

ПРИМЕР 1.

1. $\{x_n\} = \left\{1 - \frac{1}{n}\right\}$, $\{y_n\} = \left\{1 + \frac{1}{n}\right\}$. Здесь $x_n < y_n$, а $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

2. $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$, $\{y_n\} = \left\{1 - \frac{1}{n}\right\}$. Здесь $x_n < y_n$ при $n \geq 3$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 < 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

ПРИМЕР 2. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3}$.

Выше было показано, что $\sin x \sim x$ и $\operatorname{tg} x \sim x$ и если в числителе заменить синус и тангенс на эквивалентные величины, то получим в ответе нуль. Но это неверно именно по свойству 3). По свойствам 1) и 2) при $x \rightarrow 0$ синус и тангенс эквивалентны. И, значит их разность будет бесконечно малой более высокого порядка, чем первый. Но какого? Рассмотрим верное решение данного примера.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x(1 - \cos x)}{x^3 \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x(1 - \cos^2 x)}{x^3 \cos x(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x}{x^3 \cos x(1 + \cos x)} = 1/2. \end{aligned}$$

Предел отношения бесконечно малых не изменится, если заменить эти бесконечно малые эквивалентными, т.е., если $\alpha \sim \alpha^*$ и $\beta \sim \beta^*$ при $x \rightarrow x_0$, то $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha^*(x)}{\beta^*(x)}$.

$$\text{В самом деле, } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\alpha^*(x)} \cdot \frac{\alpha^*(x)}{\beta^*(x)} \cdot \frac{\beta^*(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha^*(x)}{\beta^*(x)}.$$

Последнее свойство эффективно при разрешении неопределенностей вида $\left(\frac{0}{0}\right)$, если мы будем иметь достаточно большую таблицу основных эквивалентностей: при $\alpha \rightarrow 0$

- 1) $\sin \alpha \sim \alpha$;
- 2) $\arcsin \alpha \sim \alpha$;
- 3) $\operatorname{tg} \alpha \sim \alpha$;
- 4) $1 - \cos \alpha \sim \alpha^2/2$;
- 5) $\ln(1 + \alpha) \sim \alpha$;

$$6) \log_a(1 + \alpha) \sim \alpha / \ln a;$$

$$7) e^\alpha - 1 \sim \alpha;$$

$$8) a^\alpha - 1 \sim \alpha \ln a;$$

$$9) (1 + \alpha)^m - 1 \sim \alpha m.$$

Первые четыре эквивалентности — это первый замечательный предел и следствия из него. Пятая эквивалентность получена выше, как следствие из второго замечательного предела. Формулу 7) можно получить так: Обозначим $e^\alpha - 1 = \beta$. Ясно, что $\beta \rightarrow 0$ при $x \rightarrow x_0$. Выразим α через β : $e^\alpha = 1 + \beta, \alpha = \ln(1 + \beta)$. Следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^\alpha - 1}{\alpha} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta}{\ln(1 + \beta)} = 1.$$

Восьмая эквивалентность получается из седьмой с использованием основного логарифмического тождества: $a^\alpha - 1 = e^{\alpha \ln a} - 1 \sim \alpha \ln a$.

Несколько сложнее доказывается последняя, девятая эквивалентность. Обозначим $(1 + \alpha)^m - 1 = \beta$. Ясно, что $\beta \rightarrow 0$ при $x \rightarrow x_0$. Отсюда $m \ln(1 + \alpha) = \ln(1 + \beta)$. Следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(1 + \alpha)^m - 1}{\alpha m} = \frac{\beta}{\alpha m} = \frac{\beta}{\ln(1 + \beta)} \cdot \frac{m \ln(1 + \alpha)}{\alpha m} = 1.$$

ПРИМЕР 3.

1) Найти предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{\sin lx}.$$

Здесь мы имеем неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Так как kx, lx бесконечно малы, то

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{\sin lx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx}{lx} = \frac{k}{l}.$$

2) Найти предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\sin^2 3x}.$$

А здесь какая неопределенность? Так как $1 - \cos 2x \sim (2x)^2 = 2x^2$ и $\sin^2 3x \sim (3x)^2 = 9x^2$, то $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\sin^2 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{9x^2} = \frac{2}{9}$.

3) Найти предел

$$\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\sin x - \cos x}.$$

Здесь мы также имеем неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Чтобы использовать пятую неопределенность, прибавим и отнимем к тангенсу единицу: $\ln \operatorname{tg} x = \ln(1 + (\operatorname{tg} x - 1)) \sim \operatorname{tg} x - 1$, т.к. $\operatorname{tg} x - 1 \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pi/4$. Значит,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\sin x - \cos x} &= \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\sin x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin x / \cos x - 1}{\sin x - \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{1}{\cos x} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

4) Найти предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - e^{-x^2}}{\ln \cos x}.$$

Здесь у нас неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. В числителе вынесем за скобку e^{-x^2} , а в знаменателе к косинусу прибавим единицу:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - e^{-x^2}}{\ln \cos x} &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{-x^2} \frac{e^{2x^2} - 1}{\ln(1 + (\cos x - 1))} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-x^2} \frac{2x^2}{(\cos x - 1)} = \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{-x^2/2} &= -4. \end{aligned}$$

4) Найти предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+4} \right)^{2x+5}.$$

Здесь у нас неопределенность вида (1^∞) . Воспользуемся основным логарифмическим тождеством:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+4} \right)^{2x+5} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\ln \left(\frac{2x+3}{2x+4} \right)^{2x+5}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{(2x+5) \ln \left(\frac{2x+3}{2x+4} \right)}.$$

В аргументе у логарифма выделим целую часть:

$$\frac{2x+3}{2x+4} = \frac{(2x+4) - 1}{2x+4} = 1 + \frac{-1}{2x+4}.$$

Но тогда

$$\ln \left(\frac{2x+3}{2x+4} \right) = \ln \left(1 + \frac{-1}{2x+4} \right) \sim \frac{-1}{2x+4} \quad (\text{т.к. } \frac{-1}{2x+4} \text{ — бесконечно малая при } x \rightarrow \infty).$$

Следовательно наш предел равен

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{(2x+5) \cdot \frac{-1}{2x+4}} = e^{-\frac{2+5/x}{2+4/x}} = e^{-1}.$$

ПРИМЕР 4.

1) $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$. Эта функция определена в некоторой окрестности точки $x = 0$, но не определена в самой точке $x = 0$. Поэтому, несмотря на то, что существует предел $f(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$, равный 0, эта функция не является непрерывной в точке $x = 0$, так как нельзя сказать, что $f(x) \rightarrow f(0)$ при $x \rightarrow 0$.

2) Пусть

$$y(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{при } x \neq 0; \\ 1, & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Эта функция определена в точке $x = 0$ ($y(0) = 1$), и в ее окрестности, имеет предел при $x \rightarrow 0$ и этот предел равен значению функции в точке $x = 0$: $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1 = y(0)$, при $x \rightarrow 0$, см. первый замечательный предел.

ПРИМЕР 5. $y = \sin \frac{\pi}{x}$. Эта функция при $x \rightarrow 0$ предела не имеет ни справа, ни слева.

Действительно, пусть $x_k = \frac{1}{k}$, $k = 1, 2, \dots$, тогда $y(x_k) = \sin \pi k = 0$ и $\lim_{x_k \rightarrow 0} y(x_k) = 0$; если взять $x'_k = \frac{2}{4k+1}$, то $y(x'_k) = \sin \frac{\pi}{2}(4k+1) = \sin \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k \right) = 1$. Следовательно, $\lim_{x'_k \rightarrow 0} y(x'_k) = 1$. Таким образом, в любой как угодно малой окрестности точки $x = 0$ справа будут существовать значения функции, равные 0 и 1, что противоречит существованию предела. Аналогично проверяется несуществование предела слева в точке $x = 0$.

ПРИМЕР 6. Показать, что функция $y = a^{\frac{1}{1-x}}$, ($a > 1$) имеет разрыв второго рода в точке $x = 1$.

Указание: Вычислить $\lim_{x \rightarrow 1-0} a^{\frac{1}{1-x}} = \infty$ и $\lim_{x \rightarrow 1+0} a^{\frac{1}{1-x}} = 0$.

ПРИМЕР 7. Найти $(\operatorname{tg}^3(x))'$.

Здесь $\operatorname{tg}^3(x)$ есть композиция двух функций y^3 и $y = \operatorname{tg} x$. Поэтому $(\operatorname{tg}^3(x))' = (y^3)'_y y'_x = 3y^2(x) \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{3 \operatorname{tg}^2(x)}{\cos^2(x)}$.

ПРИМЕР 8. Найти $(\operatorname{tg} x^3)'$.

Здесь $\operatorname{tg} x^3 = z(y(x))$, $z(y) = \operatorname{tg} y$, $y = x^3$. Поэтому $(\operatorname{tg} x^3)' = z'_y y'_x = \frac{1}{\cos^2 y} 3x^2 = \frac{3x^2}{\cos^2 x^3}$.

ПРИМЕР 9. Найти $(\ln(3 + 2 \sin x))'$.

Здесь $\ln(3 + 2 \sin x) = w(z(y(x)))$, где $w(z) = \ln z$, $z(y) = 3 + 2y$, $y(x) = \sin x$. Поэтому $(\ln(3 + 2 \sin x))' = w'_z z'_y y'_x = \frac{1}{z} \cdot 2 \cos x = \frac{2 \cos x}{3 + 2 \sin x}$.

ПРИМЕР 10.

$$1. y = e^{\operatorname{tg}^2 x}; y' = (e^{\operatorname{tg}^2 x})' = e^{\operatorname{tg}^2 x} 2 \operatorname{tg} x \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$2. y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0; \\ y' = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1.$$

$$3. y = \sin^3 ax; y' = 3 \sin^2 ax \cos ax \cdot a.$$

$$4. y = \sqrt[n]{x^2 + 1} - \sqrt[n]{x^2 - 1}; y' = ((x^2 + 1)^{1/n} - (x^2 - 1)^{1/n})' = \\ = \frac{1}{n} (x^2 + 1)^{1/n-1} 2x - \frac{1}{n} (x^2 - 1)^{1/n-1} 2x = \\ = \frac{2x}{n} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{(x^2 + 1)^{n-1}}} - \frac{1}{\sqrt[n]{(x^2 - 1)^{n-1}}} \right).$$

$$5. (e^x \cos 3x)' = e^x \cos 3x - 3e^x \sin 3x.$$

$$6. \left(\frac{e^x}{\sin 2x} \right)' = \frac{e^x \sin 2x - 2e^x \cos 2x}{\sin^2 2x}.$$

$$7. (\operatorname{arctg}^2(\sin x))' = 2 \operatorname{arctg} \sin x \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x}.$$

ПРИМЕР 11. $x = e^t, y = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$. Найдите y'_x .

РЕШЕНИЕ.
$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{1}{2} \frac{e^t - e^{-t}}{e^t} = \frac{1 - e^{-2t}}{2} = \frac{1 - 1/x^2}{2} = \frac{x^2 - 1}{2x^2}.$$

ПРИМЕР 12 (движение по окружности). $x = R \cos \omega t, y = R \sin \omega t$. Найдите y''_x . Находим $y'_x = -\frac{\cos \omega t}{\sin \omega t} = -\operatorname{ctg} \omega t$. Дифференцируя по t , получаем

$$y''_x x'_t = \frac{\omega}{\sin^2 \omega t} \Rightarrow y''_x = \frac{1}{x'_t} \frac{\omega}{\sin^2 \omega t} = -\frac{1}{R \sin^3 \omega t}.$$

ПРИМЕР 13. $x = e^t, y = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$. Найдите y''_x . Находим $y'_x = \frac{1}{2}(1 + e^{-2t})$. Дифференцируя по t , получим

$$y''_x x'_t = -e^{-2t} \Rightarrow y''_x = -e^{-2t} \frac{1}{x'_t} = -e^{-3t} = -\frac{1}{x^3}.$$

ПРИМЕР 14. Используя формулы Тейлора для основных элементарных функций, найти первые пять отличных от нуля членов разложения функции $f(x) = \ln(1 - 3x)$ по степеням x .

РЕШЕНИЕ. Рассмотрим функцию $y = g(t) = \ln(1 + t)$. Применим табличное представление

$$g(t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^5}{5} + R_6(t)$$

для $t = 3x$:

$$\ln(1 - 3x) = -3x - \frac{9x^2}{2} - \frac{27x^3}{3} - \frac{81x^4}{4} - \frac{243x^5}{5} + r(x)$$

где $r(x) = R_6(-3x)$. Это равенство и есть решение поставленной задачи, так как $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{r(x)}{x^5} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{R_6(-3x)}{x^5} = -243 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{R_6(-3x)}{(-3x)^5} = \{-3x = t; t \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow 0\} = 0.$$

Следовательно, $r(x) = o(x^5)$ — остаточный член в формуле Маклорена в форме Пеано.

ПРИМЕР 15. Представить приближенно в виде многочлена третьей степени функцию $y = x^x$ в окрестности точки $x_0 = 1$.

РЕШЕНИЕ. Для нахождения производных прологарифмируем функцию: $\ln y = \ln x^x = x \ln x$. Отсюда последовательным дифференцированием находим

$$y' = y(\ln x + 1), \quad y'' = y'(\ln x + 1) + \frac{y}{x}, \quad y''' = y''(\ln x + 1) + 2\frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2}.$$

Подставляя в функцию и ее производные $x = 1$, получим $y(1) = 1$, $y'(1) = 1$, $y''(1) = 2$, $y'''(1) = 3$.

По формуле Тейлора получаем искомое приближение

$$y = x^x \approx 1 + (x - 1) + (x - 1)^2 + \frac{(x - 1)^3}{2} = \frac{2x^3 - 3x^2 + 3x + 3}{6}.$$

ПРИМЕР 16. Построить график функции

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 1}.$$

РЕШЕНИЕ. 1) Функция определена на всей числовой прямой, кроме нулей знаменателя $x = \pm 1$.

2) $y(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 1} = -\frac{x^3}{x^2 - 1} = -y(x) \implies$ функция нечетная, график симметричен относительно начала координат. Дальнейшее исследование проводим для $x \geq 0$.

3) $x = 0 \iff y = 0$. График пересекает оси координат в единственной точке $(0, 0)$. Используя метод интервалов, убеждаемся, что $\frac{x^3}{x^2 - 1} = \frac{x^3}{(x - 1)(x + 1)} > 0$, если $x > 1$. При $0 < x < 1$ функция отрицательна.

4) Найдем односторонние пределы в точке разрыва $x = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \frac{x^3}{(x-1)(x+1)} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^3}{x^2 - 1} = +\infty,$$

т. е. $x = 1$ — вертикальная асимптота.

Ищем наклонные асимптоты. Имеем

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{x(x^2 - 1)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{1 - 1/x^2} = 1.$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2 - 1} = 0.$$

Следовательно, прямая $y = x$ является асимптотой как при $x \rightarrow +\infty$, так и при $x \rightarrow -\infty$.

5) Находим производную $y' = \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2}$. Стационарных точек

три: $x = 0$ и $x = \pm\sqrt{3}$. Производная не существует, если $x = \pm 1$, но эти точки не могут быть подозрительными на экстремум, так как в этих точках сама функция не определена.

x	0	$(0, 1)$	1	$(1, \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
y'	0	-	$\nexists$	-	0	+
y		$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$	$3\sqrt{3}/2 \approx 2,5$	$\nearrow$

6) Находим вторую производную $y'' = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}$. Если $x > 1$, то $y'' > 0$ и график является выпуклой вниз кривой; а если $x \in (0, 1)$, то $y'' < 0$ и график выпуклый вверх.

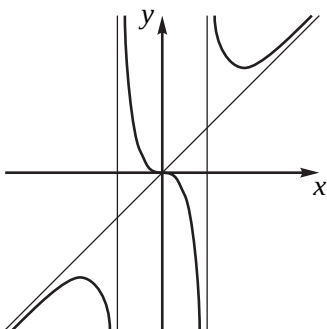


Рис. 6.9

7) На основании этого анализа строим график для $x \geq 0$ и, симметрично отражая полученную кривую относительно начала координат, получаем график функции $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$. При этом учитываем, что в точке $x = 0$ производная равна нулю, то есть касательная горизонтальна (рис. 6.9).

ПРИМЕР 17. Построить график функции

$$y = \frac{x^3}{x - 1}.$$

РЕШЕНИЕ. 1) Функция определена на всей числовой прямой, кроме нуля знаменателя $x = 1$.

2) Функция не является ни четной ни нечетной (область определения несимметрична относительно начала координат).

3) $x = 0 \iff y = 0$. Точка $(0, 0)$ — единственная точка пересечения с осями координат. Используя метод интервалов, убеждаемся, что $\frac{x^3}{x - 1} > 0$, если $x > 1$ или $x < 0$. При $0 < x < 1$ функция отрицательна.

4) Найдем односторонние пределы в точке разрыва $x = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^3}{x - 1} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^3}{x - 1} = +\infty,$$

то есть $x = 1$ — вертикальная асимптота.

Так как

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{x(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{1 - 1/x^2} = \infty,$$

то наклонных асимптот нет.

5) Находим производную $y' = \frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}$. Имеем две стационарные точки $x = 0$ и $x = 3/2$. В точке $x = 1$ производная не существует, но экстремума в этой точке не может быть, так как в ней сама функция не определена.

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, 3/2)$	3/2	$(3/2, +\infty)$
y'	-	0	-	$\nexists$	-	0	+
y	$\searrow$	0	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$	6,75	$\nearrow$

6) Находим вторую производную $y'' = \frac{2x(x^2 - 3x + 3)}{(x-1)^3}$. Если $x > 1$ или $x < 0$, то $y'' > 0$ и график является выпуклой вниз кривой; а если $x \in (0, 1)$, то $y'' < 0$ и график выпуклый вверх.

7) На основании этого анализа строим график (рис. 6.10).

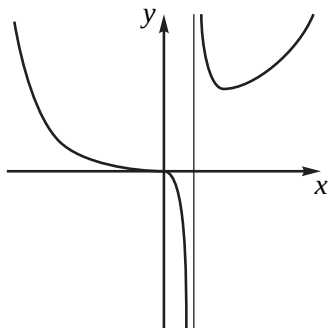


Рис. 6.10

ПРИМЕР 18. Построить график функции

$$y = \frac{\ln^2 x}{x}.$$

РЕШЕНИЕ. 1) Функция определена при $x > 0$.

2) Функция не является ни четной ни нечетной.

3) $y = 0$, только при $x = 1$. Точка $(1, 0)$ — единственная точка пересечения с осями координат. Функция неотрицательна во всей области определения.

4) Найдем предел справа в граничной точке $x = 0$ области определения

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\ln^2 x}{x} = +\infty,$$

т. е. $x = 0$ — ось Oy — вертикальная асимптота.

Ищем наклонные асимптоты. Имеем

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x}{x^2} = 0,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x}{x} = 0.$$

Следовательно, у графика функции есть горизонтальная асимптота $y = 0$ (ось Ox) при $x \rightarrow +\infty$.

5) Производная равна $y' = \frac{\ln x(2 - \ln x)}{x^2}$. Две стационарные точки $\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$ и $\ln x = 2 \Rightarrow x = e^2 \approx 7,4$.

x	$(0, 1)$	1	$(1, e^2)$	e^2	$(e^2, +\infty)$
y'	-	0	+	0	-
y		0		$4/e^2 \approx 0,6$	

6) Находим вторую производную $y'' = \frac{2 - 6\ln x + 2\ln^2 x}{x^3}$.

Приравняв числитель к нулю и решая квадратное (относительно $\ln x$) уравнение, находим точки перегиба графика функции:

$$\ln x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = e^{(3-\sqrt{5})/2} \approx 1,46, \\ x_2 = e^{(3+\sqrt{5})/2} \approx 13,74. \end{cases}$$

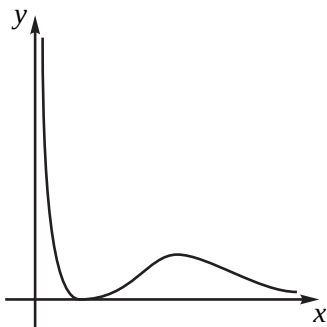


Рис. 6.11

Если $x_1 < x < x_2$, то вторая производная отрицательна и график функции выпуклая вверх кривая. Для остальных x из области определения график будет выпуклым вниз.

7) На основании этого анализа строим график (рис. 6.11).