Приложение 1

ТАБЛИЦА ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЛАПЛАСА

№	Изображение $F(p)$	Оригинал $f(t)$
1	$\frac{1}{p}$	$\eta(t)$
2	$\frac{1}{p^2}$	t
3	$\frac{1}{p^n}$, $(n = 1, 2, \ldots)$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
4	$\frac{1}{p-\lambda}$	$e^{\lambda t}$
5	$\frac{1}{(p-\lambda)^2}$	$te^{\lambda t}$
6	$\frac{1}{(p-\lambda)^n}$, $(n = 1, 2, \ldots)$	$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{\lambda t}$
7	$\frac{1}{(p-a)(p-b)}$	$\frac{1}{a-b}\left(e^{at} - e^{bt}\right)$
8	$\frac{p}{(p-a)(p-b)}$	$\frac{1}{a-b}\left(ae^{at} - be^{bt}\right)$
9	$\frac{1}{p^2+\omega^2}$	$\frac{1}{\omega}\sin\omega t$
10	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	$\frac{1}{\omega}\cos\omega t$
11	$\frac{1}{(p+\lambda)^2+\omega^2}$	$\frac{1}{\omega}e^{-\lambda t}\sin\omega t$
12	$\frac{p+\lambda}{(p+\lambda)^2+\omega^2}$	$e^{-\lambda t}\cos\omega t$
13	$\frac{1}{p^2-\omega^2}$	$\frac{1}{\omega}\operatorname{sh}\omega t$
14	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$	$\frac{1}{\omega}\operatorname{ch}\omega t$
15	$\frac{1}{p\left(p^2+\omega^2\right)}$	$\frac{1}{\omega^2}(1-\cos\omega t)$
16	$\frac{1}{p\left(p^2-\omega^2\right)}$	$\frac{1}{\omega^2}(\operatorname{ch}\omega t - 1)$

17	$\dfrac{1}{(p-a)^3}$	$\frac{1}{2}t^2e^{at}$
18	$\dfrac{p}{(p-a)^3}$	$\left(t+\frac{1}{2}at^2\right)e^{at}$
19	$\dfrac{p^2}{(p-a)^3}$	$\left(1+2at+\frac{1}{2}a^2t^2\right)e^{at}$
20	$\dfrac{1}{(p-a)(p-b)^2}$	$\dfrac{e^{at}-[1+(a-b)t]e^{bt}}{(a-b)^2}$
21	$\dfrac{p}{(p-a)(p-b)^2}$	$\dfrac{ae^{at}-[a+b(a-b)t]e^{bt}}{(a-b)^2}$
22	$\dfrac{p^2}{(p-a)(p-b)^2}$	$\dfrac{a^2e^{at}-[2ab-b^2+b^2(a-b)t]e^{bt}}{(a-b)^2}$
23	$\dfrac{1}{p^4+\omega^4}$	$\dfrac{1}{\omega^3\sqrt{2}}\left(\operatorname{ch}\dfrac{\omega t}{\sqrt{2}}\cdot\sin\dfrac{\omega t}{\sqrt{2}}-\right.$ $\left.-\operatorname{sh}\dfrac{\omega t}{\sqrt{2}}\cdot\cos\dfrac{\omega t}{\sqrt{2}}\right)$
24	$\dfrac{p}{p^4+\omega^4}$	$\dfrac{1}{\omega^2}\sin\dfrac{\omega t}{\sqrt{2}}\cdot\operatorname{sh}\dfrac{\omega t}{\sqrt{2}}$
25	$\dfrac{p^2}{p^4+\omega^4}$	$\dfrac{1}{\omega\sqrt{2}}\left(\cos\dfrac{\omega t}{\sqrt{2}}\cdot\operatorname{sh}\dfrac{\omega t}{\sqrt{2}}+\right.$ $\left.+\sin\dfrac{\omega t}{\sqrt{2}}\cdot\operatorname{ch}\dfrac{\omega t}{\sqrt{2}}\right)$
26	$\dfrac{p^3}{p^4+\omega^4}$	$\cos\dfrac{\omega t}{\sqrt{2}}\cdot\operatorname{ch}\dfrac{\omega t}{\sqrt{2}}$
27	$\dfrac{1}{p^4-\omega^4}$	$\dfrac{1}{2\omega^3}(\operatorname{sh}\omega t-\operatorname{sh}\omega t)$
28	$\dfrac{p}{p^4-\omega^4}$	$\dfrac{1}{2\omega^2}(\operatorname{ch}\omega t-\cos\omega t)$
29	$\dfrac{p^2}{p^4-\omega^4}$	$\dfrac{1}{2\omega}(\operatorname{sh}\omega t+\sin\omega t)$
30	$\dfrac{p^3}{p^4-\omega^4}$	$\dfrac{1}{2}(\operatorname{ch}\omega t+\cos\omega t)$
31	$\dfrac{2\omega^2 p}{p^4+4\omega^4}$	$\sin\omega t\cdot\operatorname{sh}\omega t$

32	$\dfrac{\omega\left(p^2-2\omega^2\right)}{p^4+4\omega^4}$	$\cos\omega t\cdot\operatorname{sh}\omega t$
33	$\dfrac{\omega\left(p^2+2\omega^2\right)}{p^4+4\omega^4}$	$\sin\omega t\cdot\operatorname{ch}\omega t$
34	$\dfrac{p^3}{p^4+4\omega^4}$	$\cos\omega t\cdot\operatorname{ch}\omega t$
35	$\dfrac{1}{(p^2+\omega^2)^2}$	$\dfrac{1}{2\omega^3}(\sin\omega t-\omega t\cos\omega t)$
36	$\dfrac{p}{(p^2+\omega^2)^2}$	$\dfrac{t}{2\omega}\sin\omega t$
37	$\dfrac{p^2}{(p^2+\omega^2)^2}$	$\dfrac{1}{2\omega}(\sin\omega t+\omega t\cos\omega t)$
38	$\dfrac{p^3}{(p^2+\omega^2)^2}$	$\cos\omega t-\dfrac{\omega t}{2}\sin\omega t$
39	$\dfrac{1}{(p^2-\omega^2)^2}$	$\dfrac{1}{2\omega^3}(\omega t\operatorname{ch}\omega t-\operatorname{sh}\omega t)$
40	$\dfrac{p}{(p^2-\omega^2)^2}$	$\dfrac{t}{2\omega}\operatorname{sh}\omega t$
41	$\dfrac{p^2}{(p^2-\omega^2)^2}$	$\dfrac{1}{2\omega}(\operatorname{sh}\omega t+\omega t\operatorname{ch}\omega t)$
42	$\dfrac{p^3}{(p^2-\omega^2)^2}$	$\operatorname{ch}\omega t-\dfrac{\omega t}{2}\operatorname{sh}\omega t$
43	$\dfrac{ab}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$	$\dfrac{a\sin bt-b\sin at}{a^2-b^2}$
44	$\dfrac{p}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$	$\dfrac{\cos bt-\cos at}{a^2-b^2}$
45	$\dfrac{p^2}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$	$\dfrac{a\sin at-b\sin bt}{a^2-b^2}$
46	$\dfrac{p^3}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$	$\dfrac{a^2\cos at-b^2\cos bt}{a^2-b^2}$
47	$\dfrac{ab}{(p^2-a^2)(p^2-b^2)}$	$\dfrac{b\operatorname{sh}bt-a\operatorname{sh}bt}{a^2-b^2}$

48	$\dfrac{p}{(p^2-a^2)(p^2-b^2)}$	$\dfrac{\operatorname{ch} at - \operatorname{ch} bt}{a^2-b^2}$
49	$\dfrac{p^2}{(p^2-a^2)(p^2-b^2)}$	$\dfrac{a \operatorname{sh} at - b \operatorname{sh} bt}{a^2-b^2}$
50	$\dfrac{p^3}{(p^2-a^2)(p^2-b^2)}$	$\dfrac{a^2 \operatorname{ch} at - b^2 \operatorname{ch} bt}{a^2-b^2}$
51	$\dfrac{\omega^4}{p(p^2+\omega^2)^2}$	$1-\cos\omega t-\dfrac{\omega t}{2}\sin\omega t$
52	$\dfrac{\omega^4}{p(p^2-\omega^2)^2}$	$1-\operatorname{ch}\omega t+\dfrac{\omega t}{2}\operatorname{sh}\omega t$
53	$\dfrac{a^2b^2}{p(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$	$1+\dfrac{b^2\cos at-a^2\cos bt}{a^2-b^2}$
54	$\dfrac{a^2b^2}{p(p^2-a^2)(p^2-b^2)}$	$1+\dfrac{b^2\operatorname{ch} at-a^2\operatorname{ch} bt}{a^2-b^2}$

Более подробные таблицы для преобразования Лапласа можно найти в книгах:

1. Диткин В.А., Прудников А.П. Справочник по операционному исчислению. -М.;Гостехиздат,1951.

2. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. -М.; Мир,1965.

3. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. =М.; Наука,1968.

Приложение 2.

Контрольная работа № 7
по теории функции комплексного переменного и операционному исчислению

В данной контрольной работе принята следующая нумерация:

Первая цифра — номер контрольной работы;

Вторая и третья цифры — номер задачи (с 01 по 09);

Четвертая цифра — номер варианта (который, как обычно, совпадает с последней цифрой шифра студента).

В выполненной контрольной работе задачи должны быть расположены в естественном порядке и иметь данную нумерацию.

***

7.01 Определить множества всех точек, удовлетворяющих данным соотношениям, и построить их на комплексной плоскости.

7.01.0	$\operatorname{Im}\dfrac{1}{z} = 1$.	7.01.1	$\lvert z+2\rvert + \lvert z-2\rvert = 5$.
7.01.2	$\lvert z+2\rvert - \lvert z-2\rvert = 1$.	7.01.3	$\lvert z-2i\rvert + \lvert z+2i\rvert > 5$.
7.01.4	$\lvert z-i\rvert = \lvert z+3\rvert$.	7.01.5	$\lvert z\rvert < \operatorname{Re} z + 1$.
7.01.6	$0 < \operatorname{Re} 2iz < 1$.	7.01.7	$\operatorname{Im}\dfrac{1}{z} < 1$.
7.01.8	$1 < \lvert z+1-i\rvert < 2$.	7.01.9	$\lvert \pi - \arg z\rvert < \dfrac{\pi}{4}$.

7.02 Вычислить значения функций в заданной точке (ответ дать в алгебраической форме).

7.02.0	a)	$\operatorname{Arsh} 3$;	b)	$\sqrt{-5-12i}$.
7.02.1	a)	$\operatorname{Arccos} 3$;	b)	$\sqrt{15-8i}$.
7.02.2	a)	$\operatorname{Ln}\left(\sqrt{3}+i\right)$;	b)	$\sqrt[6]{-8}$.
7.02.3	a)	$\operatorname{th}\left(3-\dfrac{\pi i}{2}\right)$;	b)	$\sqrt[4]{-1}$.
7.02.4	a)	$\operatorname{Arctg} 3$;	b)	$\sqrt[6]{-64}$.

7.02.5	a)	$\cos(3+i)$;	b)	$\sqrt{3+4i}$.
7.02.6	a)	$\operatorname{sh}(2-i)$;	b)	$\sqrt[3]{i-1}$.
7.02.7	a)	$\operatorname{ch}(1+2i)$;	b)	$\sqrt{3-4i}$.
7.02.8	a)	$\operatorname{Arch} 2i$;	b)	$\sqrt{-12+5i}$.
7.02.9	a)	$\operatorname{cth}\frac{\pi i}{4}$;	b)	$\sqrt{4i-3}$.

7.03 Найти значение параметра a, при котором данная функция является гармонической, и найти аналитическую функцию $f(z)$, удовлетворяющую условию $f(z_0) = w_0$, действительной $u(x, y)$ или мнимой $v(x, y)$ частью которой является данная функция. Ответ выразить через переменную z.

7.03.0	$u(x,y) = x^2 + ay^2 - xy$;	$f(0) = i$.
7.03.1	$v(x,y) = ax^2 + 6xy + y^2$;	$f(0) = 1$.
7.03.2	$u(x,y) = ax^2 + 2xy + x - 3y$;	$f(0) = 2i$.
7.03.3	$u(x,y) = x^2 - ay^2 + xy$;	$f(0) = -2i$.
7.03.4	$v(x,y) = ay^2 + 2xy + y - 3x$;	$f(0) = 3$.
7.03.5	$u(x,y) = ax^2 + y^2 - 2xy$;	$f(0) = i$.
7.03.6	$v(x,y) = ay^2 - 2xy + 2x - y$;	$f(0) = 2$.
7.03.7	$u(x,y) = x^2 + ay^2 - x - 4y$;	$f(0) = 5i$.
7.03.8	$v(x,y) = ax^2 - 6x + y + y^2$;	$f(0) = 1$.
7.03.9	$v(x,y) = ay^2 - x^2 + 2x + 3y$;	$f(0) = 4$.

7.04 Вычислить интегралы (замкнутые кривые обходятся против часовой стрелки).

7.04.0 a) $\oint\limits_l \bar{z}dz\,, \quad l:|z|=1;$

b) $\oint\limits_l \bar{z}dz\,, \quad l:|z|=1\,.$

7.04.1 a) $\oint\limits_l \frac{z}{\bar{z}}dz\,, \quad l:|z|=2;$

b) $\int\limits_0^i \left(2z^3-i+e^{2iz}\right)dz\,.$

7.04.2 a) $\int\limits_l \operatorname{Re} z dz\,, \quad l$—отрезок прямой,

соединяющий точки $z_0=i, z_1=2+2i;$

b) $\int\limits_0^{2\pi i} z\cdot\sin izdz\,.$

7.04.3 a) $\oint\limits_l \operatorname{Im} z dz\,, \quad l$—полуокружность $|z|=2, 0\le\arg z\le\pi$

с началом в точке $z=-2;$

b) $\int\limits_0^i (z+1)\cdot\left(z^2+2z+2\right)^4dz\,.$

7.04.4 a) $\oint\limits_l (2z-1)\cdot\bar{z}dz\,, \quad l:|z|=1;$

b) $\int\limits_0^{1+i} \frac{z^2-2z+2}{(z-1)^2}dz\,.$

7.04.5 a) $\oint\limits_l |z|\cdot\bar{z}dz\,, \quad l$—полуокружность $|z|=5,$

$-\pi/2\le\arg z\le\pi/2$ с началом в точке $z=i;$

b) $\int\limits_{-i}^i (z+i)\cdot e^{-iz}dz\,.$

7.04.6 a) $\oint\limits_l \operatorname{Im} z^2 dz$, l—парабола $y = x^2$

от точки $z = 0$ до точки $z = 1 + i$;

b) $\int\limits_{\pi - i}^{\frac{\pi}{2} - i} \cos^2(z + i) dz$.

7.04.7 a) $\oint\limits_l e^{\operatorname{Re} z} dz$, l—отрезок прямой

от точки $z = 0$ до точки $z = 1 + i$;

b) $\int\limits_{-1-i}^{1+i} z \cdot e^{-iz^2} dz$.

7.04.8 a) $\oint\limits_l \frac{\bar{z}}{z} dz$, l—нижняя полуокружность $|z| = 1$

с началом в точке $z = -1$;

b) $\int\limits_{-i+\pi/2}^{-i+\pi} (z + i) \cdot \cos(z + i) dz$.

7.04.9 a) $\oint\limits_l e^{\bar{z}} dz$, l—отрезок прямой

от точки $z = 0$ до точки $z = 1 - i$;

b) $\int\limits_0^1 (z - 1) \cdot e^{i\pi z} dz$.

7.05

Используя разложения основных элементарных функций, а также почленное дифференцирование и интегрирование степенных рядов, разложить данные функции в ряд Лорана в заданном кольце $r_1 < |z - z_0| < r_2$ и указать области сходимости полученных рядов.

7.05.0 $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)(z-2)}$, $0 < |z + 1| < 1$.

7.05.1 $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z+2)}$, $3 < |z + 2| < 4$.

7.05.2 $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)(z-4)}\,, \quad 0 < |z-4| < 3\,.$

7.05.3 $f(z) = \dfrac{1}{(z+3)(z-2)}\,, \quad 5 < |z+3| < 6\,.$

7.05.4 $f(z) = \dfrac{1}{(z+2)(z-4)}\,, \quad 0 < |z-4| < 5\,.$

7.05.5 $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)(z-3)}\,, \quad 1 < |z+1| < 5\,.$

7.05.6 $f(z) = \dfrac{1}{(z+2)(z-3)}\,, \quad 2 < |z-3| < 5\,.$

7.05.7 $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z+4)}\,, \quad 6 < |z-1| < 7\,.$

7.05.8 $f(z) = \dfrac{1}{(z-2)(z-4)}\,, \quad 6 < |z-4| < 8\,.$

7.05.9 $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)(z+5)}\,, \quad 1 < |z+5| < 3\,.$

7.06 Вычислить интегралы с помощью вычетов.

7.06.0 $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1} z^2\left(\sin\frac{1}{z} + \sin z\right) dz\,.$

7.06.1 $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1} z\left(e^{1/z} + e^{z}\right) dz\,.$

7.06.2 $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1} z\left(\cos\frac{1}{z} + \cos z\right) dz\,.$

7.06.3 $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1} z^2\left(\sin 2z + \sin\frac{2}{z}\right) dz\,.$

7.06.4 $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1} z\left(\sin\frac{1}{z^2} + e^{z}\right) dz\,.$

7.06.5 $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1} \left(z^2 + z\right)\cdot\sin\frac{2}{z} dz\,.$

7.06.6 $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1} z\left(\sin^2 z + \cos\frac{1}{z}\right) dz\,.$

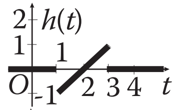
7.06.7 $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1} z\left(e^{\frac{1}{z}} + \cos z\right) dz\,.$

7.06.8 $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1} (z+1)\cdot\sin\frac{2}{z} dz\,.$

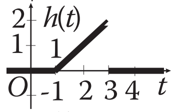
7.06.9 $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1} z^2\cdot\left(e^{2z} + \sin\frac{1}{z}\right) dz\,.$

7.07 Найти изображение: a) оригинала $f(t)$, указать примененные свойства; b) оригинала $h(t)$, заданного графически.

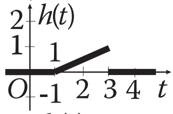
7.07.0 a) $f(t) = t \cdot \cos^2 t;$ b)



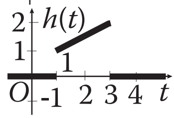
7.07.1 a) $f(t) = t \cdot \cos t \cdot \sin t;$ b)



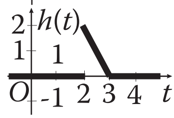
7.07.2 a) $f(t) = t \cdot \operatorname{ch} 2t;$ b)



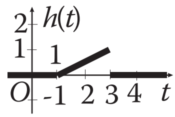
7.07.3 a) $f(t) = t \cdot e^{-t} \cdot \sin t;$ b)



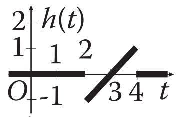
7.07.4 a) $f(t) = \int\limits_0^t \tau^3 e^{-3\tau} d\tau;$ b)



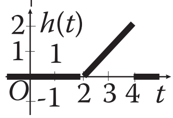
7.07.5 a) $f(t) = \int\limits_0^t e^{\tau} \cdot \sin(t - \tau) d\tau;$ b)



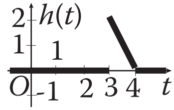
7.07.6 a) $f(t) = e^{2t} \cdot \sin^2 t;$ b)



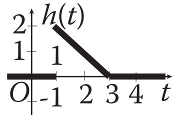
7.07.7 a) $f(t) = \operatorname{ch} t \cdot \cos t;$ b)



7.07.8 a) $f(t) = e^{-t} \cdot \cos t \cdot \cos 3t;$ b)



7.07.9 a) $f(t) = \frac{1 - e^{-2t}}{t};$ b)



7.08 Решить систему дифференциальных уравнений операторным методом.

7.08.0 $\begin{cases} x' = y + 2e^t, \\ y' = x + t^2, \end{cases} \quad x(0) = 0\,, \quad y(0) = 1\,.$

7.08.1 $\begin{cases} x' = y - 5\cos t, \\ y' = 2x + y, \end{cases} \quad x(0) = 2\,, \quad y(0) = 0\,.$

7.08.2 $\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = x - 5\sin t, \end{cases} \quad x(0) = 0\,, \quad y(0) = -2\,.$

7.08.3 $\begin{cases} x' = 3x + 2y + 4e^{5t}, \\ y' = x + 2y, \end{cases} \quad x(0) = 1\,, \quad y(0) = -3\,.$

7.08.4 $\begin{cases} x' = 2x - y, \\ y' = x + 2e^t, \end{cases} \quad x(0) = 1\,, \quad y(0) = 3\,.$

7.08.5 $\begin{cases} x' = 2x + y + e^t, \\ y' = -2x + 2t, \end{cases} \quad x(0) = 0\,, \quad y(0) = 0\,.$

7.08.6 $\begin{cases} x' = x + 2y + 16t \cdot e^t, \\ y' = 2x - 2y, \end{cases} \quad x(0) = 0\,, \quad y(0) = -2\,.$

7.08.7 $\begin{cases} x' = x - y + 2\sin t, \\ y' = 2x - y, \end{cases} \quad x(0) = 0\,, \quad y(0) = 1\,.$

7.08.8 $\begin{cases} x' = 2x - 3y, \\ y' = x - 2y + 2\sin t, \end{cases} \quad x(0) = 4\,, \quad y(0) = 1\,.$

7.08.9 $\begin{cases} x' = 2x - 4y, \\ y' = x - 3y + 3e^t, \end{cases} \quad x(0) = 1\,, \quad y(0) = 2\,.$

7.09 Решить дифференциальное уравнение, используя интеграл Дюамеля. Ответ можно оставить в виде интеграла, не вычисляя его.

7.09.0 $x'' + 3x' + 2x = \dfrac{1}{1+e^{2t}}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

7.09.1 $x'' + 4x = \dfrac{1}{2+\cos 2t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

7.09.2 $x'' - 2x' + x = \dfrac{e^t}{1+t^2}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

7.09.3 $x'' + 2x' = t\sqrt{t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

7.09.4 $x'' - 3x' + 2x = \dfrac{e^t}{1+e^t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

7.09.5 $x'' + x = \operatorname{tg} t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

7.09.6 $x'' + x = \operatorname{tg}^2 t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

7.09.7 $x'' + x' = \dfrac{e^t}{\sqrt{1-e^{2t}}}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

7.09.8 $x'' - x' = 2t \cdot \sin e^t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

7.09.9 $x'' + x = \dfrac{1}{\cos t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$