

ТАБЛИЦА ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЛАПЛАСА

№	Изображение $F(p)$	Оригинал $f(t)$
1	$\frac{1}{p}$	$\eta(t)$
2	$\frac{1}{p^2}$	t
3	$\frac{1}{p^n}, (n = 1, 2, \dots)$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
4	$\frac{1}{p - \lambda}$	$e^{\lambda t}$
5	$\frac{1}{(p - \lambda)^2}$	$te^{\lambda t}$
6	$\frac{1}{(p - \lambda)^n}, (n = 1, 2, \dots)$	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{\lambda t}$
7	$\frac{1}{(p - a)(p - b)}$	$\frac{1}{a - b} (e^{at} - e^{bt})$
8	$\frac{p}{(p - a)(p - b)}$	$\frac{1}{a - b} (ae^{at} - be^{bt})$
9	$\frac{1}{p^2 + \omega^2}$	$\frac{1}{\omega} \sin \omega t$
10	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$\frac{1}{\omega} \cos \omega t$
11	$\frac{1}{(p + \lambda)^2 + \omega^2}$	$\frac{1}{\omega} e^{-\lambda t} \sin \omega t$
12	$\frac{p + \lambda}{(p + \lambda)^2 + \omega^2}$	$e^{-\lambda t} \cos \omega t$
13	$\frac{1}{p^2 - \omega^2}$	$\frac{1}{\omega} \operatorname{sh} \omega t$
14	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$	$\frac{1}{\omega} \operatorname{ch} \omega t$
15	$\frac{1}{p(p^2 + \omega^2)}$	$\frac{1}{\omega^2} (1 - \cos \omega t)$
16	$\frac{1}{p(p^2 - \omega^2)}$	$\frac{1}{\omega^2} (\operatorname{ch} \omega t - 1)$

17	$\frac{1}{(p-a)^3}$	$\frac{1}{2}t^2 e^{at}$
18	$\frac{p}{(p-a)^3}$	$\left(t + \frac{1}{2}at^2\right) e^{at}$
19	$\frac{p^2}{(p-a)^3}$	$\left(1 + 2at + \frac{1}{2}a^2t^2\right) e^{at}$
20	$\frac{1}{(p-a)(p-b)^2}$	$\frac{e^{at} - [1 + (a-b)t]e^{bt}}{(a-b)^2}$
21	$\frac{p}{(p-a)(p-b)^2}$	$\frac{ae^{at} - [a + b(a-b)t]e^{bt}}{(a-b)^2}$
22	$\frac{p^2}{(p-a)(p-b)^2}$	$\frac{a^2e^{at} - [2ab - b^2 + b^2(a-b)t]e^{bt}}{(a-b)^2}$
23	$\frac{1}{p^4 + \omega^4}$	$\frac{1}{\omega^3\sqrt{2}}\left(\operatorname{ch}\frac{\omega t}{\sqrt{2}} \cdot \sin\frac{\omega t}{\sqrt{2}} - \operatorname{sh}\frac{\omega t}{\sqrt{2}} \cdot \cos\frac{\omega t}{\sqrt{2}}\right)$
24	$\frac{p}{p^4 + \omega^4}$	$\frac{1}{\omega^2} \sin\frac{\omega t}{\sqrt{2}} \cdot \operatorname{sh}\frac{\omega t}{\sqrt{2}}$
25	$\frac{p^2}{p^4 + \omega^4}$	$\frac{1}{\omega\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\omega t}{\sqrt{2}} \cdot \operatorname{sh}\frac{\omega t}{\sqrt{2}} + \sin\frac{\omega t}{\sqrt{2}} \cdot \operatorname{ch}\frac{\omega t}{\sqrt{2}}\right)$
26	$\frac{p^3}{p^4 + \omega^4}$	$\cos\frac{\omega t}{\sqrt{2}} \cdot \operatorname{ch}\frac{\omega t}{\sqrt{2}}$
27	$\frac{1}{p^4 - \omega^4}$	$\frac{1}{2\omega^3} (\operatorname{sh}\omega t - \operatorname{sh}\omega t)$
28	$\frac{p}{p^4 - \omega^4}$	$\frac{1}{2\omega^2} (\operatorname{ch}\omega t - \cos\omega t)$
29	$\frac{p^2}{p^4 - \omega^4}$	$\frac{1}{2\omega} (\operatorname{sh}\omega t + \sin\omega t)$
30	$\frac{p^3}{p^4 - \omega^4}$	$\frac{1}{2} (\operatorname{ch}\omega t + \cos\omega t)$
31	$\frac{2\omega^2 p}{p^4 + 4\omega^4}$	$\sin\omega t \cdot \operatorname{sh}\omega t$

32	$\frac{\omega (p^2 - 2\omega^2)}{p^4 + 4\omega^4}$	$\cos \omega t \cdot \text{sh } \omega t$
33	$\frac{\omega (p^2 + 2\omega^2)}{p^4 + 4\omega^4}$	$\sin \omega t \cdot \text{ch } \omega t$
34	$\frac{p^3}{p^4 + 4\omega^4}$	$\cos \omega t \cdot \text{ch } \omega t$
35	$\frac{1}{(p^2 + \omega^2)^2}$	$\frac{1}{2\omega^3} (\sin \omega t - \omega t \cos \omega t)$
36	$\frac{p}{(p^2 + \omega^2)^2}$	$\frac{t}{2\omega} \sin \omega t$
37	$\frac{p^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$	$\frac{1}{2\omega} (\sin \omega t + \omega t \cos \omega t)$
38	$\frac{p^3}{(p^2 + \omega^2)^2}$	$\cos \omega t - \frac{\omega t}{2} \sin \omega t$
39	$\frac{1}{(p^2 - \omega^2)^2}$	$\frac{1}{2\omega^3} (\omega t \text{ ch } \omega t - \text{sh } \omega t)$
40	$\frac{p}{(p^2 - \omega^2)^2}$	$\frac{t}{2\omega} \text{sh } \omega t$
41	$\frac{p^2}{(p^2 - \omega^2)^2}$	$\frac{1}{2\omega} (\text{sh } \omega t + \omega t \text{ch } \omega t)$
42	$\frac{p^3}{(p^2 - \omega^2)^2}$	$\text{ch } \omega t - \frac{\omega t}{2} \text{sh } \omega t$
43	$\frac{ab}{(p^2 + a^2)(p^2 + b^2)}$	$\frac{a \sin bt - b \sin at}{a^2 - b^2}$
44	$\frac{p}{(p^2 + a^2)(p^2 + b^2)}$	$\frac{\cos bt - \cos at}{a^2 - b^2}$
45	$\frac{p^2}{(p^2 + a^2)(p^2 + b^2)}$	$\frac{a \sin at - b \sin bt}{a^2 - b^2}$
46	$\frac{p^3}{(p^2 + a^2)(p^2 + b^2)}$	$\frac{a^2 \cos at - b^2 \cos bt}{a^2 - b^2}$
47	$\frac{ab}{(p^2 - a^2)(p^2 - b^2)}$	$\frac{b \text{sh } bt - a \text{sh } at}{a^2 - b^2}$

48	$\frac{p}{(p^2 - a^2)(p^2 - b^2)}$	$\frac{\operatorname{ch} at - \operatorname{ch} bt}{a^2 - b^2}$
49	$\frac{p^2}{(p^2 - a^2)(p^2 - b^2)}$	$\frac{a \operatorname{sh} at - b \operatorname{sh} bt}{a^2 - b^2}$
50	$\frac{p^3}{(p^2 - a^2)(p^2 - b^2)}$	$\frac{a^2 \operatorname{ch} at - b^2 \operatorname{ch} bt}{a^2 - b^2}$
51	$\frac{\omega^4}{p(p^2 + \omega^2)^2}$	$1 - \cos \omega t - \frac{\omega t}{2} \sin \omega t$
52	$\frac{\omega^4}{p(p^2 - \omega^2)^2}$	$1 - \operatorname{ch} \omega t + \frac{\omega t}{2} \operatorname{sh} \omega t$
53	$\frac{a^2 b^2}{p(p^2 + a^2)(p^2 + b^2)}$	$1 + \frac{b^2 \cos at - a^2 \cos bt}{a^2 - b^2}$
54	$\frac{a^2 b^2}{p(p^2 - a^2)(p^2 - b^2)}$	$1 + \frac{b^2 \operatorname{ch} at - a^2 \operatorname{ch} bt}{a^2 - b^2}$

Более подробные таблицы для преобразования Лапласа можно найти в книгах:

1. Диткин В.А., Прудников А.П. Справочник по операционному исчислению. -М.;Гостехиздат,1951.

2. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. -М.; Мир,1965.

3. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. =М.; Наука,1968.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2.

Контрольная работа № 7 по теории функции комплексного переменного и операционному исчислению

В данной контрольной работе принята следующая нумерация:

Первая цифра — номер контрольной работы;

Вторая и третья цифры — номер задачи (с 01 по 09);

Четвертая цифра — номер варианта (который, как обычно, совпадает с последней цифрой шифра студента).

В выполненной контрольной работе задачи должны быть расположены в естественном порядке и иметь данную нумерацию.

7.01 Определить множества всех точек, удовлетворяющих данным соотношениям, и построить их на комплексной плоскости.

7.01.0 $\operatorname{Im} \frac{1}{z} = 1.$

7.01.1 $|z + 2| + |z - 2| = 5.$

7.01.2 $|z + 2| - |z - 2| = 1.$

7.01.3 $|z - 2i| + |z + 2i| > 5.$

7.01.4 $|z - i| = |z + 3|.$

7.01.5 $|z| < \operatorname{Re} z + 1.$

7.01.6 $0 < \operatorname{Re} 2iz < 1.$

7.01.7 $\operatorname{Im} \frac{1}{z} < 1.$

7.01.8 $1 < |z + 1 - i| < 2.$

7.01.9 $|\pi - \arg z| < \frac{\pi}{4}.$

7.02 Вычислить значения функций в заданной точке (ответ дать в алгебраической форме).

7.02.0 a) $\operatorname{Arsh} 3;$ b) $\sqrt{-5 - 12i}.$

7.02.1 a) $\operatorname{Arccos} 3;$ b) $\sqrt{15 - 8i}.$

7.02.2 a) $\operatorname{Ln}(\sqrt{3} + i);$ b) $\sqrt[6]{-8}.$

7.02.3 a) $\operatorname{th}\left(3 - \frac{\pi i}{2}\right);$ b) $\sqrt[4]{-1}.$

7.02.4 a) $\operatorname{Arctg} 3;$ b) $\sqrt[6]{-64}.$

- 7.02.5 a) $\cos(3 + i)$; b) $\sqrt{3 + 4i}$.
 7.02.6 a) $\operatorname{sh}(2 - i)$; b) $\sqrt[3]{i - 1}$.
 7.02.7 a) $\operatorname{ch}(1 + 2i)$; b) $\sqrt{3 - 4i}$.
 7.02.8 a) $\operatorname{Arch} 2i$; b) $\sqrt{-12 + 5i}$.
 7.02.9 a) $\operatorname{cth} \frac{\pi i}{4}$; b) $\sqrt{4i - 3}$.

7.03 Найти значение параметра a , при котором данная функция является гармонической, и найти аналитическую функцию $f(z)$, удовлетворяющую условию $f(z_0) = w_0$, действительной $u(x, y)$ или мнимой $v(x, y)$ частью которой является данная функция. Ответ выразить через переменную z .

- 7.03.0 $u(x, y) = x^2 + ay^2 - xy$; $f(0) = i$.
 7.03.1 $v(x, y) = ax^2 + 6xy + y^2$; $f(0) = 1$.
 7.03.2 $u(x, y) = ax^2 + 2xy + x - 3y$; $f(0) = 2i$.
 7.03.3 $u(x, y) = x^2 - ay^2 + xy$; $f(0) = -2i$.
 7.03.4 $v(x, y) = ay^2 + 2xy + y - 3x$; $f(0) = 3$.
 7.03.5 $u(x, y) = ax^2 + y^2 - 2xy$; $f(0) = i$.
 7.03.6 $v(x, y) = ay^2 - 2xy + 2x - y$; $f(0) = 2$.
 7.03.7 $u(x, y) = x^2 + ay^2 - x - 4y$; $f(0) = 5i$.
 7.03.8 $v(x, y) = ax^2 - 6x + y + y^2$; $f(0) = 1$.
 7.03.9 $v(x, y) = ay^2 - x^2 + 2x + 3y$; $f(0) = 4$.

7.04 Вычислить интегралы (замкнутые кривые обходятся против часовой стрелки).

7.04.0 a) $\oint_l \bar{z} dz$, $l : |z| = 1$;

b) $\oint_l \bar{z} dz$, $l : |z| = 1$.

7.04.1 a) $\oint_l \frac{z}{\bar{z}} dz$, $l : |z| = 2$;

b) $\int_0^i (2z^3 - i + e^{2iz}) dz$.

7.04.2 a) $\int_l \operatorname{Re} z dz$, l — отрезок прямой,

соединяющий точки $z_0 = i$, $z_1 = 2 + 2i$;

b) $\int_0^{2\pi} z \cdot \sin iz dz$.

7.04.3 a) $\oint_l \operatorname{Im} z dz$, l — полуокружность $|z| = 2$, $0 \leq \arg z \leq \pi$

с началом в точке $z = -2$;

b) $\int_0^i (z + 1) \cdot (z^2 + 2z + 2)^4 dz$.

7.04.4 a) $\oint_l (2z - 1) \cdot \bar{z} dz$, $l : |z| = 1$;

b) $\int_0^{1+i} \frac{z^2 - 2z + 2}{(z - 1)^2} dz$.

7.04.5 a) $\oint_l |z| \cdot \bar{z} dz$, l — полуокружность $|z| = 5$,

$-\pi/2 \leq \arg z \leq \pi/2$ с началом в точке $z = i$;

b) $\int_{-i}^i (z + i) \cdot e^{-iz} dz$.

- 7.04.6 a) $\oint_l \operatorname{Im} z^2 dz$, l — парабола $y = x^2$
от точки $z = 0$ до точки $z = 1 + i$;
 $\frac{\pi}{2} - i$
b) $\int \cos^2(z + i) dz$.
- 7.04.7 a) $\oint_l e^{\operatorname{Re} z} dz$, l — отрезок прямой
от точки $z = 0$ до точки $z = 1 + i$;
 $1 + i$
b) $\int z \cdot e^{-iz^2} dz$.
- 7.04.8 a) $\oint_l \frac{\bar{z}}{z} dz$, l — нижняя полуокружность $|z| = 1$
с началом в точке $z = -1$;
 $-i + \pi$
b) $\int (z + i) \cdot \cos(z + i) dz$.
- 7.04.9 a) $\oint_l e^{\bar{z}} dz$, l — отрезок прямой
от точки $z = 0$ до точки $z = 1 - i$;
 $-i + \pi/2$
b) $\int_0^1 (z - 1) \cdot e^{i\pi z} dz$.

7.05 Используя разложения основных элементарных функций, а также почленное дифференцирование и интегрирование степенных рядов, разложить данные функции в ряд Лорана в заданном кольце $r_1 < |z - z_0| < r_2$ и указать области сходимости полученных рядов.

7.05.0 $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-2)}$, $0 < |z+1| < 1$.

7.05.1 $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+2)}$, $3 < |z+2| < 4$.

$$7.05.2 \quad f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-4)}, \quad 0 < |z-4| < 3.$$

$$7.05.3 \quad f(z) = \frac{1}{(z+3)(z-2)}, \quad 5 < |z+3| < 6.$$

$$7.05.4 \quad f(z) = \frac{1}{(z+2)(z-4)}, \quad 0 < |z-4| < 5.$$

$$7.05.5 \quad f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-3)}, \quad 1 < |z+1| < 5.$$

$$7.05.6 \quad f(z) = \frac{1}{(z+2)(z-3)}, \quad 2 < |z-3| < 5.$$

$$7.05.7 \quad f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+4)}, \quad 6 < |z-1| < 7.$$

$$7.05.8 \quad f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-4)}, \quad 6 < |z-4| < 8.$$

$$7.05.9 \quad f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+5)}, \quad 1 < |z+5| < 3.$$

7.06 Вычислить интегралы с помощью вычетов.

$$7.06.0 \quad \oint_{|z|=1} z^2 \left(\sin \frac{1}{z} + \sin z \right) dz. \quad 7.06.1 \quad \oint_{|z|=1} z (e^{1/z} + e^z) dz.$$

$$7.06.2 \quad \oint_{|z|=1} z \left(\cos \frac{1}{z} + \cos z \right) dz. \quad 7.06.3 \quad \oint_{|z|=1} z^2 \left(\sin 2z + \sin \frac{2}{z} \right) dz.$$

$$7.06.4 \quad \oint_{|z|=1} z \left(\sin \frac{1}{z^2} + e^z \right) dz. \quad 7.06.5 \quad \oint_{|z|=1} (z^2 + z) \cdot \sin \frac{2}{z} dz.$$

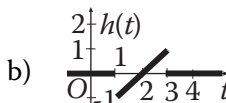
$$7.06.6 \quad \oint_{|z|=1} z \left(\sin^2 z + \cos \frac{1}{z} \right) dz. \quad 7.06.7 \quad \oint_{|z|=1} z \left(e^{\frac{1}{z}} + \cos z \right) dz.$$

$$7.06.8 \quad \oint_{|z|=1} (z+1) \cdot \sin \frac{2}{z} dz. \quad 7.06.9 \quad \oint_{|z|=1} z^2 \cdot \left(e^{2z} + \sin \frac{1}{z} \right) dz.$$

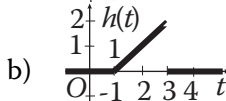
7.07

Найти изображение: а) оригинала $f(t)$, указать примененные свойства; б) оригинала $h(t)$, заданного графически.

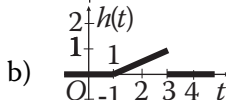
7.07.0 а) $f(t) = t \cdot \cos^2 t$;



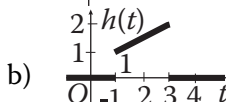
7.07.1 а) $f(t) = t \cdot \cos t \cdot \sin t$;



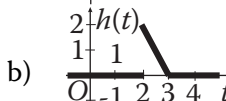
7.07.2 а) $f(t) = t \cdot \operatorname{ch} 2t$;



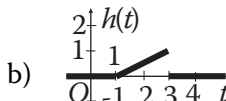
7.07.3 а) $f(t) = t \cdot e^{-t} \cdot \sin t$;



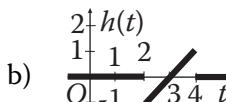
7.07.4 а) $f(t) = \int_0^t \tau^3 e^{-3\tau} d\tau$;



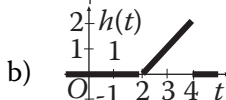
7.07.5 а) $f(t) = \int_0^t e^\tau \cdot \sin(t - \tau) d\tau$;



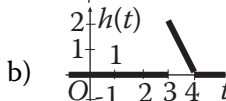
7.07.6 а) $f(t) = e^{2t} \cdot \sin^2 t$;



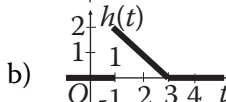
7.07.7 а) $f(t) = \operatorname{ch} t \cdot \cos t$;



7.07.8 а) $f(t) = e^{-t} \cdot \cos t \cdot \cos 3t$;



7.07.9 а) $f(t) = \frac{1 - e^{-2t}}{t}$;



7.08 Решить систему дифференциальных уравнений операторным методом.

$$7.08.0 \quad \begin{cases} x' = y + 2e^t, \\ y' = x + t^2, \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$$

$$7.08.1 \quad \begin{cases} x' = y - 5 \cos t, \\ y' = 2x + y, \end{cases} \quad x(0) = 2, \quad y(0) = 0.$$

$$7.08.2 \quad \begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = x - 5 \sin t, \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad y(0) = -2.$$

$$7.08.3 \quad \begin{cases} x' = 3x + 2y + 4e^{5t}, \\ y' = x + 2y, \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = -3.$$

$$7.08.4 \quad \begin{cases} x' = 2x - y, \\ y' = x + 2e^t, \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 3.$$

$$7.08.5 \quad \begin{cases} x' = 2x + y + e^t, \\ y' = -2x + 2t, \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 0.$$

$$7.08.6 \quad \begin{cases} x' = x + 2y + 16t \cdot e^t, \\ y' = 2x - 2y, \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad y(0) = -2.$$

$$7.08.7 \quad \begin{cases} x' = x - y + 2 \sin t, \\ y' = 2x - y, \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$$

$$7.08.8 \quad \begin{cases} x' = 2x - 3y, \\ y' = x - 2y + 2 \sin t, \end{cases} \quad x(0) = 4, \quad y(0) = 1.$$

$$7.08.9 \quad \begin{cases} x' = 2x - 4y, \\ y' = x - 3y + 3e^t, \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 2.$$

7.09 Решить дифференциальное уравнение, используя интеграл Дюамеля. Ответ можно оставить в виде интеграла, не вычисляя его.

$$7.09.0 \quad x'' + 3x' + 2x = \frac{1}{1 + e^{2t}}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

$$7.09.1 \quad x'' + 4x = \frac{1}{2 + \cos 2t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

$$7.09.2 \quad x'' - 2x' + x = \frac{e^t}{1 + t^2}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

$$7.09.3 \quad x'' + 2x' = t\sqrt{t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

$$7.09.4 \quad x'' - 3x' + 2x = \frac{e^t}{1 + e^t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

$$7.09.5 \quad x'' + x = \operatorname{tg} t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

$$7.09.6 \quad x'' + x = \operatorname{tg}^2 t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

$$7.09.7 \quad x'' + x' = \frac{e^t}{\sqrt{1 - e^{2t}}}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

$$7.09.8 \quad x'' - x' = 2t \cdot \sin e^t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

$$7.09.9 \quad x'' + x = \frac{1}{\cos t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$