

Министерство образования и науки Российской Федерации
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Н.В. ВАХРУШЕВ, Н.Г. ВАХРУШЕВА

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Том 4.1

Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление

Издание второе, переработанное

Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

НОВОСИБИРСК
2009

УДК 51(075.8)

В937

Рецензенты: *В. Г. Чередниченко*, д-р физ.-мат. наук,
проф. СибУКП;
А. Г. Пинус, д-р физ.-мат. наук, проф.

Работа подготовлена на кафедре высшей математики
для студентов нематематических специальностей

Вахрушев Н.В.

В937 Высшая математика. Т. 4.1. Теория функций комплексно-
го переменного и операционное исчисление: учеб. пособие /
Н. В. Вахрушев, Н. Г. Вахрушева; под ред. В. В. Хаблова. –
2 - е изд., перераб. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2009. – 176 с.

ISBN 978-5-7782-1139-1

Настоящее учебное пособие подготовлено для студентов II курса очного и заочного отделений всех направлений и специальностей, изучающих такие разделы высшей математики, как теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в объеме четвертого семестра.

Пособие содержит контрольную работу по данным разделам, а многочисленные примеры и задачи служат не только иллюстрациями к теории, но и достаточны для выполнения этой контрольной работы.

Во втором издании с согласия авторов В.В. Хабловым переработаны разделы, посвященные многозначным функциям, задания контрольной работы, сделаны необходимые исправления во всем тексте. Кроме того скорректированы и отредактированы все иллюстрации.

Все замечания по содержанию данной работы просим передавать на кафедру высшей математики. Они будут с благодарностью приняты и учтены в следующих изданиях.

УДК 51(075.8)

ISBN 978-5-7782-1139-1

© Вахрушев Н. В., Вахрушева Н. Г.,
Хаблов В. В., 2009
© Новосибирский государственный
технический университет, 2009

Оглавление

Глава 1. Элементы теории функций комплексного переменного	5
§ 1.1 Комплексные числа	5
§ 1.2 Понятие комплексного числа	6
§ 1.3 Операции над комплексными числами	10
§ 1.4 Понятие функции комплексного переменного; предел функции	16
§ 1.5 Дифференцируемость и аналитичность	21
§ 1.6 Геометрический смысл производной	28
§ 1.7 Элементарные функции комплексного переменного	31
1.7.1. Степенная функция	31
1.7.2. Показательная функция	32
1.7.3. Тригонометрические функции	34
1.7.4. Гиперболические функции	36
1.7.5. Ветви многозначных функций. Точки ветвления	37
1.7.6. Логарифмическая функция	43
1.7.7. Обратные тригонометрические функции	46
1.7.8. Обратные гиперболические функции	47
1.7.9. Общая степенная функция $w = z^a$	48
§ 1.8 Интегрирование функций комплексного переменного	50
1.8.1. Определение интеграла, его свойства и вычисление	50
1.8.2. Интегральная теорема Коши	56
1.8.3. Интегральная формула Коши	64
§ 1.9 Ряды	69
1.9.1. Числовые ряды	69
1.9.2. Степенные ряды	71
1.9.3. Ряды Тейлора	73
1.9.4. Ряды Лорана	81
§ 1.10 Изолированные особые точки	87
1.10.1. Нули аналитической функции	87
1.10.2. Изолированные особые точки аналитической функции	89

1.10.3.Связь нулей с полюсами	95
1.10.4.Вычеты	97
§ 1.11 Поведение функции в окрестности бесконечно удаленной точки	104
Глава 2. Операционное исчисление	110
§ 2.1 Оригиналы и изображения	110
§ 2.2 Свойства преобразования Лапласа	116
§ 2.3 Нахождение оригинала по изображению. Теоремы разложения	134
§ 2.4 Линейные дифференциальных уравнения с постоянными коэффициентами	142
§ 2.5 Применение интеграла Дюамеля к решению дифференциальных уравнений	148
§ 2.6 Решение систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами	151
§ 2.7 Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами.	152
§ 2.8 Решение интегральных уравнений типа свертки	154
§ 2.9 Применение операционного исчисления к расчету электрических контуров	156
ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Таблица преобразований Лапласа	163
ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Контрольная работа № 7 по теории функции комплексного переменного и операционному исчислению	167
Список литературы	175

Глава 1

Элементы теории функций комплексного переменного

§ 1.1. Комплексные числа

Если ограничиваться только действительными числами, то многие математические задачи не имеют решения. Например, не существует корня четной степени из отрицательного числа. Если у квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ дискриминант $D=b^2-4ac < 0$, то это уравнение не имеет действительных корней. Простейшим таким уравнением является уравнение $x^2+1=0$. В математике, если доказано, что какая-либо задача не имеет решения, то стараются так расширить основные понятия, чтобы задачу можно было решить. В нашем примере получим такое расширение, если примем, что уравнение $x^2+1=0$ имеет корень – “мнимую” единицу i : $i^2+1=0$. Очевидно, что тогда $i^2=-1$ или $i=\sqrt{-1}$. И теперь все квадратные уравнения будут иметь корни независимо от знака дискриминанта. Например, уравнение $x^2-2x+10=0$ имеет два корня:

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{36} \cdot \sqrt{-1}}{2} = 1 \pm 3i.$$

Это обстоятельство приводит к необходимости введения новых чисел, частным случаем которых являются действительные числа. При этом для этих новых чисел должны выполняться все основные действия

и законы, которым подчиняются действительные числа.

Комплексные числа появились в XVII веке и многими, если не большинством, были восприняты, как нечто нереальное. В частности, это отразилось в самом названии нового числа i — *мнимая* единица.

Тогда же была обнаружена неожиданная вещь: действительные числа могут "прятаться" за мнимые. Для корней кубического уравнения $x^3 + px = q$ были получены формулы (*формулы Кардано*)

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}} - \frac{q}{2}}.$$

Если применить эту формулу к уравнению $x^3 - x = 0$, очевидно, имеющему действительные корни $x_1 = 0, x_{2,3} = \pm 1$, то получим

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{-\frac{1}{27}}} - \sqrt[3]{\sqrt{-\frac{1}{27}}}.$$

Формально это ноль, но выражение справа не имеет смысла на множестве действительных чисел.

В наше время комплексные числа используются всюду, где используются математические методы. Так, например, в электротехнике полное сопротивление цепи представляется в виде $R = R_a + iR_p$, где R_a — активная составляющая и R_p — реактивная.

§ 1.2. Понятие комплексного числа

Комплексными числами называются числа вида $z = x + iy$, где x и y — действительные числа, а i — так называемая мнимая единица. Числа x и y называются соответственно действительной и мнимой частями комплексного числа z и обозначаются $x = \operatorname{Re} z$ (от *real* — действительный) и $y = \operatorname{Im} z$ (от *imaginary* — мнимый).

Множество комплексных чисел будем обозначать символом $\mathbb{C}$.

Если $y = \operatorname{Im} z = 0$, то комплексное число $z = x + i \cdot 0 = x$ — действительное число. Таким образом, множество $\mathbb{R}$ всех действительных

чисел является подмножеством множества $\mathbb{C}$ всех комплексных чисел: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Если $x = \operatorname{Re} z = 0$, то число $z = 0 + iy = iy$ называется чисто мнимым. Естественно обозначить $0 + 0i = 0$.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ считаются равными ($z_1 = z_2$) тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$. Множество $\mathbb{C}$ всех комплексных чисел не упорядочено, т.е. запись $z_1 < z_2$ или $x_1 + iy_1 < x_2 + iy_2$ не имеет смысла.

Пусть на плоскости задана система координат Oxy . Каждому комплексному числу $z = x + iy$ можно поставить во взаимно однозначное соответствие точку $P(x, y)$. При этом действительные числа изображаются точками оси Ox и эта ось называется действительной осью. Чисто мнимые числа iy изображаются точками оси ординат и эта ось называется мнимой осью. Плоскость, точки которой изображают комплексные числа, называется *комплексной плоскостью* или *плоскостью z* . Термины «комплексное число» и «комплексная точка» будем применять как синонимы.

Между точками плоскости и радиусами-векторами (т.е. векторами с началом в точке $(0,0)$) имеется взаимно однозначное соответствие. Поэтому комплексное число $z = x + iy$ можно также изобразить радиусом-вектором $\overrightarrow{OP} = \{x, y\}$ (рис.1.1). Длина этого вектора называется *модулем* комплексного числа z и обозначается $|z|$. Очевидно, что $r = |z|$ – это расстояние точки z от начала координат.

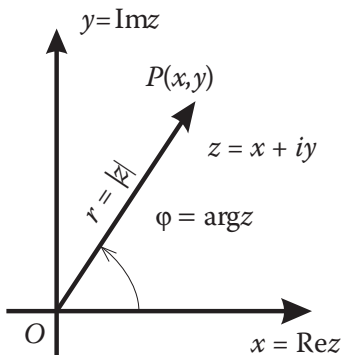


Рис. 1.1

Комплексные числа, имеющие один и тот же модуль, равный r , образуют окружность радиуса r с центром в начале координат. Уравнение этой окружности $|z| = r$.

Пусть φ – угол, который составляет радиус-вектор точки $z \neq 0$ с положительной действительной полуосью. Как обычно, направление

против хода часовой стрелки считается положительным, а по ходу часовой стрелки — отрицательным. Число φ называется *аргументом* комплексного числа z и обозначается $\varphi = \operatorname{Arg} z$. Для точки $z = 0$ аргумент не определен.

Из бесконечного множества значений $\operatorname{Arg} z$ выделим одно, лежащее в промежутке $(-\pi, \pi]$. Это значение обозначают $\arg z$ и называют *главным значением аргумента*. Ясно, что $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi n$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Очевидно, модуль и аргумент комплексного числа $z = x + iy$ — это полярные координаты точки (x, y) . Модуль комплексного числа $z = x + iy$ однозначно определяется формулой $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Аргумент числа $z \neq 0$ определяется не однозначно и все его значения отличаются друг от друга на $2\pi n$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Аргументы действительных положительных чисел равны нулю (например, $\arg 5 = 0$); аргументы действительных отрицательных чисел равны π (например, $\arg(-5) = \pi$). Если $z = iy$, $y \in \mathbf{R}$, то $\arg z = \frac{\pi}{2}$, если $y > 0$ и $\arg z = -\frac{\pi}{2}$, если $y < 0$. Все значения аргумента φ удовлетворяют равенству $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$, $x \neq 0$. Отсюда, используя свойства арктангенса, получаем

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} & \text{для точек } z \text{ из первой и четвертой четверти;} \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi & \text{для точек } z \text{ из второй четверти;} \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \pi & \text{для точек } z \text{ из третьей четверти.} \end{cases}$$

Условие равенства двух комплексных чисел можно сформулировать так: их модули должны быть равны, а аргументы могут отличаться на слагаемое, кратное 2π . Так как $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, то получаем *тригонометрическую форму* комплексного числа $z = x + iy$:

$$z = x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Комплексное число $x - iy$ называется *сопряженным* с комплексным числом $z = x + iy$ и обозначается $\bar{z}$. Например, $\overline{-2 + 3i} = -2 - 3i$.

Очевидно, что точки z и $\bar{z}$ симметричны относительно действительной оси и при этом $|z| = |\bar{z}|$, $\arg \bar{z} = -\arg z$.

Все сказанное выше относится к *конечным* комплексным числам. Для создания развитой теории к этим числам добавим еще одно — *бесконечное число*, обозначаемое символом ∞ . Будем называть его *бесконечностью* или *бесконечно удаленной точкой*. Чтобы придать этому символу наглядный геометрический смысл, рассмотрим так называемую *сферу Римана*. Для этого построим сферу единичного радиуса с центром в точке O комплексной плоскости (рис. 1.2). Соединим точ-

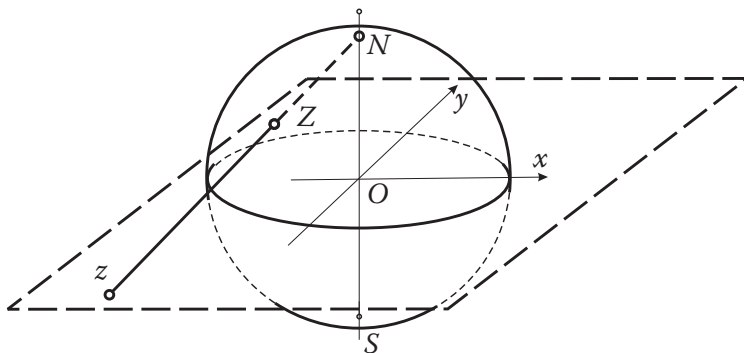


Рис. 1.2

ку N сферы с точкой z комплексной плоскости отрезком прямой. Если на сфере выколоть точку N , то этот отрезок пересечет сферу в единственной точке Z . Таким образом, между точками сферы (с выколотой точкой N) и комплексными числами устанавливается взаимно однозначное соответствие. Единственная точка сферы, не отвечающая ни одной точке комплексной плоскости, — это ее северный полюс N . Если точка Z сферы приближается к северному полюсу, то отвечающая ей точка z комплексной плоскости безгранично удаляется от начала координат. Естественнo считать точку N отвечающей символическому числу ∞ . Это символическое число называют бесконечно удаленной точкой. Для него не вводятся (т.е. считаются не имеющими смысла) понятия действительной и мнимой части, а также понятие аргумента. Дополненную точкой $z = \infty$ комплексную плоскость называют расши-

ренной комплексной плоскостью и обозначают $\overline{C}$.

§ 1.3. Операции над комплексными числами

На множестве комплексных чисел C определим операции сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения корня.

Суммой $z_1 + z_2$ двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число $z = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$.

Очевидно, что так определенная операция сложения обладает свойствами

- 1) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ — коммутативность;
- 2) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ — ассоциативность.

Для любого комплексного числа $z = x + iy$ существует единственное комплексное число (т. е. число $-x - iy$), дающее в сумме с z нуль. Тем самым определена операция *вычитания* $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$. Очевидно, $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$.

Используя геометрическую интерпретацию комплексных чисел, как векторов на плоскости, получаем, что вектор $z_1 + z_2$ является диагональю параллелограмма, построенного на векторах z_1 и z_2 . Вектор $z_1 - z_2$ равен разности векторов z_1 и z_2 и направлен из точки z_2 в точку z_1 (рис. 1.3).

Отсюда следует, что модуль разности чисел $|z_1 - z_2|$ равен расстоянию между точками z_1 и z_2 . Пользуясь этим, легко написать уравнение

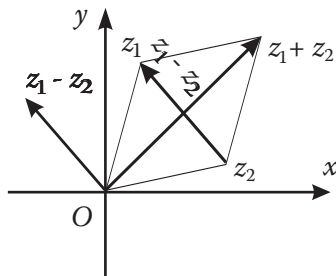


Рис. 1.3

окружности радиуса R с центром в точке a : для точек z этой окружности (и только для них) расстояние до центра a постоянно и равно R . Искомое уравнение $|z - a| = R$. Например, $|z + i| = 1$ — уравнение единичной окружности с центром в точке $a = -i$. Аналогично, неравенству $|z - a| < R$ удовлетворяют те и только те точки комплексной плос-

кости, которые лежат внутри круга радиуса R с центром в точке a , а неравенствам $r < |z - a| < R$, где $r < R$, удовлетворяют точки, лежащие в кольце между двумя концентрическими окружностями радиусов r и R с общим центром a и только они.

Отметим, что для модулей комплексных чисел справедливы неравенства

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|,$$

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|,$$

справедливость которых можно уяснить из рис.1.2, если учесть, что в любом треугольнике сумма двух любых его сторон больше третьей стороны и любая сторона больше разности двух других сторон.

Умножение комплексных чисел определим равенством

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1). \quad (1.1)$$

Непосредственным вычислением по этой формуле нетрудно убедиться в том, что операция умножения обладает свойствами:

- 1) $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ – коммутативность;
- 2) $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$ – ассоциативность,

а операции сложения и умножения совместно обладают свойством дистрибутивности: $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$.

Если в формуле (1.1) положить $x_1 = x_2 = 0$, $y_1 = y_2 = 1$, то получим равенство $i \cdot i = i^2 = -1$. Умножая обе части равенства $i^2 = -1$ на i , получаем $i^3 = -i$; аналогично, $i^4 = 1$. Легко понять, что $i^{4k+m} = i^m$. Очевидно, для любого комплексного числа z справедливо равенство $1 \cdot z = z$.

Отметим еще одну важную формулу, получающуюся из формулы (1.1), $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$. Таким образом, произведение сопряженных комплексных чисел является числом действительным.

Деление комплексных чисел определяется как операция, обратная умножению: частным от деления комплексного числа z_1 на число $z_2 \neq 0$ называется такое комплексное число z_3 , для которого $z_3 \cdot z_2 = z_1$.

Очевидно, что если $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$, то

$$z_3 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

При сложении и вычитании комплексных чисел целесообразнее использовать алгебраическую форму этих чисел $z = x + iy$. При умножении, делении и возведении в степень комплексных чисел рациональнее использовать тригонометрическую форму. Пусть

$$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2).$$

Тогда

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i r_1 r_2 (\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2) = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \quad (1.2)$$

Отсюда следует, что при перемножении комплексных чисел их модули перемножаются: $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$. Это равенство, очевидно, справедливо и для произвольного количества сомножителей $|z_1 z_2 \dots z_n| = |z_1| |z_2| \dots |z_n|$. В частности (если все сомножители одинаковы), $|z^n| = |z|^n$, $n = 1, 2, \dots$.

Аргумент произведения двух комплексных чисел равен (с точностью до $2k\pi$) сумме их аргументов: $\text{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \text{Arg} z_1 + \text{Arg} z_2$. Это равенство, очевидно, справедливо и для произвольного количества сомножителей и, в частности, $\text{Arg} z^n = n \text{Arg} z$.

Геометрически это означает, что при умножении числа z_1 на z_2 радиус-вектор точки z_1 растягивается в $|z_2|$ раз и поворачивается на угол $\text{Arg} z_2$.

Пример 1.1 Найти вершины правильного шестиугольника, вписанного в окружность $|z| = 2$, если одна вершина находится в точке $z_1 = 2$.

Решение. Так как в правильном шестиугольнике угол между радиусами-векторами двух соседних вершин равен $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$, то k -ая вершина равна $z_k = |z_1| \left(\cos \frac{(k-1)\pi}{3} + i \sin \frac{(k-1)\pi}{3} \right)$. Подставляя последовательно $k = 2, 3, 4, 5, 6$, получим искомые вершины:

$$z_2 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 1 + i\sqrt{3},$$

$$z_3 = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = -1 + i\sqrt{3},$$

$$z_4 = 2 \left(\cos \frac{3\pi}{3} + i \sin \frac{3\pi}{3} \right) = -1,$$

$$z_5 = 2 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) = -1 - i\sqrt{3},$$

$$z_6 = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = 1 - i\sqrt{3}.$$

Для операции деления, используя тождество $z_1 = \left(\frac{z_1}{z_2} \right) \cdot z_2$, получаем $|z_1| = \left| \frac{z_1}{z_2} \right| \cdot |z_2|$ и $\text{Arg } z_1 = \text{Arg} \left(\frac{z_1}{z_2} \right) + \text{Arg } z_2$ и, значит,

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \text{Arg } \frac{z_1}{z_2} = \text{Arg } z_1 - \text{Arg } z_2.$$

Итак,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)). \quad (1.3)$$

Обозначим выражение $\cos \varphi + i \sin \varphi$ символом $e^{i\varphi}$:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi, \quad (1.4)$$

не придавая **пока** этой записи никакого другого смысла, кроме как обозначение.

Используя этот символ, комплексное число можно представить в форме

$$z = |z| e^{i \text{Arg } z} = r e^{i\varphi} \quad (1.5)$$

и будем называть это *показательной формой* комплексного числа.

Символ $e^{i\varphi}$ обладает основными свойствами показательной функции. Используя операции умножения и деления комплексных чисел в тригонометрической форме, будем иметь

$$e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} = (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) = e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)},$$

$$\frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}} = (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) = e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Обобщая на несколько сомножителей, получаем

$$z_1 z_2 \dots z_n = r_1 r_2 \dots r_n e^{i(\varphi_1 + \varphi_2 \dots \varphi_n)}.$$

Полагая здесь $z_1 = z_2 = \dots = z_n = e^{i\varphi}$, будем иметь

$$z^n = (re^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi}. \quad (1.6)$$

Это показывает, что введенные символы $e^{i\varphi_1}$ и $e^{i\varphi_2}$ перемножаются, делятся и возводятся в целую степень по правилам показательной функции $y = e^x$. У символа $e^{i\varphi}$ появляется новое свойство — он имеет период 2π . В самом деле,

$$e^{i(\varphi + 2\pi)} = \cos(\varphi + 2\pi) + i \sin(\varphi + 2\pi) = \cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}.$$

Записывая комплексные числа в правой и левой частях равенства (1.6) в тригонометрической форме, получаем *формулу Муавра*

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi. \quad (1.7)$$

Определим *корень натуральной степени n из комплексного числа z* как такое число w , которое при возведении в степень n дает число z , т. е. $w^n = z$. Обозначаем $\sqrt[n]{z}$. Ясно, что $\sqrt[n]{0} = 0$. Представив числа z и w в показательной форме $z = re^{i\varphi}$, $w = \rho e^{i\psi}$, получим

$$\rho^n e^{in\psi} = re^{i\varphi} = re^{i(\varphi_0 + 2k\pi)},$$

где $\varphi_0 = \arg z$ – главное значение аргумента. Сравнивая модули и аргументы левой и правой частей, получим

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \psi = \frac{\varphi}{n} = \frac{\varphi_0 + 2k\pi}{n}, k = 0, \pm 1, \dots$$

Таким образом,

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} e^{i \frac{\arg z + 2k\pi}{n}}, k = 0, \pm 1, \dots \quad (1.8)$$

Эта формула показывает, что модули всех значений корня одинаковы, а их аргументы отличаются на слагаемое, кратное $\frac{2\pi}{n}$. Отсюда следует, что корень n -ой степени из любого числа $z \neq 0$ имеет n различных значений и что эти значения располагаются в вершинах правильного n -угольника, вписанного в окружность радиуса $\rho = \sqrt[n]{r}$ с центром в начале координат. Эти значения можно получить из формулы (1.8), полагая $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Отметим, что в правильном $2n$ -угольнике вершины попарно симметричны относительно центра и, следовательно, первые n значений получаем из формулы (1.8), при $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Остальные n значений отличаются от найденных лишь знаком.

Пример 1.2 Вычислить $\sqrt[3]{i}$.

Решение. Для числа $z = i$ имеем $|z| = 1$, $\arg z = \frac{\pi}{2}$, следовательно, по формуле (1.8)

$$w_k = \sqrt[3]{i} = e^{i \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}}.$$

Полагая здесь последовательно $k = 0, 1, 2$, получим

$$w_1 = e^{i \frac{\pi}{6}} = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2},$$

$$w_2 = e^{i \frac{5\pi}{6}} = \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2},$$

$$w_3 = e^{i \frac{9\pi}{6}} = \cos \frac{9\pi}{6} + i \sin \frac{9\pi}{6} = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = i.$$

При извлечении корня из комплексного числа понятие “арифметического корня” не вводится, и все n значений равноправны. Поэтому при преобразованиях алгебраических выражений, содержащих корни, нужно следить, какие значения корня имеются в виду. Например, формула $\sqrt{z_1} \cdot \sqrt{z_2} = \sqrt{z_1 \cdot z_2}$ верна только при определенном выборе значения корня $\sqrt{z_1 \cdot z_2}$, если только значения для корней $\sqrt{z_1}$ и $\sqrt{z_2}$ уже выбраны. Иначе возможны “противоречия” типа $-1 = i^2 = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$.

§ 1.4. Понятие функции комплексного переменного; предел функции

В математическом анализе наиболее содержательные результаты получаются для функций, определенных или в окрестности интересующей нас точки или на некотором интервале (конечном или бесконечном, открытом или замкнутом). Аналогом интервала на комплексной плоскости является область.

Пусть a — произвольное комплексное число и ε — произвольное действительное положительное число. Множество всех комплексных чисел, удовлетворяющих неравенству $|z - a| < \varepsilon$, называется **окрестностью** (или ε -окрестностью) точки a . Геометрически окрестность точки a — это круг с центром в этой точке.

Окрестностью бесконечно удаленной точки $z = \infty$ называется множество точек z , удовлетворяющих неравенству $|z| > R$, т.е. внешность любого круга с центром в начале координат. Легко показать, что при таком определении окрестности бесконечно удаленной точки, как и окрестности любой другой точки, на сфере Римана соответствует круг с центром в образе этой точки.

Пусть на комплексной плоскости задано некоторое множество M .

Точка z называется **внутренней точкой** множества M , если существует окрестность точки z , целиком лежащая в M . Точка z называется **граничной точкой** множества M , если в любой окрестности этой точки найдутся как точки, принадлежащие M , так и ему не принадлежа-

щие. Множество всех граничных точек называется **границей** множества M .

Пример 1.3 *Круг $|z| < R$ состоит только из внутренних точек. Любая точка окружности $|z| = R$ является граничной точкой этого круга, так что окружность $|z| = R$ является границей круга $|z| < R$.*

Множество, все точки которого являются его внутренними точками, называется открытым.

Если все граничные точки множества ему принадлежат, то такое множество называется **замкнутым**.

Множество называется **связным**, если любые две его точки можно соединить ломаной линией, все точки которой принадлежат этому множеству.

Областью называется открытое связное множество.

Множество точек, состоящее из области D (открытого множества!) и ее границы, называется **замкнутой областью** и обозначается $\bar{D}$.

Пример 1.4 *Вся комплексная плоскость $\mathbb{C}$ является областью. Множество $0 < |z - a| < R$ является областью. Его граница состоит из окружности $|z - a| = R$ (внешняя граница) и точки $z = a$ (внутренняя граница). Множество $|z - a| \leq R$ является замкнутой областью. Множество $0 < |z - a| \leq R$ не является областью.*

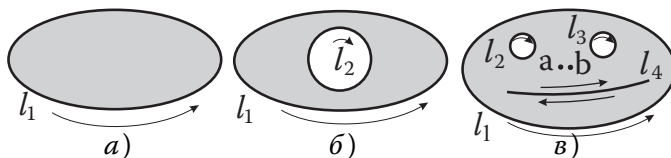


Рис. 1.4

Граница области может состоять из одной кусочно-непрерывной замкнутой кривой (рис.1.4,а), состоять из двух и более кривых. На рис. 1.4,б изображен пример области, граница которой состоит из двух замкнутых линий l_1 и l_2 . Внутренняя кривая может вырождаться в точку

или в линию (такую линию называют разрезом). На рис.1.4,в граница состоит из шести не связанных между собой частей: трех замкнутых линий l_1 , l_2 и l_3 , одного разреза l_4 и двух точек a и b .

Число не связанных между собой частей границы области D называется ее порядком связности. Так область на рис 1.4,а — односвязна; на рис.1.4,б — двусвязна; на рис.1.4,в — шестисвязна.

Положительным направлением обхода границы области принято считать такое направление, при котором область остается слева. На рис.1.4 это направление указано стрелками. Обратим внимание на двойной обход разреза l_4 ; в этом случае можно говорить о двух берегах разреза.

Пусть на комплексной плоскости задано множество M и каждой точке $z = x + iy$ этого множества ставится в соответствие одно или несколько комплексных чисел $w = u + iv$. Тогда говорят, что на множестве M задана функция комплексного переменного $w = f(z)$.

В дальнейшем будем считать, что множество M является либо областью D , либо замкнутой областью $\bar{D}$.

Функция $w = f(z)$ называется однозначной, если каждой точке $z \in D$ ставится в соответствие единственная точка w . Примерами таких функций являются функции $w = |z|$, $w = z^2$. Функция называется многозначной, если хотя бы одной точке $z \in D$ ставится в соответствие несколько точек w . Например, функция $w = \sqrt{z}$ — двузначна (ведь на комплексной плоскости при каждом $z \neq 0$ она принимает два значения). Функция $w = \operatorname{Arg} z$ — бесконечнозначна; она каждому $z \neq 0$ ставит в соответствие бесконечное множество чисел $w_n = \arg z + 2n\pi$. В этом существенное различие понятий функции комплексного переменного и функции действительного переменного. В математическом анализе рассматриваются только однозначные функции.

Если однозначная функция $w = f(z)$ двум различным значениям аргумента z ставит в соответствие два различных значения w , то такая функция называется *взаимнооднозначной*.

Кстати, отметим, что в теории функций комплексного переменного принято название многозначных функций писать с прописной буквы (например, $\operatorname{Arg} z$, $\operatorname{Ln} z$, $\operatorname{Arcsin} z$ и т.п.), а однозначных функций — со

строчной (например, $\sin z$, $\ln z$ и т.п.).

Так как $w = u + iv = f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, то $u = \operatorname{Re} f(z) = u(x, y)$ и $v = \operatorname{Im} f(z) = v(x, y)$ — функции двух действительных переменных x и y . Таким образом, задание функции комплексного переменного равносильно заданию двух действительных функций $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ двух действительных переменных x и y .

Пример 1.5 Найти действительную и мнимую части функций:

a) $w = z^2$; b) $w = \bar{z}$; c) $w = z \operatorname{Re} z$.

Решение. a) Положим $z = x + iy$ и $w = u + iv$. Тогда $u + iv = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$. Отсюда $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$.

b) Здесь $u + iv = \overline{(x + iy)} = x - iy$. Значит, $u = x$ и $v = -y$.

c) $u + iv = (x + iy) \operatorname{Re}(x + iy) = (x + iy)x = x^2 + ixy$. Таким образом, $u = x^2$, $v = xy$.

Пусть функция $w = f(z)$ однозначна в каждой точке области D . Тогда в этой области будут однозначными функции $u = u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ и $v = v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$ действительных аргументов, для которых в математическом анализе определены понятия предела и непрерывности. Поэтому естественно для функций комплексного переменного эти понятия ввести следующим образом.

Число $w_0 = u_0 + iv_0$ называется пределом функции $f(z)$ при $z \rightarrow z_0 = x_0 + iy_0$, если

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = u_0; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = v_0.$$

Предел обозначаем $w_0 = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ или $f(z) \rightarrow w_0$ при $z \rightarrow z_0$.

Так как данное определение сводится к известному из математического анализа определению предела функции действительных аргументов, то арифметические свойства пределов сохраняются и для функций комплексного переменного:

$$\lim(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \lim f(x) + \beta \lim g(x),$$

$$\lim(f(x)g(x)) = \lim f(x) \cdot \lim g(x),$$

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} (\lim g(x) \neq 0).$$

Сформулируем определение предела "на языке окрестностей". Число $w_0 = u_0 + iv_0$ называется пределом функции $f(z)$ при $z \rightarrow z_0 = x_0 + iy_0$, если для любой ε -окрестности точки w_0 найдется такая δ -окрестность точки z_0 , что для всех $z \neq z_0$ из этой δ -окрестности соответствующие точки $w = f(z)$ попадают в ε -окрестность точки w_0 , т.е. если $0 < |z - z_0| < \delta$, так сразу же $|f(z) - w_0| < \varepsilon$.

Отсюда получаем, что если функция имеет предел в точке z_0 , то он не зависит от способа приближения точки z к z_0 .

Это определение без всяких изменений распространяется на бесконечные z_0 и(или) w_0 . Для этого достаточно лишь брать в качестве окрестностей бесконечно удаленных точек $z = \infty$ и $w = \infty$ внешности кругов достаточно большого радиуса с центром в начале координат. При этом, если $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$, то функция называется бесконечно большой.

Как и в случае функций действительных переменных, важную роль играет понятие непрерывности функции.

Функция $f(z)$ называется **непрерывной в точке** z_0 , если она определена в некоторой окрестности этой точки, включая саму эту точку и $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$.

Для непрерывности функции $f(z)$ в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ необходимо и достаточно, чтобы функции $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ и $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$ были непрерывны в точке (x_0, y_0) .

Функция $f(z)$ называется **непрерывной в области** D , если она непрерывна в каждой точке этой области.

Так как непрерывность опирается на понятие предела, то она введена только для однозначных в области D функций.

На функции комплексного переменного переносятся все основные свойства непрерывных функций двух действительных переменных: сумма и произведение непрерывных в области D функций непрерывны в этой области, отношение двух непрерывных функций $f(z)$ и $g(z)$ является непрерывной функцией во всех точках области D , где знамена-

тель $g(z) \neq 0$. Модуль непрерывной в замкнутой области $\overline{D}$ функции $f(z)$ достигает в этой области своих наименьшего и наибольшего значений, т.е. существуют точки $z_1, z_2 \in \overline{D}$, что для всех $z \in \overline{D}$

$$|f(z_1)| \leq |f(z)| \leq |f(z_2)|.$$

§ 1.5. Дифференцируемость и аналитичность

Пусть функция $f(z)$ определена и **однозначна** в некоторой окрестности точки z . Если существует предел

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}, \quad (1.9)$$

то функция $f(z)$ называется *дифференцируемой* в точке z и этот предел называется производной функции $f(z)$ в точке z и обозначается $w' = f'(z) = \frac{df(z)}{dz}$.

Пусть $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$. Тогда

$$\begin{aligned} \Delta w = f(z + \Delta z) - f(z) &= [u(x + \Delta x, y + \Delta y) + iv(x + \Delta x, y + \Delta y)] - \\ &- [u(x, y) + iv(x, y)] = \Delta u + i\Delta v. \end{aligned}$$

Поэтому

$$f'(z) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y}. \quad (1.10)$$

Выясним, при каких условиях функция будет дифференцируемой в данной точке.

Теорема 1.1 Пусть функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $z = x + iy$ и в точке (x, y) функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы. Тогда для того чтобы функция комплексного переменного $f(z)$ была дифференцируемой в точке $z = x + iy$, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке выполнялись равенства

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \end{cases} \quad (1.11)$$

Формулы (1.11) называются **условиями Коши — Римана**.

Докажем **необходимость**. Пусть функция $f(z)$ дифференцируема в точке z . Тогда предел (1.9) не зависит от способа приближения точки $z + \Delta z$ к точке z .

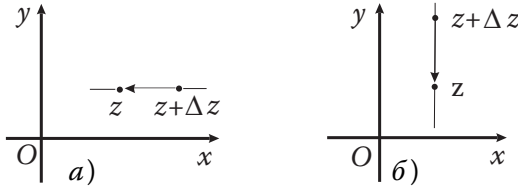


Рис. 1.5

Пусть сначала точка $z + \Delta z$ стремится к точке z по прямой, параллельной действительной оси (рис. 1.5а). В этом случае $\Delta z = \Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y = 0$ и из (1.10) получаем

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Если точка $z + \Delta z$ приближается к точке z по прямой, параллельной мнимой оси (рис 1.5б), то $\Delta x = 0$, $\Delta z = i\Delta y \rightarrow 0$ и формула (1.10) дает

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{i\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{i\Delta y} + \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta y} = \frac{1}{i} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Приравнивая действительные и мнимые части, получаем равенства (1.11). Необходимость доказана.

Докажем **достаточность**. По определению дифференцируемости функций двух переменных в точке (x, y) , их приращения в *окрестности* этой точки можно записать в виде

$$\Delta u = u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) = u'_x(x, y)\Delta x + u'_y(x, y)\Delta y + \alpha \cdot |\Delta z|,$$

$$\Delta v = v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y) = v'_x(x, y)\Delta x + v'_y(x, y)\Delta y + \beta \cdot |\Delta z|,$$

где α и β стремятся к нулю при $\Delta z \rightarrow 0$.

Отсюда для приращения функции $f(z)$ имеем

$$\begin{aligned} \Delta f(z) &= \Delta u + i\Delta v = u'_x\Delta x + u'_y\Delta y + i(v'_x\Delta x + v'_y\Delta y) + \varepsilon \cdot |\Delta z| = \\ &= (u'_x + iv'_x)\Delta x + (u'_y + iv'_y)\Delta y + \varepsilon \cdot |\Delta z|, \end{aligned}$$

где $\varepsilon = \alpha + i\beta$ стремится к нулю при $\Delta z \rightarrow 0$.

Используя условия Коши—Римана (1.11), это приращение можно представить в виде

$$\begin{aligned} \Delta f(z) &= (u'_x + iv'_x)\Delta x + (-v'_x + iu'_x)\Delta y + \varepsilon \cdot |\Delta z| = \\ &= (u'_x + iv'_x)\Delta x + (u'_x + iv'_x)i\Delta y + \varepsilon \cdot |\Delta z| = (u'_x + iv'_x)(\Delta x + i\Delta y) + \varepsilon \cdot |\Delta z|. \end{aligned}$$

Итак,

$$\Delta f(z) = (u'_x + iv'_x)\Delta z + \varepsilon \cdot |\Delta z|.$$

Отсюда получаем — предел $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z}$ существует и равен $u'_x + iv'_x$. Теорема доказана.

Заметим, что попутно доказали, что производная $f'(z)$ может быть найдена по формуле

$$f'(z) = u'_x + iv'_x. \quad (1.12)$$

Используя условия Коши—Римана, получаем равносильные (1.12) формы записи производной

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Для функций комплексного переменного сохраняются все известные из действительного анализа правила дифференцирования:

$$[f(z) + g(z)]' = f'(z) + g'(z);$$

$$[f(z) \cdot g(z)]' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z);$$

$$[C \cdot g(z)]' = Cg'(z), \quad C - \text{const};$$

$$[f(z)/g(z)]' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)};$$

$$[f(g(z))]' = f'(g(z)) \cdot g'(z);$$

$$f'(z) = \frac{1}{(f^{-1}(w))'}.$$

В последней формуле $w = f(z)$ и $z = f^{-1}(w)$ — взаимно обратные функции.

Важнейшим в теории функций комплексного переменного и ее приложениях является понятие **аналитической функции**.

Определение: Функция $f(z)$ называется аналитической в области D , если она дифференцируема во всех точках этой области.

Функция называется аналитической в точке или на кривой, если она аналитична в некоторой области, содержащей эту точку (кривую).

Напомним, что дифференцируемость (а, значит, и аналитичность) введена только для однозначных функций.

Пример 1.6 Рассмотрим функцию $w = z^2$. Так как (1.5) для нее $u = x^2 - y^2$ и $v = 2xy$, то $u'_x = 2x$, $u'_y = -2y$, $v'_x = 2y$, $v'_y = 2x$. Очевидно оба условия Коши—Римана (1.11) выполняются на всей комплексной плоскости, поэтому функция $w = z^2$ дифференцируема, а значит, и аналитична во всех точках этой плоскости.

Пример 1.7 Для функции $w = \bar{z}$ имеем $u = x$ и $v = -y$. Отсюда $u'_x = 1$ и $v'_y = -1$. Значит, (независимо от выполнения второго условия Коши—Римана) функция $w = \bar{z}$ не дифференцируема ни в одной точке и, следовательно, нигде не аналитична.

Пример 1.8 Для функции $w = z \cdot \operatorname{Re} z = x^2 + ixy$ имеем $u'_x = 2x$, $v'_y = x$, $u'_y = 0$, $v'_x = y$. Условия Коши—Римана принимают вид: $2x = x$, $y = 0$. Эта система имеет единственное решение $x = 0$, $y = 0$. Значит, функция $w = z \operatorname{Re} z$ дифференцируема в единственной точке $z = 0$ и нигде не аналитична.

Из определения и свойств производной вытекают следующие свойства аналитических функций:

1. Если функция $f(z)$ аналитична в области D , то она непрерывна в этой области.

2. Линейная комбинация

$$\alpha f(z) + \beta g(z)$$

аналитических функций $f(z)$ и $g(z)$ и частное $f(z)/g(z)$ (если знаменатель $g(z)$ не равен нулю) аналитических в области D функций также аналитичны в этой области.

3. При подстановке аналитической функции $\omega = \varphi(z)$ в аналитическую функцию $w = f(\omega)$ получаем аналитическую функцию $w = f(\varphi(z))$.

4. Если функция $w = f(z)$ аналитична в области D , причем $f'(z) \neq 0$ в этой области, то в области G значений функции $f(z)$ определена обратная функция $z = f^{-1}(w)$, которая является аналитической в области G функцией, причем $(f^{-1}(w))' = \frac{1}{f'(z)}$.

Не следует думать, что на функции комплексного переменного автоматически переносятся все результаты, известные из математического анализа. Например, важные для действительного анализа теоремы Ролля, Лагранжа и Коши на комплексной плоскости не справедливы (рассмотрите, к примеру, функцию $f(z) = e^{iz}$ на промежутке $[0, 2\pi]$).

Заметим, что в действительном анализе доказательство того, что из равенства нулю производной на некотором интервале следует, что сама функция тождественно равна постоянной, обычно доказывается по теореме Лагранжа. Как же доказать это утверждение для функций комплексного переменного?

Пусть $f'(z) \equiv 0$ в области D . По формуле (1.12) $f'(z) = u'_x + iv'_x \equiv 0$. Значит,

$$u'_x = v'_x = 0$$

во всех точках области. В силу условий Коши — Римана тождественно равны нулю и производные u'_y и v'_y . Следовательно, функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ не зависят от x и y , т.е. постоянны в области D и, следовательно, $f(z)$ постоянна в этой области. Что и требовалось доказать.

В определении аналитической функции требуется лишь существование ее производной. Однако позже увидим [см. интегральную формулу Коши для производных (1.4)], что аналитическая функция имеет производные всех порядков. Отсюда следует, что ее действительная и мнимая части имеют частные производные по x и по y всех порядков. Поэтому, дифференцируя уравнения Коши—Римана (1.11) и используя равенство смешанных производных, легко получаем уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Таким образом, действительная и мнимая части аналитической функции являются решениями уравнения

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Это дифференциальное уравнение в частных производных называется *уравнением Лапласа*, а его решения, имеющие непрерывные частные производные второго порядка, называются *гармоническими функциями*.

Итак, действительная и мнимая части аналитической функции являются гармоническими функциями. Оказывается, верно и обратное: с каждой гармонической функцией $\varphi(x, y)$ можно связать аналитическую функцию, действительной (или мнимой) частью которой она является.

Две гармонические в области D функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$, связанные условиями Коши—Римана, называются **сопряженными** гармоническими функциями.

Пусть дана гармоническая в односвязной области D функция $u(x, y)$. Найти сопряженную функцию можно разными способами. Например так. В силу условий Коши—Римана для искомой сопряженной функции $v(x, y)$ имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \\ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}. \end{cases}$$

Из первого уравнения этой системы интегрированием по x (предполагая y постоянным) находим

$$v(x, y) = \int -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \varphi(y). \quad (1.13)$$

Эта функция будет удовлетворять первому уравнению системы при любой функции $\varphi(y)$. Подставляя функцию (1.13) во второе уравнение системы, получим дифференциальное уравнение для функции $\varphi(y)$. Подставляя найденную (с точностью до константы) функцию $\varphi(y)$ в (1.13), получим искомую сопряженную функцию $v(x, y)$.

Аналогично восстанавливается аналитическая функция по ее заданной мнимой части $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$.

Обратим внимание, что в математическом анализе подобным образом находится потенциал векторного поля и решаются дифференциальные уравнения в полных дифференциалах.

Пример 1.9 Восстановить аналитическую функцию $f(z)$ по ее мнимой части $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z) = x^2 - y^2 + xy$.

Решение. Легко проверить, что данная функция является гармонической u , следовательно, сопряженная функция $u(x, y)$ существует. Из условий Коши—Римана для нее имеем

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -2y + x, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -2x - y. \end{cases}$$

Из первого уравнения этой системы имеем

$$u(x, y) = \int (-2y + x)dx + \varphi(y) = -2xy + \frac{x^2}{2} + \varphi(y).$$

Подставляя эту функцию во второе уравнение системы, получим

$$-2x + \varphi'(y) = -2x - y.$$

Отсюда,

$$\varphi(y) = -\frac{y^2}{2} + C,$$

где C — произвольная постоянная. Таким образом, сопряженная гармоническая функция равна $u(x, y) = -2xy + \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + C$. Нетрудно проверить, что $f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = \frac{1+2i}{2}z^2 + C$ будет искомой аналитической функцией.

§ 1.6. Геометрический смысл производной

Пусть $w = f(z)$ — аналитическая функция в некоторой области D . Можно доказать, что совокупность всех значений $w = u + iv$, принимаемых этой функцией, также образует некоторую новую область Δ . Таким образом, $f(z)$ преобразует область D на комплексной плоскости $z = x + iy$ в область Δ на комплексной плоскости $w = u + iv$.

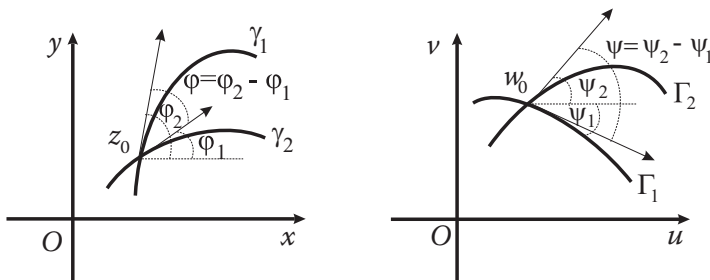


Рис. 1.6

Возьмем какую-либо точку $z_0 \in D$ и проведем через нее произвольную гладкую кривую γ_1 лежащую в области D (рис.1.6). Пусть функция $f(z)$ переводит точку z_0 в точку w_0 , а кривую γ_1 в кривую Γ_1 . Предположим, что $f'(z_0) \neq 0$. Пусть $\arg f'(z_0) = \alpha$ и $|f'(z_0)| = k$. Возьмем на кривой γ_1 точку $z = z_0 + \Delta z$. Соответствующая ей точка $w = w_0 + \Delta w$ лежит на кривой Γ_1 . В силу дифференцируемости функции $f(z)$ имеем

$$\lim_{\substack{\Delta z \rightarrow 0 \\ z_0 + \Delta z \in \gamma_1}} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z_0). \quad (1.14)$$

Комплексные числа Δz и Δw изображаются векторами секущих к кривым γ_1 и Γ_1 , а их аргументы $\arg \Delta z$ и $\arg \Delta w$ имеют геометрический смысл углов наклона этих векторов к соответствующим действительным осям. При $\Delta z \rightarrow 0$ секущие стремятся к касательным и в пределе из равенства (1.14) получаем

$$\alpha = \arg f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \arg \Delta w - \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \arg \Delta z = \psi_1 - \varphi_1,$$

где φ_1 и ψ_1 — углы наклона касательных к кривым γ_1 и Γ_1 в соответствующих точках z_0 и w_0 . Отсюда

$$\psi_1 = \varphi_1 + \alpha,$$

Таким образом, если через точку z_0 провести какую-либо кривую γ_1 , имеющую в этой точке определенную касательную, то аналитическая функция $f(z)$, удовлетворяющая условию $f'(z_0) \neq 0$, отобразит эту кривую на кривую Γ_1 , касательная к которой в соответствующей точке w_0 будет составлять с вышеуказанной касательной угол, равный аргументу производной. Для краткости говорят, что кривая повернется на угол α и сам этот угол называют *углом поворота* в данной точке. Если через точку z_0 провести еще одну кривую γ_2 с углом наклона касательной в этой точке φ_2 , то она также повернется на угол α . Значит, *угол $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ между любыми кривыми γ_1 и γ_2 , пересекающимися в точке z_0 , равен углу $\psi = \psi_2 - \psi_1$ между образами Γ_1 и Γ_2 этих кривых.*

Легко видеть, что при этом сохранится не только величина углов, но и их направление. Такое преобразование, сохраняющее углы, называется *конформным* (т.е. сохраняющим форму).

Аналогично из соотношения (1.14) имеем

$$k = |f'(z)| = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}.$$

При малых Δz имеем приближенное равенство $|\Delta w| \approx k|\Delta z|$. Очевидно, это соотношение не зависит от выбора кривой γ_1 . Геометрически оно означает, что если преобразование области осуществляется аналитической функцией $f(z)$, удовлетворяющей условию $f'(z_0) \neq 0$, то оно является в бесконечно малом преобразованием подобия. Число $k = |f'(z_0)|$ — называют *коэффициентом подобия* в точке z_0 .

Итак, при конформном отображении окрестности точки z_0 на окрестность точки w_0 бесконечно малый треугольник с вершиной в точке z_0 преобразуется в подобный ему бесконечно малый треугольник (с коэффициентом подобия $|f'(z_0)|$).

Конформные отображения применяются при решении различных практических задач гидродинамики, аэродинамики, теории магнитных и электростатических полей и др. Например, при расчете магнитного поля в зазоре между ротором и статором электрической машины, обычно имеющим сложный вид, с помощью функции $w = f(z)$ конформно отображают этот зазор на более простую область, например, на верхнюю полуплоскость или на некоторую полосу. Тогда обратная функция $z = z(w)$ отобразит эту более простого вида область на рассматриваемый зазор и какая-либо физическая характеристика изучаемого поля, например магнитная индукция, будет функцией, определенной в области простого вида.

Основной теоремой теории конформных отображений является **теорема Римана**:

Любую односвязную область комплексной плоскости, граница которой имеет хотя бы две граничные точки, можно отобразить на единичный круг.

Из этой теоремы вытекает возможность конформного отображения данной односвязной области D комплексной плоскости z на заданную односвязную область Δ плоскости w , если их границы имеют хотя бы две граничные точки, используя единичный круг как вспомогательный.

§ 1.7. Элементарные функции комплексного переменного

В этом параграфе мы распространим на комплексную плоскость основные элементарные функции действительного переменного. Так как действительные числа являются подмножеством множества комплексных чисел, то при таком распространении полученные функции должны совпадать (на действительной оси) с обычными элементарными функциями действительного аргумента. Говорят, что мы получаем аналитическое продолжение действительной функции на комплексную плоскость.

В теории функций комплексного переменного доказывается *теорема единственности*: если функции $f(z)$ и $g(z)$ аналитичны в области D и совпадают на некоторой кривой (в частности, на отрезке оси Ox или на всей этой оси), то они тождественно равны во всей области D . Иными словами, аналитическое продолжение единственно.

1.7.1. Степенная функция

Простейшей однозначной функцией является степенная функция $w = z^n$ с целым положительным показателем $n = 1, 2, \dots$. Естественно считать функцию

$$w \equiv 1$$

также степенной функцией с нулевым показателем: $w = z^0$. Функция $w = z^n$ при $n > 0$ однозначно отображает комплексную плоскость на

себя и является аналитической функцией на всей плоскости, причем

$$(z^n)' = nz^{n-1}.$$

В последнем можно убедиться, если учесть, что $z' = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z) - z}{\Delta z} = 1$, откуда

$$(z^n)' = \left(\underbrace{z \cdot z \dots z}_n \right)' = z' \cdot \underbrace{(z \cdot z \dots z)}_{n-1} + z \cdot z' \cdot \underbrace{(z \cdot z \dots z)}_{n-2} + \underbrace{(z \cdot z \dots z)}_{n-1} \cdot z' = nz^{n-1}.$$

Так как линейная комбинация аналитических функций — аналитическая функция, то многочлены

$$P_n(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n$$

являются аналитическими функциями на всей комплексной плоскости. И, наконец, дробно-рациональная функция, т.е. функция вида

$$w = \frac{a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n}{b_0 + b_1z + b_2z^2 + \dots + b_mz^m}$$

аналитична на всей плоскости за исключением нулей знаменателя.

1.7.2. Показательная функция

В математическом анализе доказывается второй замечательный предел $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2,718281828 \dots$, из которого следует

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n,$$

а также выводится формула Тейлора

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Если определить показательную функцию e^z равенствами

$$e^z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \quad (1.15)$$

или

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad (1.16)$$

то (по теореме единственности) обе эти функции, совпадая на действительной оси, тождественно равны на всей комплексной плоскости.

Однако проще всего определить функцию комплексного переменного $w = e^z$ не по формулам (1.15) или (1.16), а задав ее действительную и мнимую части формулами $u(x, y) = e^x \cos y$, $v(x, y) = e^x \sin y$. И, таким образом,

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y). \quad (1.17)$$

На действительной оси ($y = 0$) эта функция совпадает с действительной функцией e^x .

На мнимой оси $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ и, следовательно, введенный ранее символ e^{iy} — это показательная функция с чисто мнимым показателем.

Функция e^z обладает основными свойствами показательной функции:

- 1) $e^{z_1} e^{z_2} = e^{x_1} e^{iy_1} e^{x_2} e^{iy_2} = e^{x_1+x_2} e^{i(y_1+y_2)} = e^{z_1+z_2}$,
- 2) $\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = \frac{e^{x_1} e^{iy_1}}{e^{x_2} e^{iy_2}} = e^{x_1-x_2} e^{i(y_1-y_2)} = e^{z_1-z_2}$,
- 3) $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$,
- 4) $(e^z)^n = (e^x)^n (e^{iy})^n = e^{nx} e^{iny} = e^{nz}$.

Функция комплексного аргумента e^z является периодической с чисто мнимым периодом $T = 2\pi i$; действительно, для любого целого $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ имеем

$$e^{z+2k\pi i} = e^z \cdot e^{2k\pi i} = e^z (\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi) = e^z.$$

Отсюда имеем: если $e_1^z = e_2^z$, то $z_1 - z_2 = 2k\pi i$, где k — целое число.

Из определения показательной функции имеем $|e^z| = e^x$, $\text{Arg } e^z = y + 2k\pi i$, где k – любое целое число. Отсюда, в свою очередь, получаем, что показательная функция не обращается в нуль на комплексной плоскости, но может быть отрицательной (например, $e^{i\pi} = -1$).

Показательная функция аналитична на всей комплексной плоскости и

$$(e^z)' = e^z. \quad (1.18)$$

В самом деле, легко проверить, что для функций $u = \text{Re } z = e^x \cos y$ и $v = \text{Im } z = e^x \sin y$ на всей комплексной плоскости выполняются условия Коши—Римана (1.11) и по теореме (1.1) функция e^z всюду аналитична.

Производную находим по формуле (1.12)

$$(e^z)' = \frac{\partial}{\partial x} e^x (\cos y + i \sin y) = e^x (\cos y + i \sin y) = e^z.$$

С помощью показательной функции уравнение окружности радиуса R с центром в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ можно записать в виде $z = z_0 + Re^{it}$. Когда t меняется от 0 до 2π , точка z пробегает эту окружность один раз против часовой стрелки. В самом деле, из указанного уравнения окружности, приравнивая действительные и мнимые части, получим известные из аналитической геометрии параметрические уравнения окружности

$$x = x_0 + R \cos t, \quad y = y_0 + R \sin t.$$

1.7.3. Тригонометрические функции

Формулу (1.4) $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ называют *формулой Эйлера*. Подставляя в нее $-\varphi$ вместо φ и используя чётность косинуса и нечётность синуса, получим $e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi$. Складывая и вычитая эти две формулы, получим равенства

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i},$$

справедливые для любых действительных φ .

Распространим эти формулы на комплексные числа, определив *тригонометрические функции* комплексного переменного равенствами

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}. \quad (1.19)$$

Тангенс и котангенс комплексного аргумента полагаем равными

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

В силу (1.19) тангенс и котангенс можно выразить через показательную функцию по формулам

$$\operatorname{tg} z = \frac{1}{i} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = -i \frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1}, \quad \operatorname{ctg} z = i \frac{e^{2iz} + 1}{e^{2iz} - 1}.$$

Для действительных z эти определения, очевидно, дают тригонометрические функции действительного переменного. Введенные тригонометрические функции сохраняют почти все свойства тригонометрических функций действительного аргумента. Например, периодичность функций (1.19) с периодом 2π следует из периодичности функции e^z с периодом $2\pi i$. В самом деле, например,

$$\begin{aligned} \sin(z + 2\pi) &= \frac{1}{2i} \left(e^{i(z+2\pi)} - e^{-i(z+2\pi)} \right) = \\ &= \frac{1}{2i} \left(e^{iz+2\pi i} - e^{-iz+2\pi i} \right) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sin z. \end{aligned}$$

Также справедливы все тригонометрические формулы. Их можно получить непосредственным применением формул (1.19). Например,

$$\begin{aligned} \sin^2 z + \cos^2 z &= \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right)^2 + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right)^2 = 1, \\ 2 \sin z \cos z &= 2 \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right) \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right) = \frac{e^{2iz} - e^{-2iz}}{2i} = \sin 2z. \end{aligned}$$

Из общих свойств аналитических функций следует, что функции (1.19) аналитичны на всей комплексной плоскости (как линейные комбинации аналитических функций e^{iz} и e^{-iz}), а функции $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$ аналитичны всюду за исключением нулей знаменателей. При этом

$$(\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z,$$

$$(\operatorname{tg} z)' = \frac{1}{\cos^2 z}, \quad (\operatorname{ctg} z)' = -\frac{1}{\sin^2 z}.$$

Определения тригонометрических функций позволяют обобщить формулу Эйлера (1.4): для любого комплексного z

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z.$$

Особое внимание следует обратить на то, что в отличие от тригонометрических функций действительного аргумента модули функций $\sin z$ и $\cos z$ могут быть больше единицы и даже сколь угодно большими. Например,

$$\cos i = \frac{e^{i \cdot i} + e^{-i \cdot i}}{2} = \frac{e^{-1} + e}{2} \approx 1,54,$$

И вообще, для действительных $t \rightarrow +\infty$

$$\cos it = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) \rightarrow \infty.$$

1.7.4. Гиперболические функции

Гиперболические функции комплексного аргумента определим равенствами

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} z &= \frac{e^z - e^{-z}}{2}, & \operatorname{ch} z &= \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \\ \operatorname{th} z &= \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, & \operatorname{cth} z &= \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Из этих определений следует, что $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{ch} z$ периодические с периодом $2\pi i$, а $\operatorname{th} z$ и $\operatorname{cth} z$ имеют период πi .

Сравнивая формулы (1.19) и (1.20), получаем формулы, связывающие тригонометрические и гиперболические функции:

$$\begin{aligned}\sin z &= -i \cdot \operatorname{sh} iz, & \operatorname{sh} z &= -i \cdot \sin iz, \\ \cos z &= \operatorname{ch} iz, & \operatorname{ch} z &= \cos iz, \\ \operatorname{tg} z &= -i \cdot \operatorname{th} iz, & \operatorname{th} z &= -i \cdot \operatorname{tg} iz, \\ \operatorname{ctg} z &= i \cdot \operatorname{ctg} iz, & \operatorname{cth} z &= i \cdot \operatorname{ctg} iz.\end{aligned}\tag{1.21}$$

Отсюда следует, что любая тригонометрическая формула имеет аналог в гиперболических функциях, и для получения этого аналога можно заменить тригонометрические функции на гиперболические по формулам (1.21). Например,

$$1 = \sin^2 z + \cos^2 z = (-i \cdot \operatorname{sh} iz)^2 + (\operatorname{ch} iz)^2 = (\operatorname{ch} iz)^2 - (\operatorname{sh} iz)^2.$$

Заменяя здесь iz на z , получаем *основное гиперболическое тождество*

$$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1.$$

Из общих свойств аналитических функций следует, что функции (1.20) аналитичны на всей комплексной плоскости (как линейные комбинации аналитических функций e^z и e^{-z}), а функции $\operatorname{th} z$ и $\operatorname{cth} z$ аналитичны всюду за исключением нулей знаменателей.

1.7.5. Ветви многозначных функций. Точки ветвления

Функция $w = z^n$, $n \geq 1$, отображает расширенную комплексную плоскость на себя и принимает одно и то же значение w в n различных точках $z_1, z_2, \dots, z_n$ (исключение составляют две точки $w = 0$ и $w = \infty$, являющиеся образами точек $z = 0$ и $z = \infty$). В самом деле, если $w = z^n$, то

$$z_k = \sqrt[n]{w}.$$

При $w \neq 0, \infty$ все числа $z_1, z_2, \dots, z_n$ находятся в вершинах правильного n -угольника. Итак, функция $w = \sqrt[n]{z}$, обратная к однозначной функции $z = w^n$, является функцией многозначной. Для того чтобы применить понятия и результаты, полученные для однозначных функций

(предел, непрерывность, дифференцирование), вводится понятие *однозначных ветвей* многозначных функций.

Рассмотрим это понятие на примере функции $w = \sqrt[3]{z}$, являющейся обратной к однозначной (и непрерывной) функции $z = w^3$.

При $z = 0$ или $z = \infty$ она принимает по одному значению $w = 0$ или $w = \infty$. Пусть z – произвольное конечное комплексное число, отличное от нуля. Тогда

$$w_k = \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{|z|} \left(\cos \frac{\arg z + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\arg z + 2k\pi}{3} \right), k = 0, 1, 2, \quad (1.22)$$

и эти три точки находятся в вершинах правильного треугольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[3]{|z|}$ с центром в начале координат.

Проведем на комплексной плоскости w из начала координат три луча $\arg w = 0$ и $\arg w = \pm \frac{2\pi}{3}$. Эти лучи разбивают плоскость на три области Δ_1, Δ_2 и Δ_3 так, что любая точка либо находится внутри какой-либо области Δ_k , либо является общей граничной точкой (рис.1.7а). Так как никакие две вершины любого правильного треугольника с цен-

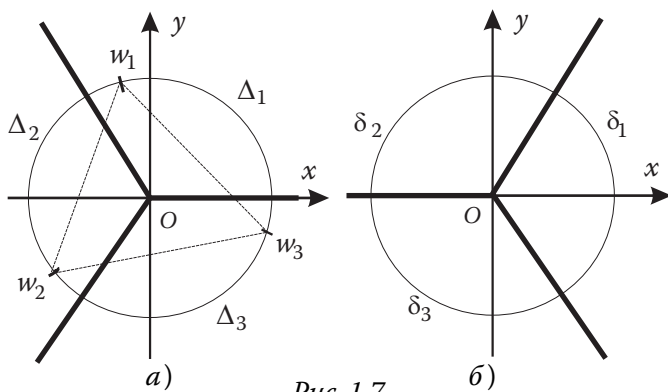


Рис. 1.7

тром в начале координат не могут попасть в один сектор Δ_k (за исключением случая, когда эти вершины находятся на построенных лучах), то функция $z = w^3$ является *взаимно однозначной* в каждой из областей Δ_1, Δ_2 и Δ_3 и отображает каждую из них на всю комплексную плоскость.

Так как $\text{Arg } z = 3 \arg w$, то функция $z = w^3$ отображает каждый сектор Δ_k на плоскость z с разрезом по действительной положительной полуоси. Например, для области Δ_2 имеем $\frac{2\pi}{3} < \arg w < \frac{4\pi}{3}$ и, следовательно, $2\pi < \arg z < 4\pi$, а это и есть плоскость с указанным разрезом. Справедливо и обратное. Если z берется на такой плоскости с разрезом, то $w = \sqrt[3]{z}$ можно считать изменяющейся в любой из областей Δ_1, Δ_2 или Δ_3 . Таким образом, можно говорить о трех однозначных функциях, обратных к $z = w^3$, определенных на плоскости с разрезом вдоль действительной положительной полуоси и принимающих значения в областях Δ_k .

Итак, при данном выборе областей Δ_k функцию $w = \sqrt[3]{z}$ можно рассматривать как совокупность трех *однозначных* функций

$$\begin{aligned} w_1 &= (\sqrt[3]{z})_1 = \sqrt[3]{|z|} \left(\cos \frac{\arg z}{3} + i \sin \frac{\arg z}{3} \right), \\ w_2 &= (\sqrt[3]{z})_2 = \sqrt[3]{|z|} \left(\cos \frac{\arg z + 2\pi}{3} + i \sin \frac{\arg z + 2\pi}{3} \right), \\ w_3 &= (\sqrt[3]{z})_3 = \sqrt[3]{|z|} \left(\cos \frac{\arg z + 4\pi}{3} + i \sin \frac{\arg z + 4\pi}{3} \right). \end{aligned} \quad (1.23)$$

Каждая из этих функций непрерывна и отображает плоскость (z) на соответствующую область Δ_k и называется *однозначной ветвью* функции $w = \sqrt[3]{z}$. Для выбора соответствующей ветви достаточно указать, в какой из областей Δ_1, Δ_2 или Δ_3 должно изменяться w . Иногда для этого указывают значение $w_0 = \sqrt[3]{z_0}$ в какой-либо точке z_0 . Например, если в условии задачи указано: *выбирается та ветвь функции $w = \sqrt[3]{z}$, для которой $\sqrt[3]{1} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$* , то это означает, что рассматривается функция

$$w_2 = (\sqrt[3]{z})_2 = \sqrt[3]{|z|} \left(\cos \frac{\arg z + 2\pi}{3} + i \sin \frac{\arg z + 2\pi}{3} \right).$$

Ведь именно эта функция при $z = 1$ принимает значение, равное $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Для двух других ветвей при $z = 1$ имеем $w = 1$ или $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Понятие ветви тесно связано с выбором областей Δ_1 , Δ_2 и Δ_3 . Можно было бы, например, взять (рис.1.7б) секторы

$$\delta_1 : -\frac{\pi}{3} < \arg z < \frac{\pi}{3}; \quad \delta_2 : \frac{\pi}{3} < \arg z < \pi; \quad \delta_3 : \pi < \arg z < \frac{5\pi}{3}.$$

(т.е. секторы, заключенные между биссектрисами углов Δ_k на рис.1.7а). Если w изменяется в любой из этих областей, то $z = w^3$ принимает значения на плоскости z с разрезом по отрицательной действительной полуоси. В самом деле, если $\alpha = \arg w$ меняется, например, от $-\pi/3$ до $\pi/3$, то $\arg z = 3 \arg w$ будет изменяться от $-\pi$ до π .

На этой плоскости с разрезом также можно определить три обратных функции $\tilde{w}_k = \sqrt[3]{z}$, $k = 1, 2, 3$. Если мы выберем область δ_1 , то получим определенную ветвь функции $w = \sqrt[3]{z}$. При этом верхняя полуплоскость $0 < \arg z < \pi$ отображается на сектор $0 < \arg \tilde{w} < \pi/3$, а этот сектор будет одновременно принадлежать как сектору Δ_1 , так и сектору δ_1 . Точки нижней полуплоскости $-\pi < \arg z < 0$ перейдут в точки сектора $-\pi/3 < \arg \tilde{w} < 0$, т.е. в часть плоскости w , принадлежащей как области δ_1 , так и области Δ_3 . Это означает, что рассматриваемая ветвь $\tilde{w}_1 = \sqrt[3]{z}$ будет совпадать в верхней полуплоскости с ранее определенной ветвью w_1 , а в нижней полуплоскости — с другой ветвью, именно с w_1 .

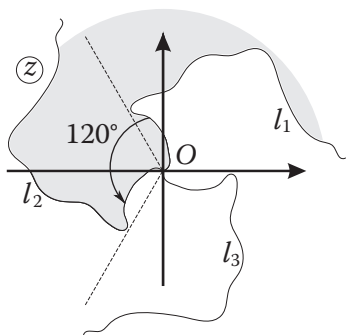


Рис. 1.8

Аналогичные рассуждения можно провести не с внутренностями углов Δ_k , а с областями плоскости переменной w , расположенными между парами линий l_1, l_2, l_3 , исходящих из начала и уходящих на бесконечность (Рис. 1.8) Эти линии могут иметь произвольную форму. Если l_1 задать, то l_2 — результат поворота l_1 на 120° против часовой стрелки, l_3 — результат той же операции над l_2 . Эти линии разбивают плоскость на три части, внутренность каждой из которых

функция $z = w^3$ взаимно однозначно и непрерывно отображает на плоскость переменной z с разрезом вдоль линии L , которая получается

при отображении каждой их линий l_k , $k = 1, 2, 3$ по закону $w \rightarrow z = w^3$. Обратная функция взаимно однозначно отображает плоскость переменной z с разрезом вдоль линии L на одну из частей между парами линий l_k . Этих функций три и они так же называются ветвями трехзначной функции $w = \sqrt[3]{z}$.

Общая ситуация для функции $w = \sqrt[3]{z}$ такова. Для любой односвязной области D плоскости z , для любой точки $z_0 \in D$, если в D нет линии, окружающей точку $z = 0$, если выбрать одно из трех значений $w(z_0) = \sqrt[3]{z_0}$, то существует ровно одна однозначная и непрерывная ветвь функции $w(z) = \sqrt[3]{z}$, которая совпадает с $w(z_0)$ при $z = z_0$.

Таким образом, нельзя рассматривать ветви многозначной функции как совокупность отдельных функций. Однозначная и непрерывная ветвь функции определяется не только значением $w(z_0)$, но и заданной областью D . Приведенные на рис. 1.9 примеры отвечают выбору $z_0 = 1$ $w(z_0) = \sqrt[3]{1} = 1$. Область D выбрана по-разному. При выборе D как на рис. 1.9а значение $\sqrt[3]{8}$ получается $-1 + i\sqrt{3}$, а при выборе D как на рис. 1.9б получим $-1 - i\sqrt{3}$. Это можно понять так.

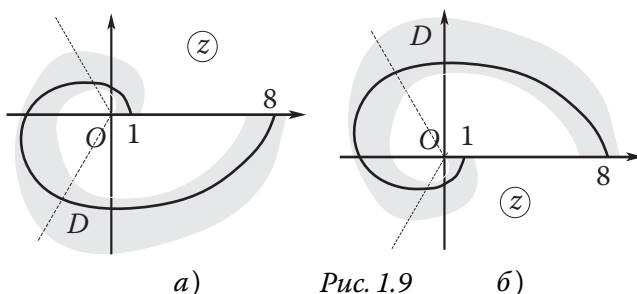


Рис. 1.9

Будем двигаться из точки $z_0 = 1$ до точки $z = 8$ вдоль непрерывной линии в области D . При этом непрерывно изменяется модуль $|\sqrt[3]{z}|$ и аргумент числа $\sqrt[3]{z}$. В точке $z = 8$ модуль достигает своего значения $|\sqrt[3]{8}| = 2$ в обоих случаях. Аргумент же в случае а) увеличивает свое значение от 0 до $\frac{2\pi}{3}$, а в случае б) уменьшается от 0 до $-\frac{2\pi}{3}$.

Если рассматриваемая область D в плоскости переменной z содержит замкнутую кривую, окружающую $z = 0$, то при обходе вдоль этой

кривой требование непрерывности значения $w \rightarrow z = w^3$ приводит к противоречию: при обходе по замкнутому контуру вокруг нуля аргумент $w \rightarrow z = w^3$ получает приращение $\frac{2\pi}{3}$, если идти против часовой стрелки и $-\frac{2\pi}{3}$ — если против. Такие точки для многозначных функций называются точками ветвления. Заметим, что точку ветвления $z = 0$ для функции $\sqrt[3]{z}$ можно охарактеризовать и так: если для выбранной ветви устремить z к нулю, то при любом таком выборе ветви $\lim_{z \rightarrow 0} \sqrt[3]{z} = 0$ — одно и то же значение.

Так как $z = w^3$ имеет отличную от нуля производную во всех точках области Δ_k :

$$\frac{dz}{dw} = 3w^2,$$

то каждая из ветвей $w_k = \sqrt[3]{z}$ дифференцируема в любой точке $z \neq 0$ и при этом

$$\frac{dw_k}{dz} = \frac{1}{3w^2} = \frac{1}{3(\sqrt[3]{z})^2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{z^2}}.$$

Вычисляя значение этой производной в некоторой точке z_0 , нужно брать ту же ветвь для $\sqrt[3]{z_0^2}$. Таким образом мы можем говорить не только о *непрерывной ветви*, но и об *аналитической ветви*.

Обход начала координат по окружности $|z| = R$ в положительном направлении равносильно обходу бесконечно удаленной точки $z = \infty$ в отрицательном направлении и, следовательно, точка $z = \infty$ также является точкой ветвления функции $w = \sqrt[3]{z}$. Других точек ветвления эта функция не имеет, так как обход в плоскости z по любой замкнутой кривой, не содержащей внутри себя начала координат, не меняет значения корня.

Итак, однозначные ветви функции $w = \sqrt[3]{z}$ определены в любой области D , в которой невозможен обход точек ветвления $z = 0$ и $z = \infty$. Если мы проведем разрез вдоль луча, соединяющего эти точки ветвления, то на плоскости с этим разрезом обход точек ветвления невозможен. Обычно разрез производят вдоль действительной положительной полуоси. При этом разрез будет иметь два "берега" — верхний и нижний. Точкам верхнего берега приписываем $\arg z = 0$, а точкам нижнего

— $\arg z = 2\pi$.

В общем случае функция $z = w^n$, $n = 2, 3, \dots$ отображает любой сектор

$$\frac{2\pi k}{n} < \arg w < \frac{2\pi k + 2\pi}{n} (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

на плоскости w на плоскость z с разрезом по положительной действительной полуоси. Эти секторы являются областями однолиственности данной функции. Обратная функция $w = \sqrt[n]{z}$ является многозначной. Каждая из ее ветвей

$$w_k = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\arg z + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\arg z + 2k\pi}{n} \right), k = 0, 1, \dots, n-1$$

является однозначной непрерывной функцией на плоскости с разрезом. Она аналитична и

$$\frac{dw_k}{dz} = \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n \sqrt[n]{z^{n-1}}}.$$

Точки $z = 0$ и $z = \infty$ являются точками ветвления функции $w = \sqrt[n]{z}$.

1.7.6. Логарифмическая функция

Функция, обратная показательной функции $z = e^w$, называется логарифмической и обозначается $w = \operatorname{Ln} z$. Логарифмическая функция $w = \operatorname{Ln} z$ определена для всех z , кроме точки $z = 0$. В самом деле, показательная функция $e^w \neq 0$ при всех w .

Функция $w = \operatorname{Ln} z$ бесконечнозначна, т.е. каждой точке z она ставит в соответствие бесконечное количество чисел w таких, что $e^w = z$ (это вытекает из периодичности показательной функции).

Получим формулу для вычисления логарифма. Положим $z = re^{i\varphi}$, $w = u + iv$. Тогда $e^{u+iv} = e^u \cdot e^{iv} = re^{i\varphi}$. Но два комплексных числа равны, если их модули равны, а аргументы отличаются на число, кратное 2π . Отсюда $e^u = r$, $v = \varphi + 2\pi k$. Из первого равенства $u = \ln r$ — обычный логарифм положительного числа r . Следовательно,

$$w = \operatorname{Ln} z = \ln r + i(\varphi + 2\pi k) = \ln |z| + i \arg z + 2\pi k i, \quad (1.24)$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Значение логарифма, равное $\ln |z| + i \arg z$, называется главным и обозначается $\ln z$. Все значения логарифма можно получить из главного значения: $\text{Ln } z = \ln z + 2n\pi i$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Используя определение логарифма, можно показать, что для любых z_1 и z_2 , не равных нулю,

$$\text{Ln}(z_1 z_2) = \text{Ln } z_1 + \text{Ln } z_2,$$

$$\text{Ln } \frac{z_1}{z_2} = \text{Ln } z_1 - \text{Ln } z_2.$$

Эти равенства следует понимать в смысле равенства двух множеств. Например, для первого из этих равенств имеем: бесконечное множество значений, принимаемых логарифмом в точке $z = z_1 z_2$, совпадает с множеством, составленным из сумм двух слагаемых, одно из которых принадлежит множеству значений $\text{Ln } z_1$, а другое — множеству $\text{Ln } z_2$. Формальное применение этих свойств может привести к ошибкам. Например, полагая во втором равенстве $z = z_1 = z_2$, получим $\text{Ln } 1 = \text{Ln } z - \text{Ln } z$. Это, конечно, верное равенство, но правую часть нельзя заменить нулем (ведь тогда получим, что логарифм единицы равен единственному числу — нулю; в то время как по формуле (1.24) $\text{Ln } 1 = 2n\pi i$). $\text{Ln } z - \text{Ln } z$ — это множество всех разностей значения логарифма одного и того же числа, т.е. чисел вида $2n\pi i$.

Пример 1.10 а) $\text{Ln}(-1) = \ln |-1| + i \arg(-1) + 2n\pi i = i\pi + 2n\pi i$;

б) $\text{Ln } i = \ln |i| + i \arg i + 2n\pi i = i\pi/2 + 2n\pi i$;

в) $\text{Ln}(1 - i) = \ln |1 - i| + i \arg(1 - i) + 2n\pi i = \ln \sqrt{2} - i\pi/4 + 2n\pi i$.

Рассмотрим однозначные ветви логарифмической функции. Так как функция $z = e^w$ является периодической с периодом $2\pi i$, то $e^{w_1} = e^{w_2} \Leftrightarrow w_1 - w_2 = 2k\pi i$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Следовательно, области однолиственности показательной функции не должны содержать точек, отличающихся друг от друга на $2k\pi i$.

Проще всего в качестве таких областей взять полосы $\Delta_k = \{z : 2k\pi < \operatorname{Im} w < 2(k+1)\pi\}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, параллельные действительной оси шириной 2π (рис.1.10). Функция $z = e^w$ отображает каждую такую полосу на всю комплексную плоскость (z) с разрезом вдоль действительной положительной полуоси. На такой плоскости с разрезом

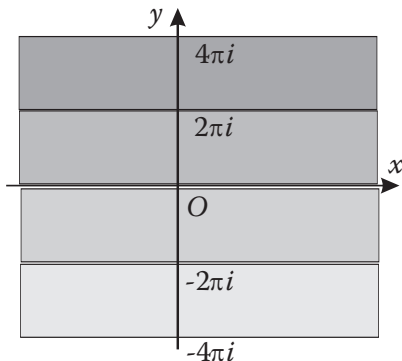


Рис. 1.10

имеем бесконечное множество различных ветвей функции $\operatorname{Ln} z$. Главное значение логарифма $\ln z = \ln |z| + i \arg z$ является однолистной (взаимо-однозначной) функцией, отображающей плоскость с разрезом на полосу $0 < \operatorname{Im} z < 2\pi$.

Для выделения ветви достаточно указать, какой полосе должны принадлежать значения логарифма. Обычно задается значение логарифма w_0 в некоторой точке z_0 . Например, если указано, что выбирается та ветвь логарифма, для которой $\operatorname{Ln} i = \frac{9\pi}{2}i$, то это означает, что рассматривается однозначная функция $w = \ln z + 4\pi i = \ln |z| + i \arg z + 4\pi i$.

Точками ветвления логарифмической функции являются точки $z = 0$ и $z = \infty$. В самом деле, при однократном обходе окружности $C : |z| = R$ произвольного радиуса значение аргумента изменится на $\pm 2\pi$ и, следовательно, ветвь $\ln z + 2k\pi i$ перейдет в ветвь $\ln z + 2k\pi i \pm 2\pi i = \ln z + 2(k \pm 1)\pi i$, т. е. перейдет на другую ветвь логарифма.

Каждая из ветвей логарифма является однозначной функцией, обратной к аналитической функции $z = e^w$, поэтому

$$(\ln z + 2k\pi i)' = \frac{1}{(e^w)'} = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z}.$$

Так как значение этой производной не зависит от k , то удобно писать

$$(\operatorname{Ln} i)' = \frac{1}{z},$$

понимая левую часть как производную произвольной ветви логарифмической функции.

1.7.7. Обратные тригонометрические функции

Арксинусом называется функция обратная к $z = \sin w$ и обозначается $w = \operatorname{Arcsin} z$. Так как

$$\sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} \quad (1.25)$$

и экспонента является периодической функцией (с периодом $2\pi i$), то арксинус — бесконечнозначная функция.

Полагая для краткости $e^{iw} = t$, запишем равенство (1.25) в виде

$$z = \frac{t + t^{-1}}{2i},$$

откуда

$$t^2 - 2izt - 1 = 0$$

и

$$t = iz + \sqrt{1 - z^2}.$$

Заметим, что мы не пишем $\pm$ перед корнем, так как сам символ $\sqrt{z}$ уже содержит оба значения корня. Эти корни отличны от нуля при любом z (так как их произведение равно единице). Таким образом, уравнение

$$e^{iw} = iz + \sqrt{1 - z^2}$$

всегда имеет решение

$$w = \operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln} \left(iz + \sqrt{1 - z^2} \right). \quad (1.26)$$

Аналогично определяются остальные обратные тригонометрические функции и выводятся формулы для их вычисления:

$$\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln} \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right);$$

$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+iz}{1-iz};$$

$$\operatorname{Arcctg} z = \frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{z+i}{z-i}.$$

Если в этих формулах взять главные значения логарифма, то получим *главные значения* обратных тригонометрических функций, которые обозначаются $\arcsin z$, $\arccos z$, $\operatorname{arctg} z$ и $\operatorname{arcctg} z$.

Пример. Вычислить $\operatorname{Arcsin} i$.

Решение. По формуле (1.26) находим

$$\operatorname{Arcsin} i = -i \operatorname{Ln} (-1 \pm \sqrt{2}).$$

Если перед корнем взять положительный знак, то получим

$$\begin{aligned} \operatorname{Ar} c \sin i &= -i \operatorname{Ln} (\sqrt{2} - 1) = -i (\ln (\sqrt{2} - 1) + \\ &+ i \arg (\sqrt{2} - 1) + 2k\pi i) = -i \ln (\sqrt{2} - 1) + 2k\pi. \end{aligned}$$

Для отрицательного знака перед корнем будем иметь

$$\begin{aligned} \operatorname{Ar} c \sin i &= -i \operatorname{Ln} (-\sqrt{2} - 1) = -i (\ln (\sqrt{2} + 1) + i \arg (-\sqrt{2} - \\ &- 1) + 2k\pi i) = -i \ln (\sqrt{2} + 1) + \pi + 2k\pi = -i \ln (\sqrt{2} + 1) + (2k + 1)\pi. \end{aligned}$$

Эти результаты можно объединить

$$\operatorname{Ar} c \sin i = -i \ln (\sqrt{2} - (-1)^n) + n\pi.$$

1.7.8. Обратные гиперболические функции

Эти функции обозначаются $w = \operatorname{Arsh} z$ (ареасинус), $w = \operatorname{Arch} z$ (ареакосинус), $\operatorname{Arth} z$ (ареатангенс), и $z \operatorname{Arcth} z$ (ареакотангенс). Совершенно аналогично выводу формул для вычисления обратных тригонометрических функций можно получить аналогичные формулы для обратных гиперболических функций:

$$\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln} (z + \sqrt{z^2 + 1});$$

$$\operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln} (z + \sqrt{z^2 - 1});$$

$$\operatorname{Arth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+z}{1-z};$$

$$\operatorname{Arcth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{z+1}{z-1}.$$

Очевидно все эти функции бесконечнозначны. Если в этих формулах взять главные значения логарифма, то получим *главные значения* обратных гиперболических функций, которые обозначаются $\operatorname{arsh} z$, $\operatorname{arch} z$, $\operatorname{arth} z$ и $\operatorname{arch} z$.

1.7.9. Общая степенная функция $w = z^a$

По определению полагаем

$$w = z^a = e^{a \operatorname{Ln} z},$$

где $a = \alpha + i\beta$ — произвольное комплексное число.

Для действительных $a \neq 0$ имеем $\beta = 0$ и

$$z^a = e^{a(\ln |z| + i \arg z + 2n\pi i)} = e^{a \ln |z|} \cdot e^{ia(\arg z + 2n\pi)}, n = 0, \pm 1, \dots$$

По основному логарифмическому тождеству ($e^{\ln A} = A$ для действительных A) будем иметь $e^{a \ln |z|} = e^{\ln |z|^a} = |z|^a$.

Значит, для действительного a справедливо равенство

$$z^a = |z|^a e^{ia(\arg z + 2n\pi)}. \quad (1.27)$$

Таким образом, при действительных a все значения $w = z^a$ расположены на окружности $|w| = |z|^a$, а аргументы образуют арифметическую прогрессию с разностью $2a\pi i$.

Рассмотрим частные случаи этой формулы.

1) $a = k$ — целое число. Тогда $e^{ik \cdot 2n\pi i} = \cos 2n\pi k + i \sin 2n\pi k = 1$, и, следовательно,

$$z^k = |z|^k e^{ik \arg z}$$

—однозначная функция. Нетрудно показать, что при целом k функция $w = z^k$ аналитична на всей комплексной плоскости и $(z^k)' = kz^{k-1}$, а тогда и многочлены $P_n(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_n$ аналитичны на всей плоскости.

2) $a = \frac{1}{k}$, где k — целое число. Из (1.27) имеем

$$z^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{z} = \sqrt[k]{|z|} e^{i \frac{\arg z + 2n\pi}{k}}, \quad n = 0, \pm 1, \dots \quad (1.28)$$

Рассмотрим в этом равенстве множитель $e^{i2\pi \frac{n}{k}}$. Если взять $n = k + s$, где s — также целое, то

$$e^{i2\pi \frac{k+s}{k}} = e^{i2\pi \left(1 + \frac{s}{k}\right)} = e^{i2\pi} \cdot e^{i \frac{2\pi s}{k}} = e^{i \frac{2\pi s}{k}},$$

так как $e^{i2\pi} = 1$. Таким образом, при $n = s$ и $n = k + s$ функция $z^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{z}$ принимает одно и то же значение.

Это означает, что функция $\sqrt[k]{z}$ имеет k различных значений и все они могут быть получены из равенства (1.28) при $n = 0, 1, 2, \dots, k-1$.

3) Можно показать, что если a — иррациональное или комплексное число, то формула (1.27) дает бесконечное количество чисел, отличающихся как модулями, так и аргументами.

Пример 1.11 Найти все значения $1^{\sqrt{2}}$.

Решение. $1^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2} \operatorname{Ln} 1} = e^{\sqrt{2} \cdot 2n\pi i} = \cos(2\sqrt{2}n\pi i) + i \sin(2\sqrt{2}n\pi i), \quad n = 0, \pm 1, \dots$

Все полученные числа по модулю равны единице и среди них нет одинаковых. В самом деле, первое — очевидно, а если бы при двух значениях $n = k_1$ и $n = k_2$ получились два одинаковых числа, то их аргументы отличались на число, кратное $2\pi i$:

$$2\sqrt{2}k_1\pi i - 2\sqrt{2}k_2\pi i = 2\sqrt{2}s\pi i,$$

где k_1, k_2 и s — целые числа. Но тогда $\sqrt{2}(k_1 - k_2) = s$ или $\sqrt{2} = \frac{s}{k_1 - k_2}$, а это невозможно, так как число $\sqrt{2}$ — иррациональное.

Пример 1.12 Найти 1^i .

Решение.

$$1^i = e^{i \operatorname{Ln} 1} = e^{i \cdot 2n\pi i} = e^{-2n\pi}, n = 0, \pm 1, \dots$$

Все эти числа расположены на действительной оси и, очевидно, различны.

Пример 1.13 Найти $(1+i)^{1-i}$.

Решение. $(1+i)^{1-i} = e^{(1-i) \operatorname{Ln}(1+i)} = e^{(1-i) \left(\ln \sqrt{2} + i \frac{\pi}{4} + 2n\pi i \right)} =$
 $= e^{\ln \sqrt{2} + \frac{\pi}{4} + 2n\pi} \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2} \right) \right).$

Пример 1.14 Вычислить $\operatorname{Ln} i^i$.

Решение. Сначала вычислим i^i

$$i^i = e^{i \operatorname{Ln} i} = e^{i(\ln |i| + i \arg i + 2n\pi i)} = e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)}.$$

Значит,

$$\operatorname{Ln} i^i = \ln |i^i| + i \arg i^i + 2k\pi i = \ln \left| e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)} \right| +$$
$$+ i \arg e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)} + 2k\pi i = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi + 2k\pi i,$$

где $n, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Заметим, что вычисления $\operatorname{Ln} i^i = i \operatorname{Ln} i = -\frac{\pi}{2} - 2n\pi$ — неверны.

§ 1.8. Интегрирование функций комплексного переменного

1.8.1. Определение интеграла, его свойства и вычисление

Пусть в области D комплексной плоскости задана функция $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, непрерывная в точках кусочно — гладкой кривой l , имеющей начало в точке z и конец в точке Z (рис.1.11).

Разобьем кривую l на части (элементарные дуги) точками

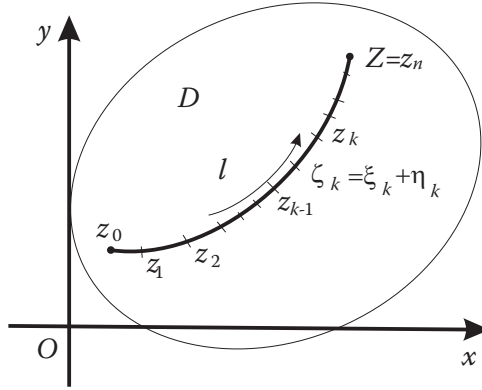


Рис. 1.11

$z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ и пусть $z_n = Z$. Обозначим $\Delta z_k = z_k - z_{k-1} = (x_k - x_{k-1}) + i(y_k - y_{k-1}) = \Delta x_k + i\Delta y_k, k = 1, 2, \dots, n$. Заметим, что Δz_k — это вектор, идущий из точки z_{k-1} в точку z_k , а $|\Delta z_k|$ — длина этого вектора, т.е. длина хорды, стягивающей k -ю элементарную дугу. На каждой элементарной дуге возьмем произвольную точку $\zeta_k = \xi_k + i\eta_k$ (ζ -дзета, ξ -кси, η -эта — греческие буквы).

Составим интегральную сумму

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k &= \sum_{k=1}^n [u(\xi_k, \eta_k) + iv(\xi_k, \eta_k)] \cdot [\Delta x_k + i\Delta y_k] = \\ &= \sum_{k=1}^n [u(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k - v(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k] + \\ &\quad + i \sum_{k=1}^n [v(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k + u(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k]. \end{aligned} \quad (1.29)$$

В курсе анализа доказывается, что если $\max |\Delta z_k| \rightarrow 0$ (в этом случае и $n \rightarrow \infty$, т.е. количество точек деления кривой неограниченно увеличивается), то обе суммы в правой части равенства (1.29) для непре-

рывных функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ (а их непрерывность следует из непрерывности $f(z)$) стремятся к конечным пределам, не зависящим ни от способа разбиения кривой l на части, ни от выбора точек ζ_k . Эти пределы равны соответственно криволинейным интегралам

$$\int_l u(x, y)dx - v(x, y)dy, \quad \int_l v(x, y)dx + u(x, y)dy.$$

Следовательно, при $\max |\Delta z_k| \rightarrow 0$ сумма в левой части (1.29) также имеет конечный предел, не зависящий от выбора точек z_k и ζ_k . Этот предел называется *контурным интегралом* от функции $f(z)$ по кривой l и обозначается

$$\int_l f(z)dz.$$

Итак,

$$\int_l f(z)dz = \int_l udx - vdy + i \int_l vdx + udy. \quad (1.30)$$

Если кривая l замкнута, то обычно интеграл обозначается

$$\oint_l f(z)dz.$$

Свойства контурного интеграла

$$1) \int_l dz = Z - z_0,$$

где z_0 и Z начальная и конечная точки кривой l .

В самом деле, для функции $f(z) \equiv 1$ интегральная сумма равна

$$\sum_{k=1}^n \Delta z_k = \Delta z_1 + \Delta z_2 + \dots + \Delta z_{n-1} + \Delta z_n =$$

$$=(z_1 - z_0) + (z_2 - z_1) + \dots + (z_{n-1} - z_{n-2}) + (z_n - z_{n-1}) = z_n - z_0 = Z - z_0.$$

$$2) \int_{l^-} f(z) dz = - \int_l f(z) dz,$$

где l^- — кривая, совпадающая с l , но проходимая в противоположном направлении.

$$3) \int_l (f(z) + g(z)) dz = \int_l f(z) dz + \int_l g(z) dz.$$

$$4) \int_l c f(z) dz = c \int_l f(z) dz,$$

где c — постоянная.

$$5) \int_{l_1+l_2} f(z) dz = \int_{l_1} f(z) dz + \int_{l_2} f(z) dz,$$

где через $l_1 + l_2$ обозначена линия, составленная из кривых l_1 и l_2 .

Свойства 2 — 5 следуют из (1.30), так как для криволинейных интегралов эти свойства выполняются.

6) Теорема об оценке интеграла:

$$\left| \int_l f(z) dz \right| \leq \int_l |f(z)| \cdot |dz| \leq M\lambda, \quad (1.31)$$

где λ — длина кривой l , а $M = \max_{z \in l} |f(z)|$.

Действительно,

$$\left| \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |f(\zeta_k)| \cdot |\Delta z_k| \leq M \sum_{k=1}^n |\Delta z_k|. \quad (1.32)$$

Но $\sum_{k=1}^n |\Delta z_k|$ — длина ломаной с вершинами в точках $z_0, z_1, \dots, z_n$, вписанной в кривую l . Если $\max |\Delta z_k| \rightarrow 0$, то длина этой

ломаной будет стремиться к длине λ кривой, если кривая кусочно-гладкая. Переходя в (1.32) к пределу при $\max |\Delta z_k| \rightarrow 0$ получаем (1.31)

Контурный интеграл можно вычислить, если свести его по формуле (1.30) к двум криволинейным интегралам. Пусть $x = x(t)$, $y = y(t)$, $(\alpha \leq t \leq \beta)$ — параметрические уравнения кривой l . Тогда

$$\begin{aligned} \int_l f(z) dz &= \int_{\alpha}^{\beta} [u(x(t), y(t)) \cdot x'(t) - v(x(t), y(t)) y'(t)] dt + \\ &+ i \int_{\alpha}^{\beta} [v(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + u(x(t), y(t)) y'(t)] dt. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Пример 1.15 *Вычислить*

$$\int_l z \operatorname{Re} z dz,$$

где l — верхняя полуокружность $|z| = 1$, $\operatorname{Re} z \geq 0$.

Решение. Параметрические уравнения полуокружности $x = \cos t$, $y = \sin t$ ($0 \leq t \leq \pi$). Так как

$$u = \operatorname{Re} f(z) = x^2, v = \operatorname{Im} f(z) = xy,$$

то по формуле (1.33) имеем

$$\begin{aligned} \int_l z \operatorname{Re} z dz &= \int_l x^2 dx - xy dy + i \int_l xy dx + x^2 dy = \left[\begin{array}{l} x = \cos t \\ y = \sin t \end{array} \right] = \\ &= \int_0^{\pi} (\cos^2 t \cdot (-\sin t) - \cos^2 t \cdot \sin t) dt + i \int_0^{\pi} (-\cos^2 t \cdot \sin t + \\ &+ \cos^3 t) dt = \frac{2 \cos^3 t}{3} \Big|_0^{\pi} + i \left(\frac{\cos^3 t}{3} + \sin t - \frac{\sin^3 t}{3} \right) \Big|_0^{\pi} = -\frac{4}{3} - \frac{2}{3}i. \end{aligned}$$

Если кривая l задана комплексно-параметрическим уравнением $z = z(t)$ ($a \leq t \leq b$), где $z(t)$ имеет непрерывную производную, то (1.33) можно записать в виде

$$\int_l f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt. \quad (1.34)$$

Пример 1.16 *Вычислить*

$$\int_l |z|dz,$$

где l — прямолинейный отрезок, соединяющий точки z_0 и $Z = 2 + i$.

Решение. Уравнение прямой, проходящей через точки 0 и $2 + i$, $y = x/2$. Положим $x = 2t$ и тогда $y = t$. Таким образом, уравнения $x = 2t$, $y = t$ будут задавать точки заданного отрезка, если $0 \leq t \leq 1$. Отсюда $z = x + iy = 2t + it = (2 + i)t$ — комплексно-параметрическое уравнение отрезка l . Так как $|z(t)| = |(2 + i)t| = |2 + i|t = t\sqrt{5}$ и $z'(t) = 2 + i$, то отсюда имеем

$$\int_l |z|dz = \int_0^1 t\sqrt{5}(2 + i)dt = \sqrt{5}(2 + i) \int_0^1 tdt = \frac{\sqrt{5}}{2}(2 + i).$$

Отметим, что по формулам (1.33) и (1.34) обычно вычисляют интегралы от неаналитических функций. Ниже увидим, что если $f(z)$ аналитична в односвязной области, то для нее существует первообразная $F(z)$, и

$$\int_l f(z)dz = F(Z) - F(z_0),$$

где z_0 и Z — соответственно начальная и конечная точки кривой l , лежащей в этой области. Но чтобы это показать, надо доказать, что интеграл от аналитической функции не зависит от вида кривой и определяется лишь начальной и конечной точками кривой.

1.8.2. Интегральная теорема Коши

Пусть D — область с границей l и $\bar{D}$ — замкнутая область, полученная из D добавлением всех граничных точек: $\bar{D} = D \cup l$. Говорят, что функция аналитична в замкнутой области $\bar{D}$, если она аналитична в некоторой области (открытой!) D_1 , содержащей $\bar{D}$ внутри себя.

Теорема 1.2 Если функция $f(z)$ аналитична в замкнутой односвязной области $\bar{D}$ с кусочно-гладкой границей l , то

$$\oint_l f(z)dz = 0. \quad (1.35)$$

Доказательство. В определение аналитической функции входит лишь существование производной $f'(z)$, но мы проведем доказательство при дополнительном предположении о непрерывности производной, что значительно упростит рассуждения.

В курсе математического анализа доказывается *формула Грина*:

Если функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны в замкнутой односвязной области $\bar{D}$, ограниченной кусочно-гладкой кривой l , и их частные производные первого порядка непрерывны в D , то

$$\oint_l Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy. \quad (1.36)$$

Применяя формулу Грина к (1.33), будем иметь

$$\begin{aligned} \oint_l f(z)dz &= \oint_l udx - vdy + i \oint_l vdx + udy = \\ &= \iint_D \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dxdy + i \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy = 0. \end{aligned}$$

Так как обе подынтегральные функции в двойных интегралах равны нулю в силу условий Коши-Римана. Теорема доказана.

Следствие. Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D , то для любой незамкнутой кривой l интеграл зависит только от начальной и конечной точек этой кривой (и не зависит от вида самой кривой).

Доказательство. Пусть две кривые l_1 и l_2 имеют общее начало z_0 и общий конец Z (рис. 1.12). В области с границей $l_1 + l_2^-$ функция $f(z)$ аналитична и по теореме Коши $\oint_{l_1+l_2^-} f(z)dz = 0$.

Но по свойствам 5) и 2) контурных интегралов

$$\int_{l_1+l_2^-} = \int_{l_1} + \int_{l_2^-} = \int_{l_1} - \int_{l_2},$$

Откуда $\int_{l_1} f(z)dz = \int_{l_2} f(z)dz$, что и требовалось доказать.

Это следствие позволяет интеграл от аналитической в односвязной области функции (по незамкнутой кривой) записывать в виде

$$\int_{z_0}^z f(\zeta)d\zeta.$$

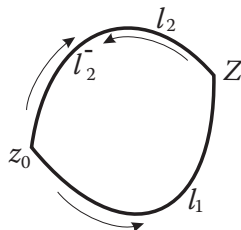


Рис. 1.12

Если зафиксировать точку z_0 , а точку z менять, то этот интеграл будет являться функцией от z : $F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta)d\zeta$. Можно доказать, что если $f(z)$ аналитическая функция, то $F(z)$ также будет аналитической, причем $F'(z) = f(z)$. Это означает, что $F(z)$ является первообразной для $f(z)$. Как и в математическом анализе отсюда легко получается формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(z)dz = F(b) - F(a),$$

причем здесь $F(z)$ любая первообразная. Эта формула сводит вычисление интеграла от аналитической в односвязной области D функции к нахождению какой-либо первообразной. Таким образом, мы имеем формулы для интегралов от аналитических функций, аналогичные соответствующим формулам для функций действительного аргумента. Например,

$$\begin{aligned}\int_{z_0}^z z^n dz &= \frac{z^{n+1} - z_0^{n+1}}{n+1}, n \in \mathbb{N}; \\ \int_{z_0}^z e^z dz &= e^z - e^{z_0}; \\ \int_{z_0}^z \cos z dz &= \sin z - \sin z_0; \\ \int_{z_0}^z \sin z dz &= \cos z_0 - \cos z.\end{aligned}$$

Пример 1.17 Вычислить $\int_0^{2+i} (z^2 + 1) dz$.

Решение. Так как $f(z) = z^2 + 1$ аналитична на всей комплексной плоскости, то

$$\int_0^{2+i} (z^2 + 1) dz = \left(\frac{z^3}{3} + z \right)_0^{2+i} = \frac{(2+i)^3}{3} + 2 + i = \frac{8+14i}{3}.$$

Распространим теорему Коши (1.2) на многосвязную область. Для определенности рассмотрим трехсвязную область (рис. 1.13).

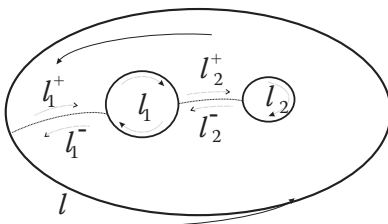


Рис. 1.13

Ее граница состоит из внешнего контура l и двух внутренних контуров l_1 и l_2 . Проведем два разреза γ_1 и γ_2 , причем у каждого разреза будем различать, как говорят, два берега γ_i^+ и γ_i^- ($i=1,2$).

Рассмотрим контур C , составленный из контуров $l, l_1, l_2, \gamma_1^+, \gamma_1^-, \gamma_2^+, \gamma_2^-$. Область, ограниченная этим контуром C , будет односвязной и по теореме Коши для односвязной области $\oint_C f(z)dz = 0$. При этом каждый из разрезов γ_1 и γ_2 будет проходиться дважды в противоположных направлениях и, значит, по свойству 2 интегралов $\int_{\gamma_i^+} + \int_{\gamma_i^-} = 0$. Следовательно, получаем

$$\oint_C f(z)dz = \int_l f(z)dz + \int_{l_1} f(z)dz + \int_{l_2} f(z)dz = 0, \quad (1.37)$$

где кривые l, l_1 , и l_2 проходятся так, что область остается все время с одной стороны (например, слева, т.е. l — против часовой стрелки, а l_1 и l_2 — по часовой стрелке. Такой обход границы называется положительным).

Итак, получаем следующую формулировку теоремы Коши для многосвязной области.

Теорема 1.3 *Если функция $f(z)$ аналитична в замкнутой односвязной области $\bar{D}$ с кусочно-гладкой границей, то интеграл от этой функции по границе области, проходимой в положительном направлении, равен нулю.*

Изменив направление обхода внутренних контуров l_1 и l_2 на противоположное, получим

$$\oint_l f(z)dz = \oint_{l_1^-} f(z)dz + \oint_{l_2^-} f(z)dz.$$

Очевидно, эта формула справедлива, если полная граница области состоит из внешней границы l и n внутренних контуров $l_1, l_2, \dots, l_n$

$$\oint_l f(z)dz = \oint_{l_1^-} f(z)dz + \oint_{l_2^-} f(z)dz + \dots + \oint_{l_n^-} f(z)dz. \quad (1.38)$$

Таким образом, интеграл по внешней границе области равен сумме интегралов по всем внутренним границам, если все эти кривые проходятся в одинаковых направлениях (например, против часовой стрелки).

Следствие. Если $f(z)$ аналитична в кольце между двумя замкнутыми (кусочно-гладкими) кривыми l_1 и l_2 (рис. 1.14), то это утверждение позволяет свести вычисление интеграла по сложному контуру l , к его вычислению по более простому контуру C (например, по окружности).

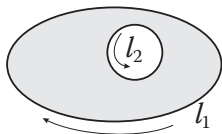


Рис. 1.14

$$\oint_{l_1} f(z) dz = \oint_{l_2} f(z) dz. \quad (1.39)$$

Пример 1.18 Если точка a лежит в области с границей l , то

$$I_n = \oint_l \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 0, & \text{если } n \neq 1 \text{ и } n - \text{целое,} \\ 2\pi i, & \text{если } n = 1. \end{cases}$$

Решение. 1) Если $n \leq 0$, то подынтегральная функция $\frac{1}{(z-a)^n} = (z-a)^{-n}$ аналитична на всей плоскости и по теореме Коши $I_n = 0$.

2) Пусть $n > 0$ и точка a лежит внутри области D .

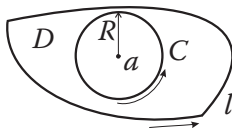


Рис. 1.15

Проведем окружность C с центром в точке a настолько малого радиуса r , чтобы она не имела общих точек с кривой l (рис. 1.15).

Уравнение этой окружности $|z-a| = r$ или $z-a = re^{it}$ ($0 \leq t \leq 2\pi$).

Так как подынтегральная функция $1/(z-a)^n$ аналитична в кольце между l и C , то по формуле (1.39) интегралы по этим кривым равны. Значит,

$$I_n = \oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \int_0^{2\pi} \frac{d(a + re^{it})}{(re^{it})^n} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{rie^{it} dt}{(re^{it})^n} = \frac{i}{r^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{i(1-n)t} dt.$$

Отсюда, при $n = 1$ имеем $I_1 = \oint_C \frac{dz}{(z-a)} = i \int_0^{2\pi} e^0 dt = 2\pi i$. Если $n \neq 1$,

то

$$I_n = \frac{i}{r^{n-1}} \frac{1}{i(1-n)} e^{i(1-n)t} \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{r^{n-1}(1-n)} \left[e^{i2\pi(1-n)} - 1 \right] = 0.$$

Итак, если контур l однократно обходит точку a в положительном направлении, то

$$I_n = \oint_l \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 0, & \text{если } n \neq 1, \\ 2\pi i, & \text{если } n = 1. \end{cases} \quad (1.40)$$

Советуем обратить особое внимание на этот пример, так как он играет существенную роль в дальнейшей теории.

Ясно, что для функций аналитических в *неодносвязной* области формула Ньютона-Лейбница не справедлива. В самом деле, пусть $f(z)$ аналитична в односвязной области D . Возьмем произвольную фиксированную точку z_0 и рассмотрим две кривые l_1 и l_2 , соединяющие точку z_0 с произвольной точкой z области D . Если бы интегралы $\int_{l_1} f(z)dz$ и

$\int_{l_2} f(z)dz$ были равны между собой, то интеграл по замкнутой кривой $l_1 \cup l_2^-$ был бы равен нулю, а это в односвязной области в общем случае не выполняется.

Например, интегралы $\int_l \frac{dz}{z}$ взятые по верхней и нижней полуокружностям $|z| = 1$, от точки $z_0 = -1$ до точки $z = 1$ равны $2\pi i$ и $-2\pi i$ соответственно. Таким образом, $\int_l f(z)dz$ по кривой,

соединяющей точки z_0 и z , может меняться при изменении пути интегрирования и, следовательно, является *многозначной* функцией переменного верхнего предела интегрирования z . Так, например, функция $f(z) = \frac{1}{z}$ аналитична в двусвязной области (на всей плоскости за

исключением точек $z = 0$ и $z = \infty$). Тогда интеграл $\int_l \frac{dz}{z}$, взятый по кривой, соединяющей точки $z_0 = 1$ и z и не проходящей через начало координат, равен некоторой ветви логарифмической функции $\text{Ln } z$. Какая ветвь логарифма получится и чему равен интеграл, определяется количеством и направлением обхода начала координат.

При вычислении интеграла от ветви многозначной функции выбор этой ветви обычно производится заданием значения функции в некоторой точке, которая обычно считается начальной точкой пути интегрирования. При вычислении интеграла по замкнутой кривой эта точка считается начальной точкой движения по контуру. Величина интеграла в общем случае зависит от выбора этой начальной точки.

Пример 1.19 Вычислить интеграл $\int_l \frac{dz}{\sqrt{z}}$

по следующим контурам:

- 1) по полуокружности $|z| = 1, y \geq 0, \sqrt{1} = 1$;
- 2) по полуокружности $|z| = 1, y \leq 0, \sqrt{1} = -1$;
- 3) по окружности $|z| = 1, \sqrt{1} = 1$;
- 4) по окружности $|z| = 1, \sqrt{1} = -1$;
- 5) по окружности $|z| = 1, \sqrt{-1} = i$.

Решение. Ветви двузначной функции $w = \sqrt{z}$ на единичной окружности можно представить в виде $w_k = \sqrt{e^{i\varphi}} = e^{\frac{i\varphi + 2k\pi i}{2}}, k = 0, 1$.

1) Начальное условие $\sqrt{1} = 1$ выделяет ветвь, соответствующую $k = 0$ (так как $\varphi = \arg 1 = 0$ и $e^{k\pi i=1}$ при $k = 0$). Значит,

$$\begin{aligned} \int_l \frac{dz}{\sqrt{z}} &= \int_0^\pi \frac{de^{i\varphi}}{\sqrt{e^{i\varphi}}} = \int_0^\pi \frac{ie^{i\varphi} d\varphi}{e^{\frac{i\varphi}{2}}} = i \int_0^\pi e^{\frac{i\varphi}{2}} d\varphi = \\ &= 2e^{\frac{i\varphi}{2}} \Big|_0^\pi = 2 \left(e^{\frac{i\pi}{2}} - 1 \right) = 2(i - 1) = -2 + 2i. \end{aligned}$$

2) Начальное условие $\sqrt{1} = -1$ выделяет ветвь, соответствующую $k = 1$ (так как $\varphi = \arg 1 = 0$ и $e^{k\pi i} = -1$ при $k = 1$). Значит,

$$\int_l \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int_0^\pi \frac{de^{i\varphi}}{\sqrt{e^{i\varphi}}} = \int_0^\pi \frac{ie^{i\varphi} d\varphi}{e^{i\frac{\varphi+2\pi}{2}}} = ie^{-\pi i} \int_0^\pi e^{\frac{i\varphi}{2}} d\varphi = -2e^{\frac{i\varphi}{2}} \Big|_0^\pi = 2 - 2i.$$

Отметим, что в этих двух случаях, используя формулу Ньютона—Лейбница, будем иметь

$$\int_1^{-1} \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\sqrt{z} \Big|_1^{-1}.$$

Далее, в первом случае для указанной ветви имеем $\sqrt{-1} = i$ и, значит, интеграл равен $2(i - 1)$. Во втором случае следует взять $\sqrt{-1} = -i$ и, следовательно, интеграл равен $2(-i + 1)$.

3) Начальное условие задают ветвь, соответствующую $k = 0$. Поэтому

$$\int_l \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int_0^{2\pi} \frac{de^{i\varphi}}{\sqrt{e^{i\varphi}}} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{i\varphi} d\varphi}{e^{i\frac{\varphi}{2}}} = 2e^{\frac{i\varphi}{2}} \Big|_0^{2\pi} = -4.$$

4) В данном случае имеем

$$\int_l \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int_0^{2\pi} \frac{de^{i\varphi}}{\sqrt{e^{i\varphi}}} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{i\varphi} d\varphi}{e^{i\frac{\varphi+2\pi}{2}}} = -2e^{\frac{i\varphi}{2}} \Big|_0^{2\pi} = 4.$$

В этих двух случаях, выходя из точки $z = 1$, после обхода окружности мы возвращаемся в ту же точку, но при этом аргумент z увеличивается на 2π , а следовательно, мы переходим на следующую ветвь функции $w = \sqrt{z}$. В третьем случае для указанной ветви будем иметь $\sqrt{1} = w_1(1) = 1$, а после обхода окружности получим $\sqrt{1} = w_2(1) = e^{i\pi} = -1$. Интеграл равен

$$\int_l \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\sqrt{z} \Big|_l = 2(w_2(1) - w_1(1)) = -4.$$

5) Начальное условие $\sqrt{-1} = i$ выделяет ветвь, соответствующую $k = 0$ (так как $\varphi = \arg(-1) = \pi$ и $e^{i\frac{\pi}{2} + k\pi} = i$ при $k = 0$). Значит,

$$\int_l \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{de^{i\varphi}}{\sqrt{e^{i\varphi}}} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{ie^{i\varphi} d\varphi}{e^{i\frac{\varphi}{2}}} = 2e^{\frac{i\varphi}{2}} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 4i.$$

1.8.3. Интегральная формула Коши

Пусть функция $f(z)$ аналитична в замкнутой области $\overline{D}$ (односвязной или многосвязной) и l — граница этой области. Оказывается, что значения функции $f(z)$ в любой точке $z \in D$ можно вычислить, зная только ее значения на границе данной области по формуле

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_l \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad (1.41)$$

где граница l обходится в положительном направлении (т.е. так, что область D остается все время слева).

Формула (1.41) называется *интегральной формулой Коши*. Для доказательства этой формулы построим окружность C_r с центром в точке z и настолько малого радиуса r , чтобы она не имела общих точек с кривой l . По формуле (1.39) имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_l \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

и для доказательства формулы (1.41) достаточно установить верность равенства

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

По формуле (1.40)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot 2\pi i \cdot f(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot f(z) \cdot \oint_{C_r} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_r} \frac{f(z)d\zeta}{\zeta - z}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_r} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_r} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_r} \frac{f(z) d\zeta}{\zeta - z} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_r} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta. \end{aligned}$$

По условию функция $f(z)$ аналитична в области D , а значит, непрерывна. Следовательно, для произвольного сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$, будет выполняться неравенство

$$|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon \quad (\zeta \in C_r),$$

как только расстояние между точками ζ и z (т.е. радиус r окружности C_r) станет достаточно мало. При этом по теореме об оценке интеграла получаем

$$\left| \int_{C_r} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \right| \leq \int_{C_r} \frac{|f(\zeta) - f(z)|}{|\zeta - z|} |d\zeta| < \int_{C_r} \frac{\varepsilon}{r} |d\zeta| = \frac{\varepsilon}{r} \cdot 2\pi r = 2\pi\varepsilon,$$

или

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \right| < 2\pi\varepsilon.$$

Так как ε сколь угодно мало, то это означает

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) = 0,$$

и формула (1.41) доказана.

Очевидно, эту формулу можно записать в виде

$$\oint_l \frac{f(z)}{z - a} dz = 2\pi i \cdot f(a).$$

С помощью последней формулы легко вычисляются многие интегралы по замкнутым кривым.

Пример 1.20 *Вычислить*

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z(z-2)^2} dz.$$

Решение. *Внутри единичного круга $|z| \leq 1$ находится одна особая точка $z = 0$ подынтегральной функции. Функция $e^z/(z-2)$ аналитична в этом круге. Следовательно,*

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z(z-2)^2} dz = \int_{|z|=1} \frac{e^z/(z-2)^2}{z-0} dz = 2\pi i \left. \frac{e^z}{(z-2)^2} \right|_{z=0} = \frac{\pi i}{2}.$$

Из интегральной формулы Коши можно получить очень важную в теории функций комплексного переменного теорему.

Теорема 1.4 *Если функция $f(z)$ аналитична в замкнутой односвязной области $\bar{D}$ с кусочно-гладкой границей, то в каждой точке области D она дифференцируема сколько угодно раз, причем n -ая производная равна*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_l \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.42)$$

где граница l области D обходится против часовой стрелки.

Заметим, что формально формула (1.42) получается из (1.41) последовательным дифференцированием n раз по z под знаком интеграла, но обоснование законности такой операции достаточно сложно.

Итак, если $f(z)$ имеет первую производную $f'(z)$ в точке z , то она имеет в этой точке все производные $f'(z), f''(z), \dots$, причем все они являются аналитическими функциями. В этом существенное отличие аналитических функций от функций действительного переменного, для

которых из существования первой производной, в общем случае, не следует существование высших производных.

Формулу (1.42) можно использовать при вычислении некоторых интегралов. Для этого эту формулу удобно записать в виде

$$I = \oint_l \frac{f(z)}{(z-a)^n} dz = \frac{2\pi i}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a). \quad (1.43)$$

Пример 1.21 Вычислить $\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z(z-2)^2} dz$.

Решение. Здесь $f(z) = e^z/z$, $a = 2$, $n = 2$. Следовательно,

$$I = \frac{2\pi i}{(2-1)!} \left(\frac{e^z}{z} \right)' \Big|_{z=2} = 2\pi i \frac{e^z z - e^z}{z^2} \Big|_{z=2} = \frac{\pi i}{2} e^2.$$

В последних двух примерах внутри кривой интегрирования содержалось по одной особой точке подынтегральной функции. Используя теорему Коши для многосвязной области, можно вычислять интеграл и в том случае, когда внутри кривой интегрирования содержится несколько особых точек. Для этого достаточно взять окружности с центрами в этих точках и настолько малыми радиусами, чтобы они не имели общих точек друг с другом и с кривой интегрирования и применить формулу (1.38).

Пример 1.22 Вычислить $\oint_{|z|=4} \frac{e^z}{z(z-2)^2} dz$.

Решение. Используя последние два примера, будем иметь

$$\oint_{|z|=4} \frac{e^z}{z(z-2)^2} dz = \oint_{|z|=1/2} \frac{e^z}{z(z-2)^2} dz + \oint_{|z-2|=1} \frac{e^z}{z(z-2)^2} dz = \frac{\pi i}{2} (1 + e^2).$$

Из формулы Коши (1.41) легко получить *принцип максимума модуля*. Пусть функция $f(z)$ аналитична в замкнутой области $\bar{D}$ с границей l . Тогда максимум ее модуля достигается на границе, т.е. ее модуль в

любой внутренней точке области не больше, чем максимум ее модуля на границе области.

В самом деле, пусть M — максимальное значение модуля $|f(\zeta)|$ аналитической функции на границе l . Возьмем произвольную точку $z \in D$ и пусть δ — наименьшее расстояние от этой точки до границы l области. Очевидно, для всех точек $\zeta \in l$ выполняется неравенство $|\zeta - z| \geq \delta$. Применяя формулу (1.41) к аналитической функции $[f(z)]^n$, где n — произвольное натуральное число, получим

$$[f(z)]^n = \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{[f(\zeta)]^n}{\zeta - z} d\zeta.$$

По теореме об оценке интеграла (1.31) будем иметь

$$|f(z)|^n \leq \frac{1}{2\pi} \int_l \frac{|f(\zeta)|^n}{|\zeta - z|} |d\zeta| \leq \frac{1}{2\pi} \int_l \frac{M^n}{\delta} |d\zeta| = \frac{M^n}{2\pi\delta} L,$$

где L — длина контура l . Из этого неравенства получаем

$$|f(z)| \leq M \left(\frac{L}{2\pi\delta} \right)^{1/n}.$$

Устремив $n \rightarrow \infty$, в пределе получаем

$$|f(z)| \leq M, \quad (1.44)$$

а это и означает, что модуль аналитической функции в любой внутренней точке области не больше, чем максимум ее модуля на границе области.

Если применить принцип максимума модуля к функции $g(z) = 1/f(z)$, то получим: если функция $f()$ не постоянна и аналитична в замкнутой области $\overline{D}$ и, кроме того, не обращается в нуль, то и минимум модуля $|f(z)|$ не может достигаться внутри области D .

Выше, при определении тригонометрических функций, мы отмечали, что на комплексной плоскости функции $\sin z$ и $\cos z$ не ограничены.

Оказывается, что это общее свойство всех аналитических на всей комплексной плоскости функций (за исключением функций, тождественно равных постоянной). Справедлива следующая теорема

Теорема Лиувилля. Если $f(z)$ аналитична на всей плоскости и ограничена, то она постоянна.

В самом деле, применим формулу Коши (1.42) для первой производной

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta.$$

Ввиду аналитичности функции $f(z)$ на всей плоскости в качестве контура интегрирования можем взять окружность произвольного радиуса R с центром в точке z : $|\zeta - z| = R$. Следовательно, по теореме об оценке интеграла (1.31)

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{R^2} 2\pi R = \frac{M}{R},$$

где M — максимум функции $f(z)$ на взятой окружности. Левая часть последнего неравенства не зависит от R , а правая стремится к нулю при $R \rightarrow \infty$. Отсюда, $f'(z) \equiv 0$, а следовательно, $f(z)$ постоянна.

§ 1.9. Ряды

1.9.1. Числовые ряды

Рассмотрим ряд с комплексными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots, \quad (1.45)$$

где $z_n = x_n + iy_n$.

Если существует предел

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n z_k,$$

то ряд (1.45) называется *сходящимся* и S называется суммой ряда. Если ряд не сходится, то он называется *расходящимся*. Можно доказать, что ряд (1.45) сходится тогда и только тогда, когда сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n.$$

Пример 1.23 Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n^2}$ сходится, так как $\frac{e^{in}}{n^2} = \frac{\cos n + i \sin n}{n^2}$, а оба ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ сходятся.

Из равенства $S_n = S_{n-1} + z_n$ следует *необходимый признак сходимости ряда*:

Если ряд (1.45) сходится, то его общий член стремится к нулю.

Это признак можно переформулировать как *достаточный признак расходимости*:

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n \neq 0$, то ряд расходится.

Пример 1.24 Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos in}{n^2}$ расходится, т.к. $\frac{\cos in}{n^2} = \frac{(e^{-n} + e^n)/2}{n^2}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^2}$ расходится, так как его общий член не стремится к нулю.

Как и в действительном анализе, можно доказать, что если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$, то сходится и ряд (1.45), и исходный ряд называется *абсолютно сходящимся*. Тем самым исследование сходимости комплексного ряда сводится к рассмотрению ряда с действительными членами $|z_n|$, а в простых случаях это можно сделать с помощью *признаков Даламбера и Коши*.

Признак Даламбера: Если $d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится; если $d > 1$, то этот ряд расходится.

Признак Коши: Если $k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|} < 1$, то ряд сходится; если $k > 1$, то ряд расходится.

Отметим, что если в этих признаках d и k больше единицы, то для ряда не выполняется необходимый признак сходимости, т.е. расходится не только ряд из модулей, но и сам ряд.

Пример 1.25 Рассмотрим ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, где z — произвольное комплексное число. Здесь $z_n = \frac{z^n}{n!}$, $z_{n+1} = \frac{z^{n+1}}{(n+1)!}$ и по признаку Даламбера

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z|^{n+1}/(n+1)!}{|z|^n/n!} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|z|}{n+1} = 0 < 1$$

для любого z . Значит, ряд сходится на всей комплексной плоскости.

1.9.2. Степенные ряды

Определение 1. Выражение вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = c_0 + c_1 (z - z_0) + c_2 (z - z_0)^2 + \dots + c_n (z - z_0)^n + \dots, \quad (1.46)$$

где $z_0, c_0, c_1, c_2, \dots$ — заданные комплексные числа, называется *степенным рядом*.

Очевидно, при $z = z_0$ ряд сходится и его сумма равна c_0 . Как и для действительных степенных рядов, для рядов в комплексной области справедлива теорема Абеля:

Теорема Абеля: Если ряд (1.46) сходится при $z_1 \neq z_0$, то он сходится в круге $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$, (рис. 1.16) причем абсолютно (т.е. ряд из модулей также сходится)

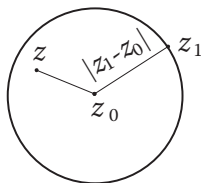


Рис. 1.16

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы Абеля для степенных рядов в действительной области и мы его опускаем.

Ясно, что если в некоторой точке z_2 ряд (1.46) расходится, то он расходится в кольце $|z - z_0| > |z_2 - z_0|$.

Из этой теоремы получаем, что для каждого степенного ряда возможна одна из трех возможностей:

- 1) ряд сходится только в точке z_0 ;
- 2) ряд сходится на всей плоскости;

3) существует такое число R , что в круге $|z - z_0| < R$ ряд сходится, а во внешности $|z - z_0| > R$ этого круга ряд расходится. R называется *радиусом сходимости* (1.46), а круг $|z - z_0| < R$ — *кругом сходимости* степенного ряда.

Действительно, используя признак Даламбера сходимости числового ряда, нетрудно показать, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$ сходится только при

$z = 0$; ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ сходится на всей комплексной плоскости; ряд $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ сходится (как бесконечно убывающая геометрическая прогрессия), если $|z| < 1$ и расходится, если $|z| > 1$ (и, таким образом, его радиус сходимости $R = 1$).

Если в случаях 1) и 2) положить соответственно $R = 0$ и $R = \infty$, то можно говорить о радиусе сходимости любого степенного ряда.

Можно доказать, что если радиус сходимости степенного ряда $R > 0$, то его сумма $f(z)$ будет аналитической функцией внутри круга сходимости этого ряда; и степенной ряд можно почленно дифференцировать и интегрировать любое число раз, при этом полученные степенные ряды будут иметь тот же радиус сходимости, что и исходный ряд.

Пример 1.26 Найти радиус сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} (z - 2)^n.$$

Решение. Общий член данного ряда равен $z_n = \frac{n^2}{2^n}(z - 2)^n$. Значит, $z_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}(z - 2)^{n+1}$. По признаку Даламбера

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)^2(z-2)^{n+1}}{2^{n+1}} \right| \cdot \left| \frac{2^n}{n^2 z^n} \right| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{2n^2} |z-2| = \frac{|z-2|}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2} = \frac{|z-2|}{2} < 1.\end{aligned}$$

Отсюда $|z - 2| < 2$ — круг сходимости данного ряда. Его радиус сходимости $R = 2$.

1.9.3. Ряды Тейлора

Пусть $f(z)$ аналитична в некоторой окрестности точки z_0 .

Определение. Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ называется рядом Тейлора функции $f(z)$ в точке z_0 , если его коэффициенты находятся по формулам

$$c_n = \frac{f^{(n+1)}(z_0)}{n!}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.47)$$

При этом, как обычно, считаем $f^{(0)}(z_0) = f(z_0)$.

Используя интегральную формулу Коши (1.42), коэффициенты c_n (которые называются *коэффициентами Тейлора*) можно представить в виде

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_l \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz,$$

где l — окружность достаточно малого радиуса с центром в точке z_0 .

Пусть степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ сходится в круге $|z - z_0| < R$ и его сумма, равная $f(z)$, будет аналитической функцией в круге сходимости. Последовательно дифференцируя равенство

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots + c_n(z - z_0)^n + \dots,$$

получим

$$f'(z) = c_1 + 2c_2(z - z_0) + \dots + nc_n(z - z_0)^{n-1} + \dots,$$

$$f''(z) = 2c_2 + 2 \cdot 3c_3(z - z_0) + \dots + n(n-1)c_n(z - z_0)^{n-2} + \dots,$$

.....

$$f^{(n)}(z) = n!c_n + (n+1)!c_{n+1}(z - z_0) + \dots$$

Подставляя в эти равенства $z = z_0$, получаем

$$c_0 = f(z_0), \quad c_1 = f'(z_0), \quad c_2 = \frac{f''(z_0)}{2!}, \dots, \quad c_n = \frac{f^{(n+1)}(z_0)}{n!}, \dots$$

Таким образом, доказана теорема:

Теорема 1.5 *Степенной ряд является рядом Тейлора своей суммой.*

Пусть ряды $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n$ имеют одну и ту же сумму $f(z)$ в окрестности точки z_0 . Тогда по полученной теореме имеем

$$a_n = b_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Поэтому данную теорему называют *теоремой единственности* разложения функции в ряд Тейлора.

В качестве примера использования теоремы единственности рассмотрим разложение в ряд Тейлора четных и нечетных функций. Пусть функция

$$f(z) = c_0 + c_1z + c_2z^2 + \dots + c_nz^n + \dots$$

четная, т.е. $f(-z) = f(z)$. Тогда сумма данного ряда совпадает с суммой ряда

$$f(z) = c_0 - c_1z + c_2z^2 - \dots + (-1)^n c_nz^n + \dots$$

По теореме единственности при нечетных $n = 1, 3, 5, \dots$ $a_n = -a_n$, т.е. $a_{2k-1} = 0$ при $k = 1, 2, 3, \dots$ и тейлоровское разложение четной функции имеет вид

$$f(z) = c_0 + c_2 z^2 + c_4 z^4 + \dots + c_{2k} z^{2k} + \dots$$

Аналогично, если функция $f(z)$ — нечетная, т.е. $f(-z) = -f(z)$, то тейлоровское разложение имеет вид

$$f(z) = c_1 z + c_3 z^3 + \dots + c_{2k-1} z^{2k-1} + \dots$$

Возникает естественный вопрос: любую ли аналитическую в некотором круге функцию можно разложить в этом круге в ряд Тейлора? Ответ дает следующая теорема.

Теорема 1.6 *Всякую функцию $f(z)$, аналитическую в круге $|z - z_0| < R$, можно в этом круге разложить в ряд Тейлора*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n, \quad (1.48)$$

причем это разложение единственно.

Теорема Тейлора является частным случаем приводимой ниже теоремы Лорана.

Так как формулы дифференцирования и ряд Тейлора в действительном и комплексном анализе имеют один и тот же вид, то ряды Тейлора для функций комплексного переменного имеют тот же вид, что и ряды Тейлора для функций действительного переменного. Например:

$$1) e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots,$$

$$2) \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots,$$

$$3) \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots$$

Заменив в ряде для экспоненты z на $-z$, получим

$$e^{-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n!} = 1 - z + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \dots,$$

и, таким образом, получим ряды Тейлора для $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{ch} z$.

$$4) \operatorname{sh} z = \frac{1}{2} (e^z - e^{-z}) = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \dots,$$

$$5) \operatorname{ch} z = \frac{1}{2} (e^z + e^{-z}) = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \dots$$

Отметим, что эти же разложения мы могли получить из рядов для $\sin z$ и $\cos z$, используя формулы (1.21).

Легко показать, что в комплексной области справедливо все, что говорится в элементарной математике о геометрической прогрессии. Поэтому из формулы суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии получаем часто используемое в дальнейшем разложение

$$6) \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots, \quad (|z| < 1).$$

Функция $\operatorname{Ln} z$ не является однозначной, а значит, и аналитической, и ее нельзя дифференцировать. Но главное значение логарифма $f(z) = \ln(1+z)$ будет аналитической функцией в некоторой окрестности точки $z = 0$. Так как

$$f(0) = 0, f'(0) = \frac{1}{1+z} \Big|_{z=0} = 1, f''(0) = -\frac{1}{(1+z)^2} \Big|_{z=0} = -1, \dots,$$

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+z)^n} \Big|_{z=0} = (-1)^{n-1} (n-1)!,$$

для главного значения логарифма получаем ряд Тейлора

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} + \dots$$

В действительном анализе для нахождения областей сходимости тейлоровских разложений необходимо изучение остаточных членов в формулах Тейлора. При этом бывает трудно понять, почему, например, разложение в степенной ряд $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$ справедливо при $-1 < x < 1$, хотя функция $\frac{1}{1+x^2}$ определена и бесконечно дифференцируема при всех действительных x .

Можно показать, что если аналитическая функция $f(z)$ разложена в ряд Тейлора по степеням $z - z_0$, то радиус сходимости полученного степенного ряда (а значит, и радиус круга, в котором справедлива формула (1.48)) равен расстоянию от точки z_0 до ближайшей к ней особой точки функции $f(z)$ (т.е. точки, в которой функция не является аналитической). Таким образом, например, ряды для функций e^z , $\sin z$, $\cos z$ сходятся к ним на всей комплексной плоскости, так как эти функции всюду аналитичны. Функция $\ln(1 + z)$ имеет особую точку $z = -1$ (т.к. $\ln 0$ не определен). Расстояние от точки $z = 0$ до $z = -1$ равно единице. Это и есть радиус сходимости данного ряда. Функция $\frac{1}{1 + z^2}$ имеет две особые точки $z = \pm i$, отстоящие от $z_0 = 0$ на единицу. Следовательно, разложение

$$\frac{1}{1 + z^2} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \dots$$

справедливо в круге $|z| < 1$.

Получение разложений последовательным дифференцированием функций и использованием формулы (1.48) может содержать лишь чисто технические трудности и не представляет интереса. Для эффективного вычисления коэффициентов ряда Тейлора существуют искусственные приемы. Рассмотрим некоторые из них (всюду берем разложения в точке $z = 0$).

1) Использование известных разложений.

Пример 1.27 $w = e^{-\frac{z^2}{2}}$.

Решение. В разложении экспоненты $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, заменив z на $-z^2/2$, получим требуемое разложение (справедливое на всей комплексной плоскости, так как функция $w = e^{-\frac{z^2}{2}}$ аналитична всюду).

$$e^{-\frac{z^2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{z^2}{2}\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{2^n n!}.$$

Пример 1.28 $w = \frac{\cos z + \operatorname{ch} z}{2}$.

Решение. Выразим косинусы через экспоненту по формулам (1.19) и (1.20) и используем ряд для e^z

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{4} \left(e^{iz} + e^{-iz} + e^z + e^{-z} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iz)^n}{n!} + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n!} = \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n + (-i)^n + 1 + (-1)^n}{n!} z^n = 1 + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^8}{8!} + \frac{z^{12}}{12!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{4n}}{(4n)!}. \end{aligned}$$

Это разложение справедливо на всей комплексной плоскости, так как данная функция всюду аналитична.

2) Дифференцирование известных разложений.

Пример 1.29 $w = \frac{1}{(1+z)^2}$.

Решение. Данная функция имеет особую точку $z = -1$. В круге $|z| < 1$ по формуле суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии имеем

$$w = \frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots + (-1)^n z^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n.$$

Дифференцируя обе части этого равенства, получим

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{(1+z)^2} = - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n z^{n-1} = \\ &= 1 - 2z + 3z^2 - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) z^n. \end{aligned}$$

3) При разложении в ряд Тейлора рациональных функций (т.е. имеющих вид отношения двух многочленов) представление их в виде суммы более простых дробей.

Пример 1.30 $w = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$.

Решение. $w = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{(z-1) - (z-2)}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n$. Разложение справедливо в круге $|z| < 1$.

4) Преобразование функции к более удобному виду.

Пример 1.31 $w = \frac{1}{1+z+z^2}$.

Решение. Умножим числитель и знаменатель на $1-z$.

$$\begin{aligned} w &= \frac{1-z}{(1-z)(1+z+z^2)} = \frac{1-z}{(1-z)^3} = (1-z) \frac{1}{(1-z)^3} = \\ &= (1-z) \sum_{n=0}^{\infty} z^{3n} = \sum_{n=0}^{\infty} (z^{3n} - z^{3n+1}), |z| < 1. \end{aligned}$$

Пример 1.32 $w = \sin^2 z$.

Решение. По тригонометрической формуле понижения степени имеем

$$w = \sin^2 z = \frac{1 - \cos 2z}{2}.$$

Используем разложение в ряд косинуса

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

Если заменить здесь z на $2z$, то получим

$$w = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n} z^{2n}}{(2n)!}, z \in \mathbb{C}.$$

5) Нахождение нескольких первых членов разложения функции в ряд Тейлора с помощью метода неопределенных коэффициентов.

Пример 1.33 Найти первые три отличные от нуля члена разложения функции $w = \operatorname{tg} z$ в точке $z_0 = 0$.

Решение. Искомое разложение должно иметь вид $\operatorname{tg} z = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots$.

В данном примере вычисления можно сократить, если учесть, что $\operatorname{tg} z$ — нечетная функция, а значит, ряд должен содержать только нечетные степени z

$$\operatorname{tg} z = c_1 z + c_3 z^3 + c_5 z^5 + \dots$$

Отсюда

$$\sin z = (c_1 z + c_3 z^3 + c_5 z^5 + \dots) \cos z.$$

Подставим в это равенство ряды для синуса и косинуса

$$z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots = (c_1 z + c_3 z^3 + c_5 z^5 + \dots) \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots \right).$$

Перемножим ряды справа почленно и приведем подобные члены

$$z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots = c_1 z + \left(c_3 - \frac{c_1}{2!} \right) z^3 + \left(\frac{c_1}{4!} - \frac{c_3}{2!} + c_5 \right) z^5 + \dots$$

Два ряда тождественно равны, если равны коэффициенты при одинаковых степенях z . Получаем систему уравнений для коэффициентов c_1, c_3, c_5 :

$$\begin{cases} 1 = c_1, \\ -\frac{1}{3!} = c_3 - \frac{c_1}{2!}, \\ \frac{1}{5!} = \frac{c_1}{4!} - \frac{c_3}{2!} + c_5. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1, \\ 6c_3 - 3c_1 = -1, \\ 5c_1 - 60c_3 + 120c_5 = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1, \\ c_3 = 1/3, \\ c_5 = 2/15. \end{cases}$$

Следовательно,

$$w = \operatorname{tg} z = z + \frac{z^3}{3} + \frac{2z^5}{15} + \dots$$

Радиус сходимости этого ряда равен расстоянию от точки $z = 0$ до ближайшей особой точки $z = \frac{\pi}{2}$ тангенса, т.е. $R = \frac{\pi}{2}$.

6) Если нужно разложить функцию $f(z)$ по степеням $z - z_0$, где $z_0 \neq 0$, то проще всего сделать замену $z - z_0 = \zeta$ и разложить функцию $f(z) = f(z_0 + \zeta) = g(\zeta)$ по степеням ζ . Из полученного разложения, заменив $\zeta = z - z_0$, получим требуемый ряд Тейлора.

Пример 1.34 Функцию $f(z) = \frac{1}{z-3}$ разложить по степеням $z - 1$.

Решение. Обозначим $z - 1 = \zeta$. Тогда $z = 1 + \zeta$ и $f(z) = \frac{1}{(1 + \zeta) - 3} = \frac{1}{\zeta - 2}$. Расстояние от точки $z_0 = 1$ до особой точки $z = 3$ функции $f(z)$ равно 2. Поэтому в круге $|z - 1| < 2$ имеем $\left| \frac{z-1}{2} \right| = \left| \frac{\zeta}{2} \right| < 1$. Используя бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, будем иметь

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{\zeta - 2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta}{2}} = \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta}{2} \right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^n}{2^{n+1}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

1.9.4. Ряды Лорана

Рядами Тейлора представляются функции, аналитические в круговых областях $|z - z_0| < R$. Но часто приходится рассматривать функции, которые аналитичны в круге, за исключением центра $z = z_0$, т.е. аналитические в кольцах $|z - z_0| < R$. Например, функция $w = \frac{\sin z}{z(z-1)}$ является аналитической во всех точках каждого из трех колец $K_1 : |z| < 1$; $K_2 : |z - 1| < 1$; $K_3 : 1 < |z| < \infty$.

Оказывается, что такие функции представляются двусторонними степенными рядами, содержащими как целые положительные, так и целые отрицательные степени $(z - z_0)^n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} = \quad (1.49)$$

$$= \dots + \frac{c_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots$$

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ — обычный степенной ряд, сходящийся в некотором круге $|z - z_0| < R$. Во втором ряде сделаем замену $\frac{1}{z - z_0} = \zeta$ и получим $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \zeta^n$. Этот ряд сходится в некотором круге $|\zeta| < R_1$ или $|z - z_0| > \frac{1}{R_1} = r$. Итак, ряд по отрицательным степеням $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}$ сходится в кольце $r < |z - z_0| < \infty$. Если $r < R$, то общей областью сходимости двустороннего ряда (1.49) будет кольцо $r < |z - z_0| < R$.

Можно доказать, что в любой точке этого кольца сумма $f(z)$ ряда будет аналитической функцией и ряд можно почленно дифференцировать и интегрировать. При этом полученные ряды будут иметь то же кольцо сходимости.

Пусть $f(z)$ аналитична в кольце $r < |z - z_0| < R$ (рис.1.17). Напомним, что мы не исключаем случаи $r = 0$ и $R = \infty$. Построим окружность $l : |z - z_0| = \rho$, где $r < \rho < R$.

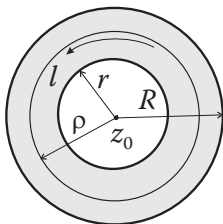


Рис. 1.17

Определение. Двусторонний степенной ряд (1.49) называется рядом Лорана функции $f(z)$ в точке z_0 , если его коэффициенты находятся по формулам

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_l \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.50)$$

Теорема 1.7 (единственности). Двусторонний степенной ряд является рядом Лорана своей суммы.

Доказательство. Пусть $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$. Умножим обе части этого равенства на $(z - z_0)^{-m-1}$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ и проинтегрируем

по указанной выше окружности l

$$\oint_l f(z)(z - z_0)^{-m-1} dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \oint_l (z - z_0)^{n-m-1} dz.$$

Используя основной интеграл (1.40), видим, что все интегралы в последней сумме справа равны нулю, кроме одного — соответствующего $n = m$. Значит,

$$\oint_l \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{m+1}} = c_m \cdot 2\pi i, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Отсюда получаем (1.50), и теорема доказана.

Из этой теоремы, совершенно так же, как и для рядов Тейлора, получаем, что ряд Лорана (по степеням z) четной функции содержит только четные степени z . У нечетной функции равны нулю все коэффициенты при четных степенях z .

Возникает вопрос: всякую ли функцию, аналитическую в некотором кольце $r < |z - z_0| < R$, можно разложить в этом кольце в ряд Лорана по степеням $(z - z_0)$?

Теорема Лорана. Всякая функция, аналитическая в кольце $r < |z - z_0| < R$, может быть в этом кольце разложена в ряд Лорана.

Доказательство этой теоремы можно найти, например, в [1].

Кольцо $r < |z - z_0| < R$ максимальной ширины, внутри которого $f(z)$ разлагается в ряд Лорана, обладает тем свойством, что на каждой из окружностей $|z - z_0| = r$ и $|z - z_0| = R$ есть по крайней мере одна особая точка функции.

Покажем, что ряд Тейлора является частным случаем ряда Лорана. Пусть функция $f(z)$ аналитична в круге $|z - z_0| < R$ (т.е. она аналитична на окружности $|z - z_0| = r$ и *внутри нее*). Функции $\frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}$ при $n = -1, -2, \dots$ будут аналитическими в этом круге и по теореме Коши (1.2) все интегралы в формуле (1.50) равны нулю, лишь только $n = -1, -2, \dots$. Итак, все коэффициенты c_n с отрицательными индексами равны нулю в данном случае. Все коэффициенты ряда Лорана c_n с

неотрицательными индексами по интегральной формуле Коши (1.41) будут равны

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_l \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

т.е. являться коэффициентами ряда Тейлора.

Формулы (1.50) редко используют для нахождения коэффициентов разложения конкретных функций в ряд Лорана. Обычно разложение в ряд Лорана сводится к разложению в ряд Тейлора.

Рассмотрим несколько примеров разложения функций в ряд Лорана по степеням $z - z_0$ в кольце D (точка z_0 и кольцо D указаны в скобках).

Пример 1.35 $f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}, (z_0 = 0, D : 0 < |z| < \infty)$.

Решение. В тейлоровское разложение экспоненты $e^\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^n}{n!}$ подставим $\zeta = \frac{1}{z}$. Искомое разложение

$$f(z) = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^{n+2}} = z^2 + z + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!z} + \dots$$

Пример 1.36 $f(z) = \frac{\sin z}{z^3}, (z_0 = 0, D : 0 < |z| < \infty)$.

Решение. Разлагая $\sin z$ в ряд Тейлора в точке $z_0 = 0$ и деля на z^3 , получим

$$f(z) = \frac{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots}{z^3} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!} + \frac{z^2}{5!} - \frac{z^4}{7!} + \dots$$

Пример 1.37 $f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^2}, (z_0 = 0, D : 0 < |z| < \infty)$.

Решение. Используя разложение косинуса в ряд Тейлора, получаем

$$f(z) = \frac{1 - \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots\right)}{z^2} = \frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} + \dots$$

Заметим, что последний ряд не содержит отрицательных степеней и внешне выглядит как ряд Тейлора, но он не является рядом Тейлора функции $f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^2}$, так как она не определена (а значит, и не является аналитической) в точке z_0 и коэффициенты разложения не могут быть найдены по формуле (1.47).

Пример 1.38 $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$, ($z_0 = 0$, $D : 0 < |z| < 1$).

Решение. Данная функция имеет две особые точки $z_0 = 0$ и $z_1 = 1$. Обе эти точки лежат на границе кольца D . Используя бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, имеем для всех точек кольца D

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z} (1 + z + z^2 + \dots) = \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + \dots$$

Пример 1.39 $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$, ($z_0 = 0$, $D : 1 < |z| < \infty$).

Решение. В данном кольце функция аналитична. Так как в этом кольце $|z| > 1$, то $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|} < 1$ и, как и в предыдущем примере, имеем

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{z} - 1} = -\frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \\ &= -\frac{1}{z^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots \right) = -\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^4} - \dots \end{aligned}$$

Пример 1.40 $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-2)}$, ($z_0 = 0$, $D : 1 < |z| < 2$).

Решение. Разложим функцию на элементарные дроби

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-2)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{(z+1) - (z-2)}{(z+1)(z-2)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{z-2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{z+1}.$$

При использовании формулы суммы бесконечно убывающей прогрессии $\sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n = \frac{1}{1-\zeta}$ нужно, чтобы, во-первых, $|\zeta| < 1$ и, во-вторых,

чтобы функция имела именно такой вид $\frac{1}{1-\zeta}$. Для первой элементарной дроби $\frac{1}{z-2}$ такой вид можем получить либо вынося из знаменателя -2, либо z : $\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}}$ или $\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{z}}$. Но второй вариант для данного в условии кольца не подходит, так как если $|z| < 2$, то $\left|\frac{2}{z}\right| > 1$. В то же время $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$.

Итак,

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}.$$

Аналогично для второй элементарной дроби имеем

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{n+1}}.$$

В итоге получаем

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-2)} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{n+1}} - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}.$$

Если разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в кольце $0 < |z - z_0| < R$ по степеням $z - z_0$ имеет вид

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n},$$

то часть этого ряда, содержащая отрицательные степени $z - z_0$ называется *главной частью* ряда Лорана. Члены ряда Лорана с положительными степенями образуют *правильную часть* этого ряда в окрестности точки z_0 .

Итак,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \text{ — правильная часть,}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} — \text{главная часть ряда Лорана.}$$

Из приведенных примеров видно, что как в правильной, так и в главной частях ряда Лорана может содержаться любое количество слагаемых (конечное или бесконечное), либо вообще одна из этих частей может отсутствовать.

В понятиях правильной и главной частей внутренний радиус кольца равен нулю: $0 < |z - z_0| < R$. В последних двух примерах части по положительным и отрицательным степеням z не являются правильной и главной частями полученных рядов, так как разложения в ряд производятся не в окрестности точки $z_0 = 0$.

§ 1.10. Изолированные особые точки

1.10.1. Нули аналитической функции

Определение. Нулем функции $f(z)$ называется точка $z = a$, в которой функция равна нулю: $f(z) = 0$.

Если в точке $z = a$ функция $f(z)$ аналитична и

$$f(a) = f'(a) = \dots = f^{(m-1)}(a) = 0, f^{(m)}(a) \neq 0, \quad (1.51)$$

т.е. первая отличная от нуля производная имеет порядок m , то число m называется *порядком* или *кратностью* нуля. Если $m = 1$, то нуль называется *простым*.

Пример 1.41 Найти нули функции $f(z) = z^2 \sin z$ и определить их порядки.

Решение. Решая уравнение $f(z) = 0$, найдем нули функции $z_0 = 0$ и $z_n = \pi n$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$. Так как $f'(z) = 2z \sin z + z^2 \cos z$ и $f'(\pi n) \neq 0$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$, то эти точки являются простыми нулями.

$$f'(0) = 0.$$

$$f''(0) = 2 \sin z + 4z \cos z - z^2 \sin z|_{z=0} = 0$$

$$f'''(0) = 6 \cos z - 6z \sin z - z^2 \cos z|_{z=0} = 6 \neq 0.$$

Следовательно, точка $z_0 = 0$ является нулем третьего порядка.

Из (1.51) и (1.47) следует, что разложение функции $f(z)$ в ряд Тейлора в окрестности нуля порядка m имеет вид

$$f(z) = c_m(z-a)^m + c_{m+1}(z-a)^{m+1} + \dots, \quad (c_m \neq 0). \quad (1.52)$$

Теорема 1.8 Для того чтобы точка $z = a$ была нулем кратности m аналитической функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы эта функция имела вид

$$f(z) = (z-a)^m \varphi(z), \quad (1.53)$$

где $\varphi(z)$ — аналитична в точке $z = a$ и $\varphi(a) \neq 0$.

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть $z = a$ нуль кратности m функции $f(z)$. Из формулы (1.52) имеем

$$f(z) = (z-a)^m [c_m + c_{m+1}(z-a) + \dots].$$

Функция $\varphi(z) = c_m + c_{m+1}(z-a) + \dots$, являясь суммой степенного ряда, будет аналитической функцией в точке $z = a$ и $\varphi(a) = c_m = f^{(m)}(a) \neq 0$. Значит, $f(z) = (z-a)^m \varphi(z)$.

Докажем достаточность. Пусть выполняется равенство (1.52). Разлагая аналитическую функцию $\varphi(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z = a$, получаем

$$\begin{aligned} f(z) &= (z-a)^m \left[a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \dots \right] = \\ &= a_0(z-a)^m + a_1(z-a)^{m+1} + a_2(z-a)^{m+2} + \dots \end{aligned}$$

Ясно, что функция $f(z)$ и ее первые $m-1$ производная равны нулю в точке $z = a$, а $f^{(m)}(a) = m! \varphi(a) \neq 0$. Следовательно, точка $z = a$ является нулем кратности m функции $f(z)$. Теорема доказана.

Следствие. Нули аналитической функции изолированы. Это означает, что если $f(a) = 0$, то найдется такая окрестность точки a , в которой нет других нулей этой функции. В самом деле, так как если $\varphi(z)$ — аналитична в точке $z = a$ и $\varphi(a) \neq 0$, то в некоторой окрестности этой точки $\varphi(z) \neq 0$ и из формулы (1.53) получаем, что $f(z)$ не имеет других нулей, кроме z_0 , в этой окрестности.

Пример 1.42 Найти нули функции $f(z) = \frac{(1+z^2)^2}{1-z^2}$ и определить их порядки.

Решение. $f(z) = 0$, если $(1+z^2)^2 = 0$, т.е. $z = \pm i$. Записав функцию в виде $f(z) = (z+i)^2(z-i)^2 \cdot \frac{1}{1-z^2}$, по формуле (1.53) получаем, что эти точки являются нулями второго порядка.

Из теоремы следует, что если точка $z = a$ является нулем кратности m_i функции $f_i(z)$ ($i = 1, 2, \dots, k$), то для функции $f(z) = f_1(z) \cdot f_2(z) \cdots f_k(z)$ она будет нулем порядка $m = m_1 + m_2 + \dots + m_k$. Это позволяет избежать нахождения отличной от нуля производной функции $f(z)$.

Пример 1.43 Точка $z = 0$ является нулем функции $f(z) = z^3 \sin^2 z$. Очевидно, для функций $f_i(z) = z$, ($i = 1, 2, 3$) и для $f_i(z) = \sin z$ ($i = 4, 5$) она будет простым нулем. Значит, для функции $f(z)$ точка $z = 0$ является нулем пятого порядка.

1.10.2. Изолированные особые точки аналитической функции

Точки, в которых однозначная функция является аналитической, называются *правильными*. Если функция $f(z)$ является аналитической в некоторой окрестности точки z_0 , за исключением самой этой точки, то такая точка называется *особой* точкой данной функции.

На практике особыми точками аналитической функции будут те

точки, в которых функция не определена. Например, у функции

$$f(z) = \frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$$

особыми будут точки $z_0 = 0$ и те точки, в которых синус равен нулю: $\frac{1}{z_n} = \pi n$, т.е. $z_n = \frac{1}{\pi n}$, ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$).

Изучим поведение аналитических функций в окрестности особых точек простейшего вида — *изолированных особых точек*. Точка z_0 называется изолированной особой точкой аналитической функции $f(z)$, если существует такая окрестность этой точки, в которой нет других особых точек, кроме z_0 .

В рассмотренном примере точки $z_n = \frac{1}{\pi n}$ будут изолированными особыми точками. Особая точка $z_0 = 0$ не будет изолированной, так как в любой ее окрестности $|z| < R$, какой бы малой она ни была, есть другие особые точки.

Подчеркнем, что речь идет об особых точках, в окрестности которых функция однозначна.

Пусть $z = z_0$ — изолированная особая точка функции $f(z)$. Тогда существует некоторое кольцо $0 < |z - z_0| < R$, в котором функция аналитична и, значит, ее можно разложить в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}. \quad (1.54)$$

Возможны три случая.

1) Ряд Лорана (1.54) не содержит главной части, т.е. имеет вид

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n. \quad (1.55)$$

Этот ряд является степенным рядом, и его сумма является аналитической функцией в круге $|z - z_0| < R$, включая и его центр z_0 . Во всех точках этого круга, кроме точки $z = z_0$, ряд (1.55) сходится к $f(z)$, а в

точке $z = z_0$ его сумма равна c_0 . В этом случае точка $z = z_0$ называется *устранимой особой точкой* функции $f(z)$. Если принять, что $f(z_0) = c_0$, то разложение станет справедливо во всем круге $|z - z_0| < R$, включая и его центр, и будет являться рядом Тейлора для функции $f(z)$. Следовательно, функция $f(z)$, доопределенная равенством $f(z_0) = c_0$, станет аналитической в окрестности точки $z = z_0$.

Из равенства (1.55), очевидно, следует, что $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ существует, конечен и равен c_0 . Если z_0 особая точка и предел $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ существует и конечен, то z_0 — *устраняемая особая точка*.

Пример 1.44 $f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^2}$, $z_0 = 0$ — *единственная особая точка*. В кольце $0 < |z| < \infty$ ряд Лорана имеет вид (пример 1.37)

$$\frac{1 - \cos z}{z^2} = \frac{1}{2} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - \dots$$

Ряд не содержит отрицательных степеней z , значит точка $z_0 = 0$ — *устраняемая особая точка*. Если доопределить функцию в нуле равенством $f(0) = 1/2$, то функция

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1 - \cos z}{z^2}, & z \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & z = 0, \end{cases}$$

будет аналитической на всей плоскости.

Пример 1.45 $f(z) = \frac{1 - z^2}{1 + z}$, $z_0 = -1$ — *единственная особая точка*. Преобразованием $f(z) = \frac{(1 - z)(1 + z)}{1 + z} = 1 - z$ устраним особенность.

2) Ряд Лорана (1.54) содержит в своей главной части бесконечное множество членов. В этом случае точка $z = z_0$ называется *существенно особой точкой*.

Пример 1.46 $f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}$.

В точке $z_0 = 0$ функция не определена и аналитична во всех остальных точках комплексной плоскости. Разложение в ряд Лорана имеет вид (пример (1.35))

$$z^2 e^{\frac{1}{z}} = z^2 + z + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!z} + \frac{1}{4!z^2} + \dots$$

Так как в этом разложении бесконечное количество отрицательных степеней, то $z_0 = 0$ — существенно особая точка.

Можно показать, что если $z = z_0$ — существенно особая точка функции $f(z)$, то $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ не существует. Более того, справедлива теорема:

Теорема Сохоцкого. Если $z = z_0$ — существенно особая точка функции $f(z)$, то для любого числа A (конечного или бесконечного) существует такая последовательность $\{z_n\}$, сходящаяся к $z = z_0$, для которой

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = A.$$

Теорему оставим без доказательства, но рассмотрим пример

Пример 1.47 $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$, $z_0 = 0$.

Ряд Лорана имеет вид $e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!z^n}$.

В главной части бесконечное множество членов, значит, точка $z = 0$ — существенно особая точка. Покажем справедливость теоремы Сохоцкого. Пусть $A = re^{i\varphi}$ — произвольное комплексное число.

Из уравнения $e^{\frac{1}{z}} = A$ находим: при $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\frac{1}{z} = \operatorname{Ln} z = \ln |A| + i \arg A + 2\pi i = \ln r + i\varphi + 2\pi i.$$

Полагая $n = 1, 2, \dots$, получаем последовательность точек

$$z_n = \frac{1}{\ln r + i\varphi + 2\pi i} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Во всех точках этой последовательности $f(z_n) = e^{\frac{1}{z_n}} = A$, следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = A$.

Можно доказать и обратное: если $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ не существует, то z_0 — существенно особая точка функции $f(z)$. Поэтому для доказательства того, что изолированная особая точка z_0 является существенно особой точкой, иногда проще не разлагать функцию в ряд Лорана, а убедиться в том, что $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ будет разным при двух способах приближения z к z_0 .

Пример 1.48 $f(z) = e^{\operatorname{tg} z}$, $z_0 = \frac{\pi}{2}$.

В точке $z_0 = \frac{\pi}{2}$ тангенс не определен, а рядом с ней функция аналитична, следовательно, это особая точка.

Пусть $z = x$ — действительно. Если $x \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0$ (т.е. x приближается к $\frac{\pi}{2}$ слева), то $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0} \operatorname{tg} x = +\infty$ (вспомните график тангенса).

Отсюда $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0} e^{\operatorname{tg} x} = +\infty$.

Если приближаться к точке $\frac{\pi}{2}$ вдоль действительной положительной полуоси, то

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + 0} \operatorname{tg} x = -\infty$ и $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + 0} e^{\operatorname{tg} x} = 0$. Значит, $z = 0$ — существенно

особая точка.

3) В главной части ряда Лорана (1.54) конечное число членов

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \frac{c_{-2}}{(z - z_0)^2} + \dots + \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m}, \quad (1.56)$$

где $c_{-m} \neq 0$. В этом случае точка z_0 называется *полюсом m -го порядка* или *полюсом кратности m* . Если $m = 1$, то полюс называется *простым*. Разложение в простом полюсе имеет вид

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + \dots \quad (1.57)$$

Покажем, что если $z = z_0$ — полюс, то $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$.

Из равенства (1.56) имеем $(z - z_0)^m f(z) = c_{-m} + c_{-m+1}(z - z_0) + \dots + c_{-1}(z - z_0)^{m-1} + c_0(z - z_0)^m + c_1(z - z_0)^{m+1} + \dots$

Так как $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z) = c_{-m} \neq 0$, и $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m = 0$, то отсюда получаем $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$.

Справедливо и обратное: если $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$, то точка z_0 — существенно особая точка функции $f(z)$.

Пример 1.49 $f(z) = \frac{\sin z}{z^3}$, $z_0 = 0$.

Разложение в ряд Лорана имеет вид (пример (1.36))

$$\frac{\sin z}{z^3} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!} + \frac{z^2}{5!} - \frac{z^4}{7!} + \dots$$

Следовательно, в точке $z_0 = 0$ полюс второго порядка.

Пример 1.50 $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$, $z_0 = 0$.

Лорановское разложение в точке $z_0 = 0$ имеет вид (пример (1.38))

$$\frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + \dots$$

Следовательно, в точке $z_0 = 0$ простой полюс.

Итак, характер особой точки z_0 определяется количеством слагаемых в главной части ряда Лорана в кольце $0 < |z - z_0| < R$. Если этот ряд не содержит отрицательных степеней, то точка z_0 — устранимая особая точка. Если в ряде Лорана конечное число отрицательных степеней, то эта точка является полюсом. И, наконец, если в ряде Лорана бесконечное число отрицательных степеней, то эта точка является существенно особой точкой.

Эквивалентной характеристикой изолированной особой точки является поведение функции в окрестности этой точки: точка z_0 — устранимая особая точка, полюс или существенно особая точка тогда и только тогда, когда предел $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ соответственно существует и конечен, бесконечен или этот предел вообще не существует.

1.10.3. Связь нулей с полюсами

Полюсы — наиболее часто встречающийся в приложениях тип особых точек. Существует тесная связь между нулями и полюсами аналитической функции.

Теорема 1.9 *Для того чтобы точка $z = z_0$ была полюсом m -го порядка функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы она была нулем m -го порядка функции $g(z) = \frac{1}{f(z)}$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть z_0 — полюс m -го порядка функции $f(z)$. Тогда лорановское разложение в окрестности точки z_0 будет иметь вид (1.52). Отсюда

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^m} \left(c_{-m} + c_{-m+1}(z - z_0) + \dots \right. \\ \left. \dots + c_{-1}(z - z_0)^{m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^{n+m} \right) = \frac{\psi(z)}{(z - z_0)^m}.$$

Функция $\psi(z)$, являясь суммой степенного ряда, будет аналитической в точке z_0 и $\psi(z_0) = c_{-m} \neq 0$. Но тогда функция $\varphi(z) = \frac{1}{\psi(z)}$ также аналитична в точке z_0 и $\varphi(z_0) = \frac{1}{c_{-m}} \neq 0$. Следовательно,

$$g(z) = \frac{1}{f(z)} = \frac{(z - z_0)^m}{\psi(z)} = (z - z_0)^m \varphi(z).$$

По теореме (1.8) это означает, что для функции $g(z)$ точка z_0 является нулем m -го порядка. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $g(z)$ имеет в точке z_0 нуль m -го порядка. По теореме (1.8) эту функцию можно представить в виде $g(z) = (z - z_0)^m \varphi(z)$, где $\varphi(z_0) \neq 0$ и аналитична в точке z_0 . Но тогда и $\psi(z) = \frac{1}{\varphi(z)}$ аналитична в этой точке, причем $\psi(z_0) \neq 0$. Пусть разложение функции $\psi(z)$ в ряд Тейлора имеет вид $\psi(z) = b_0 + b_1(z - z_0) +$

$+b_2(z-z_0)^2 + \dots$ Следовательно,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{(z-z_0)^m \varphi(z)} = \frac{\psi(z)}{(z-z_0)^m} = \\ &= \frac{b_0 + b_1(z-z_0) + b_2(z-z_0)^2 + \dots}{(z-z_0)^m} = \frac{b_0}{(z-z_0)^m} + \frac{b_1}{(z-z_0)^{m-1}} + \dots \end{aligned}$$

Отсюда, по определению полюсов m -го порядка, и получаем требуемое. Теорема доказана.

Следствие 1. Если $f(z) = \frac{\psi(z)}{\varphi(z)}$ и $\psi(z_0) \neq 0, \varphi(z_0) = \varphi'(z_0) = \dots = \varphi^{(m-1)}(z_0) = 0, \varphi^{(m)}(z_0) \neq 0$, то точка z_0 — полюс m -го порядка.

Следствие 2. Если $f(z) = \frac{\psi(z)}{\varphi(z)}$ и $\psi(z_0) \neq 0, \varphi(z_0) = 0, \varphi'(z_0) \neq 0$, то точка z_0 — простой полюс функции $f(z)$.

Следствие 3. Пусть $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ и точка z_0 является для числителя $g(z)$ нулем m -го порядка и нулем n -го порядка для знаменателя $h(z)$. Тогда эта точка z_0 для функции $f(z)$, будет являться:

- 1) устранимой особой точкой, если $n \leq m$;
- 2) полюсом порядка $n - m$, если $n > m$.

В самом деле, по теореме (1.8) $g(z) = (z - z_0)^m \varphi_1(z)$ и $h(z) = (z - z_0)^n \varphi_2(z)$, где $\varphi_1(z_0) \neq 0$ и $\varphi_2(z_0) \neq 0$. Значит,

$$f(z) = (z - z_0)^{m-n} \frac{\varphi_1(z)}{\varphi_2(z)}.$$

Отсюда по теоремам 1.8 и 1.9 получаем требуемое.

Пример 1.51 Найти особые точки функции $f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$ и определить их характер.

Решение. Особыми точками являются нули знаменателя

$$e^z = 1 \Rightarrow z = \operatorname{Ln} 1 = 2\pi i, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Так как $(e^z - 1)'|_{z=2\pi i} = e^{2\pi i} = 1 \neq 0$, то все нули знаменателя — простые.

Точка $z = 0$ также является простым нулем числителя. По следствию 3 точка $z = 0$ — устранимая особая точка. В остальных особых точках $z = 2\pi i, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$ — простые полюсы.

Пример 1.52 Найти особые точки функции $f(z) = z \operatorname{ctg}^3 z$ и определить их характер.

Решение. Так как $f(z) = \frac{z \cos^3 z}{\sin^3 z}$, то, очевидно, точка $z = 0$ является нулем первого порядка для числителя и нулем третьего порядка для знаменателя. По следствию 3 точка $z = 0$ — полюс второго порядка. В остальных нулях знаменателя $z = \pi$ — полюсы третьего порядка.

1.10.4. Вычеты

Пусть функция $f(z)$ аналитична в точке z_0 или точка z_0 — изолированная особая точка. Если $0 < |z - z_0| < R$ — кольцо аналитичности функции $f(z)$, то, в общем случае, разложение в ряд Лорана имеет вид

$$f(z) = \dots + \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \dots + \frac{c_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + \dots \quad (1.58)$$

Если z_0 — точка аналитичности или устранимая особая точка функции, то, конечно, все коэффициенты c_{-k} равны нулю.

Пусть $l : |z - z_0| = r$, где $0 < r < R$, окружность с центром в точке z_0 , лежащая в кольце сходимости и пробегаемая в положительном направлении (т. е. против часовой стрелки).

Интегрируя обе части равенства (1.58) по этой окружности и используя формулу (1.40), получим

$$\oint_l f(z) dz = 2\pi i \cdot c_{-1}.$$

Это равенство показывает, что при вычислении интеграла $\oint_l f(z) dz$ из всех коэффициентов ряда Лорана особую роль играет коэффициент c_{-1} при $\frac{1}{z - z_0}$.

Определение. Вычетом функции $f(z)$ в точке z_0 называется коэффициент c_{-1} при $\frac{1}{z - z_0}$ в разложении (1.58) функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0 .

Будем обозначать вычет $\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \operatorname{res} f(z_0)$. Итак,

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1}.$$

Если z_0 — точка аналитичности или *устраняемая особая точка функции*, то вычет в ней, очевидно, равен нулю.

Из формулы (1.50) при $n = -1$ имеем

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_l f(z) dz, \quad (1.59)$$

где l — граница достаточно малой окрестности точки z_0 , которая обходится против часовой стрелки.

Нахождение вычета не является самоцелью, поэтому формула (1.59) обычно для его нахождения не используется. Более того, если вычет в точке z_0 известен, то из (1.59) имеем

$$\oint_l f(z) dz = 2\pi i \cdot \operatorname{res}_{z=z_0} f(z). \quad (1.60)$$

Эта формула (и ее обобщения) позволяет свести вычисление интегралов к нахождению вычетов подынтегральной функции.

Вычет в существенно особой точке находится ее разложением в ряд Лорана. При этом нет необходимости находить полное разложение, а достаточно ограничиться нахождением коэффициента c_{-1} этого ряда.

Пример 1.53 Найти вычет функции $f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}$ в точке $z_0 = 0$.

Решение. Используя пример (1.46), имеем

$$\operatorname{res}_{z=0} z^2 e^{\frac{1}{z}} = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}.$$

Пример 1.54 Вычислить

$$\oint_{|z|=1} z^2 e^{\frac{1}{z}} dz.$$

Решение. Так как $z_0 = 0$ — единственная особая точка подынтегральной функции, то, по формуле (1.60), используя предыдущий пример, будем иметь

$$\oint_{|z|=1} z^2 e^{\frac{1}{z}} dz = 2\pi i \cdot \operatorname{res}_{z=0} z^2 e^{\frac{1}{z}} = \frac{\pi i}{3}.$$

Для нахождения вычетов в полюсах нет необходимости разлагать функцию в ряд Лорана. Получим формулы для нахождения вычетов в полюсах.

1) Пусть $f(z)$ имеет в точке z_0 простой полюс (полюс первого порядка). В этом случае разложение в ряд Лорана имеет вид (1.57). Отсюда, умножая обе части на $z - z_0$, имеем $c_{-1} = (z - z_0)f(z) - c_0(z - z_0) - c_1(z - z_0)^2 - \dots$. Переходя к пределу при $z \rightarrow z_0$, получаем формулу для нахождения вычета в простом полюсе

$$\operatorname{res}_{z=z_0} (z - z_0)f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)f(z)]. \quad (1.61)$$

Пример 1.55 Найти $\operatorname{res}_{z=z_0} \frac{1}{z + z^2}$.

Решение. Так как $(z + z^2)'|_{z=0} = 1 + 2z|_{z=0} = 1 \neq 0$, то в точке $z = 0$ простой полюс. По формуле (1.61) имеем

$$\operatorname{res}_{z=0} \frac{1}{z + z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} z \cdot \frac{1}{z + z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{1 + z} = 1.$$

2) Пусть $f(z)$ представима в виде $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, причем $\varphi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) = 0$, $\psi'(z_0) \neq 0$. По следствию 2 теоремы (1.9) в этой

точке будет простой полюс. По формуле (1.61) имеем

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z) - \psi(z_0)}{(z - z_0)}},$$

так как $\psi(z_0) = 0$. Но $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\psi(z) - \psi(z_0)}{(z - z_0)} = \psi'(z_0)$.

Значит,

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \quad (1.62)$$

Пример 1.56 Найти сумму вычетов функции $f(z) = \frac{1}{z^4 - 1}$ во всех особых точках.

Решение. Особые точки $z_{1,2} = \pm 1, z_{3,4} = \pm i$ — простые полюсы. По формуле (1.62) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 \operatorname{res}_{z=z_i} f(z_i) &= \frac{1}{4z_1^3} + \frac{1}{4z_2^3} + \frac{1}{4z_3^3} + \frac{1}{4z_4^3} = \frac{z_1}{4z_1^4} + \frac{z_2}{4z_2^4} + \frac{z_3}{4z_3^4} + \frac{z_4}{4z_4^4} = \\ &= \frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_4}{4} = 0. \end{aligned}$$

3) Пусть функция $f(z)$ имеет в точке $z = z_0$ полюс кратности m . Тогда ее ряд Лорана в окрестности данной точки имеет вид

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z - z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{c_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + \dots$$

Умножим это равенство на $(z - z_0)^k$, где $k \geq m$

$$\begin{aligned} (z - z_0)^k f(z) &= c_{-m}(z - z_0)^{k-m} + c_{-m+1}(z - z_0)^{k-m+1} + \dots \\ &+ c_{-2}(z - z_0)^{k-2} + c_{-1}(z - z_0)^{k-1} + c_0(z - z_0)^k + c_1(z - z_0)^{k+1} + \dots \end{aligned}$$

Продифференцируем обе части этого равенства $k - 1$ раз

$$\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[(z - z_0)^k f(z) \right] =$$

$$=(k-1)!c_{-1} + c_0 k!(z-z_0) + c_1(k+1)k(k-1)\dots 3(z-z_0)^2 + \dots$$

(слагаемые с $c_{-m}, c_{-m+1}, \dots, c_{-2}$ при дифференцировании исчезнут). Отсюда, переходя к пределу при $z \rightarrow z_0$, будем иметь

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1} = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[(z-z_0)^k f(z) \right]. \quad (1.63)$$

Напомним, что в этой формуле k больше либо равно кратности полюса.

Пример 1.57 Найти $\operatorname{res}_{z=0} \frac{\cos z}{z^3}$.

Решение. $z_0 = 0$ — полюс третьего порядка. По формуле (1.63) при $k = 3$ имеем

$$\operatorname{res}_{z=0} \frac{\cos z}{z^3} = \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^2}{dz^2} \left[z^3 \cdot \frac{\cos z}{z^3} \right] = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} (-\cos z) = -\frac{1}{2}.$$

Пример 1.58 Найти $\operatorname{res}_{z=0} \frac{\sin z}{z^3}$.

Решение. $z_0 = 0$ — является нулем первого порядка числителя и нулем третьего порядка знаменателя. Значит, эта точка является полюсом второго порядка (т.е. $m = 2$). Если применить формулу (1.63) при $k = 2$, то придется брать производную от $\frac{\sin z}{z}$ и находить предел дроби, имеющей неопределенность типа $\frac{0}{0}$. Если же взять $k = 3$, то будем иметь

$$\operatorname{res}_{z=0} \frac{\sin z}{z^3} = \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^2}{dz^2} \left[z^3 \cdot \frac{\sin z}{z^3} \right] = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} (-\sin z) = 0.$$

Основное применение вычетов дает следующая теорема:

Основная теорема о вычетах. Если $f(z)$ аналитична в области D за исключением конечного числа особых точек $z_1, z_2, \dots, z_n$ и непрерывна на границе l этой области, то

$$\oint_l f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=z_k} f(z). \quad (1.64)$$

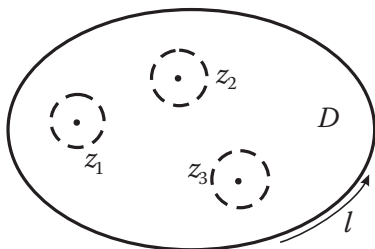


Рис. 1.18

Доказательство. Опишем около каждой точки z_k окружность $l_k : |z - z_k| = r_k$ настолько малого радиуса r_k , чтобы все эти окружности лежали внутри кривой l и не пересекались друг с другом (рис. 1.18).

По теореме Коши для много связной области (формула (1.38))

$$\oint_l f(z) dz = \sum_{k=1}^n \oint_{l_k} f(z) dz,$$

где все контуры обходятся в положительном направлении. Применяя к интегралам справа формулу (1.60), получаем требуемое.

Пример 1.59 Вычислить интеграл

$$I_k = \oint_{l_k} \frac{e^{\pi z} dz}{(z-2)^2 (z^2+4)},$$

где l_k — окружности $l_1 : |z| = 1$, $l_2 : |z - 2i| = 1$, $l_3 : |z - 2| = 1$ и $l_4 : |z| = 3$.

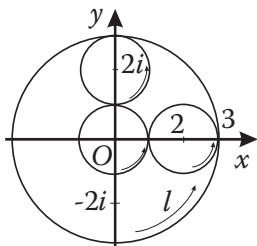


Рис. 1.19

Решение. Особые точки подынтегральной функции $z_1 = 2$ (полюс второго порядка) и $z_{2,3} = \pm 2i$ (простые полюсы) (рис. 1.19).

1) Внутри окружности l_1 нет ни одной особой точки. Следовательно, по теореме Коши для односвязной области (формула (1.35)) интеграл I_1 равен нулю.

2) В круге с границей l_2 — одна особая точка $z = 2i$. По формуле (1.61) будем иметь

$$\operatorname{res}_{z=2i} f(z) = \lim_{z \rightarrow 2i} (z - 2i) \frac{e^{\pi z}}{(z-2)^2 (z+2i)(z-2i)} = \frac{e^{2\pi i}}{(2i-2)^2 4i} = \frac{1}{32}.$$

По основной теореме о вычетах

$$I_2 = 2\pi i \cdot \operatorname{res}_{z=2i} f(z) = \frac{\pi i}{2}.$$

3) Внутри контура l_3 — полюс $z = 2$ простого порядка. По формуле (1.63) при $k = 2$ имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z=2} f(z) &= \lim_{z \rightarrow 2} \frac{d}{dz} \left[(z-2)^2 \frac{e^{\pi z}}{(z-2)^2 (z^2+4)} \right] = \lim_{z \rightarrow 2} \left[\frac{e^{\pi z}}{(z^2+4)} \right]' = \\ &= \lim_{z \rightarrow 2} \frac{\pi e^{\pi z} (z^2+4) - 2ze^{\pi z}}{(z^2+4)^2} = \frac{2\pi-1}{16} e^{2\pi}. \end{aligned}$$

По основной теореме о вычетах

$$I_3 = 2\pi i \cdot \operatorname{res}_{z=2} f(z) = \frac{\pi(2\pi-1)}{8} i e^{2\pi}.$$

4) Внутри окружности l_4 попадают все три особые точки. По основной теореме о вычетах

$$I_4 = 2\pi i \left(\operatorname{res}_{z=2} f(z) + \operatorname{res}_{z=2i} f(z) + \operatorname{res}_{z=-2i} f(z) \right).$$

Находим недостающий вычет

$$\operatorname{res}_{z=-2i} f(z) = \lim_{z \rightarrow -2i} (z+2i) \frac{e^{\pi z}}{(z-2)^2 (z+2i)(z-2i)} = \frac{e^{-2\pi i}}{(-2i-2)^2 (-4i)} = \frac{1}{32}.$$

Значит, интеграл по контуру $|z| = 3$ равен

$$I_4 = \frac{\pi^2(1-2\pi)}{4} e^{2\pi} + i \frac{\pi}{8}.$$

Заметим, что последний пример можно было бы решить, не привлекая вычеты, а лишь используя интегральную формулу Коши (1.41) и формулу Коши (1.42) для производных. На самом деле, вычеты дают

более общий метод вычисления интегралов от функций, содержащих особые точки внутри кривой интегрирования. Например, к интегралу

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{e^z}{\sin z} dz$$

формула Коши непосредственно не применима, а в то же время

$$I = 2\pi i \cdot \operatorname{res}_{z=0} \frac{e^z}{\sin z} = 2\pi i \cdot \left. \frac{e^z}{(\sin z)'} \right|_{z=0} = 2\pi i \cdot \left. \frac{e^z}{\cos z} \right|_{z=0} = 2\pi i.$$

§ 1.11. Поведение функции в окрестности бесконечно удаленной точки

Вся изложенная выше теория (нули, особые точки, ряды Лорана и т.д.) относилась к конечным точкам z_0 . Распространим эти понятия на бесконечно удаленную точку.

Пусть функция $f(z)$ аналитична в окрестности $|z| > R$ бесконечно удаленной точки $z = \infty$. Очевидно, эту окрестность можно рассматривать как кольцо с центром в начале координат, у которого внутренний радиус равен R и внешний радиус, равный бесконечности.

Для таких функций можно классифицировать точку $z = \infty$, как устранимую особую точку, полюс или существенно особую точку в зависимости от того, конечен, бесконечен или вообще не существует $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$. Но классификация особых точек, использующая ряд Лорана, изменится.

По теореме Лорана в кольце $|z| > R$ функция $f(z)$ должна разлагаться в ряд Лорана по целым степеням z .

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n. \quad (1.65)$$

Обратим внимание, что здесь мы в интересах дальнейшего c_0 отнесли к части ряда Лорана, содержащей отрицательные степени z . Возможны три случая.

1) Ряд Лорана (1.65) *не содержит положительных степеней z* , т.е. имеет вид (здесь и далее $c_0 = c_{-0}$)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n} = c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \dots$$

Очевидно, что в этом случае при $z \rightarrow \infty$ функция $f(z)$ стремится к конечному пределу c_0 . В этом случае говорят, что функция *аналитична в бесконечно удаленной точке* и при этом $f(\infty) = c_0$. Более того, если ряд Лорана имеет вид

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{z^m} + \frac{c_{-m-1}}{z^{m+1}} + \dots,$$

то $z = \infty$ называют нулем m -го порядка.

2) Ряд Лорана (1.65) *содержит конечное число положительных степеней z* , т.е. имеет вид

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n} + \sum_{n=1}^m c_n z^n = \\ &= c_m z^m + c_{m-1} z^{m-1} + \dots + c_1 z + c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \dots \end{aligned}$$

Ясно, что $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$. В этом случае бесконечно удаленная точка называется *полюсом m -го порядка* (при $m = 1$ — *простым полюсом*).

3) Ряд Лорана (1.65) *содержит бесконечное число положительных степеней z* . В этом случае бесконечно удаленная точка называется *существенно особой точкой*.

К этой же классификации типа особой точки $z = \infty$ можно подойти иначе. Положим $z = \frac{1}{\zeta}$ и $f(z) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \varphi(\zeta)$. Если функция $f(z)$ аналитична в окрестности $|z| > R$ бесконечно удаленной точки, то функция $\varphi(\zeta)$ будет аналитической в окрестности $|\zeta| < 1/R$ точки $\zeta = 0$. Ясно, что $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \varphi(\zeta)$, и по определению полагаем, что для функции $f(z)$ тип особой точки $z = \infty$ совпадает с типом особой точки $\zeta = 0$ для функции $\varphi(\zeta)$.

Отсюда, лорановское разложение функции $f(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки можно получить заменой $\zeta = \frac{1}{z}$ в лорановском разложении функции $\varphi(\zeta)$ в окрестности точки $\zeta = 0$. Ясно, что при этом главная часть заменится правильной и наоборот.

Пример 1.60 *Функция e^z аналитична на всей плоскости, поэтому разложение этой функции (1.16) годится и в окрестности бесконечно удаленной точки. Так как в этом разложении бесконечное число положительных степеней z , то точка $z = \infty$ — существенно особая точка. Очевидно, эта точка будет устранимой особой точкой функции $f(z) = e^{1/z}$ и если положить $f(\infty) = 0$, то она будет аналитической на всей расширенной комплексной плоскости $\overline{C}$. То же самое можно сказать о функциях $\sin z$ и $\cos z$.*

Пример 1.61 $f(z) = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m}$, ($a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$), причем можем считать дробь несократимой, т.е. корни числителя и знаменателя различны. Эта функция аналитична на всей комплексной плоскости, кроме точек, в которых знаменатель обращается в нуль, и эти точки будут полюсами данной функции. Поведение функции в бесконечно удаленной точке зависит от степеней многочленов, стоящих в числителе и знаменателе. Вынесем в числителе и знаменателе старшие степени z

$$f(z) = z^{n-m} \frac{a_0 + \frac{a_1}{z} + \dots + \frac{a_n}{z^n}}{b_0 + \frac{b_1}{z} + \dots + \frac{b_m}{z^m}} = z^{n-m} \varphi(z).$$

Так как $\varphi(z) \rightarrow \frac{a_0}{b_0}$ при $z \rightarrow \infty$, то отсюда имеем: если $n > m$, то $f(z)$ будет стремиться к бесконечности при $z \rightarrow \infty$, но $\frac{f(z)}{z^{n-m}}$ будет стремиться к конечному пределу $\frac{a_0}{b_0} \neq 0$, т.е. бесконечно удаленная точка будет полюсом кратности $n - m$. Если же $n \leq m$, то функция будет аналитической на бесконечности.

Введем вычет в бесконечно удаленной точке. Пусть $f(z)$ аналитична в некоторой окрестности $|z| > R$ точки $z = \infty$ и окружность $C : |z| =$

R — граница окрестности. Тогда ряд Лорана в этой окрестности имеет вид

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n.$$

Интегрируя этот ряд почленно по окружности C^- в *положительном направлении*¹ и используя (1.40), получим

$$\int_{C^-} f(z) dz = c_1(-2\pi i).$$

Определение. Вычетом функции $f(z)$ в бесконечно удаленной точке $z = \infty$ называется коэффициент c_{-1} при члене $\frac{1}{z}$ в разложении функции в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки, *взятый с обратным знаком*. Обозначение: $\text{res } f(\infty)$.

Таким образом,

$$\text{res } f(\infty) = -c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^-} f(z) dz. \quad (1.66)$$

Отметим, что слагаемое $\frac{c_{-1}}{z}$ входит в правильную часть ряда Лорана, поэтому вычет в бесконечно удаленной точке может быть отличен от нуля, даже если эта точка является точкой аналитичности функции.

Но если точка $z = \infty$ является нулем порядка выше первого, то, очевидно, вычет в ней равен нулю. Также он равен нулю, если функция $f(z)$ — четная относительно z .

Роль введенного понятия вычета $\text{res } f(\infty)$ показывает следующая теорема.

Теорема. Если функция $f(z)$ имеет на расширенной комплексной плоскости конечное число особых точек, то сумма всех ее вычетов,

¹Напомним, что положительным направлением обхода считается то, при котором область остается слева. В нашем случае окружность C^- , являющуюся границей окрестности бесконечно удаленной точки, нужно обходить по часовой стрелке.

включая и вычет в бесконечно удаленной точке, равна нулю.

$$\operatorname{res} f(\infty) + \sum_{k=1}^n \operatorname{res} f(z_k) = 0.$$

В самом деле, пусть $z_1, z_2, \dots, z_n$ — конечные особые точки функции $f(z)$, а C — окружность с центром в начале координат настолько большого радиуса, что все точки z_k лежат внутри ее.

По основной теореме о вычетах

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res} f(z_k),$$

где C обходится против часовой стрелки. Отсюда и из (1.66), учитывая, что $\int_C + \int_{C^-} = 0$, получаем требуемое.

Из этой теоремы получаем очевидное **следствие**: если функция $f(z)$ аналитична на расширенной комплексной плоскости за исключением конечного числа особых точек, *лежащих внутри контура l* , то

$$\int_l f(z) dz = -2\pi i \cdot \operatorname{res} f(\infty),$$

если контур l обходится в положительном направлении (против часовой стрелки).

Пример 1.62 *Вычислить*

$$\int_{|z|=2} \frac{z^9}{z^{10} - 1} dz.$$

Решение. Подынтегральная функция имеет десять особых точек — простых полюсов, являющихся нулями знаменателя и расположенных на единичной окружности. Непосредственное вычисление по основной теореме о вычетах, конечно, возможно, но громоздко. В то же

время вне контура интегрирования находится лишь одна особая точка $z = \infty$. Вычет в этой точке легко найти непосредственным разложением в ряд Лорана.

$$\frac{z^9}{z^{10}-1} = \frac{z^9}{z^{10}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{z^{10}}} = \frac{1}{z} \cdot (1 + z^{10} + z^{20} + \dots) = \frac{1}{z} + z^9 + z^{19} + \dots$$

Ясно, что $\operatorname{res} f(\infty) = -c_{-1} = -1$ и, следовательно, интеграл равен

$$\int_{|z|=2} \frac{z^9}{z^{10}-1} dz = -2\pi i \cdot \operatorname{res} f(\infty) = 2\pi i.$$

Глава 2

Операционное исчисление

При решении физических и технических задач постоянно возникает необходимость решения дифференциальных уравнений. Операционное исчисление дает простой метод решения некоторых линейных дифференциальных уравнений (и не только их).

Пусть требуется найти функцию $x(t)$, являющуюся решением некоторого дифференциального уравнения. Операционный метод сводится к следующему.

1. От искомой функции $x(t)$ переходят к функции — изображению $\bar{x}(p)$ комплексного аргумента p .

2. Над $\bar{x}(p)$ производят операции, определяемые данным уравнением и начальными условиями, и получают *операторное* уравнение относительно $\bar{x}(p)$.

3. По найденной из этого операторного уравнения функции $\bar{x}(p)$ получают функцию — оригинал $x(t)$. Она и будет искомым решением данного дифференциального уравнения, удовлетворяющим заданным начальным условиям.

§ 2.1. Оригиналы и изображения

Пусть $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$ — комплексная функция действительного аргумента t ($f_1(t)$ и $f_2(t)$ принимают действительные значе-

ния). Если $f_2(t) \equiv 0$, то $f(t)$ — действительная функция. Аргумент t для удобства будем интерпретировать как время.

Определение 1. Функция $f(t)$ называется *оригиналом*, если она удовлетворяет трем условиям:

1. $f(t) = 0$, если $t < 0$;
2. Существуют такие постоянные числа $M > 0$ и s , что для всех t выполнено неравенство

$$|f(t)| \leq Me^{st}; \quad (2.1)$$

3. $f(t)$ и ее производная $f'(t)$ на любом конечном промежутке оси t или непрерывны, или имеют конечное число точек разрыва 1 рода (скачков).

Пример 2.1 Простейшей функцией — оригиналом является функция Хевисайда (или единичная функция)

$$\eta(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < 0, \\ 1, & \text{если } t \geq 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Выполнение условий 1 и 3 определения 1 очевидно, но и (2.1) также выполняется $|\eta(t)| \leq 1 \cdot e^{0 \cdot t} = 1$.

Условия 3 определения оригинала достаточны для того, чтобы существовали появляющиеся в дальнейшем интегралы. Большинство практически встречающихся функций этому условию удовлетворяют.

Условие 2 означает, что если $f(t)$ и возрастает, то не быстрее некоторой экспоненты. Нижняя грань ¹ чисел s , для которых справедливо (2.1) называется *показателем роста* оригинала и обозначается s_0 . Очевидно, показатель роста функции Хевисайда $\eta(t)$ равен нулю. Покажем, что показатель роста функции $f(t) = t$ равен нулю. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольное число меньше единицы. Рассмотрим графики функций

¹Напомним, что число s_0 называется нижней гранью множества S , если выполняются два условия:

- 1) все числа этого множества больше, чем s_0 : $s > s_0$;
- 2) $\forall \varepsilon > 0 \exists s \in S$ такое, что $s < s_0 + \varepsilon$.

$y = e^{\varepsilon t}$ и $y = t/M$ ($M > 0$). Ясно, что при любом фиксированном $\varepsilon > 0$ при достаточно большом M график функции $y = e^{\varepsilon t}$ будет располагаться выше графика функции $y = t/M$. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое M (зависящее от ε), что неравенство $t < Me^{\varepsilon t}$ будет выполняться для всех $t > 0$. Число ε можно брать любым из интервала $(0,1)$, а нижняя грань точек этого интервала равна нулю. Значит, показатель роста оригинала $f(t) = t$ равен нулю. Аналогично, показатели роста оригиналов t^n , $n = 2, 3, \dots$ также равны нулю.

Условие 1 (его иногда называют условием *физической реализуемости*) оправдано тем, что для физических и технических задач наблюдения и измерения обычно начинаются в некоторый определенный момент времени, который всегда можно принять равным нулю: $t = 0$.

Если функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям 2 и 3, но не удовлетворяет условию 1, то функция

$$f(t) = \varphi(t) \cdot \eta(t) = \begin{cases} \varphi(t), & \text{если } t \geq 0, \\ 0, & \text{если } t < 0. \end{cases}$$

будет удовлетворять всем трем условиям определения 1. Множитель $\eta(t)$ обращает в нуль ("гасит") функцию при $t < 0$. Или, иначе говоря, он "включает сигнал" в момент времени $t = 0$. В дальнейшем мы будем предполагать, что все рассматриваемые оригиналы снабжены этим "гасящим" множителем $\eta(t)$, хотя этот множитель будем для краткости опускать. Так, например, будем писать $e^{\lambda t}$, $\sin \omega t$ и т.д., подразумевая при этом $\eta(t)e^{\lambda t}$, $\eta(t) \sin \omega t$ и т.д.

Не всякая функция может быть оригиналом.

Пример 2.2 Показать, что функции

$$a) f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \eta(t), \quad b) f(t) = \operatorname{tg} t \cdot \eta(t), \quad c) f(t) = e^{t^2} \eta(t)$$

не являются оригиналами.

Решение. а) Так как правый предел $\lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{1}{\sqrt{t}} \eta(t) = \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{1}{\sqrt{t}} = +\infty$, то не выполняется условие 3 и, следовательно, данная функция не является оригиналом. Легко заметить, что условие 2 также не выполняется.

б) Тангенс имеет бесконечное число бесконечных разрывов. Не выполняются условия 2 и 3 определения оригинала.

с) Условия 1 и 3, очевидно, выполняются. Допустим, что выполняется и условие 2: существуют такие числа $M > 0$ и s_0 , что для всех t выполняется неравенство $|e^{t^2} \eta(t)| \leq M e^{s_0 t}$. Отсюда $e^{t^2 - s_0 t} \leq M$ для всех $t > 0$. Но это невозможно, так как для любого s_0

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{t^2 - s_0 t} = \infty.$$

Таким образом, e^{t^2} растет быстрее любой экспоненты $e^{s_0 t}$, т.е. не является оригиналом.

Определение 2. Изображением функции $f(t)$ по Лапласу (далее просто *изображением*) называется функция $F(p)$ комплексного переменного $p = s + i\sigma$, определенная равенством

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt. \quad (2.3)$$

Тот факт, что функция $F(p)$ является изображением оригинала $f(t)$, будем записывать в виде $F(p) \doteq f(t)$ или $f(t) \doteq F(p)$, или $F(p) = \mathcal{L}[f(t)]$.

Формула (2.3) является интегральным преобразованием, ставящим в соответствие одной функции $f(t)$ другую функцию $F(p)$. Это интегральное преобразование называется *преобразованием Лапласа*. Заметим, что рассматриваемое в математическом анализе преобразование Фурье

$$\hat{f}(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

является частным случаем преобразования Лапласа (если взять в (2.3) $p = i\omega$).

Рассмотрим два примера нахождения изображения непосредственно по формуле (2.3).

Пример 2.3 *Изображение функции Хевисайда.*

$$\eta(t) \doteq \frac{1}{p}, \quad (\operatorname{Re} p > 0). \quad (2.4)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\eta(t)] &= \int_0^{\infty} \eta(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = \frac{1}{-p} e^{-pt} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{-p} \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-pt} + \\ &+ \frac{1}{p} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p} \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(s+i\sigma)t} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p} \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} \cdot e^{-i\sigma t} = \frac{1}{p},\end{aligned}$$

как только $s = \operatorname{Re} p > 0$, так как $e^{-st} \rightarrow 0$, а $e^{-i\sigma t}$ — ограничена: $|e^{-i\sigma t}| = 1$.

Пример 2.4

$$e^{\lambda t} \doteq \frac{1}{p - \lambda}, \quad (\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \lambda). \quad (2.5)$$

В самом деле,

$$\mathcal{L}[e^{\lambda t}] = \int_0^{\infty} e^{\lambda t} \cdot e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-(p-\lambda)t} dt = \frac{1}{p-\lambda} e^{-(p-\lambda)t} \Big|_0^{\infty}.$$

Пусть $p = s + i\sigma$ и $\lambda = \alpha + i\beta$. Тогда

$$\left| e^{-(p-\lambda)t} \right| = \left| e^{-(s-\alpha)t} \cdot e^{-i(\sigma-\beta)t} \right| = e^{-(s-\alpha)t} \rightarrow 0$$

при $t \rightarrow \infty$, если $\operatorname{Re} p = s > \alpha = \operatorname{Re} \lambda$. Отсюда получаем требуемое.

Возникают естественные вопросы: Для всякого ли оригинала существует изображение $F(p)$? Каковы свойства функции $F(p)$?

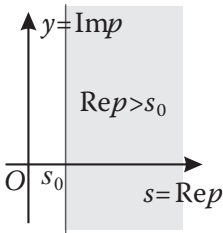


Рис. 2.1

Теорема 2.1 Для любого оригинала $f(t)$ его изображение $F(p)$ определено в полуплоскости $\operatorname{Re} p = s > s_0$, где s_0 — показатель роста оригинала $f(t)$ и является аналитической функцией в этой полуплоскости (рис.2.1).

Доказательство первой части теоремы просто. Так как

$$|f(t)| \leq M e^{s_0 t},$$

то при $s = \operatorname{Re} p > s_0$, имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt \right| &\leq \int_0^\infty |f(t) e^{-pt}| dt \leq M \int_0^\infty e^{s_0 t} \cdot |e^{-(s+i\sigma)t}| dt = \\ &= M \int_0^\infty e^{-(s-s_0)t} dt = -\frac{M}{s-s_0} e^{-(s-s_0)t} \Big|_0^\infty = \frac{M}{s-s_0}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Отсюда по признаку сравнения несобственных интегралов и вытекает сходимость интеграла (2.3), т.е. существование функции $F(p)$. Аналитичность функции $F(p)$ при $\operatorname{Re} p > s_0$ доказывается сложнее и мы его опустим.

Следствие. $\lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow +\infty} F(p) = 0$.

Это утверждение следует из (2.6) при $\operatorname{Re} p = s \rightarrow +\infty$.

Из теоремы (2.1) и ее следствия вытекает, что не всякая функция комплексного аргумента может быть изображением некоторого оригинала. Все особые точки функции $F(p)$ должны лежать левее некоторой вертикальной прямой на комплексной плоскости p . Поэтому, например, функция $F(p) = \operatorname{tg} p$ не может быть изображением, так как у нее бесконечное количество полюсов $p_n = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, распределенных по всей действительной оси. Функции $F(p) = p$ и $F(p) = \sqrt{p}$ не являются изображениями, так как они не стремятся к нулю при $\operatorname{Re} p \rightarrow +\infty$.

Заметим, что преобразование Лапласа может существовать для функций, не являющихся оригиналами. Например, функция $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ не является оригиналом, но для нее интеграл (2.1) сходится, т.е. изображение для этой функции существует. Иными словами, условия 1, 2, 3 определения 1 являются достаточными, но не необходимыми для существования изображения.

Сформулируем без доказательства *теорему единственности* оригинала: Если $F(p)$ является изображением двух оригиналов $f_1(t)$ и $f_2(t)$, то эти оригиналы совпадают во всех точках, в которых они непрерывны.

§ 2.2. Свойства преобразования Лапласа

В этом параграфе получим ряд теорем, составляющих суть операционного исчисления, а в примерах к этим теоремам будем получать таблицу оригиналов и изображений.

I. Свойство линейности

Если $f(t) \doteq F(p)$ и $g(t) \doteq G(p)$, то

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \doteq \alpha F(p) + \beta G(p)$$

Это свойство вытекает из формулы (2.3) и свойств линейности интеграла.

Пример 2.5

$$\sin \omega t \doteq \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}, \quad \cos \omega t \doteq \frac{p}{p^2 + \omega^2}. \quad (2.7)$$

Решение. Используя изображение (2.5) и свойство линейности, получим

$$\sin \omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \doteq \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{p - i\omega} - \frac{1}{p + i\omega} \right] = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

$$\cos \omega t = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \doteq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{p - i\omega} + \frac{1}{p + i\omega} \right] = \frac{p}{p^2 + \omega^2}.$$

Пример 2.6

$$\operatorname{sh} \omega t \doteq \frac{\omega}{p^2 - \omega^2}, \quad \operatorname{ch} \omega t \doteq \frac{p}{p^2 - \omega^2} \quad (2.8)$$

Решение

$$\operatorname{sh} \omega t = \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2} \doteq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{p - \omega} - \frac{1}{p + \omega} \right] = \frac{\omega}{p^2 - \omega^2},$$

$$\operatorname{ch} \omega t = \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2} \doteq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{p - \omega} + \frac{1}{p + \omega} \right] = \frac{p}{p^2 - \omega^2}.$$

II. Теорема подобия

Если $f(t) \doteq F(p)$, то для любого $\alpha > 0$

$$\boxed{f(\alpha t) \doteq \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)} \quad (2.9)$$

Доказательство

$$f(\alpha t) \doteq \int_0^\infty f(\alpha t) e^{-pt} dt = \left[\begin{array}{l} \alpha t = \tau \\ t = \tau/\alpha \\ dt = \frac{1}{\alpha} d\tau \end{array} \right] = \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty f(\tau) e^{-\frac{p}{\alpha} \tau} d\tau = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

III. Дифференцирование оригинала

Если $f(t) \doteq F(p)$ и $f'(t)$ — оригинал, то

$$\boxed{f'(t) \doteq pF(p) - f(0)} \quad (2.10)$$

Доказательство. По формуле (2.3) интегрированием по частям получаем

$$\begin{aligned} f'(t) \doteq \int_0^\infty f'(t) e^{-pt} dt &= \left| \begin{array}{ll} e^{-pt} = u & f'(t) dt = dv \\ du = -e^{-pt} dt & v = f(t) \end{array} \right| = \\ &= f(t) e^{-pt} \Big|_0^\infty + p \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt. \end{aligned}$$

Если s_0 — показатель роста оригинала $f(t)$ и $s = \operatorname{Re} p > s_0$, то $\lim_{t \rightarrow \infty} |f(t) e^{-pt}| \leq \lim_{t \rightarrow \infty} M e^{-(s-s_0)t} = 0$. Так как $f(t) e^{-pt} \Big|_{t=0} = f(0)$, то из проделанных выкладок и получаем требуемое.

Следствие

$$f''(t) \doteq p^2 F(p) - pf(0) - f'(0); \quad (2.11)$$

$$f'''(t) \doteq p^3 F(p) - p^2 f(0) - pf'(0) - f''(0); \quad (2.12)$$

$$f^{(n)}(t) \doteq p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0), \quad (2.13)$$

если все участвующие производные являются оригиналами.

Доказательство. Используя изображение первой производной (2.10), имеем

$$f''(t) = [f'(t)]' \doteq p[pF(p) - f(0)] - f'(0) = p^2 F(p) - pf(0) - f'(0).$$

Формула (2.12) получается аналогично из формулы (2.11), а (2.13) — методом математической индукции.

Теорема о дифференцировании оригинала является основной теоремой при решении дифференциальных уравнений. С ее помощью переходим от дифференциального уравнения к операторному.

Если $f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = 0$, то формулы (2.10)–(2.13) принимают простой вид:

$$f'(t) \doteq pF(p), f''(t) \doteq p^2 F(p), f'''(t) \doteq p^3 F(p), \dots$$

И, таким образом, в этом случае дифференцирование оригинала сводится к умножению изображения на p .

Заметим, что из формулы (2.10) следует предельное соотношение для изображений

$$\lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow \infty} pF(p) = f(0). \quad (2.14)$$

В самом деле, это соотношение вытекает из того, что $pF(p) - f(0)$ является изображением оригинала $f'(t)$ и, следовательно, стремится к нулю при $\operatorname{Re} p \rightarrow \infty$.

IV. Дифференцирование изображения

Если $f(t) \doteq F(p)$, то

$$\boxed{F'(p) \doteq -tf(t), F''(p) \doteq t^2 f(t), \dots, F^{(n)}(p) \doteq (-1)^n t^n f(t)} \quad (2.15)$$

Доказательство. По теореме (2.1) $F(p)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$ является аналитической функцией и ее можно дифференцировать по p .

Формальным дифференцированием равенства (2.3) получаем

$$F'(p) = \frac{d}{dp} \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f(t) \frac{de^{-pt}}{dp} dt = \int_0^{\infty} (-tf(t))e^{-pt} dt.$$

Но это и означает, что $-tf(t) \doteq F'(p)$.

Дифференцируя еще раз, получим

$$F''(p) = \int_0^{\infty} t^2 f(t) e^{-pt} dt,$$

и т.д.

Можно доказать, что формальное дифференцирование по параметру под знаком интеграла законно.

Замечание. В связи с последним заметим, что вопрос изменения порядка дифференцирования и интегрирования — тонкое место математического анализа. Можно привести примеры, когда

$$\frac{d}{d\alpha} \int_0^{\infty} f(x, \alpha) dx \neq \int_0^{\infty} \frac{df(x, \alpha)}{d\alpha} dx.$$

При строгих математических выкладках подобное преобразование должно быть обосновано.

Пример 2.7

$$t^n \doteq \frac{n!}{p^{n+1}}. \quad (2.16)$$

Решение. Так как изображение функции Хевисайда равно $\frac{1}{p}$, то по свойству линейности $-\frac{1}{p} \doteq -\eta(t)$. По теореме о дифференцировании изображении последовательно получаем:

$$\frac{1}{p^2} = \left(-\frac{1}{p}\right)' \doteq -t(-\eta(t)) = t\eta(t),$$

$$\frac{2}{p^3} = \left(-\frac{1}{p^2}\right)' \doteq -t(-t\eta(t)) = t^2\eta(t),$$

$$\frac{2 \cdot 3}{p^4} = \left(-\frac{2}{p^3}\right)' \doteq -t(-t^2\eta(t)) = t^3\eta(t)$$

и т.д.

Пример 2.8

$$t^n e^{\lambda t} \doteq \frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}. \quad (2.17)$$

Решение. Совершенно аналогично предыдущему, если вместо функции Хевисайда взять $e^{\lambda t} \doteq \frac{1}{(p-\lambda)}$ (формула (2.5)).

Заметим, что формула (2.16) — частный случай формулы (2.17) при $\lambda = 0$.

Пример 2.9

$$t \sin \omega t \doteq \frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}, \quad t \cos \omega t \doteq \frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}. \quad (2.18)$$

Решение. Так как $\sin \omega t \doteq \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$ (формула (2.7)), то по теореме о дифференцировании изображения

$$\left(\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}\right)' = -\frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2} \doteq -t \sin \omega t.$$

По свойству линейности получаем требуемое. Вторая формула получается аналогично.

Эти формулы можно получить иначе. Из (2.17) имеем

$$t e^{\lambda t} \doteq \frac{1}{(p-\lambda)^2}.$$

Значит,

$$\begin{aligned} t \cos \omega t &= t \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} = \frac{1}{2} t e^{i\omega t} + \frac{1}{2} t e^{-i\omega t} \doteq \\ &\doteq \frac{1}{2} \frac{1}{(p-i\omega)^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{(p+i\omega)^2} = \frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}. \end{aligned}$$

V. Интегрирование оригинала. Если $f(t) \doteq F(p)$, то

$$\boxed{\int_0^t f(\tau) d\tau \doteq \frac{F(p)}{p}} \quad (2.19)$$

Доказательство. Покажем, что функция $g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$ является оригиналом, т.е. удовлетворяет условиям 1, 2 и 3 определения оригинала.

1. Если $\tau < 0$, то $f(\tau) = 0$. Значит, $g(t) = \int_0^t 0 d\tau = 0$, если $t < 0$.

2. Пусть $|f(t)| \leq Me^{s_0 t}$. Тогда, ввиду монотонного возрастания показательной функции,

$$|g(t)| \leq \int_0^t Me^{s_0 \tau} d\tau \leq \int_0^t Me^{s_0 t} d\tau = Me^{s_0 t} \cdot t \leq Me^{s_1 t} \cdot t.$$

Последнее неравенство следует из того, что найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $t < e^{\varepsilon t}$ при всех $t > 0$ (это можно увидеть, например, из графиков функций $y = t$ и $y = e^{\varepsilon t}$), а тогда $e^{s_0 t} \cdot t \leq e^{(s_0 + \varepsilon)t} = e^{s_1 t}$.

3. В математическом анализе доказывается, что если $f(t)$ — кусочно-непрерывная функция, то $g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$ будет непрерывной функцией (при этом $g'(t) = f(t)$ в каждой точке непрерывности функции $f(t)$).

Итак, $g(t)$ — оригинал. Пусть $G(p) \doteq g(t)$. Так как $g(0) = \int_0^0 f(\tau) d\tau = 0$, то по теореме о дифференцировании оригинала (формула (2.10)) имеем $g'(t) \doteq pG(p)$ и так как $g'(t) = f(t)$, то $pG(p) = F(p)$. Отсюда

$$G(p) = \frac{F(p)}{p} \doteq g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau.$$

Теорема доказана.

Это свойство имеет важное значение в операторном методе, так как математическая операция — интегрирование оригинала — сводится к арифметической операции — делению изображения на p .

Пример 2.10 Найти изображение оригинала

$$f(t) = \int_0^t \tau^2 e^{-\tau} d\tau.$$

Решение. Данный интеграл можно вычислить, дважды интегрируя по частям, а затем найти изображение найденной функции. Но это плохое решение. По формуле (2.19) достаточно найти изображение подынтегральной функции. Так как по формуле (2.17)

$$t^2 e^{-t} \doteq \frac{2}{(p+1)^3}, \text{ то}$$

$$\int_0^t \tau^2 e^{-\tau} d\tau \doteq \frac{2}{p(p+1)^3}.$$

VI. Интегрирование изображения. Если $f(t) \doteq F(p)$ и интеграл $\int_p^\infty F(q) dq$ сходится, то он является изображением оригинала $\frac{f(t)}{t}$:

$$\boxed{\frac{f(t)}{t} \doteq \int_p^\infty F(q) dq} \quad (2.20)$$

Доказательство. Пусть $\frac{f(t)}{t} \doteq \Phi(p)$. Отсюда по теореме о дифференцировании изображения (формула (2.15)) имеем $-\Phi'(p) \doteq t \frac{f(t)}{t} = f(t)$. Значит $-\Phi'(p) = F(p)$. Интегрируя это равенство, получим

$$-\int_p^z \Phi'(q) dq = \int_p^z F(q) dq$$

или $\Phi(p) - \Phi(z) = \int_p^z F(q) dq$. Тогда, по следствию из теоремы 1 $\Phi(z) \rightarrow 0$ при $\operatorname{Re} z \rightarrow \infty$. Отсюда

$$\Phi(p) = \int_p^\infty F(q) dq \doteq \frac{f(t)}{t}.$$

Теорема доказана.

Пример 2.11 Найти изображение оригинала $f(t) = \frac{\sin t}{t}$.

Решение. Так как $\sin t \doteq \frac{1}{p^2 + 1}$, то

$$\frac{\sin t}{t} \doteq \int_p^\infty \frac{dq}{q^2 + 1} = \operatorname{arctg} q \Big|_p^\infty = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p.$$

Но $\operatorname{arctg} p + \operatorname{arcctg} p \equiv \frac{\pi}{2}$, значит,

$$\frac{\sin t}{t} \doteq \operatorname{arcctg} p.$$

Пример 2.12 Найти изображения оригиналов:

$$a) f(t) = \frac{e^{at} - e^{bt}}{t}; \quad b) f(t) = \frac{\operatorname{sh} t}{t}.$$

Решение. а) Так как $e^{at} - e^{bt} \doteq \frac{1}{p-a} - \frac{1}{p-b}$ по формуле (2.5)), то

$$\begin{aligned} \frac{e^{at} - e^{bt}}{t} &\doteq \int_p^\infty \left(\frac{1}{q-a} - \frac{1}{q-b} \right) dq = \ln(q-a) - \ln(q-b) \Big|_p^\infty = \\ &= \ln \left| \frac{q-a}{q-b} \right| \Big|_p^\infty = -\ln \left| \frac{p-a}{p-b} \right| = \ln \left| \frac{p-b}{p-a} \right|. \end{aligned}$$

б) Так как $\frac{\text{sh } t}{t} = \frac{1}{2} \frac{e^t - e^{-t}}{t}$, то из предыдущего при $a = 1$ и $b = -1$ получаем

$$\frac{\text{sh } t}{t} \doteq \frac{1}{2} \ln \left| \frac{p+1}{p-1} \right|.$$

VII. Теорема смещения. Если $f(t) \doteq F(p)$, то

$$\boxed{e^{p_0 t} f(t) \doteq F(p - p_0) \quad (\text{Re } p > s_0 + \text{Re } p_0)} \quad (2.21)$$

То есть смещение изображения на p_0 равносильно умножению оригинала на $e^{p_0 t}$.

Доказательство

$$e^{p_0 t} f(t) \doteq \int_0^{\infty} e^{p_0 t} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-(p-p_0)t} f(t) dt = F(p - p_0).$$

При этом, если изображение $F(p)$ определено в полуплоскости $\text{Re } p > s_0$ (s_0 — показатель роста оригинала $f(t)$), то изображение $F(p - p_0)$ определено в полуплоскости $\text{Re } p > s_0 + \text{Re } p_0$. Теорема доказана.

Пример 2.13 Найти изображение оригиналов

$$a) e^{\lambda t} \sin \omega t; \quad b) e^{\lambda t} \cos \omega t; \quad c) e^{\lambda t} t^n.$$

Решение. Так как $\sin \omega t \doteq \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$, $\cos \omega t \doteq \frac{p}{p^2 + \omega^2}$, $t^n \doteq \frac{n!}{p^{n+1}}$, то по теореме смещения

$$a) e^{\lambda t} \sin \omega t \doteq \frac{\omega}{(p - \lambda)^2 + \omega^2}; \quad (2.22)$$

$$b) e^{\lambda t} \cos \omega t \doteq \frac{p - \lambda}{(p - \lambda)^2 + \omega^2}; \quad (2.23)$$

$$c) e^{\lambda t} t^n \doteq \frac{n!}{(p - \lambda)^{n+1}}. \quad (2.24)$$

Очевидно, если выразить тригонометрические и гиперболические синусы и косинусы через экспоненту, то по теоремам смещения и линейности будем иметь

$$f(t) \sin \omega t \quad \doteq \quad \frac{1}{2i}[F(p - i\omega) - F(p + i\omega)],$$

$$f(t) \cos \omega t \quad \doteq \quad \frac{1}{2}[F(p - i\omega) + F(p + i\omega)],$$

$$f(t) \operatorname{sh} \omega t \quad \doteq \quad \frac{1}{2}[F(p - \omega) - F(p + \omega)],$$

$$f(t) \operatorname{ch} \omega t \quad \doteq \quad \frac{1}{2}[F(p - \omega) + F(p + \omega)],$$

если $f(t) \doteq F(p)$. Получите формулы (2.22) и (2.23) из этих соотношений.

Пример 2.14 Найти оригинал по его изображению

$$F(p) = \frac{p}{p^2 + 4p + 5}.$$

Решение. Имеем

$$F(p) = \frac{p}{(p+2)^2 + 1} = \frac{(p+2) - 2}{(p+2)^2 + 1} = \frac{p+2}{(p+2)^2 + 1} - 2 \frac{1}{(p+2)^2 + 1}.$$

Отсюда по (2.22) и (2.23) при $\omega = 1$ и $\lambda = -2$

$$F(p) \doteq e^{-2t} \cos t - 2e^{-2t} \sin t.$$

VIII. Теорема запаздывания. Рассмотрим оригинал $f(t)$. Функция

$$g(t) = \begin{cases} 0, & t < \tau, \\ f(t - \tau), & t > \tau, \end{cases} \quad (2.25)$$

где $\tau > 0$, имеет график, который получается из графика $f(t)$ его сдвигом на τ (рис. 2.2).

С физической точки зрения это означает, что если $f(t)$ задает некоторый процесс, то $g(t)$ — тот же процесс, но начинающийся с запаздыванием τ . Функция Хевисайда $\eta(t)$ равна единице, если ее аргумент

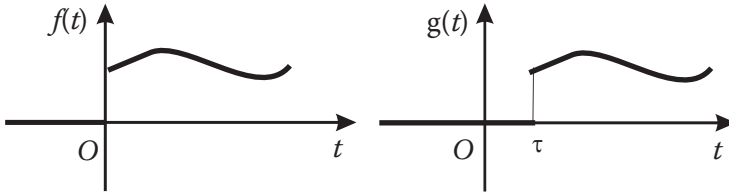


Рис. 2.2

положителен и равна нулю, если он отрицателен. Следовательно, запаздывающую функцию Хевисайда можно записать в виде

$$\eta(t - \tau) = \begin{cases} 0, & t < \tau, \\ 1, & t > \tau, \end{cases}$$

а функцию (2.26) можно записать так:

$$g(t) = \eta(t - \tau)f(t - \tau).$$

VIII. Теорема запаздывания утверждает, что включение оригинала с запаздыванием на τ равносильно умножению изображения на $e^{-p\tau}$: Если $f(t) \doteq F(p)$ и $\tau > 0$, то

$$\boxed{f(t - \tau)\eta(t - \tau) \doteq e^{-p\tau}F(p)} \quad (2.26)$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} f(t - \tau)\eta(t - \tau) &\doteq \int_0^{\infty} f(t - \tau)\eta(t - \tau)e^{-pt} dt = \int_{\tau}^{\infty} f(t - \tau)e^{-pt} dt = \\ &= \left| \begin{matrix} t - \tau = t_1 \\ dt = dt_1 \end{matrix} \right| = \int_0^{\infty} f(t_1)e^{-p(\tau+t_1)} dt_1 = e^{-p\tau} \int_0^{\infty} f(t_1)e^{-pt_1} dt_1 = \end{aligned}$$

$= e^{-p\tau}F(p)$. Теорема доказана.

Пример 2.15 Найти оригинал по его изображению

$$F(p) = \frac{e^{-2p}}{(p+1)^2}.$$

Решение. Так как $\frac{1}{(p+1)^2} \doteq te^{-t}$ (формула (2.24)), то по формуле (2.26) при $\tau = 2$, а на необходимость применения запаздывания указывает наличие множителя e^{-2p} , получаем

$$\frac{e^{-2p}}{(p+1)^2} \doteq (t-2)e^{-(t-2)}\eta(t-2).$$

Теорема запаздывания особенно удобна при отыскании изображения функций, которые на разных участках оси t задаются различными аналитическими выражениями.

Пример 2.16 Найти изображение функции заданной графически (рис. 2.3).

Решение. Уравнение отрезка OA : $y_1 = \frac{a}{\tau}t$. Уравнение отрезка AB : $y_2 = -\frac{a}{\tau}(t-2\tau)$. До момента $t = 0$ оригинал $f(t) = 0$ и в этот момент "включается" функция y_1 : это запишется в виде $y_1 \cdot \eta(t)$. В момент времени $t = \tau$ эта функция исчезает ($y_1 \cdot \eta(t) - y_1 \cdot \eta(t-\tau)$) и появляется функция y_2 : $y_1 \cdot \eta(t) - y_1 \cdot \eta(t-\tau) + y_2 \cdot \eta(t-\tau)$. Начиная с момента времени $t = 2\tau$ исчезает и эта функция: $y_2 \cdot \eta(t-\tau) - y_2 \cdot \eta(t-2\tau)$.

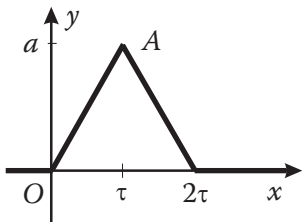


Рис. 2.3

Итак,

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a}{\tau}t \cdot \eta(t) - \frac{a}{\tau}t \cdot \eta(t-\tau) - \frac{a}{\tau}(t-2\tau) \cdot \eta(t-\tau) + \frac{a}{\tau}(t-2\tau) \cdot \eta(t-2\tau) = \\ &= \frac{a}{\tau}t \cdot \eta(t) - \frac{2a}{\tau}(t-\tau) \cdot \eta(t-\tau) + \frac{a}{\tau}(t-2\tau) \cdot \eta(t-2\tau). \end{aligned}$$

так как $t \doteq \frac{1}{p^2}$, то, используя формулу (2.26), будем иметь

$$\begin{aligned} f(t) &\doteq \frac{a}{\tau} \frac{1}{p^2} - \frac{2a}{\tau} e^{-\tau p} \frac{1}{p^2} + \frac{a}{\tau} e^{-2\tau p} \frac{1}{p^2} = \frac{a}{\tau p^2} (1 - 2e^{-\tau p} + e^{-2\tau p}) = \\ &= \frac{a}{\tau p^2} (1 - e^{-\tau p})^2. \end{aligned}$$

Пример 2.17 Найти изображение оригинала

$$f(t) = (t^2 - 3t + 1) \eta(t - 2).$$

Решение. Функция $f(t)$ задает некоторый процесс $\varphi(t)$, запаздывающий на время $\tau = 2$. Чтобы найти этот процесс, надо его представить в виде $f(t) = \varphi(t - 2)\eta(t - 2)$. Для этого многочлен $t^2 - 3t + 1$ нужно переразложить по степеням $(t - 2)$. Это можно сделать по формуле Тейлора, но ввиду невысокой степени многочлена, проще поступить так:

$$t^2 - 3t + 1 = [(t - 2) + 2]^2 - 3[(t - 2) + 2] + 1 = (t - 2)^2 + (t - 2) - 1.$$

Следовательно,

$$f(t) = ((t - 2)^2 + (t - 2) - 1) \eta(t - 2).$$

Таким образом, $f(t)$ есть процесс $\varphi(t) = t^2 + t - 1$, "включаемый" с запаздыванием $\tau = 2$.

Так как $\varphi(t) \doteq \frac{2}{p^3} + \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p}$, то по формуле (2.26) находим

$$f(t) = \varphi(t - 2)\eta(t - 2) \doteq \left(\frac{2}{p^3} + \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} \right) e^{-2p}.$$

Отметим, что этот пример можно решить непосредственно по определению (2.3):

$$\begin{aligned} f(t) &= (t^2 - 3t + 1) \eta(t - 2) \int_0^{\infty} (t^2 - 3t + 1) \eta(t - 2) e^{-pt} dt = \\ &= \int_2^{\infty} (t^2 - 3t + 1) e^{-pt} dt = \left| \begin{matrix} t - 2 = t_1 \\ t = t_1 + 2 \end{matrix} \right| = \int_0^{\infty} ((t_1 + 2)^2 - 3(t_1 + 2) + \\ &\quad + 1) e^{-p(t_1 + 2)} dt_1 = e^{-2p} \int_0^{\infty} (t_1^2 + t_1 - 1) e^{-pt_1} dt_1. \end{aligned}$$

Последний интеграл можно не вычислять, а заметить, что он определяет изображение функции $\varphi(t) = t^2 + t - 1$, которое равно $\frac{2}{p^3} + \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p}$.

Впрочем, последнее замечание, по сути, повторение доказательства теоремы запаздывания.

IX. Изображение периодического оригинала.

Пример 2.18 Найдём изображение периодического с периодом $T = 2\tau$ прямоугольного разнополярного импульса $f(t)$ амплитуды A (рис.2.4):

Решение. Данный оригинал можно записать в виде

$$f(t) = A(\eta(t) - 2\eta(t - \tau) + 2\eta(t - 2\tau) - 2\eta(t - 3\tau) + \dots)$$

Переходя к изображениям по теореме запаздывания, будем иметь

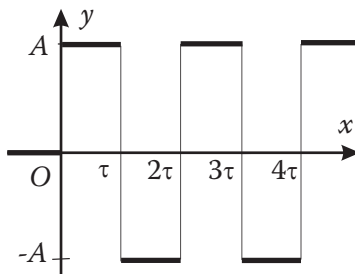


Рис. 2.4

$$\begin{aligned} f(t) &\doteq A \left(\frac{1}{p} - \frac{2}{p} e^{-p\tau} + \frac{2}{p} e^{-2p\tau} - \frac{2}{p} e^{-3p\tau} + \dots \right) = \\ &= \frac{A}{p} \left(1 - 2e^{-p\tau} + 2e^{-2p\tau} - 2e^{-3p\tau} + \dots \right). \end{aligned}$$

Если $\operatorname{Re} p > 0$, то в скобках, начиная со второго слагаемого, имеем сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Следовательно,

$$f(t) \doteq \frac{A}{p} \left(1 - 2 \frac{e^{-p\tau}}{1 + e^{-p\tau}} \right) = \frac{A}{p} \cdot \frac{1 - e^{-p\tau}}{1 + e^{-p\tau}}.$$

Заметим, что переходя от оригинала к изображению, мы применили теорему линейности для суммы бесконечного количества слагаемых, что, в общем-то, не обосновано.

Пусть $f(t)$ — периодический оригинал с периодом $T > 0$, то есть для всех $t > 0$ $f(t + T) = f(t)$. Тогда

$$f(t) \doteq F(p) = \frac{\Phi(t)}{1 - e^{-pt}}, \quad (2.27)$$

где

$$\Phi(p) = \int_0^T f(t) e^{-pt} dt. \quad (2.28)$$

В самом деле

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^T f(t) e^{-pt} dt + \int_T^{\infty} f(t) e^{-pt} dt.$$

Первый интеграл равен $\Phi(p)$; во втором сделаем замену $t = \tau + T$

$$F(p) = \Phi(p) + \int_0^{\infty} f(\tau + T) e^{-p(\tau+T)} d\tau = \Phi(p) + e^{-pT} \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-p\tau} d\tau,$$

откуда получаем (2.27).

Пример 2.19 Найти изображение оригинала $f(t) = |\sin \omega t|$.

Решение. Функция $f(t)$ имеет период $T = \frac{\pi}{\omega}$. Дважды интегрируя по частям, находим

$$\Phi(p) = \int_0^T f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\pi/\omega} \sin \omega t e^{-pt} dt = \frac{A\omega}{p^2 + \omega^2} \left(1 + e^{-\frac{p\pi}{\omega}} \right).$$

По формуле (2.27) находим искомое изображение

$$F(p) = \frac{A\omega}{p^2 + \omega^2} \cdot \frac{1 + e^{-\frac{p\pi}{\omega}}}{1 - e^{-\frac{p\pi}{\omega}}}.$$

Заметим, что функция $\Phi(p) = \int_0^T f(t)e^{-pt} dt$ является изображением оригинала

$$\varphi(t) = \begin{cases} f(t), & 0 \leq t \leq T, \\ 0, & t > T. \end{cases} \quad (2.29)$$

Можно доказать обратное утверждение: Если изображение имеет вид (2.27), то соответствующий ему оригинал является периодической функцией периода T , получающейся периодическим продолжением функции (2.29) на положительную полуось t .

Х. Теорема умножения. По этой теореме можно находить оригинал, соответствующий произведению изображений $F(p)G(p)$, если известны оригиналы $f(t)$ и $g(t)$ каждого из сомножителей.

Теорема. Если $F(p) \doteq f(t)$ и $G(p) \doteq g(t)$, то

$$F(p)G(p) \doteq \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \quad (2.30)$$

Доказательство. Обозначим $\varphi(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$. Покажем, что $\varphi(t)$ — оригинал. Выполнение условий 1 и 3 определения оригинала очевидно (см. свойство "V. Интегрирование оригинала"). Для доказательства условия 2 определения оригинала обозначим через s_1 и s_2 — показатели роста оригиналов $f(t)$ и $g(t)$: $|f(t)| \leq M_1 e^{s_1 t}$, $|g(t)| \leq M_2 e^{s_2 t}$, и пусть $s_0 = \max(s_1, s_2)$. Тогда при $t > 0$

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \right| &\leq M_1 M_2 \int_0^t e^{s_0 \tau} e^{s_0(t-\tau)} d\tau = \\ &= M_1 M_2 e^{s_0 t} \int_0^t d\tau = M_1 M_2 t e^{s_0 t}. \end{aligned}$$

Но $t \leq e^{\varepsilon t}$, где ε — сколь угодно малое положительное число. Значит,

$$|\varphi(t)| \leq M e^{(s_0 + \varepsilon)t}.$$

Итак, $\varphi(t)$ — оригинал; найдем его изображение.

$$\varphi(t) \doteq \int_0^{\infty} \varphi(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} \left(\int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau \right) e^{-pt} dt.$$

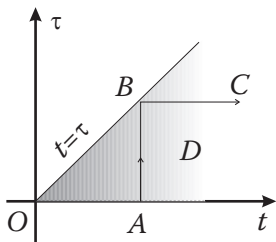


Рис. 2.5

Здесь, справа, стоит двойной интеграл по области D (рис.2.5), так как при фиксированном t переменная τ меняется от 0 до $\tau = t$ (отрезок AB), а пределы изменения переменной t — это проекция области D на ось t . Изменим порядок интегрирования (можно доказать законность этой операции, если $\operatorname{Re} p > s_0$):

$$\varphi(t) \doteq \int_0^{\infty} \left(\int_{\tau}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) e^{-pt} dt \right) d\tau = \int_0^{\infty} f(\tau) d\tau \int_{\tau}^{\infty} g(t - \tau) e^{-pt} dt =$$

(во внутреннем интеграле сделаем замену $t - \tau = t_1$)

$$= \int_0^{\infty} f(\tau) d\tau \int_0^{\infty} g(t_1) e^{-p(\tau + t_1)} dt_1 = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-p\tau} d\tau \int_0^{\infty} g(t_1) e^{-pt_1} dt_1 =$$

$= F(p)G(p)$. Что и требовалось доказать.

Интеграл $\int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau$ называется *сверткой* функций $f(t)$ и $g(t)$ и обозначается $(f * g)$.

Теорема умножения утверждает, что умножению изображений соответствует свертка оригиналов

$$F(p)G(p) \doteq (f * g), \quad (2.31)$$

поэтому теорему часто называют *теоремой о свертке* (оригиналов).

Свертка функций обладает свойством симметрии (в силу равноправности сомножителей $F(p)$ и $G(p)$)

$$(f * g) = (g * f).$$

Пример 2.20 По изображению $\frac{1}{(p^2 + \omega^2)^2}$ найти оригинал.

Решение. Так как $\sin \omega t \doteq \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$, то

$$\begin{aligned} \frac{1}{(p^2 + \omega^2)^2} &= \frac{1}{\omega^2} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \cdot \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \frac{1}{\omega^2} \doteq (\sin \omega t * \sin \omega t) = \\ &= \frac{1}{\omega^2} \int_0^t \sin \omega \tau \sin \omega(t - \tau) d\tau = \frac{1}{2\omega^2} \int_0^t [\cos \omega(2\tau - t) - \cos \omega t] d\tau = \\ &= \frac{1}{2\omega^2} \left[\frac{1}{2\omega} \sin \omega(2\tau - t) - \cos \omega t \cdot \tau \right]_0^t = \frac{1}{2\omega^3} [\sin \omega t - \omega t \cos \omega t]. \end{aligned}$$

XI. Интеграл Дюамеля. Из теоремы умножения получаем полезное для приложений (особенно при анализе линейных электрических цепей) следствие. По формулам (2.10) и (2.31) имеем

$$pF(p)G(p) = f(0)G(p) + [pF(p) - f(0)]G(p) \doteq f(0)g(t) + (f' * g).$$

Представляя свертку $(f' * g)$ интегралом, получаем *формулу Дюамеля*

$$pF(p)G(p) \doteq f(0)g(t) + \int_0^t f'(\tau)g(t - \tau) d\tau \quad (2.32)$$

Интеграл справа (т.е. свертка $(f' * g)$ производной одного оригинала на некоторый другой оригинал) называется *интегралом Дюамеля*.

На основании свойства симметрии свертки формулу (2.32) можно записать в виде

$$pF(p)G(p) \equiv f(0)g(t) + \int_0^t g(\tau)f'(t - \tau)d\tau \quad (2.33)$$

В приложениях нужно использовать ту форму записи интеграла Дюамеля (2.32) или (2.33), при которой проще вычисляется интеграл.

§ 2.3. Нахождение оригинала по изображению. Теоремы разложения

Итак, мы получили изображения основных элементарных функций и основные свойства оригиналов и изображений. Используя эти свойства можем находить изображения более сложных оригиналов и выполнять обратную операцию.

Эффективность применения операторного метода в физических и технических приложениях обусловлена, в частности, тем, что для достаточно большого класса функций $f(t)$ и $F(p)$ имеются таблицы оригиналов и соответствующих им изображений. В приложении к данной главе приведена (не полностью) таблица преобразований Лапласа, взятая из книги: Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа.-М.:Наука,1965. Эта таблица позволяет, для широкого класса функций, по данному оригиналу записать его изображение и, наоборот, по данному изображению находить оригинал.

При этом особые трудности, обычно, вызывает нахождение оригинала по заданному изображению.

При решении линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами операторным методом для широкого класса правых частей этих уравнений на заключительном этапе требуется найти оригинал по изображению, представляющему собой дробно-рациональную функцию

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{a_0 p^m + a_1 p^{m-1} + \dots + a_m}{b_0 p^n + b_1 p^{n-1} + \dots + b_n}, \quad (2.34)$$

при этом $m < n$, т.е. степень числителя меньше степени знаменателя (в противном случае $\lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow \infty} F(p) \neq 0$, что невозможно).

Для нахождения оригинала по изображению (2.34) можно использовать разложение на элементарные (простейшие) дроби. Этот метод был рассмотрен в математическом анализе при интегрировании дробно-рациональных функций. Сначала раскладываем на множители знаменатель. Затем представляем данную дробь в виде суммы элементарных дробей с неопределенными коэффициентами

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{A(p)}{b_0(p-p_1)^{k_1} \dots (p-p_s)^{k_s}} = \\ &= \frac{A_{11}}{p-p_1} + \frac{A_{21}}{(p-p_1)^2} + \dots + \frac{A_{k_1 1}}{(p-p_1)^{k_1}} + \dots \\ &\dots + \frac{A_{1s}}{p-p_s} + \frac{A_{2s}}{(p-p_s)^2} + \dots + \frac{A_{k_s s}}{(p-p_s)^{k_s}}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

В этом равенстве приводим дроби к общему знаменателю и приравниваем числители. Полученное равенство должно выполняться тождественно. Поэтому, подставляя вместо переменной p подходящие значения, получаем систему линейных уравнений относительно неизвестных A_{ij} (ясно, что уравнений должно быть столько, сколько неизвестных).

Замечание. Разложение (2.35) записано в комплексной области, т.е. корни p_k могут быть комплексными: $p_k = \alpha_k + i\beta_k$, $\alpha_k \neq 0$, $\beta_k \neq 0$. Из алгебры известно, что у многочлена с действительными коэффициентами комплексные корни попарно сопряженные: если $p_k = \alpha_k + i\beta_k$ — корень, то $p_k = \alpha_k - i\beta_k$ — также корень. Но тогда оригиналы, соответствующие, например, элементарным дробям $\frac{A}{p - (\alpha \pm i\beta)}$ будут равны $e^{(\alpha \pm i\beta)t}$ и их желательно упрощать, используя формулу Эйлера

$$e^{(\alpha \pm i\beta)t} = e^{\alpha t} (\cos \beta t \pm i \sin \beta t).$$

Этого можно избежать, если при разложении знаменателя на множители "не трогать" квадратные трехчлены с комплексными корнями.

Пример 2.21 Найти оригинал по изображению $F(p) = \frac{p^3}{p^4 - 1}$.

Решение. Разлагая на множители знаменатель, имеем

$$F(p) = \frac{p^3}{(p-1)(p+1)(p^2+1)} = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{p+1} + \frac{Cp+D}{p^2+1}.$$

Отсюда

$$p^3 = A(p+1)(p^2+1) + B(p-1)(p^2+1) + (Cp+D)(p-1)(p+1).$$

Подставляя $p = \pm 1$ и $p = \pm i$, получаем

$$\begin{cases} 1 = 4A, \\ -1 = -4B, \\ -i = (Ci + D)(-2), \\ i = (-Ci + D)(-2), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1/4, \\ B = 1/4, \\ 2Ci + 2D = i, \\ -2Ci + 2D = -i, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1/4, \\ B = 1/4, \\ C = 1/2, \\ D = 0. \end{cases}$$

Итак,

$$\frac{p^3}{p^4 - 1} = \frac{1/4}{p-1} + \frac{1/4}{p+1} + \frac{1}{2} \frac{p}{p^2+1}.$$

По свойству линейности и формулам (2.5) и (2.7) находим оригинал

$$f(t) = \frac{1}{4}e^t + \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{2} \cos t = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} t + \cos t).$$

Пример 2.22 Для изображения

$$F(p) = \frac{5p^4 + 13p^3 + 9p^2 + 10p + 6}{p^5 + 2p^4 + 2p^3} \text{ найти оригинал.}$$

Решение. Разлагаем на множители знаменатель $p^5 + 2p^4 + 2p^3 = p^3(p^2 + 2p + 2)$. Далее можно было бы разложить на линейные множители $p^2 + 2p + 2 = (p + 1 - i)(p + 1 + i)$ с перспективой, после разложения на элементарные дроби

$$F(p) = \frac{A_1}{p} + \frac{A_2}{p^2} + \frac{A_3}{p^3} + \frac{B_1}{p+1-i} + \frac{B_2}{p+1+i}$$

и нахождения неопределенных коэффициентов, использовать формулы (2.16) и (2.5), но это приведет к необходимости упрощения оригинала.

Задача упрощается, если ориентироваться на применение формул (2.22) и (2.23). В таком случае разложение удобнее искать в виде

$$F(p) = \frac{A_1}{p} + \frac{A_2}{p^2} + \frac{A_3}{p^3} + \frac{B(p+1)+C}{(p+1)^2+1}.$$

Приводя к общему знаменателю и приравнявая числители, получим тождество

$$\begin{aligned} 5p^4 + 13p^3 + 9p^2 + 10p + 6 &\equiv (A_1p^2 + A_2p + A_3)(p^2 + 2p + 2) + \\ &+ (B(p+1) + C)p^3 = (A_1 + B)p^4 + (2A_1 + A_2 + B + C)p^3 + \\ &+ (2A_1 + 2A_2 + A_3)p^2 + (2A_2 + 2A_3)p + 2A_3. \end{aligned}$$

Можно приравнять коэффициенты при одинаковых степенях p слева и справа, но получится громоздкая система. Проще поступить так: $p = 0$ — нуль кратности три для знаменателя, а это означает, что первая и вторая производные знаменателя функции $F(p)$ также равны нулю при $p = 0$. Поэтому, дважды дифференцируя последнее равенство и подставляя $p = 0$, будем иметь:

$$p = 0 : 6 = 2A_3 \Rightarrow A_3 = 3;$$

$$\begin{aligned} 20p^3 + 39p^2 + 18p + 10 &= \\ = 4(A_1 + B)p^3 + 3(2A_1 + A_2 + B + C)p^2 + 2(2A_1 + 2A_2 + A_3)p + \\ + 2A_2 + 2A_3, & \quad p = 0 : 10 = 2A_2 + 2A_3 \Rightarrow A_2 = 2; \\ 60p^2 + 78p + 18 &= 12(A_1 + B)p^2 + 6(2A_1 + A_2 + B + C)p + 4A_1 + \\ + 4A_2 + 2A_3, & \quad p = 0 : 18 = 4A_1 + 4A_2 + 2A_3 \Rightarrow A_1 = 1. \end{aligned}$$

Для нахождения оставшихся коэффициентов B и C заметим, что множитель при p^4 (в исходном тождестве) содержит B , но не содержит C , а множитель при p^3 содержит C , но не содержит B . Поэтому приравнявая коэффициенты при p^4 и p^3 , получим $B = 4$, $C = 5$ и, следовательно,

$$F(p) = \frac{1}{p} + \frac{2}{p^2} + \frac{3}{p^3} + \frac{4(p+1)+5}{(p+1)^2+1}.$$

Используя указанные выше свойства, получаем оригинал

$$f(t) = 1 + t + \frac{3}{2}t^2 + 4e^{-t} \cos t + 5e^{-t} \sin t.$$

Для отыскания оригинала по заданному изображению $F(p)$ может быть использовано разложение функции $F(p)$ в ряд Лорана.

Первая теорема разложения. Если $F(p)$ аналитична в кольце $R < |p| < \infty$ и разложение в ряд Лорана в этом кольце имеет вид

$$F(p) = \frac{c_1}{p} + \frac{c_2}{p^2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{p^n}, \quad (2.36)$$

то $F(p)$ является изображением оригинала $f(t)$, определяемого равенством

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(n-1)!} t^{n-1} = c_1 + \frac{c_2}{2!} t + \frac{c_3}{3!} t^2 + \dots \quad (2.37)$$

Доказательство этой теоремы сравнительно сложно и мы его опустим.

Если вспомнить, что $\frac{1}{p^n} \doteq \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ [формула (2.16)], то теорема утверждает, что для изображения $F(p)$, удовлетворяющего условиям теоремы в ряде (2.36), возможен почленный переход к оригиналам.

Пример 2.23 Найти оригинал по изображению $F(p) = \frac{p^3}{p^4 - 1}$.

Решение. Особые точки данной функции находятся из уравнения $p^4 - 1 = 0$, т.е. лежат на единичной окружности. Следовательно, в кольце $1 < |p| < \infty$ функция аналитична. В этом кольце $\frac{1}{|p|} < 1$, поэтому, используя формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, имеем

$$F(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{p^4}} = \frac{1}{p} \left(1 + \frac{1}{p^4} + \frac{1}{p^8} + \dots \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p^{4n+1}}.$$

По первой теореме разложения находим оригинал

$$f(t) = 1 + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^8}{8!} + \frac{t^{12}}{12!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{4n}}{(4n)!} \quad (2.38)$$

В примере (2.21) мы нашли, что изображение $F(p) = \frac{p^3}{p^4 - 1}$ имеет оригинал $f(t) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} t + \cos t)$. Используя ряды Тейлора для $\operatorname{ch} t$ и $\cos t$, нетрудно убедиться, что сумма ряда (2.38) именно равна $\frac{1}{2}(\operatorname{ch} t + \cos t)$, но в других случаях бывает затруднительно (а чаще и невозможно) свернуть сумму ряда (2.37) в компактную форму.

Первая теорема разложения используется для нахождения оригиналов по изображению и наоборот для так называемых *специальных функций* (функций Бесселя, Эрмита, Лагерра и др.). Эти функции часто задаются в виде некоторого степенного ряда. Например, функция Бесселя (нулевого порядка) имеет вид

$$J_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(n!)^2 2^{2n}}. \quad (2.39)$$

Если функцию $F(p) = \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}}$ разложить в ряд Лорана в кольце $1 < |p| < \infty$, то (выбирая то значение корня, для которого $\sqrt{1} = 1$) получим

$$F(p) = \frac{1}{p} \left(1 + \frac{1}{p^2}\right)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}} p^{2n+1}.$$

Но $\frac{1}{p^{2n+1}} \doteq \frac{t^{2n}}{(2n)!}$. Следовательно, по первой теореме разложения

$$J_0(t) \doteq \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}}. \quad (2.40)$$

Вторая теорема разложения. Если изображение $F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$ — дробно-рациональная функция, т.е.

$$F(p) = \frac{a_0 p^m + a_1 p^{m-1} + \dots + a_m}{b_0 p^n + b_1 p^{n-1} + \dots + b_n},$$

где степень числителя меньше степени знаменателя и $p_1, p_2, \dots, p_s$ — нули знаменателя [т.е. полюсы функции $F(p)$], то его оригиналом является функция

$$f(t) = \sum_{k=1}^s \operatorname{res}_{p=p_k} [F(p)e^{pt}]. \quad (2.41)$$

Доказательство этой теоремы мы также опускаем.

Заметим, что раньше мы от таких оригиналов переходили к изображениям разложением дроби $\frac{A(p)}{B(p)}$ на элементарные дроби. С помощью вычетов это, зачастую, решается проще.

Следствие 1. Если все полюсы функции $F(p)$ простые, то, применяя формулу (1.62) главы 1 для вычета в простом полюсе, будем иметь

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)} \doteq f(t) = \sum_{k=1}^s \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (2.42)$$

Напомним, что вычет в полюсе p_j кратности r находится по формуле

$$\operatorname{res}_{p=p_j} [F(p)e^{pt}] = \frac{1}{(r-1)!} \lim_{p \rightarrow p_j} \frac{d^{r-1}}{dp^{r-1}} [(p - p_j)^r F(p)e^{pt}].$$

Пример 2.24 Найти оригинал для изображения $F(p) = \frac{p^3}{p^4 - 1}$.

Решение. Особыми точками (и именно простыми полюсами) данной функции будут точки $p_k = \sqrt[4]{1}$. Одно значение этого корня очевидно $p_1 = 1$. Остальные значения находятся в вершинах правильного четырехугольника (т.е. квадрата), вписанного в единичную окружность и с вершиной в этой точке $p_1 = 1$. Таким образом, $p_2 = i$, $p_3 = -1$,

$p_4 = -i$. Так как производная знаменателя $(p^4 - 1)' = 4p^3 \neq 0$ в этих точках, то они будут простыми полюсами. По формуле (2.42) находим оригинал, учитывая, что $\frac{A(p)}{B'(p)} = \frac{1}{4}$:

$$f(t) = \frac{1}{4} (e^t + e^{it} + e^{-t} + e^{-it}) = \frac{1}{2} \left[\frac{e^t + e^{-t}}{2} + \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right] = \frac{\operatorname{ch} t + \cos t}{2}.$$

Пример 2.25 Найти оригинал для изображения

$$F(p) = \frac{1}{p^3(p+1)}.$$

Решение. Для данной функции точка $p = -1$ является простым полюсом, а точка $p = 0$ — полюсом третьего порядка. Находим соответствующие вычеты:

$$\operatorname{res}_{p=-1} [F(p)e^{pt}] = \left. \frac{e^{pt}}{(p^4 + p^3)} \right|_{p=-1} = \left. \frac{e^{pt}}{4p^3 + 3p^2} \right|_{p=-1} = -e^{-t},$$

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{p=0} [F(p)e^{pt}] &= \frac{1}{2!} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{d^2}{dp^2} [p^3 F(p)e^{pt}] = \frac{1}{2} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{d^2}{dp^2} \left[\frac{e^{pt}}{p+1} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left. \frac{e^{pt} (t^2 p^2 + 2t^2 p - 2tp + t^2 - 2t + 2)}{(p+1)^3} \right|_{p=0} = \frac{t^2}{2} - t + 1. \end{aligned}$$

По второй теореме разложения получаем

$$\frac{1}{p^3(p+1)} = \frac{t^2}{2} - t + 1 - e^{-t}.$$

Относительная простота решений в двух последних примерах объясняется тем, что полюсы функции — действительные (и более того — целые). Если применить вторую теорему разложения к изображению $F(p) = \frac{5p^4 + 13p^3 + 9p^2 + 10p + 6}{p^5 + 2p^4 + 2p^3}$, рассмотренному в примере (2.22), то решение будет несравненно более громоздким, чем приведенное выше в указанном примере.

Изложенная теория является основанием для таблицы преобразования Лапласа, приведенной в конце данной главы, а также для нахождения соответствия оригиналов и изображений, отсутствующих в этой таблице.

§ 2.4. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Для уяснения сути применения операторного метода к решению дифференциальных уравнений рассмотрим уравнение первого порядка

$$x' + ax = f(t). \quad (2.43)$$

Требуется найти решение $x(t)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $x(0) = x_0$ (x_0 — заданное число). То, что начальное условие задано при $t = 0$, не принципиально. Во-первых, при решении прикладных задач для выбора из бесконечного числа решений дифференциального уравнения определенного решения необходимо задать значение искомой функции в какой-либо точке t и, обычно, ее принимают равной нулю $t = 0$. Во-вторых, если все-таки задано начальное условие $x(t_0) = x_0$, то замена $\tau = t - t_0$ сведет нашу задачу к нахождению решения уравнения $\frac{d\tilde{x}(\tau)}{d\tau} + a\tilde{x}(\tau) = f(\tau + t_0)$, где $\tilde{x}(\tau) = x(\tau + t_0)$, с нулевым начальным условием $\tilde{x}(0) = x_0$.

Будем считать, что функции $f(t)$, $x(t)$ и $x'(t)$ являются оригиналами.

Умножим обе части уравнения (2.43) на e^{-pt} и проинтегрируем от 0 до ∞

$$\int_0^{\infty} x'(t)e^{-pt} dt + a \int_0^{\infty} x(t)e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt. \quad (2.44)$$

В это уравнение входят изображения заданной функции $f(t)$, искомой функции $x(t)$ и ее производной. Пусть $F(p) \doteq f(t)$, $X(p) \doteq x(t)$. По теореме о дифференцировании оригинала $x'(t) \doteq pX(p) - x(0) = pX(p) - x_0$.

Уравнение (2.44) принимает вид

$$pX(p) - x_0 + aX(p) = F(p). \quad (2.45)$$

Это уравнение называется *операторным* уравнением. Оно является линейным *алгебраическим* уравнением, т.е. с математической точ-

ки зрения объектом несравненно более простым, чем исходное *дифференциальное* уравнение. Кроме того, оно содержит начальное значение x_0 , выделяющее из бесконечного числа решений дифференциального уравнения (2.43) нужное решение. В этом преимущество операторного метода перед классическими, при которых сначала отыскивается общее решение, зависящее от произвольной постоянной, а затем эта постоянная определяется так, чтобы функция $x(t)$ при $t = 0$ принимала заданное значение x_0 .

Решая операторное уравнение, имеем

$$X(p) = \frac{F(p)}{p+a} + \frac{x_0}{p+a}. \quad (2.46)$$

Оригинал, соответствующий этому изображению, будет решением данного уравнения (2.43), удовлетворяющим начальному условию $x(0) = x_0$.

Этот оригинал ищем по таблицам оригиналов и изображений (см. приложение в конце главы). Если в таблице этого изображения нет, то либо пытаемся его преобразовать, используя полученные в предыдущем параграфе свойства преобразования Лапласа, к сумме функций, имеющих в таблице, либо применяем теоремы разложения.

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть дано дифференциальное уравнение

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = f(t), \quad (2.47)$$

и начальные условия

$$x(0) = x_0, x'(0) = x_1, x''(0) = x_2, \dots, x^{(n-1)}(0) = x_{n-1}, \quad (2.48)$$

где $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ — заданные числа. Требуется найти решение уравнения (2.47), удовлетворяющее начальным условиям (2.48).

Будем предполагать, что функция $f(t)$ и решение $x(t)$ вместе с его производными до n -го порядка являются оригиналами и $F(p) \doteq f(t)$,

$X(p) \doteq x(t)$. По свойству линейности, используя теорему о дифференцировании оригинала, получаем операторное уравнение

$$\begin{aligned} & a_0 \left(p^n X(p) - p^{n-1} x_0 - p^{n-2} x_1 - \dots - p x_{n-2} - x_{n-1} \right) + \\ & + a_1 \left(p^{n-1} X(p) - p^{n-2} x_0 - p^{n-3} x_1 - \dots - p x_{n-3} - x_{n-2} \right) + \dots \\ & \dots + a_{n-1} (p X(p) - x_0) + a_n X(p) = F(p). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} & \left(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + a_{n-1} p + a_n \right) X(p) = \\ & = F(p) + x_0 \left(a_0 p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + \dots + a_{n-1} \right) + \\ & + x_1 \left(a_0 p^{n-2} + a_1 p^{n-3} + \dots + a_{n-2} \right) + \dots + x_{n-1} a_0, \end{aligned}$$

или

$$A(p)X(p) = F(p) + B(p),$$

где $A(p)$ и $B(p)$ — многочлены степеней n и $n-1$. Из этого уравнения находим

$$X(p) = \frac{F(p) + B(p)}{A(p)}. \quad (2.49)$$

Мы получили *операторное решение* дифференциального уравнения (2.47) с начальными условиями (2.48). Оригинал $x(t)$, найденный по изображению (2.49), и будет искомым решением уравнения (2.47), удовлетворяющим условиям (2.48).

Приведем несколько примеров решения уравнений операторным методом.

Пример 2.26 $x' + x = e^t, x(0) = 0$.

Решение. Обозначим $X(p) \doteq x(t)$, тогда $x' \doteq pX(p) - x(0) = pX(p)$. Так как $e^t \doteq \frac{1}{p-1}$, то получаем операторное уравнение $pX(p) + X(p) = \frac{1}{p-1}$. Отсюда $X(p) = \frac{1}{p^2 - 1}$. По формуле (2.8) находим $x(t) = \operatorname{sh} t$ — решение данной задачи.

Пример 2.27 $x'' + 4x = \cos 3t$, $x(0) = x'(0) = 2$.

Решение. Пусть $X(p) \doteq x(t)$, тогда $x'' \doteq p^2 X(p) - px(0) - x'(0) = p^2 X(p) - 2p - 2$. Учитывая, что $\cos 3t \doteq \frac{p}{p^2 + 9}$, получаем операторное уравнение $p^2 X(p) - 2p - 2 + 4X(p) = \frac{p}{p^2 + 9}$. Отсюда находим

$$X(p) = \frac{p}{(p^2 + 9)(p^2 + 4)} + \frac{2p + 2}{p^2 + 4}. \quad (2.50)$$

Для второй дроби оригинал находим по таблице

$$\frac{2p + 2}{p^2 + 4} = 2 \frac{p}{p^2 + 4} + \frac{2}{p^2 + 4} \doteq 2 \cos 2t + \sin 2t.$$

Для первой дроби оригинал можно найти по второй теореме разложения (потребуется вычислять четыре вычета в точках $\pm 2i$ и $\pm 3i$), можно разложить дробь на элементарные (нужно будет находить четыре коэффициента у дробей $\frac{Ap + B}{p^2 + 9}$ и $\frac{Cp + D}{p^2 + 4}$). Мы используем теорему умножения изображений (2.31)

$$\begin{aligned} \frac{p}{(p^2 + 9)(p^2 + 4)} &= \frac{1}{2} \frac{p}{p^2 + 9} \cdot \frac{2}{p^2 + 4} \doteq \frac{1}{2} (\cos 3t * \sin 2t) = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t \cos 3\tau \sin 2(t - \tau) d\tau = \frac{1}{4} \int_0^t [\sin(\tau + 2t) - \sin(5\tau - t)] d\tau = \\ &= \frac{1}{4} \left(-\cos(\tau + 2t) \Big|_0^t + \frac{1}{5} \cos(5\tau - t) \Big|_0^t \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left(\cos 2t - \cos 3t + \frac{1}{5} \cos 3t - \frac{1}{5} \cos 2t \right) = \frac{1}{5} (\cos 2t - \cos 3t). \end{aligned}$$

В итоге находим оригинал для изображения (2.50)

$$x(t) = \frac{1}{5} (\cos 2t - \cos 3t) + 2 \cos 2t + \sin 2t = \frac{11}{5} \cos 2t - \frac{1}{5} \cos 3t + \sin 2t.$$

Эта функция удовлетворяет данному уравнению и начальным условиям.

Пример 2.28 $x^{IV} - x'' = \cos t$; $x(0) = 0$, $x'(0) = -1$, $x''(0) = x'''(0) = 0$.

Решение. Пусть $X(p) \doteq x(t)$, тогда $x'' \doteq p^2 X(p) - px(0) - x'(0) = p^2 X(p) + 1$, $x^{IV} \doteq p^4 X(p) - p^3 x(0) - p^2 x'(0) - px''(0) - x'''(0) = p^4 X(p) + p^2$.

Так как $\cos t \doteq \frac{p}{p^2 + 1}$, то переходя к изображениям и решая полученное операторное уравнение, находим

$$X(p) = \frac{1}{p(p^4 - 1)} - \frac{1}{p^2}.$$

Можно разными способами находить оригинал этого изображения. Мы "схитрим" проделав следующие преобразования:

$$X(p) = \frac{p^4 - (p^4 - 1)}{p(p^4 - 1)} - \frac{1}{p^2} = \frac{p^3}{p^4 - 1} - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}.$$

Очевидно, $\frac{1}{p} \doteq 1$ и $\frac{1}{p^2} \doteq t$. Оригинал для $\frac{p^3}{p^4 - 1}$ мы находили (разными способами) выше: $\frac{p^3}{p^4 - 1} \doteq \frac{1}{2}(\operatorname{ch} t + \cos t)$. Следовательно, решением нашей задачи будет функция

$$x(t) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} t + \cos t) - 1 - t.$$

Пример 2.29 $x'' + 4x = f(t)$, $x(0) = x'(0) = 0$, если функция $f(t)$ задана графиком на рис.2.3.

Решение. Если $X(p) \doteq x(t)$, то, учитывая начальные условия, $x'' \doteq p^2 X(p)$. В примере (2.16) найдено изображение

$$f(t) \doteq \frac{a}{\tau p^2} \left(1 - 2e^{-\tau p} + e^{-2\tau p} \right).$$

Переходя в данном уравнении к изображениям, получим

$$X(p) = \frac{a}{\tau p^2 (p^2 + 4)} \left(1 - 2e^{-\tau p} + 2e^{-2\tau p} \right) =$$

$$= \frac{a}{4\tau} \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2 + 4} \right) \left(1 - 2e^{-\tau p} + 2e^{-2\tau p} \right). \quad (2.51)$$

Выше неоднократно имели $\frac{1}{p^2} \doteq t$ и $\frac{1}{p^2 + 4} = \frac{1}{2} \frac{2}{p^2 + 4} \doteq \frac{1}{2} \sin t$. Перемножая (2.51) и применяя теорему запаздывания,

$$x(t) = \frac{a}{4\tau} \left(t - \frac{1}{2} \sin t - 2(t - \tau)\eta(t - \tau) + \sin(t - \tau)\eta(t - \tau) + \right. \\ \left. + (t - 2\tau)\eta(t - 2\tau) - \frac{1}{2} \sin(t - 2\tau)\eta(t - 2\tau) \right).$$

Эта функция и является решением данного дифференциального уравнения, удовлетворяющим заданным начальным условиям.

В данном примере правая часть дифференциального уравнения имеет различные аналитические выражения на различных участках оси t , и если решать его классическим методом, то придется искать частное решение для каждого участка $[0, \tau]$, $[\tau, 2\tau]$ и $[2\tau, \infty)$. При этом придется пересчитывать начальные условия при переходе от одного участка к другому. Чтобы осознать преимущества операторного метода, полезно решить последний пример классическим методом (попробуйте!).

Выше мы уже отмечали, что еще одно преимущество операторного метода в том, что сразу находится необходимое частное решение, минуя отыскание общего решения дифференциального уравнения.

Но если нужно найти общее решение уравнения, то, задавая начальные условия в виде $x(0) = C_1$, $x'(0) = C_2$, и т.д. (C_i — произвольные постоянные), получим решение, содержащее нужное количество произвольных постоянных (их должно быть столько, каков порядок уравнения), т.е. общее решение дифференциального уравнения.

Пример 2.30 Найти общее решение уравнения $x' + x = e^t$.

Решение. Пусть $x(0) = C$ и $x(t) \doteq X(p)$, $x'(t) = pX(p) - x(0) = pX(p) - C$. Получаем операторное уравнение $pX(p) - C + X(p) = \frac{1}{p-1}$.

Отсюда,

$$X(p) = \frac{1}{p^2 - 1} + \frac{C}{p + 1} \doteq \text{sh } t + Ce^{-t}$$

— искомое общее решение.

В заключение отметим, что операторный метод неприменим к дифференциальным уравнениям с правыми частями $f(t)$, не являющимися оригиналами (например, $\operatorname{tg} t$, $\frac{1}{\sqrt{t}}$, e^{t^2}), и к таким уравнениям обычно применяют классические методы (например, метод вариации постоянных).

§ 2.5. Применение интеграла Дюамеля к решению дифференциальных уравнений

Пусть требуется найти решение линейного уравнения с постоянными коэффициентами

$$a_0 x'' + a_1 x' + a_2 x = f(t), \quad (2.52)$$

удовлетворяющее нулевым начальным условиям $x(0) = x'(0) = 0$. Наряду с этим, рассмотрим уравнение с той же левой частью и правой частью 1, также при нулевых начальных условиях

$$a_0 z'' + a_1 z' + a_2 z = 1, \quad z(0) = z'(0) = 0. \quad (2.53)$$

Переходя к операторным уравнениям в (2.52) и (2.53), получаем

$$a_0 p^2 X(p) + a_1 p X(p) + a_2 X(p) = F(p),$$

$$a_0 p^2 Z(p) + a_1 p Z(p) + a_2 Z(p) = \frac{1}{p}.$$

Разделив первое равенство на второе, будем иметь

$$X(p) = pF(p)Z(p).$$

По формуле Дюамеля (2.32) имеем

$$pF(p)Z(p) \doteq f(0)z(t) + (f' * z).$$

Следовательно,

$$x(t) = f(0)z(t) + \int_0^t z(\tau)f'(t - \tau)d\tau, \quad (2.54)$$

или

$$x(t) = z(0)f(t) + \int_0^t f(\tau)z'(t - \tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)z'(t - \tau)d\tau, \quad (2.55)$$

так как $z(0) = 0$ в силу начальных условий. Очевидно, эта формула справедлива и в общем случае для уравнения (2.47) с нулевыми начальными условиями.

Пример 2.31

$$x'' - x' = \frac{1}{1 + e^t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

Решение. Сначала найдем решение уравнения $z'' - z' = 1$ с начальными условиями $z(0) = z'(0) = 0$. Переходя к изображениям, получаем операторное уравнение $p^2Z(p) - pZ(p) = \frac{1}{p}$, откуда

$$\begin{aligned} Z(p) &= \frac{1}{p^2(p-1)} = \frac{p^2 - (p^2 - 1)}{p^2(p-1)} = \frac{1}{p-1} - \frac{(p-1)(p+1)}{p^2(p-1)} = \\ &= \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

Следовательно, $z(t) = e^t - t - 1$. Для нахождения решения заданного уравнения применим формулу (2.55) при $f(t) = \frac{1}{1 + e^t}$, $z'(t) = e^t - 1$:

$$x(t) = \int_0^t \frac{1}{1 + e^\tau} (e^{t-\tau} - 1) d\tau =$$

$$\begin{aligned}
&= e^t \int_0^t \frac{e^{-\tau} d\tau}{1+e^\tau} - \int_0^t \frac{d\tau}{1+e^\tau} = -e^t \int_0^t \frac{de^{-\tau}}{1+e^\tau} - \int_0^t \frac{e^{-\tau} d\tau}{e^{-\tau}+1} = \\
&= -e^t (e^{-\tau} - \ln(1+e^{-\tau})) \Big|_0^t + \ln(1+e^{-\tau}) \Big|_0^t = \\
&= (e^t + 1) \ln(1+e^{-t}) - (e^t + 1) \ln 2 + e^t - 1 = \\
&= (e^t + 1) \ln \frac{1+e^{-t}}{2} + e^t - 1.
\end{aligned}$$

Эта функция и будет являться искомым решением заданного дифференциального уравнения и удовлетворять нулевым начальным условиям.

Из рассмотренного примера сделаем два вывода.

1. При использовании формулы Дюамеля (2.54) или (2.55) мы минуем нахождение изображения $F(p)$ оригинала $f(t)$.

2. В приложениях часто бывает необходимо решать одно и то же дифференциальное уравнение, но с разными правыми частями. Дело в том, что во многих случаях функцию $f(t)$ в уравнении (2.52) можно трактовать как внешнее воздействие на некоторую физическую систему, которая полностью определяется левой частью (коэффициентами) этого уравнения, а решение $x(t)$ этого уравнения — как отклик системы на это воздействие. Решая уравнение (2.53) (при нулевых начальных условиях, что, в свою очередь, означает, что система перед этим находилась в состоянии покоя), мы находим отклик $z(t)$ системы на входное воздействие $1 = \eta(t)$ — функцию Хевисайда. Отклик системы на любые другие воздействия $f(t)$ можно найти по формуле Дюамеля.

Требование нулевых начальных условий не является существенным. В самом деле, пусть требуется найти решение уравнения (2.52), удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = x_0$, $x'(0) = x_1$. Сделаем в этом уравнении замену $y(t) = x(t) - tx_1 - x_0$. Очевидно, $y(0) = y'(0) = 0$. Получим новое уравнение $a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = f(t) - a_2 tx_1 - a_1 x_1 - a_2 x_0$ с нулевыми начальными условиями.

§ 2.6. Решение систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Метод решения систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами не отличается от метода решения одного уравнения и сразу рассмотрим пример.

Пример 2.32 Найти решение системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + 2x + 2y = 10e^{2t}, \\ \frac{dy}{dt} - 2x + y = 7e^{2t}, \end{cases}$$

удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = 1, y(0) = 3$.

Решение. Если $x(t) \doteq X(p)$ и $y(t) \doteq Y(p)$, то

$$\frac{dx}{dt} \doteq pX(p) - x(0) = pX(p) - 1, \quad \frac{dy}{dt} \doteq pY(p) - y(0) = pY(p) - 3,$$

поэтому, переходя в данной системе к изображениям, получаем операторную систему

$$\begin{cases} (p+2)X(p) + 2Y(p) = \frac{10}{p-2} + 1, \\ -2X(p) + (p+1)Y(p) = \frac{7}{p-2} + 3. \end{cases}$$

Решая эту алгебраическую систему, находим $X(p) = \frac{1}{p-2} \doteq e^{2t}$,
 $Y(p) = \frac{3}{p-2} \doteq 3e^{2t}$.

Следовательно, решением данной задачи будут функции

$$x(t) = e^{2t}, \quad y(t) = 3e^{2t}.$$

Пример 2.33 Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - z, \\ \frac{dy}{dt} = x + y, \\ \frac{dz}{dt} = x + z, \end{cases} \quad x(0) = 1, y(0) = 2, z(0) = 3.$$

Решение. Обозначая $x(p) \doteq X(p)$, $y(p) \doteq Y(p)$ и $z(p) \doteq Z(p)$, получим операторную систему

$$\begin{cases} pX(p) - 1 = Y(p) - Z(p), \\ pY(p) - 2 = X(p) + Y(p), \\ pZ(p) - 3 = X(p) + Z(p). \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} pX(p) - Y(p) + Z(p) = 1, \\ -X(p) + (p-1)Y(p) = 2, \\ -X(p) + (p-1)Z(p) = 3. \end{cases}$$

Из этой системы находим $X(p) = \frac{p-2}{p(p-1)}$, $Y(p) = \frac{2p^2-p-2}{p(p-1)}$. Можно найти и $Z(p)$, но это лишнее усложнение; по найденным $x(t)$ и $y(t)$ проще найти $z(t)$ из первого уравнения системы $z(t) = y(t) - x'(t)$.

Разлагая изображения $X(p)$ и $Y(p)$ на элементарные дроби, получим

$$X(p) = \frac{2(p-1)-p}{p(p-1)} = \frac{2}{p} - \frac{1}{p-1} \doteq 2 - e^t = x(t),$$

$$Y(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-1} + \frac{C}{(p-1)^2} = \frac{-2}{p} + \frac{4}{p-1} - \frac{1}{(p-1)^2} \doteq -2 + 4e^t - te^t = y(t),$$

и, наконец,

$$z(t) = y - \frac{dx}{dt} = -2 + 5e^t - te^t.$$

Итак, решением данной системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющим заданным начальным условиям, будут функции

$$x(t) = 2 - e^t, \quad y(t) = -2 + 4e^t - te^t, \quad z(t) = -2 + 5e^t - te^t.$$

§ 2.7. Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами.

Операторным методом можно решать некоторые линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами, ес-

ли эти коэффициенты — многочлены. Пусть $x(t) \doteq X(p)$. По теоремам дифференцирования оригинала и изображения

$$tx \doteq -X', t^2x \doteq X'', \dots,$$

$$x' \doteq pX(p) - x(0), tx' \doteq -(pX(p))', t^2x' \doteq (pX(p))'', \dots,$$

$$x'' \doteq p^2X(p) - px(0) - x'(0), tx'' \doteq -(p^2X(p))' + x(0),$$

$$t^2x'' \doteq (p^2X(p))'', \dots$$

и т.д. Таким образом, при переходе к изображениям получаем новое дифференциальное уравнение, и если максимальная степень коэффициентов t^n уравнения меньше порядка исходного уравнения, то это уравнение будет иметь более низкий порядок и его легче решать.

Пример 2.34 Найти решение дифференциального уравнения с заданными начальными условиями

$$tx'' + x' + tx = 0, x(0) = 1, x'(0) = 0.$$

Решение. Пусть $x(t) \doteq X(p)$. Тогда

$$tx \doteq -X', x' \doteq pX(p) - 1,$$

$$x'' \doteq p^2X(p) - p, tx'' \doteq -(p^2X(p))' + 1 = -p^2X' - 2pX + 1.$$

Получаем операторное уравнение

$$(1 + p^2)X'(p) + pX'(p) = 0.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Интегрируя его, получаем

$$X(p) = \frac{C}{\sqrt{p^2 + 1}},$$

где C — произвольная постоянная и выбирается та ветвь корня, для которой $\sqrt{1} = 1$. Значение постоянной C найдем, используя предельное соотношение для изображений (2.14)

$$C = \lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow +\infty} \frac{pC}{\sqrt{p^2 + 1}} = \lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow +\infty} pX(p) = x(0) = 1.$$

Таким образом,

$$X(p) = \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}}.$$

Это изображение является [см.(2.40) и (2.39)] изображением функции Бесселя

$$J_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}.$$

§ 2.8. Решение интегральных уравнений типа свертки

В приложениях часто встречаются интегральные уравнения — уравнения, в которых искомая функция содержится под знаком интеграла. Такие уравнения называются *интегральными уравнениями* и для них существует глубокая содержательная теория, подобная теории дифференциальных уравнений.

Интегральные уравнения вида

$$\int_0^t k(t, \tau)x(\tau)d\tau = f(t), \quad (2.56)$$

$$x(t) + \int_0^t k(t, \tau)x(\tau)d\tau = f(t) \quad (2.57)$$

называются *уравнениями Вольтерра* первого и второго рода соответственно. В этих уравнениях $x(t)$ — искомая функция, $f(t)$ — заданная функция, называемая *свободным членом* интегрального уравнения, $k(t, \tau)$ — заданная функция, называемая *ядром* уравнения.

Если в уравнениях (2.56) и (2.57) ядро имеет вид $k(t, \tau) = k(t - \tau)$, то такие уравнения имеют вид

$$\int_0^t k(t - \tau)x(\tau)d\tau = f(t), \quad (2.58)$$

$$x(t) + \int_0^t k(t - \tau)x(\tau)d\tau = f(t) \quad (2.59)$$

и называются *уравнениями типа свертки* (интегралы в этих уравнениях представляют собой свертку $(k * x)$ ядра и искомой функции.

Предположим, что функции $k(t)$, $f(t)$ и $x(t)$ являются оригиналами и пусть $K(p)$, $F(p)$ и $X(p)$ — их изображения.

Используя теорему о свертке, из уравнений (2.58) и (2.59) получаем операторные уравнения

$$K(p)X(p) = F(p),$$

$$X(p) + K(p)X(p) = F(p).$$

Отсюда

$$X(p) = \frac{F(p)}{K(p)}, \quad (2.60)$$

$$X(p) = \frac{F(p)}{1 + K(p)} = F(p) - \frac{K(p)}{1 + K(p)}F(p). \quad (2.61)$$

Правая часть уравнения (2.60) может не быть изображением и в этом случае уравнение (2.58) не имеет решений в классе функций, являющихся оригиналами.

Можно доказать, что функция $\frac{K(p)}{1 + K(p)}$ для достаточно широкого класса ядер $k(t)$ является изображением и пусть $q(t)$ — его оригинал. Тогда из уравнения (2.61) получаем решение уравнения (2.59)

$$x(t) = f(t) - \int_0^t q(t - \tau)f(\tau)d\tau. \quad (2.62)$$

Пример 2.35 *Решить уравнение*

$$x(t) + \int_0^t (t - \tau)x(\tau)d\tau = \sin t.$$

Решение. Ядром данного уравнения является функция $k(t) = t$, имеющая изображение $K(p) = \frac{1}{p^2}$. Значит,

$$\frac{K(p)}{1 + K(p)} = \frac{1}{1 + p^2} \doteq \sin t.$$

По формуле (2.62) получаем

$$x(t) = \sin t - (\sin t * \sin t) = \sin t - \int_0^t \sin(t - \tau) \sin \tau d\tau = \frac{1}{2}(\sin t + t \cos t)$$

(свертка $(\sin t * \sin t)$ найдена в примере (2.2.16)).

§ 2.9. Применение операционного исчисления к расчету электрических контуров

Рассмотрим нестационарные процессы, протекающие в электрической цепи с сосредоточенными параметрами. Предположим, что параметры рассматриваемых схем — сопротивления, емкости и индуктивности — постоянные величины, т.е. не зависят ни от времени, ни от электрического состояния системы. В этом случае поведение системы описывается линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, и для их исследования эффективно использование операционного метода.

Пусть до момента $t = 0$ электрическая цепь находится в состоянии покоя, т.е. в ней нет ни напряжения, ни тока, ни заряда. В момент $t = 0$ на входе прикладывается напряжение $E(t)$. В такой цепи все начальные условия (т.е. токи во всех цепях с индуктивностью и заряды всех конденсаторов) в момент включения равны нулю.

Рассмотрим сначала одиночный замкнутый электрический контур с сосредоточенными параметрами: индуктивностью L , активным сопротивлением R , и емкостью C (рис. 2.6).

К контуру прикладывается напряжение $E(t)$, вызывающее в контуре ток $I(t)$. Падение напряжения на индуктивности равно $L \frac{dI}{dt}$, на сопротивлении RI и на емкости $\frac{1}{C} \int_0^t I(\tau) d\tau$.

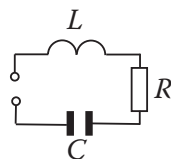


Рис. 2.6

По закону Кирхгофа суммарное падение напряжения в контуре равно приложенной ЭДС $E(t)$, следовательно,

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C} \int_0^t I(\tau) d\tau = E(t). \quad (2.63)$$

Это *интегро-дифференциальное* уравнение, определяющее ток $I(t)$ в цепи. Если в качестве новой переменной ввести заряд конденсатора

$$Q(t) = \int_0^t I(\tau) d\tau,$$

то с учетом того, что $Q'(t) = I(t)$, уравнение (2.63) можно свести к дифференциальному уравнению второго порядка

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = E(t).$$

Можно также, дифференцируя (2.63), получить уравнение второго порядка для тока в цепи

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = \frac{dE}{dt}.$$

Но это возможно лишь в том случае, если функция $E(t)$ дифференцируема, но именно этого часто не бывает (например, $E(t)$ — пилообразное напряжение). Однако для применения операторного метода нет необходимости заменять уравнение (2.63) дифференциальным

уравнением, так как по теореме об интегрировании оригинала

$$\frac{1}{C} \int_0^t I(\tau) d\tau \doteq \frac{1}{Cp} \bar{I}(p),$$

где $\bar{I}(p)$ — изображение оригинала $I(t)$. Таким образом, для уравнения (2.63) получаем операторное уравнение

$$Lp\bar{I}(p) + R\bar{I}(p) + \frac{1}{Cp}\bar{I}(p) = \bar{E}(p),$$

где $\bar{E}(p) \doteq E(t)$. Напомним, что мы предполагаем, что контур в момент $t = 0$ находился в состоянии покоя, т.е. $I(t) = 0$ при $t \leq 0$.

Если для сокращения записи обозначить $Z(p) = Lp + R + \frac{1}{Cp}$, то операторное уравнение принимает вид

$$Z(p)\bar{I}(p) = \bar{E}(p). \quad (2.64)$$

В электротехнике функцию $E(t)$ обычно называют *входной функцией* или *возбуждением*, а функцию $I(t)$ — *выходной функцией* (или *откликом*, *реакцией*) на данное возбуждение. Перенесем аналогично термины на изображения: назовем $\bar{I}(p)$ — (*операторным*) *током*, а функцию $\bar{E}(p)$ — (*операторным*) *напряжением*. Тогда уравнение (2.64), очевидно, выражает не что иное, как закон Ома, если функцию $Z(p)$ назвать сопротивлением. Однако для функции $Z(p)$ принят термин *импеданс*.

Таким образом, замкнутый электрический контур, обладающий индуктивностью, сопротивлением и емкостью и описываемый в пространстве оригиналов уравнением (2.63), в пространстве изображений заменяется контуром, обладающим только сопротивлением $Z(p)$ и подчиняющимся закону Ома.

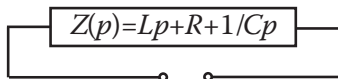


Рис. 2.7

Поэтому для схематического изображения контура в пространстве изображений не требуется отмечать на схеме

условными значками индуктивность L , сопротивление R и емкость C , а изобразить эквивалентной схемой (рис.2.7).

Найдем ток в рассматриваемой цепи при постоянном воздействии E , включаемом в момент $t = 0$. В начальный момент ток в контуре и заряд конденсатора равны нулю.

Так как $E = E\eta(t) \doteq \frac{1}{p}$, то операторное уравнение (2.64) имеет вид $Z(p)\bar{I}(p) = \frac{1}{p}$. Отсюда

$$\bar{I}(p) = \frac{E}{p} \frac{1}{pL + R + \frac{1}{pC}} = \frac{E}{L(p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC})}. \quad (2.65)$$

Найдем корни знаменателя

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}.$$

Следовательно, раскладывая на множители знаменатель, будем иметь

$$\bar{I}(p) = \frac{E}{L(p - p_1)(p - p_2)}. \quad (2.66)$$

Возможны три случая.

1. $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC} = 0$, т.е. $R = 2\sqrt{L/C}$. В этом случае $p_1 = p_2 = -\frac{R}{2L}$ и формула (2.66) принимает вид $\bar{I}(p) = \frac{E}{L(p + \frac{R}{2L})}$.

По формуле (2.24) для этого изображения находим оригинал

$$I(t) = \frac{E}{L} t e^{-\frac{R}{2L}t}.$$

Пусть $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC} \neq 0$. В этом случае корни знаменателя либо действительны и различны, либо комплексно сопряженные. Ясно, что функция $\bar{I}(p)$ в точках $p_{1,2}$ имеет простые полюсы. По второй теореме разложения (или по формуле (7) приложения 1) находим оригинал

$$I(t) = \frac{E}{2\beta L} e^{-\alpha t} (e^{\beta t} - e^{-\beta t}),$$

где $\alpha = \frac{R}{2L}$ и $\beta = \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$.

2. Если $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC} > 0$ т.е. $R > 2\sqrt{L/C}$, то β — действительное число. Ток в цепи равен

$$I(t) = \frac{E}{\beta L} e^{-\alpha t} \operatorname{sh} \beta t.$$

3. Если $\beta^2 = \left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC} < 0$, то, обозначая $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$, и тогда $\beta = i\omega$, для тока в цепи получаем

$$I(t) = \frac{E}{\omega L} e^{-\alpha t} \sin \omega t.$$

В этом случае в контуре появляются затухающие гармонические затухающие колебания с круговой частотой ω .

В физике величина, обратная сопротивлению $1/R$, называется проводимостью. При последовательном соединении проводников их сопротивления складываются, а при параллельном — складываются их проводимости. Поэтому, если два контура с импедансами $Z_1(p)$ и $Z_2(p)$ соединены последовательно, то получается контур с импедансом $Z(p) = Z_1(p) + Z_2(p)$, а при их параллельном соединении $\frac{1}{Z(p)} = \frac{1}{Z_1(p)} + \frac{1}{Z_2(p)}$, т.е.

$$Z(p) = \frac{Z_1(p)Z_2(p)}{Z_1(p) + Z_2(p)}.$$

Если несколько контуров соединено в электрическую цепь, то при переходе в пространство изображений получаем вместо сложных дифференциальных и интегральных соотношений более простые алгебраические соотношения.

Для примера рассмотрим цепь²(рис. 2.8).

Эта цепь имеет два входных и два выходных зажима, следовательно, представляет собой четырехполюсник. На вход подается переменное напряжение $E = E(t)$ и требуется найти напряжение $E_0 = E_0(t)$ на выходе.

²Пример взят из книги: Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. -М.: Мир,1965.

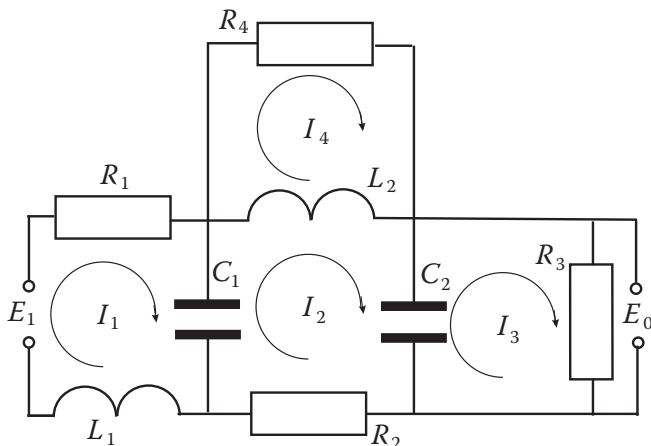


Рис. 2.8

Отметим в каждом контуре величину $I_k(t)$ протекающего в нем тока и произвольно установим положительное направление тока (на схеме — везде по движению часовой стрелки). К каждому контуру применим закон Кирхгофа. При этом будем учитывать, что в контуре, отмеченном через I_1 , ток через конденсатор C_1 равен $I_1 - I_2$, а в контуре, отмеченном через I_2 , ток через индуктивность L_2 равен $I_2 - I_4$ и т. д. Следовательно, уравнения Кирхгофа будут иметь вид

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1 I_1 + \frac{1}{C_1} \int_0^t (I_1 - I_2) d\tau + L_1 \frac{d}{dt} I_1 = E(t), \\ L_2 \frac{d}{dt} (I_2 - I_4) + \frac{1}{C_1} \int_0^t (I_2 - I_3) d\tau + R_2 I_2 + \frac{1}{C_1} \int_0^t (I_2 - I_1) d\tau = 0, \\ R_3 I_3 + \frac{1}{C_2} \int_0^t (I_3 - I_2) d\tau = 0, \\ R_3 I_3 + L_2 \frac{d}{dt} (I_4 - I_2) = 0, \\ R_3 I_3 = E_0(t). \end{array} \right.$$

Переходя в этих уравнениях к изображениям, с учетом нулевых на-

чальных условий, получим операторную систему

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(L_1 p + R_1 + \frac{1}{C_1 p} \right) \bar{I}_1 - \frac{1}{C_1 p} \bar{I}_2 = \bar{E}(p), \\ -\frac{1}{C_1 p} \bar{I}_1 + \left(L_2 p + R_2 + \frac{1}{C_1 p} + \frac{1}{C_2 p} \right) \bar{I}_2 - \frac{1}{C_2 p} \bar{I}_3 - L_2 p \bar{I}_4 = 0, \\ -\frac{1}{C_2 p} \bar{I}_2 + \left(R_3 + \frac{1}{C_2 p} \right) \bar{I}_3 = 0, \\ -L_2 p \bar{I}_2 + (L_2 p + R_4) \bar{I}_4 = 0, \\ R_3 \bar{I}_3 - \bar{E}_0(p), \end{array} \right.$$

где $\bar{I}_k$ — операторные токи, $\bar{E}(p)$ и $\bar{E}_0(p)$ — операторные напряжения.

При достаточном опыте в вычислениях нет необходимости выписывать интегро-дифференциальные уравнения для цепи, а можно сразу составить соответствующие им операторные уравнения: для каждого контура ввести протекающие в нем токи и для каждого из этих токов записать соответствующий ему импеданс. Перемножить соответственные токи и импедансы и, наконец, сложить полученные произведения с учетом направления токов.

Так как по условию нам требуется найти напряжение на выходе четырехполюсника, то нет необходимости полностью решать операторную систему, а достаточно найти операторное напряжение $\bar{E}_0(p)$. Восстановленный по этому изображению оригинал и будет искомым напряжением на выходе цепи.

Если цепь в момент времени $t = 0$ не была в состоянии покоя, то в правой части операторной системы, как это следует из теоремы о дифференцировании оригинала, добавятся слагаемые, зависящие от начальных условий.

ТАБЛИЦА ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЛАПЛАСА

№	Изображение $F(p)$	Оригинал $f(t)$
1	$\frac{1}{p}$	$\eta(t)$
2	$\frac{1}{p^2}$	t
3	$\frac{1}{p^n}, (n = 1, 2, \dots)$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
4	$\frac{1}{p - \lambda}$	$e^{\lambda t}$
5	$\frac{1}{(p - \lambda)^2}$	$te^{\lambda t}$
6	$\frac{1}{(p - \lambda)^n}, (n = 1, 2, \dots)$	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{\lambda t}$
7	$\frac{1}{(p - a)(p - b)}$	$\frac{1}{a - b} (e^{at} - e^{bt})$
8	$\frac{p}{(p - a)(p - b)}$	$\frac{1}{a - b} (ae^{at} - be^{bt})$
9	$\frac{1}{p^2 + \omega^2}$	$\frac{1}{\omega} \sin \omega t$
10	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$\frac{1}{\omega} \cos \omega t$
11	$\frac{1}{(p + \lambda)^2 + \omega^2}$	$\frac{1}{\omega} e^{-\lambda t} \sin \omega t$
12	$\frac{p + \lambda}{(p + \lambda)^2 + \omega^2}$	$e^{-\lambda t} \cos \omega t$
13	$\frac{1}{p^2 - \omega^2}$	$\frac{1}{\omega} \operatorname{sh} \omega t$
14	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$	$\frac{1}{\omega} \operatorname{ch} \omega t$
15	$\frac{1}{p(p^2 + \omega^2)}$	$\frac{1}{\omega^2} (1 - \cos \omega t)$
16	$\frac{1}{p(p^2 - \omega^2)}$	$\frac{1}{\omega^2} (\operatorname{ch} \omega t - 1)$

17	$\frac{1}{(p-a)^3}$	$\frac{1}{2}t^2e^{at}$
18	$\frac{p}{(p-a)^3}$	$\left(t + \frac{1}{2}at^2\right)e^{at}$
19	$\frac{p^2}{(p-a)^3}$	$\left(1 + 2at + \frac{1}{2}a^2t^2\right)e^{at}$
20	$\frac{1}{(p-a)(p-b)^2}$	$\frac{e^{at} - [1 + (a-b)t]e^{bt}}{(a-b)^2}$
21	$\frac{p}{(p-a)(p-b)^2}$	$\frac{ae^{at} - [a + b(a-b)t]e^{bt}}{(a-b)^2}$
22	$\frac{p^2}{(p-a)(p-b)^2}$	$\frac{a^2e^{at} - [2ab - b^2 + b^2(a-b)t]e^{bt}}{(a-b)^2}$
23	$\frac{1}{p^4 + \omega^4}$	$\frac{1}{\omega^3\sqrt{2}}\left(\operatorname{ch}\frac{\omega t}{\sqrt{2}} \cdot \sin\frac{\omega t}{\sqrt{2}} - \operatorname{sh}\frac{\omega t}{\sqrt{2}} \cdot \cos\frac{\omega t}{\sqrt{2}}\right)$
24	$\frac{p}{p^4 + \omega^4}$	$\frac{1}{\omega^2}\sin\frac{\omega t}{\sqrt{2}} \cdot \operatorname{sh}\frac{\omega t}{\sqrt{2}}$
25	$\frac{p^2}{p^4 + \omega^4}$	$\frac{1}{\omega\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\omega t}{\sqrt{2}} \cdot \operatorname{sh}\frac{\omega t}{\sqrt{2}} + \sin\frac{\omega t}{\sqrt{2}} \cdot \operatorname{ch}\frac{\omega t}{\sqrt{2}}\right)$
26	$\frac{p^3}{p^4 + \omega^4}$	$\cos\frac{\omega t}{\sqrt{2}} \cdot \operatorname{ch}\frac{\omega t}{\sqrt{2}}$
27	$\frac{1}{p^4 - \omega^4}$	$\frac{1}{2\omega^3}(\operatorname{sh}\omega t - \operatorname{sh}\omega t)$
28	$\frac{p}{p^4 - \omega^4}$	$\frac{1}{2\omega^2}(\operatorname{ch}\omega t - \cos\omega t)$
29	$\frac{p^2}{p^4 - \omega^4}$	$\frac{1}{2\omega}(\operatorname{sh}\omega t + \sin\omega t)$
30	$\frac{p^3}{p^4 - \omega^4}$	$\frac{1}{2}(\operatorname{ch}\omega t + \cos\omega t)$
31	$\frac{2\omega^2 p}{p^4 + 4\omega^4}$	$\sin\omega t \cdot \operatorname{sh}\omega t$

32	$\frac{\omega (p^2 - 2\omega^2)}{p^4 + 4\omega^4}$	$\cos \omega t \cdot \text{sh } \omega t$
33	$\frac{\omega (p^2 + 2\omega^2)}{p^4 + 4\omega^4}$	$\sin \omega t \cdot \text{ch } \omega t$
34	$\frac{p^3}{p^4 + 4\omega^4}$	$\cos \omega t \cdot \text{ch } \omega t$
35	$\frac{1}{(p^2 + \omega^2)^2}$	$\frac{1}{2\omega^3} (\sin \omega t - \omega t \cos \omega t)$
36	$\frac{p}{(p^2 + \omega^2)^2}$	$\frac{t}{2\omega} \sin \omega t$
37	$\frac{p^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$	$\frac{1}{2\omega} (\sin \omega t + \omega t \cos \omega t)$
38	$\frac{p^3}{(p^2 + \omega^2)^2}$	$\cos \omega t - \frac{\omega t}{2} \sin \omega t$
39	$\frac{1}{(p^2 - \omega^2)^2}$	$\frac{1}{2\omega^3} (\omega t \text{ ch } \omega t - \text{sh } \omega t)$
40	$\frac{p}{(p^2 - \omega^2)^2}$	$\frac{t}{2\omega} \text{sh } \omega t$
41	$\frac{p^2}{(p^2 - \omega^2)^2}$	$\frac{1}{2\omega} (\text{sh } \omega t + \omega t \text{ch } \omega t)$
42	$\frac{p^3}{(p^2 - \omega^2)^2}$	$\text{ch } \omega t - \frac{\omega t}{2} \text{sh } \omega t$
43	$\frac{ab}{(p^2 + a^2)(p^2 + b^2)}$	$\frac{a \sin bt - b \sin at}{a^2 - b^2}$
44	$\frac{p}{(p^2 + a^2)(p^2 + b^2)}$	$\frac{\cos bt - \cos at}{a^2 - b^2}$
45	$\frac{p^2}{(p^2 + a^2)(p^2 + b^2)}$	$\frac{a \sin at - b \sin bt}{a^2 - b^2}$
46	$\frac{p^3}{(p^2 + a^2)(p^2 + b^2)}$	$\frac{a^2 \cos at - b^2 \cos bt}{a^2 - b^2}$
47	$\frac{ab}{(p^2 - a^2)(p^2 - b^2)}$	$\frac{b \text{sh } bt - a \text{sh } at}{a^2 - b^2}$

48	$\frac{p}{(p^2 - a^2)(p^2 - b^2)}$	$\frac{\operatorname{ch} at - \operatorname{ch} bt}{a^2 - b^2}$
49	$\frac{p^2}{(p^2 - a^2)(p^2 - b^2)}$	$\frac{a \operatorname{sh} at - b \operatorname{sh} bt}{a^2 - b^2}$
50	$\frac{p^3}{(p^2 - a^2)(p^2 - b^2)}$	$\frac{a^2 \operatorname{ch} at - b^2 \operatorname{ch} bt}{a^2 - b^2}$
51	$\frac{\omega^4}{p(p^2 + \omega^2)^2}$	$1 - \cos \omega t - \frac{\omega t}{2} \sin \omega t$
52	$\frac{\omega^4}{p(p^2 - \omega^2)^2}$	$1 - \operatorname{ch} \omega t + \frac{\omega t}{2} \operatorname{sh} \omega t$
53	$\frac{a^2 b^2}{p(p^2 + a^2)(p^2 + b^2)}$	$1 + \frac{b^2 \cos at - a^2 \cos bt}{a^2 - b^2}$
54	$\frac{a^2 b^2}{p(p^2 - a^2)(p^2 - b^2)}$	$1 + \frac{b^2 \operatorname{ch} at - a^2 \operatorname{ch} bt}{a^2 - b^2}$

Более подробные таблицы для преобразования Лапласа можно найти в книгах:

1. Диткин В.А., Прудников А.П. Справочник по операционному исчислению. -М.;Гостехиздат,1951.
2. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. -М.; Мир,1965.
3. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. =М.; Наука,1968.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2.

Контрольная работа № 7 по теории функции комплексного переменного и операционному исчислению

В данной контрольной работе принята следующая нумерация:

Первая цифра — номер контрольной работы;

Вторая и третья цифры — номер задачи (с 01 по 09);

Четвертая цифра — номер варианта (который, как обычно, совпадает с последней цифрой шифра студента).

В выполненной контрольной работе задачи должны быть расположены в естественном порядке и иметь данную нумерацию.

7.01 Определить множества всех точек, удовлетворяющих данным соотношениям, и построить их на комплексной плоскости.

7.01.0 $\operatorname{Im} \frac{1}{z} = 1.$

7.01.1 $|z + 2| + |z - 2| = 5.$

7.01.2 $|z + 2| - |z - 2| = 1.$

7.01.3 $|z - 2i| + |z + 2i| > 5.$

7.01.4 $|z - i| = |z + 3|.$

7.01.5 $|z| < \operatorname{Re} z + 1.$

7.01.6 $0 < \operatorname{Re} 2iz < 1.$

7.01.7 $\operatorname{Im} \frac{1}{z} < 1.$

7.01.8 $1 < |z + 1 - i| < 2.$

7.01.9 $|\pi - \arg z| < \frac{\pi}{4}.$

7.02 Вычислить значения функций в заданной точке (ответ дать в алгебраической форме).

7.02.0 a) $\operatorname{Arsh} 3;$ b) $\sqrt{-5 - 12i}.$

7.02.1 a) $\operatorname{Arccos} 3;$ b) $\sqrt{15 - 8i}.$

7.02.2 a) $\operatorname{Ln}(\sqrt{3} + i);$ b) $\sqrt[6]{-8}.$

7.02.3 a) $\operatorname{th}\left(3 - \frac{\pi i}{2}\right);$ b) $\sqrt[4]{-1}.$

7.02.4 a) $\operatorname{Arctg} 3;$ b) $\sqrt[6]{-64}.$

- 7.02.5 a) $\cos(3 + i)$; b) $\sqrt{3 + 4i}$.
 7.02.6 a) $\operatorname{sh}(2 - i)$; b) $\sqrt[3]{i - 1}$.
 7.02.7 a) $\operatorname{ch}(1 + 2i)$; b) $\sqrt{3 - 4i}$.
 7.02.8 a) $\operatorname{Arch} 2i$; b) $\sqrt{-12 + 5i}$.
 7.02.9 a) $\operatorname{cth} \frac{\pi i}{4}$; b) $\sqrt{4i - 3}$.

7.03 Найти значение параметра a , при котором данная функция является гармонической, и найти аналитическую функцию $f(z)$, удовлетворяющую условию $f(z_0) = w_0$, действительной $u(x, y)$ или мнимой $v(x, y)$ частью которой является данная функция. Ответ выразить через переменную z .

- 7.03.0 $u(x, y) = x^2 + ay^2 - xy$; $f(0) = i$.
 7.03.1 $v(x, y) = ax^2 + 6xy + y^2$; $f(0) = 1$.
 7.03.2 $u(x, y) = ax^2 + 2xy + x - 3y$; $f(0) = 2i$.
 7.03.3 $u(x, y) = x^2 - ay^2 + xy$; $f(0) = -2i$.
 7.03.4 $v(x, y) = ay^2 + 2xy + y - 3x$; $f(0) = 3$.
 7.03.5 $u(x, y) = ax^2 + y^2 - 2xy$; $f(0) = i$.
 7.03.6 $v(x, y) = ay^2 - 2xy + 2x - y$; $f(0) = 2$.
 7.03.7 $u(x, y) = x^2 + ay^2 - x - 4y$; $f(0) = 5i$.
 7.03.8 $v(x, y) = ax^2 - 6x + y + y^2$; $f(0) = 1$.
 7.03.9 $v(x, y) = ay^2 - x^2 + 2x + 3y$; $f(0) = 4$.

7.04 Вычислить интегралы (замкнутые кривые обходятся против часовой стрелки).

7.04.0 a) $\oint_l \bar{z} dz$, $l : |z| = 1$;

b) $\oint_l \bar{z} dz$, $l : |z| = 1$.

7.04.1 a) $\oint_l \frac{z}{\bar{z}} dz$, $l : |z| = 2$;

b) $\int_0^i (2z^3 - i + e^{2iz}) dz$.

7.04.2 a) $\int_l \operatorname{Re} z dz$, l — отрезок прямой,

соединяющий точки $z_0 = i$, $z_1 = 2 + 2i$;

b) $\int_0^{2\pi} z \cdot \sin iz dz$.

7.04.3 a) $\oint_l \operatorname{Im} z dz$, l — полуокружность $|z| = 2$, $0 \leq \arg z \leq \pi$

с началом в точке $z = -2$;

b) $\int_0^i (z + 1) \cdot (z^2 + 2z + 2)^4 dz$.

7.04.4 a) $\oint_l (2z - 1) \cdot \bar{z} dz$, $l : |z| = 1$;

b) $\int_0^{1+i} \frac{z^2 - 2z + 2}{(z - 1)^2} dz$.

7.04.5 a) $\oint_l |z| \cdot \bar{z} dz$, l — полуокружность $|z| = 5$,

$-\pi/2 \leq \arg z \leq \pi/2$ с началом в точке $z = i$;

b) $\int_{-i}^i (z + i) \cdot e^{-iz} dz$.

- 7.04.6 a) $\oint_l \operatorname{Im} z^2 dz$, l — парабола $y = x^2$
от точки $z = 0$ до точки $z = 1 + i$;
 $\frac{\pi}{2} - i$
b) $\int \cos^2(z + i) dz$.
- 7.04.7 a) $\oint_l e^{\operatorname{Re} z} dz$, l — отрезок прямой
от точки $z = 0$ до точки $z = 1 + i$;
 $1 + i$
b) $\int z \cdot e^{-iz^2} dz$.
- 7.04.8 a) $\oint_l \frac{\bar{z}}{z} dz$, l — нижняя полуокружность $|z| = 1$
с началом в точке $z = -1$;
 $-i + \pi$
b) $\int (z + i) \cdot \cos(z + i) dz$.
- 7.04.9 a) $\oint_l e^{\bar{z}} dz$, l — отрезок прямой
от точки $z = 0$ до точки $z = 1 - i$;
 $-i + \pi/2$
b) $\int_0^1 (z - 1) \cdot e^{i\pi z} dz$.

7.05 Используя разложения основных элементарных функций, а также почленное дифференцирование и интегрирование степенных рядов, разложить данные функции в ряд Лорана в заданном кольце $r_1 < |z - z_0| < r_2$ и указать области сходимости полученных рядов.

7.05.0 $f(z) = \frac{1}{(z + 1)(z - 2)}$, $0 < |z + 1| < 1$.

7.05.1 $f(z) = \frac{1}{(z - 1)(z + 2)}$, $3 < |z + 2| < 4$.

$$7.05.2 \quad f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-4)}, \quad 0 < |z-4| < 3.$$

$$7.05.3 \quad f(z) = \frac{1}{(z+3)(z-2)}, \quad 5 < |z+3| < 6.$$

$$7.05.4 \quad f(z) = \frac{1}{(z+2)(z-4)}, \quad 0 < |z-4| < 5.$$

$$7.05.5 \quad f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-3)}, \quad 1 < |z+1| < 5.$$

$$7.05.6 \quad f(z) = \frac{1}{(z+2)(z-3)}, \quad 2 < |z-3| < 5.$$

$$7.05.7 \quad f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+4)}, \quad 6 < |z-1| < 7.$$

$$7.05.8 \quad f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-4)}, \quad 6 < |z-4| < 8.$$

$$7.05.9 \quad f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+5)}, \quad 1 < |z+5| < 3.$$

7.06 Вычислить интегралы с помощью вычетов.

$$7.06.0 \quad \oint_{|z|=1} z^2 \left(\sin \frac{1}{z} + \sin z \right) dz. \quad 7.06.1 \quad \oint_{|z|=1} z (e^{1/z} + e^z) dz.$$

$$7.06.2 \quad \oint_{|z|=1} z \left(\cos \frac{1}{z} + \cos z \right) dz. \quad 7.06.3 \quad \oint_{|z|=1} z^2 \left(\sin 2z + \sin \frac{2}{z} \right) dz.$$

$$7.06.4 \quad \oint_{|z|=1} z \left(\sin \frac{1}{z^2} + e^z \right) dz. \quad 7.06.5 \quad \oint_{|z|=1} (z^2 + z) \cdot \sin \frac{2}{z} dz.$$

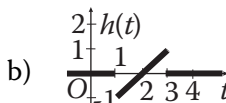
$$7.06.6 \quad \oint_{|z|=1} z \left(\sin^2 z + \cos \frac{1}{z} \right) dz. \quad 7.06.7 \quad \oint_{|z|=1} z \left(e^{\frac{1}{z}} + \cos z \right) dz.$$

$$7.06.8 \quad \oint_{|z|=1} (z+1) \cdot \sin \frac{2}{z} dz. \quad 7.06.9 \quad \oint_{|z|=1} z^2 \cdot \left(e^{2z} + \sin \frac{1}{z} \right) dz.$$

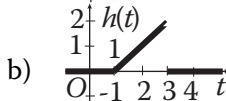
7.07

Найти изображение: а) оригинала $f(t)$, указать примененные свойства; б) оригинала $h(t)$, заданного графически.

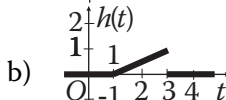
7.07.0 а) $f(t) = t \cdot \cos^2 t$;



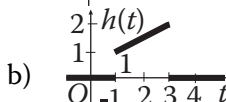
7.07.1 а) $f(t) = t \cdot \cos t \cdot \sin t$;



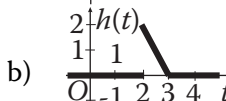
7.07.2 а) $f(t) = t \cdot \operatorname{ch} 2t$;



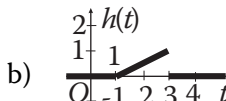
7.07.3 а) $f(t) = t \cdot e^{-t} \cdot \sin t$;



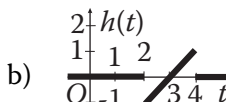
7.07.4 а) $f(t) = \int_0^t \tau^3 e^{-3\tau} d\tau$;



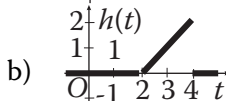
7.07.5 а) $f(t) = \int_0^t e^\tau \cdot \sin(t - \tau) d\tau$;



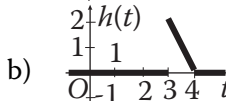
7.07.6 а) $f(t) = e^{2t} \cdot \sin^2 t$;



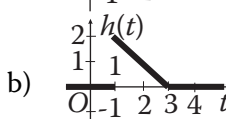
7.07.7 а) $f(t) = \operatorname{ch} t \cdot \cos t$;



7.07.8 а) $f(t) = e^{-t} \cdot \cos t \cdot \cos 3t$;



7.07.9 а) $f(t) = \frac{1 - e^{-2t}}{t}$;



7.08 Решить систему дифференциальных уравнений операторным методом.

$$7.08.0 \quad \begin{cases} x' = y + 2e^t, \\ y' = x + t^2, \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$$

$$7.08.1 \quad \begin{cases} x' = y - 5 \cos t, \\ y' = 2x + y, \end{cases} \quad x(0) = 2, \quad y(0) = 0.$$

$$7.08.2 \quad \begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = x - 5 \sin t, \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad y(0) = -2.$$

$$7.08.3 \quad \begin{cases} x' = 3x + 2y + 4e^{5t}, \\ y' = x + 2y, \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = -3.$$

$$7.08.4 \quad \begin{cases} x' = 2x - y, \\ y' = x + 2e^t, \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 3.$$

$$7.08.5 \quad \begin{cases} x' = 2x + y + e^t, \\ y' = -2x + 2t, \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 0.$$

$$7.08.6 \quad \begin{cases} x' = x + 2y + 16t \cdot e^t, \\ y' = 2x - 2y, \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad y(0) = -2.$$

$$7.08.7 \quad \begin{cases} x' = x - y + 2 \sin t, \\ y' = 2x - y, \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$$

$$7.08.8 \quad \begin{cases} x' = 2x - 3y, \\ y' = x - 2y + 2 \sin t, \end{cases} \quad x(0) = 4, \quad y(0) = 1.$$

$$7.08.9 \quad \begin{cases} x' = 2x - 4y, \\ y' = x - 3y + 3e^t, \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 2.$$

7.09 Решить дифференциальное уравнение, используя интеграл Дюамеля. Ответ можно оставить в виде интеграла, не вычисляя его.

$$7.09.0 \quad x'' + 3x' + 2x = \frac{1}{1 + e^{2t}}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

$$7.09.1 \quad x'' + 4x = \frac{1}{2 + \cos 2t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

$$7.09.2 \quad x'' - 2x' + x = \frac{e^t}{1 + t^2}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

$$7.09.3 \quad x'' + 2x' = t\sqrt{t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

$$7.09.4 \quad x'' - 3x' + 2x = \frac{e^t}{1 + e^t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

$$7.09.5 \quad x'' + x = \operatorname{tg} t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

$$7.09.6 \quad x'' + x = \operatorname{tg}^2 t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

$$7.09.7 \quad x'' + x' = \frac{e^t}{\sqrt{1 - e^{2t}}}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

$$7.09.8 \quad x'' - x' = 2t \cdot \sin e^t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

$$7.09.9 \quad x'' + x = \frac{1}{\cos t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

Список литературы

1. Маркушевич А.И. Краткий курс теории аналитических функций. — М.: Физматгиз, 1961.
2. Лаврентьев М.А. и Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1973.
3. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. — М.: Наука, 1970.
4. Евграфов М.А. Аналитические функции. — М.: Наука, 1968.
5. Фукс Б.А. и Шабат Б.В. Функции комплексного переменного и некоторые их приложения. — М.: Наука, 1964.
6. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. — М.: Физматгиз, 1960.
7. Араманович И.Г., Лунц Г.Л., Эльсгольц А.Э. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. — М.: Физматгиз, 1960.
8. Смирнов В.Ю. Курс высшей математики, т. III, ч. 2. — М.: Гостехиздат, 1956.
9. Диткин В.А. и Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. — М.: Физматгиз, 1961.
10. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. — М.: Наука, 1965.
11. Евграфов М.А. Аналитические функции. — М.: Наука, 1968.
12. Жевержеев В.Ф., Кальницкий Л.А., Сапогов Н.А. Специальный курс высшей математики для втузов. — М.: Высшая школа, 1970.

**Николай Викторович Вахрушев
Наталья Григорьевна Вахрушева**

**ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
Том 4.1.
Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление
Учебное пособие**

Издание второе, переработанное

ПОД РЕДАКЦИЕЙ В. В. ХАБЛОВА

В авторской редакции

Подписано в печать 22.04.09. Формат 60 x 84 1/16. Бумага офсетная. Тираж 350 экз.
Уч.-изд. л. 10,23. Печ. л. 11,0. Изд. № 245. Заказ № . Цена договорная.

Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета
630092, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20