Пример 1. *Вычислить произведения AB и BA (в обозначениях произведения точка иногда опускается) для следующих матриц:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Начнем с правила умножения размерностей. Так как матрица A имеет размерность (2×2), а матрица B — соответственно (3×2), то произведение AB невозможно (число столбцов левой матрицы — 2 не равно числу строк правой матрицы — 3). Произведение BA возможно, так как число столбцов матрицы B и число строк матрицы A совпадают. Найдем размерность произведения

$$(3 \times 2)(2 \times 2) = (3 \times 2),$$

то есть матрица $C = BA$ состоит из трех строк и двух столбцов. Найдем ее элементы, пользуясь формулами Начнем с первой строки:

$$c_{11} = \underline{b}_1 \cdot \overline{a}_1 = (0,1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 3;$$

$$c_{12} = \underline{b}_1 \cdot \overline{a}_2 = (0,1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) = -2;$$

то есть элементы первой строки матрицы $C = BA$ получаются последовательным умножением первой строки матрицы B на столбцы матрицы A. Аналогично вычисляя элементы второй и третьей строк матрицы C, получим:

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) \\ 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-2) \\ 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 & 0 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Произведение квадратных матриц одного порядка определено всегда, при этом матрица-произведение имеет тот же порядок (докажите это с помощью правила умножения размерностей!).

Пример 2. *Найти обратную для матрицы*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Найдем определитель матрицы (разлагая его, например, по первой строке):

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -3.$$

Матрица A невырождена, значит, обратная A^{-1} существует. Для ее нахождения, как и раньше, найдем алгебраические дополнения всех элементов матрицы A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 7; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -5;$$
$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 6;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -6; \quad A_{22} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3;$$
$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -3;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1;$$
$$A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = -3.$$

Составим присоединенную матрицу:

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -5 & 6 \\ -6 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Обратную матрицу находим по формуле:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\widetilde{A}^{T}=\frac{1}{-3}\begin{pmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -7/3 & 2 & -1/3 \\ 5/3 & -1 & -1/3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Предлагаем читателю самостоятельно убедиться в правильности нахождения обратной матрицы. Для этого нужно проверить, что выполняются равенства:

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E.$$

ПРИМЕР 3. *Найти решение системы уравнений:*

$$\begin{cases} 2x+7y+3z=5; \\ 3x+9y+4z=-1; \\ x+5y+3z=2. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Запишем систему уравнений в матричном виде: $A\overline{x}=\overline{b}$, где

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad \overline{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \overline{b}=\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица A^{-1} вычислена ранее, с ее помощью находим решение:

$$\overline{x}=A^{-1}\overline{b}=\begin{pmatrix} -7/3 & 2 & -1/3 \\ 5/3 & -1 & -1/3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -43/3 \\ 26/3 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, единственное решение нашей системы: $x=-43/3$, $y=26/3$, $z=-9$.

Пример 4. *Найти общее решение неоднородной системы линейных уравнений и выразить его через фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы:*

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6; \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4; \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases}$$

Решение. Как и в случае однородной системы, используем метод Гаусса, но элементарные преобразования (только со строками!) будем проводить с расширенной матрицей системы. Как и прежде, приведем расширенную матрицу к ступенчатому виду

$$A^* = (A|\overline{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 11 & 5 & -1 & 10 \\ 0 & 22 & 10 & -2 & 20 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 11 & 5 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Видим, что число ненулевых строк ступенчатых матриц, как основной, так и расширенной, равно 2. Следовательно, $\mathrm{Rg} A = \mathrm{Rg} A^* = 2$, и по теореме Кронекера–Капелли система совместна. Так как число неизвестных системы $n = 4$, то по теореме система имеет фундаментальную систему из $n - r = 2$ решений. В качестве базисного минора обеих матриц удобно выбрать минор треугольного вида, расположенный на пересечении первых двух (ненулевых) строк и первого и четвертого столбцов (элементы которых отмечены в последней матрице). Тогда базисными неизвестными будут x_1, x_4, остальные — свободными. Как и раньше, выпишем систему, соответствующую последней (ступенчатой) матрице, затем свободные неизвестные перенесем в правые части уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -2, \\ 11x_2 + 5x_3 - x_4 = 10, \end{cases} \iff$$

$$\iff \quad \begin{cases} x_1 + x_4 = -2 + 2x_2 + x_3, \\ -x_4 = 10 - 11x_2 - 5x_3. \end{cases}$$

Решая последнюю систему относительно базисных неизвестных «снизу вверх», находим общее решение неоднородной системы

$$\overline{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 - 9x_2 - 4x_3 \\ x_2 \\ x_3 \\ -10 + 11x_2 + 5x_3 \end{pmatrix}, \qquad (0.0.1)$$

где базисные неизвестные выражены через свободные, а свободные могут принимать произвольные значения.

Из общего решения неоднородной системы легко получить частное решение этой системы. Для этого достаточно в равенстве подставить вместо свободных неизвестных какие-нибудь конкретные значения, проще всего — нулевые: $x_2 = 0, x_3 = 0$. Полученное частное решение неоднородной системы

$$\overline{z} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix}$$

вычтем из общего решения неоднородной системы. По свойству эта разность является решением соответствующей однородной системы

$$\overline{x} = \overline{y} - \overline{z} = \begin{pmatrix} -9x_2 - 4x_3 \\ x_2 \\ x_3 \\ 11x_2 + 5x_3 \end{pmatrix}. \qquad (0.0.2)$$

В этом решении базисные неизвестные x_1, x_4 выражены через свободные x_2, x_3, которые принимают произвольные значения. Следовательно, равенство представляет общее решение однородной системы, соответствующей данной неоднородной. Как и при решении предыдущего примера, найдем фундаментальную систему решений однородной системы, подставляя поочередно значения свободных неизвестных: $x_2 = 1$, $x_3 = 0$ и $x_2 = 0$, $x_3 = 1$,

$$\overline{e}_1 = \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad \overline{e}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Используя найденную фундаментальную систему решений, общее решение неоднородной системы можно записать в виде

$$\overline{y} = \overline{z} + x_2\overline{e}_1 + x_3\overline{e}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix},$$

где свободные неизвестные играют роль произвольных постоянных.

Пример 5. *Даны вершины треугольника* $A(-1,-2,4)$, $B(-4,-2,0)$ *и* $C(3,-2,1)$. *Определить угол при вершине* B.

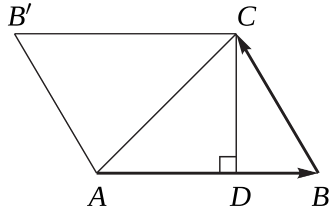
Решение. Имеем

$$\cos\widehat{B} = \cos(\widehat{\overline{BA}, \overline{BC}}) = \frac{\overline{BA}\cdot\overline{BC}}{|\overline{BA}||\overline{BC}|}.$$

Но $\overline{BA} = \{3,0,4\}$, $\overline{BC} = \{7,0,1\}$, значит, $\overline{BA}\cdot\overline{BC} = 3\cdot 7 + 4\cdot 1 = 25$, $|\overline{BA}| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$, $|\overline{BC}| = \sqrt{7^2+1^2} = 5\sqrt{2}$. Таким образом, $\cos\widehat{B} = \dfrac{25}{5\cdot 5\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Отсюда $\widehat{B} = 45^\circ$.

Пример 6. *Зная две стороны треугольника* $\overline{AB} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ *и* $\overline{BC} = \mathbf{i} + 5\mathbf{j}$, *вычислить длину его высоты* CD.

Решение. Очевидно, высота треугольника ABC равна высоте параллелограмма $ABCB'$. Из геометрии известно, что площадь параллелограмма $S = |\overline{AB}||\overline{CD}|$. Из определения векторного произведения эта же площадь $S = |\overline{BA}\times\overline{BC}|$.



Отсюда получаем, что

$$|\overline{CD}| = \frac{|\overline{BA} \times \overline{BC}|}{|\overline{AB}|}.$$

Но $|\overline{AB}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$. Векторы $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$ расположены на плоскости Oxy, значит, их проекции на ось Oz равны нулю. По формуле получаем

$$\overline{BA} \times \overline{BC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -19\mathbf{k}.$$

Следовательно, $|\overline{BA} \times \overline{BC}| = |-19\mathbf{k}| = 19|\mathbf{k}| = 19$.

Таким образом, искомая высота равна $|\overline{CD}| = \dfrac{19}{5}$.

Пример 7. *Даны вершины пирамиды* $A(-1,0,2)$, $B(2,1,0)$, $C(-5,0,5)$ *и* $D(0,5,1)$. *Найти длину ее высоты, опущенной из вершины* D.

Решение. Высота пирамиды равна высоте параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$, как на смежных ребрах. Из геометрии известно, что объем параллелепипеда равен произведению площади основания параллелепипеда на его высоту: $V = SH$.

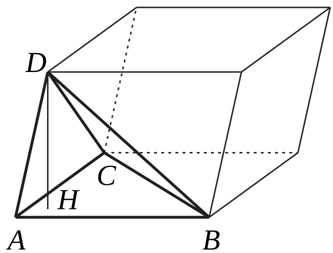


Рис. 2.30

С другой стороны, его объем равен модулю смешанного произведения векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$, а площадь основания — модулю векторного произведения векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$.

Отсюда $|\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD}| = |\overline{AB} \times \overline{AC}| \cdot H$, или

$$H = \frac{|\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD}|}{|\overline{AB} \times \overline{AC}|}.$$

Находим векторы

$$\overline{AB} = \{3, 1, -2\}, \quad \overline{AC} = \{-4, 0, 3\}, \quad \overline{AD} = \{1, 5, -1\}.$$

Вычисляем векторное произведение и его модуль

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 3 & 1 & -2\\ -4 & 0 & 3\end{vmatrix}=3\mathbf{i}-\mathbf{j}+4\mathbf{k};\quad |\overline{AB}\times\overline{AC}|=\sqrt{26}.$$

Для вычисления смешанного произведения нет необходимости вычислять еще один определитель, проще найденное векторное произведение скалярно умножить на вектор $\overline{AD}$

$$(\overline{AB}\times\overline{AC})\cdot\overline{AD}=(3\mathbf{i}-\mathbf{j}+4\mathbf{k})(\mathbf{i}+5\mathbf{j}-\mathbf{k})=-6.$$

Таким образом,

$$H=\frac{|\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}|}{|\overline{AB}\times\overline{AC}|}=\frac{6}{\sqrt{26}}.$$

ПРИМЕР 8. *Даны вершины треугольника* $A(-2,1)$, $B(1,3)$ *и* $C(-3,-2)$. *Написать уравнение высоты, опущенной из вершины A на сторону BC.*

РЕШЕНИЕ. Высота перпендикулярна в основанию. Значит нормалью к искомой прямой может служить вектор $\overline{BC}=\{-4,-5\}$. Получаем

$$-4(x+2)-5(y-1)=0.$$

Упрощая, получаем уравнение высоты

$$4x+5y+3=0.$$

ПРИМЕР 9. *При каком значении параметра a прямые* $3ax-8y+13=0$ *и* $(a+1)x-2ay-21=0$ *параллельны?*

РЕШЕНИЕ. Прямые параллельны, если их нормали $\mathbf{n}_1=\{3a,-8\}$ и $\mathbf{n}_2=\{a+1,-2a\}$ параллельны. Используя условие коллинеарности двух векторов, получаем

$$\frac{3a}{a+1}=\frac{-8}{-2a}.$$

Отсюда $3a^2-4a-4=0$. Решая это уравнение, получим $a_1=2$ и $a_2=-\dfrac{2}{3}$.

Пример 10. *При каком значении параметра а прямые* $(3a+2)x+(1-4a)y+8=0$ *и* $2x-3y+7=0$ *будут перпендикулярны друг другу?*

Решение. Прямые перпендикулярны, если их нормали $\mathbf{n}_1=\{3a+2, 1-4a\}$ и $\mathbf{n}_2=\{2,-3\}$ будут также перпендикулярны, значит, скалярное произведение $\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2=0$. Отсюда

$$2(3a+2)-3(1-4a)=0 \quad \text{или} \quad a=-\frac{1}{6}.$$

Пример 11. *В треугольнике с вершинами* $A_1(-1,2), A_2(2,6)$ *и* $A_3(4,-10)$ *составить уравнения медианы* A_1M*, высоты* A_1H *и биссектрисы* A_1B*.*

Решение. 1) A_1M — медиана, значит, точка M делит отрезок A_2A_3 пополам. По формулам имеем $x_M=\dfrac{2+4}{2}=3$, $y_M=\dfrac{6-10}{2}=-2$. Итак, точка $M(3,-2)$ найдена. Используя (**??**), запишем уравнение медианы $A_1M: \dfrac{x+1}{3+1}=\dfrac{y-2}{-2-2}$. Отсюда, упрощая, $x+y-1=0$ — искомое уравнение медианы.

2) Высота A_1H перпендикулярна основанию A_2A_3, значит, нормальным вектором к этой высоте может служить вектор $\overline{A_2A_3}=\{2,-16\}$. Получаем $2(x+1)-16(y-2)==0$. Отсюда $x-8y+17=0$ — уравнение искомой высоты.

3) Для нахождения уравнения биссектрисы A_1B достаточно найти направляющий вектор этой прямой, в качестве которого можно взять $\mathbf{s}=\overline{A_1A_2^\circ}+\overline{A_1A_3^\circ}$, где $\overline{A_1A_2^\circ}==\dfrac{\overline{A_1A_2}}{|\overline{A_1A_2}|}$ — орт вектора $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_3^\circ}=\dfrac{\overline{A_1A_3}}{|\overline{A_1A_3}|}$ — орт вектора $\overline{A_1A_3}$.

Найдем эти орты:

$$\overline{A_1A_2}=\{3,4\}, \quad |\overline{A_1A_2}|=\sqrt{3^2+4^2}=5, \quad \overline{A_1A_2^\circ}=\left\{\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right\};$$

$$\overline{A_1A_3}=\{5,-12\}, \quad |\overline{A_1A_3}|=13, \quad \overline{A_1A_3^\circ}=\left\{\frac{5}{13},-\frac{12}{13}\right\}.$$

Следовательно, направляющий вектор биссектрисы равен

$$\mathbf{s}=\left\{\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right\}+\left\{\frac{5}{13},-\frac{12}{13}\right\}=\left\{\frac{64}{65},-\frac{8}{65}\right\}.$$

Заметим, впрочем, что длина направляющего вектора не имеет значения, поэтому можно взять вектор $\mathbf{s}_1 = \dfrac{65}{8}\mathbf{s} = \{8, -1\}$ в качестве направляющего. Но это лишь упрощение промежуточных вычислений и не более того. Получаем уравнение искомой биссектрисы A_1B: $\dfrac{x+1}{8} = \dfrac{y-2}{-1}$. Или $x + 8y - 15 = 0$.

Пример 12. *Найти точку B, симметричную точке $A(4, -3, 1)$ относительно плоскости $x + 2y - z - 3 = 0$.*

Решение. Точки A и B должны лежать на одной прямой, перпендикулярной плоскости, и одинаково отстоять от этой плоскости. Найдём уравнение прямой, проходящей через точку A и перпендикулярной плоскости

$$\frac{x-4}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{-1}.$$

Найдём точку пересечения этой прямой и плоскости: $x = = 4 + t$, $y = -3 + 2t$, $z = 1 - t$ подставим в уравнение плоскости $(4 + t) + 2(-3 + 2t) - (1 - t) - 3 = 0$; отсюда $t = 1$. Значит, точка пересечения $C(5, -1, 0)$. Она делит отрезок AB пополам. Но координаты середины отрезка равны полусумме координат крайних точек. Значит,

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_C = \frac{y_A + y_B}{2}, \quad z_C = \frac{z_A + z_B}{2}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} x_B &= 2x_C - x_A = 6, \\ y_B &= 2y_C - y_A = 1, \\ z_B &= 2z_C - z_A = -1. \end{aligned}$$

Симметричная точка $B(6, 1, -1)$ найдена.

Пример 13. *Найти расстояние точки $A(7, 9, 7)$ от прямой*

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}.$$

Решение. Запишем уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно прямой:

$$4(x-7)+3(y-3)+2(z-7)=0$$

или

$$4x+3y+2z-69=0.$$

Найдём точку пересечения прямой и плоскости $B(10,7,4)$. Искомое расстояние от точки A до прямой

$$AB=\sqrt{(10-7)^2+(7-9)^2+(4-7)^2}=\sqrt{22}.$$