exp \left[-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} x - \bar{x} \\ y - \bar{y} \end{pmatrix}^T A_1 \begin{pmatrix} x - \bar{x} \\ y - \bar{y} \end{pmatrix} \right], \quad (4.24)$$

где $A_1 = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C - P_{yy}^{-1} \end{pmatrix}.$

Преобразуем квадратную форму в (9.4), используя соотношения (9.1) - (9.3):

$$\begin{pmatrix} x - \bar{x} \\ y - \bar{y} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C - P_{yy}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - \bar{x} \\ y - \bar{y} \end{pmatrix} = (x - \bar{x})^T A (x - \bar{x}) + (x - \bar{x})^T B (y - \bar{y}) +$$

$$+ (y - \bar{y})^T B (x - \bar{x}) + (y - \bar{y})^T (C - P_{yy}^{-1}) (y - \bar{y}) = (x - \bar{x})^T A (x - \bar{x}) -$$

$$- (x - \bar{x})^T A P_{xy} P_{yy}^{-1} (y - \bar{y}) - (y - \bar{y})^T A P_{yy}^{-1} P_{xy} (x - \bar{x}) + (y - \bar{y})^T P_{yy}^{-1} P_{yx} A P_{xy} P_{yy}^{-1} (y - \bar{y}) =$$

$$= \left(x - \bar{x} - P_{xy} P_{yy}^{-1} (y - \bar{y}) \right)^T A \left(x - \bar{x} - P_{xy} P_{yy}^{-1} (y - \bar{y}) \right). \quad (4.25)$$

Воспользуемся представлением

$$P = \begin{pmatrix} P_{xx} - P_{xy} P_{yy}^{-1} P_{xy} & P_{xy} \\ 0 & P_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ P_{yy}^{-1} P_{yx} & I_m \end{pmatrix},$$

из которого получаем, что

$$\det P = \det \left(P_{xx} - P_{xy} P_{yy}^{-1} P_{xy} \right) \det P_{yy} = \det A^{-1} \det P_{yy}. \quad (4.26)$$

Подставив соотношения (9.5) и (9.6) в формулу (9.4), получим

$$f(x|y) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det Q}} \exp \left[-\frac{1}{2} (x - m)^T Q^{-1} (x - m) \right], \quad (4.27)$$

где

$$m = \bar{x} + P_{xy} P_{yy}^{-1} (y - \bar{y}); \quad (4.28)$$

$$Q = A^{-1} = P_{xx} - P_{xy} P_{yy}^{-1} P_{yx}. \quad (4.29)$$

Отметим, что условная плотность распределения вероятностей $f(x|y)$ является нормальной. Результат (9.7) - (9.9) составляет содержание **теоремы о нормальной корреляции** и играет важную роль при решении задач оценивания в дискретных системах.

Утверждение.

1. Независимые гауссовские случайные векторы некоррелированы и наоборот.
2. Линейное преобразование и линейная комбинация гауссовских случайных векторов являются гауссовскими случайными векторами.

Свойства гауссовского условного математического ожидания

Пусть x, y, z – гауссовские случайные векторы. Тогда

1. $E(x|y)$ – случайный вектор, компоненты которого являются линейной комбинацией компонент вектора y .

Доказательство. Данное свойство следует непосредственно из уравнения (9.8) и п.2 утверждения, представленного выше.

2. Разность $\xi = x - E(x|y)$ не зависит от случайного вектора, полученного с помощью любого линейного преобразования вектора y .

Доказательство. Чтобы это показать, предположим, что $\mu = Ay$. Случайные векторы ξ и μ являются гауссовскими. Очевидно, что

$$\begin{aligned} \bar{\xi} &= E[\xi] = \bar{x} - E[E_x(x|y)] = 0; \\ \bar{\mu} &= E(\mu) = A\bar{y}. \end{aligned}$$

Тогда

$$P_{\xi\mu} = E[(\xi - \bar{\xi})(\mu - \bar{\mu})^T] = E[(x - E_x[x|y])(y - \bar{y})^T] A^T =$$

$$= E \left[\left(x - \bar{x} - P_{xy} P_{yy}^{-1} (y - \bar{y}) \right) (y - \bar{y})^T \right] A^T = (P_{xy} - P_{xy} P_{yy}^{-1} P_{yy}) A^T = O.$$

3. Если y и z независимы, то

$$E[x|y, z] = E[x|y] + E[x|z] - \bar{x}.$$

Доказательство.

$$E(x|y, z) = E(x|\xi) = \bar{x} + P_{x\xi} P_{\xi\xi}^{-1} (\xi - \bar{\xi}); \quad (4.30)$$

$$P_{x\xi} = E \left[(x - \bar{x}) \begin{pmatrix} y - \bar{y} \\ z - \bar{z} \end{pmatrix}^T \right] = (P_{xy} | P_{xz}); \quad (4.31)$$

$$P_{\xi\xi} = E \left[\begin{pmatrix} y - \bar{y} \\ z - \bar{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y - \bar{y} \\ z - \bar{z} \end{pmatrix}^T \right] = \begin{pmatrix} P_{yy} & P_{yz} \\ P_{zy} & P_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{yy} & O \\ O & P_{zz} \end{pmatrix};$$

$$P_{\xi\xi}^{-1} = \begin{pmatrix} P_{yy}^{-1} & O \\ O & P_{zz}^{-1} \end{pmatrix}. \quad (4.32)$$

Подставим (9.11) и (9.12) в (9.10):

$$\begin{aligned} E[x|y, z] &= E[x|\xi] = \bar{x} + (P_{xy} | P_{xz}) \begin{pmatrix} P_{yy}^{-1} & O \\ O & P_{zz}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y - \bar{y} \\ z - \bar{z} \end{pmatrix} = \\ &= \bar{x} + P_{xy} P_{yy}^{-1} (y - \bar{y}) + P_{xz} P_{zz}^{-1} (z - \bar{z}) = E[x|y] + E[x|z] - \bar{x}. \end{aligned}$$

Случайный процесс представляет собой семейство случайных векторов $\{x(t); t \in I\}$.

Если $I = \{t_k, k = 0, 1, \dots\}$, то случайный процесс называется **дискретным**. Если $I = \{t | t_0 \leq t\}$ или $I = \{t | t_0 \leq t \leq T\}$, то случайный процесс называется **непрерывным**.

Случайный процесс можно записать в виде функций двух параметров:

$$\{x(t, \omega); t \in I, \omega \in \Omega\},$$

где Ω - выборочное пространство.

При фиксированном t $x(t, \cdot)$ - случайный вектор (**сечение** случайного процесса). При фиксированном ω $x(\cdot, \omega)$ - вектор-функция времени (конкретная **реализация** случайного процесса).

Математическое ожидание $\bar{x}(t)$ и ковариационная матрица $P(t, \tau)$ случайного процесса $\{x(t); t \in I\}$ определяются выражениями

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) &= E[x(t)]; \\ P(t, \tau) &= E \left[(x(t) - \bar{x}(t)) (x(\tau) - \bar{x}(\tau))^T \right]. \end{aligned}$$

Случайный процесс $\{x(t); t \in I\}$ называется **гауссовским** (нормальным), если для любых моментов времени $t_1, t_2, \dots, t_N \in I$ N случайных п-векторов $x^1, x^2, \dots, x^N$ имеют совместное гауссовское распределение

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{nN}}} \exp \left[-\frac{1}{2} (x - \bar{x})^T P^{-1} (x - \bar{x}) \right],$$

где

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^N \end{pmatrix}; \quad P = (P_{ik}); \quad P_{ik} = E \left[(x(t_i) - \bar{x}(t_i))(x(t_k) - \bar{x}(t_k))^T \right].$$

Случайный процесс $\{x(t); t \in I\}$ называется **гауссовским белым шумом** (или **гауссовской белой последовательностью** для дискретных процессов) если для любых $t_1, t_2, \dots, t_N \in I$ N случайных n -векторов $x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_N)$ являются независимыми гауссовскими случайными векторами.

Случайный процесс $\{x(t); t \in I\}$ называется **марковским**, если для любых моментов времени $t_1 < t_2 < \dots < t_N$ условная функция распределения вероятностей для $x(t_N)$ при условии, что известны $x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_{N-1})$ имеет следующее свойство

$$P[x(t_N) \leq x^N | x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_{N-1})] = P[x(t_N) \leq x^N | x(t_{N-1})].$$

Для марковских случайных процессов

$$\begin{aligned} f[x(t_N) | x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_{N-1})] &= f[x(t_N) | x(t_{N-1})]; \\ f[x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_N)] &= f[x(t_1)] f[x(t_N), \dots, x(t_2) | x(t_1)] = \dots = \\ &= f[x(t_1)] f[x(t_2) | x(t_1)] \dots f[x(t_N) | x(t_1)]. \end{aligned}$$

9.2. МОДЕЛЬ С ГАУССОВСКОЙ МАРКОВСКОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ СОСТОЯНИЙ

Пусть $\{w(k), k=0,1,\dots\}$ есть p -мерная гауссовская белая последовательность с математическим ожиданием

$$\bar{w}(k) = E[w(k)]$$

и ковариационной матрицей

$$E[(w(k) - \bar{w}(k))(w(j) - \bar{w}(j))^T] = Q(k) \delta_{kj}.$$

Здесь $Q(k)$ - неотрицательно определенная $p \times p$ матрица, δ_{kj} - символ Кронекера.

Предположим, что начальное состояние $x(0)$ линейной дискретной системы

$$x(k+1) = \Phi(k+1, k)x(k) + \Gamma(k+1, k)w(k) \quad (4.33)$$

имеет нормальное распределение с математическим ожиданием

$$\bar{x}(0) = E[x(0)]$$

и ковариационной матрицей

$$P(0) = E[(x(0) - \bar{x}(0))(x(0) - \bar{x}(0))^T],$$

причем

$$E\left[(x(0) - \bar{x}(0))(w(k) - \bar{w}(k))^T\right] = 0 \quad \forall k \in I.$$

Докажем, что $\{x(k), k = 0, 1, \dots\}$ образуют гауссовскую марковскую последовательность. Выберем $t_1, \dots, t_m \in I$ и пусть $t_{m-1} \leftrightarrow j$, а $t_m \leftrightarrow k$. Перепишем соотношение (9.13) для $k = j$:

$$x(j+1) = \Phi(j+1, j)x(j) + \Gamma(j+1, j)w(j).$$

Тогда

$$\begin{aligned} x(j+2) &= \Phi(j+2, j+1)x(j+1) + \Gamma(j+2, j+1)w(j+1) = \\ &= \Phi(j+2, j+1)\left[\Phi(j+1, j)x(j) + \Gamma(j+1, j)w(j)\right] + \Gamma(j+2, j+1)w(j+1) = \\ &= \Phi(j+2, j)x(j) + \sum_{i=j+1}^{j+2} \Phi(j+2, i)\Gamma(i, i-1)w(i-1); \end{aligned}$$

$$x(j+l) = \Phi(j+l, j)x(j) + \sum_{i=j+1}^{j+l} \Phi(j+l, i)\Gamma(i, i-1)w(i-1).$$

Приняв $k = j + l$, получим

$$x(k) = \Phi(k, j)x(j) + \sum_{i=j+1}^k \Phi(k, i)\Gamma(i, i-1)w(i-1), \quad (4.34)$$

что эквивалентно марковости процесса.

Положим в (9.14) $j = 0$:

$$x(k) = \Phi(k, 0)x(0) + \sum_{i=1}^k \Phi(k, i)\Gamma(i, i-1)w(i-1). \quad (4.35)$$

В правой части (9.15) стоит линейная комбинация гауссовских случайных векторов. Отсюда следует гауссовость процесса.

Известно, что плотность совместного распределения для марковских процессов определяется плотностями распределения $f[x(k+1)|x(k)]$, $k \in I$, $f[x(0)]$. Пусть

$$\bar{x}(k) = E[x(k)], \quad P(k) = E\left[(x(k) - \bar{x}(k))(x(k) - \bar{x}(k))^T\right].$$

Тогда

$$\begin{aligned} E[x(k+1)|x(k)] &= \Phi(k+1, k)\bar{x}(k) + \Gamma(k+1, k)\bar{w}(k); \\ E\left[(x(k+1) - E[x(k+1)|x(k)])(x(k+1) - E[x(k+1)|x(k)])^T\right] &= \\ &= E\left[(\Phi(k+1, k)(x(k) - \bar{x}(k)) + \Gamma(k+1, k)(w(k) - \bar{w}(k)))(\dots)^T\right] = \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned}
&= \Phi(k+1, k) E \left[(x(k) - \bar{x}(k))(x(k) - \bar{x}(k))^T \right] \Phi^T(k+1, k) + \\
&+ \Phi(k+1, k) E \left[(x(k) - \bar{x}(k))(w(k) - \bar{w}(k))^T \right] \Gamma^T(k+1, k) + \\
&+ \Gamma(k+1, k) E \left[(w(k) - \bar{w}(k))(x(k) - \bar{x}(k))^T \right] \Phi^T(k+1, k) + \\
&+ \Gamma(k+1, k) E \left[(w(k) - \bar{w}(k))(w(k) - \bar{w}(k))^T \right] \Gamma^T(k+1, k). \quad (4.37)
\end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned}
\tilde{x}(k) &= x(k) - \bar{x}(k), \\
\tilde{w}(k) &= w(k) - \bar{w}(k).
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\tilde{x}(k+1) &= x(k+1) - \bar{x}(k+1) = \Phi(k+1, k)\tilde{x}(k) + \Gamma(k+1, k)\tilde{w}(k), \\
\tilde{x}(k) &= \Phi(k, 0)\tilde{x}(0) + \sum_{i=1}^k \Phi(k, i)\Gamma(i, i-1)\tilde{w}(i-1).
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
E \left[\tilde{x}(k)\tilde{w}^T(k) \right] &= \\
&= \Phi(k, 0) E \left[\tilde{x}(0)\tilde{w}^T(k) \right] + \sum_{i=1}^k \Phi(k, i)\Gamma(i, i-1) E \left[\tilde{w}(i-1)\tilde{w}^T(k) \right] = 0. \quad (4.38)
\end{aligned}$$

С учетом соотношения (9.18) из равенства (9.17) имеем

$$\begin{aligned}
&E \left[(x(k+1) - E[x(k+1)|x(k)])(x(k+1) - E[x(k+1)|x(k)])^T \right] = \\
&= \Phi(k+1, k)P(k)\Phi^T(k+1, k) + \Gamma(k+1, k)Q(k)\Gamma^T(k+1, k).
\end{aligned}$$

Таким образом, гауссовская марковская последовательность $\{x(k), k=0, 1, \dots\}$ для своего описания требует значения $\bar{x}(k)$, $P(k)$, $k=0, 1, \dots$

Дополним модель состояния (9.13) моделью наблюдений

$$y(k+1) = H(k+1)x(k+1) + v(k+1),$$

в которой $\{v(k+1), k=0, 1, \dots\}$ - m -мерная гауссовская белая последовательность с математическим ожиданием

$$\bar{v}(k+1) = E[v(k+1)]$$

и ковариационной матрицей

$$E \left[(v(k+1) - \bar{v}(k+1))(v(k+1) - \bar{v}(k+1))^T \right] = R(k+1)\delta_{kj}.$$

Здесь $R(k+1)$ - неотрицательно определённая $m \times m$ матрица.

Будем предполагать, что

$$\begin{aligned}
E \left[(x(0) - \bar{x}(0))(v(k+1) - \bar{v}(k+1))^T \right] &= 0 \quad \forall k; \\
E \left[(w(k) - \bar{w}(k))(v(j+1) - \bar{v}(j+1))^T \right] &= 0 \quad \forall k, j
\end{aligned}$$

и (для простоты) будем считать, что $\bar{v}(k+1) = 0$, $\bar{w}(k) = 0$.

9.3. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ОЦЕНОК

Обозначим оценку состояния $x(k)$, полученную по измерениям $Y_1^j = \{y(1), \dots, y(j)\}$, через $\hat{x}(k|j) = \varphi_k(Y_1^j)$. Необходимо найти $\varphi_k(\cdot)$.

При $k > j$ имеем задачу **прогнозирования** (экстраполяции), при $k = j$ - задачу **фильтрации**, при $k < j$ - задачу **сглаживания** (интерполяции).

Определим ошибку оценивания:

$$\tilde{x}(k|j) = x(k) - \hat{x}(k|j).$$

Если $\tilde{x}(k|j) = 0$, то получена точная оценка. Обычно это не так.

Введём **функцию штрафа (потерь)** $L[\tilde{x}(k|j)]$. Она должна удовлетворять следующим условиям:

- 1) $L[\cdot]$ - скалярная функция;
- 2) $L(0) = 0$;
- 3) $L[\tilde{x}^b(k|j)] \geq L[\tilde{x}^a(k|j)]$, если $\rho[\tilde{x}^b(k|j)] \geq \rho[\tilde{x}^a(k|j)]$,
где $\rho(\cdot)$ - мера расстояния от начала координат;
- 4) $L[\tilde{x}(k|j)] = L[-\tilde{x}(k|j)]$.

Введём **критерий качества оценивания**:

$$J[\tilde{x}(k|j)] = E[L[\tilde{x}(k|j)]].$$

Оценка $\hat{x}(k|j)$, минимизирующая среднее значение потерь (функционал J), называется **оптимальной оценкой**.

Пример функций штрафа: $L[\tilde{x}(k|j)] = \alpha \|\tilde{x}(k|j)\|^2$, $\alpha > 0$.

Требуется по измерениям Y_1^j определить оценку $\hat{x}(k|j)$ состояния $x(k)$ так, чтобы минимизировался критерий качества $J[\tilde{x}(k|j)]$.

При определённых условиях решение задачи оценивания можно получить из **теоремы Шермана**, которую мы приведем ниже без доказательства.

Если $L(\cdot)$ - функция потерь, а условная функция распределения $F[\xi|Y_1^j] = P\{x(k) \leq \xi | Y_1^j\}$ симметрична относительно своего математического ожидания $\bar{\xi}$ и выпукла для всех $\xi < \bar{\xi}$, то оптимальная оценка имеет вид

$$\hat{x}(k|j) = E[x(k) | Y_1^j].$$

Другими словами, в теореме Шермана утверждается, что при выполнении требований симметричности и выпуклости условной функции распределения оптимальная оценка представляет собой условное математическое ожидание.

Следствие. Если $L(\cdot)$ допустимая функция потерь а $\{x(k), k = 0, 1, \dots\}$ и $\{y(i), i = 1, \dots, j\}$ - гауссовские случайные последовательности, то

$$\hat{x}(k|j) = E[x(k)|Y_1^j]. \quad (4.39)$$

Из теоремы о нормальной корреляции сразу же получаем

$$\hat{x}(k|j) = \bar{x}(k) + P_{x(k)Y_1^j} P_{Y_1^j Y_1^j}^{-1} [Y_1^j - \bar{Y}_1^j]. \quad (4.40)$$

На основании формулы (9.20) заключаем, что

1. $\hat{x}(k|j)$ является линейной комбинацией измерений при $\bar{x}(k) = 0$;
2. $\hat{x}(k|j)$ и $\tilde{x}(k|j)$ - гауссовские п-векторы;
3. Оценка $\hat{x}(k|j)$ единственна.

На практике соотношение (9.20) неприменимо. Например, при $m = 2$, $j = 40$ размерность матрицы $P_{Y_1^j Y_1^j}$, равная $jm \times jm$, будет 80×80 . Таким образом требуется другой, более эффективный алгоритм последовательной обработки измерений для получения текущей оценки. Такой алгоритм дает фильтр Калмана.

9.4. ОПТИМАЛЬНОЕ ПРЕДСКАЗАНИЕ

Пусть поведение динамической системы описывается уравнениями:

$$x(k+1) = \Phi(k+1, k)x(k) + \Gamma(k+1, k)w(k), \quad (4.41)$$

$$y(k+1) = H(k+1)x(k+1) + v(k+1), \quad k = 0, 1, \dots \quad (4.42)$$

Предположим, что векторы возмущений и ошибок измерений в соотношениях (9.21), (9.22) образуют белые гауссовские последовательности $\{w(k), k = 0, 1, \dots\}$ и $\{v(k+1), k = 0, 1, \dots\}$ с нулевыми математическими ожиданиями

$$E[w(k)] = 0, \quad E[v(k+1)] = 0, \quad \forall k = 0, 1, \dots$$

и ковариационными матрицами

$$E[w(k)w^T(j)] = Q(k)\delta_{kj}, \quad E[v(k+1)v^T(j+1)] = R(k+1)\delta_{kj}, \quad k, j = 0, 1, \dots; \quad (4.43)$$

начальное состояние $x(0)$ дискретной системы имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием

$$E[x(0)] = 0$$

и ковариационной матрицей

$$P(0) = E[x(0)x^T(0)];$$

начальное состояние $x(0)$, векторы возмущений и ошибок измерений взаимно некоррелированы при всех $j, k = 0, 1, \dots$, т.е.

$$E[x(0)w^T(k)] = 0, \quad E[x(0)v^T(k+1)] = 0, \quad E[w(j)v^T(k+1)] = 0. \quad (4.44)$$

Предположим, что оценка фильтрации $\hat{x}(j|j)$ и ковариационная матрица $P(j|j)$ ошибки фильтрации $\tilde{x}(j|j)$ известны для $j = 0, 1, \dots$. Тогда для $k > j$ справедливо

$$1. \hat{x}(k|j) = \Phi(k, j)\hat{x}(j|j); \quad (4.45)$$

2. Случайная последовательность $\{\tilde{x}(k|j); k > j, j = 0, 1, \dots\}$ является гауссовской марковской последовательностью с нулевым средним и ковариационной матрицей, удовлетворяющей соотношению:

$$P(k|j) = \Phi(k, j)P(j|j)\Phi^T(k, j) + \sum_{i=j+1}^k \Phi(k, i)\Gamma(i, i-1)Q(i-1)\Gamma^T(i, i-1)\Phi^T(k, i). \quad (4.46)$$

Доказательство. Докажем 1.

$$\begin{aligned} \hat{x}(k|j) &= E[x(k)|Y_1^j] = E\left[\Phi(k, j)x(j) + \sum_{i=j+1}^k \Phi(k, i)\Gamma(i, i-1)w(i-1) | Y_1^j\right] = \\ &= \Phi(k, j)E[x(j)|Y_1^j] + \sum_{i=j+1}^k \Phi(k, i)\Gamma(i, i-1)E[w(i-1)|Y_1^j]. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Вычислим математическое ожидание во втором слагаемом формулы (9.27).

$$y(l) = H(l)x(l) + v(l) = H(l)\Phi(l, 0)x(0) + \sum_{\alpha=1}^l H(l)\Phi(l, \alpha)\Gamma(\alpha, \alpha-1)w(\alpha-1) + v(l),$$

т.е. $y(l)$ зависит от $x(0), w(0), w(1), \dots, w(l-1), v(l)$, а Y_1^j зависит от $x(0), w(0), w(1), \dots, w(j-1), v(1), \dots, v(j)$. Поэтому в силу соотношений (9.23) и (9.24)

$E[w(i-1)|Y_1^j]$ в (9.27) равно нулю, что позволяет с учетом (9.19) перейти от (9.27) к (9.25).

Перейдем к доказательству 2.

$$\begin{aligned} \tilde{x}(k|j) &= x(k) - \hat{x}(k|j) = \Phi(k, j)x(j) + \sum_{i=j+1}^k \Phi(k, i)\Gamma(i, i-1)w(i-1) - \Phi(k, j)\hat{x}(j|j) = \\ &= \Phi(k, j)\tilde{x}(j|j) + \sum_{i=k+1}^k \Phi(k, i)\Gamma(i, i-1)w(i-1). \end{aligned} \quad (4.48)$$

Считая процесс $\{\tilde{x}(j|j), j = 1, \dots, k-1\}$ гауссовским (это будет показано позже), из (9.26) заключаем, что последовательность $\{\tilde{x}(k|j); k > j, j = 0, 1, \dots\}$ - гауссовская.

Запишем (9.26) следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{x}(k|j) &= \Phi(k, k-1)\Phi(k-1, j)\tilde{x}(j|j) + \\ &+ \sum_{i=j+1}^{k-1} \Phi(k, i)\Gamma(i, i-1)w(i-1) + \Phi(k, k)\Gamma(k, k-1)w(k-1) = \\ &= \Phi(k, k-1)\left[\Phi(k-1, j)\tilde{x}(j|j) + \sum_{i=j+1}^{k-1} \Phi(k-1, i)\Gamma(i, i-1)w(i-1)\right] + \\ &+ \Gamma(k, k-1)w(k-1) = \Phi(k, k-1)\tilde{x}(k-1|j) + \Gamma(k, k-1)w(k-1), \end{aligned}$$

откуда следует марковость процесса.

$$P(k|j) = E[\tilde{x}(k|j)\tilde{x}^T(k|j)] =$$

$$\begin{aligned}
&= E \left[\left(\Phi(k, j) \tilde{x}(j | j) + \sum_{i=j+1}^k \Phi(k, i) \Gamma(i, i-1) w(i-1) \right) (\dots)^T \right] = \\
&= \Phi(k, j) E \left[\tilde{x}(j | j) \tilde{x}^T(j | j) \right] \Phi^T(k, j) + \\
&+ \sum_{i=j+1}^k \Phi(k, j) E \left[\tilde{x}(j | j) w^T(i-1) \right] \Gamma^T(i, i-1) \Phi^T(k | i) + \\
&+ \sum_{i=j+1}^k \Phi(k, i) \Gamma(i, i-1) E \left[w(i-1) \tilde{x}^T(j | j) \right] \Phi^T(k | j) + \\
&+ \sum_{i=j+1}^k \sum_{l=j+1}^k \Phi(k, i) \Gamma(i, i-1) E \left[w(i-1) w^T(l-1) \right] \Gamma^T(l, l-1) \Phi^T(k, l). \quad (4.49)
\end{aligned}$$

Вычислим математическое ожидание во втором слагаемом (9.29):

$$\begin{aligned}
&E \left[\tilde{x}(j | j) w^T(i-1) \right] = E \left[(x(j) - \hat{x}(j | j)) w^T(i-1) \right] = \\
&E \left[x(j) w^T(i-1) \right] - E \left[\hat{x}(j | j) w^T(i-1) \right] = \\
&= E \left[\left(\Phi(j, 0) x(0) + \sum_{l=1}^j \Phi(j, l) \Gamma(l, l-1) w(l-1) \right) w^T(i-1) \right] = \\
&= \Phi(j, 0) E \left[x(0) w^T(i-1) \right]^0 + \sum_{l=1}^j \Phi(j, l) \Gamma(l, l-1) E \left[w(l-1) w^T(i-1) \right]^0 - \\
&\quad - \sum_{l=1}^j A(l) E \left[y(l) w^T(i-1) \right]^0 = O. \quad (4.50)
\end{aligned}$$

Учитывая равенства (9.30), (9.23) из (9.29) получим формулу (9.26).

Из соотношений (9.25), (9.26) следует, что при $k = j + 1$

$$\hat{x}(j+1, j) = \Phi(j+1, j) \hat{x}(j, j); \quad (4.51)$$

$$P(j+1 | j) = \Phi(j+1, j) P(j | j) \Phi^T(j+1, j) + \Gamma(j+1, j) Q(j) \Gamma^T(j+1, j). \quad (4.52)$$

9.5. ОПТИМАЛЬНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ

При построении оценок положим

$$\hat{x}(0 | 0) = \bar{x}(0) = 0;$$

$$E \left[\tilde{x}(0 | 0) \tilde{x}^T(0 | 0) \right] = E \left[(x(0) - \hat{x}(0)) (x(0) - \hat{x}(0))^T \right] = P(0).$$

Тогда

1. оптимальная текущая оценка (оценка фильтрации) равна

$$\hat{x}(k+1 | k+1) = \hat{x}(k+1 | k) + K(k+1) \tilde{y}(k+1 | k), \quad (4.53)$$

где

$$\begin{aligned}
\tilde{y}(k+1 | k) &= y(k+1) - \hat{y}(k+1 | k) = H(k+1) x(k+1) - E \left[y(k+1) | Y_1^k \right] + v(k+1) = \\
&= H(k+1) x(k+1) - E \left[H(k+1) x(k+1) | Y_1^k \right] - E \left[v(k+1) | Y_1^k \right]^0 + v(k+1) =
\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}
&= H(k+1) \left(x(k+1) - E \left[x(k+1) | Y_1^k \right] \right) + v(k+1) = \\
&= H(k+1) \left(x(k+1) - \hat{x}(k+1) \right) + v(k+1) = H(k+1) \tilde{x}(k+1|k) + v(k+1).
\end{aligned}$$
2. $K(k+1) = P(k+1|k)H^T(k+1) \left(H(k+1)P(k+1|k)H^T(k+1) + R(k+1) \right)^{-1};$ (4.54)
- $$P(k+1|k) = \Phi(k+1, k)P(k, k)\Phi^T(k+1, k) + \Gamma(k+1, k)Q(k)\Gamma^T(k+1, k);$$
- (4.55)
- $$P(k+1|k+1) = (I - K(k+1)H(k+1))P(k+1|k).$$
- (4.56)
3. $\{\tilde{x}(k+1|k+1), k=0,1,\dots\}$ является гауссовской марковской последовательностью с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей (9.36).

Доказательство. Докажем 1.

$$\begin{aligned}
\hat{x}(k+1|k+1) &= E \left[x(k+1) | Y_1^{k+1} \right] = E \left[x(k+1) | Y_1^k \right] + \\
&+ E \left[x(k+1) | \tilde{y}(k+1) \right] = \hat{x}(k+1|k) + E \left[x(k+1) | \tilde{y}(k+1) \right].
\end{aligned}$$
 (4.57)

Рассмотрим математическое ожидание в (9.37). В соответствии с теоремой о нормальной корреляции

$$E \left[x(k+1) | \tilde{y}(k+1) \right] = \bar{x}(k)^0 + P_{xy}P_{yy}^{-1}\tilde{y}(k+1|k). \quad (4.58)$$

$$\begin{aligned}
P_{yy} &= E \left[\tilde{y}(k+1|k)\tilde{y}^T(k+1|k) \right] = E \left[(H(k+1)\tilde{x}(k+1|k) + v(k+1))(\dots)^T \right] = \\
&= H(k+1)E \left[\tilde{x}(k+1|k)\tilde{x}^T(k+1|k) \right]H^T(k+1) + \\
&+ H(k+1)E \left[\tilde{x}(k+1|k)v^T(k+1) \right]^0 + E \left[v(k+1)\tilde{x}^T(k+1|k) \right]^0 H^T(k+1) + \\
&+ E \left[v(k+1)v^T(k+1) \right] = H(k+1)P(k+1|k)H^T(k+1) + R(k+1).
\end{aligned}$$
 (4.59)

$$\begin{aligned}
P_{xy} &= E \left[x(k+1)\tilde{y}^T(k+1|k) \right] = \\
&= E \left[(\tilde{x}(k+1|k) + \hat{x}(k+1|k))(H(k+1)\tilde{x}(k+1|k) + v(k+1))^T \right] = \\
&= E \left[\tilde{x}(k+1|k)\tilde{x}^T(k+1|k) \right]H^T(k+1) + E \left[\tilde{x}(k+1|k)v^T(k+1) \right]^0 + \\
&+ E \left[\hat{x}(k+1|k)\tilde{x}^T(k+1|k) \right]H^T(k+1) + E \left[\hat{x}(k+1|k)v^T(k+1) \right]^0 = \\
&= P(k+1|k)H^T(k+1).
\end{aligned}$$
 (4.60)

Подставляя соотношения (9.38) - (9.40) в формулу (9.37), получим (9.33).

Перейдем к доказательству 2.

$K(k+1) = P_{xy}P_{yy}^{-1} = P(k+1|k)H^T(k+1) \left[H(k+1)P(k+1|k)H^T(k+1) + R(k+1) \right]^{-1},$
что соответствует (9.34).

В силу справедливости выражения (9.32)

$$P(k+1|k) = \Phi(k+1, k)P(k, k)\Phi^T(k+1, k) + \Gamma(k+1, k)Q(k)\Gamma^T(k+1, k),$$

и

$$\begin{aligned}
P(k+1|k+1) &= E\left[\tilde{x}(k+1|k+1)\tilde{x}^T(k+1|k+1)\right] = \\
&= E\left[(x(k+1) - \hat{x}(k+1|k+1))(\dots)^T\right] = \\
&= E\left[(x(k+1) - \hat{x}(k+1|k) - K(k+1)\tilde{y}(k+1|k))(\dots)^T\right] = \\
&= E\left[(\tilde{x}(k+1|k) - K(k+1)\tilde{y}(k+1|k))(\dots)^T\right] = \\
&= E\left[(\tilde{x}(k+1|k) - K(k+1)(H(k+1)\tilde{x}(k+1|k) + v(k+1)))(\dots)^T\right] = \\
&= E\left[((I - K(k+1)H(k+1))\tilde{x}(k+1|k) - K(k+1)v(k+1))(\dots)^T\right] = \\
&= (I - K(k+1)H(k+1))E\left[\tilde{x}(k+1|k)\tilde{x}^T(k+1|k)\right](I - K(k+1)H(k+1))^T - \\
&\quad - (I - K(k+1)H(k+1))E\left[\tilde{x}(k+1|k)v^T(k+1)\right]^0 K^T(k+1) - \\
&\quad - K(k+1)E\left[v(k+1)\tilde{x}^T(k+1|k)\right]^0 (I - K(k+1)H(k+1))^T + \\
&\quad + K(k+1)E\left[v(k+1)v^T(k+1)\right]K^T(k+1) = \\
&= (I - K(k+1)H(k+1))P(k+1|k)(I - K(k+1)H(k+1))^T + K(k+1)R(k+1)K^T(k+1) = \\
&= (I - K(k+1)H(k+1))P(k+1|k) - (I - K(k+1)H(k+1))P(k+1|k)H^T(k+1)K^T(k+1) + \\
&\quad + K(k+1)R(k+1)K^T(k+1) = \\
&= (I - K(k+1)H(k+1))P(k+1|k) - P(k+1|k)H^T(k+1)K^T(k+1) + \\
&\quad + K(k+1)(H(k+1)P(k+1|k)H^T(k+1) + R(k+1))K^T(k+1) = \\
&= (I - K(k+1)H(k+1))P(k+1|k) - \cancel{P(k+1|k)H^T(k+1)K^T(k+1)} + \\
&\quad + \cancel{P(k+1|k)H^T(k+1)K^T(k+1)} = (I - K(k+1)H(k+1))P(k+1|k).
\end{aligned}$$

Докажем 3. В соответствии с формулой (9.28)

$$\tilde{x}(k|j) = \Phi(k, j)\tilde{x}(j|j) + \sum_{i=k+1}^k \Phi(k, i)\Gamma(i, i-1)w(i-1).$$

Отсюда

$$\tilde{x}(k+1|k) = \Phi(k+1, k)\tilde{x}(k|k) + \Gamma(k+1, k)w(k)$$

и

$$\begin{aligned}
\tilde{x}(k+1|k+1) &= x(k+1) - \hat{x}(k+1|k+1) = x(k+1) - \hat{x}(k+1|k) - K(k+1)\tilde{y}(k+1|k) = \\
&= \tilde{x}(k+1|k) - K(k+1)\tilde{y}(k+1|k) = \\
&= \tilde{x}(k+1|k) - K(k+1)(H(k+1)\tilde{x}(k+1|k) + v(k+1)) = \\
&= (I - K(k+1)H(k+1))\tilde{x}(k+1|k) - K(k+1)v(k+1) = \\
&= (I - K(k+1)H(k+1))\Phi(k+1, k)\tilde{x}(k|k) + \\
&\quad + (I - K(k+1)H(k+1))\Gamma(k+1, k)w(k) - K(k+1)v(k+1) = \\
&= \Phi^*(k+1, k)\tilde{x}(k|k) + \Gamma^*(k+1, k)w^*(k),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\Phi^*(k+1, k) &= (I - K(k+1)H(k+1))\Phi(k+1, k), \\ \Gamma^*(k+1, k) &= ((I - K(k+1)H(k+1))\Gamma(k+1, k) - K(k+1)), \\ w^*(k) &= \begin{pmatrix} w(k) \\ v(k+1) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Таким образом, $\{\tilde{x}(k+1|k+1), k=0,1,\dots\}$ образуют гауссовскую марковскую последовательность. Ее математическое ожидание равно нулю, а ковариационная матрица определяется соотношением (9.36).

9.6. ФИЛЬТР КАЛМАНА

Для реализации рекуррентной процедуры фильтрации необходимо знать начальную оценку состояния $\hat{x}(0|0) = \bar{x}(0)$ и ковариационную матрицу ошибки оценивания $P(0|0) = P(0)$. Они могут быть получены на основании какой-либо априорной информации.

Алгоритм дискретного линейного фильтра Калмана

Уравнение состояния системы:

$$x(k+1) = \Phi(k+1, k)x(k) + \Psi(k+1, k)u(k) + \Gamma(k+1, k)w(k).$$

Уравнение измерения:

$$y(k+1) = H(k+1)x(k+1) + v(k+1).$$

Начальные условия и априорные предположения:

$$E[x(0)] = \bar{x}(0), \quad E[(x(0) - \bar{x}(0))(x(0) - \bar{x}(0))^T] = P(0);$$

$$E[w(k)] = 0, \quad E[w(j)w^T(k)] = Q(k)\delta_{jk};$$

$$E[v(k+1)] = 0, \quad E[v(j+1)v^T(k+1)] = R(k+1)\delta_{jk};$$

$$E[x(0)w^T(k)] = 0, \quad E[x(0)v^T(k+1)] = 0, \quad E[w(j)v^T(k+1)] = 0.$$

Этап 1. Инициализировать начальные значения

$$\hat{x}(0|0) = \bar{x}(0), \quad P(0|0) = P(0).$$

Выполнить в цикле по $k = \overline{0, N-1}$:

Этап 2. Вычислить оценку одношагового прогнозирования

$$\hat{x}(k+1|k) = \Phi(k+1, k)\hat{x}(k|k) + \Psi(k+1, k)u(k).$$

Этап 3. Найти ковариационную матрицу ошибки одношагового прогнозирования

$$P(k+1|k) = \Phi(k+1, k)P(k|k)\Phi^T(k+1, k) + \Gamma(k+1, k)Q(k)\Gamma^T(k+1, k).$$

Этап 4. Определить вектор обновления

$$\varepsilon(k+1) = y(k+1) - H(k+1)\hat{x}(k+1|k).$$

Этап 5. Вычислить матричный коэффициент усиления Калмана

$$B(k+1) = [H(k+1)P(k+1|k)H^T(k+1) + R(k+1)]^{-1};$$

$$K(k+1) = P(k+1|k)H^T(k+1)B^{-1}(k+1).$$

Этап 6. Найти оценку фильтрации

$$\hat{x}(k+1|k+1) = \hat{x}(k+1|k) + K(k+1)\varepsilon(k+1).$$

Этап 7. Определить ковариационную матрицу ошибки фильтрации

$$P(k+1|k+1) = [I - K(k+1)H(k+1)]P(k+1|k).$$

Отметим, что здесь, в уравнение состояния дополнительно введен детерминированный вектор входных (управляющих) воздействий $u(k)$ с весовой матрицей $\Psi(k+1, k)$. Данный вектор используется на этапе вычисления одношагового прогнозирования.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления. – М.: Высшая школа, 1998. – 574с.
2. Бесекерский В.А., Попов Е.П., Теория систем автоматического регулирования. – СПб.: Профессия, 2003. – 752с.
3. Гайдук А.Р., Беляев В.Е., Пьявченко Т.А. Теория автоматического управления в примерах и задачах с решениями в MATLAB). – СПб.: Лань, 2011. – 464с.
4. Дорф Р., Бишоп Р. Современные системы управления. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2002. – 832с.
5. Кудинов Ю.И., Пашенко Ф.Ф. Теория автоматического управления (с использованием MATLAB - SIMULINK). – СПб.: Лань, 2016. – 256с.
6. Медич Дж. Статистически оптимальные линейные оценки и управление. – М.: Энергия, 1973. – 440с.
7. Методы классической и современной теории автоматического управления: Учебник в 3-х т. Т.1: Анализ и статистическая динамика систем автоматического управления. /Под ред. Н.Д. Егупова. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. – 748с.
8. Огарков М.А. Методы статистического оценивания параметров случайных процессов. – М.: Энергоатомиздат, 1990. – 208с.
9. Пантелеев А.В., Бортакровский А.С. Теория управления в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 2003. – 583с.
10. Певзнер Л.Д. Теория систем управления. – СПб.: Лань, 2013. – 424с.
11. Певзнер Л.Д. Теория автоматического управления. Задачи и решения. – СПб.: Лань, 2016. – 604с.
12. Первозванский А.А. Курс теории автоматического управления. – СПб.: Лань, 2010. – 624с.
13. Топчиев Ю.И. Атлас для проектирования систем автоматического регулирования. – М.: Машиностроение, 1989. – 752с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 1. Основные понятия и общие принципы построения автоматических систем	1
1.1. Фундаментальные принципы управления	1
1.1.1. Принцип разомкнутого управления	2
1.1.2. Принцип компенсации	2
1.1.3. Принцип обратной связи	3
Глава 2. Математическое описание линейных САУ	4
2.1. Преобразование Лапласа и его свойства	4
2.2. Передаточные функции	9
2.3. Частотные характеристики	10
2.4. Временные характеристики	14
Глава 3. Элементарные звенья и их характеристики	16
Глава 4. Структурные схемы и графы в ТАУ	19
Глава 5. Устойчивость линейных стационарных САУ	24
5.1. Устойчивость по входу	24
5.2. Устойчивость по начальным условиям	26
5.3. Алгебраические критерии устойчивости	27
5.3.1. Критерий Рауса	28
5.3.2. Критерии Гурвица и Ляпунова-Шипара	28
5.4. Частотные критерии устойчивости	30
5.4.1. Критерий Михайлова	30
5.4.2. Критерий Найквиста	33
Глава 6. Математическое описание многомерных линейных САУ в пространстве состояний	36
6.1. Пространство состояний	37
6.2. Непрерывные линейные системы	39
6.2.1. Переходная матрица состояний	40
6.2.2. Соотношение вход-выход	43
6.2.3. Системы с постоянными коэффициентами	43
6.3. Дискретные линейные системы	44

6.4. Переход от непрерывных линейных систем к дискретным (дискретизация)	45
6.5. Переход от дискретных линейных систем к непрерывным	46
Глава 7. Методы линеаризации уравнений	47
7.1. Линеаризация во временной области	47
7.1.1. Линеаризация вблизи положения равновесия	47
7.1.2. Линеаризация относительно номинальной траектории	49
7.1.3. Второй метод линеаризации	49
7.2. Гармоническая линеаризация	50
7.2.1. Метод описывающих функций	51
7.3. Статистическая линеаризация	52
7.3.1. Первый метод	53
7.3.2. Второй метод	54
7.3.3. Вычисление линеаризованных коэффициентов усиления	55
Глава 8. Наблюдаемость и управляемость в линейных системах	56
8.1. Наблюдаемость в непрерывных системах	56
8.2. Наблюдаемость в дискретных системах	57
8.3. Управляемость в непрерывных системах	59
8.4. Управляемость в дискретных системах	61
Глава 9. Оптимальное предсказание и фильтрация в дискретных линейных системах	63
9.1. Элементы теории вероятностей и случайных процессов	63
9.2. Модель с гауссовской марковской последовательностью состояний	67
9.3. Основы теории оценок	70
9.4. Оптимальное предсказание	71
9.5. Оптимальная фильтрация	73
9.6. Фильтр Калмана	76
Библиографический список	78