РГЗ
Часть 1

Дана выборка значений некоторой случайной величины. Предполагается, что величина подчиняется нормальному закону распределения $\left(\xi \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)\right)$, где μ – параметр сдвига, σ^2 – параметр масштаба.

1. По выборке объема *n*, соответствующей варианту (табл. 1), найти точечную оценку математического ожидания μ. Найти несмещенную оценку дисперсии:

   – при известном математическом ожидании μ, значение которого приведено в таблице 1;

   – при неизвестном математическом ожидании μ.

2. Построить четыре доверительных интервала с доверительной вероятностью γ:

   – для параметра сдвига μ при известном и неизвестном параметре масштаба σ^2;

   – для параметра масштаба σ^2 при известном и неизвестном параметре сдвига μ.

3. Построить график эмпирической функции распределения. Наложить на него функцию нормального распределения с параметрами $\hat{\mu}$ и $\hat{\sigma}$, равными найденным в п. 1 оценкам (в качестве $\hat{\sigma}^2$ использовать исправленную выборочную дисперсию).

4. Сопоставить выборочное распределение с нормальным законом с параметрами μ и σ^2, равными найденным в п. 1 оценкам, на вероятностной бумаге (qqplot).

Таблица 1 – Варианты заданий (часть 1)

№	n	Выборка	γ	μ	σ
1	15	-6, -4.4, -2, -7.6, -0.4, 0.1, -3.7, -5.4, -0.8, -3.9, -5.3, -0.3, -4.8, -8.6, -0.9	0.95	-4	2
2	10	25, 27, 25, 20, 30, 25, 20, 23, 26, 22	0.9	25.2	3.4
3	12	-93, 52, 192, 79, 150, 102, -147, -165, -16, 105, 144, 162	0.95	10.5	102.1
4	14	73, -16, -66, 38, -85, -11, 24, 93, 112, 1, 15, 36, -7, 70	0.99	14	45
5	11	0, 9, 2.4, -1.7, 5, 5.4, 3.4, 5.7, 12.5, 4.5, 6.9	0.9	5	5
6	10	3.2, -0.5, 2, 1.6, 1.1, 2.7, 1.6, 0, 1.7, 4.8	0.9	1	2
7	12	8.33, 8.36, 8.23, 8.42, 7.95, 8.16, 8.32, 8.21, 8.27, 8.08, 8.09, 8.02	0.95	8.2	0.1
8	10	0.108, 0.093, 0.11, 0.117, 0.12, 0.089, 0.113, 0.111, 0.092, 0.091	0.9	0.1	0.01
9	15	-0.87, 0.4, -2.7, -0.01, 1.25, -0.9, 0.58, -0.61, 1.25, -1.04, -0.62, -0.19, -0.16, 2.31, 1.05	0.95	0	1.4
10	11	298, 322, 331, 346, 299, 337, 318, 313, 329, 304, 317	0.9	315	17
11	17	25, 29, 19, 26, 23, 16, 20, 22, 24, 18, 18, 30, 19, 26, 24, 24, 19	0.99	22	4
12	12	102, 39, -111, 87, 150, -76, 164, 151, 60, 127, 149, 94	0.9	100	100
13	10	-1.38, -2.21, -0.8, -0.1, -0.21, -0.54, -0.98, -3.05, -0.08, -0.19	0.9	-1	1
14	14	0.75, 0.34, 0.8, 0.86, 0.55, 0.43, 0.34, 0.84, 1.04, 0.58, 1.25, 0.76, 0.82, 1.16	0.95	0.8	0.25
15	11	-1.56, -1.73, -1.72, -1.54, -0.7, -1.58, -1.04, -1.18, -1.83, -1.51, -1.99	0.95	-1.5	0.3
16	12	3.59, 2.48, 2.35, 3.94, 3.58, 2.99, 3.75, 3.42, 3.33, 3.97, 2.98, 4.15	0.9	3.3	0.5
17	15	9.4, 7.3, 9.4, 8.4, 8.7, 5.7, 6.3, 5.3, -1.2, 5.2, 3.6, 4.3, 11.5, 6.5, 8.2	0.95	7	3
18	17	0.7, 1.4, -0.7, -1.5, 0.1, -0.1, -1, 0.1, 1.4, 0.9, -0.8, -0.3, 3, 0.3, -0.7, 0.1, 1.2	0.9	0	1
19	11	19.2, 20.1, 20.6, 19.4, 19.7, 19.1, 19.9, 18.7, 20.2, 19.8, 19.4	0.9	19.5	0.9
20	10	39.3, 21, 33.8, 34.9, 27.9, 20.6, 42.9, 30.2, 22.2, 23	0.9	32.2	7.3
21	10	20.5, 8.2, 20, 12.6, 14.1, 13.4, 12.1, 16, 19.9, 19.4	0.9	12	5
22	12	-9.9, -12.9, -11.7, -11.6, -12.3, -12, -12.7, -11.3, -15.7, -9.5, -10.4, -13.1	0.95	-12	2
23	15	416, 381, 383, 419, 428, 408, 397, 393, 400, 413, 405, 409, 404, 404, 400	0.9	400	20
24	12	59, 60, 70, 69, 63, 62, 71, 69, 67, 67, 76, 58	0.95	65	6.5
25	11	-3, 7, 6, 3, 18, 3, 19, 7, 5, 0, 25	0.9	9	12
26	12	-20, 79, 18, 57, 10, 94, -48, 3, -16, 115, 88, -8	0.95	-5	100
27	15	0.16, -0.09, 0.05, -0.1, 0.23, -0.18, 0.11, -0.11, 0.08, 0.09, 0.06, 0.11, -0.27, -0.1, 0.18	0.99	0	0.15
28	12	0.4, -13.5, 4.3, -4.8, -4.5, -2.5, -3.9, 0.9, 2.3, -4, -11.6, 6.7	0.9	-1	5
29	10	87, 96, 77, 91, 82, 92, 80, 111, 81, 84	0.9	90	10
30	11	68, 126, -60, 89, 15, -65, -59, -99, 19, 66, 26	0.95	50	100

РГЗ
Часть 2

Задание

1. В соответствии с вариантом сгенерировать выборку объема n (табл. 2) из теоретического распределения, заданного функцией распределения $F(x)$ (табл. 3), с известными истинными значениями параметров (табл. 2). Привести выборочные значения.
2. Вывести формулу функции плотности для распределения, заданного по варианту.
3. Аналитически получить уравнения для оценивания параметров распределения методом, соответствующим варианту (ММ – метод моментов, ММП – метод максимального правдоподобия). Получить оценки параметров по выборке, сгенерированной в п. 1.
4. Разбить выборочные значения на l равночастотных интервалов (табл. 2). Построить гистограмму и полигон частот как выборочные аналоги функции плотности.
5. По оценкам, полученным в п. 3, построить теоретические плотности и наложить их на графики из п.4.
6. Проверить по критерию согласия χ^2 гипотезы о принадлежности выборки заданному в варианте закону распределения на уровне значимости α (табл. 2).

Требования к выполнению

В пункте 1 генерацию выборки выполнять средствами Python/R/Matlab или другого языка программирования. В отчёте обязательно привести текст программы генерации выборки. Перед генерацией установить seed, определяемый по следующей формуле: текущий год * № группы + № варианта. Для генерации выборки рекомендуется использовать метод обратной функции (описание данного метода можно найти, например, в учебном пособии М. Б. Лагутина[1]).

Если в пункте 3 получить оценку параметра в явном виде невозможно, полученное уравнение или систему уравнений решить численно. В этом случае в отчёте указать решаемое уравнение или систему, ограничения на параметры и полученное численное решение. Также в отчёте привести текст программы оценки параметров (как для оценок по аналитическому решению, так и по численному).

Если параметр распределения является натуральным числом, то при использовании ММП допускается перебор допустимых целочисленных значений с выбором значения, обеспечивающего максимальное правдоподобие.

Все функции, такие как поиск выборочного среднего, дисперсии и так далее, реализовать самостоятельно, не пользуясь библиотечными аналогами. Функции поиска максимума и минимума в данных можно взять из библиотечных функций.

---

[1] Лагутин М. Б. *Наглядная математическая статистика*. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009. — С. 42.

Таблица 2 – Варианты заданий (часть 2)

№	n	Закон распределения	Параметры	Метод	l	α
1	162	Вейбулла	$\lambda=1,k=3$	ММП	8	0.1
2	150	Вейбулла	$\lambda=2,k=2$	ММП	10	0.05
3	240	Вейбулла	$\lambda=1,k=2$	ММП	12	0.05
4	224	Вейбулла	$\lambda=5,k=2$	ММ	10	0.1
5	100	Вейбулла	$\lambda=2,k=4$	ММ	12	0.05
6	102	Вейбулла	$\lambda=3,k=2$	ММ	8	0.05
7	100	Эрланга	$\lambda=0.5,k=1$	ММП	12	0.1
8	300	Эрланга	$\lambda=1,k=2$	ММП	10	0.05
9	190	Эрланга	$\lambda=2,k=3$	ММП	8	0.1
10	295	Непрерывное распределение Бернулли	$\theta=-2$	ММП	10	0.1
11	294	Непрерывное распределение Бернулли	$\theta=0$	ММП	12	0.05
12	200	Непрерывное распределение Бернулли	$\theta=1$	ММП	12	0.1
13	100	Непрерывное распределение Бернулли	$\theta=-1$	ММ	10	0.1
14	250	Непрерывное распределение Бернулли	$\theta=2$	ММ	8	0.05
15	150	Непрерывное распределение Бернулли	$\theta=3$	ММ	8	0.1
16	252	Логистическое	$\mu=0,s=1$	ММП	12	0.05
17	90	Логистическое	$\mu=1,s=2$	ММП	10	0.1
18	204	Логистическое	$\mu=2,s=10$	ММП	8	0.05
19	256	Ломакса	$\alpha=2,\lambda=2$	ММП	8	0.05
20	100	Ломакса	$\alpha=1,\lambda=4$	ММП	10	0.1
21	150	Ломакса	$\alpha=1,\lambda=6$	ММП	10	0.05
22	200	Чена	$\lambda=2,\beta=0.5$	ММП	10	0.1
23	204	Чена	$\lambda=3,\beta=1.5$	ММП	8	0.1
24	300	Чена	$\lambda=4,\beta=2$	ММП	12	0.05
25	305	Бёрра XII типа	$c=3,k=1$	ММП	12	0.05
26	100	Бёрра XII типа	$c=2,k=3$	ММП	10	0.1
27	220	Бёрра XII типа	$c=0.5,k=2$	ММП	8	0.05
28	215	Дагума I типа при $a=1$	$b=0.5,p=2$	ММП	10	0.1
29	170	Дагума I типа при $a=1$	$b=1,p=2$	ММП	8	0.1
30	155	Дагума I типа при $a=1$	$b=2,p=3$	ММП	10	0.05

Таблица 3 – Функции распределения

Закон распределения	$F(x)=$
Вейбулла	$1-e^{-(x/\lambda)^k}, x \geq 0, \lambda > 0, k > 0$
Эрланга	$1-\sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\lambda x)^i}{i!} e^{-\lambda x}, x \geq 0, \lambda > 0, k = 1,2,...$
Непрерывное распределение Бернулли	$\begin{cases} x, & \theta = 0, \\ \frac{e^{\theta x}-1}{e^{\theta}-1}, & \theta \neq 0, \end{cases}$ $x \in [0;1]$
Логистическое	$\frac{1}{1+e^{-(x-\mu)/s}}, s > 0$
Ломакса	$1-\left(1+\frac{x}{\lambda}\right)^{-\alpha}, x \geq 0, \alpha > 0, \lambda > 0$
Чена	$1-e^{\lambda\left(1-e^{x^{\beta}}\right)}, x > 0, \lambda > 0, \beta > 0$
Бёрра XII типа	$1-\left(1+x^c\right)^{-k}, x > 0, c > 0, k > 0$
Дагума I типа при $a=1$	$\left(\left(\frac{x}{b}\right)^{-1}+1\right)^{-p}, x > 0, b > 0, p > 0$

Требования к оформлению

Работа оформляется в соответствии с нумерацией пунктов задания. Каждый пункт начинается с его номера и текста задания. Номер варианта берется в соответствии с порядковым номером в электронном журнале.

Основные используемые формулы, полученные аналитические выражения и их вывод должны быть приведены в отчёте. Недостаточно указывать только численный результат, полученный программой. Обозначения параметров должны совпадать с обозначениями в задании.

Результаты вычислений следует приводить с разумной точностью, например, до 3–4 знаков после запятой.

Все таблицы должны иметь номер и название.

Каждый рисунок должен иметь номер и подпись. Оси на графиках должны быть подписаны, а при наличии нескольких графиков на одном рисунке должна присутствовать легенда.

Код генерации выборки и оценки параметров приводится в приложении в конце отчёта. В основном тексте написать, например, «Программная реализация приведена в приложении А».