Оглавление

Предисловие **1**

Глава 1. **Введение. Общематематические понятия** **2**
§ 1.1 Структура математического языка 2
§ 1.2 Множества 3
§ 1.3 Множество действительных чисел 5
§ 1.4 Числовая ось и десятичное представление действительных чисел 7
§ 1.5 Абсолютная величина числа. Промежутки на числовой оси 11
§ 1.6 Функция 12
1.6.1. Понятие функции (отображения) 12
1.6.2. Композиция функций. Обратные функции 13
1.6.3. Способы задания функции. График 14
1.6.4. Элементарные функции 17

Глава 2. **Матрицы и системы линейных уравнений** **19**
§ 2.1 Матрицы и операции над ними 21
2.1.1. Линейные операции над матрицами 21
2.1.2. Умножение матриц 26
2.1.3. Свойства матричного умножения 30
2.1.4. Примеры матричного умножения 32
§ 2.2 Определители 36
2.2.1. Свойства суммирования 36
2.2.2. Понятие определителя. Примеры 38
2.2.3. Свойства определителей 44
§ 2.3 Обратная матрица 51
2.3.1. Определение и свойства обратной матрицы 51
2.3.2. Существование обратной матрицы. 53

2.3.3. Решение систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы 55
§ 2.4 Ранг матрицы 57
2.4.1. Линейная независимость строк и столбцов 57
2.4.2. Ранг матрицы. Теоремы о базисном миноре и о ранге матрицы 60
2.4.3. Элементарные преобразования матриц 65
§ 2.5 Системы линейных уравнений 68
2.5.1. Основные понятия. Матричная запись системы 68
2.5.2. Формулы Крамера 70
§ 2.6 Системы линейных уравнений. Общая теория 72
2.6.1. Условие совместности системы. Теорема Кронекера–Капелли 72
2.6.2. Однородные системы линейных уравнений 73
2.6.3. Неоднородные системы линейных уравнений 80

Глава 3. **Векторная алгебра** **84**
§ 3.1 Понятия вектора и линейные операции 84
3.1.1. Линейные операции над векторами 86
§ 3.2 Базис на плоскости и в пространстве 90
3.2.1. Линейная зависимость и линейная независимость векторов 91
3.2.2. Линейная зависимость и линейная независимость векторов на плоскости и в пространстве. Компланарные векторы 91
3.2.3. Базис на плоскости и в пространстве 94
3.2.4. Декартов прямоугольный базис. Декартова прямоугольная система координат 97
3.2.5. Условия равенства и коллинеарности векторов в координатной форме 99
§ 3.3 Проекция вектора на ось. 100
3.3.1. Длина вектора в координатной форме. Направляющие косинусы 103
3.3.2. Деление отрезка в заданном отношении 105
§ 3.4 Скалярное произведение векторов 107
3.4.1. Геометрические свойства скалярного произведения 108
3.4.2. Алгебраические свойства скалярного произведения . . 109

3.4.3. Выражение скалярного произведения в декартовых координатах . . . 110
§ 3.5 Векторное произведение двух векторов . . . 112
3.5.1. Определение векторного произведения . . . 112
3.5.2. Выражение векторного произведения в декартовых координатах . . . 114
§ 3.6 Смешанное произведение векторов . . . 116
3.6.1. Определение смешанного произведения и его геометрический смысл . . . 116
3.6.2. Выражение смешанного произведения в декартовых координатах . . . 118

Глава 4. **Аналитическая геометрия** **121**
§ 4.1 Уравнение линии на плоскости. Полярная система координат. Уравнение поверхности и линии в пространстве . . . 121
4.1.1. Полярная система координат . . . 122
4.1.2. Уравнение поверхности в пространстве. Цилиндрические поверхности . . . 124
4.1.3. Уравнение линии в пространстве . . . 124
§ 4.2 Прямая на плоскости . . . 125
4.2.1. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Касательная и нормаль к кривой . . . 125
4.2.2. Общее и каноническое уравнения прямой . . . 126
4.2.3. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки. Параметрические уравнения прямой . . . 130
4.2.4. Угол между двумя прямыми. Условие перпендикулярности и параллельности прямых . . . 132
§ 4.3 Плоскость . . . 134
4.3.1. Общее уравнение плоскости . . . 134
4.3.2. Неполные уравнения плоскости . . . 135
4.3.3. Угол между двумя плоскостями. Условие параллельности и перпендикулярности плоскостей . . . 136
§ 4.4 Прямая в пространстве . . . 137
4.4.1. Канонические уравнения прямой в пространстве . . . 137

4.4.2. Уравнение прямой, проходящей через две точки . . . 138
4.4.3. Параметрические уравнения прямой в пространстве . . . 139
4.4.4. Угол между двумя прямыми в пространстве. Условия параллельности и перпендикулярности прямых . . . 139
4.4.5. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку перпендикулярно заданной плоскости . . . 140
4.4.6. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно заданной прямой . . . 141
4.4.7. Угол между прямой и плоскостью. Условие перпендикулярности и параллельности прямой и плоскости . . . 141
4.4.8. Векторные уравнения прямой и плоскости . . . 142
§ 4.5 Кривые второго порядка . . . 145
4.5.1. Эллипс . . . 147
4.5.2. Эллипс. Исследование формы . . . 149
4.5.3. Гипербола . . . 152
4.5.4. Гипербола: исследование формы . . . 153
4.5.5. Эксцентриситет эллипса и гиперболы . . . 156
4.5.6. Парабола . . . 157
4.5.7. «Почти канонические» уравнения эллипса, гиперболы и параболы . . . 159
4.5.8. Оптические свойства эллипса, гиперболы и параболы 161

Глава 5. **Комплексные числа** **162**
§ 5.1 Понятие комплексного числа . . . 163
§ 5.2 Операции над комплексными числами . . . 165
§ 5.3 Показательная, тригонометрические и гиперболические функции комплексного переменного. . . . 169

Глава 6. **Элементарная теория предела** **173**
§ 6.1 Предел последовательности . . . 173
6.1.1. Существо вопроса . . . 173
6.1.2. Определение числовой последовательности и ее предела 174
6.1.3. Свойства предела последовательности . . . 175

6.1.4. Предельный переход в неравенствах 178
6.1.5. Монотонные последовательности 179
6.1.6. Число e 180
6.1.7. Применение к приближенным вычислениям 181
§ 6.2 Предел числовой функции 181
6.2.1. Определение и примеры 181
6.2.2. Предельный переход в неравенствах 184
6.2.3. Первый замечательный предел 185
6.2.4. Предел сложной функции 186
6.2.5. Второй замечательный предел 187
6.2.6. Предел монотонной функции 187
6.2.7. Односторонние пределы 188
§ 6.3 Непрерывные функции 189
6.3.1. Определение и примеры 189
6.3.2. Операции над непрерывными функциями 190
6.3.3. Свойства функции, непрерывной на замкнутом промежутке 190
6.3.4. Непрерывность обратной функции 191
6.3.5. Непрерывность элементарных функций 193
6.3.6. Сравнение бесконечно малых функций 193
6.3.7. Три типа разрыва непрерывности функций 195

Глава 7. **Дифференциальное исчисление функции одной переменной** **197**
§ 7.1 Производная и дифференциал 197
7.1.1. Вычисление скорости прямолинейного движения 197
7.1.2. Понятие производной 198
7.1.3. Вычисление производной основных элементарных функций $y = ax + c$, $y = \sin x$, $y = \log_a x$ 199
7.1.4. Дифференциал функции 200
7.1.5. Геометрический смысл производной и дифференциала 201
7.1.6. Непрерывность и дифференцируемость 203
§ 7.2 Свойства операции дифференцирования 204
7.2.1. Дифференцирование арифметических операций 205
7.2.2. Производная сложной функции 207
7.2.3. Производная обратной функции 209

7.2.4. Сводка основных правил и формул 211
7.2.5. Логарифмическое дифференцирование 212
7.2.6. Дифференцирование произведения 212
7.2.7. Дифференцирование неявно заданных функций 213
7.2.8. Дифференцирование функций, заданных параметрически 213
§ 7.3 Повторное дифференцирование 214
7.3.1. Производные старших порядков 214
7.3.2. Повторное дифференцирование неявно заданных функций 215
7.3.3. Повторное дифференцирование функций, заданных параметрически 216
7.3.4. Дифференциалы высших порядков 217
§ 7.4 Приложения дифференциального исчисления 217
7.4.1. Основные теоремы дифференциального исчисления 218
7.4.2. Формула Тейлора 223
7.4.3. Правило Лопиталя 232
7.4.4. Исследование поведения функции 236
7.4.5. Построение графиков функций 246

Глава 8. **Линейные пространства** **252**
§ 8.1 Понятие линейного пространства 252
8.1.1. Определение линейного пространства 252
8.1.2. Следствия из аксиом линейного пространства 254
8.1.3. Примеры линейных пространств 256
8.1.4. Подпространства линейных пространств 257
§ 8.2 Базис и размерность линейного пространства 260
8.2.1. Линейная зависимость векторов 260
8.2.2. Базис линейного пространства 263
8.2.3. Линейные операции над векторами в координатной форме 265
8.2.4. Размерность линейного пространства 266
8.2.5. Изоморфизм линейных пространств 269
8.2.6. Ранг системы векторов и размерность линейной оболочки 271
8.2.7. Замена базиса 273
§ 8.3 Линейные многообразия 277

8.3.1. Понятие линейного многообразия 277
8.3.2. Линейные многообразия в $\mathbb{R}^n$ 279
8.3.3. Плоскости и прямые в $\mathbb{R}^n$ 283
8.3.4. Системы линейных неравенств 285

Глава 9. **Евклидовы пространства** **288**
§ 9.1 Понятие евклидова пространства. Примеры 288
§ 9.2 Неравенство Коши–Буняковского 290
§ 9.3 Ортонормированный базис 293
§ 9.4 Замена ортонормированного базиса 299
§ 9.5 Ортогональные подпространства 301

Глава 10. **Линейные операторы** **304**
§ 10.1 Определение и примеры линейных операторов 305
§ 10.2 Матрица линейного оператора 308
10.2.1 Определение матрицы линейного оператора 308
10.2.2 Связь между координатами образа и прообраза при действии линейного оператора 309
10.2.3 Примеры матриц линейных операторов 310
10.2.4 Изменение матрицы линейного оператора при замене базиса линейного пространства 313
§ 10.3 Ранг оператора 314
§ 10.4 Собственные векторы 315
10.4.1 Собственный вектор линейного оператора. Характеристическое уравнение 315
10.4.2 Свойства собственных чисел и собственных векторов линейного оператора 321
10.4.3 Инвариантные подпространства 326
§ 10.5 Операторы в евклидовом пространстве 328
10.5.1 Понятие сопряженного оператора. Матрица сопряженного оператора 328
10.5.2 Самосопряженные операторы. Свойства самосопряженных операторов 331

Глава 11. **Квадратичные формы** **335**
§ 11.1 Квадратичная форма и ее матрица 335
11.1.1 Определение квадратичной формы 335
11.1.2 Матричная запись квадратичной формы 336
11.1.3 Изменение матрицы квадратичной формы при замене базиса 338

§ 11.2 Приведение к каноническому виду 338
11.2.1 Канонический вид квадратичной формы 338
11.2.2 Приведение квадратичной формы
к каноническому виду методом Лагранжа 339
11.2.3 Приведение к каноническому виду
квадратичной формы
в евклидовом пространстве 341
§ 11.3 Классификация квадратичных форм 348
11.3.1 Основные определения 348
11.3.2 Условия положительной определенности квадратичной
формы 349

Список литературы **352**

Предисловие

Настоящий учебник по высшей математике адресован студентам нематематических специальностей и направлений высших учебных заведений. Подбор разделов высшей математики, включенных в книгу достаточно широк и предусмотрен Государственными образовательными стандартами инженерных, экономических и других нематематических специальностей, за исключением специальных разделов математики. Кроме того, при изложении материала авторы старались избегать громоздких доказательств и излишнего формализма, оставаясь, тем не менее, на достаточном уровне строгости.

Книга предназначена для самостоятельного изучения высшей математики. Такой учебник особенно нужен студентам дистанционной или, как её раньше называли, заочной формы образования. Эта особенность выражается в бóльшей насыщенности иллюстрирующими и обучающими примерами, в акценте на содержательной стороне изложения и доступности.

Излагаемый в книге вариант курса высшей математики сложился на основе лекций, читаемых авторами на различных факультетах НГТУ на протяжении ряда лет.

Последовательность изучения глав, предложенная в книге, не является единственно возможной и может быть изменена по усмотрению преподавателей, организующих учебный процесс.

Глава 1

Введение. Общематематические понятия

Великая книга природы
Написана языком математики.
Г. Галилей (1564–1642)

§ 1.1. Структура математического языка

Всякий математический текст строится на базе обычного языка (русского, английского и т.д.), который является лингвистической средой для языка математики, но играет по отношению к нему служебную роль. Построение собственно математического текста осуществляется с помощью нескольких видов «кирпичей»: понятий, определений, математических утверждений, доказательств. При этом, кроме лингвистических средств обычного языка, используются специальные математические символы.

Наиболее распространенная форма математического утверждения

$$A \Rightarrow B. \tag{1.1.1}$$

Здесь A и B — некоторые высказывания, а само утверждение (1.1.1) читается как «A влечет B», «B есть следствие A», или «если A, то B». При этом A называют *достаточным условием* для B, а B — *необходимым условием* для A.

Если одновременно выполнены: $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$, то высказывания A и B называются *равносильными*, или *эквивалентными*, что выражают также одним из следующих способов: «A есть необходимое и достаточное условие для B», «A выполнено тогда и только тогда, когда выполнено B», или символически

$$A \Leftrightarrow B.$$

Доказательство математического утверждения состоит в построении последовательности других утверждений, образующих цепочку следствий:

$$A \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow B,$$

где каждое следствие есть либо уже доказанное утверждение (теорема, лемма), либо аксиома, либо содержится в исходном предположении A.

Среди понятий математики принято выделять основные, первичные, которые нельзя определить через другие (как, например, понятие точки в геометрии). Все последующие понятия вводятся с помощью математических определений.

§ 1.2. Множества

Из основных понятий математики наиболее общим является понятие множества.

Под *множеством* понимается *совокупность некоторых объектов*, которые называются элементами множества. Тот факт, что x является элементом множества M, обозначается $x \in M$ (читается «x принадлежит M»). Если же x не является элементом M, то это обозначают $x \notin M$ («x не принадлежит M»).

Множество задают с помощью простого перечисления всех его элементов, если это возможно, и записывают в виде: $M = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Например, множество всех арабских цифр $A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Другой способ задания множества основан на том, что все элементы данного множества объединяются некоторым общим для них свойством. Если элемент x обладает некоторым свойством P, будем обозначать это $P(x)$. Тогда множество M, которое состоит из всех элементов множества S, обладающих свойством P, обозначается одним из следующих способов:

$$M = \{x \in S \mid x \text{ обладает свойством } P\} = \\ = \{x \in S \mid P(x)\} = \{x \in S \,:\, P(x)\}.$$

Например, промежуток $[a,b]$ действительной числовой оси можно задать следующим образом:

$$[a,b] = \{x \in R \mid a \leqslant x \leqslant b)\}.$$

Множество A называется *подмножеством* множества B (обозначается $A \subseteq B$), если все элементы множества A принадлежат множеству B. Если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, то множества A и B называются *равными*, или *совпадающими* (обозначается $A = B$), очевидно, они состоят из одних и тех же элементов. Среди всех множеств выделяют *пустое множество* $\emptyset$, не содержащее ни одного элемента, и *универсальное множество* U, содержащие все элементы. Для любого множества A считаются выполненными включения: $\emptyset \subseteq A \subseteq U$. Множества $\emptyset$ и A называются *несобственными* подмножествами A.

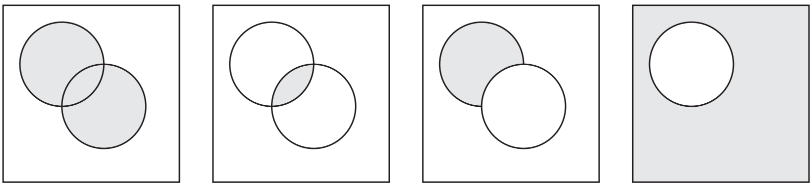
Объединением множеств A и B называется множество $A \cup B$, состоящее из элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A или B. *Пересечением* множеств A и B называется множество $A \cap B$, состоящее из элементов, принадлежащих каждому из множеств A и B. Объединение и пересечение множеств можно задать равенствами:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \ \text{ или } \ x \in B\},$$
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \ \text{ и } \ x \in B\}.$$

Разностью множеств A и B называется множество $A \setminus B$, состоящее из элементов множества A, не принадлежащих множеству B. *Дополнением* множества A называется множество $\overline{A}$, состоящее из всех элементов, не принадлежащих A. Иначе:

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \ \text{ и } \ x \notin B\},$$
$$\overline{A} = \{x \mid x \notin A\} = U \setminus A.$$

Наглядное представление об операциях с множествами дают так называемые диаграммы Эйлера–Венна (рис. 0.1).



$A \cup B$ $\quad$ $A \cap B$ $\quad$ $A \setminus B$ $\quad$ $\overline{A}$

Рис. 0.1

В заключение отметим, что объединение и пересечение более двух множеств определяются аналогично, а для их обозначения используются следующие способы:

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n,$$
$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \cap \dots$$

§ 1.3. Множество действительных чисел

Строгое изложение высшей математики и ее центрального раздела — математического анализа — основано на свойствах действительных чисел. Исходным для определения множества действительных чисел является так называемый натуральный ряд, или множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел

$$1, 2, \dots, n, \dots$$

Из школьного курса математики читатель знаком с основными свойствами множества натуральных чисел, поэтому мы остановимся лишь на некоторых из них. Наиболее содержательным является так называемый «принцип (или аксиома) математической индукции», который заключается в следующем.

Если: 1) некоторое свойство P выполняется для $n = 1$ *и 2) из выполнимости P для* $n = k$ *следует его выполнимость для* $n = k + 1$, *то свойство P выполняется для любого* $n \in \mathbb{N}$.

Проиллюстрируем применение принципа математической индукции на следующем примере. Из курса элементарной математики известна формула для вычисления суммы $S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$ первых n членов геометрической прогрессии

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}. \tag{1.3.1}$$

Докажем эту формулу методом математической индукции.

1) При $n = 1$ формула (1.3.1) выполняется очевидным образом:

$$S_1 = \frac{b_1(1-q^1)}{1-q} = b_1.$$

2) Пусть (1.3.1) выполнена для $n = k$. Тогда для $n = k + 1$

$$S_{k+1} = S_k + b_{k+1} = \frac{b_1(1-q^k)}{1-q} + b_1 \cdot q^k = \frac{b_1(1-q^k) + b_1 q^k (1-q)}{1-q} =$$
$$= \frac{b_1 - b_1 q^k + b_1 q^k - b_1 q^{k+1}}{1-q} = \frac{b_1(1-q^{k+1})}{1-q}.$$

Сравнивая крайние члены в этой цепочке равенств, видим, что формула (1.3.1) доказана для $n = k + 1$. В проделанных вычислениях была использована формула (1.3.1) при $n = k$, справедливая согласно индуктивному предположению, и формула общего члена геометрической прогрессии: $b_{k+1} = b_1 q^k$. В силу принципа математической индукции, формула (1.3.1) справедлива при любом $n \in \mathbb{N}$.

Из других свойств натурального ряда отметим, что для любого числа $n \in \mathbb{N}$ существует непосредственно следующее за ним число $n + 1 \in \mathbb{N}$, а для любого натурального $n \neq 1$ существует непосредственно предшествующее ему число $n-1 \in \mathbb{N}$. На множестве натуральных чисел вводятся отношения $\leqslant, \geqslant, <, >$, а также операции сложения $a+b$ и умножения $a \cdot b$.

Требование выполнимости обратных операций для сложения и умножения приводит к необходимости расширения множества $\mathbb{N}$. Так, для выполнимости операции вычитания $a-b$ к множеству $\mathbb{N}$ добавляют число 0 и множество $\mathbb{N}_- = \{-1, -2, \ldots, -n, \ldots\}$ целых отрицательных чисел. Полученное в результате множество $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}_-$ называется множеством целых чисел. Точно так же, требование выполнимости операции деления $a : b = \dfrac{a}{b}$ приводит к расширению множества $\mathbb{Z}$ целых чисел до множества $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, которое определяется следующим образом:

$$\mathbb{Q} = \{x \mid x = \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\}.$$

Множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, в свою очередь, оказывается недостаточным для использования в различных областях математики и ее приложений. Например, оказалось, что квадратное уравнение $x^2 = 2$ не имеет решения в множестве рациональных чисел. Предположив, что при некоторых целых p и q число $x = \dfrac{p}{q}$ удовлетворяет уравнению $x^2 = 2$, мы придем к противоречию. Действительно, можно считать, не ограничивая общности, что дробь $x = \dfrac{p}{q}$ несократимая. Подставим x в данное уравнение. Тогда получим цепочку следствий: $\left(\dfrac{p^2}{q^2} = 2\right) \Leftrightarrow (p^2 = 2q^2) \Rightarrow (p^2 -$ четное число$) \Leftrightarrow (p -$ четное число$) \Leftrightarrow (p = 2p_1, p_1 \in \mathbb{Z})$. Подставляя значение $p = 2p_1$ в равенство $p^2 = 2q^2$, получим: $4p_1^2 = 2q^2 \Leftrightarrow\ 2p_1^2 = q^2$, откуда следует, что q^2, а значит и $q -$ четное число. Но тогда $q = 2q_1$ для некоторого $q_1 \in \mathbb{Z}$, поэтому дробь $\dfrac{p}{q} = \dfrac{2p_1}{2q_1}$ сократима, что противоречит первоначальному допущению.

Другие примеры недостаточности множества рациональных чисел представляются в процессе измерения длин. Например, если катеты прямоугольного равнобедренного треугольника имеют длину 1, то длина c гипотенузы не может быть представлена никаким рациональным числом: по теореме Пифагора, c должна удовлетворять уравнению $c^2 = 1^2 + 1^2 = 2$, которое, как мы видели, не имеет решений в множестве $\mathbb{Q}$. Похожая ситуация возникает, если попытаться измерить длину окружности L ее радиусом R: $\dfrac{L}{R} \neq \dfrac{p}{q}$ ни при каких целых p и $q \neq 0$. Читателю известно, что отношение $\dfrac{L}{R}$ называют числом 2π.

Числа, не являющиеся рациональными, называют *иррациональными*. Множество $\mathbb{R}$, являющееся объединением множества рациональных чисел и множества иррациональных чисел, называется множеством *действительных*, или *вещественных*, чисел. Иное, конструктивное описание множества действительных чисел связано с изображением действительных чисел точками числовой оси и представлением их в десятичной системе, оно рассматривается в следующем разделе.

§ 1.4. Числовая ось и десятичное представление действительных чисел

Прямая, на которой выбраны начальная точка, единичный отрезок и положительное направление, называется *числовой осью*. Мы расширим множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел так, чтобы каждой точке числовой оси соответствовало бы некоторое число и, наоборот, каждое такое число можно было изобразить точкой на числовой оси. Построенное с помощью этого расширения числовое множество и будем считать множеством действительных чисел.

Для изображения натурального числа $\mathbb{N}$ на числовой оси достаточно отложить в положительном направлении $\mathbb{N}$ единичных отрезков (например, при помощи циркуля) (рис. 0.2).

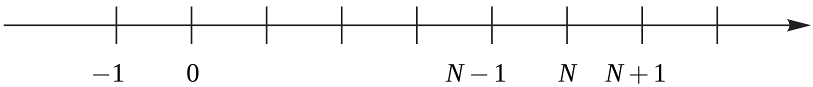


Рис. 0.2

Для изображения рационального числа p/q представим его в виде $p/q = N + m/n$, $(m < n)$, где N — целое, а m/n — дробная часть этого числа. Изобразим число N, и на отрезке, заключенном между точками N и $N+1$ изобразим отрезок m/n (выполняя операцию деления отрезка $[N, N+1]$ на n частей при помощи циркуля и линейки) (рис. 0.3).

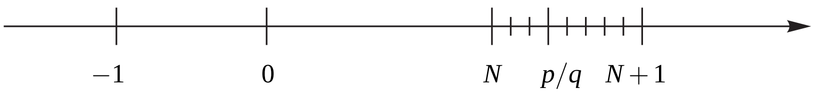


Рис. 0.3

Чтобы изобразить любое действительное, в том числе и иррациональное число x некоторой точкой M на числовой оси и, наоборот, каждой точке M сопоставить число x, быть может, иррациональное, используют алгоритм представления действительных чисел в позиционной системе исчисления (двоичной, троичной, десятичной и т. п.).

Пусть число x изображается точкой M на числовой оси. Для нахождения величины этого числа при помощи десятичной системы найдем единичный интервал между целыми числами N и $N+1$, содержащий точку M, и разделим его на 10 равных частей (десятичных интервалов). Обозначим эти интервалы в порядке их следования числами $0,1,2,...,9$. Пусть точка M попала в интервал с номером α_1, $0 \leqslant \alpha_1 \leqslant 9$. Разделим этот интервал, в свою очередь, на 10 равных частей (длины $1/10^2$) и обозначим через α_2 номер того интервала, в который попала точка M, $0 \leqslant \alpha_2 \leqslant 9$. Продолжая этот процесс далее, мы столкнемся с тремя возможными случаями:

Случай конечной десятичной дроби. На n-м шаге этого процесса точка M совпала с одним из концов интервала длины $1/10^n$. Тогда в качестве номера интервала α_n выберем номер того интервала, в котором точка M является левым концом. В этом случае точка M представляется в виде

$$x = N + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + ... + \frac{\alpha_n}{10^n}.$$

Учитывая, что целую часть N можно разложить в сумму β_0 единиц, β_1 десятков, β_2 сотен и т. д., окончательное разложение числа x по степеням 10 представляется в виде

$$x = \beta_m 10^m + \ldots + \beta_1 10 + \beta_0 + \alpha_1 10^{-1} + \ldots + \alpha_n 10^{-n}. \tag{1.4.1}$$

Это представление равносильно записи

$$x = \beta_m \ldots \beta_1 \beta_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n, \tag{1.4.2}$$

называемой десятичным представлением числа x. Ясно, что записи (1.4.1) или (что то же самое) (1.4.2) представляют рациональное число.

Случай периодической десятичной дроби. Точка M не совпадает с концом интервала ни на каком конечном n-м шаге, а числа, нумерующие интервалы, образуют последовательность из повторяющегося блока $\alpha_1 \ldots \alpha_k$, называемого периодом. В этом случае число x имеет вид

$$x = \beta_m \ldots \beta_1 \beta_0, \underbrace{\alpha_1 \ldots \alpha_k}\underbrace{\alpha_1 \ldots \alpha_k} \ldots \tag{1.4.3}$$

Такие десятичные дроби также представляют рациональные числа, так как раскладываются в k сумм бесконечных убывающих геометрических прогрессий. Например, для числа

$$x = 0,341341341\ldots$$

имеем разложение

$$x = \left(\frac{3}{10} + \frac{3}{10^4} + \ldots\right) + \left(\frac{4}{10^2} + \frac{4}{10^5} + \ldots\right) + \left(\frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^6} + \ldots\right),$$

где в каждой из скобок стоит сумма бесконечной убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q = 1/10^3$. Вычисляя эти три суммы по известной формуле

$$S = \frac{b_1}{1-q}$$

суммы бесконечной убывающей геометрической прогрессии и складывая, заключаем, что $x = 341/999$ — рациональное число.

Третий случай: непериодическая бесконечная десятичная дробь. Число x представляется в виде

$$x = \beta_m \ldots \beta_1 \beta_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n \ldots, \tag{1.4.4}$$

где последовательность $\alpha_1 \ldots \alpha_n \ldots$ не является периодической. Такие числа не являются рациональными. На доказательстве этого факта мы останавливаться не будем, а интересующимся советуем обратиться к более подробным курсам математического анализа. Естественно назвать именно такие числа (то есть представленные в виде бесконечной непериодической десятичной дроби) *иррациональными*, а действительными считать, как и прежде, все рациональные или иррациональные числа. Множество действительных чисел обозначается буквой $\mathbb{R}$.

Проделаем еще некоторые вычисления. Оставим в записи (1.4.4) n знаков $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ после запятой и оценим абсолютную погрешность такого «укороченного» представления числа x:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \beta_m \ldots \beta_1 \beta_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n \ldots - \beta_m \ldots \beta_1 \beta_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n = \\ &= \frac{\alpha_{n+1}}{10^{n+1}} + \frac{\alpha_{n+2}}{10^{n+2}} + \ldots \leqslant \\ &\leqslant \frac{9}{10^{n+1}} \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \ldots\right).\end{aligned}$$

При переходе к неравенству мы воспользовались тем, что все $\alpha_{n+k} \leqslant 9$, $k = 1, 2, \ldots$. Суммируя прогрессию в скобках, заключаем, что

$$\varepsilon \leqslant \frac{9}{10^{n+1}} \left(\frac{1}{1-1/10}\right) = \frac{1}{10^n}.$$

Вывод 1. Если в десятичной записи числа ограничиться n знаками после запятой, то абсолютная погрешность такой записи составит величину $\varepsilon = 10^{-n}$. Таким образом, чем больше знаков после запятой учитывать в записи числа (1.4.4) тем точнее получается значение этого числа.

Замечание 1. Число x, записанное в виде конечной десятичной дроби (1.4.2) допускает второй способ записи в виде бесконечной периодической дроби, у которой период состоит из одной цифры 9. Например, $1 = 0,999$; $3,33 = 3,32999$ и т. д. Обычно применяют первый способ записи, так как последний десятичный знак α_n в записи (1.4.2) указывает номер левого конца интервала совпадающего с точкой M, изображающей число x.

Итак, мы рассмотрели алгоритм десятичной записи числа, согласно которому всякая точка M числовой оси изображает некоторое действительное число x в виде (1.4.2) или (1.4.3), или (1.4.4).

Обратно, следуя этому алгоритму, любое число представляющееся в одной из возможных десятичных записей (1.4.2) или (1.4.3) или (1.4.4) можно изобразить точкой на числовой оси, которая удалена от начала 0 на расстояние, равное сумме длин конечного или бесконечного множества отрезков: $\beta_k 10^k$, $k = m, m-1, \ldots, 1, 0$, и $\alpha_r 10^{-r}$, $r = 1, 2, \ldots, n, \ldots$:

$$x = \beta_m 10^m + \beta_{m-1} 10^{m-1} + \ldots + \beta_1 10 + \beta_0 + \alpha_1 10^{-1} + \ldots + \alpha_n 10^{-n} + \ldots \tag{1.4.5}$$

При этом, согласно выводу 1, если нас «устраивает» погрешность порядка $\varepsilon = 10^{-n}$, то в этой сумме (1.4.5) можно ограничиться n десятичными знаками $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ дробной части числа.

Вывод 2. Между действительными числами и точками числовой оси установлено так называемое *взаимно-однозначное соответствие*, которое состоит в том, что каждой точке M числовой оси соответствует единственное число x в одной из записей (1.4.2) или (1.4.3), или (1.4.4) и, наоборот, каждое число x, записанное таким образом, изображается единственной точкой M на числовой оси.

§ 1.5. Абсолютная величина числа. Промежутки на числовой оси

Как следует из предыдущего раздела, положительные числа изображаются точками числовой оси правее точки, изображающей число 0 (начало), отрицательные числа изображаются точками, расположенными левее точки 0. Каждому действительному числу x положительному или отрицательному сопоставляется число $|x|$ по правилу

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если} \quad x \geqslant 0, \\ -x, & \text{если} \quad x < 0. \end{cases}$$

Число $|x|$ называется *абсолютной величиной*, или *модулем* действительного числа x, геометрически оно означает расстояние, на котором точка x удалена от начала 0. Модуль разности $|a-b|$ двух чисел имеет смысл расстояния между соответствующими точками на числовой оси.

Из геометрического смысла абсолютной величины вытекает следующая эквивалентность неравенств: для любого $r > 0$

$$|x| \leqslant r \quad \Leftrightarrow \quad -r \leqslant x \leqslant r, \tag{1.5.1}$$

которые выражают тот факт, что точка x удалена от начала на расстояние, не большее r.

Пользуясь эквивалентностью (1.5.1), можно доказать другие полезные неравенства для абсолютных величин:

$$|a+b| \leqslant |a| + |b|, \tag{1.5.2}$$

$$|a-b| \geqslant ||a| - |b||. \tag{1.5.3}$$

Действительно, складывая почленно следующие очевидные неравенства

$$-|a| \leqslant a \leqslant |a|$$
$$-|b| \leqslant b \leqslant |b|,$$

получим систему неравенств

$$-(|a| + |b|) \leqslant a + b \leqslant |a| + |b|,$$

которая, в силу (1.5.1), равносильна неравенству (1.5.2).

Доказательство неравенства (1.5.3) предоставляется читателю в качестве упражнения.

Пользуясь определением модуля, нетрудно проверить также справедливость следующих соотношений:

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|, \quad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}.$$

Множество точек числовой оси, удовлетворяющих системе неравенств $a \leqslant x \leqslant b$, называют *замкнутым промежутком*, или *отрезком* и обозначают $[a,b]$. Равносильны записи:

$$x \in [a,b] \Leftrightarrow a \leqslant x \leqslant b.$$

Открытым промежутком (интервалом) называют множество точек, определяемое равенством

$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}.$$

Полуоткрытыми промежутками или полуинтервалами называются следующие подмножества $\mathbb{R}$:

$$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\},$$
$$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}.$$

Если в определениях интервала (полуинтервала) один из символов a, b (или оба) заменить на ∞ или $-\infty$, то получим так называемые бесконечные промежутки. Например,

$$(a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\},$$
$$(-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x \leqslant b\},$$
$$(-\infty,\infty) = \mathbb{R}.$$

Окрестностью точки a радиуса ε (ε-окрестностью) называется множество точек x числовой оси, удаленных от точки a не более, чем на ε, или множество:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid a-\varepsilon \leqslant x \leqslant a+\varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R} \ : \ |x-a| \leqslant \varepsilon\}.$$

Открытой ε-окрестностью будем называть множество точек, заданное одним из следующих эквивалентных соотношений:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid a-\varepsilon < x < a+\varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R} \ : \ |x-a| < \varepsilon\}.$$

Множество E на числовой оси $(-\infty,\infty)$ называется *ограниченным*, если существует r-окрестность начала координат, ($r \neq \infty$), содержащая это множество. Другими словами, для всех точек $x \in E$ выполняется неравенство

$$|x| < r \neq \infty.$$

§ 1.6. Функция

1.6.1. Понятие функции (отображения)

Пусть X и Y — некоторые множества. Будем говорить, что задана *функция (или отображение)*, определенная на X со значениями в Y, если указан закон f, сопоставляющий каждому элементу $x \in X$ некоторый элемент $y \in Y$.

Множество X называют *областью определения* функции, а символ x общего элемента множества X называют *аргументом*, или *независимой переменной*; элемент y, соответствующий конкретному значению x, называют значением функции от элемента x, или *образом* x, и обозначают $y = f(x)$. При изменении аргумента x значение $y = f(x)$ меняется по заданному закону, поэтому элемент y называют *зависимой переменной.*

Множество всех значений $f(x) \in Y$, которые принимает функция $f(x)$, когда x пробегает все X, будем называть *множеством значений*, или *областью значений* функции.

В зависимости от природы множеств X и Y термин «функция» имеет ряд синонимов: *отображение, преобразование, оператор* и др. Наряду с обозначением $y = f(x)$ для функции (отображения) используются и такие:

$$x \to f(x); \quad f : x \to y; \quad f : X \to Y; \quad X \xrightarrow{f} Y.$$

Если X и Y числовые множества, то $y = f(x)$ называется *числовой функцией*. Например: $y = \sin x$, $y = 2^x$, $y = 2x+1$ — числовые функции.

Две функции f_1 и f_2 считаются *совпадающими*, или *тождественно равными* на X (пишут $f_1(x) \equiv f_2(x)$), если $f_1(x) = f_2(x)$ для всех $x \in X$.

Пример: функции $f_1(x) = 1$ и $f_2(x) = x/x$ не совпадают на R, так как $f_2(x)$ не определена в точке $x = 0$.

1.6.2. Композиция функций. Обратные функции

Пусть множество значений функции $y = f(x)$ содержится в области определения функции $z = \varphi(y)$. Тогда может быть определена *композиция* или *суперпозиция* двух функций или, что то же, *сложная функция*: $z = \varphi(f(x))$, и ее область определения совпадает с областью определения функции $f(x)$. Для более чем двух функций (чтобы не запутаться в скобках) композицию обозначают в виде

$$f_3(f_2(f_1(x))) = f_3 \circ f_2 \circ f_1(x).$$

Примеры.

1. $y = f(x) = \sin x$, $z = \varphi(y) = y^3 \quad \Rightarrow \quad z = \varphi \circ f(x) = \sin^3 x$;

2. $y = f(x) = ax+b$, $z = \varphi(y) = y^2$, $w = \psi(z) = e^z \quad \Rightarrow$
$\Rightarrow \quad w = \psi \circ \varphi \circ f(x) = e^{(ax+b)^2}$.

Образом множества $A \subset X$ при отображении $f : X \to Y$ называют множество $f(A)$ тех элементов из Y, которые являются образами элементов множества A.

Прообразом множества $B \subset Y$ при отображении f называется множество тех элементов из X, образы которых при отображении f содержатся в

B. Прообраз множества B обозначают $f^{-1}(B)$, формально его можно задать равенством:

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}.$$

Для всех отображений $f : X \to Y$ принята следующая классификация: f есть *отображение X на Y* (или *сюръективное отображение*), если каждый элемент $y \in Y$ имеет хотя бы один прообраз $x \in X$, в этом случае пишут $f(X) = Y$; f есть *вложение X в Y* (или *инъективное отображение*), если разные элементы имеют различные образы, т. е. $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ для всех $x_1, x_2 \in X$; f является *взаимно однозначным (биективным) отображением*, если оно есть сюръективное отображение X на Y и вложение X в Y одновременно; этот факт обозначают так: $x \leftrightarrow y$, $x \in X$, $y \in Y$ и называют *взаимно однозначным соответствием*. Для взаимно однозначного соответствия $f : X \to Y$ определено *обратное отображение (функция)*

$$f^{-1} : Y \to X$$

следующим образом: если y есть образ элемента x при отображении f, то x есть образ элемента y при отображении f^{-1}: $x = f^{-1}(y)$.

Примеры.

1. $y = f(x) = ax + b \quad \Leftrightarrow \quad x = f^{-1}(y) = (y - b)/a$. Здесь $f(x)$ является взаимно однозначным отображением одной числовой оси на другую.

2. $y = \varphi(x) = a^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \varphi^{-1}(y) = \log_a y, \quad (a \neq 1,\ a > 0)$. Здесь $\varphi(x)$ является взаимно однозначным отображением числовой оси $(-\infty, \infty)$ на интервал $(0, \infty)$.

3. $y = \psi(x) = \sin x$. Здесь ψ является отображением числовой оси $(-\infty, \infty)$ на отрезок $[-1, 1]$.

4. Изображение действительных чисел x точками M на числовой оси дает пример взаимно однозначного соответствия: $x \leftrightarrow M$.

Обратной к функции f^{-1} является функция f. Поэтому справедливы равенства:

$$f^{-1} \circ f(x) = x, \quad f \circ f^{-1}(y) = y.$$

Пример: $y = f(x) = a^x \quad \Rightarrow$

$$f \circ f^{-1}(y) = a^{\log_a y} = y \quad (y > 0),$$

$$f^{-1} \circ f(x) = \log_a a^x = x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

1.6.3. Способы задания функции. График

В общем случае всякий закон, определяющий функцию $y = f(x)$, задается некоторым текстом. Наиболее распространенная форма такого текста — формула, позволяющая вычислять значение функции y по заданному значению аргумента x. Способ задания функции с помощью формул называют *аналитическим*. Выше уже приводились примеры такого задания функции. Добавим к ним еще один. Функция $y = \operatorname{sgn} x$ (читается «сигнум x», что означает «знак x») определяется формулой

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad x > 0, \\ 0, & \text{при} \quad x = 0, \\ -1, & \text{при} \quad x < 0. \end{cases}$$

С помощью этой функции легко выражается другая функция $y = |x|$

$$|x| = x \cdot \operatorname{sgn} x.$$

Аналитический способ задания функции в свою очередь подразделяется на три способа: *явный, неявный и параметрический.*

Явный способ — это непосредственное выражение зависимой переменной через независимую переменную в виде формулы $y = f(x)$: $y = \sin^3 x$, $y = e^{\operatorname{tg} 2x}$ и т. п.

Неявный способ. Пусть задано уравнение $F(x,y) = 0$. Пусть каждому x из некоторого числового множества X соответствует одно или несколько y таких, что пара чисел (x,y) удовлетворяет данному уравнению. Тем самым данное уравнение определяет функцию (одну или несколько) $y = f(x)$ и при этом для всех x из множества X выполняется равенство $F(x, f(x)) = 0$. В этом случае говорят, что данное уравнение неявно задает y как функцию от x или что задана неявная функция.

Например:

1. $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm\sqrt{1-x^2}$ или $x = \pm\sqrt{1-y^2}$;

2. $F(x,y) = sin(x+y) - x + y = 0$. В этом случае не существует аналитической зависимости ни $x = \varphi(y)$, ни $y = f(x)$, получаемых из зависимости $F(x,y) = 0$.

Параметрический способ — это выражение зависимой и независимой переменных через третью переменную, называемую параметром,

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

где t — параметр. Если существует обратная функция $t = \varphi^{-1}(x)$, то, подставляя ее во второе уравнение, получим явное задание y от x в виде $y = \psi \circ \varphi^{-1}(x) = f(x)$.

Пример. Закон движения точки по окружности радиуса R с центром $(0,0)$ задается положением точки $M(x(t),y(t))$ на плоскости xOy в зависимости от времени t. Этот закон можно записать в виде

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi(t), \\ y = R\sin\varphi(t), \end{cases}$$

где $\varphi(t)$ — угол, определяющий положение точки на окружности в зависимости от времени t. Возводя обе части этих равенств в квадрат и складывая, приходим к неявной зависимости $x^2 + y^2 = R^2$.

Другие примеры параметрического задания функций:

1) параметрическое задание параболы $y = 4x^2$ получаем, полагая $x = t/2$, $y = t^2$;

2) параметрическое задание прямой $2x - y = 1 \quad \Leftarrow \quad x = t,\ y = 2t - 1$.

Вообще, любую функцию, заданную явным уравнением $y = f(x)$, можно задать параметрически (или, как говорят, *параметризовать*), полагая $x = t,\ y = f(t)$.

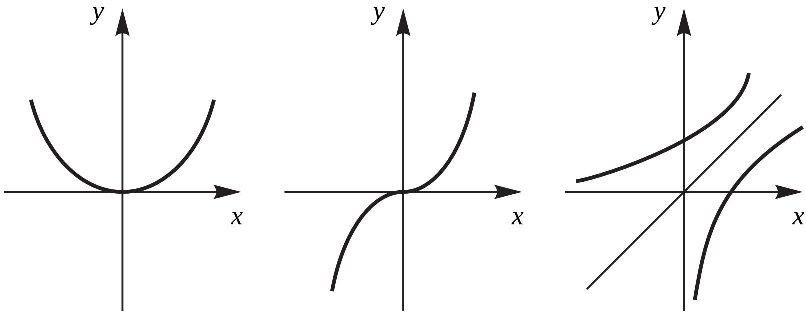
Параметрическое задание функции удобно интерпретировать как перемещение точки $M(x(t), y(t))$ на плоскости xOy по закону, определяющему значение ее координат $x(t) = \varphi(t)$, $y(t) = \psi(t)$ в зависимости от времени t.

Иногда текст, задающий функцию, может принимать достаточно специфический вид. В качестве примера упомянем так называемое *табличное задание функции* (обычно используется при обработке экспериментальных данных). Здесь «текст», задающий соответствие $f: x \to y$, «записывается» в виде таблицы, в которой в одной строке расписывается значение аргумента, а в другой — значение функции.

Наконец, еще один способ задания функции — *графический*. Введем на плоскости прямоугольную систему координат. Для любой числовой функции $y = f(x)$ на оси Ox изобразим множество ее определения X, а на оси Oy множество значений этой функции. Множество точек плоскости $(x, f(x))$, для которых $x \in X$ назовем *графиком функции* $y = f(x)$. Графики функций отражают свойства (поведение) этих функций. Например, из школьного курса математики читателю хорошо известно, как на графике отражаются такие свойства функции, как возрастание или убывание (монотонность), периодичность и т. п. Остановимся подробнее на так называемых *свойствах симметрии.*

Четной называется функция $f(x)$, имеющая область определения, симметричную относительно точки $x = 0$, и удовлетворяющая условию $f(-x) = f(x)$. График четной функции симметричен относительно оси Oy, так как точки графика $(x, f(x))$ и $(-x, f(-x))$ симметричны относительно оси Oy.

Нечетной называется функция $y = f(x)$, имеющая область определения, симметричную относительно точки $x = 0$, и удовлетворяющая условию $f(-x) = -f(x)$. График нечетной функции симметричен на плоскости относительно начала координат, так как точки $(x, f(x))$ и $(-x, f(-x)) = (-x, -f(x))$ симметричны относительно начала координат. Например, функция $y = x^2$ — четная, а $y = x^3$ — нечетная, их графики представлены на рис. 0.4.



$y = x^2$ $\qquad$ $y = x^3$ $\qquad$ $y = a^x$, $y = \log_a x$

Рис. 0.4

Графики прямой и обратной функций, рассматриваемые совместно, также обладают некоторым свойством симметрии. Пусть $y = f(x)$. Если в обратной функции $x = f^{-1}(y)$ поменять местами символы x и y : $\quad x \leftrightarrow y$ и записать обратную функцию в виде $y = f^{-1}(x)$, то графики функций $f(x)$ и $f^{-1}(x)$ будут симметричны относительно прямой $x = y$. Это следует из того, что точка $(x,y) = (x, f(x))$ графика функции $f(x)$ симметрична относительно прямой $y = x$ точке $(f(x),x)$. И если обозначить $f(x) = x'$, то получим, что $x = f^{-1}(x')$ и точка $(f(x),x) = (x', f^{-1}(x'))$ является точкой графика функции $y = f^{-1}(x)$ при значении аргумента x'.

Например, графики функций $y = f(x) = a^x$ и $y = f^{-1}(x) = \log_a x$, $(a > 1)$, симметричны относительно прямой $x = y$, являющейся биссектрисой первого координатного угла (см. рис. 0.4).

1.6.4. Элементарные функции

Следующие функции: $y = ax + b$ (линейная); $y = \sin x$ (синус x); $y = log_a x$ (логарифм числа x по основанию a, $a \neq 1$, $a > 0$) назовем *основными элементарными функциями*.

Все функции, которые можно получить в результате конечного числа арифметических операций (сложения, вычитания, умножения, деления), а также операций композиции (или суперпозиции, т.е. взятия сложной функции) и обратной функции, производимые над основными функциями $ax + b$, $\sin x$ и $\log_a x$, образуют *множество всех элементарных функций.*

Приведем некоторые из них, известные из курса элементарной математики.

1. Показательная функция $y = a^x$. Эта функция является обратной к логарифмической функции.

2. Степенная функция $w = x^{\alpha}$ (α действительное число) определяется как композиция трех функций: $w = e^{z}$ — показательной, $z = \alpha y$ — линейной и $y = \ln x$ — логарифмической. Действительно,

$$w = e^{z(y(x))} = e^{\alpha \ln x} = x^{\alpha}.$$

3. $y = \cos x$ связана с $\sin x$ зависимостью $\cos x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)$.

4. $y = \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$; $y = \operatorname{ctg} x = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$.

5. Многочлен $P_n(x) = a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + \ldots + a_n x + a_{n+1}$ — результат композиции линейных функций и арифметических операций (при целочисленных n).

Продолжая применять к полученным функциям указанные выше арифметические операции, а также операции суперпозиции и взятия обратных функций, мы получим все множество элементарных функций.

Замечание. В качестве основных или образующих элементарных функций, при помощи которых указанными операциями образуется множество всех элементарных функций, можно взять другие наборы: $\{ax + b,\ \cos x,\ e^{x}\}$ или $\{ax,\ C - \mathrm{const},\ \operatorname{tg} x,\ 2^{x}\}$ и т. д.

Все элементарные функции задаются в виде формул, т. е. аналитически. Однако, стоит отметить, что аналитический способ задания, по существу, предполагает договоренность обозначать определенные операции соответствующими символами. Например, символ $\cos x$ обозначает величину проекции единичного отрезка на ось Ox. Символ $\log_a x$ обозначает операцию нахождения такой степени y, чтобы заданное число x представлялось в виде $x = a^{y}$. Таким образом, аналитическое задание функции формулой или знаком есть не что иное, как способ сокращения текста, описывающего закон соответствия $f : x \to y$.

Глава 2

Матрицы и системы линейных уравнений

С системами линейных алгебраических уравнений читатель знаком со средней школы. Рассмотрим, к примеру, простейшую систему из двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} 2x-3y=5, \\ 3x+4y=-1. \end{cases} \tag{2.0.1}$$

Решим эту систему методом исключения неизвестных: исключим неизвестное x, умножив первое уравнение на -3, второе — на 2, а затем сложив полученные уравнения. Получим таким образом ряд эквивалентных систем (напомним, эквивалентными, или равносильными, называются системы, которые имеют одно и то же множество решений):

$$\begin{cases} 2x-3y=5, \\ 3x+4y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6x+9y=-15, \\ 6x+8y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6x+9y=-15, \\ 17y=-17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6x+9y=-5, \\ y=-1. \end{cases} \tag{2.0.2}$$

Второе уравнение последней системы дает значение $y=-1$. Подставляя его в первое уравнение, находим x:

$$-6x+9\cdot(-1)=-15; \quad -6x=-6; \quad x=1.$$

Эти последние действия также можно представить в виде эквивалентных преобразований систем:

$$\begin{cases} -6x+9y=-15, \\ y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6x+9y=-15, \\ -9y=9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6x=-6, \\ -9y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, \\ y=-1. \end{cases} \tag{2.0.3}$$

Как читатель, вероятно, догадался, мы теперь исключили неизвестное y из первого уравнения системы (2.0.2), прибавив к нему второе уравнение, умноженное на -9. Таким образом получили систему (2.0.3), которая эквивалентна исходной системе (2.0.1) и настолько проста, что представляет собой решение исходной системы.

Сделаем некоторые замечания по поводу проделанных вычислений. Во-первых, процесс решения исходной системы состоял в последовательном выполнении над уравнениями системы некоторых операций, сохраняющих равносильность. Эти операции можно свести к следующим трем: умножение любого уравнения на число, не равное нулю; замена любого уравнения его суммой с другим; перестановка уравнений. Будем называть эти операции *элементарными преобразованиями*.

Во-вторых, каждая из полученных в ходе решения систем однозначно определяется набором коэффициентов при неизвестных и правых частей уравнений. Изобразим, например, коэффициенты и правые части уравнений системы (2.0.1) в виде следующей таблицы:

$$A^* = \left(\begin{array}{rr|r} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 4 & -1 \end{array} \right).$$

Такие таблицы называют матрицами. В первой строке выписанной матрицы располагаются коэффициенты при неизвестных и правая часть первого уравнения системы (2.0.1), во второй строке — соответствующие коэффициенты второго уравнения.

В-третьих, элементарные преобразования, которые производились с системами, можно проделать с соответствующими матрицами, умножая их строки на число (т. е. умножая каждый элемент строки на это число), складывая строки или меняя их местами. Проделаем, например, с матрицей A^* те же преобразования, которые были проведены в (2.0.2)–(2.0.3) с системой линейных уравнений (2.0.1), т. е. умножим первую строку матрицы A^* на -3, а вторую — на 2, затем сложим полученные строки и т. д. Тогда получим

$$\begin{gathered} A^* = \left(\begin{array}{rr|r} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 4 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} -6 & 9 & -15 \\ 6 & 8 & -2 \end{array} \right) \sim \\ \sim \left(\begin{array}{rr|r} -6 & 9 & -15 \\ 0 & 17 & -17 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} -6 & 9 & -15 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \sim \\ \sim \left(\begin{array}{rr|r} -6 & 9 & -15 \\ 0 & -9 & 9 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} -6 & 0 & -6 \\ 0 & -9 & 9 \end{array} \right) \sim \\ \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right). \qquad (2.0.4) \end{gathered}$$

Знак «$\sim$» между матрицами означает эквивалентность соответствующих этим матрицам систем линейных уравнений. Финальная матрица (2.0.4) соответствует системе (2.0.3)

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = -1, \end{cases}$$

которая, как и прежде, дает решение исходной системы (2.0.1).

Как видим, решение системы линейных уравнений можно свести к серии элементарных преобразований матрицы этой системы. Это, конечно, намного удобней, чем решать саму систему, особенно при решении систем больших размеров, т. е. с большим числом уравнений и неизвестных. Такие системы, содержащие десятки неизвестных и уравнений, нередки в различных областях, использующих математические методы, например в экономике, статистике и др. Матрицы используются также в других областях математики.

Данная глава будет посвящена основам матричного исчисления и применению его к решению произвольных систем линейных алгебраических уравнений.

§ 2.1. Матрицы и операции над ними

2.1.1. Линейные операции над матрицами

Матрицей размерности $(m \times n)$ называется прямоугольная таблица, составленная из $m \cdot n$ чисел a_{ij}, расположенных в m строках и n столбцах. Матрицы изображаются и обозначаются одним из следующих способов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m\times n}\,, \tag{2.1.1}$$

где m — число строк матрицы, n — число столбцов. Числа a_{ij}, образующие матрицу, называются *элементами матрицы*, при этом первый индекс i обозначает номер строки, а второй j — номер столбца, на пересечении которых находится элемент a_{ij}. Так, например, следующая матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

имеет размерность (2×3), ее элементы: $a_{11} = 2$, $a_{12} = 1$, $a_{13} = -1$, $a_{21} = 0$, $a_{22} = -2$, $a_{23} = 3$.

Столбец размера m — это матрица размерности $(m \times 1)$. *Строка размера n* — это матрица размерности $(1 \times n)$. Для обозначения столбца будем использовать черту сверху, для обозначения строки — черту снизу, при этом элементы столбца или строки могут обозначаться буквами с одним индексом:

$$\overline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad \underline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

В то же время для элементов столбца или строки, входящих в какую-нибудь матрицу, сохраним их обозначение с двумя индексами. Так, для матрицы A из (2.1.1) условимся обозначать ее j-й столбец и i-ю строку соответственно

$$\overline{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}).$$

Матрица размерности $(n \times n)$ называется *квадратной порядка* n. Например, следующие матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

являются квадратными, причем матрица A имеет порядок n, а матрицы B и C — соответственно третьего и второго порядков.

Главной диагональю квадратной матрицы $A = (a_{ij})_{n\times n}$ называют совокупность элементов $(a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn})$, расположенных на диагонали, идущей из верхнего левого угла матрицы в ее нижний правый угол. Впрочем, указанную совокупность элементов, имеющих одинаковые индексы, также называют элементами главной диагонали, если даже матрица не является квадратной. Квадратную матрицу называют *треугольной*, если все ее элементы, расположенные выше или ниже главной диагонали, равны нулю. Так, из приведенных выше примеров матриц треугольной является матрица B.

На множестве матриц одной размерности можно определить операции *сложения матриц* и *умножения матрицы на число*. Эти две операции в математике называют *линейными*.

Определение 2.1.1. Суммой *матриц* $A = (a_{ij})_{m\times n}$ *и* $B = (b_{ij})_{m\times n}$ *называется матрица*

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n},$$

элементы которой получаются сложением соответственных элементов матриц A и B.

Определение 2.1.2. Произведением числа λ на матрицу $A = (a_{ij})_{m\times n}$ *называется матрица*

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})_{m\times n},$$

элементы которой получаются умножением соответственных элементов матрицы A на число λ.

ПРИМЕР 2.1.1. *Для заданных матриц*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

вычислить матрицы: $A+B$, $2A$, $-3B$.

РЕШЕНИЕ. Все искомые матрицы имеют ту же размерность (2×2), что и матрицы A, B. Их элементы вычислим, производя указанные действия с соответственными элементами матриц A и B:

$$A+B = \begin{pmatrix} 2+1 & -1+2 \\ 0+3 & 1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix},$$

$$2A = \begin{pmatrix} 2\cdot 2 & 2\cdot(-1) \\ 2\cdot 0 & 2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$-3B = \begin{pmatrix} -3\cdot 1 & -3\cdot 2 \\ -3\cdot 3 & -3\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ -9 & -12 \end{pmatrix}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1.1. *Для матриц A и B неодинаковых размерностей сумма не определена, поэтому складывать их нельзя.*

Поскольку операции сложения матриц и умножения матрицы на число сводятся к этим операциям над элементами матриц, то для них выполняются следующие

Свойства линейных операций:

1) $A+B = B+A$ (коммутативность сложения);
2) $A+(B+C) = (A+B)+C$ (ассоциативность сложения);
3) существует матрица O (называемая *нулевой*) такая, что для любой матрицы A

$$A+O = O+A = A;$$

4) для любой матрицы A существует матрица $-A$ (называемая *противоположной*) такая, что

$$A+(-A) = (-A)+A = O;$$

5) для любых чисел λ и μ

$$(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A);$$

6) $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$ (дистрибутивность умножения матрицы на число относительно сложения чисел);

7) $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$ (дистрибутивность умножения матрицы на число относительно сложения матриц);

8) $1 \cdot A = A$.

Замечание 2.1.2. *Все матрицы, фигурирующие в этих свойствах, имеют одинаковую размерность* $(m \times n)$. *Очевидно, что нулевой матрицей является матрица размерности* $(m \times n)$, *все элементы которой равны нулю, а противоположной для матрицы A является матрица, элементы которой есть числа, противоположные элементам A:*

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

$$-A = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix},$$

Разностью матриц $A = (a_{ij})_{m\times n}$ и $B = (b_{ij})_{m\times n}$ называется матрица $C = (c_{ij})_{m\times n}$ (обозначаемая $A - B$) такая, что

$$A = B + C.$$

Из определения суммы матриц следует, что элементы матриц A, B, C связаны соотношениями:

$$a_{ij} = b_{ij} + c_{ij},$$

откуда вытекает

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij},$$

то есть при вычитании матриц A и B нужно вычитать соответственные элементы этих матриц. Например, для матриц

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

из примера 2.1.1 вычислим матрицу $B - 2A$

$$B - 2A = \begin{pmatrix} 1 - 2\cdot 2 & 2 - 2\cdot(-1) \\ 3 - 2\cdot 0 & 4 - 2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Если матрицы являются столбцами или строками одинаковых размеров, то, само собой разумеется, для них определены операции сложения и умножения на число. Так для столбцов

$$\overline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}, \quad \overline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

их сумма и произведение на число λ равны:

$$\overline{a} + \overline{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_m + b_m \end{pmatrix}, \quad \lambda\overline{a} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \vdots \\ \lambda a_m \end{pmatrix}.$$

Аналогично, для строк $\underline{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$, $\underline{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ имеем:

$$\underline{a} + \underline{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n), \quad \lambda\underline{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \cdots, \lambda a_n).$$

Если, например,

$$\overline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

то

$$3\overline{a} - 2\overline{b} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 - 2\cdot(-1) \\ 3\cdot 2 - 2\cdot 3 \\ 3\cdot 0 - 2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Упражнение 2.1.1. *Проверьте, что для строк* $\underline{a} = (1, 2, 0)$, $\underline{b} = (-1, 3, 1)$ *выполнено равенство:*

$$\lambda\underline{a} + \mu\underline{b} = (\lambda - \mu, 2\lambda + 3\mu, \mu).$$

Условимся называть *транспонированной строкой* столбец, составленный из элементов строки, а *транспонированным столбцом* — соответственно строку, составленную из элементов столбца. Обозначать их будем соответственно $\underline{a}^T = \overline{a}$ и $\overline{b}^T = \underline{b}$:

$$\underline{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{a}^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix},$$

$$\overline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{b}^T = (b_1, b_2, \cdots, b_n).$$

Определение 2.1.3. *Матрица B называется* транспонированной *по отношению к матрице A, если ее столбцы являются транспонированными строками матрицы A, а строки — транспонированными столбцами.*

Для транспонированной матрицы применяется обозначение: $B = A^T$. Если, например, $A = (a_{ij})_{m\times n}$, то $B = A^T = (b_{ij})_{n\times m}$, причем
$$b_{ij} = a_{ji}. \tag{2.1.2}$$

Пример 2.1.2. *Пусть* $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ *тогда*
$$B = A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Определение 2.1.4. *Матрица A называется* симметрической *или* симметричной*, если она совпадает со своей транспонированной, то есть если* $A = A^T$ *или при всех* i, j
$$a_{ij} = a_{ji}. \tag{2.1.3}$$

Из определения следует, что симметричные матрицы — непременно квадратные, а их элементы, расположенные симметрично относительно главной диагонали, совпадают. Например, следующие матрицы симметричны:
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Упражнение 2.1.2. *Докажите следующие свойства транспонированных матриц:*
$$(A+B)^T = A^T + B^T, \quad (\lambda A)^T = \lambda A^T. \tag{2.1.4}$$

2.1.2. Умножение матриц

Наряду с операциями сложения и умножения на число, на множестве матриц можно определить операцию умножения, которая обладает многими (но не всеми!) свойствами умножения чисел или алгебраических выражений. Определим сначала операцию умножения строки на столбец. Пусть даны строка $\underline{a}$ и столбец $\overline{b}$ одинаковых размеров:
$$\underline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n), \quad \overline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Определение 2.1.5. Произведением строки $\underline{a}$ на столбец $\overline{b}$ *называется число, обозначаемое* $\underline{a}\cdot\overline{b}$*, равное сумме произведений элементов строки на соответствующие элементы столбца:*

$$\underline{a}\cdot\overline{b}=a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k. \qquad (2.1.5)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1.3. *Порядок сомножителей в определении* 2.1.5 *и обозначении произведения* $\underline{a}\cdot\overline{b}$ *является существенным: слева — строка, справа — столбец.*

ПРИМЕР 2.1.3. *Для заданных строк* $\underline{a}=(1,0,-1)$*,* $\underline{b}=(1,1,1)$ *и столбца* $\overline{c}=\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ *вычислить произведения:* $\underline{a}\cdot\overline{c}$*,* $\underline{b}\cdot\overline{c}$*,* $(\underline{a}+\underline{b})\cdot\overline{c}$*.*

РЕШЕНИЕ. В соответствии с определением 2.1.5 вычисляем:

$$\underline{a}\cdot\overline{c}=1\cdot2+0\cdot(-3)+(-1)\cdot1=1;$$

$$\underline{b}\cdot\overline{c}=1\cdot2+1\cdot(-3)+1\cdot1=0.$$

Для вычисления третьего произведения найдем сначала строку $\underline{a}+\underline{b}$:

$$\underline{a}+\underline{b}=(1+1,0+1,-1+1)=(2,1,0).$$

Опять применяя определение 2.1.5, находим:

$$(\underline{a}+\underline{b})\cdot\overline{c}=2\cdot2+1\cdot(-3)+0\cdot1=1.$$

Результаты проделанных вычислений обнаруживают справедливость соотношения:

$$(\underline{a}+\underline{b})\cdot\overline{c}=\underline{a}\cdot\overline{c}+\underline{b}\cdot\overline{c}.$$

Это не случайно: справедливы следующие свойства, позволяющие при умножении суммы строк на столбец или строки на сумму столбцов раскрывать скобки точно так же, как это делается при действиях с числами или алгебраическими выражениями.

Лемма 2.1.1. *Для любых чисел* λ *и* μ *справедливы равенства:*

$$(\lambda\underline{a}+\mu\underline{b})\cdot\overline{c}=\lambda(\underline{a}\cdot\overline{c})+\mu(\underline{b}\cdot\overline{c}); \qquad (2.1.6)$$

$$\underline{a}\cdot(\lambda\overline{b}+\mu\overline{c})=\lambda(\underline{a}\cdot\overline{b})+\mu(\underline{a}\cdot\overline{c}). \qquad (2.1.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем свойство (2.1.6). Пусть

$$\underline{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n),\quad \underline{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n),\quad \overline{c}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_n\end{pmatrix}.$$

Тогда произведения $\lambda(\underline{a}\cdot\overline{c})$ и $\mu(\underline{b}\cdot\overline{c})$ имеют вид:

$$\lambda(\underline{a}\overline{c}) = \lambda(a_1c_1 + a_2c_2 + \ldots + a_nc_n) = \lambda a_1c_1 + \lambda a_2c_2 + \ldots + \lambda a_nc_n,$$

$$\mu(\underline{b}\overline{c}) = \mu(b_1c_1 + b_2c_2 + \ldots + b_nc_n) = \mu b_1c_1 + \mu b_2c_2 + \ldots + \mu b_nc_n.$$

Складывая крайние члены этих двух соотношений, получим равенство:

$$\lambda(\underline{a}\cdot\overline{c}) + \mu(\underline{b}\cdot\overline{c}) = (\lambda a_1 + \mu b_1)c_1 + (\lambda a_2 + \mu b_2)c_2 + \ldots + (\lambda a_n + \mu b_n)c_n,$$

правая часть которого совпадает с $(\lambda\underline{a} + \mu\underline{b})\cdot\overline{c}$, и, стало быть, равенство (2.1.6) доказано. Доказательство свойства (2.1.7) читателю предлагается провести самостоятельно в качестве упражнения.

Определение 2.1.6. Произведением матрицы $A = (a_{ij})_{m\times p}$ *на матрицу* $B = (b_{ij})_{p\times n}$ *называется матрица* $C = A\cdot B = (c_{ij})_{m\times n}$, *элементы которой вычисляются по формуле:*

$$c_{ij} = \underline{a}_i\cdot\overline{b}_j = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}, \qquad (2.1.8)$$

т. е. элемент c_{ij} *матрицы* $C = A\cdot B$ *равен произведению* i*-й строки матрицы* A *на* j*-й столбец матрицы* B.

Замечание 2.1.4. *Из этого определения следует, что умножать матрицу* A *на матрицу* B *(*A *слева от* B*!) можно, только если число столбцов матрицы* A *равно числу строк матрицы* B*. В этом случае размерность матрицы произведения определяется согласно следующему* правилу умножения размерностей*:*

$$(m\times p)(p\times n) = (m\times n), \qquad (2.1.9)$$

где слева стоят размерности матриц-сомножителей, а справа — размерность матрицы-произведения.

Пример 2.1.4. *Вычислить произведения* AB *и* BA *(в обозначениях произведения точка иногда опускается) для следующих матриц:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Начнем с правила умножения размерностей. Так как матрица A имеет размерность (2×2), а матрица B — соответственно (3×2), то произведение AB невозможно (число столбцов левой матрицы — 2 не равно числу строк правой матрицы — 3). Произведение BA возможно, так как число столбцов матрицы B и число строк матрицы A совпадают. Размерность произведения найдем, согласно правилу (2.1.9):

$$(3\times 2)(2\times 2) = (3\times 2),$$

то есть матрица $C = BA$ состоит из трех строк и двух столбцов. Найдем ее элементы, пользуясь формулами (2.1.8). Начнем с первой строки:

$$c_{11} = \underline{b}_1 \cdot \overline{a}_1 = (0,1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 3;$$

$$c_{12} = \underline{b}_1 \cdot \overline{a}_2 = (0,1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) = -2;$$

то есть элементы первой строки матрицы $C = BA$ получаются последовательным умножением первой строки матрицы B на столбцы матрицы A. Аналогично вычисляя элементы второй и третьей строк матрицы C, получим:

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) \\ 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-2) \\ 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 & 0 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Произведение квадратных матриц одного порядка определено всегда, при этом матрица-произведение имеет тот же порядок (докажите это с помощью правила умножения размерностей!).

Пример 2.1.5. *Для матриц второго порядка:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

вычислить их произведения AB и BA.

Решение.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Замечание 2.1.5. *Если матрица A является строкой размера $n : A = \underline{a} = (a_{1j})_{(1\times n)}$, а матрица B — столбцом того же размера: $B = \overline{b} = (b_{i1})_{(n\times 1)}$, то произведение AB определено, так как, по правилу умножения размерностей,*

$$(1 \times n)(n \times 1) = (1 \times 1).$$

При этом произведение имеет размерность (1×1), т. е. является числом:

$$A \cdot B = \underline{a} \cdot \overline{b} = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n.$$

Стало быть, произведение матрицы-строки на матрицу-столбец совпадает с произведением строки на столбец в смысле определения 2.1.5 (стр. 27).

Упражнение 2.1.3. *Докажите, что произведение матрицы-столбца размерности* $(m \times 1)$ *на матрицу-строку размерности* $(1 \times n)$ *определено всегда, при этом произведение имеет размерность* $(m \times n)$ *и вычисляется следующим образом:*

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \cdot (a_1, a_2, \cdots, a_n) = \begin{pmatrix} b_1a_1 & b_1a_2 & \cdots & b_1a_n \\ b_2a_1 & b_2a_2 & \cdots & b_2a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_ma_1 & b_ma_2 & \cdots & b_ma_n \end{pmatrix}.$$

2.1.3. Свойства матричного умножения

Свойство 2.1.1. *Произведение матриц, вообще говоря, некоммутативно (неперестановочно), то есть*

$$A \cdot B \neq B \cdot A.$$

Это утверждение для прямоугольных (т. е. не квадратных) матриц следует из того, что только одно из произведений $A \cdot B$ и $B \cdot A$ может иметь смысл (проверьте по правилу умножения размерностей). Для квадратных же матриц свойство коммутативности умножения также может не выполняться, как видно из примера 2.1.5 (стр. 29). Впрочем, для некоторых матриц свойство коммутативности умножения выполняется, такие матрицы называют *перестановочными*. А именно: матрицы A и B перестановочны, если для них выполняется равенство:

$$A \cdot B = B \cdot A.$$

Например, следующая квадратная матрица порядка n, у которой на главной диагонали стоят единицы, а на других местах — нули,

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \qquad (2.1.10)$$

— перестановочна с любой квадратной матрицей A того же порядка, а именно, для нее выполнены соотношения:

$$A \cdot E = E \cdot A = A. \qquad (2.1.11)$$

Проверьте эти соотношения на примере матриц третьего порядка. Из соотношений (2.1.11) можно заключить, что матрица E из (2.1.10) играет роль единицы в матричном умножении, она называется *единичной матрицей.*

Свойство 2.1.2. *Произведение матриц, если оно имеет смысл, ассоциативно, то есть*

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C. \tag{2.1.12}$$

Доказательство этого свойства можно найти, например, в [1].

Свойство 2.1.3. *Произведение матриц ассоциативно относительно умножения на число, т. е. для любого числа* λ

$$\lambda(A \cdot B) = (\lambda A) \cdot B = A \cdot (\lambda B).$$

Свойство 2.1.4. *Произведение матриц дистрибутивно относительно сложения, т. е.*

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C. \tag{2.1.13}$$

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C. \tag{2.1.14}$$

Доказательство. Мы ограничимся лишь доказательством свойства 2.1.4, доказательство свойства 2.1.3 выполняется аналогично, предлагаем читателю проделать его в качестве упражнения. Докажем, например, равенство (2.1.13). Для этого нужно установить, что размерности матриц слева и справа совпадают, а элементы этих матриц, стоящие на одинаковых местах, равны. Пусть $A = (a_{ij})_{m \times n}$. Чтобы произведения, входящие в (2.1.13), имели смысл, матрицы B и C должны иметь одну и ту же размерность вида $(n \times p)$, т. е. $B = (b_{jk})_{n \times p}$, $C = (c_{jk})_{n \times p}$. Тогда, по правилу умножения размерностей, находим размерность матриц в левой и правой частях (2.1.13)

$$(m \times n) \cdot (n \times p) = (m \times p).$$

Покажем, что и элементы матриц в левой и правой частях (2.1.13), имеющие одинаковые индексы, совпадают. Кроме употреблявшихся ранее обозначений строк и столбцов матрицы, условимся обозначать их также следующим образом: если $A = (a_{ij})_{m \times n}$, то столбец с номером j будет обозначаться $\overline{a}_j = \overline{(A)}_j$, строка с номером i — соответственно $\underline{a}_i = \underline{(A)}_i$. Элемент матрицы A с индексами i, j будет обозначаться также $a_{ij} = (A)_{ij}$. Запишем цепочку равенств:

$$\begin{aligned}(A \cdot (B + C))_{ij} &= \underline{(A)}_i \cdot \overline{(B + C)}_j = \underline{(A)}_i \cdot (\overline{(B)}_j + \overline{(C)}_j) = \\ &= \underline{(A)}_i \cdot \overline{(B)}_j + \underline{(A)}_i \cdot \overline{(C)}_j = (A \cdot B)_{ij} + (A \cdot C)_{ij} = (A \cdot B + A \cdot C)_{ij}.\end{aligned}$$

В первом равенстве этой цепочки использовалось определение умножения матриц, во втором — сложения, в третьем равенстве мы воспользовались леммой 2.1.1 (стр. 27), а в конце снова использовали определения суммы и произведения матриц. Сравнивая начало и конец этой цепочки, видим, что требуемое равенство элементов доказано.

Свойство 2.1.5. *Если определено произведение матриц $A \cdot B$, то определено и произведение $B^T \cdot A^T$, при этом справедливо равенство:*

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T. \tag{2.1.15}$$

Иначе говоря, транспонированная матрица от произведения равна произведению транспонированных матриц-сомножителей, взятых в обратном порядке.

Доказательство. Пусть $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $\quad B = (b_{jk})_{n\times p}$. Тогда произведение $A \cdot B$ имеет размерность $(m \times n)\cdot(n \times p) = (m \times p)$, а матрица $(A \cdot B)^T$ в левой части доказываемого равенства (2.1.15) — размерность $(p \times m)$. С другой стороны, матрицы B^T и A^T имеют размерности соответственно $(p \times n)$ и $(n \times m)$, а стало быть, произведение $B^T \cdot A^T$ в правой части (2.1.15) определено и его размерность $(p \times n)\cdot(n \times m) = (p \times m)$ — та же, что и размерность левой части. Докажем, что элементы с индексами (ik) матриц, стоящих в левой и правой частях равенства (2.1.15), совпадают. В самом деле,

$$((A \cdot B)^T)_{ik} = (A \cdot B)_{ki} = \underline{(A)}_k \cdot \overline{(B)}_i =$$

$$= a_{k1}b_{1i} + a_{k2}b_{2i} + \ldots + a_{kn}b_{ni} = (b_{1i}, b_{2i}, \ldots, b_{ni}) \cdot \begin{pmatrix} a_{k1} \\ a_{k2} \\ \vdots \\ a_{kn} \end{pmatrix} =$$

$$= \underline{(B^T)}_i \cdot \overline{(A^T)}_k = (B^T \cdot A^T)_{ik}.$$

В этих равенствах использовались: определение транспонированной матрицы, определение матричного умножения и умножения строки на столбец. Тем самым равенство (2.1.15) доказано.

2.1.4. Примеры применения матричного умножения

Операция матричного умножения была введена не из желания придумать операцию, похожую на умножение обычных чисел, а из некоторых задач, решение которых без матричного умножения выглядело чересчур сложно и громоздко. Дальше мы увидим много примеров, подтверждающих это. Пока же рассмотрим два таких примера.

Пример 2.1.6. *Пусть системы переменных (x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2) выражаются друг через друга соотношениями:*

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2. \end{cases} \qquad \begin{cases} z_1 = b_{11}y_1 + b_{12}y_2, \\ z_2 = b_{21}y_1 + b_{22}y_2. \end{cases} \tag{2.1.16}$$

Требуется найти выражение переменных (z_1, z_2) *через* (x_1, x_2).

Решение. Можно, конечно, подставить значения переменных (y_1, y_2) из первой системы равенств (2.1.16) во вторую, привести подобные и так решить поставленную задачу. Но попробуем вместо столь громоздкого пути, использовать матричный метод. Прежде всего, запишем соотношения (2.1.16) в более компактной матричной форме. Для этого введем обозначения следующих матриц:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \overline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \overline{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда системы равенств (2.1.16) можно записать в следующем эквивалентном виде:

$$\overline{y} = A\overline{x}, \quad \overline{z} = B\overline{y}. \tag{2.1.17}$$

Если мы теперь подставим во второе из этих равенств значение столбца $\overline{y}$ из первого равенства, то получим:

$$\overline{z} = B\overline{y} = B(A\overline{x}) = (BA)\overline{x}.$$

Таким образом, столбец переменных $\overline{z}$ получается умножением матрицы-произведения BA на столбец $\overline{x}$:

$$\overline{z} = BA\overline{x}.$$

Пример 2.1.7. *Во введении к гл. 2 рассматривались так называемые элементарные преобразования матриц: перестановка строк, умножение строки на число, отличное от нуля, сложение строк. Добавим к этому списку те же операции со столбцами. Требуется найти такие матрицы (назовем их условно мультипликаторами), умножение на которые равносильно тому или другому элементарному преобразованию.*

Решение. Пусть исходная матрица $A = (a_{ij})_{m \times n}$. Ограничимся поиском мультипликаторов элементарных преобразований со столбцами. Как мы знаем, при умножении матрицы A на единичную матрицу E_n порядка n ничего в матрице A не меняется. Естественно внести какие-то изменения в матрицу E_n, чтобы при умножении на матрицу A изменения в ней произошли только в определенных столбцах, сохраняя другие неизменными. Так, например, непосредственно проверяется, что мультипликатором операции перестановки j-го и k-го столбцов является матрица $E_n(j \leftrightarrow k)$, полученная из E_n аналогичной операцией:

$$A\cdot E_n(1\leftrightarrow 2)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}\cdot$$

$$\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ a_{22} & a_{21} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m2} & a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}.$$

Если обозначить через $E_n(j\to\lambda\cdot j)$ матрицу, полученную из E_n умножением на число λ ее j-го столбца, и через $E_n(j\to j+k)$ — матрицу, полученную из E_n заменой ее j-го столбца суммой j-го и k-го столбцов, то нетрудно проверить, что при умножении матрицы A справа на эти мультипликаторы реализуются соответствующие элементарные преобразования матрицы A. Например,

$$A\cdot E_n(2\to\lambda\cdot 2)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}\cdot$$

$$\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix},$$

$$A\cdot E_n(1\to 1+2)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}\cdot$$

$$\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}+a_{12} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21}+a_{22} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1}+a_{m2} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1.6. *Из решения примера 2.1.7 можно вывести следующий алгоритм: чтобы произвести элементарное преобразование со столбцами матрицы $A=(a_{ij})_{m\times n}$, нужно умножить матрицу A* справа *на мультипликатор вида $E_n(*\to *)$, полученный тем же преобразованием единичной матрицы E_n.*

Упражнение 2.1.4. *Убедитесь, что мультипликаторами элементарных преобразований со строками, являются матрицы, аналогичные рассмотренным в примере 2.1.7, при условии их умножения* слева *на матрицу A.*

Пример 2.1.8. *Найти матрицы L и R («левый мультипликатор» и «правый мультипликатор» соответственно), переводящие одну из заданных матриц A, A' в другую посредством равенства $A' = LAR$. Проверить правильность умножением:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & 0 \\ 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

Решение. Требуемое преобразование можно осуществить за два шага: сначала поменять местами второй и третий столбцы соответственно с первым и четвертым, затем поменять местами строки – вторую и третью соответственно с первой и четвертой. Наглядно это можно представить следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & 0 \\ 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & * \\ * & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow A' = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

Из решения примера 2.1.7 можно видеть, что первый шаг преобразования (перестановка столбцов) осуществляется правым мультипликатором, полученным из единичной матрицы соответствующей перестановкой столбцов:

$$A_1 = AR, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогично, второй шаг (перестановка строк) реализуется левым мультипликатором, полученным из единичной матрицы соответствующей перестановкой строк:

$$A' = LA_1, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, результирующее преобразование матрицы A в матрицу A' может быть реализовано с помощью матричного умножения равенством: $A' = LAR$, где

$$L = R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Проверка равенства $A' = LAR$ предоставляется читателю.

§ 2.2. Определители

2.2.1. Свойства суммирования

В § 2.1 уже использовалось следующее обозначение суммы конечного числа слагаемых:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i. \tag{2.2.1}$$

В этом обозначении x_i называется *общим членом суммы*, i — *индексом суммирования*, $i = 1$ и $i = n$ — соответственно *нижним и верхним пределами суммирования*. Отметим некоторые свойства суммирования:

а) индекс суммирования в (2.2.1) можно заменить другим

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{k=1}^{n} x_k;$$

б) множитель, не зависящий от индекса суммирования, можно выносить за знак суммы

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda \cdot x_i = \lambda \cdot \sum_{k=1}^{n} x_i; \tag{2.2.2}$$

в) если общий член суммы состоит из двух слагаемых, то вся сумма разлагается на две

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i; \tag{2.2.3}$$

г) если общий член суммы зависит от двух индексов, по которым ведется суммирование, то справедливо равенство:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} x_{ik} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_{ik}. \tag{2.2.4}$$

То есть при двойном суммировании можно менять порядок суммирования.

Для доказательства этих свойств заметим, что свойства а), б) и в) вытекают непосредственно из определения (2.2.1), а свойство г) следует из того, что левую и правую части (2.2.4) можно рассматривать как сумму всех элементов матрицы

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix},$$

вычисленную сначала внутри строк и затем по всем строкам матрицы, а потом наоборот: сначала внутри столбцов и затем по всем столбцам.

Замечание 2.2.1. *Механически изменять порядок суммирования, как в (*(2.2.4)*, можно только тогда, когда пределы суммирования в обеих суммах — внутренней и внешней —* постоянны*, т. е. не зависят от индексов суммирования. В противном случае к изменению порядка суммирования следует подходить осторожно. Некоторые приемы этой процедуры иллюстрируются следующим примером.*

Пример 2.2.1. *Поменять порядок суммирования в следующей сумме:*

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{i} x_{ik}. \tag{2.2.5}$$

Решение. Как и при обосновании свойства в), данную сумму можно представить как сумму элементов следующей матрицы:

$$X^0 = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_{21} & x_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{m1} & x_{m2} & x_{m3} & \cdots & x_{mm} \end{pmatrix},$$

у которой в каждой строке с номером i элементы с индексами (ik) при $k > i$ все равны нулю, так как они отсутствуют во внутренней сумме в (2.2.5). При этом слева в (2.2.5) суммирование производится сначала внутри строк матрицы X^0, а затем по строкам. Если просуммировать элементы матрицы X^0 в обратном порядке, т. е. сначала внутри столбцов матрицы X^0, а затем по столбцам, то получим ту же сумму (2.2.5), записанную по-другому:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{i} x_{ik} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=k}^{m} x_{ik}. \tag{2.2.6}$$

Возможен и другой способ нахождения пределов при изменении порядка суммирования в (2.2.5). Запишем пределы изменения индексов суммирования в сумме (2.2.5) в виде системы неравенств

$$\begin{cases} 1 \leqslant i \leqslant m, \\ 1 \leqslant k \leqslant i. \end{cases} \tag{2.2.7}$$

В первой строке этой системы указаны пределы (постоянные!) внешней суммы из (2.2.5) — по индексу i, а во второй — переменные пределы внутренней суммы по индексу k. Чтобы поменять порядок суммирования, нужно поменять индексы ролями, т. е. сделать пределы изменения индекса k постоянными, а пределы изменения i — переменными, зависящими от k. Это можно сделать, заменив систему (2.2.7) следующей эквивалентной:

$$\begin{cases} 1 \leqslant k \leqslant m, \\ k \leqslant i \leqslant m. \end{cases} \tag{2.2.8}$$

В результате снова получаем равенство (2.2.6), где в правой части стоят пределы суммирования, соответствующие (2.2.8).

2.2.2. Понятие определителя. Примеры вычисления

В данном пункте рассматриваются только квадратные матрицы. Каждой такой матрице $A = (a_{ij})_{n \times n}$ сопоставим число, называемое *определителем*, или *детерминантом*, и обозначаемое символами $|A|$, $\det A$ или в развернутом виде:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

При этом элементы матрицы a_{ij} будем называть элементами определителя, а порядок матрицы n — порядком определителя. Таким образом, определитель является *функцией, определенной на множестве всех квадратных матриц* и принимающей числовые значения. Конкретные определения этой функции будем вводить в зависимости от порядка матрицы (и определителя). Начнем с определителей низших порядков.

Определение 2.2.1. *Определителем первого порядка называется число, совпадающее с единственным элементом определителя:*

$$\det A = \det(a_{11}) = |a_{11}| = a_{11}. \tag{2.2.9}$$

Определение 2.2.2. *Определителем второго порядка называется число, вычисляемое через элементы соответствующей матрицы по формуле*

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \tag{2.2.10}$$

Примеры.

$$\det(-3) = -3; \quad \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 4 - 3\cdot 2 = -2;$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 1\cdot(-5) - 3\cdot 0 = -5.$$

Определители, так же как и матрицы, широко используются в математике и ее приложениях. В качестве примера рассмотрим опять систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2. \end{cases} \tag{2.2.11}$$

Действуя точно так же, как при решении системы (2.0.1), умножим первое уравнение нашей системы на a_{22}, второе — на $-a_{12}$ и сложим полученные уравнения. Тогда получим

$$a_{11}a_{22}x - a_{21}a_{12}x = b_1a_{22} - b_2a_{12},$$

откуда находим x

$$x = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}. \tag{2.2.12}$$

Аналогично находим y, умножая первое уравнение системы (2.2.11) на $-a_{21}$, а второе — на a_{11} и складывая полученные уравнения,

$$y = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}. \tag{2.2.13}$$

Можно заметить, что в правых частях равенств (2.2.12)–(2.2.13) в числителях и знаменателях стоят выражения, напоминающие определители некоторых матриц. А именно, обозначим через Δ определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных системы (2.2.11),

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{21}\cdot a_{12},$$

а через Δ_1 и Δ_2 — определители, полученные из Δ заменой первого столбца (или второго столбца соответственно) столбцом из свободных членов системы (2.2.11),

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1\cdot a_{22} - b_2\cdot a_{12};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}\cdot b_2 - a_{21}\cdot b_1.$$

Тогда решение системы (2.2.11), представленное равенствами (2.2.12)–2.2.13, можно записать в виде

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta}. \tag{2.2.14}$$

Эти формулы, позволяющие сразу вычислять решение системы (2.2.11) в случае если определитель Δ отличен от нуля, называются *формулами Крамера.* Их лаконичность и простота очевидны.

Прежде чем дать общее определение детерминанта (определителя) порядка n, введем определитель третьего порядка.

Определение 2.2.3. *Определителем третьего порядка называется число, которое ставится в соответствие матрице третьего порядка с помощью следующего равенства:*

$$\det A = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \quad (2.2.15)$$

Определители второго порядка

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

называются *минорами элементов* a_{11}, a_{12}, a_{13} исходного определителя третьего порядка

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Они могут быть построены с помощью следующего правила: *минор* M_{ij} *элемента* a_{ij} *определителя порядка* n *есть определитель порядка* $n-1$*, который получается из исходного определителя вычеркиванием той его строки и того столбца, на пересечении которых находится элемент* a_{ij} (в данном случае вычеркиванием i-й строки и j-го столбца). Тогда равенство (2.2.15) можно переписать в виде

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}\cdot M_{13},$$

или еще по-другому:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}, \quad (2.2.16)$$

где выражения A_{ij} представляются через соответствующие миноры равенством

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}. \quad (2.2.17)$$

Выражение A_{ij} называется *алгебраическими дополнением элемента* a_{ij}.

Пример 2.2.2. *Вычислить определитель третьего порядка*

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & 6 \end{vmatrix}.$$

Решение. В соответствием с формулой (2.2.16) нужно вычислить алгебраические дополнения элементов первой строки. Для этого находим последовательно:

$$a_{11} = 1, \quad M_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 34,$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11} = 34;$$

$$a_{12} = -2, \quad M_{12} = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = -18,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -M_{12} = 18;$$

$$a_{13} = 3, \quad M_{12} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 6,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = M_{13} = 6.$$

Теперь $\det A$ вычисляем по формуле (2.2.16):

$$\det A = 1 \cdot 34 + (-2) \cdot 18 + 3 \cdot 6 = 16.$$

Замечание 2.2.2. *Если раскрыть определители второго порядка в правой части формулы* (2.2.15) *и объединить члены, входящие со знаками* $(+)$ *и* $(-)$, *то получим соотношение*

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - \\ - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}. \quad (2.2.18)$$

Для вычисления определителей 3-го порядка с помощью последней формулы можно сформулировать следующее правило вычисления, известное как *правило треугольника*: определитель третьего порядка равен сумме произведений элементов, соединенных в треугольники на нижеследующем рисунке, взятых со знаками $(+)$ и $(-)$ соответственно.

Пример 2.2.3. *Вычислим определитель третьего порядка из предыдущего примера с помощью правила треугольника.*

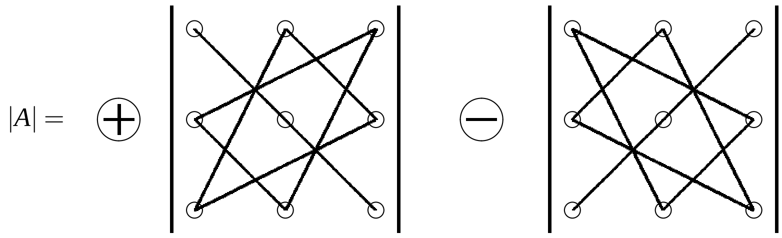


Рис. 2.1: Правило треугольника.

Решение.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 1\cdot 4\cdot 6 + (-3)\cdot(-2)\cdot 3 + 0\cdot(-2)\cdot 5 -$$

$$-0\cdot 4\cdot 3 - (-3)\cdot(-2)\cdot 6 - 1\cdot(-2)\cdot 5 = 24 + 18 + 0 - 0 - 36 + 10 = 16.$$

Введем теперь определитель порядка n методом математической индукции. Напомним, что метод математической индукции (доказательства или определения) состоит из двух шагов: во-первых, устанавливается справедливость доказываемого утверждения при $n = 1$; во-вторых, доказывается его справедливость при $n = k + 1$ в предположении, что оно выполняется при $n = k$. Отсюда вытекает справедливость утверждения при всех натуральных n.

Определение 2.2.4. *1) Если $A = (a_{11})$ — квадратная матрица первого порядка, то полагаем $\det A = a_{11}$.*

2) Предположим, что введен определитель порядка $n - 1$. Определителем порядка n, соответствующим матрице $A = (a_{ij})_{n\times n}$, назовем число, вычисляемое по формуле

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot A_{11} + a_{12}\cdot A_{12} + \ldots + a_{1n}\cdot A_{1n}, \quad (2.2.19)$$

где A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij}.

Применив это определение для вычисления определителей второго и третьего порядка, получим введенные ранее формулы (2.2.10)–(2.2.15). Равенство (2.2.19) называется *разложением определителя* $\det A$ *по первой строке*.

Пример 2.2.4. *Показать, что определитель треугольного вида равен произведению элементов главной диагонали:*

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}. \qquad (2.2.20)$$

Решение. Воспользовавшись формулой (2.2.19), разложим данный определитель по первой строке:

$$\det A = a_{11}\cdot A_{11} + 0\cdot A_{12} + \ldots + 0\cdot A_{1n} = a_{11}A_{11}.$$

Заметим, что алгебраическое дополнение A_{11} представляет собой такой же определитель треугольного вида, как и исходный, но порядка $(n-1)$, поэтому он в свою очередь разлагается по первой строке:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{22}\cdot A'_{11} + 0\cdot A'_{12} + \ldots + 0\cdot A'_{1,n-1} = a_{22}A'_{11},$$

где символами A'_{1k} обозначены алгебраические дополнения элементов определителя A_{11}. Таким образом, исходный определитель представляется в виде

$$\det A = a_{11}A_{11} = a_{11}a_{22}A'_{11} = a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{43} & a_{44} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Продолжая этот процесс, получим доказываемое равенство (2.2.20).

Применим результат примера 2.2.4 к квадратным матрицам, у которых все элементы, расположенные вне главной диагонали, равны нулю. Такие матрицы называют *диагональными*. Из равенства (2.2.20) следует, что определитель диагональной матрицы равен произведению диагональных элементов:

$$\det\Lambda = \begin{vmatrix} \lambda_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{nn} \end{vmatrix} = \lambda_{11}\lambda_{22}\cdots\lambda_{nn}. \qquad (2.2.21)$$

В частности, определитель единичной матрицы равен единице:

$$\det E = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

2.2.3. Свойства определителей

Рассмотрим свойства определителей порядка n, которые облегчают их вычисление. Доказательства этих свойств не всегда просты, поэтому мы приведем лишь некоторые из них, с другими можно ознакомиться по рекомендуемой литературе. Начнем с формулировки теоремы, которая обобщает правило (2.2.19) вычисления определителя n-го порядка и устанавливает равноправие всех его строк и столбцов.

Теорема 2.2.1. *Определитель равен сумме произведений элементов какой-нибудь строки (какого-нибудь столбца) на их алгебраические дополнения:*

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}. \tag{2.2.22}$$

Доказательство этой теоремы можно найти в [2].

Свойство 2.2.1. *При транспонировании матрицы ее определитель не меняется, т. е.*

$$\det A = \det A^T. \tag{2.2.23}$$

Доказательство проведем методом математической индукции. Обозначим через n порядок определителя:

1) пусть $n = 1$. Тогда $A = (a_{11})$, $A^T = (a_{11})$, и свойство (2.2.23) очевидно:

$$\det A = \det A^T = a_{11};$$

2) пусть свойство (2.2.23) доказано для любых определителей порядка $(n-1)$. Докажем его справедливость для определителя порядка n. Пусть $A = (a_{ij})_{n\times n}$, $A^T = B = (b_{ij})_{n\times n}$. Разложим определитель $\det A$ по первой строке, а $\det B$ — по первому столбцу:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}\cdot A_{1k} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{1+k} a_{1k}\cdot M_{1k}, \tag{2.2.24}$$

$$\det A^T = \det B = \sum_{k=1}^{n} b_{k1}\cdot B_{k1} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} b_{k1}\cdot M'_{k1}, \tag{2.2.25}$$

где M'_{k1} обозначает минор элемента b_{k1} матрицы B; напомним, что он получается из определителя $detB$ вычеркиванием k-й строки и первого столбца. Минор M_{1k} получается из определителя $\det A$ вычеркиванием первой строки и k-го столбца. Поскольку $B = A^T$, то нетрудно понять, что определители M_{1k} и M'_{k1} имеют порядок $n-1$ и получаются один из другого транспонированием соответствующей матрицы. Тогда, в силу индуктивного предположения, они равны:

$$M_{1k} = M'_{1k}.$$

Так как равны также элементы a_{1k} и b_{k1}, то равенство (2.2.23) вытекает из соотношений (2.2.24)–(2.2.25).

Замечание 2.2.3. *Ввиду свойства* 2.2.1*, строки и столбцы определителя равноправны в том смысле, что любое утверждение, касающееся строк, остается справедливым и для столбцов определителя.*

В примере 2.2.4 был вычислен определитель треугольного вида, у которого все элементы, расположенные *выше* главной диагонали, равнялись нулю. Свойство 2.2.1 позволяет легко вычислить определитель треугольного вида с элементами *ниже* главной диагонали, равными нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{(2.2.23)}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

то есть любой определитель треугольного вида равен произведению диагональных элементов.

Свойство 2.2.2. *При перестановке двух строк (или столбцов) определитель меняет знак.*

Доказательство также проведем методом математической индукции по порядку n определителя:

1) при $n = 1$ свойство 2.2.2 не имеет смысла. При $n = 2$ оно проверяется непосредственно, с использованием определения 2.2.3:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} =$$

$$= -(a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22}) = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix};$$

2) предположим, что свойство 2.2.2 доказано для всех определителей порядка $(n-1)$, причем $n > 2$. Докажем его справедливость для определителей порядка n. Переставим в определителе порядка n строки с номерами r и s и разложим исходный определитель по строке с номером i, отличной от переставленных:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}.$$

Заметим, что при перестановке строк r и s в исходном определителе эти строки автоматически поменяются местами во всех минорах M_{ik}, а значит, все эти миноры поменяют знак в силу предположения индукции (их порядок равен $n-1$). Следовательно, поменяют знак и все алгебраические дополнения $A_{ik}=(-1)^{i+k}M_{ik}$, а, стало быть, и определитель $\det A$.

Свойство 2.2.3. *Пусть столбец с номером j матрицы A представлен в виде*

$$\overline{a}_j=\lambda\overline{p}+\mu\overline{q}, \tag{2.2.26}$$

где λ и μ — некоторые числа. Тогда определитель $\det A$ можно представить в виде

$$\det A=\lambda\cdot\det A_p+\mu\cdot\det A_q, \tag{2.2.27}$$

где A_p и A_q — матрицы, полученные из A заменой j-го столбца соответственно столбцами $\overline{p}$ и $\overline{q}$. Аналогичное свойство справедливо для строк.

Доказательство. Обозначив

$$\overline{p}=\begin{pmatrix} p_1\\ p_2\\ \vdots\\ p_n\end{pmatrix},\quad \overline{q}=\begin{pmatrix} q_1\\ q_2\\ \vdots\\ q_n\end{pmatrix},$$

разложим определитель $\det A$ по j-му столбцу:

$$\det A\overset{(2.2.22)}{=}\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}=\sum_{k=1}^{n}(\lambda p_k+\mu q_k)A_{kj}=$$

$$=\lambda\sum_{k=1}^{n}p_kA_{kj}+\mu\sum_{k=1}^{n}q_kA_{kj}=\lambda\det A_p+\mu\det A_q.$$

В этих преобразованиях мы воспользовались соотношением (2.2.26), а также свойствами суммирования. Справедливость аналогичного свойства для строк вытекает из свойства 2.2.1 и замечания к нему.

Доказанные свойства 2.2.1–2.2.3 являются основными в том смысле, что все другие свойства (и даже само определение детерминанта) могут быть выведены из них в качестве следствий.

Следствие 2.2.1. *Общий множитель какой-нибудь строки или столбца можно выносить за знак определителя.*

Доказательство получается из свойства 2.2.3, если в нем положить $\mu=0$.

В частности, для определителя второго порядка имеем:

$$\begin{vmatrix}\lambda a_1 & \lambda b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=\lambda a_1b_2-a_2\lambda b_1=\lambda(a_1b_2-a_2b_1)=\lambda\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}.$$

Замечание 2.2.4. *Иначе формулируя следствие* 2.2.1*, можно сказать, что умножить определитель на число* λ *означает умножить какую-нибудь строку (одну!) или столбец на это число. Напомним, что умножить на число* λ матрицу *означает умножить на это число* все элементы матрицы.

Сравните:

$$\lambda\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda a_1 & \lambda b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \lambda\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 & \lambda b_1 \\ \lambda a_2 & \lambda b_2 \end{pmatrix}.$$

Следствие 2.2.2. *Если определитель содержит нулевую строку, то есть строку, все элементы которой равны нулю, то он равен нулю. Аналогично, определитель, содержащий нулевой столбец, равен нулю.*

Доказательство вытекает из следствия 2.2.1, если общий множитель, о котором там идет речь, равен $\lambda = 0$. Однако мы приведем еще другое доказательство, основанное на теореме 2.2.1. Пусть строка с номером i — нулевая. Разлагая определитель по этой строке, то есть применяя первое из равенств (2.2.22), получим:

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{1n}A_{in} = 0 \cdot A_{i1} + 0 \cdot A_{i2} + \ldots + 0 \cdot A_{in} = 0.$$

Следствие 2.2.3. *Если определитель имеет две одинаковых строки (или два одинаковых столбца), то он равен нулю.*

Доказательство. Поменяем местами одинаковые строки. Тогда, с одной стороны, определитель не изменится, с другой — по свойству 2.2.2 — он поменяет знак. Отсюда следует, что $\det A = -\det A$, что возможно лишь в случае $\det A = 0$.

Следствие 2.2.4. *Если в определителе две строки (или два столбца) пропорциональны, то определитель равен нулю.*

Доказательство. Пусть пропорциональны строки с номерами i и j, т. е. $\underline{a}_i = \lambda \cdot \underline{a}_j$. Вынесем из i-й строки определителя $\det A$ общий множитель λ. Получим: $\det A = \lambda \det A'$, при этом у матрицы A' окажутся две одинаковые строки с номерами i и j. В силу следствия 2.2.3, $\det A' = 0$, а значит и $\det A = 0$.

Следствие 2.2.5. *Определитель не изменится, если какой-либо его столбец (или строку) заменить суммой этого столбца (строки) и любого другого столбца (строки), умноженного на любое число.*

Доказательство. Пусть матрица A' получена из матрицы A заменой j-го столбца $\overline{a}_j$ столбцом $\overline{a}'_j = \overline{a}_j + \alpha\overline{a}_i$. Покажем, что $\det A' = \det A$. Для этого воспользуемся свойством 2.2.3, применив его к матрице A'

$$\det A' = \det A + \alpha \det A'', \tag{2.2.28}$$

где матрица A'' получена из матрицы A заменой столбца $\overline{a}_j$ на столбец $\overline{a}_i$. Но тогда матрица A'' имеет два одинаковые столбца: с номерами i и j. Следовательно, $\det A'' = 0$, и равенство $\det A' = \det A$ вытекает из (2.2.28).

Доказанное свойство обычно используется в несколько иной формулировке: *определитель не изменится, если к какому-либо его столбцу (или строке) прибавить или вычесть другой (другую), умножив его предварительно на любое число.* Эффективность этого приема иллюстрируется следующим примером.

Пример 2.2.5. *Вычислить определитель:*

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}.$$

Решение. Вместо применения правила треугольника или разложения по строке или столбцу вычтем первую строку определителя последовательно из второй, а потом из третей. По свойству 2.2.4, определитель не изменится:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Вычитая теперь из третьей строки вторую, умноженную на 2, получим определитель треугольного вида

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Для формулировки очередного свойства введем следующее

Определение 2.2.5. Линейной комбинацией столбцов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_k$ *одного размера называется столбец* $\overline{a}$ *вида*

$$\overline{a} = \lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + \ldots + \lambda_k\overline{a}_k. \tag{2.2.29}$$

Аналогично определяется линейная комбинация строк.

Следствие 2.2.6. *Если какой-нибудь столбец (или строка) квадратной матрицы A есть линейная комбинация других столбцов (строк) этой матрицы, то* $\det A = 0$.

Доказательство проведем для частного случая линейной комбинации двух столбцов. В общем случае можно использовать метод математической индукции. Пусть j-й столбец матрицы A представлен в виде линейной комбинации двух других столбцов:

$$\overline{a}_j = \lambda_1 \overline{a}_i + \lambda_2 \overline{a}_k.$$

По свойству 2.2.3 определитель $detA$ представим в виде:

$$\det A = \lambda_1 \det A_1 + \lambda_2 \det A_2,$$

где матрицы A_1 и A_2 получены из A заменой j-го столбца соответственно столбцами $\overline{a}_i$ и $\overline{a}_k$. Очевидно, обе эти матрицы имеют по два одинаковых столбца и их определители равны нулю в силу свойства 2.2.3. Значит, и $\det A = 0$.

Следствие 2.2.7. *Сумма произведений элементов какой-нибудь строки (столбца) определителя на алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) равна нулю:*

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{jk} = 0, \quad (i \neq j). \tag{2.2.30}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki} \cdot A_{kj} = 0, \quad (i \neq j). \tag{2.2.31}$$

Доказательство. Рассмотрим определитель $\det A'$, полученный из данного определителя $\det A$ заменой его j-й строки на i-ю. Этот определитель равен нулю, так как имеет две одинаковые строки. Разлагая его по j-й строке, получим

$$0 = \det A' = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk}, \quad (i \neq j),$$

что совпадает с (2.2.30). Аналогично доказывается (2.2.31).

Следствие 2.2.7 и теорему 2.2.1 можно объединить в одну теорему:

Теорема 2.2.2. *Для любой квадратной матрицы $A = (a_{ij})_{n\times n}$ выполняются равенства:*

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = \begin{cases} \det A, & \text{если} \quad i = j, \\ 0, & \text{если} \quad i \neq j, \end{cases} = \delta_{ij} \det A, \tag{2.2.32}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki} A_{kj} = \begin{cases} \det A, & \text{если} \quad i = j, \\ 0, & \text{если} \quad i \neq j, \end{cases} = \delta_{ij} \det A, \tag{2.2.33}$$

где символ δ_{ij}, называемый символом Кронекера, *предназначен для краткой записи предыдущего выражения и определяется равенством:*

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad i = j, \\ 0, & \text{если} \quad i \neq j. \end{cases} \tag{2.2.34}$$

Заключительное свойство сформулируем в форме теоремы, которую называют *теоремой умножения определителей.*

Теорема 2.2.3. *Для любых квадратных матриц A и B одного порядка определитель их произведения равен произведению определителей этих матриц:*

$$\det(AB) = \det A \det B. \tag{2.2.35}$$

Доказательство этой теоремы можно найти в [2].

В заключение покажем, как рассмотренные свойства можно использовать для рационального вычисления определителей порядка выше трех.

ПРИМЕР 2.2.6. *Вычислить определитель:*

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}.$$

РЕШЕНИЕ. Будем производить с данным определителем действия, не изменяющие значения определителя, но упрощающие его вид. В частности, будем складывать и вычитать строки или столбцы с целью получить как можно больше нулей в какой-нибудь строке (или столбце). При этом для пояснения будем использовать следующие обозначения: $(\overline{a}_i + \overline{a}_j \Rightarrow \overline{a}_i)$ означает, что к i-му столбцу прибавили j-й столбец. Аналогичные пояснения для действий со строками. Используя эти действия, попытаемся получить три нуля в первом столбце:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} \underset{(\overline{a}_1+\overline{a}_2\Rightarrow\overline{a}_1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}.$$

Мы прибавили к первому столбцу второй (значение определителя не меняется!), получив на месте a_{11} число 1. Теперь будем последовательно вычитать первую строку, умноженную на подходящее число, из второй, третьей и четвертой:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} \underset{(\underline{a}_2-\underline{a}_1\Rightarrow\underline{a}_2)}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} \underset{(\underline{a}_3-2\underline{a}_1\Rightarrow\underline{a}_3)}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} \underset{(\underline{a}_4-4\underline{a}_1\Rightarrow\underline{a}_4)}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Итак, получили нули в первом столбце всюду ниже главной диагонали. Оперируя таким же образом со строками 2–4, получим нули во втором столбце ниже главной диагонали:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -2 & 1 \end{vmatrix} \underset{(\underline{a}_2 \Leftrightarrow \underline{a}_3)}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} \underset{(\underline{a}_3 - 2\underline{a}_2 \Rightarrow \underline{a}_3)}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} \underset{(\underline{a}_4 - 5\underline{a}_2 \Rightarrow \underline{a}_4)}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & -14 \end{vmatrix}.$$

Наконец, вычитая из четвертой строки последней матрицы удвоенную третью, получим определитель треугольного вида, у которого к тому же четвертая строка — нулевая:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

§ 2.3. Обратная матрица

В этом пункте по-прежнему рассматриваются только квадратные матрицы порядка n.

2.3.1. Определение и свойства обратной матрицы

Определение 2.3.1. *Матрица A называется* обратимой*, если существует такая матрица B, что*

$$AB = BA = E, \qquad (2.3.1)$$

где E — единичная матрица. Матрица B называется обратной *по отношению к матрице A.*

Докажем некоторые свойства обратимых матриц.

Свойство 2.3.1. *Если матрица A обратима, то ее обратная матрица B единственна.*

Доказательство. Предположим, что существуют две обратные матрицы B_1 и B_2, и покажем, что они совпадают. Действительно, в силу (2.3.1) выполняются следующие равенства:

$$AB_1 = B_1A = E, \quad AB_2 = B_2A = E. \qquad (2.3.2)$$

Умножим слева первое из них на матрицу B_2 и, используя определение обратной матрицы, а также свойства матричного умножения, получим цепочку эквивалентных равенств:

$$B_2(AB_1) = B_2E \quad \Leftrightarrow \quad (B_2A)B_1 = B_2 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad EB_1 = B_2 \quad \Leftrightarrow \quad B_1 = B_2.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3.1. *Обратную матрицу обозначают:* $B = A^{-1}$. *В этих обозначениях равенство* (2.3.1) *приобретает вид*

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E. \tag{2.3.3}$$

Свойство 2.3.2. *Если матрицы A и B обратимы, то матрица AB также обратима, причем*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}. \tag{2.3.4}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что матрица $B^{-1}A^{-1}$ является обратной к $A \cdot B$, то есть их произведение равно единичной матрице. Используя свойства матричного умножения, имеем:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = ((AB)B^{-1})A^{-1} = (A(BB^{-1}))A^{-1} =$$
$$= (AE)A^{-1} = AA^{-1} = E.$$

Таким образом, доказано

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = E,$$

т. е. первое из равенств (2.3.1) или (2.3.3) в определении обратной матрицы. Аналогично доказывается второе*, т. е.:

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = E.$$

Свойство 2.3.3. *Если матрица A обратима, то матрица A^T также обратима, причем*

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T. \tag{2.3.5}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, как и в предыдущем свойстве, что матрица $(A^{-1})^T$ удовлетворяет определению обратной к матрице A^T. Действительно, используя свойство матричного умножения и определение обратной матрицы, имеем:

$$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = E^T = E.$$

---

*Впрочем, если доказано одно из равенств (2.3.1), то другое можно не проверять: оно вытекает из первого. Попробуйте это доказать.

2.3.2. Существование обратной матрицы.

Определение 2.3.2. *Матрица A называется* невырожденной, *если ее определитель отличен от нуля. В противном случае матрица A называется* вырожденной.

Теорема 2.3.1. *Для того, чтобы матрица $A = (a_{ij})_{n\times n}$ была обратимой, необходимо и достаточно, чтобы она была невырожденной. При этом обратная матрица может быть найдена в явном виде по формуле*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\widetilde{A}^T, \quad \text{где } \widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \tag{2.3.6}$$

— матрица, составленная из алгебраических дополнений элементов матрицы A (она называется присоединенной *для матрицы A).*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть матрица A имеет обратную A^{-1}. Покажем, что $\det A \neq 0$,, т.е. матрица A невырождена. Так как $AA^{-1} = E$, то $\det(AA^{-1}) = \det E = 1$. По теореме умножения определителей $\det(AA^{-1}) = \det A \det(A^{-1}) = 1$. Последнее равенство возможно, только если оба сомножителя в левой части отличны от нуля. Отсюда следует, что $\det A \neq 0$.

Достаточность. Пусть матрица A невырожденна. Покажем, что матрица

$$B = \frac{1}{\det A}\widetilde{A}^T = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

является обратной для матрицы A. Для этого докажем, что произведение $AB = C$ является единичной матрицей. Используя свойство 2.1.3 (стр. 31) матричного умножения, представим сначала матрицу C в виде:

$$C = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Теперь, применяя правило умножения матриц и теорему 2.2.2, найдем элемент c_{ij} матрицы C:

$$c_{ij} = \frac{1}{\det A}\sum_{k=1}^{p} a_{ik}A_{jk} = \frac{1}{\det A}\det A\delta_{ij} = \delta_{ij},$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. Отсюда следует, что элементы c_{ij} матрицы C равны 1, если $i = j$, и равны 0, если $i \neq j$. Это и означает, что матрица

C — единичная. Следовательно, $AB = E$. Аналогично доказывается $BA = E$, а значит, $B = A^{-1}$.

Рассмотрим примеры вычисления обратных матриц.

ПРИМЕР 2.3.1. *Найти обратную для матрицы*
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

РЕШЕНИЕ. Найдем сначала определитель матрицы:
$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2.$$
Так как $\det A \neq 0$, то матрица A невырожденна, а значит — обратима. Обратную матрицу найдем по формуле (2.3.6). Вычислим алгебраические дополнения элементов матрицы A:
$$A_{11} = 4, \quad A_{12} = -3, \quad A_{21} = -2, \quad A_{22} = 1.$$
Составим присоединенную матрицу:
$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$
Наконец, вычисляем обратную матрицу согласно формуле (2.3.6):
$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\widetilde{A}^T = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} =$$
$$= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$
Правильность вычислений проверим с помощью равенства: $A \cdot A^{-1} = E$.
$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Аналогично убеждаемся, что $A^{-1}A = E$. Значит, матрица A^{-1} найдена верно.

ПРИМЕР 2.3.2. *Найти обратную для матрицы*
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

РЕШЕНИЕ. Найдем определитель матрицы (разлагая его, например, по первой строке):
$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -3.$$

Матрица A невырождена, значит, обратная A^{-1} существует. Для ее нахождения, как и раньше, найдем алгебраические дополнения всех элементов матрицы A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 7; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -5;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 6;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -6; \quad A_{22} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3;$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -3;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = -3.$$

Составим присоединенную матрицу:

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -5 & 6 \\ -6 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Обратную матрицу находим по формуле (2.3.6):

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\widetilde{A}^T = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -7/3 & 2 & -1/3 \\ 5/3 & -1 & -1/3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Предлагаем читателю самостоятельно убедиться в правильности нахождения обратной матрицы. Для этого нужно проверить, что выполняются равенства:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

2.3.3. Решение систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы

Рассмотрим систему линейных уравнений, у которой число уравнений совпадает с числом неизвестных. В общем виде такая система из n уравнений с n неизвестными выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \tag{2.3.7}$$

где a_{ij} — коэффициенты системы ($i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$), $x_1, x_2, \dots, x_n$ — неизвестные, $b_1, b_2, \dots, b_n$ — свободные члены. Если обозначить через $A = (a_{ij})_{n\times n}$ матрицу из коэффициентов системы (ее называют *матрицей системы*), через $\overline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ — столбец свободных членов и через $\overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ — столбец из неизвестных, то систему (2.3.7) можно записать в эквивалентной матричной форме:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}. \tag{2.3.8}$$

Действительно, достаточно умножить матрицу на столбец в левой части (2.3.8), и мы получим столбец из левых частей системы (2.3.7). Совсем кратко систему (2.3.7), (2.3.8) можно записать в виде:

$$A\overline{x} = \overline{b}. \tag{2.3.9}$$

Последнее уравнение удобно для решения. Пусть матрица системы имеет обратную A^{-1}. Умножим обе части уравнения (2.3.9) слева на A^{-1}.

$$A^{-1}(A\overline{x}) = A^{-1}\overline{b} \quad \Leftrightarrow \quad (A^{-1}A)\overline{x} = A^{-1}\overline{b} \quad \Leftrightarrow \quad E\overline{x} = A^{-1}\overline{b},$$

откуда

$$\overline{x} = A^{-1}\overline{b}. \tag{2.3.10}$$

Для возможности такого решения требуется лишь одно условие: матрица A системы должна быть обратимой, или, в силу теоремы 2.3.1, невырожденной. Систему линейных уравнений (2.3.7), у которой число ее уравнений равно числу неизвестных и $\det A \neq 0$, будем называть *крамеровской*. Из вышеизложенного следует, что крамеровские системы имеют единственное решение, которое может быть найдено с помощью обратной матрицы по формуле (2.3.10).

ПРИМЕР 2.3.3. *Найти решение системы уравнений:*

$$\begin{cases} 2x+7y+3z=5; \\ 3x+9y+4z=-1; \\ \ \ x+5y+3z=2. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Запишем систему уравнений в матричном виде: $A\overline{x}=\overline{b}$, где

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad \overline{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \overline{b}=\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица A^{-1} вычислена в примере 2.3.2, с ее помощью находим решение:

$$\overline{x}=A^{-1}\overline{b}=\begin{pmatrix} -7/3 & 2 & -1/3 \\ 5/3 & -1 & -1/3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -43/3 \\ 26/3 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, единственное решение нашей системы: $x=-43/3, y=26/3, z=-9$.

§ 2.4. Ранг матрицы

2.4.1. Линейная независимость строк и столбцов

Рассмотрим некоторые свойства столбцов или строк одного размера, при этом все понятия и утверждения будем формулировать только для столбцов, для строк они формулируются аналогично.

Пусть $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, $\ldots$, $\overline{a}_k$ — некоторая совокупность столбцов одного размера. Напомним (см. определение 2.2.5 на стр. 48), что линейной комбинацией этих столбцов называется столбец $\overline{a}$ вида:

$$\overline{a}=\lambda_1\overline{a}_1+\lambda_2\overline{a}_2+\ldots+\lambda_k\overline{a}_k, \tag{2.4.1}$$

где λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_k — действительные числа, коэффициенты линейной комбинации.

Линейную комбинацию (2.4.1) называют *тривиальной*, если все коэффициенты в правой части (2.4.1) равны нулю: $\lambda_i=0; \quad i=1,2,\ldots,k$ (или короче: $i=\overline{1,k}$). В противном случае (то есть когда хотя бы одно λ_i отлично от нуля) линейная комбинация называется *нетривиальной*. Заметим, что тривиальная линейная комбинация столбцов всегда равна нулевому столбцу

$$0\overline{a}_1+0\overline{a}_2+\ldots+0\overline{a}_k=\overline{0}.$$

Ситуация, когда нетривиальная линейная комбинация столбцов может равняться нулевому столбцу, описана в следующем определении.

Определение 2.4.1. *Совокупность (или система) столбцов $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, ..., $\overline{a}_k$ называется* линейно зависимой, *если существует нетривиальная линейная комбинация этих столбцов, равная нулевому столбцу. В противном случае система столбцов называется* линейно независимой.

Иначе говоря, система столбцов $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, ..., $\overline{a}_k$ линейно зависима, если найдутся коэффициенты λ_1, λ_2, ..., λ_k, из которых хотя бы один отличен от нуля, такие, что выполнено равенство:

$$\lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + \ldots + \lambda_k\overline{a}_k = \overline{0}, \tag{2.4.2}$$

где $\overline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ — нулевой столбец.

Напротив, система столбцов $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, ..., $\overline{a}_k$ линейно независима, если не найдутся такие коэффициенты λ_1, λ_2, ..., λ_k, из которых хотя бы один отличен от нуля, и выполнено равенство (2.4.2). Стало быть, система линейно независима, если равенство (2.4.2) возможно лишь для нулевых коэффициентов λ_i или если равенство (2.4.2) влечет

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0. \tag{2.4.3}$$

Пример 2.4.1. *Выяснить, является ли система столбцов*

$$\overline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \overline{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

линейно зависимой.

Решение. Запишем равенство (2.4.2) для данной системы столбцов:

$$\lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 = \overline{0} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Оно равносильно следующим соотношениям:

$$\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0, \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 = 0. \end{cases} \tag{2.4.4}$$

Последняя система равенств, равносильная (2.4.2), представляет собой систему линейных уравнений, а вопрос о линейной зависимости исходной системы столбцов сводится к существованию *ненулевого решения* системы (2.4.4). Заметим, что эта система однородная, то есть столбец из правых частей ее уравнений нулевой. Очевидно, одно решение у нее всегда есть — нулевое: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$. А так как определитель системы $\det A = -2 \neq 0$, то система (2.4.4) является крамеровской и имеет единственное решение (см. (2.3.10)), т. е. нулевое. Таким образом, равенство (2.4.2) для нашей системы столбцов выполняется лишь при нулевых значениях коэффициентов. Стало быть, данная система столбцов линейно независима.

Замечание 2.4.1. *Из решения этого примера вытекает справедливость следующего утверждения: система столбцов $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, ..., $\overline{a}_k$ линейно зависима тогда и только тогда, когда однородная система линейных уравнений*

$$A\overline{x} = \overline{0} \tag{2.4.5}$$

имеет ненулевое решение*, где A — матрица, составленная из столбцов $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, ..., $\overline{a}_k$.*

Рассмотрим некоторые свойства линейно зависимых и линейно независимых систем.

Свойство 2.4.1. *Система столбцов $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, ..., $\overline{a}_k$ линейно зависима тогда и только тогда, когда один из этих столбцов есть линейная комбинация остальных.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть столбцы $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, ..., $\overline{a}_k$ линейно зависимы. Тогда существует нетривиальная линейная комбинация этих столбцов, равная нулевому столбцу, т. е. найдутся коэффициенты λ_1, λ_2, ..., λ_k, из которых хотя бы один отличен от нуля, и выполнено равенство

$$\lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + \ldots + \lambda_k\overline{a}_k = \overline{0}.$$

Для простоты предположим, что коэффициент, отличный от нуля — λ_1. Разделим это равенство на λ_1 (т. е. умножим на $1/\lambda_1$) и перенесем все члены, кроме $\overline{a}_1$, в правую часть:

$$\overline{a}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\overline{a}_2 - \ldots - \frac{\lambda_k}{\lambda_1}\overline{a}_k.$$

Это равенство и означает, что столбец $\overline{a}_1$ есть линейная комбинация остальных столбцов.

Достаточность. Пусть теперь один из столбцов $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, ..., $\overline{a}_k$ есть линейная комбинация остальных. Например,

$$\overline{a}_1 = \mu_2\overline{a}_2 + \ldots + \mu_k\overline{a}_k.$$

Перенося все члены этого равенства в левую часть, получим

$$1\overline{a}_1 - \mu_2\overline{a}_2 - \ldots - \mu_k\overline{a}_k = \overline{0}.$$

Так как в левой части последнего равенства стоит нетривиальная линейная комбинация столбцов $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, ..., $\overline{a}_k$, равная нулевому столбцу (коэффициент у столбца $\overline{a}_1$ отличен от нуля!), то данная система столбцов линейно зависима.

Свойство 2.4.2. *Если система столбцов $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, ..., $\overline{a}_k$ содержит нулевой столбец, то она линейно зависима.*

Доказательство. Пусть, например, $\overline{a}_1 = \overline{0}$, тогда выполняется равенство

$$1\overline{a}_1 + 0\overline{a}_2 + \ldots + 0\overline{a}_k = \overline{0},$$

из которого и вытекает линейная зависимость данной системы столбцов согласно определению 2.4.1.

Свойство 2.4.3. *Если система столбцов $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, …, $\overline{a}_k$ содержит линейно зависимую подсистему, то вся система линейно зависима.*

Доказательство. Пусть для простоты первые $r \leqslant k$ столбцов линейно зависимы. Тогда найдется нетривиальная линейная комбинация эти столбцов, равная нулевому столбцу:

$$\lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + \ldots + \lambda_r\overline{a}_r = \overline{0}.$$

Добавив к левой части этого равенства остальные столбцы с коэффициентами, равными нулю, получим:

$$\lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + \ldots + \lambda_r\overline{a}_r + 0\overline{a}_{r+1} + \ldots + 0\overline{a}_k = \overline{0}.$$

Так как из первых r коэффициентов не все равны нулю, то в левой части последнего равенства стоит нетривиальная линейная комбинация столбцов $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, …, $\overline{a}_r$, $\overline{a}_{r+1}$, …, $\overline{a}_k$, равная нулевому столбцу. Следовательно, они образуют линейно зависимую систему.

Свойство 2.4.4. *Если система столбцов $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, …, $\overline{a}_k$ линейно независима, то любая ее подсистема также линейно независима.*

Доказательство выводится из предыдущего свойства рассуждением от противного.

2.4.2. Ранг матрицы. Теоремы о базисном миноре и о ранге матрицы

Рассмотрим произвольную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Определение 2.4.2. Минором k-го порядка *матрицы A называется определитель, образованный элементами, расположенными на пересечении каких-либо k строк и каких-либо k столбцов матрицы.*

Пример 2.4.2. *Дана матрица*

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Минорами первого порядка являются все элементы матрицы: 1, 2, 3, 0, 4 и т. д. Миноры второго порядка — это всевозможные определители второго порядка, стоящие на пересечении каких-нибудь пар столбцов и каких-нибудь пар строк:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}, \quad \text{и т. д.}$$

Миноры третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

Очевидно, миноров выше третьего порядка у данной матрицы нет. Вообще, если матрица имеет размерность $m \times n$, то наивысший порядок ее миноров равен минимальному из чисел m, n.

Определение 2.4.3. Рангом матрицы A *называется наивысший порядок ее миноров, отличных от нуля. Обозначения:* $\mathrm{Rg}A$ *или* $\mathrm{Rang}A$.

Более подробно: $\mathrm{Rg}A = r$, если существует минор порядка r матрицы A, отличный от нуля, и все миноры более высоких порядков равны нулю. В этом случае минор порядка r, отличный от нуля (любой), называется *базисным* минором матрицы A, а совокупность столбцов (строк), пересекающих базисный минор, также называют *базисными*.

Упражнение 2.4.1. *Докажите, что если существует минор порядка r матрицы A, отличный от нуля, и все миноры порядка $r+1$ равны нулю, то* $\mathrm{Rg}A = r$.

Пример 2.4.3. *Найти ранг матрицы:*

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Так как существуют миноры первого порядка, отличные от нуля (элементы матрицы), то вычисляем миноры второго порядка. Если все они окажутся равными нулю то ранг равен 1 (см. упражнение 2.4.1). Если найдется минор второго порядка, отличный от нуля, то вычисляем миноры третьего порядка. В случае если все миноры третьего порядка окажутся нулевыми, то ранг равен 2. Если же среди них найдется ненулевой, то вычисляем миноры четвертого порядка и т. д.

Следуя описанной процедуре, легко обнаруживаем минор второго порядка, не равный нулю: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1$. Вычисляем миноры третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{и т. д.}$$

Очевидно, все миноры третьего порядка равны нулю, так как можно заметить, что у матрицы A третья строка равна сумме первых двух, и это же свойство наследуют все миноры третьего порядка. Стало быть, $\mathrm{Rg} A = 2$.

Теорема 2.4.1 (о базисном миноре). *Столбцы (строки), пересекающие базисный минор матрицы, линейно независимы. Любой столбец (строка) матрицы является линейной комбинацией базисных.*

Доказательство Все рассуждения проведем для столбцов, для строк они будут аналогичны. Мы докажем сначала, что базисные столбцы линейно независимы. Предположим, что это не так, т. е. столбцы, пересекающие базисный минор, линейно зависимы. Тогда, по свойству 2.4.1 (стр. 31), один из этих столбцов есть линейная комбинация остальных, и это остается справедливым также для столбцов базисного минора. Но тогда, по свойству определителей (см. следствие 2.2.6 на стр. 48), базисный минор должен равняться нулю, что противоречит определению базисного минора. Стало быть, предположение неверно, и столбцы, пересекающие базисный минор, линейно независимы.

Докажем второе утверждение теоремы. Пусть $\mathrm{Rg} A = r$. Предположим для простоты, что базисный минор расположен в левом верхнем углу матрицы A, т. е. на пересечении первых r строк и первых r столбцов. Рассмотрим определитель порядка $r+1$, полученный добавлением к базисному минору строки с номером i и столбца с номером j матрицы A:

$$\Delta_{r+1} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} & a_{2j} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ir} & a_{ij} \end{vmatrix}.$$

Этот определитель равен нулю при любых $i = \overline{1,m}$ и $j = \overline{1,n}$. Действительно, если $i \leqslant r$ или $j \leqslant r$, то Δ_{r+1} содержит две одинаковых строки или два одинаковых столбца. А если $i > r$ и $j > r$, то определитель Δ_{r+1} оказывается минором порядка $r+1$ матрицы A, и он равен нулю, так как $\mathrm{Rg} A = r$.

Разложим определитель Δ_{r+1} по последней строке, обозначая следующим образом алгебраические дополнения элементов этой строки:

$$A_{i1} = \lambda_1, \quad A_{i2} = \lambda_2, \quad \ldots, \quad A_{ir} = \lambda_r, \quad A_{ij} = \lambda_{r+1}.$$

Заметим, что алгебраические дополнения элементов последней строки определителя Δ_{r+1} не зависят от того, какая именно строка стоит на последнем месте, поэтому в их обозначении отсутствует зависимость от i. Разложение определителя Δ_{r+1} по последней строке имеет вид

$$\Delta_{r+1} = a_{i1}\lambda_1 + a_{i2}\lambda_2 + \ldots + a_{ir}\lambda_r + a_{ij}\lambda_{r+1}$$

или

$$0 = \lambda_1 a_{i1} + \lambda_2 a_{i2} + \ldots + \lambda_r a_{ir} + \lambda_{r+1} a_{ij}$$

при всех $i = 1, \ldots, m$. Последние равенства равносильны следующему соотношению для столбцов:

$$\overline{0} = \lambda_1 \overline{a}_1 + \lambda_2 \overline{a}_2 + \ldots + \lambda_r \overline{a}_r + \lambda_{r+1} \overline{a}_j.$$

Заметим, что в этом равенстве коэффициент $\lambda_{r+1} = A_{ij}$ есть базисный минор матрицы A, поэтому он не равен нулю. Разделив на него все члены равенства, выразим оттуда $\overline{a}_j$:

$$\overline{a}_j = -\frac{\lambda_1}{\lambda_{r+1}}\overline{a}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_{r+1}}\overline{a}_2 - \ldots - \frac{\lambda_r}{\lambda_{r+1}}\overline{a}_r.$$

В силу произвольности j, последнее равенство означает, что любой столбец матрицы A есть линейная комбинация базисных столбцов.

Следствие 2.4.1. *Если матрица A квадратная и* $\det A = 0$*, то столбцы (строки) матрицы образуют линейно зависимую систему.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть порядок матрицы равен n. Так как матрица квадратная, то единственный минор порядка n матрицы — это ее определитель. Условие $\det A = 0$ эквивалентно тому, что $\mathrm{Rg} A = r < n$. Значит, существует столбец, который не пересекает базисный минор. По теореме 2.4.1, этот столбец есть линейная комбинация базисных, а значит, по свойству 2.4.1 (если $r = n-1$) или по свойству 2.4.3 (если $r < n-1$) все столбцы матрицы линейно зависимы. Аналогично доказывается линейная зависимость строк.

Теорема 2.4.2 (о ранге матрицы). *Ранг матрицы равен максимальному числу ее линейно независимых строк (столбцов).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой теоремы следует из определения ранга матрицы и теоремы о базисном миноре. Если $\mathrm{Rg} A = r$, то в матрице существует ровно r линейно независимых строк (это базисные строки), а любые

$(r+1)$ строки линейно зависимы. Действительно, ранг матрицы A', образованной этими $(r+1)$ строками, не превосходит ранга всей матрицы A, то есть $\mathrm{Rg}A' \leqslant r$, а значит, найдется строка матрицы A', не пересекающая базисный минор этой матрицы. По теореме о базисном миноре, эта строка есть линейная комбинация остальных строк матрицы A', значит, все строки этой матрицы линейно зависимы. Тогда, по свойству 2.4.3 линейно зависимых систем, все строки матрицы A также линейно зависимы.

Справедливо и обратное. Если в матрице существует r линейно независимых строк, а любые $(r+1)$ строки линейно зависимы, то, во-первых, существует минор порядка r, отличный от нуля. Такой минор найдется среди миноров, расположенных в этих r линейно независимых строках, так как в противном случае все эти миноры порядка r равны нулю, следовательно, ранг матрицы, образованной r линейно независимыми строками, будет меньше r, что влечет линейную зависимость этих r строк, в силу первой части теоремы, т. е. здесь — противоречие. Во-вторых, любой минор порядка $(r+1)$ исходной матрицы равен нулю, так как все его $(r+1)$ строки будут линейно зависимы (почему?) и, значит, одна из них есть линейная комбинация остальных. По определению ранга матрицы, отсюда следует (см упражнение 2.4.1), что $\mathrm{Rg}A = r$.

Следствие 2.4.2. *Ранг матрицы не меняется при умножении ее на любую невырожденную (квадратную) матрицу.*

Доказательство. Пусть матрица $A = (a_{ij})_{m\times n}$ имеет ранг $\mathrm{Rg}A = r$. Умножим ее справа на невырожденную матрицу $B = (b_{jk})_{n\times n}$. В силу теоремы о ранге матрицы, достаточно показать, что максимальное число линейно независимых строк матрицы AB равно r. Заметим, что строками матрицы AB являются произведения соответствующих строк матрицы A на матрицу B:

$$\underline{a}_1 B, \quad \underline{a}_2 B, \quad \ldots, \quad \underline{a}_m B.$$

Покажем, что линейная зависимость (линейная независимость) любой системы строк матрицы A равносильна линейной зависимости (линейной независимости) соответствующей системы строк матрицы AB. Пусть, например, система строк $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$, $\ldots$, $\underline{a}_k$ линейно зависима, т. е. равенство

$$\lambda_1\underline{a}_1 + \lambda_2\underline{a}_2 + \ldots + \lambda_k\underline{a}_k = \underline{0} \tag{2.4.6}$$

выполняется при некоторых ненулевых коэффициентах λ_i. Умножив это равенство на матрицу B, получим

$$\lambda_1\underline{a}_1 B + \lambda_2\underline{a}_2 B + \ldots + \lambda_k\underline{a}_k B = \underline{0}. \tag{2.4.7}$$

При этом равенства (2.4.6) и (2.4.7) равносильны, так как (2.4.6) получается из (2.4.7) умножением последнего на матрицу B^{-1}. Поэтому из линейной зависимости (независимости) строк $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$, ..., $\underline{a}_k$ вытекает линейная зависимость (независимость) строк $\underline{a}_1 B$, $\underline{a}_2 B$, ..., $\underline{a}_k B$ и обратно. Отсюда ясно, что максимальное число линейно независимых строк у матриц A и AB должно быть одинаковым.

2.4.3. Элементарные преобразования матриц

Определение 2.4.4. *Элементарными преобразованиями матрицы называются:*

1) перестановка любых двух строк матрицы;

2) умножение какой-либо строки матрицы на число, отличное от нуля;

3) сложение строк, то есть замена любой строки матрицы ее суммой с какой-нибудь другой строкой;

4) те же операции со столбцами.

Определение 2.4.5. *Матрицы, полученные одна из другой элементарными преобразованиями, называются эквивалентными.*

Обозначение: $A \sim B$ (A эквивалентна B).

Теорема 2.4.3. *Элементарные преобразования матрицы не меняют ее ранга.*

Доказательство. Для доказательства теоремы вспомним, что каждое элементарное преобразование равносильно умножению матрицы на некоторую невырожденную матрицу-мультипликатор (см. замечание 2.1.6 и упражнение 2.1.4). Тогда утверждение теоремы вытекает из следствия 2.4.2.

Замечание 2.4.2. *При помощи элементарных преобразований любую матрицу A можно привести к одному из простейших видов: треугольному, диагональному или «ступенчатому», ранг которых определяется очень просто.*

Например, пусть матрица A элементарными преобразованиями приведена к диагональному виду (перестановкой строк и столбцов можно добиться, чтобы ненулевые элементы главной диагонали стояли в левом верхнем углу):

$$
A \sim B = \left(\begin{array}{cccc|ccc}
b_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & b_{22} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & b_{rr} & 0 & \cdots & 0 \\
\cline{1-4}
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{array}\right).
$$

Тогда, очевидно, ранги обеих матриц совпадают и равны числу ненулевых элементов диагональной матрицы. В самом деле, базисный минор диагональной матрицы B как раз находится в левом верхнем углу, и его порядок равен числу ненулевых элементов.

Рассмотрим несколько примеров использования элементарных преобразований для вычисления ранга матрицы.

Уточним сначала понятие ступенчатой матрицы.

Определение 2.4.6. *Ступенчатой матрицей будем называть матрицу, удовлетворяющую следующим условиям:*

1) все нулевые строки находятся ниже всех ненулевых;

2) у каждой ненулевой строки, кроме первой, число нулевых элементов, предшествующих первому ненулевому, больше, чем у предыдущей строки.

Например, ступенчатыми являются матрицы A и B.

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad
B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

Частным случаем ступенчатой является треугольная матрица вида:

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.
$$

Теорема 2.4.4. *Ранг ступенчатой матрицы равен числу ее ненулевых строк.*

Доказательство. Воспользуемся определением ранга матрицы. Пусть в матрице $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ступенчатого вида r ненулевых строк, где $r \leqslant \min(m,n)$. Тогда у нее имеется минор порядка r, отличный от нуля, а именно минор, лежащий на пересечении ненулевых строк и столбцов, в которых находятся первые ненулевые элементы этих строк (отмеченные в приведенных выше примерах ступенчатых матриц). Кроме того, все миноры порядка выше r либо не существуют, либо равны нулю, так как неизбежно будут содержать нулевые строки. Отсюда следует, что $\mathrm{Rg} A = r$.

Пример 2.4.4. *Найти ранг ступенчатой матрицы и указать базисный минор:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Из предыдущей теоремы следует, что $\mathrm{Rg} A = 3$. Базисный минор лежит на пересечении ненулевых строк и столбцов, в которых лежат первые ненулевые элементы этих строк, отмеченные уголками:

$$M = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

Упражнение 2.4.2. *Докажите, что* $\mathrm{Rg} A = 3$ *для матрицы из последнего примера без теоремы* 2.4.4*, пользуясь только определением ранга матрицы.*

На следующем примере проиллюстрируем метод нахождения ранга матрицы путем приведения ее к ступенчатому виду элементарными преобразованиями. Этот метод называют *методом Гаусса*.

Пример 2.4.5. *Найти ранг матрицы с помощью элементарных преобразований (методом Гаусса)*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Начнем с того, что для удобства поменяем местами первые две строки. Удобство заключается в том, что в первой строке на первой позиции стоит 1. Затем, используя эту первую строку, добьемся, чтобы в первом столбце все элементы, стоящие ниже главной диагонали, равнялись нулю. Для этого из каждой строки, начиная со второй, будем вычитать (или прибавлять) первую, умноженную на подходящее число:

$$A\sim\begin{pmatrix}1&2&-1&1&1\\2&-1&3&0&2\\-3&0&2&-1&-4\\0&1&4&0&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&-1&1&1\\0&-5&5&-2&0\\0&6&-1&2&-1\\0&1&4&0&-1\end{pmatrix}.$$

Так, например, из второй строки вычли первую, умноженную на 2; к третьей удобней прибавить первую, умноженную на 3; а четвертую строку оставили без изменений, так как у нее уже в первом столбце стоит 0.

Аналогичные преобразования проделаем со строками последней матрицы, начиная со второй: сначала поменяем местами вторую и четвертую, затем, вычитая или прибавляя вторую строку к последующим, умножая ее предварительно на подходящее число, добьемся, чтобы во втором столбце все элементы ниже главной диагонали были равны нулю:

$$A\sim\begin{pmatrix}1&2&-1&1&1\\0&-5&5&-2&0\\0&6&-1&2&-1\\0&1&4&0&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&-1&1&1\\0&1&4&0&-1\\0&6&-1&2&-1\\0&-5&5&-2&0\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&2&-1&1&1\\0&1&4&0&-1\\0&0&-25&2&5\\0&0&25&-2&-5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&-1&1&1\\0&1&4&0&-1\\0&0&-25&2&5\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

В последнем преобразовании к последней строке прибавили предыдущую, что привело к нулевой строке. Поскольку заключительная матрица имеет ступенчатый вид, то ее ранг определяем по числу ненулевых строк: он равен 3. Следовательно, и ранг исходной матрицы равен $\mathrm{Rg}A=3$.

§ 2.5. Системы линейных уравнений. Теорема Крамера

2.5.1. Основные понятия. Матричная запись системы

В п 2.3.3 мы уже имели дело с системами линейных уравнений общего вида.

Определение 2.5.1. *Системой m линейных алгебраических уравнений с*

n неизвестными называется система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{2.5.1}$$

где x_1, x_2, ..., x_n — неизвестные, a_{ij} — коэффициенты системы, а b_1, b_2, ..., b_m — свободные члены, или правые части уравнений системы.

Определение 2.5.2. Решением *системы* (2.5.1) *называется всякий набор чисел $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$, ..., $x_n = x_n^0$, при подстановке которых в систему* (2.5.1) *все ее уравнения превращаются в верные равенства.*

Определение 2.5.3. *Система* (2.5.1) *называется* совместной, *если она имеет хотя бы одно решение, и* несовместной, *если не имеет решений.*

Определение 2.5.4. *Две системы называются* эквивалентными, *или* равносильными, *если они имеют одно и то же множество решений. При этом все несовместные системы считаются равносильными.*

Как и в п 2.3.3, *матрицей системы* будем называть матрицу из ее коэффициентов:

$$A = (a_{ij})_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

а столбец неизвестных и столбец свободных членов обозначать соответственно

$$\overline{x} = X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \overline{b} = B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Тогда систему (2.5.1) можно записать в эквивалентной матричной форме:

$$A\overline{x} = \overline{b} \quad \text{или} \quad AX = B. \tag{2.5.2}$$

Пример 2.5.1. *Для заданной системы линейных уравнений выписать матрицу системы, столбец неизвестных, столбец свободных членов и записать систему в матричном виде:*

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -1 \\ x_1 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Легко видеть, что матрица системы имеет размерность (3×4) (3 уравнения и 4 неизвестных), столбец неизвестных имеет размер 4, а столбец свободных членов — размер 3. Конкретные их выражения имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \, \overline{x} = X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \, \overline{b} = B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

При этих значениях данная система уравнений имеет вид (2.5.2).

2.5.2. Формулы Крамера

Вернемся еще раз к крамеровским системам линейных уравнений, т. е. системам, число уравнений в которых равно числу неизвестных, а матрица системы невырожденная. Пусть матрица системы по-прежнему обозначена $A = (a_{ij})_{n\times n}$. Ее определитель обозначим

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

и будем называть *определителем системы.* Наряду с Δ рассмотрим определители Δ_j, $\quad j = 1, 2, \ldots, n$, которые получаются из Δ *заменой его j-го столбца столбцом свободных членов*, например,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

и т. д. В этих обозначениях имеет место следующая

Теорема 2.5.1 (Крамера). *Если в системе линейных уравнений* (2.5.1) *или* (2.5.2) *число уравнений равно числу неизвестных и определитель системы отличен от нуля (т. е. система является крамеровской), то она имеет единственное решение, определяемое по формулам:*

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}. \tag{2.5.3}$$

Доказательство. Условия доказываемой теоремы совпадают с условиями разрешимости крамеровской системы при помощи обратной матрицы (см. п 2.3.3). В этом случае крамеровская система имеет единственное решение, задаваемое формулой (2.3.10). Запишем подробнее эту формулу, подставляя в нее выражение для обратной матрицы из (2.3.6):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \overline{x} = A^{-1}\overline{b} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Перемножив матрицы в правой части равенства, найдем:

$$x_1 = \frac{1}{\Delta}(b_1A_{11} + b_2A_{21} + \ldots + b_nA_{n1}) = \frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n} b_kA_{k1} = \frac{\Delta_1}{\Delta},$$

$$x_2 = \frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n} b_kA_{k2} = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n} b_kA_{kn} = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

Последние равенства во всех этих соотношениях получены по формулам разложения определителей Δ_j по j-му столбцу:

$$\Delta_1 = \sum_{k=1}^{n} b_kA_{k1}, \quad \Delta_2 = \sum_{k=1}^{n} b_kA_{k2}, \quad \ldots, \quad \Delta_n = \sum_{k=1}^{n} b_kA_{kn}.$$

Формулы (2.5.3), по которым находится решение крамеровской системы, также называют *формулами Крамера.*

Пример 2.5.2. *Найти решение системы по формулам Крамера:*

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1; \\ -2x + 4y = -3; \\ x + 2y + 3z = 1. \end{cases}$$

Решение. Так как определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

то формулы Крамера применимы. Вычислим определители Δ_1, Δ_2, Δ_3, заменяя в Δ столбцы 1, 2, 3 столбцом свободных членов:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -1,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Тогда решение находим по формулам (2.5.3):

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{1}{2}, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{1}{2}.$$

§ 2.6. Системы линейных уравнений. Общая теория

2.6.1. Условие совместности системы. Теорема Кронекера–Капелли

Рассмотрим систему линейных уравнений общего вида (2.5.1) или в матричной форме (2.5.2). Наряду с матрицей системы $A = (a_{ij})_{mxn}$ рассмотрим так называемую расширенную матрицу

$$A^* = (A|B) = (A|\overline{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right), \tag{2.6.1}$$

которая получается добавлением к матрице A столбца свободных членов.

В связи с данной системой возникает вопрос о ее совместности: имеет ли она хотя бы одно решение? Ответ содержится в следующей теореме Кронекера-Капелли.

Теорема 2.6.1 (Кронекера–Капелли). *Для того чтобы система линейных уравнений* (2.5.1) *или* (2.5.2) *имела решения (т. е. была совместной), необходимо и достаточно, чтобы ранг основной матрицы A системы был равен рангу расширенной матрицы A^* :*

$$\mathrm{Rg}A = \mathrm{Rg}A^*. \tag{2.6.2}$$

Доказательство. *Необходимость.* Используя линейные операции над столбцами, систему (2.5.1) можно записать в следующем виде:

$$x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \ldots + x_n\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

или сокращенно:

$$x_1\overline{a}_1 + x_2\overline{a}_2 + \ldots + x_n\overline{a}_n = \overline{b}. \tag{2.6.3}$$

Пусть система совместна. Тогда найдутся такие значения $x_1 = \lambda_1$, $x_2 = \lambda_2$, $\ldots, x_n = \lambda_n$, при подстановке которых в (2.5.1) или в (2.6.3) все эти уравнения обращаются в верные равенства, в частности будет выполнено равенство

$$\lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + \ldots + \lambda_n\overline{a}_n = \overline{b}.$$

Из этого равенства следует, что столбец свободных членов $\overline{b}$ есть линейная комбинация столбцов матрицы A, и значит его добавление к матрице A не увеличивает максимальное число линейно независимых столбцов матрицы A. По теореме о ранге матрицы, $\mathrm{Rg}A = \mathrm{Rg}A^*$.

Достаточность. Пусть $\mathrm{Rg}A = \mathrm{Rg}A^* = r$. Тогда базисный минор матрицы A может служить и базисным минором расширенной матрицы A^*. Не ограничивая общности, можно считать, что базисный минор расположен в верхнем левом углу матрицы A, т. е. на пересечении первых r строк и первых r столбцов. Тогда, по теореме о базисном миноре, столбец $\overline{b}$ является линейной комбинацией первых r столбцов матрицы A, т. е.

$$\overline{b} = \lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + \ldots + \lambda_r\overline{a}_r$$

для некоторых коэффициентов $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$. Приписав в правую часть этого равенства остальные столбцы матрицы A с нулевыми коэффициентами, получим

$$\overline{b} = \lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + \ldots + \lambda_r\overline{a}_r + 0\,\overline{a}_{r+1} + \ldots + 0\,\overline{a}_n,$$

откуда следует, что (2.6.3) выполняется при значениях неизвестных $x_1 = \lambda_1$, $x_2 = \lambda_2, \ldots, x_r = \lambda_r$, $x_{r+1} = 0, \ldots, x_n = 0$. Это и означает, что система (2.5.1) имеет решение.

2.6.2. Однородные системы линейных уравнений

Определение 2.6.1. *Система линейных уравнений называются* однородной*, если столбец ее свободных членов — нулевой:* $\overline{b} = \overline{0}$.

Однородная система имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{2.6.4}$$

или в матричной форме

$$A\overline{x} = \overline{0}. \tag{2.6.5}$$

Очевидно, что однородная система всегда совместна, так как имеет, по крайней мере, одно решение

$$\overline{x} = \overline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

которое называется *нулевым,* или *тривиальным.*

Упражнение 2.6.1. *Попробуйте обосновать совместность однородной системы с помощью теоремы Кронекера-Капелли.*

Рассмотрим некоторые свойства решений однородных систем.

Свойство 2.6.1. *Если столбцы*

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \overline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

являются решениями системы (2.6.4)*, то их сумма* $\overline{x}+\overline{y}$ *также является решением* (2.6.4)*.*

Доказательство. Воспользуемся матричной записью (2.6.5) однородной системы (2.6.4). Так как столбцы $\overline{x}$ и $\overline{y}$ являются решениями этой системы, то для них справедливы равенства:

$$A\overline{x} = \overline{0}, \quad A\overline{y} = \overline{0}.$$

Складывая эти равенства и используя свойства матричного умножения, получим

$$A\overline{x} + A\overline{y} = \overline{0} \iff A(\overline{x}+\overline{y}) = \overline{0},$$

откуда и вытекает доказываемое утверждение. Аналогично доказывается следующее

Свойство 2.6.2. *Если столбец* $\overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *является решением системы* (2.6.4)*, то для любого действительного* λ *столбец* $\lambda\overline{x}$ *также является решением* (2.6.4)*.*

Из этих свойств немедленно вытекает

Следствие 2.6.1. *Если столбцы*

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \overline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

являются решениями системы (2.6.4)*, то для любых действительных* λ *и* μ *линейная комбинация* $\lambda\overline{x} + \mu\overline{y}$ *также является решением* (2.6.4)*.*

Методом математической индукции отсюда выводится

Следствие 2.6.2. *Если столбцы $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k$ являются решениями системы* (2.6.4)*, то для любых действительных $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ линейная комбинация*

$$\overline{x} = \lambda_1\overline{x}_1 + \lambda_2\overline{x}_2 + \ldots + \lambda_k\overline{x}_k$$

также является решением системы (2.6.4)*.*

Попробуйте доказать это следствие самостоятельно.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.6.1. *Из свойства 2.6.2 следует, что если однородная система имеет хотя бы одно* ненулевое *решение, то она имеет бесконечное множество решений.*

Определение 2.6.2. *Совокупность решений $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_k$ однородной системы* (2.6.4) *называется* фундаментальной системой решений*, если*

1) $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_k$ линейно независимы,

2) любое решение системы (2.6.4) *является линейной комбинацией решений $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_k$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 2.6.2. *Если найдена фундаментальная система решений $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_k$ однородной системы* (2.6.4)*, то множество всех решений этой системы можно представить в виде*

$$\overline{x} = c_1\overline{e}_1 + c_2\overline{e}_2 + \ldots + c_k\overline{e}_k, \tag{2.6.6}$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_k$ — произвольные действительные постоянные.

Определение 2.6.3. *Решение* (2.6.6)*, представляющее при всевозможных значениях постоянных c_i $(i = 1, \ldots, k)$ все решения системы* (2.6.4)*, называется общим решением однородной системы.*

Теорема 2.6.2. *Если ранг r матрицы A однородной системы* (2.6.4) *меньше числа неизвестных n, то система имеет фундаментальную систему решений, состоящую из $(n - r)$ решений: $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_{n-r}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы содержит также и некоторый алгоритм нахождения фундаментальной системы решений. Заметим, что перестановка строк матрицы A соответствует перестановке уравнений системы (2.6.4) и приводит к системе, равносильной исходной, а перестановка столбцов равносильна переобозначению неизвестных. Проделав, если необходимо, такие перестановки, будем считать, как и раньше, что базисный минор матрицы A находится в ее левом верхнем углу:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & a_{r+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} & a_{2r+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} & a_{rr+1} & \cdots & a_{rn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & a_{nr+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

По теореме о базисном миноре все строки матрицы A с номерами, большими r, являются линейными комбинациями первых r строк. Соответствующие уравнения системы (2.6.4) обладают тем же свойством, поэтому их можно отбросить, так как они есть следствие первых r уравнений. Оставшаяся система из r первых уравнений с n неизвестными равносильна исходной. Оставим в левой части этой системы первые r неизвестных, остальные перенесем в правую часть. Получим:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = -a_{1r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = -a_{2r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r = -a_{rr+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n. \end{cases} \tag{2.6.7}$$

Первые r неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_r$ будем называть *базисными*, остальные $(n-r)$ неизвестных $x_{r+1}, \ldots, x_n$ — *свободными (или параметрическими)*.

(Заметим: так как в общем случае базисный минор не обязательно расположен в левом верхнем углу, то базисными могут быть любые r неизвестных, коэффициенты при которых образуют базисный минор матрицы A).

Если свободным переменным придать какие-либо значения, то базисные неизвестные можно найти единственным образом из системы (2.5.1), так как это крамеровская система с определителем, отличным от нуля: ее определитель — базисный минор матрицы A.

Придадим свободным неизвестным поочередно следующие наборы значений

$$\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{2.6.8}$$

Тогда правые части системы (2.5.1) получат определенные числовые значения, для которых система (2.5.1) будет иметь единственное решение. Таким образом, при каждом наборе свободных неизвестных из (2.6.8) мы найдем из (2.5.1) соответственный набор базисных неизвестных:

$$\begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ \vdots \\ x_r^1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ \vdots \\ x_r^2 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \begin{pmatrix} x_1^{n-r} \\ x_2^{n-r} \\ \vdots \\ x_r^{n-r} \end{pmatrix}.$$

Объединяя их в единые столбцы, получим $(n-r)$ столбцов

$$\overline{e}_1 = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ \vdots \\ x_r^1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{e}_2 = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ \vdots \\ x_r^2 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \overline{e}_k = \begin{pmatrix} x_1^{n-r} \\ x_2^{n-r} \\ \vdots \\ x_r^{n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad (2.6.9)$$

каждый из которых является решением системы (2.5.1), а следовательно, и исходной системы (2.6.4).

Докажем, что решения из (2.6.9) образуют фундаментальную систему. Сначала проверим их линейную независимость. Составим матрицу из столбцов $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_{n-r}$:

$$\begin{pmatrix} x_1^1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-r} \\ x_2^1 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_r^1 & x_r^2 & \cdots & x_r^{n-r} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица имеет размерность $n \times (n-r)$, причем минор порядка $(n-r)$, стоящий в последних $(n-r)$ строках, равен 1, т. е. отличен от нуля. Следовательно, ранг данной матрицы равен $(n-r)$, и по теореме о ранге матрицы все ее столбцы линейно независимы.

Проверим условие 2) в определении фундаментальной системы. Возьмем произвольное решение однородной системы (2.6.4):

$$\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_n)^T$$

и образуем следующую линейную комбинацию решений этой системы:

$$\overline{y} = \overline{x} - x_{r+1}\overline{e}_1 - x_{r+2}\overline{e}_2 - \ldots - x_n\overline{e}_{n-r}. \qquad (2.6.10)$$

В силу следствия 2.6.2, $\overline{y}$ является решением системы (2.6.4). Выполнив все действия со столбцами в правой части равенства (2.6.10), обнаружим, что все последние $(n-r)$ элементов столбца $\overline{y}$ равны нулю, то есть

$$\overline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_r, 0, \ldots, 0)^T.$$

Заметим, что столбец $\overline{y}$, будучи решением системы (2.6.4), является одновременно решением равносильной системы (2.5.1) при нулевых значениях всех свободных неизвестных. Однако нулевые значения свободных неизвестных дают нулевое (единственное) решение системы (2.5.1) для базисных неизвестных, т. е. $y_1 = 0, y_2 = 0, \ldots, y_r = 0$. Отсюда следует, что $\overline{y} = \overline{0}$, и из (2.6.10) находим:

$$\overline{x} = x_{r+1}\overline{e}_1 + x_{r+2}\overline{e}_2 + \ldots + x_n\overline{e}_{n-r}.$$

Таким образом, произвольное решение $\overline{x}$ однородной системы (2.6.4) есть линейная комбинация решений $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\ldots$, $\overline{e}_{n-r}$. Следовательно, доказано, что $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_{n-r}$ образуют фундаментальную систему решений.

Следствие 2.6.3. *Если число уравнений однородной системы* (2.6.4) *равно числу неизвестных, то система имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда* $\det A = 0$.

Доказательство. Действительно, если $\det A = 0$, то $\mathrm{Rg} A = r < n$, и по теореме 2.6.2 система имеет фундаментальную систему из $(n-r)$ решений, а значит, бесконечное множество решений. Обратно: если однородная система имеет ненулевое решение, то ее определитель должен равняться нулю, так как если $\det A \neq 0$, то система является крамеровской и имеет единственное (нулевое) решение, что противоречит исходному допущению.

Как уже отмечалось, доказательство теоремы 2.6.2 содержит описание алгоритма решения однородной системы (2.6.4). При этом на начальном этапе (определение ранга матрицы системы, нахождение базисного минора) оперировать нужно с матрицей, а не с самой системой. В следующем примере мы покажем, как, оперируя в основном с матрицей, найти все решения однородной системы линейных уравнений.

Пример 2.6.1. *Найти фундаментальную систему решений однородной системы:*

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0; \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0; \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0; \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_4 + 8x_5 = 0. \end{cases}$$

Решение. Используем метод элементарных преобразований (метод Гаусса) для нахождения ранга матрицы системы (будем говорить — «ранга системы») и базисного минора. При этом будем производить элементарные операции только со строками матрицы, так как это соответствует операциям с уравнениями системы, сохраняющим равносильность. Как и прежде, приведем матрицу системы к ступенчатому виду:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 & 5\\ 6 & 4 & 3 & 5 & 7\\ 9 & 6 & 5 & 7 & 9\\ 3 & 2 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 & 5\\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3\\ 0 & 0 & 2 & -2 & -6\\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 3 & \underline{|\,2} & 1 & 3 & 5\\ 0 & 0 & \underline{|\,1} & -1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг ступенчатой матрицы равен 2 (числу ненулевых строк). Значит и ранг исходной матрицы $\mathrm{Rg}A=r=2$. Число неизвестных системы $n=5$. Следовательно, по теореме 2.6.2 система имеет фундаментальную систему из $n-r=3$ решений. Число базисных неизвестных равно 2 (рангу), свободных — 3. Чтобы назначить базисные неизвестные, выберем базисный минор последней матрицы: можно, например, взять в качестве базисного минор второго порядка на пересечении первых двух строк и второго и третьего столбцов. Тогда базисными неизвестными будут x_2, x_3, остальные — свободными. Выпишем систему, соответствующую последней матрице, затем свободные неизвестные перенесем в правые части уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3+3x_4+5x_5=0\\ x_3-x_4-3x_5=0 \end{cases}\iff$$

$$\iff\quad\begin{cases} 2x_2+x_3=-3x_1-3x_4-5x_5\\ x_3=x_4+3x_5. \end{cases}$$

Решая последнюю систему относительно базисных неизвестных «снизу вверх» находим

$$\begin{cases} x_3=x_4+3x_5\\ x_2=\dfrac{1}{2}(-x_3-3x_1-3x_4-5x_5)=-\dfrac{3}{2}x_1-2x_4-4x_5. \end{cases}$$

Полученное решение можно представить в виде

$$\overline{x}=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1\\ -\dfrac{3}{2}x_1-2x_4-4x_5\\ x_4+3x_5\\ x_4\\ x_5 \end{pmatrix}, \tag{2.6.11}$$

где базисные неизвестные выражены через свободные, а свободные могут принимать произвольные значения. Таким образом, равенство (2.6.11) описывает множество всех решений однородной системы линейных уравнений. Поэтому столбец $\overline{x}$, заданный равенством (2.6.11), также называют *общим решением* данной однородной системы.

Из общего решения легко получить фундаментальную систему решений. Для этого, как и при доказательстве теоремы 2.6.2, будем придавать свободным неизвестным (x_1, x_4, x_5) последовательно значения $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ и $(0,0,1)$. Тогда, подставляя эти значения в (2.6.11), получим

$$\overline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Используя найденную фундаментальную систему решений, общее решение (2.6.11) можно записать в виде (2.6.6)

$$\overline{x} = x_1\overline{e}_1 + x_4\overline{e}_2 + x_5\overline{e}_3, \tag{2.6.12}$$

где свободные неизвестные x_1, x_4, x_5 играют роль произвольных постоянных, т. е. могут принимать произвольные значения.

Упражнение 2.6.2. *Подставив в правую часть равенства* (2.6.12) *значения столбцов* $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$, *убедитесь, что правые части равенств* (2.6.11) *и* (2.6.12) *совпадают.*

2.6.3. Неоднородные системы линейных уравнений

Рассмотрим произвольную неоднородную систему уравнений

$$A\overline{x} = \overline{b}. \tag{2.6.13}$$

Соответствующей однородной системой будем называть систему

$$A\overline{x} = \overline{0} \tag{2.6.14}$$

с той же матрицей A.

В дополнение к свойствам однородных систем, рассмотренным в предыдущем пункте, определим во взаимосвязи свойства систем (2.6.13)–(2.6.14).

Свойство 2.6.3. *Если* $\overline{z}$ *— какое-нибудь решение неоднородной системы* (2.6.13)*, а* $\overline{x}$ *— любое решение соответствующей однородной системы* (2.6.14)*, то* $\overline{y} = \overline{z} + \overline{x}$ *— решение неоднородной системы.*

Доказательство. В силу сформулированных условий, выполняются следующие равенства:

$$A\overline{z} = \overline{b}, \quad A\overline{x} = \overline{0}.$$

Складывая эти равенства, получим

$$A\overline{z}+A\overline{x}=\overline{b} \iff A(\overline{z}+\overline{x})=\overline{b},$$

откуда и следует, что $\overline{y}=\overline{z}+\overline{x}$ есть решение неоднородной системы (2.6.13).

Совершенно аналогично можно доказать следующее

Свойство 2.6.4. *Если $\overline{y}$ и $\overline{z}$ — какие-нибудь два решения неоднородной системы* (2.6.13)*, то их разность $\overline{x}=\overline{y}-\overline{z}$ является решением однородной системы* (2.6.14)*.*

Следствие 2.6.4. *Всякое решение $\overline{y}$ неоднородной системы* (2.6.13) *представимо в виде суммы некоторого (частного) решения $\overline{z}$ неоднородной системы и какого-то решения $\overline{x}$ соответствующей однородной системы.*

Доказательство. Пусть $\overline{y}$ произвольное решение неоднородной системы (2.6.13), а $\overline{z}$ — некоторое частное решение той же системы. Тогда, по свойству 2.6.4, их разность $\overline{x}=\overline{y}-\overline{z}$ есть некоторое решение соответствующей однородной системы (2.6.14), откуда $\overline{y}=\overline{z}+\overline{x}$.

Теорема 2.6.3. *Пусть $\overline{z}$ — какое-нибудь частное решение неоднородной системы* (2.6.13)*, а $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, ..., $\overline{e}_{n-r}$ — фундаментальная система решений соответствующей однородной системы* (2.6.14)*. Тогда все множество решений неоднородной системы может быть представлено в виде*

$$\overline{y}=\overline{z}+c_1\overline{e}_1+c_2\overline{e}_2+\ldots+c_{n-r}\overline{e}_{n-r}, \tag{2.6.15}$$

где c_1, c_2, ..., c_{n-r} — произвольные действительные постоянные.

Доказательство. Согласно следствию 2.6.4 произвольное решение системы (2.6.13) представимо в виде $\overline{y}=\overline{z}+\overline{x}$, где $\overline{x}$ — решение однородной системы. Но любое решение однородной системы по теореме 2.6.2 может быть представлено в виде линейной комбинации решений фундаментальной системы

$$\overline{x}=c_1\overline{e}_1+c_2\overline{e}_2+\ldots+c_{n-r}\overline{e}_{n-r}$$

при некоторых значениях постоянных $c_1, c_2, \ldots, c_{n-r}$. Подставляя это выражение для $\overline{x}$ в предыдущее равенство, получим (2.6.15).

Как и для однородной системы, выражение (2.6.15) называется *общим решением* неоднородной системы линейных уравнений.

Пример 2.6.2. *Найти общее решение неоднородной системы линейных уравнений и выразить его через фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы:*

$$\begin{cases} 2x_1+7x_2+3x_3+x_4=6; \\ 3x_1+5x_2+2x_3+2x_4=4; \\ 9x_1+4x_2+x_3+7x_4=2. \end{cases}$$

Решение. Как и в случае однородной системы, используем метод Гаусса, но элементарные преобразования (только со строками!) будем проводить с расширенной матрицей системы. Как и прежде, приведем расширенную матрицу к ступенчатому виду

$$A^* = (A|\overline{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 11 & 5 & -1 & 10 \\ 0 & 22 & 10 & -2 & 20 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 11 & 5 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Видим, что число ненулевых строк ступенчатых матриц, как основной, так и расширенной, равно 2. Следовательно, $\mathrm{Rg}A = \mathrm{Rg}A^* = 2$, и по теореме Кронекера–Капелли система совместна. Так как число неизвестных системы $n = 4$, то по теореме 2.6.2 система имеет фундаментальную систему из $n - r = 2$ решений. В качестве базисного минора обеих матриц удобно выбрать минор треугольного вида, расположенный на пересечении первых двух (ненулевых) строк и первого и четвертого столбцов (элементы которых отмечены в последней матрице). Тогда базисными неизвестными будут x_1, x_4, остальные — свободными. Как и раньше, выпишем систему, соответствующую последней (ступенчатой) матрице, затем свободные неизвестные перенесем в правые части уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -2, \\ 11x_2 + 5x_3 - x_4 = 10, \end{cases} \iff$$

$$\iff \quad \begin{cases} x_1 + x_4 = -2 + 2x_2 + x_3, \\ -x_4 = 10 - 11x_2 - 5x_3. \end{cases}$$

Решая последнюю систему относительно базисных неизвестных «снизу вверх», находим общее решение неоднородной системы

$$\overline{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 - 9x_2 - 4x_3 \\ x_2 \\ x_3 \\ -10 + 11x_2 + 5x_3 \end{pmatrix}, \qquad (2.6.16)$$

где базисные неизвестные выражены через свободные, а свободные могут принимать произвольные значения.

Из общего решения неоднородной системы легко получить частное решение этой системы. Для этого достаточно в равенстве (2.6.16) подставить вместо свободных неизвестных какие-нибудь конкретные значения, проще всего — нулевые: $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Полученное частное решение неоднородной системы

$$\overline{z} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix}$$

вычтем из общего решения (2.6.16) неоднородной системы. По свойству 2.6.4 эта разность является решением соответствующей однородной системы

$$\overline{x} = \overline{y} - \overline{z} = \begin{pmatrix} -9x_2 - 4x_3 \\ x_2 \\ x_3 \\ 11x_2 + 5x_3 \end{pmatrix}. \qquad (2.6.17)$$

В этом решении базисные неизвестные x_1, x_4 выражены через свободные x_2, x_3, которые принимают произвольные значения. Следовательно, равенство(2.6.17) представляет общее решение однородной системы, соответствующей данной неоднородной.
Как и при решении предыдущего примера, найдем фундаментальную систему решений однородной системы, подставляя в (2.6.17) поочередно значения свободных неизвестных: $x_2 = 1$, $x_3 = 0$ и $x_2 = 0$, $x_3 = 1$,

$$\overline{e}_1 = \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad \overline{e}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Используя найденную фундаментальную систему решений, общее решение неоднородной системы можно записать в виде (2.6.15)

$$\overline{y} = \overline{z} + x_2\overline{e}_1 + x_3\overline{e}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix},$$

где свободные неизвестные играют роль произвольных постоянных.

Глава 3

Векторная алгебра

§ 3.1. Понятие вектора и линейные операции над векторами

Величины для задания которых достаточно указать их числовые значения, называются скалярными величинами, или просто скалярами. Примеры скалярных величин: длина отрезка, угол, площадь, объем, время, работа, масса, температура и т. д. Простейшие скалярные величины — отвлеченные (т. е. не имеющие размерности) числа.

Наряду со скалярами существуют и другие величины, для полной характеристики которых недостаточно задания их числовых значений. Например, для характеристики действия силы мало знать ее величину — надо знать направление, в котором эта сила действует. Такие величины, как скорость, ускорение, сила, напряженность электромагнитного поля и т. д., требующие для своего задания не только числового значения, но и направления, называются векторными величинами, или векторами.

Для наглядного изображения векторов используют геометрические векторы — прямолинейные отрезки, имеющие не только определенную длину, но и определенное направление.

Вектором будем называть направленный отрезок.

Вектор полностью характеризуется заданием:

a) своей начальной точки (*точки приложения* вектора);

b) направления;

c) длины.

Векторы обозначаются буквами или со стрелкой, или с чертой, или выделением жирным шрифтом: $\vec{F}$, $\bar{s}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{v}$. Так как вектор — это направленный отрезок, то его иногда удобнее обозначать двумя буквами с чертой (или стрелкой) вверху: $\overline{AB}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$ и т. д., при этом первая буква обозначает начало вектора, а вторая — конец.

Длиной вектора $\overline{AB}$ называется расстояние между его начальной и конечной точками. Длину вектора, которую чаще называют модулем вектора, обозначают $|\overline{AB}|$, $|\mathbf{a}|$ и т. д. В физике принято модуль вектора обозначать той же буквой, что и вектор, но без черты (стрелки) сверху: если $\vec{v}$ — скорость, то v — величина скорости.

Два вектора называются *коллинеарными*, если они лежат на одной или на параллельных прямых.

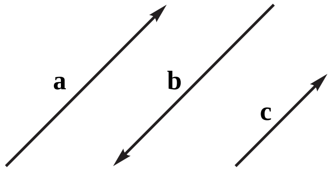


Рис. 2.1

Коллинеарные векторы могут иметь или одинаковое (например, векторы **a** и **c**на рис. 2.1) или противоположное (например, векторы **a** и **b** на рис. 2.1) направления. Коллинеарность векторов **a** и **b** будем обозначать $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$.

Введем важное понятие равенства векторов.

Определение 3.1.1. *Два вектора считаются равными* $(\mathbf{a} = \mathbf{b})$*, если они удовлетворяют трем условиям:*

1) имеют одинаковую длину;

2) коллинеарны;

3) имеют одинаковое направление.

Из этого определения следует, что положение точки приложения вектора не имеет значения, т. е. при параллельном переносе вектор не меняется. Поэтому всегда можно переместить данные векторы так, чтобы они были приложены к одной точке. Заметим, что такие векторы, определяемые только своей длиной и направлением, называют *свободными*.

Понятие свободного вектора не является единственно возможным. Например, в физике твердого тела действующую силу можно перенести в любую другую точку, но на той же прямой. И только в этом случае эффект действия силы не изменится. Следовательно, нельзя считать равными векторы, расположенные на параллельных прямых, даже если они имеют одинаковые длину и направление. Такие векторы называются *скользящими*.

Наконец, в электродинамике вектор напряженности поля зависит от точки приложения. Если векторы электромагнитного поля перенести в другие точки, даже с сохранением направления и длины, то получится поле с иными физическими характеристиками. Такие векторы называются *связанными*.

Итак, мы рассматриваем только свободные векторы. Но это не умаляет ценностей излагаемой теории, так как и связанные, и скользящие векторы можно выразить через свободные векторы.

3.1.1. Линейные операции над векторами

Линейными операциями над векторами называют операцию сложения векторов, операцию вычитания векторов и операцию умножения векторов на действительные числа.

Определение 3.1.2. *Суммой двух векторов* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$*, называется вектор* $\mathbf{c}$*, идущий из начала вектора* $\mathbf{a}$ *в конец вектора* $\mathbf{b}$ *при условии, что вектор* $\mathbf{b}$ *приложен к концу вектора* $\mathbf{a}$.

Обозначается сумма $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ *(рис 2.2).*

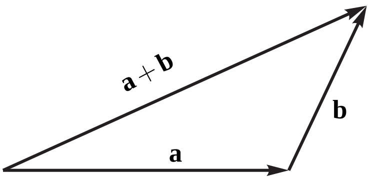


Рис. 2.2

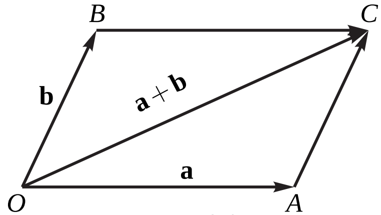
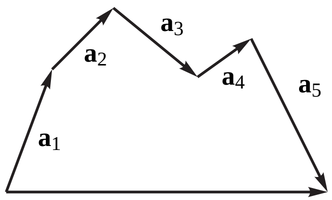


Рис. 2.3

Это определение называют «правилом треугольника» сложения векторов. Если векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны, то, хотя треугольника и нет, определение 3.1.2 применимо.

Если дополнить треугольник OAC (рис. 2.3) до параллелограмма $OABC$, то получим — ведь противоположные стороны параллелограмма равны и параллельны — «правило параллелограмма» сложения векторов: чтобы сложить два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, приводим их к общему началу O, строим на них параллелограмм. Его диагональ, выходящая из той же вершины O, является суммой двух данных векторов.



$\mathbf{c} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4 + \mathbf{a}_5$

Рис. 2.4

Если нужно сложить более двух векторов, то, обобщая «правило треугольника», получаем «правило многоугольника»: чтобы построить сумму любого числа векторов, надо из конца первого вектора построить второй вектор, из конца второго — третий и т. д. Вектор, связывающий начало первого вектора с концом последнего (т. е. замыкающий вектор), и будет суммой всех данных векторов (рис. 2.4).

Если конец последнего вектора совпадает с началом первого, то это означает, что вектор — сумма имеет длину, равную нулю. Такой вектор называется нулевым вектором (нуль-вектором) и обозначается $\vec{0}$ или $\overline{0}$, или $\mathbf{0}$, или просто 0 (без черты, стрелки). Очевидно, нулевой вектор — это вектор, модуль которого равен нулю (начало вектора совпадает с его концом).

Очевидно, что нулевой вектор не имеет направления, а поэтому его можно считать коллинеарным любому вектору.

Если два вектора имеют одинаковую длину, но противоположное направление, то их сумма равна нулю. Такие векторы называются противоположными. Очевидно, для любого вектора $\mathbf{a}$ найдется противоположный ему вектор $-\mathbf{a}$ и выполняется равенство $\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{0}$.

Сложение векторов подчиняется основным законам сложения чисел:

1) $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$ — закон коммутативности;

2) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$ — закон ассоциативности;

3) $\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}$;

4) $\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{0}$.

Первое свойство следует из «правила параллелограмма» сложения двух векторов и свойств параллелограмма — противоположные его стороны равны и параллельны.

Для доказательства второго свойства приложим вектор $\mathbf{b}$ к концу вектора $\mathbf{a}$ и вектор $\mathbf{c}$ к концу вектора $\mathbf{b}$ (рис. 2.5). Тогда $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=(\overline{OA}+\overline{AB})+\overline{BC}=\overline{OB}+\overline{BC}=\overline{OC}$. С другой стороны, $\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})=$ $=\overline{OA}+(\overline{AB}+\overline{BC})=\overline{OA}+\overline{AC}=\ =\overline{OC}$, что и доказывает свойство 2).

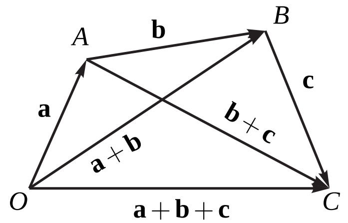


Рис. 2.5

Вычитание векторов определяется как операция, обратная сложению. Именно

Определение 3.1.3. *Разностью* $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ *двух векторов* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *называется такой вектор* $\mathbf{c}$*, который в сумме с вектором* $\mathbf{b}$ *даёт вектор* $\mathbf{a}$.

Из этого определения и из «правила треугольника» сложения векторов вытекает правило построения вектора $\mathbf{c}=\mathbf{a}-\mathbf{b}$: чтобы построить вектор $\mathbf{c}=\mathbf{a}-\mathbf{b}$, надо привести к общему началу векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, тогда $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ — это вектор, идущий из конца вектора $\mathbf{b}$ в конец вектора $\mathbf{a}$ (т. е. вектор разности направлен в сторону того вектора, из которого вычитали)(рис. 2.6).

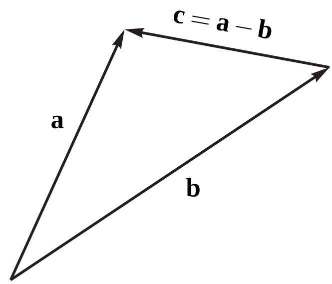


Рис. 2.6

Ясно, что вычесть из вектора $\mathbf{a}$ вектор $\mathbf{b}$, значит прибавить к первому $\mathbf{a}$ вектор $-\mathbf{b}$ противоположный второму: $\mathbf{a}-\mathbf{b}=\mathbf{a}+(-\mathbf{b})$.

Если использовать «правило параллелограмма» сложения двух векторов,то получим: вектор $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ — это диагональ параллелограмма, построенного на векторах **a** и **b**, приведенных к общему началу и направленная в сторону уменьшаемого вектора **a** (рис. 2.7).

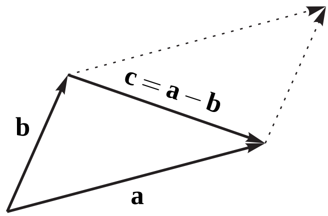


Рис. 2.7

Определение 3.1.4. *Произведением* $\lambda \cdot \mathbf{a}$ *действительного числа* λ *на вектор* **a** *называется вектор, коллинеарный вектору* **a**, *имеющий длину, равную* $|\lambda||\mathbf{a}|$, *и направление, совпадающее с направлением* **a**, *если* $\lambda > 0$ *и ему противоположное, если* $\lambda < 0$.

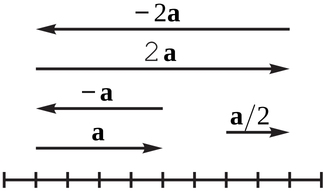


Рис. 2.8

Геометрически операция умножения вектора на число означает, что вектор **a** растягивается в λ раз, если $\lambda > 1$, сжимается в λ раз, если $0 < \lambda < 1$, а при отрицательном λ происходит еще изменение направления вектора на противоположное (рис. 2.8).

Если мы любой ненулевой вектор **a** разделим на его длину $|\mathbf{a}|$, то получим вектор $\mathbf{a}^0$,который будет совпадать по направлению с вектором **a**, но его длина будет равна единице. Такой вектор $\mathbf{a}^0$ называется *ортом* вектора **a**.

Легко проверяются следующие свойства операции умножения вектора на число.

1) $\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}$ — дистрибутивность относительно суммы векторов;

2) $(\lambda+\mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{a}$ — дистрибутивность относительно суммы чисел;

3) $\lambda(\mu\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a}$ — ассоциативность числовых сомножителей;

4) $1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$.

Для доказательства свойства 1) следует использовать подобие треугольников, построенных на векторах **a**, **b** и $\lambda\mathbf{a}$, $\lambda\mathbf{b}$, а для доказательства свойств 2) и 3) рассмотреть все возможные знаки чисел λ и μ. Предлагаем читателю самостоятельно провести подробные доказательства.

Свойства операций сложения векторов и умножения вектора на число важны, так как позволяют делать преобразования в векторной алгебре по тем же правилам , по которым производятся аналогичные преобразования в обычной алгебре .

Пример 3.1.1. *Длина вектора* $\mathbf{m}$ *равна единице, длина вектора* $\mathbf{n}$ *равна двум и эти векторы перпендикулярны. Построить векторы, совпадающие с диагоналями параллелограмма, построенного на векторах* $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} + \mathbf{n}$ *и* $\mathbf{b} = \mathbf{m} - \mathbf{n}$.

Решение. Диагонали параллелограмма совпадают с векторами $\mathbf{d}_1 = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ и $\mathbf{d}_2 = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ (рис. 2.3 и 2.7). Используя свойства линейных операций, можно избежать построения векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ по указанным векторам $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$.

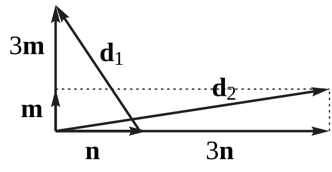


Рис. 2.9

Имеем, $\mathbf{d}_1 = \mathbf{a} + \mathbf{b} = (2\mathbf{m} + \mathbf{n}) + (\mathbf{m} - 2\mathbf{n}) = (2\mathbf{m} + \mathbf{m}) + (\mathbf{n} - 2\mathbf{n}) = 3\mathbf{m} - \mathbf{n}$. Аналогично $\mathbf{d}_2 = \mathbf{m} + 3\mathbf{n}$.

В заключение данного раздела получим важный во многих приложениях критерий коллинеарности двух векторов. Из определения операции умножения вектора на число следует, что если $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$, то векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны. Справедливо и обратное: если $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ и $\mathbf{b} \neq 0$, то найдется число λ такое, что $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$. В самом деле, приложим векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ к общему началу O. Тогда эти векторы расположатся на одной прямой. Возможны два случая: 1) векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ направлены в одну сторону; 2) они направлены в противоположные стороны.

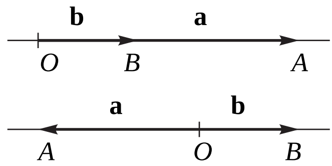


Рис. 2.10

Очевидно, в первом случае точка B делит отрезок OA в некотором отношении λ: $\dfrac{OA}{OB} = \lambda$. Отсюда $OA = \lambda OB$, т. е. $\overline{OA} = \lambda\overline{OB}$. Во втором случае рассуждения аналогичны.

Итак, *ненулевые векторы* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *коллинеарны тогда и только тогда, когда существует число* λ *такое, что* $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$.

Заметим, что если $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, то равенство $\mathbf{0} = 0\mathbf{b}$ выполняется для любого вектора $\mathbf{b}$ и, следовательно, нулевой вектор можно считать коллинеарным любому вектору.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 3.1.2. *В параллелограмме* $ABCD$ *обозначены* $\overline{AB} = \mathbf{a}$ *и* $\overline{AD} = \mathbf{b}$. *Выразить через* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *векторы* $\overline{MA}$, $\overline{MB}$, $\overline{MC}$ *и* $\overline{MD}$, *где* M *— точка пересечения диагоналей параллелограмма (рис. 2.11).*

Решение. Диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам. Значит (рис. 2.11), $\overline{MC} = 1/2\overline{AC} = 1/2(\mathbf{a} + \mathbf{b})$; $\overline{MA} = -\overline{MC} = -1/2(\mathbf{a} + \mathbf{b})$; $\overline{MD} = -\overline{MB} = -(\mathbf{a} - \mathbf{b})/2 = (\mathbf{b} - \mathbf{a})/2$.

Пример 3.1.3. *Каким условием должны быть связаны векторы* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$*, чтобы вектор* $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ *делил угол между ними пополам?*

Решение. Вектор $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ совпадает с диагональю параллелограмма. Но диагональ делит угол пополам только у ромба (квадрат - — частный случай ромба), а параллелограмм является ромбом, если его стороны равны. Значит, $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$.

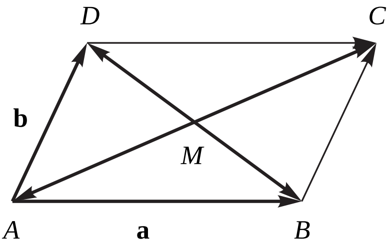


Рис. 2.11

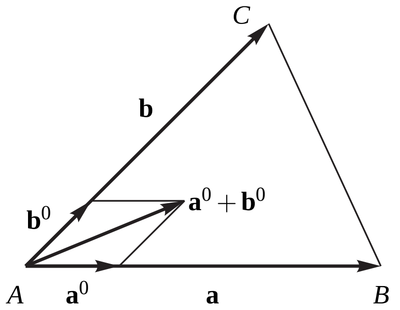


Рис. 2.12

Пример 3.1.4. *В треугольнике ABC обозначены* $\overline{AB} = \mathbf{a}$ *и* $\overline{AC} = \mathbf{b}$*. Найти какой-либо вектор, коллинеарный биссектрисе угла BAC.*

Решение. Если на ортах $\mathbf{a}^0$ и $\mathbf{b}^0$ построить параллелограмм, то он будет ромбом (так как $|\mathbf{a}^0| = |\mathbf{b}^0| = 1$) (рис. 2.12). Значит, диагональ $\mathbf{a}^0+\mathbf{b}^0$ ромба будет являться биссектрисой угла BAC (пример 3.1.4). Отсюда получаем — вектор $\mathbf{a}^0+\mathbf{b}^0 = \dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} + \dfrac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$ коллинеарен биссектрисе угла BAC.

§ 3.2. Базис на плоскости и в пространстве

Введенные в предыдущем разделе линейные операции над векторами обладают на практике очевидными недостатками: геометрическое построение результата операции имеет недостаточную точность, поскольку зависят от точности чертежа; отсутствует наглядность при изображении пространственных векторов на плоском чертеже. Аналитическая геометрия потому и называется так, что геометрическим объектам — точкам и векторам — ставится в соответствие, при выборе определенной системы координат, набор чисел.

Оказывается, в этом случае операции над векторами сводятся к обычным операциям — сложению и умножению — с числами (координатами векторов).

3.2.1. Линейная зависимость и линейная независимость векторов

В § 2.4 были введены понятия линейной зависимости и линейной независимости строк и столбцов матрицы. Эти понятия дословно переносятся на векторы.

Линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ называется сумма произведений этих векторов на произвольные действительные числа, т. е. выражение вида

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{a}_n,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — произвольные действительные числа.

Определение 3.2.1. *Векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_n$ называются линейно зависимыми, если найдутся такие действительные числа λ_1, λ_2, ..., λ_n, из которых хотя бы одно отлично от нуля, что линейная комбинация равна нулю, т. е.*

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}.$$

Если векторы не являются линейно зависимыми,то их называют линейно независимыми.

Удобнее другое определение линейной независимости.

Определение 3.2.2. *Векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a_n}$ называются линейно независимыми, если равенство нулю их линейной комбинации возможно лишь тогда, когда все числа λ_1, λ_2, ..., λ_n, равны нулю.*

Все свойства (и доказательство этих свойств) линейно зависимых и линейно независимых векторов совпадают с аналогичными свойствами столбцов (п 2.4.1). Рекомендуем читателю убедиться в этом.

3.2.2. Линейная зависимость и линейная независимость векторов на плоскости и в пространстве. Компланарные векторы

Теорема 3.2.1. *Два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.*

Доказательство. *Необходимость.* Дано: векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ линейно зависимы и надо доказать их коллинеарность. По определению 3.2.2 линейной зависимости найдутся такие числа λ и μ, хотя бы одно из которых не равно нулю, что справедливо равенство $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Пусть для определенности $\lambda \neq 0$. Тогда, разделив обе части последнего равенства на λ, получим

$\mathbf{a} + \mu/\lambda\mathbf{b} = 0$ или $\mathbf{a} = -\mu/\lambda\mathbf{b}$. Если обозначить $\alpha = -\mu/\lambda$, то получим равенство $\mathbf{a} = \alpha\mathbf{b}$, т. е. векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны. Необходимость доказана.

Достаточность. Дано: $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ и пусть вектор $\mathbf{b}$ ненулевой. Тогда найдется такое число λ, что $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$. Отсюда $1 \cdot \mathbf{a} + (-\lambda)\mathbf{b} = 0$. Линейная комбинация векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ равна нулю, а из двух коэффициентов 1 и $-\lambda$ этой комбинации по крайней мере один не равен нулю. По определению 3.2.1 векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ линейно зависимы. Теорема доказана.

Следствие 3.2.1. *Если векторы* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *не коллинеарны, то они линейно независимы.*

Следствие 3.2.2. *Среди двух неколлинеарных векторов не может быть нулевого вектора.*

Теорема 3.2.2. *Три вектора на плоскости линейно зависимы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если среди трех векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, лежащих на одной плоскости, есть нулевой вектор, то эти три вектора линейно зависимы по свойству 2.4.2 (стр. 59) линейно зависимых совокупностей.

Пусть все три вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ ненулевые. Возможны два случая.

1. Какая-либо пара, например $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, коллинеарна. Тогда по теореме 3.2.1 эта пара векторов линейно зависима. По свойству 2.4.3 (стр. 60) все три вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ линейно зависимы.

2. Пусть среди векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ ни одна пара не коллинеарна. Приведем векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ к общему началу O (рис. 2.13)

Проведем через конец C вектора $\mathbf{c}$ прямые, параллельные векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Обозначим через A и B точки пересечения этих прямых с прямыми, на которых лежат векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. По построению четырехугольник $OACB$ — параллелограмм и OC — его диагональ. Значит, $\mathbf{c} = \overline{OC} = \overline{OA} + \overline{OB}$.

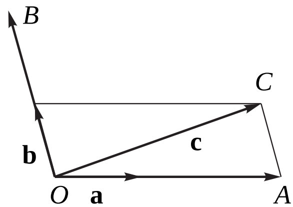


Рис. 2.13

Вектор $\overline{OA}$ коллинеарен $\mathbf{a}$, значит, найдется такое число λ, что $\overline{OA} = \lambda\mathbf{a}$. Аналогично, $\overline{OB} = \mu\mathbf{b}$. Таким образом, $\mathbf{c} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$. По свойству 2.4.1 (стр. 59) все три вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ линейно зависимы. Теорема доказана.

Векторы, лежащие в одной плоскости или в параллельных плоскостях, называются *компланарными*. Теорему 3.2.2 можно сформулировать так:

Любые три компланарных вектора линейно зависимы.

Справедлива и обратная теорема:

Теорема 3.2.3. *Если три вектора линейно зависимы, то они компланарны.*

Доказательство. Пусть векторы **a**, **b** и **c** — линейно зависимы. По определению 3.2.1 линейной зависимости найдутся такие числа α, β и γ, что $\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c}=\mathbf{0}$, и хотя бы одно из этих чисел, пусть это будет γ, отлично от нуля. Тогда из последнего равенства имеем $\mathbf{c}=-\alpha/\gamma\mathbf{a}-\beta/\gamma\mathbf{b}$. Обозначим $\lambda=-\alpha/\gamma$ и $\mu=-\beta/\gamma$. Если векторы **a**, **b** и **c** привести к общему началу, то равенство $\mathbf{c}=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}$ означает, что вектор **c** является диагональю параллелограмма, построенного на векторе **a**, «растянутом» в λ раз, и векторе **b**, «растянутом» в μ раз. Значит, векторы **a**, **b** и **c** лежат в одной плоскости, то есть компланарны. Теорема доказана.

Заметим, что теоремы 3.2.2 и 3.2.3 можно сформулировать в виде одной теоремы:

Для того, чтобы три вектора были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы они были компланарны.

Следствие 3.2.3. *Если векторы* **a**, **b** *и* **c** *некомпланарны, то они линейно независимы.*

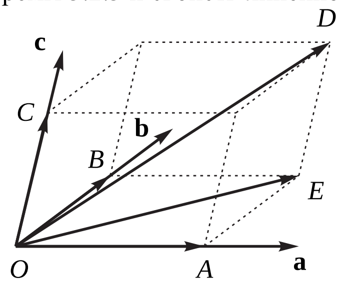
Замечание 3.2.1. *При доказательстве теоремы 3.2.3 попутно доказали утверждение: каковы бы ни были неколлинеарные векторы* **a** *и* **b**, *для любого вектора* **c**, *лежащего в одной плоскости с векторами* **a** *и* **b**, *найдутся такие числа* α *и* β, *что справедливо равенство*

$$\mathbf{c}=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}. \tag{3.2.1}$$

В этом случае говорят, что вектор **c** линейно выражается через векторы **a** и **b** или, что вектор **c** *разложен по векторам* **a** и **b**.

Теорема 3.2.4. *Любые четыре вектора линейно зависимы.*

Доказательство. Прежде всего, исключим случай, когда среди данных четырёх векторов какая-нибудь тройка векторов компланарна. В частности, среди них нет ни одной пары коллинеарных векторов и нет нулевого вектора, так как линейная зависимость такой совокупности следует из теоремы 3.2.3 и свойств линейно зависимых векторов.



Итак, пусть среди векторов **a**, **b**, **c** и **d** никакие три не компланарны. Приведем эти векторы к общему началу O и построим параллелепипед, одна из вершин которого совпадает с точкой O, три смежных ребра лежат на векторах **a** , **b** и **c** и диагональ совпадает с вектором **d** (рис. 2.14) По

Рис. 2.14

«правилу параллелограмма» сложения векторов $\overline{OE}=\overline{OA}+$

$+\overline{OB}$. По «правилу треугольника» сложения векторов $\overline{OD} = \overline{OE} + \overline{ED} = \overline{OE} + \overline{OC}$. Значит, вектор $\mathbf{d} = \overline{OD} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$. Так как вектор $\overline{OA}$ коллинеарен вектору $\mathbf{a}$ (они лежат на одной прямой), то по критерию коллинеарности векторов найдется такое число α, что $\overline{OA} = \alpha\mathbf{a}$. Аналогично, найдутся числа β и γ такие, что $\overline{OB} = \beta\mathbf{b}$, $\overline{OC} = \gamma\mathbf{c}$. Следовательно, $\mathbf{d} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$. или $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} + (-1)\mathbf{d} = \mathbf{0}$. В равной нулю линейной комбинации векторов есть ненулевой коэффициент, значит, эти векторы линейно зависимы. Теорема доказана.

Попутно доказали утверждение:

Следствие 3.2.4. *Каковы бы ни были некомпланарные векторы* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *и* $\mathbf{c}$, *для любого вектора* $\mathbf{d}$ *найдутся такие числа* α, β *и* γ, *что справедливо равенство*

$$\mathbf{d} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}. \tag{3.2.2}$$

Это равенство называют *разложением вектора по трем некомпланарным векторам.*

В элементарной математике и физике часто говорят, что прямая одномерна, плоскость имеет размерность два и что наше пространство трёхмерно. Теоремы 3.2.1–3.2.4 объясняют смысл этих утверждений:

1) Если на плоскости задан ненулевой вектор $\mathbf{a}$, то для любого вектора $\mathbf{b}$ найдется число λ такое, что $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$;

2) Если на плоскости заданы два любых неколлинеарных вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, то для любого вектора $\mathbf{c}$, лежащего на этой же плоскости, найдутся такие два числа α и β, что $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$;

3) Если в пространстве заданы три любых некомпланарных вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, то для любого вектора $\mathbf{d}$ найдутся такие три числа α, β и γ, что $\mathbf{d} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$.

Таким образом, максимальное число линейно независимых векторов на прямой, на плоскости и в пространстве равно 1, 2 и 3 соответственно.

3.2.3. Базис на плоскости и в пространстве

Равенства (3.2.1) и (3.2.2) имеют важнейшее значение в векторной алгебре. Например, выбрав два неколлинеарных вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ на плоскости в качестве базиса (базы, основы) мы можем любой вектор $\mathbf{c}$ этой плоскости разложить по базису: $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$. Тем самым каждому вектору на плоскости ставится в соответствие пара чисел α и β. Аналогично, каждому вектору $\mathbf{d}$ в пространстве ставятся в соответствие три числа α, β и γ, если заранее указаны три некомпланарных вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ в качестве базиса. Позже увидим, что операции над векторами сводятся к операциям над указанными числами.

Ввиду особой важности понятия базиса дадим его строгое определение для произвольного множества векторов.

Определение 3.2.3. *Пусть L — некоторое множество векторов. Совокупность векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n \in L$ называется базисом на множестве L, если выполняются три условия:*

1) векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e_n}$ линейно независимы;

2) любой вектор $\mathbf{a}$ множества L можно разложить по векторам $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$, т. е. $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{e}_n$, где α_1, α_2, ..., α_n — некоторые числа;

3) векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ упорядочены, т. е. указано, какой вектор из этой совокупности считается первым, какой вторым и т. д.

$$\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{e}_n, \qquad (3.2.3)$$

называется *разложением вектора* $\mathbf{a}$ *по базису* $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$. Числа α_1, α_2, ..., α_n называются координатами вектора в данном базисе.

Если базис задан, то равенства $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{e}_n$, и $\mathbf{a} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ равноправны (здесь учитывается упорядоченность векторов базиса и координат вектора).

Справедливы следующие утверждения.

1. *Любой ненулевой вектор* $\mathbf{e}$ *образует базис на множестве L всех векторов, коллинеарных* $\mathbf{e}$ *(т. е. базис на прямой, параллельной вектору* $\mathbf{e}$*).*

Это вытекает из теоремы 3.2.1.

2. *Любая пара неколлинеарных векторов* $\mathbf{e}_1$ *и* $\mathbf{e}_2$*, лежащих на данной плоскости, образует базис на этой плоскости.*

Это вытекает из следствия 3.2.3 теоремы 3.2.3 и из формулы (3.2.1).

3). *Любая тройка некомпланарных векторов* $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e_3}$ *образует базис в пространстве.*

Это вытекает из следствия 3.2.4 теоремы 3.2.4 и формулы (3.2.2).

В дальнейшем для определенности будем рассматривать базис в пространстве.

Итак, пусть $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e_3}$ — произвольный базис в пространстве, т. е. произвольная тройка некомпланарных векторов. Тогда по определению базиса для любого вектора $\mathbf{a}$ найдутся такие числа α, β и γ что справедливо равенство

$$\mathbf{a} = \alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2 + \gamma\mathbf{e}_3. \qquad (3.2.4)$$

Теорема 3.2.5. *Разложение любого вектора* $\mathbf{a}$ *по данному базису единственно (т. е. при заданном базисе координаты вектора определяются однозначно).*

Доказательство. Допустим, для некоторого вектора $\mathbf{a}$ наряду с разложением (3.2.4) справедливо еще и другое разложение по тому же базису

$$\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \beta_1\mathbf{e}_2 + \gamma_1\mathbf{e}_3.$$

Вычитая это равенство из равенства (3.2.4), получим

$$(\alpha - \alpha_1)\mathbf{e}_1 + (\beta - \beta_1)\mathbf{e}_2 + (\gamma - \gamma_1)\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}.$$

По определению базиса векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ линейно независимы и, значит, их линейная комбинация равна нулю только тогда, когда коэффициенты этой комбинации равны нулю: $\alpha - \alpha_1 = 0$, $\beta - \beta_1 = 0$, $\gamma - \gamma_1 = 0$, то есть $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$, $\gamma = \gamma_1$. Теорема доказана.

Теорема 3.2.6. *Если в пространстве зафиксирован базис, то при сложении векторов* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *их координаты (в этом базисе) складываются. При умножении вектора на число все его координаты умножаются на это число.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{b} = \boldsymbol{\beta_1}\mathbf{e_1} + \boldsymbol{\beta_2}\mathbf{e_2} + \boldsymbol{\beta_3}\mathbf{e_3}$. Тогда, в силу свойств линейных операций над векторами, получим

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (\alpha_1 + \beta_1)\mathbf{e}_1 + (\alpha_2 + \beta_2)\mathbf{e}_2 + (\alpha_3 + \beta_3)\mathbf{e}_3;$$

$$\lambda\mathbf{a} = \lambda\mathbf{e}_1 + \lambda\mathbf{e}_2 + \lambda\mathbf{e}_3.$$

Координаты вектора суммы — коэффициенты при векторах базиса — равны сумме координат векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. По теореме 3.2.5 это разложение единственно. Для второго утверждения теоремы рассуждения аналогичны. Теорема доказана.

Итак, две последние теоремы позволяют «уйти» от геометрического построения результата линейных операций над векторами: вместо правила параллелограмма построения суммы векторов и растяжения вектора при умножении его на число мы переходим к простым действиям — арифметическим операциям над его координатами.

Пример 3.2.1. *Векторы* $\mathbf{e}_1$*,* $\mathbf{e}_2$*,* $\mathbf{e}_3$ *образуют базис. Показать, что векторы* $\mathbf{a} = \mathbf{e}_3$*,* $\mathbf{b} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$ *и* $\mathbf{c} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ *компланарны и найти линейную зависимость, их связывающую.*

Решение. Рассмотрим равную нулю линейную комбинацию $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} = \mathbf{0}$. Если окажется, что это равенство возможно при α, β и γ не равных нулю одновременно, то векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ — линейно зависимы и по теореме 3.2.4 компланарны. Подставляя в линейную комбинацию векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, выраженные через векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, получим

$$\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} = \alpha\mathbf{e}_3 + \beta(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3) + \gamma(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = \mathbf{0},$$

или $(\beta + \gamma)\mathbf{e}_1 + (-\beta - \gamma)\mathbf{e}_2 + (\alpha - \beta - \gamma)\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$.

В силу линейной независимости векторов базиса это равенство возможно, если только коэффициенты этой комбинации равны нулю:

$$\begin{cases} \beta+\gamma=0, \\ -\beta-\gamma=0, \\ \alpha-\beta-\gamma=0. \end{cases}$$

Из этой системы уравнений получаем $\beta=-\gamma$ и $\alpha=-2\gamma$. Значит, $-2\gamma\mathbf{a}-\gamma\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c}=\mathbf{0}$. Взяв $\gamma=-1$, получаем $2\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c}=\mathbf{0}$. Следовательно, векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ линейно зависимы, а значит, и компланарны. Они связаны линейной зависимостью

$$2\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c}=\mathbf{0}.$$

3.2.4. Декартов прямоугольный базис. Декартова прямоугольная система координат

Геометрическое построение разложений вектора по базису на плоскости и в пространстве приводит к построению параллелограммов и параллелепипедов (рис. 2.13 и 2.14). Естественно выбирать такой базис, для которого подобное построение наиболее просто. Удобнее выбирать базис $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, в котором векторы попарно перпендикулярны (или, как говорят в векторной алгебре, попарно ортогональны) и имеют длины, равные единице: $\mathbf{e}_1 \perp \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_1 \perp \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_2 \perp \mathbf{e}_3$, $|\mathbf{e}_1|=|\mathbf{e}_2|=|\mathbf{e}_3|=1$.

Для того чтобы связать векторный способ решения задач с методом координат, удобно рассматривать базис в его связи с системой координат.

Пространственная система координат состоит из трех взаимно перпендикулярных осей и определяется выбором начала координат и ортов (единичных векторов) всех трех осей. Прямоугольная система координат на плоскости состоит из двух взаимно перпендикулярных осей и однозначно определяется выбором начала координат и ортов этих осей.

Условимся раз навсегда обозначать орт оси Ox через $\mathbf{i}$, орт оси Oy через $\mathbf{j}$ и орт оси Oz через $\mathbf{k}$ (рис. 2.15).

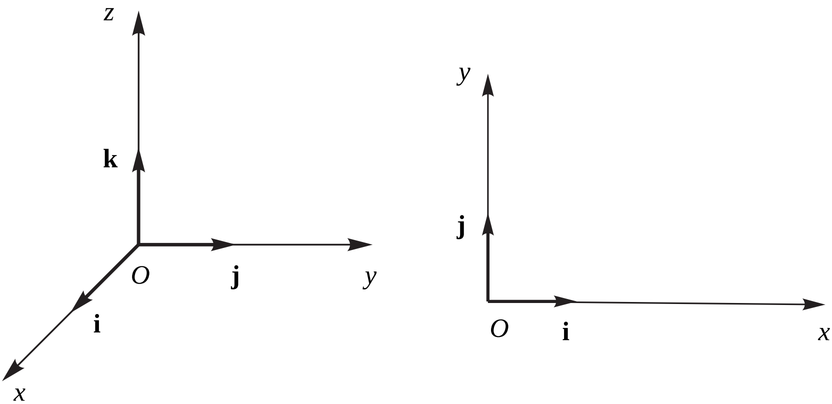


Рис. 2.15

Векторы **i**, **j** и **k** упорядочены, это значит, что вектор **i** считается первым, **j** — вторым и **k** — третьим. Системы координат, изображенные на рис. 2.15, называются *правыми*.

Иногда рассматриваются *левые* системы координат (рис. 2.16).

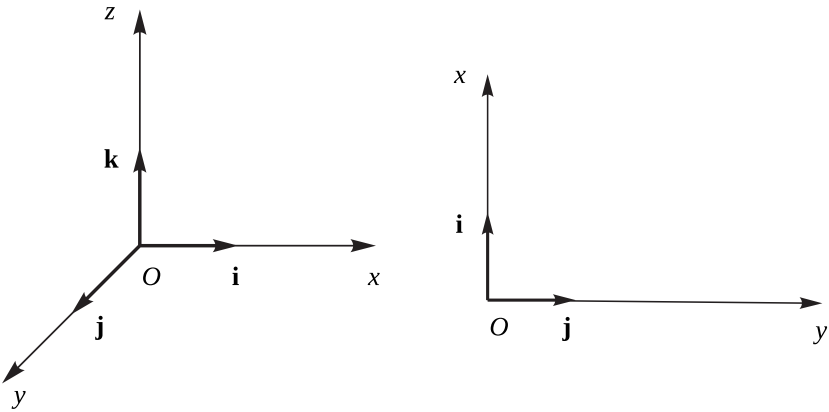


Рис. 2.16

В дальнейшем мы всюду будем рассматривать только правые системы координат. Для базиса в **i**, **j**, **k** пространстве третий вектор **k** получается из первых двух **i** и **j** по известному из физики правилу «буравчика». Базис **i**, **j** называется *декартовым (Р. Декарт (1596–1650) — французский математик, философ, физик и физиолог) прямоугольным базисом* на плоскости. Базис **i**, **j**, **k** — декартов прямоугольный базис в пространстве. Система координат с декартовым базисом называется *декартовой прямоугольной системой координат.*

Сформулируем полученные выше результаты для декартова прямоугольного базиса:

1. *Любой вектор* **a** *на плоскости может быть единственным образом разложен по декартовому базису* **i**, **j**:

$$\mathbf{a} = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j}. \tag{3.2.5}$$

2. *Любой вектор* **a** *в пространстве может быть единственным образом разложен по декартовому базису* **i**, **j**, **k**:

$$\mathbf{a} = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k}. \tag{3.2.6}$$

Векторы $\alpha\mathbf{i}$, $\beta\mathbf{j}$ и $\gamma\mathbf{k}$ называются *компонентами* вектора **a** по осям координат.

Геометрически построение разложений (3.2.5) и (3.2.6) приводит к построению прямоугольника и прямоугольного параллелепипеда (рис. 2.17).

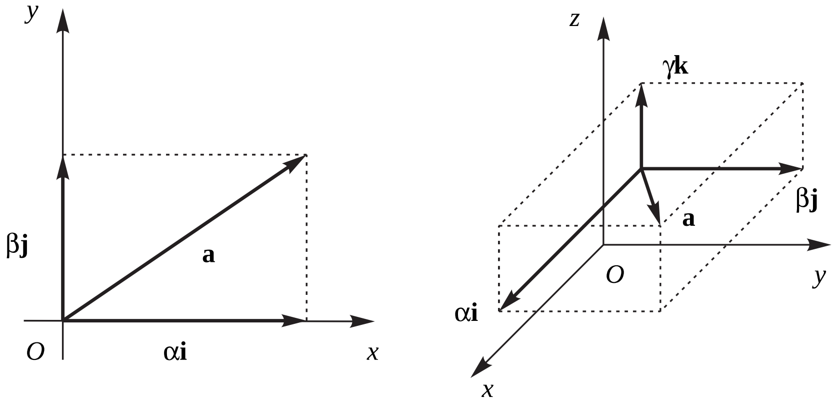


Рис. 2.17

Если вектор разложен по декартовому базису, то наряду с (3.2.5) и (3.2.6) часто используется обозначение

$$\mathbf{a} = \{\alpha, \beta\} \quad \text{и} \quad \mathbf{a} = \{\alpha, \beta, \gamma\}$$

без указания векторов базиса **i**, **j** и **k**. Числа α, β и γ называются *координатами вектора в декартовом базисе.*

3.2.5. Условия равенства и коллинеарности векторов в координатной форме

Используя единственность разложения вектора по базису, получаем утверждения:

1. *Два вектора* $\mathbf{a} = \{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}$ *и* $\mathbf{b} = \{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\}$ *равны тогда и только тогда, когда равны их одноимённые координаты:*

$$\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\} = \{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2,\ \beta_1 = \beta_2,\ \gamma_1 = \gamma_2.$$

2. *Два вектора* $\mathbf{a} = \{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}$ *и* $\mathbf{b} = \{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\}$ *коллинеарны тогда и только тогда, когда их одноимённые координаты пропорциональны:*

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}. \tag{3.2.7}$$

Докажем утверждение 2.

Необходимость. Если $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, то по теореме 3.2.1 (стр. 91) найдётся число λ такое,что $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$. По теореме 3.2.6

$$\lambda\mathbf{b} = \{\lambda\alpha_2, \lambda\beta_2, \lambda\gamma_2\}.$$

Значит, $\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\} = \{\lambda\alpha_2, \lambda\beta_2, \lambda\gamma_2\}$. Отсюда $\alpha_1 = \lambda\alpha_2$, $\beta_1 = \lambda\beta_2$, $\gamma_1 = \lambda\gamma_2$. Или $\lambda = \alpha_1/\alpha_2 = \beta_1/\beta_2 = \gamma_1/\gamma_2$. Необходимость доказана.

Достаточность. Приравняв отношение к числу λ получим $\lambda = \alpha_1/\alpha_2 = \beta_1/\beta_2 = \gamma_1/\gamma_2$. Отсюда $\alpha_1 = \lambda\alpha_2$, $\beta_1 = \lambda\beta_2$, $\gamma_1 = \lambda\gamma_2$. Следовательно,

$$\mathbf{a} = \{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\} = \{\lambda\alpha_2, \lambda\beta_2, \lambda\gamma_2\} = \lambda\{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\} = \lambda\mathbf{b}.$$

По теореме 3.2.1 векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны. Теорема доказана.

ПРИМЕР 3.2.2. *Зная, что векторы* $\mathbf{a} = \alpha\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - \mathbf{k}$ *и* $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} + \gamma\mathbf{k}$ *коллинеарны, вычислить коэффициенты* α *и* β.

РЕШЕНИЕ. Используя условие (3.2.7) коллинеарности, получаем

$$\frac{\alpha}{3} = \frac{5}{1} = \frac{-1}{\gamma}.$$

Отсюда $\alpha = 15$, и $\gamma = -1/5$.

§ 3.3. Проекция вектора на ось.

Осью называется прямая, на которой выбраны начало отсчета, положительное направление и единица длины (масштаб)на этой оси. Ось можно задать единичным вектором (ортом), лежащим на этой оси.

Определение 3.3.1. *Пусть A' и B' проекции точек A и B на ось l. Проекцией вектора $\overline{AB}$ на ось l называется число, равное длине вектора $\overline{A'B'}$, заключенного между проекциями начала A и конца B вектора $\overline{AB}$, причем эта длина берется с положительным знаком, если вектор $\overline{A'B'}$ имеет то же направление, что и ось, и с отрицательным знаком, если вектор $\overline{A'B'}$ и ось имеют противоположные направления (рис. 2.18).*

Проекция вектора $\mathbf{a} = \overline{AB}$ на ось l обозначается $\text{пр}_l \overline{AB} = \text{пр}_l \mathbf{a}$.

Иногда рассматривают проекцию вектора $\mathbf{a}$ на вектор $\mathbf{b}$, подразумевая под этим проекцию на ось, определяемую вектором $\mathbf{b}$, и обозначают $\text{пр}_{\mathbf{b}} \mathbf{a}$. Проекция вектора — скалярная величина (число).

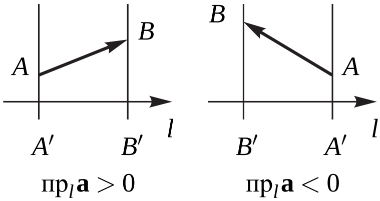


Рис. 2.18

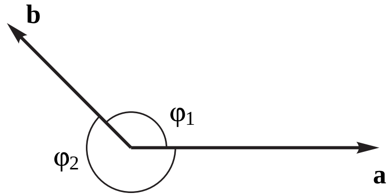


Рис. 2.19

Приведем произвольные векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ к общему началу O. Тогда в качестве угла между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ может быть любой из двух указанных на рис. 2.19 углов φ_1 или φ_2 (в сумме составляющих 2π). Договоримся в дальнейшем под углом между двумя векторами понимать тот угол, который не превосходит π (на рис. 2.19: $\varphi = (\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \varphi_1$).

Под углом между вектором и осью будем понимать угол между данным вектором и ортом оси.

Проекция вектора на ось обладает следующими свойствами.

Свойство 3.3.1. *Проекция вектора на ось равна произведению длины этого вектора на косинус угла φ между вектором и осью:*

$$\text{пр}_l \overline{AB} = |\overline{AB}| \cos\varphi. \tag{3.3.1}$$

Справедливость этого свойства наглядно иллюстрируется рис. 2.20, где использовано определение проекции.

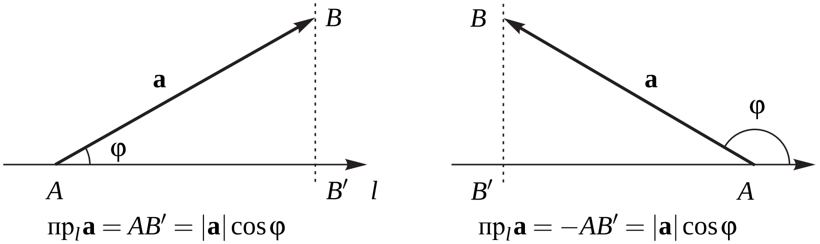
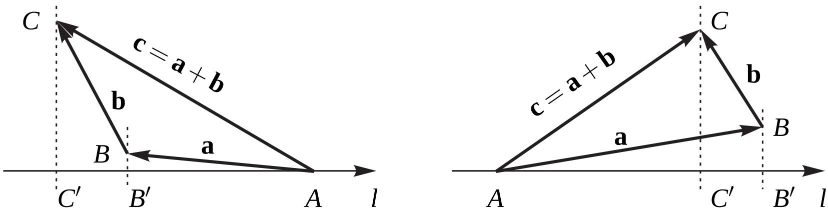


Рис. 2.20

Свойство 3.3.2. *Проекция суммы векторов равна алгебраической сумме проекций*

$$\text{пр}_l (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \text{пр}_l \mathbf{a} + \text{пр}_l \mathbf{b}. \tag{3.3.2}$$

Справедливость свойства 3.3.2 иллюстрируется рис. 2.21.



$\text{пр}_l \mathbf{c} = AC' = AB' + B'C'$ $\qquad$ $\text{пр}_l \mathbf{c} = AC' = AB' + B'C'$

Рис. 2.21

Свойство 3.3.3. *Проекция произведения вектора* **a** *на скаляр* λ *равна произведению этого же скаляра на проекцию вектора*

$$\text{пр}_l(\lambda \mathbf{a}) = \lambda \text{пр}_l \mathbf{a}. \tag{3.3.3}$$

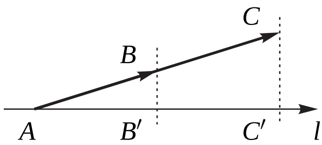


Рис. 2.22

В самом деле, обозначим $\mathbf{a} = \overline{AB}$ и $\overline{AC} = \lambda \mathbf{a}$) (рис. 2.22). Треугольники ABB' и ACC' подобны, значит, $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AC'}{AB'} = \lambda$. Отсюда $\text{пр}_l(\lambda \mathbf{a}) = \text{пр}_l \overline{AC} = AC' = \lambda AB' = \lambda \text{пр}_l \overline{AB}$.

Свойства 3.3.2 и 3.3.3, в частности, означают, что линейные операции над векторами приводят к соответствующим операциям над их проекциями (т. е. над числами).

Пусть задано разложение вектора **a** по декартову базису

$$\mathbf{a} = \alpha \mathbf{i} + \beta \mathbf{j} + \gamma \mathbf{k}.$$

Геометрический смысл коэффициентов разложения α, β и γ даёт следующая теорема.

Теорема 3.3.1. *Координаты* α, β *и* γ *разложения вектора* **a** *по декартовому базису равны проекциям этого вектора на оси координат*

$$\alpha = \text{пр}_{Ox} \mathbf{a}, \quad \beta = \text{пр}_{Oy} \mathbf{a}, \quad \gamma = \text{пр}_{Oz} \mathbf{a}.$$

Доказательство. Приложим вектор **a** к началу O декартовой системы координат и построим параллелепипед, диагональю которого является вектор **a** и грани которого лежат на координатных плоскостях (рис. 2.23).

Как и при доказательстве теоремы 3.2.5, получим, что $\mathbf{a} = \overline{OA} + \overline{OB} + +\overline{OC}$. Но $\overline{OA} \parallel \mathbf{i}$, значит, $\overline{OA} = \alpha\mathbf{i}$. Аналогично $\overline{OB} = \beta\mathbf{j}$ и $\overline{OC} = \gamma\mathbf{k}$. Следовательно,

$$\mathbf{a} = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k},$$

таким образом α, β и γ — координаты вектора $\mathbf{a}$ в декартовом базисе $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$. Построенный параллелепипед — прямоугольный и $\mathbf{a}$ — его диагональ.

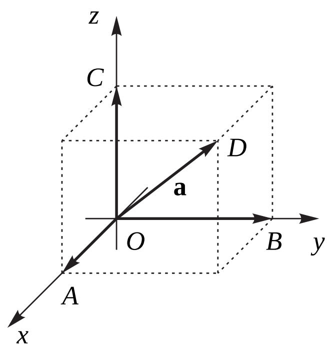


Рис. 23

Отсюда проекции OA, OB и OC вектора $\mathbf{a}$ на оси координат равны длинам этих отрезков, взятым с определенными знаками. Остается убедиться, что $OA = \alpha$, $OB = \beta$ и $OC = \gamma$. Ясно, что

$$|\overline{OA}| = |\alpha\mathbf{i}| = |\alpha|\,|\mathbf{i}| = |\alpha|.$$

Но и знаки чисел OA и α одинаковы, так как если векторы $\overline{OA}$ и $\mathbf{i}$ одинаково направлены, то оба эти числа положительны, а если $\overline{OA}$ и $\mathbf{i}$ направлены в противоположные стороны, то числа OA и α отрицательны (по определению проекции вектора на ось). Итак, $OA = \alpha$. Аналогично $OB = \beta$ и $OC = \gamma$. Теорема доказана.

Проекции вектора $\mathbf{a}$ на оси координат удобно обозначать a_x, a_y и a_z. Итак,

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} = \{a_x, a_y, a_z\}. \tag{3.3.4}$$

Для вектора $\mathbf{a}$ на плоскости Oxy разложение имеет вид

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} = \{a_x, a_y\}. \tag{3.3.5}$$

3.3.1. Длина вектора в координатной форме. Направляющие косинусы

Рассмотрим прямоугольный параллелепипед с диагональю $\mathbf{a}$ (рис. 2.23). Так как квадрат его диагонали равен сумме квадратов сторон, то из равенств $OA = a_x$, $OB = a_y$, и $OC = a_z$ получаем выражение для длины вектора $\mathbf{a}$ через его координаты

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \tag{3.3.6}$$

Обозначим α, β и γ *углы наклона вектора* $\mathbf{a}$ к осям Ox, Oy и Oz соответственно. Числа $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ называются *направляющими косинусами* вектора $\mathbf{a}$. Из теоремы 3.3.1 и свойства 3.3.1 проекций получаем формулы:

$$\begin{aligned} a_x &= \text{пр}_{Ox}\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\cos\alpha, \\ a_y &= \text{пр}_{Oy}\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\cos\beta, \\ a_z &= \text{пр}_{Oz}\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\cos\gamma. \end{aligned} \tag{3.3.7}$$

Из формул (3.3.6) и (3.3.7) получаем выражение для направляющих косинусов в координатной форме:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$
$$\cos\beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}, \tag{3.3.8}$$
$$\cos\gamma = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}.$$

По этим формулам, зная координаты вектора, можно найти его направляющие косинусы, а значит, и углы его наклона к осям координат, т. е. направление вектора.

Возводя равенства (3.3.8) в квадрат и складывая их, получим

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{3.3.9}$$

Таким образом, сумма квадратов направляющих косинусов равна единице. Отсюда, в частности, *если известны два угла наклона вектора к двум осям координат, то косинус третьего угла находится с точностью до знака*.

ПРИМЕР 3.3.1. *Вычислить модуль вектора* $\mathbf{a} = \{-3, 6, -2\}$.

РЕШЕНИЕ. По формуле (3.3.6) имеем

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{(-3)^2+6^2+(-2)^2} = \sqrt{49} = 7.$$

ПРИМЕР 3.3.2. *Найти единичный вектор* $\mathbf{a}$, *параллельный вектору* $\mathbf{A} = \{6, 7, -6\}$.

РЕШЕНИЕ. Искомый вектор либо равен орту $\mathbf{A}^0$ вектора $\mathbf{A}$, либо противоположен ему по направлению. Имеем

$$\mathbf{a} = \pm\mathbf{A}^0 = \pm\frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = \pm\frac{\{6,7,-6\}}{\sqrt{6^2+7^2+(-6)^2}} =$$
$$= \pm\frac{\{6,7,-6\}}{\sqrt{121}} = \pm\left\{\frac{6}{11}, \frac{7}{11}, -\frac{6}{11}\right\}.$$

ПРИМЕР 3.3.3. *Вычислить направляющие косинусы вектора* $\mathbf{a} = \{3, -4\}$.

РЕШЕНИЕ. Вектор $\mathbf{a}$ лежит на плоскости Oxy. Значит, его третья координата — проекция на ось Oz равна 0. Поэтому по формулам (3.3.6) и (3.3.8), в которых $a_z = 0$, имеем

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{3^2+(-4)^2} = 5 \quad \text{и} \quad \cos\alpha = \frac{3}{5},\ \cos\beta = -\frac{4}{5}.$$

Пример 3.3.4. *Может ли вектор составлять с координатными осями следующие углы:*

1) $\alpha = 60^\circ$*,* $\beta = 45^\circ$ *и* $\gamma = 120^\circ$*;*

2) $\alpha = 60^\circ$*,* $\beta = 45^\circ$ *и* $\gamma = 45^\circ$*?*

Решение. 1) $\cos\alpha = \cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}$, $\cos\beta = \cos 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\gamma = \cos 120^\circ = -\dfrac{1}{2}$. По формуле (3.3.9) имеем: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} = 1$. Значит, вектор может составлять с осями координат данные углы.

2) $\cos\alpha = \cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}$, $\cos\beta = \cos\gamma = \cos 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Значит, $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \dfrac{3}{2}$. Сумма квадратов направляющих косинусов не равна единице, следовательно, не существует такого вектора, который бы составлял с осями координат данные углы.

Пример 3.3.5. *Дан модуль вектора* $|\mathbf{a}| = 2$ *и углы* $\alpha = 60^\circ$*,* $\beta = 45^\circ$ *и* $\gamma = 120^\circ$*. Найти проекции вектора на оси координат.*

По формулам (3.3.7) имеем $a_x = |\mathbf{a}|\cos\alpha = 2\cos 60^\circ = 1$, $a_y = |\mathbf{a}|\cos\beta = 2\cos 45^\circ = \sqrt{2}$, $a_z = |\mathbf{a}|\cos\gamma = 2\cos 120^\circ = -1$.

3.3.2. Деление отрезка в заданном отношении

Пусть задана прямоугольная декартова система координат. *Радиус-вектором точки* M называется вектор $\overline{OM}$, где O — начало системы координат, и обозначается $\mathbf{r}(M)$ (рис. 2.24).

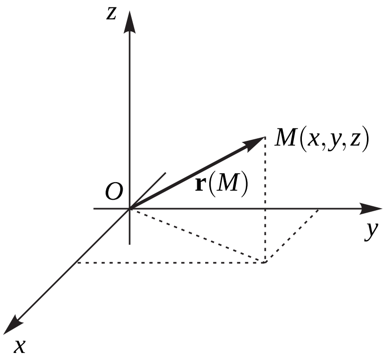


Рис. 2.24

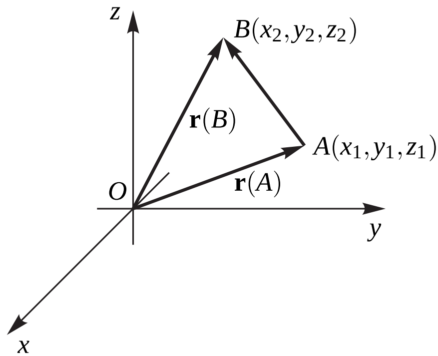


Рис. 2.25

Очевидно, координаты радиус-вектора точки $M(x,y,z)$ равны координатам самой точки $\mathbf{r}(M) = \overline{OM} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

Пусть даны две точки $A(x_1,y_1,z_1)$ и $B(x_2,y_2,z_2)$. Тогда, очевидно, $\overline{AB} = \mathbf{r}(B) - \mathbf{r}(A) = (x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}) - (x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}) = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}$. Получили правило: *чтобы найти координаты вектора с заданными началом и концом, нужно из координат конца вектора вычесть координаты его начала.*

Отсюда как следствие получаем формулу для расстояния между двумя точками $A(x_1,y_1,z_1)$ и $B(x_2,y_2,z_2)$:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \qquad (3.3.10)$$

Для точек на плоскости $A(x_1,y_1)$ и $B(x_2,y_2)$:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad (3.3.11)$$

Пример 3.3.6. *Даны две точки* $A(2,1,-3)$ *и* $B(-1,0,2)$. *Найти координаты векторов* $\overline{AB}$ *и* $\overline{BA}$.

Решение. $\overline{AB} = (-1 - 2)\mathbf{i} + (0 - 1)\mathbf{j} + (2 - (-3))\mathbf{k} = -3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$. $\overline{BA} = -\overline{AB} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 5\mathbf{k}$.

Пример 3.3.7. *Определить конец* B *вектора* $\mathbf{a} = \{2,1,-3\}$*, если его начало совпадает с точкой* $A(0,1,-2)$.

Решение.

$$\begin{cases} x_B - x_A = 2 \\ y_B - y_A = 1 \\ z_B - z_A = -3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_B = x_A + 2 = 2 \\ y_B = y_A + 1 = 1 \\ z_B = z_A - 3 = 5 \end{cases} \Longrightarrow B(2,2,-5).$$

Пример 3.3.8. *Проверить, что точки* $A(2,4,1)$, $B(3,7,5)$ *и* $C(4,10,9)$ *лежат на одной прямой.*

Решение. Найдем векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$: $\overline{AB} = \{1,3,4\}$, $\overline{AC} = \{2,6,8\}$. Так как координаты этих векторов пропорциональны: $\dfrac{2}{1} = \dfrac{6}{3} = \dfrac{8}{4}$, то векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ коллинеарны и, следовательно, точки A, B и C лежат на одной прямой.

Пусть даны две точки $A(x_1,y_1,z_1)$ и $B(x_2,y_2,z_2)$. Требуется найти на отрезке AB точку C такую, что она делит отрезок AB в заданном отношении λ, т. е. $\dfrac{AC}{CB} = \lambda$ (рис. 2.26).

Векторы $\overline{AC}$ и $\overline{CB}$ коллинеарны, одинаково направлены и $|\overline{AC}| = \lambda|\overline{CB}|$. Значит, $\overline{AC} = \lambda\overline{CB}$. Пусть точка C имеет координаты x_C, y_C и z_C. Тогда $\overline{AC} = \{x_C - x_1, y_C - y_1, z_C - z_1\}$ и $\lambda\overline{CB} = \lambda\{x_2 - x_C, y_2 - y_C, z_2 - z_C\} = \{\lambda(x_2 - x_C), \lambda(y_2 - y_C), \lambda(z_2 - z_C)\}$.

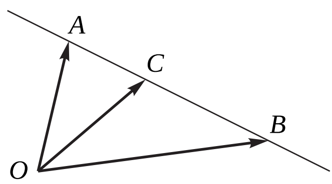


Рис. 2.26

Имеем систему уравнений для x_C, y_C и z_C:

$$\begin{cases} x_C - x_1 = \lambda(x_2 - x_C) \\ y_C - y_1 = \lambda(y_2 - y_C) \\ z_C - z_1 = \lambda(z_2 - z_C) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_C(1+\lambda) = x_1 + \lambda x_2 \\ y_C(1+\lambda) = y_1 + \lambda y_2 \\ z_C(1+\lambda) = z_1 + \lambda z_2 \end{cases}$$

Итак,

$$x_C = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y_C = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z_C = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}. \tag{3.3.12}$$

При $\lambda = 1$ имеем $AC = CB$, т. е. точка C — середина отрезка AB. Из формулы (3.3.12) получаем

$$x_C = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_C = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z_C = \frac{z_1 + z_2}{2}. \tag{3.3.13}$$

Получаем правило: *координаты середины отрезка равны полусумме координат его концов.*

Пример 3.3.9. *Найти центр тяжести однородного треугольника с вершинами в точках* $A(1,4)$, $B(-5,0)$ *и* $C(-2,-1)$.

Решение. В механике фигура называется однородной, если плотность распределения массы постоянна. Известно, что центр тяжести однородного треугольника лежит в точке пересечения медиан. Пусть точка M — середина отрезка AB. По первым двум формулам (3.3.13) имеем

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1 + (-5)}{2} = -2, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{4+0}{2} = 2.$$

Итак, точка $M(-2,2)$ найдена. Пусть O — точка пересечения медиан. Медианы в точке пересечения делятся в отношении $2:1$, т. е. $CO = 2OM$. Отсюда $\overline{CO} = 2\overline{OM}$. Переходя к координатам, получим $x_O - x_C = 2\{x_M - x_O\}$ и $y_O - y_C = 2\{y_M - y_O\}$. Или

$$x_O = \frac{x_C + 2x_M}{2} = -2, \quad y_O = \frac{y_C + 2y_M}{2} = 1.$$

Итак, центр тяжести треугольника находится в точке $O(-2,1)$.

§ 3.4. Скалярное произведение векторов

Определение 3.4.1. *Скалярным произведением двух векторов называется произведение длин этих векторов на косинус угла между ними, т. е.*

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\widehat{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}. \tag{3.4.1}$$

Если один из векторов нулевой, то угол $\widehat{(\mathbf{a},\mathbf{b})}$ не определен, и полагаем по определению $\mathbf{0}\cdot\mathbf{a}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{0}=0$.

Скалярное произведение векторов — это число (скаляр). Оно возникло в механике, когда, зная перемещение $\overline{S}$ точки и действующую на неё силу $\overline{F}$, вычисляют работу этой силы

$$A = FS\cos\alpha = \overline{F}\cdot\overline{S}.$$

Скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ тесно связано с проекцией одного из этих векторов на ось, определяемую другим вектором. По формуле (3.3.1) (стр. 101) имеем $\text{пр}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = |\mathbf{b}|\cos\widehat{(\mathbf{a},\mathbf{b})}$. Отсюда и из равенства (3.4.1) получаем

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\text{пр}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}. \tag{3.4.2}$$

Меняя в этом равенстве $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ местами, получаем

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{b}|\text{пр}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}.$$

Отсюда, в свою очередь, следует полезная в дальнейшем формула

$$\text{пр}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}. \tag{3.4.3}$$

3.4.1. Геометрические свойства скалярного произведения

Свойство 3.4.1. *Два вектора ортогональны (перпендикулярны) тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю, т.е.*

$$\mathbf{a}\perp\mathbf{b} \iff \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0.$$

Доказательство. Нулевой вектор не имеет направления и, значит, его можно считать ортогональным любому вектору. Если скалярно перемножаются два ненулевых вектора, то произведение (3.4.1) равно нулю тогда и только тогда, когда $\cos\widehat{(\mathbf{a},\mathbf{b})}=0$, т. е. $\widehat{(\mathbf{a},\mathbf{b})}=\dfrac{\pi}{2}$ и векторы ортогональны. Свойство доказано.

Свойство 3.4.2.

$$\begin{aligned}
&\widehat{(\mathbf{a},\mathbf{b})} \text{ — \textit{острый}} &&\iff && \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}>0,\\
&\widehat{(\mathbf{a},\mathbf{b})} \text{ — \textit{тупой}} &&\iff && \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}<0.
\end{aligned}$$

Доказательство следует из определения 3.4.1 скалярного произведения, свойств косинуса и определения (рис. 2.19) угла между двумя векторами.

Свойство 3.4.3.

$$\cos\widehat{(\mathbf{a},\mathbf{b})} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|}. \tag{3.4.4}$$

Свойство 3.4.4.

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}. \tag{3.4.5}$$

Доказательство. Очевидно, $\widehat{(\mathbf{a},\mathbf{a})} = 0$ и, значит, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$. Отсюда получаем требуемое.

3.4.2. Алгебраические свойства скалярного произведения

Скалярное умножение подчиняется законам умножения чисел.

1) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$ — коммутативность;

2) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$ — дистрибутивность;

3) $(\alpha\cdot\mathbf{a})\cdot\mathbf{b} = \alpha\cdot(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$ — ассоциативность по отношению к числовому множителю.

Коммутативность непосредственно следует из определения 3.4.1 скалярного произведения, так как $\widehat{(\mathbf{a},\mathbf{b})} = \widehat{(\mathbf{b},\mathbf{a})}$. Для доказательства дистрибутивности и ассоциативности воспользуемся свойствами проекций вектора и формулой (3.4.4):

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = |\mathbf{c}|\text{пр}_{\mathbf{c}}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = |\mathbf{c}|(\text{пр}_{\mathbf{c}}\mathbf{a}+\text{пр}_{\mathbf{c}}\mathbf{b}) = \\ = |\mathbf{c}|\text{пр}_{\mathbf{c}}\mathbf{a}+|\mathbf{c}|\text{пр}_{\mathbf{c}}\mathbf{b} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c};$$

$$(\alpha\mathbf{a})\mathbf{b} = |\mathbf{b}|\text{пр}_{\mathbf{b}}(\alpha\mathbf{a}) = |\mathbf{b}|\text{пр}_{\mathbf{b}}(\alpha\mathbf{a}) = |\mathbf{b}|\alpha\text{пр}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = \\ = \alpha(|\mathbf{b}|\text{пр}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}) = \alpha(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}).$$

Пример 3.4.1. *Вычислить скалярное произведение* $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$*, если* $\mathbf{a} = 3\mathbf{p} - 2\mathbf{q}$ *и* $\mathbf{b} = \mathbf{p}+4\mathbf{q}$*, где* $|\mathbf{p}| = \frac{1}{3}$, $|\mathbf{q}| = 2$ *и* $\widehat{(\mathbf{p},\mathbf{q})} = \frac{\pi}{3}$.

Решение. Используя алгебраические свойства скалярного произведения, получаем

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = (3\mathbf{p}-2\mathbf{q})\cdot(\mathbf{p}+4\mathbf{q}) = 3\mathbf{p}\cdot(\mathbf{p}+4\mathbf{q}) - 2\mathbf{q}\cdot(\mathbf{p}+4\mathbf{q}) = \\ = 3\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}+12\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}-2\mathbf{q}\cdot\mathbf{p}-8\mathbf{q}\cdot\mathbf{q} = 3|\mathbf{p}||\mathbf{p}|\cos 0+10|\mathbf{p}||\mathbf{q}|\cos\frac{\pi}{3}- \\ -|\mathbf{q}||\mathbf{q}|\cos 0 = 3\left(\frac{1}{3}\right)^2+10\cdot\frac{1}{3}\cdot 2\cdot\frac{1}{2}-8\cdot 2^2 = -\frac{85}{3}.$$

Пример 3.4.2. *Найти проекцию вектора* $\mathbf{a}$ *на вектор* $\mathbf{b}$ *для векторов* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *из предыдущего примера.*

Решение. Искомая проекция находится по формуле (3.4.3). Скалярное произведение $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = -\dfrac{85}{3}$. Найдем модуль вектора $\mathbf{b}$. По формуле (3.4.5) имеем

$$|\mathbf{b}| = \sqrt{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}} = \sqrt{(\mathbf{p}+4\mathbf{q})\cdot(\mathbf{p}+4\mathbf{q})} =$$

$$= \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + 8|\mathbf{p}|\cdot|\mathbf{q}|\cdot\cos\frac{\pi}{3} + 16|\mathbf{q}|^2} = \frac{\sqrt{601}}{3}.$$

Следовательно, $\text{пр}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = -\dfrac{85}{\sqrt{601}}$.

Пример 3.4.3. *Зная, что* $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 5$ *и* $\widehat{(\mathbf{a},\mathbf{b})} = \dfrac{2\pi}{3}$, *определить, при каком значении коэффициента* α *векторы* $\mathbf{p} = \alpha\mathbf{a} + 17\mathbf{b}$ *и* $\mathbf{q} = 3\mathbf{a} - \mathbf{b}$ *окажутся перпендикулярными.*

Решение. По свойству 3.4.1 скалярного произведения

$$\mathbf{p}\perp\mathbf{q} \iff \mathbf{p}\cdot\mathbf{q} = 0.$$

Отсюда

$$0 = (\alpha\mathbf{a}+17\mathbf{b})\cdot(3\mathbf{a}-\mathbf{b}) = 3\alpha|\mathbf{a}|^2 + (51-\alpha)\cdot\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - 17\cdot|\mathbf{b}|^2 =$$

$$= 12\alpha + (51-\alpha)2\cdot 5\left(-\frac{1}{2}\right) - 17\cdot 25 = 17\alpha - 17\cdot 40.$$

Значит, $\alpha = 40$.

3.4.3. Выражение скалярного произведения в декартовых координатах

Особенно просто скалярное произведение векторов вычисляется, если эти векторы разложены по декартову прямоугольному базису.

Теорема 3.4.1. *Если*

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} = \{a_x; a_y; a_z\};$$
$$\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k} = \{b_x; b_y; b_z\};$$

то

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z. \tag{3.4.6}$$

т.е. скалярное произведение равно сумме произведений одноименных координат.

Доказательство. Базисные векторы попарно ортогональны и имеют длины, равные единице, значит,

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}=0;\quad \mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=1.$$

Используя алгебраические свойства скалярного умножения, получаем

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a_xb_x\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}+a_xb_y\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}+a_xb_z\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}+a_yb_x\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}+a_yb_y\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}+a_yb_z\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}+$$
$$+a_zb_z\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}+a_zb_y\mathbf{k}\cdot\mathbf{j}+a_zb_z\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z,$$

что и требовалось доказать.

Для векторов на плоскости $\mathbf{a}=a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}$ и $\mathbf{b}=b_x\mathbf{i}+b_y\mathbf{j}$ формула (3.4.6), очевидно, принимает вид

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a_xb_x+a_yb_y.$$

Из формул (3.4.5) и (3.4.6) получаем известную формулу для длины вектора

$$|\mathbf{a}|=\sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}.$$

Пример 3.4.4. *Найти проекцию вектора* $\mathbf{b}=10\mathbf{i}+2\mathbf{i}$ *на вектор* $\mathbf{b}=5\mathbf{i}-12\mathbf{j}$.

Решение. Искомая проекция может быть найдена по формуле (3.4.3). Находим скалярное произведение

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=10\cdot5+2\cdot(-12)=26,$$

и модуль вектора $\mathbf{b}$

$$|\mathbf{b}|=\sqrt{5^2+(-12)^2}=13.$$

Отсюда, $\text{пр}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}=\dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}=2.$

Пример 3.4.5. *Даны вершины треугольника* $A(-1,-2,4)$, $B(-4,-2,0)$ *и* $C(3,-2,1)$. *Определить угол при вершине B.*

Решение. По формуле 3.4.3 имеем

$$\cos\widehat{B}=\cos\left(\widehat{\overline{BA},\overline{BC}}\right)=\frac{\overline{BA}\cdot\overline{BC}}{|\overline{BA}||\overline{BC}|}.$$

Но $\overline{BA}=\{3,0,4\}$, $\overline{BC}=\{7,0,1\}$, значит, $\overline{BA}\cdot\overline{BC}=3\cdot7+4\cdot1=25$, $|\overline{BA}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$, $|\overline{BC}|=\sqrt{7^2+1^2}=5\sqrt{2}$. Таким образом, $\cos\widehat{B}=\dfrac{25}{5\cdot5\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Отсюда $\widehat{B}=45^\circ$.

§ 3.5. Векторное произведение двух векторов

3.5.1. Определение векторного произведения

Наряду с умножением двух векторов, приводящим к скаляру, рассмотрим еще один тип умножения, в результате которого получается вектор.

Определение 3.5.1. *Векторным произведением вектора* $\mathbf{a}$ *на вектор* $\mathbf{b}$ *называется вектор* $\mathbf{c}$*, удовлетворяющий трем условиям:*

1) вектор $\mathbf{c}$ *перпендикулярен плоскости параллелограмма, построенного на векторах* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *т. е. ортогонален векторам* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$*:* $\mathbf{c} \perp \mathbf{a}$ *и* $\mathbf{c} \perp \mathbf{b}$*;*

2) длина вектора $\mathbf{c}$ *равна площади параллелограмма, построенного на векторах* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$*, т. е.*

$$|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \widehat{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}; \qquad (3.5.1)$$

3) векторы $\mathbf{a}$*,* $\mathbf{b}$ *и* $\mathbf{c}$*, взятые в указанном порядке, образуют правую тройку (рис. 2.27).*

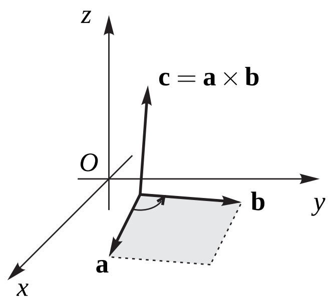


Рис. 2.27

Последнее условие означает, что вектор $\mathbf{c}$ можно получить из первого вектора $\mathbf{a}$ и второго вектора $\mathbf{b}$ по известному в физике правилу «буравчика». А можно и так: если смотреть из конца третьего вектора $\mathbf{c}$, то поворот от первого вектора $\mathbf{a}$ ко второму вектору $\mathbf{b}$ происходит против часовой стрелки. Если этот поворот происходит по часовой стрелке, то такая тройка векторов называется левой.

Векторное произведение обозначим $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Еще раз подчеркнем: векторное произведение — это вектор.

Свойство 3.5.1. *Векторы* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *коллинеарны тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно нулю:*

$$\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \iff \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}. \qquad (3.5.2)$$

Доказательство. *Необходимость.* Если $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны, то $\sin \widehat{(\mathbf{a}, \mathbf{b})} = 0$ и, значит, $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \sin \widehat{(\mathbf{a}, \mathbf{b})} = 0$. Отсюда и само произведение $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

Достаточность. Если $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$, то отсюда $\sin \widehat{(\mathbf{a}, \mathbf{b})} = 0$ и угол $\widehat{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}$ равен либо нулю, либо π, т. е. векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны. Если один из сомножителей — нулевой вектор, то он не имеет направления и , как это уже было отмечено ранее, его можно считать коллинеарным любому вектору. Свойство доказано.

Следствие 3.5.1. $\mathbf{a}\times\mathbf{a}=\mathbf{0}$.

Свойство 3.5.2. $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=-(\mathbf{b}\times\mathbf{a})$*, т.е. при перемене мест сомножителей* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *векторное произведение меняет знак. Это свойство называют свойством* антикоммутативности *векторного произведения.*

Доказательство. Обозначим $\mathbf{c}_1=\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2=\mathbf{b}\times\mathbf{a}$. Если векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны, то в силу (3.5.2) $\mathbf{c}_1=\mathbf{c}_2=0$ и свойство 3.5.2 выполняется.

Пусть векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не коллинеарны, тогда векторы $\mathbf{c}_1$ и $\mathbf{c}_2$, во-первых, имеют одинаковую длину и, во-вторых, коллинеарны (в силу определения векторного произведения). Значит, либо $\mathbf{c}_1=\mathbf{c}_2$, либо $\mathbf{c}_1=-\mathbf{c}_2$. Но равенство $\mathbf{c}_1=\mathbf{c}_2$ невозможно, так как тройки векторов $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}_1)$ и $(\mathbf{b},\mathbf{a},\mathbf{c}_1)$ не могут быть обе правыми (ввиду правила «буравчика»). Свойство доказано.

Свойство 3.5.3.

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}. \qquad (3.5.3)$$

Свойство 3.5.4.

$$\alpha(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=(\alpha\mathbf{a})\times\mathbf{b}=\mathbf{a}\times(\alpha\mathbf{b}) \qquad (3.5.4)$$

Доказательства свойств 3.5.3 и 3.5.4 сравнительно громоздки и их можно найти, например, в [3].

Пример 3.5.1. *Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах* $\mathbf{a}=\mathbf{m}+2\mathbf{n}$ *и* $\mathbf{b}=\mathbf{m}-3\mathbf{n}$*, где* $|\mathbf{m}|=5$*,* $|\mathbf{n}|=3$ *и* $\widehat{(\mathbf{m},\mathbf{n})}=\dfrac{\pi}{6}$.

Решение. По определению 3.5.1 искомая площадь равна модулю векторного произведения $S=|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$. Векторное произведение $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ находим, используя свойства 3.5.1–3.5.4:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\times\mathbf{b}&=(\mathbf{m}+2\mathbf{n})\times(\mathbf{m}-3\mathbf{n})=\mathbf{m}\times\mathbf{m}+2\mathbf{n}\times\mathbf{m}+\mathbf{m}\times(-3\mathbf{n})+\\&+2\mathbf{n}\times(-3\mathbf{n})=2\mathbf{n}\times\mathbf{m}-3\mathbf{m}\times\mathbf{m}=2\mathbf{n}\times\mathbf{m}+3\mathbf{n}\times\mathbf{m}=5\mathbf{n}\times\mathbf{m}.\end{aligned}$$

Значит,

$$S=5|\mathbf{n}\times\mathbf{m}|=5|\mathbf{m}||\mathbf{n}|\sin\widehat{(\mathbf{m},\mathbf{n})}=5\cdot5\cdot3\cdot\frac{1}{2}=37{,}5.$$

3.5.2. Выражение векторного произведения в декартовых координатах

Теорема 3.5.1. *Если*

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k},$$

то векторное произведение этих векторов имеет вид

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_yb_z - a_zb_y)\mathbf{i} + (a_zb_x - a_xb_z)\mathbf{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\mathbf{k}. \tag{3.5.5}$$

Доказательство. Составим из базисных векторов $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ все возможные пары и для каждой пары вычислим векторное произведение. При этом учтем, что базисные векторы попарно ортогональны, имеют единичную длину и образуют правую тройку.

$$\begin{array}{lll} \mathbf{i}\times\mathbf{i} = \mathbf{0} & \mathbf{i}\times\mathbf{j} = \mathbf{k} & \mathbf{i}\times\mathbf{k} = -\mathbf{j}; \\ \mathbf{j}\times\mathbf{i} = -\mathbf{k} & \mathbf{j}\times\mathbf{j} = \mathbf{0} & \mathbf{j}\times\mathbf{k} = \mathbf{i}; \\ \mathbf{k}\times\mathbf{i} = \mathbf{j} & \mathbf{k}\times\mathbf{j} = -\mathbf{i} & \mathbf{k}\times\mathbf{k} = \mathbf{0}. \end{array} \tag{3.5.6}$$

Применяя свойства векторного произведения 3.5.1–3.5.4 и формулы (3.5.6), получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}) \times (b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}) = \\ = a_xb_x\mathbf{i}\times\mathbf{i} + a_xb_y\mathbf{i}\times\mathbf{j} + a_xb_z\mathbf{i}\times\mathbf{k} + \\ + a_yb_x\mathbf{j}\times\mathbf{i} + a_yb_y\mathbf{j}\times\mathbf{j} + a_yb_z\mathbf{j}\times\mathbf{k} + \\ + a_zb_x\mathbf{k}\times\mathbf{i} + a_zb_y\mathbf{k}\times\mathbf{j} + a_zb_z\mathbf{k}\times\mathbf{k} = \\ = a_xb_y\mathbf{k} - a_xb_z\mathbf{j} - a_yb_x\mathbf{k} + a_yb_z\mathbf{i} + a_zb_x\mathbf{j} - a_zb_y\mathbf{i}. \end{aligned}$$

Приводя подобные члены (при одинаковых векторах), получаем требуемую формулу (3.5.5).

Замечание 3.5.1. *Для запоминания формулу* (3.5.5) *удобно записать, используя символ определителя*

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \tag{3.5.7}$$

Раскрывая этот определитель либо по первой строке, либо по «правилу треугольника», получим разложение (3.5.5).

Пример 3.5.2. *Найти векторное произведение векторов* $\mathbf{a} = \{2, -1, 3\}$ *и* $\mathbf{b} = \{1, 0, -2\}$.

Решение. Раскрывая определитель (3.5.7) по первой строке,получим

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} +$$

$$+\mathbf{k}\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i}+7\mathbf{j}+\mathbf{k}.$$

Пример 3.5.3. *Вычислить площадь треугольника с вершинами в точках* $A(5,2,6)$*,* $B(1,2,0)$ *и* $C(3,0,-3)$*.*

Решение. Площадь треугольника ABC равна половине площади параллелограмма $ABCD$, построенного на векторах $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, приложенных к точке A. Значит, $S_\triangle = \dfrac{1}{2}|\overline{AB}\times\overline{AC}|$. Находим векторы $\overline{AB} = \{-4,0,-6\}$ и $\overline{AC} = \{-2,-2,-9\}$. Далее

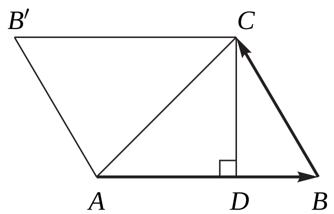
$$\overline{AB}\times\overline{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -4 & 0 & -6 \\ -2 & -2 & -9 \end{vmatrix} = -12\mathbf{i}-24\mathbf{j}+8\mathbf{k} = 4(-3\mathbf{i}-6\mathbf{j}+2\mathbf{k}).$$

Отсюда

$$S_\triangle = \frac{1}{2}|4(-3\mathbf{i}-6\mathbf{j}+2\mathbf{k})| = 2\sqrt{(-3)^2+(-6)^2+2^2} = 14.$$

Пример 3.5.4. *Зная две стороны треугольника* $\overline{AB} = 3\mathbf{i}-4\mathbf{j}$ *и* $\overline{BC} = \mathbf{i}+5\mathbf{j}$*, вычислить длину его высоты* CD*.*

Решение. Очевидно, высота треугольника ABC равна высоте параллелограмма $ABCB'$. Из геометрии известно, что площадь параллелограмма $S = |\overline{AB}||\overline{CD}|$. Из определения векторного произведения эта же площадь $S = |\overline{BA}\times\overline{BC}|$.



Отсюда получаем, что

$$|\overline{CD}| = \frac{|\overline{BA}\times\overline{BC}|}{|\overline{AB}|}.$$

Но $|\overline{AB}| = \sqrt{3^2+(-4)^2} = 5$. Векторы $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$ расположены на плоскости Oxy, значит, их проекции на ось Oz равны нулю. По формуле (3.5.6) получаем

$$\overline{BA}\times\overline{BC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -19\mathbf{k}.$$

Следовательно, $|\overline{BA}\times\overline{BC}| = |-19\mathbf{k}| = 19|\mathbf{k}| = 19$.

Таким образом, искомая высота равна $|\overline{CD}| = \dfrac{19}{5}$.

§ 3.6. Смешанное произведение векторов

3.6.1. Определение смешанного произведения и его геометрический смысл

Определение 3.6.1. *Если векторное произведение двух векторов* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *умножить скалярно на третий вектор* $\mathbf{c}$*, то такое произведение трёх векторов называется смешанным (или векторно-скалярным) произведением и обозначается* $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$.

Смешанное произведение имеет простой геометрический смысл, как показывает следующая теорема.

Теорема 3.6.1. *Смешанное произведение* $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$ *равно объему параллелепипеда, построенного на векторах* $\mathbf{a}$*,* $\mathbf{b}$ *и* $\mathbf{c}$*, взятому со знаком плюс, если тройка* $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$ *правая, и со знаком минус, если тройка* $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$ *левая. Если векторы* $\mathbf{a}$*,* $\mathbf{b}$*,* $\mathbf{c}$ *компланарны, то смешанное произведение равно нулю.*

Доказательство. Рассмотрим три случая.

1. Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны. Тогда по теореме 3.2.1 (стр. 91) они линейно зависимы. Отсюда следует, что три вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ также линейно зависимы и по теореме 3.2.3 (стр. 92) они компланарны. В этом случае объем параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ равен нулю. Нам надо доказать,что и смешанное произведение $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = 0$. Но это очевидно, так как по формуле (3.5.2) $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = 0$ и, значит, $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = \mathbf{0}$.

2. Векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ компланарны и векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не коллинеарны. Объем параллелепипеда по-прежнему равен нулю. Покажем, что равно нулю и смешанное произведение. Вектор $\mathbf{c}_1 = \mathbf{a}\times\mathbf{b}$ перпендикулярен плоскости векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, а значит, и вектору $\mathbf{c}$. Таким образом, $\mathbf{c}_1 \perp \mathbf{c}$. Следовательно скалярное произведение $\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{c} = 0$, то есть $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = 0$.

3. Векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ не компланарны и образуют правую тройку (рис. 2.28).

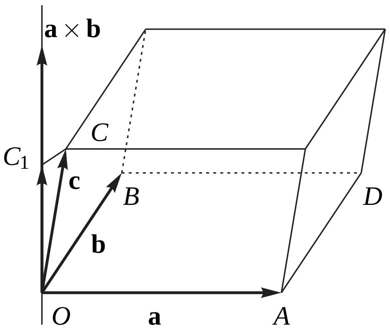


Рис. 2.28

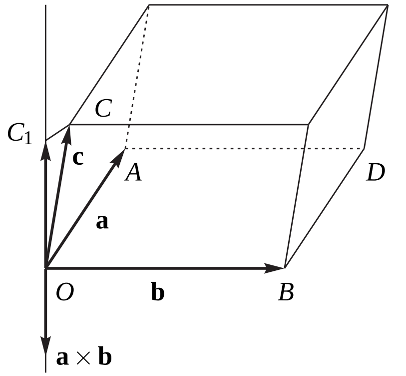


Рис. 2.29

Векторное произведение $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ это вектор, перпендикулярный основанию $OADB$ параллелепипеда. Значит, высота параллелепипеда равна $h = OC_1$ — проекции вектора $\overline{OC}$ на вектор $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$.

Используя выражение скалярного произведения через проекцию, получим

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = |\mathbf{a}\times\mathbf{b}|\cdot \text{пр}_{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}\mathbf{c} = |\mathbf{a}\times\mathbf{b}|OC_1 = S_{OADB}OC_1 = V.$$

Если векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ образуют левую тройку (рис. 2.29), то векторы $\overline{OC_1}$ и $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ противоположно направлены и $\text{пр}_{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}\mathbf{c}$ отрицательна.

Отсюда $\text{пр}_{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}\mathbf{c} = -h$. Следовательно, $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = -V$. Теорема доказана.

Следствие 3.6.1. *Объем параллелепипеда, построенного на трех векторах, равен модулю смешанного произведения этих векторов*

$$V_{пар} = |(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}|.$$

Следствие 3.6.2. *Три вектора компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю.*

Отсюда получаем: *смешанное произведение произведение векторов* **a**, **b** *и* **c** *не равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы не компланарны, а, значит, линейно независимы.*

Если две тройки векторов либо обе правые, либо обе левые, то говорят, что эти тройки имеют одинаковую ориентацию. Если одна тройка правая, а другая левая,то говорят, что эти тройки имеют противоположную ориентацию.

Из трех векторов **a**, **b** и **c** можно составить следующие шесть троек

$$\mathbf{abc};\quad \mathbf{cab};\quad \mathbf{bca}; \tag{3.6.1}$$

$$\mathbf{bac};\quad \mathbf{cba};\quad \mathbf{acb}. \tag{3.6.2}$$

Легко показать, что все тройки (3.6.1) имеют ту же ориентацию, что и тройка **abc**, а все тройки (3.6.2) имеют ориентацию противоположную ориентации тройки **abc**.

Теорема 3.6.2. *Справедливо равенство*

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}). \tag{3.6.3}$$

Доказательство. В силу коммутативности скалярного произведения $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{a}$. Надо доказать, что $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=$ $=(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{a}$. С точностью до знака это равенство очевидно, так как и правая и левая его части (с точностью до знака) равны объёму параллелепипеда, построенного на векторах **a**, **b** и **c** (или равны нулю, если эти векторы компланарны). Но и знаки правой и левой частей доказываемого равенства также совпадают, так как обе тройки **abc** и **bca** относятся к одной группе троек 3.6.1, т. е. имеют одинаковую ориентацию. Теорема доказана.

Равенство (3.6.3) позволяет записывать смешанное произведение в виде $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}=\mathbf{abc}$, не указывая, какие именно два вектора (первые два или последние два) перемножаются векторно.

3.6.2. Выражение смешанного произведения в декартовых координатах

Пусть векторы заданы разложениями по декартовому базису

$$\mathbf{a}=a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k};\mathbf{b}=b_x\mathbf{i}+b_y\mathbf{j}+b_z\mathbf{k};\mathbf{c}=c_x\mathbf{i}+c_y\mathbf{j}+c_z\mathbf{k}.$$

По формулам (3.5.7) (стр. 114) и (3.4.6) (стр. 110) получаем, используя определители

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k})\cdot\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ b_x&b_y&b_z\\ c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}=$$

$$=(a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k})\cdot\left(\mathbf{i}\begin{vmatrix}b_y&b_z\\ c_y&c_z\end{vmatrix}-\mathbf{j}\begin{vmatrix}b_x&b_z\\ c_x&c_z\end{vmatrix}+\mathbf{k}\begin{vmatrix}b_x&b_y\\ c_x&c_y\end{vmatrix}\right)=$$

$$=\left(a_x\begin{vmatrix}b_y&b_z\\ c_y&c_z\end{vmatrix}-a_y\begin{vmatrix}b_x&b_z\\ c_x&c_z\end{vmatrix}+a_z\begin{vmatrix}b_x&b_y\\ c_x&c_y\end{vmatrix}\right)=\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\ b_x&b_y&b_z\\ c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}.$$

Итак, получили формулу для вычисления смешанного произведения в декартовых координатах:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}=\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\ b_x&b_y&b_z\\ c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}. \tag{3.6.4}$$

Следствие 3.6.3. *Векторы компланарны тогда и только тогда, когда равен нулю определитель, составленный из координат этих векторов, т. е.*

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0.$$

Пример 3.6.1. *Показать, что векторы* $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ *и* $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ *образуют базис.*

Решение. Три вектора образуют базис в пространстве, если они некомпланарны, т. е. смешанное произведение этих векторов не равно нулю.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+3\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -52 \neq 0.$$

Таким образом, векторы **a**, **b** и **c** образуют базис.

Пример 3.6.2. *Показать, что четыре точки* $A(-1,2,1)$, $B(1,2,-1)$, $C(0,1,5)$ *и* $D(2,1,3)$ *лежат в одной плоскости.*

Решение. Эти точки лежат в одной плоскости, если векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$ лежат в этой плоскости, т. е. компланарны. Находим эти векторы $\overline{AB} = \{2,0,-2\}$, $\overline{AC} = \{1,-1,4\}$ и $\overline{AD} = \{3,-1,2\}$. Их смешанное произведение

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Смешанное произведение равно нулю, значит, векторы компланарны, а точки лежат в одной плоскости.

Пример 3.6.3. *Даны вершины пирамиды* $A(-1,0,2)$, $B(2,1,0)$, $C(-5,0,5)$ *и* $D(0,5,1)$. *Найти длину ее высоты, опущенной из вершины* D.

Решение. Высота пирамиды равна высоте параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$, как на смежных ребрах. Из геометрии известно, что объем параллелепипеда равен произведению площади основания параллелепипеда на его высоту: $V = SH$.

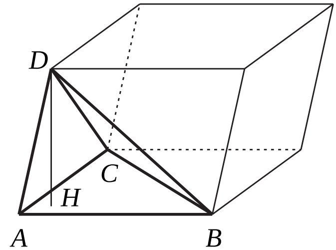


Рис. 2.30

С другой стороны, его объем равен модулю смешанного произведения векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$, а площадь основания — модулю векторного произведения векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$.

Отсюда $|\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}| = |\overline{AB}\times\overline{AC}|\cdot H$, или

$$H = \frac{|\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}|}{|\overline{AB}\times\overline{AC}|}.$$

Находим векторы

$$\overline{AB} = \{3,1,-2\},\quad \overline{AC} = \{-4,0,3\},\quad \overline{AD} = \{1,5,-1\}.$$

Вычисляем векторное произведение и его модуль

$$\overline{AB}\times\overline{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ -4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3\mathbf{i}-\mathbf{j}+4\mathbf{k};\quad |\overline{AB}\times\overline{AC}| = \sqrt{26}.$$

Для вычисления смешанного произведения нет необходимости вычислять еще один определитель, проще найденное векторное произведение скалярно умножить на вектор $\overline{AD}$

$$(\overline{AB}\times\overline{AC})\cdot\overline{AD} = (3\mathbf{i}-\mathbf{j}+4\mathbf{k})(\mathbf{i}+5\mathbf{j}-\mathbf{k}) = -6.$$

Таким образом,

$$H = \frac{|\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}|}{|\overline{AB}\times\overline{AC}|} = \frac{6}{\sqrt{26}}.$$

Глава 4

Аналитическая геометрия

§ 4.1. Уравнение линии на плоскости. Полярная система координат. Уравнение поверхности и линии в пространстве

Пусть на плоскости задана декартова прямоугольная система координат. Если указано правило, по которому каждой точке $M(x,y)$ плоскости (или какой-нибудь части плоскости) сопоставляется некоторое число z, то говорят, что на плоскости (или на части плоскости) задана функция двух переменных $z = f(x,y)$.

Предположим, что на плоскости задана линия L. Уравнение $F(x,y) = 0$ называется *уравнением линии* L (в заданной системе координат), если этому уравнению удовлетворяют координаты x и y любой точки, лежащей на линии L, и не удовлетворяют координаты x и y любой точки, не лежащей на линии L.

Саму линию L называют *геометрическим местом точек*, координаты которых удовлетворяют уравнению $F(x,y) = 0$.

В дальнейшем вместо выражения «дано уравнение линии $F(x,y) = 0$» кратко будем говорить: «дана линия $F(x,y) = 0$».

Для аналитического представления линии L часто бывает удобно выражать координаты x и y точек этой линии при помощи третьей вспомогательной переменной (или параметра) t

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases}$$

Если из этих равенств можно исключить параметр t, то получим уравнение линии в виде $F(x,y) = 0$. Например, уравнение окружности радиуса R с центром в начале координат имеет вид: $x^2 + y^2 = R^2$.

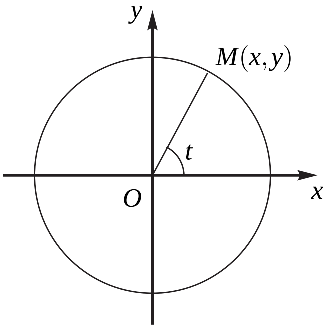


Рис. 3.1

Пусть $M(x,y)$ — произвольная точка на этой окружности (рис. 3.1). Если ввести параметр t — угол между радиус-вектором $\overline{OM}$ и положительной полуосью Ox, то параметрические уравнения окружности имеют вид

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t. \end{cases}$$

Параметр t может принимать любые значения, но для того чтобы точка M один раз обошла окружность, следует ограничить область изменения параметра t: $0 \leqslant t < 2\pi$. Отметим, что для исключения параметра t из уравнений $x = R\cos t$, $y = R\sin t$ достаточно возвести в квадрат и сложить эти уравнения

$$x^2 + y^2 = R^2\cos^2 t + R^2\sin^2 t = R^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = R^2.$$

Получили уравнение окружности: $x^2 + y^2 = R^2$.

Вид уравнения линии зависит не только от вида самой линии, но и от выбора системы координат. Уравнение линии меняется как при переходе от одной декартовой системы координат к другой, так и при переходе от декартовых к каким-нибудь другим координатам, в отличие от изображения линии.

4.1.1. Полярная система координат

В математике и ее приложениях часто применяется *полярная система координат.*

Полярная система координат определяется заданием:

1) некоторой точки O, называемой *полюсом*,

2) луча OA, исходящего из этой точки, называемого *полярной осью* и

3) *масштаба* (единицы длины) на этой оси.

Полярными координатами точки M называются два числа $\rho = OM$ — расстояние от точки M до полюса O и $\varphi = \widehat{AOM}$ (рис.3.2). Число ρ называется *полярным радиусом*, число φ — *полярным углом* точки M. Угол φ при этом следует понимать так, как принято в тригонометрии: углы, отсчитываемые от полярной оси против часовой стрелки, считаются положительными, а углы,

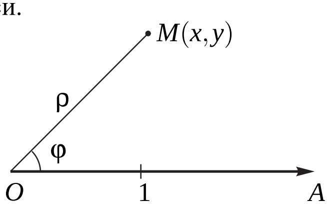


Рис. 3.2

отсчитываемые по часовой стрелке — отрицательными. Полярный угол φ имеет бесконечно много возможных значений для заданной точки M (они отличаются друг от друга на полные обороты $\pm 2\pi n$, где n — натуральное число).

Точку M с полярными координатами ρ и φ обозначают $M(\rho,\varphi)$. Для точки M, совпадающей с полюсом, полярный угол не определён, полярный радиус полюса равен нулю.

Для того чтобы соответствие между точками плоскости, отличными от полюса, и парами чисел (ρ,φ) было взаимно однозначным, обычно принимают, что ρ и φ изменяются в следующих границах:

$$0 \leqslant \rho < +\infty, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi.$$

В случае одновременного рассмотрения декартовой и полярной систем координат обычно полюс совмещают с началом декартовой системы координат, а полярную ось — с положительной полуосью абсцисс (рис. 3.3). Пусть точка M имеет декартовы координаты x и y и полярные координаты ρ и φ.

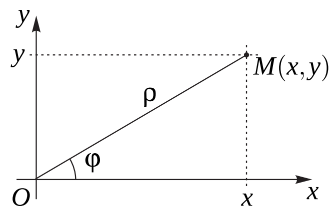


Рис. 3.3

Очевидно,

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases} \tag{4.1.1}$$

Если уравнение линии L в декартовой системе координат имеет вид $F(x,y) = 0$, то для получения уравнения этой линии в полярной системе координат достаточно заменить x и y по формулам (4.1.1). Например, уравнение окружности $x^2 + y^2 = R^2$ в полярной системе имеет вид $(\rho\cos\varphi)^2 + (\rho\sin\varphi)^2 = R^2$ или $\rho = R$, что, впрочем, очевидно и без вычислений.

Из рис. 3.3 видно, что

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}. \tag{4.1.2}$$

По этим формулам можно перейти от полярного уравнения линии к ее декартовому уравнению. Пусть, например, линия в полярной системе координат имеет вид $\rho = \dfrac{1}{1+\sin\varphi}$. Отсюда $\rho + \rho\sin\varphi = 1$, или $\sqrt{x^2+y^2} + y = 1$. Перенося y вправо, возведя в квадрат и упростив, получим $y = -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{2}$. Это — парабола.

4.1.2. Уравнение поверхности в пространстве. Цилиндрические поверхности

Пусть задана декартова прямоугольная система координат $Oxyz$ в пространстве и некоторая поверхность S. Говорят, что уравнение $F(x,y,z)=0$ является уравнением поверхности S, если координаты любой точки $M(x,yz)$, лежащей на поверхности S, удовлетворяют этому уравнению и не удовлетворяют координаты ни одной точки, не лежащей на данной поверхности.

Пусть, например, S — сфера радиуса R с центром в точке $M_0(a,b,c)$. Все точки сферы одинаково удалены от центра, значит, произвольная точка $M(x,y,z)$ лежит на сфере S тогда и только тогда, когда $|\overline{M_0M}|=R$. Отсюда $|\overline{M_0M}|^2=R^2$ и, значит, уравнение такой сферы имеет вид:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

Отметим, что в уравнении поверхности $F(x,y,z)=0$ не обязательно присутствуют все три переменные x, y и z; требуется лишь, чтобы координаты точек поверхности обращали уравнение поверхности в верное числовое равенство. Рассмотрим, например, уравнение $F(x,y)=0$ и пусть оно определяет кривую L на плоскости Oxy.

Если $M_0(x_0,y_0)$ — точка на этой кривой, т. е. $F(x_0,y_0)=0$, то все точки $M(x_0,y_0,z)$, где z — произвольно, также удовлетворяют уравнению $F(x,y)=0$. Но точки $M(x_0,y_0,z)$ с двумя фиксированными первыми координатами, очевидно, лежат на прямой, проходящей через $M_0(x_0,y_0)$ параллельно оси Oz (рис. 3.4).

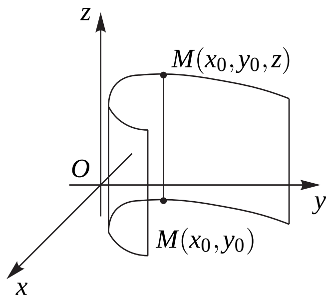


Рис. 3.4

Следовательно, поверхность заданная уравнением $F(x,y)=0$ может быть получена движением прямой, параллельной оси Oz, вдоль кривой L. Аналогично выглядят поверхности, заданные уравнениями $F(x,z)=0$ и $F(y,z)=0$.

Такие поверхности называются *цилиндрическими* и кривая L называется *направляющей цилиндра*.

4.1.3. Уравнение линии в пространстве

Линию в пространстве можно рассматривать как пересечение двух поверхностей. Если $F_1(x,y,z)=0$ и $F_2(x,y,z)=0$ уравнения этих поверхностей, то системе уравнений

$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0, \end{cases}$$

должны удовлетворять точки, лежащие как на одной, так и на другой поверхности, т. е. точки, лежащие на линии L их пересечения.

Как и для случая плоской линии, возможно параметрическое задание линии L в пространстве. При этом координаты x, y и z любой точки линии L задаются как функции некоторого параметра t

$$\begin{cases} x=x(t); \\ y=y(t); \\ z=z(t). \end{cases}$$

Например, уравнения $x=R\cos t$, $y=R\sin t$, $z=\dfrac{a}{2\pi}t$ задают *винтовую линию*, лежащую на цилиндре $x^2+y^2=R^2$ и имеющую *шаг винта*, равный a. Рекомендуем читателю построить эту линию.

§ 4.2. Прямая на плоскости

4.2.1. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Касательная и нормаль к кривой

Из школьного курса математики известно уравнение прямой, разрешенное относительно ординаты y

$$y=kx+b. \tag{4.2.1}$$

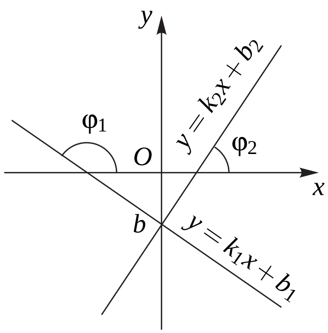


Рис. 3.5

Параметр k характеризует направление прямой и называется *угловым коэффициентом.* В случае прямоугольной декартовой системы координат угловой коэффициент $k=\operatorname{tg}\varphi$, где φ — угол, образованный прямой с положительным направлением оси Ox. Свободный член b в уравнении (4.2.1) равен величине отрезка, отсекаемого прямой на оси ординат, считая от начала координат (рис. 3.5).

Используя свойства тангенса, получаем, что две прямые, заданные уравнениями $L_1: y=k_1x+b_1$ и $L_2: y_2=k_2x+b_2$:

1) параллельны, если их угловые коэффициенты равны, т. е. $k_1=k_2$;

2) перпендикулярны, если $1+k_1k_2=0$ или $k_2=-\dfrac{1}{k_1}$.

В самом деле, докажем, например, утверждение 2. Если $L_1 \perp L_2$, то $\varphi_2-\varphi_1=\dfrac{\pi}{2}$. Отсюда

$$\operatorname{tg}\varphi_2=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\varphi_1\right)=-\operatorname{ctg}\varphi_1=-\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi_1} \Rightarrow k_2=-\frac{1}{k_1}.$$

Прямая, проходящая через точку $M_0(x_0,y_0)$ и имеющая угловой коэффициент k, изображается уравнением

$$y-y_0=k(x-x_0). \tag{4.2.2}$$

Действительно, так как прямая проходит через точку $M_0(x_0,y_0)$, то координаты этой точки удовлетворяют уравнению (4.2.1): $y_0=kx_0+b$. Вычитая это равенство из уравнения (4.2.1), получим уравнение (4.2.2).

Уравнение (4.2.2) удобно использовать для получения уравнения касательной к графику функции $y=f(x)$ в заданной точке $M_0(x_0,y_0)$, лежащей на кривой (рис. 3.6).

Из геометрического смысла производной $f'(x_0)$ — это именно тангенс угла наклона касательной в точке M_0. Отсюда получаем *уравнение касательной*:

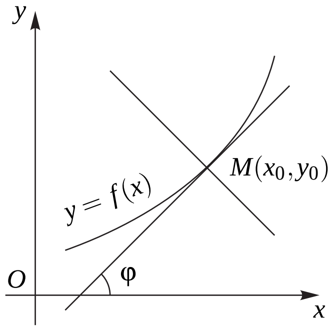


Рис. 3.6

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0). \tag{4.2.3}$$

Нормалью к кривой называется прямая, проходящая через точку $M_0(x_0,y_0)$, перпендикулярно касательной. Если $k=f'(x_0)$ — угловой коэффициент касательной, то угловой коэффициент нормали равен $-\dfrac{1}{k}=-\dfrac{1}{f'(x_0)}$. Следовательно, уравнение нормали имеет вид

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0). \tag{4.2.4}$$

4.2.2. Общее и каноническое уравнения прямой

Если прямая перпендикулярна оси Ox, то её невозможно задать уравнением $y=kx+b$, так как $\operatorname{tg}90^\circ$ не существует. Такие прямые задаются уравнением $x=a$, где a — константа. Но при решении задачи зачастую (например, найти уравнение высоты в некотором треугольнике с заданными вершинами) заранее не известен угол наклона прямой к оси Ox и мы будем искать уравнение прямой в виде $y = kx + b$, тогда как такого уравнения в данном случае может не существовать.

Как можно задать прямую на плоскости? Прямая L однозначно определяется заданием какой-либо точки $M_0(x_0, y_0)$, через которую она проходит, и направлением. Направление можно задать вектором, который:

А) перпендикулярен данной прямой (рис.36);

В) параллелен данной прямой (рис.37).

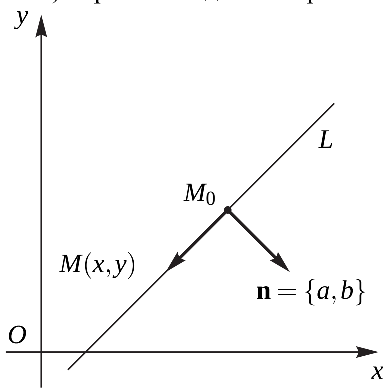


Рис. 3.7

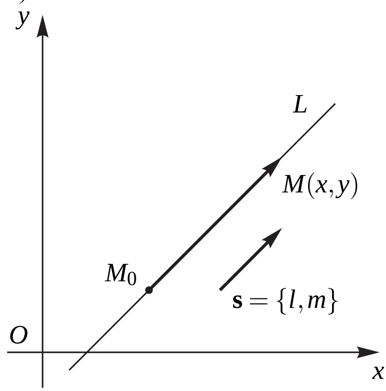


Рис. 3.8

Получим уравнения прямых в каждом из этих случаев.

А. *Общее уравнение прямой на плоскости.*

Возьмем произвольную точку $M(x,y)$ на плоскости. Очевидно, что $M \in L$ тогда и только тогда, когда $\overline{M_0M} \perp \mathbf{n}$. Используя условие ортогональности двух векторов (равенство нулю их скалярного произведения), будем иметь $\overline{M_0M} \cdot \mathbf{n} = 0$. Но $\overline{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0\}$ и $\mathbf{n} = \{a, b\}$. Следовательно, уравнение прямой имеет вид

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0. \tag{4.2.5}$$

Вектор $\mathbf{n} = \{a, b\}$ называется *нормальным вектором* или *вектором нормали* к прямой. Уравнение (4.2.5) — это уравнение прямой, проходящей через заданную точку с заданным вектором нормали.

Раскрывая в уравнении (4.2.5) скобки и обозначая

$$-ax_0 - by_0 = c,$$

это уравнение можно записать в виде

$$ax + by + c = 0. \tag{4.2.6}$$

Уравнение (4.2.6) называется *общим уравнением прямой.*

При решении задач просто необходимо помнить, что в общем уравнении прямой коэффициенты при переменных x и y задают вектор нормали, т. е. вектор, перпендикулярный этой прямой. Например, если прямая задана уравнением $2x-3y=4$, то вектор $\mathbf{n}=\{2,-3\}$ перпендикулярен данной прямой.

Пример 4.2.1. *Даны вершины треугольника* $A(-2,1)$, $B(1,3)$ *и* $C(-3,-2)$. *Написать уравнение высоты, опущенной из вершины* A *на сторону* BC.

Решение. Высота перпендикулярна в основанию. Значит нормалью к искомой прямой может служить вектор $\overline{BC}=\{-4,-5\}$. Используя уравнение (4.2.5), получаем

$$-4(x+2)-5(y-1)=0.$$

Упрощая, получаем уравнение высоты

$$4x+5y+3=0.$$

Пример 4.2.2. *При каком значении параметра* a *прямые* $3ax-8y+13=0$ *и* $(a+1)x-2ay-21=0$ *параллельны?*

Решение. Прямые параллельны, если их нормали $\mathbf{n}_1=\{3a,-8\}$ и $\mathbf{n}_2=\{a+1,-2a\}$ параллельны. Используя условие (3.2.7) коллинеарности двух векторов, получаем

$$\frac{3a}{a+1}=\frac{-8}{-2a}.$$

Отсюда $3a^2-4a-4=0$. Решая это уравнение, получим $a_1=2$ и $a_2=-\dfrac{2}{3}$.

Пример 4.2.3. *При каком значении параметра* a *прямые* $(3a+2)x+(1-4a)y+8=0$ *и* $2x-3y+7=0$ *будут перпендикулярны друг другу?*

Решение. Прямые перпендикулярны, если их нормали $\mathbf{n}_1=\{3a+2,1-4a\}$ и $\mathbf{n}_2=\{2,-3\}$ будут также перпендикулярны, значит, скалярное произведение $\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2=0$. Отсюда

$$2(3a+2)-3(1-4a)=0 \quad \text{или} \quad a=-\frac{1}{6}.$$

B. *Каноническое уравнение прямой на плоскости.*

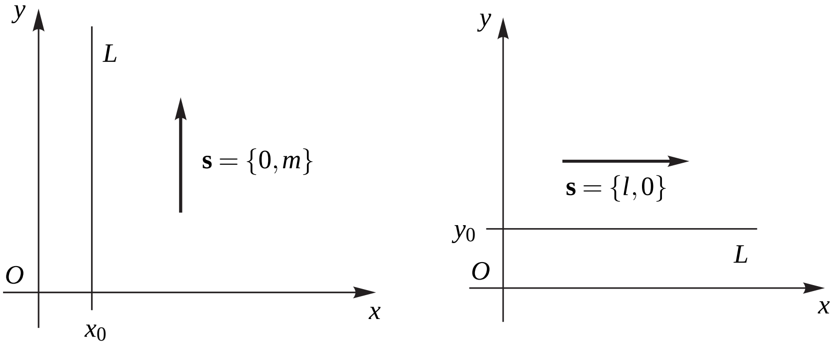
Получим уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0)$ параллельно вектору $\mathbf{s}=\{l,m\}$ (рис. 3.8). Возьмем произвольную точку $M(x,y)$ на плоскости. Очевидно, что точка $M\in L$ тогда и только тогда, когда векторы $\overline{M_0M}$ и $\mathbf{s}$ коллинеарны. Используя условие (3.2.7) коллинеарности двух векторов, будем иметь

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}. \qquad (4.2.7)$$

Уравнение (4.2.7) называется *каноническим уравнением прямой на плоскости.* Вектор $\mathbf{s}=\{l,m\}$ называется *направляющим вектором* прямой.

Итак, в каноническое уравнение прямой входят координаты вектора ей параллельного (направляющего вектора прямой). Например, если прямая задана уравнением $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{-4}$, то эта прямая проходит через точку $M_0(1,-3)$ параллельно вектору $\mathbf{s}=\{2,-4\}$.

Заметим, что в уравнении (4.2.7) один из знаменателей l или m может оказаться равным нулю (оба эти числа быть равными нулю не могут, так как вектор $\mathbf{s}=\{l,m\}$ ненулевой). Договоримся всякую пропорцию $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ понимать как равенство $ad=bc$. Иначе говоря, равенство нулю знаменателя — это обращение в нуль соответствующего числителя (рис. 3.9).



$$\frac{x-x_0}{0}=\frac{y-y_0}{l}\Longrightarrow x=x_0 \qquad\qquad \frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{0}\Longrightarrow y=y_0$$

Рис. 3.9

При решении задач следует помнить, что если уравнение прямой записано в канонической форме (4.2.7), то числа, стоящие в знаменателях, задают направляющий вектор прямой.

Пример 4.2.4. *Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(3,-2)$ перпендикулярно прямой $4x-5y+1=0$.*

Решение. Направляющим вектором искомой прямой может служить вектор нормали $\mathbf{n}=\{4,-5\}$ данной прямой: $\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y+2}{-5}$ — искомое уравнение.

4.2.3. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки. Параметрические уравнения прямой

Пусть даны две точки $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$ и требуется составить уравнение прямой, проходящей через них.

В качестве направляющего вектора этой прямой можно взять вектор $\overline{M_1M_2} = \{x_2-x_1, y_2-y_1\}$. Используя (4.2.7), получим

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \tag{4.2.8}$$

Это — уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.

Параметрические уравнения прямой легко получаются из канонического уравнения (4.2.7), если приравнять обе дроби в этом уравнении к параметру t:

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = t.$$

Отсюда

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt. \end{cases} \tag{4.2.9}$$

Если параметр t изменять от $-\infty$ до $+\infty$, то найденная из системы (4.2.9) пара чисел (x,y) будет определять точку $M(x,y)$, пробегающую всю прямую.

Пример 4.2.5. *В треугольнике с вершинами $A_1(-1,2)$, $A_2(2,6)$ и $A_3(4,-10)$ составить уравнения медианы A_1M, высоты A_1H и биссектрисы A_1B.*

Решение. 1) A_1M — медиана, значит, точка M делит отрезок A_2A_3 пополам. По формулам (3.3.13) имеем $x_M = \dfrac{2+4}{2} = 3$, $y_M = \dfrac{6-10}{2} = -2$. Итак, точка $M(3,-2)$ найдена. Используя (4.2.8), запишем уравнение медианы $A_1M: \dfrac{x+1}{3+1} = \dfrac{y-2}{-2-2}$. Отсюда, упрощая, $x+y-1=0$ — искомое уравнение медианы.

2) Высота A_1H перпендикулярна основанию A_2A_3, значит, нормальным вектором к этой высоте может служить вектор $\overline{A_2A_3} = \{2,-16\}$. Используя (4.2.5), получаем $2(x+1)-16(y-2) = 0$. Отсюда $x-8y+17=0$ — уравнение искомой высоты.

3) Для нахождения уравнения биссектрисы A_1B достаточно найти направляющий вектор этой прямой, в качестве которого можно взять $\mathbf{s} = \overline{A_1A_2^\circ} + \overline{A_1A_3^\circ}$ (см. пример 3.1.4), где $\overline{A_1A_2^\circ} = \dfrac{\overline{A_1A_2}}{|\overline{A_1A_2}|}$ — орт вектора $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_3^\circ} = \dfrac{\overline{A_1A_3}}{|\overline{A_1A_3}|}$ — орт вектора $\overline{A_1A_3}$.

Найдем эти орты:

$$\overline{A_1A_2} = \{3, 4\}, \quad |\overline{A_1A_2}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5, \quad \overline{A_1A_2^\circ} = \left\{\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right\};$$

$$\overline{A_1A_3} = \{5, -12\}, \quad |\overline{A_1A_3}| = 13, \quad \overline{A_1A_3^\circ} = \left\{\frac{5}{13}, -\frac{12}{13}\right\}.$$

Следовательно, направляющий вектор биссектрисы равен

$$\mathbf{s} = \left\{\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right\} + \left\{\frac{5}{13}, -\frac{12}{13}\right\} = \left\{\frac{64}{65}, -\frac{8}{65}\right\}.$$

Заметим, впрочем, что длина направляющего вектора не имеет значения, поэтому можно взять вектор $\mathbf{s}_1 = \dfrac{65}{8}\mathbf{s} = \{8, -1\}$ в качестве направляющего. Но это лишь упрощение промежуточных вычислений и не более того. Используя формулу (4.2.7), получаем уравнение искомой биссектрисы A_1B: $\dfrac{x+1}{8} = \dfrac{y-2}{-1}$. Или $x + 8y - 15 = 0$.

Пример 4.2.6. *Найти расстояние точки* $A(4, -2)$ *от прямой* $8x - 15y - 11 = 0$.

Решение. Найдем уравнение прямой, проходящей через точку A перпендикулярно данной прямой (см. пример 4.2.4): $\dfrac{x-4}{8} = \dfrac{y+2}{-15}$ или $15x + 8y - 44 = 0$. Решая совместно уравнения обеих прямых,

$$\begin{cases} 8x - 15y - 11 = 0, \\ 15x + 8y - 44 = 0. \end{cases}$$

находим точку $B(\frac{44}{17}, \frac{11}{17})$ их пересечения.

Расстояние от точки A до прямой находим по формуле (3.3.10)

$$d = AB = \sqrt{\left(4 - \frac{44}{17}\right)^2 + \left(-2 - \frac{11}{17}\right)^2} = 3.$$

Отметим, что эту задачу можно решать векторным способом. Для этого берем на прямой две произвольные точки M_1 и M_2 (рис. 3.10) Их можно найти, если в уравнении прямой $8x-15y-11=0$ придать переменной y два различных значения и получить соответствующие значения переменной x.

И тогда искомое расстояние равно высоте AB в треугольнике AM_1M_2. Следовательно(см. пример 3.5.4),

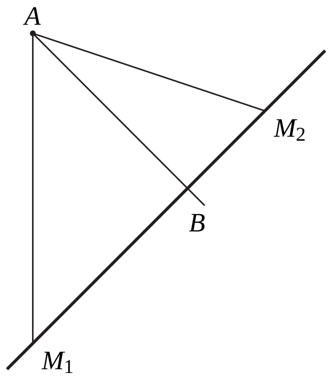


Рис. 3.10

$$AB = \frac{|\overline{AM_1}\times\overline{AM_2}|}{|\overline{M_1M_2}|}.$$

Наконец, нетрудно доказать, что расстояние точки $A(x_0,y_0)$ от прямой $ax+by+c=0$ может быть найдено по формуле

$$d = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}. \tag{4.2.10}$$

По этой формуле решение получается совсем коротким. Но вопрос: стоит ли искать или запоминать лишнюю формулу для решения весьма частной задачи? Во многих учебниках кроме выведенных нами уравнений прямой (с угловым коэффициентом, общего, канонического, параметрических, через две точки), приводятся и другие уравнения (в отрезках, нормальное, пучка прямых), которые позволяют существенно упростить решение конкретных задач. Но мы вопросы оптимальности оставим в стороне.

4.2.4. Угол между двумя прямыми. Условие перпендикулярности и параллельности прямых

Пусть даны две прямые $L_1 : a_1x+b_1y+c_1=0$ и $L_2 : a_2x+b_2y+c_2=0$. Очевидно, что угол между прямыми совпадает с углом между их нормалями $\mathbf{n}_1=\{a_1,b_1\}$ и $\mathbf{n}_2=\{a_2,b_2\}$. Следовательно, используя формулу для вычисления скалярного произведения в декартовых координатах, получаем

$$\cos(\widehat{L_1,L_2}) = \cos(\widehat{\mathbf{n}_1,\mathbf{n}_2}) = \frac{\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|} =$$

$$= \frac{a_1a_2+b_1b_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2}}. \tag{4.2.11}$$

Прямые перпендикулярны, если $\widehat{(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)} = \frac{\pi}{2}$ т. е. $\cos\widehat{(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)} = 0$. Отсюда получаем условие перпендикулярности двух прямых

$$L_1 \perp L_2 \iff a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0. \qquad (4.2.12)$$

Прямые параллельны,если их нормали коллинеарны. Отсюда получаем условие параллельности прямых

$$L_1 \parallel L_2 \iff \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}. \qquad (4.2.13)$$

Пусть прямые заданы каноническими уравнениями

$$L_1 : \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1}, \quad L_2 : \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2}.$$

Угол между этими прямыми, очевидно, совпадает с углом между направляющими векторами $\mathbf{s}_1 = \{l_1, m_1\}$ и $\mathbf{s}_2 = \{l_2, m_2\}$. Значит, угол между двумя прямыми, заданными каноническими уравнениями, находится по формуле

$$\cos\widehat{(L_1, L_2)} = \cos\widehat{(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)} = \frac{\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2}{|\mathbf{s}_1||\mathbf{s}_2|} =$$

$$= \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2}}. \qquad (4.2.14)$$

Условие перпендикулярности прямых

$$L_1 \perp L_2 \iff l_1 l_2 + m_1 m_2 = 0. \qquad (4.2.15)$$

Условие параллельности прямых

$$L_1 \parallel L_2 \iff \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2}. \qquad (4.2.16)$$

В заключение еще раз заметим, что применение методов векторной алгебры эффективно при решении задач о прямых на плоскости. При этом обязательно следует помнить, что в общем уравнении прямой $ax + by + c = 0$ вектор $\mathbf{n} = \{a, b\}$ это вектор нормали к прямой, а в каноническом уравнении L: $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}$ вектор $\mathbf{s} = \{l, m\}$ — это направляющий вектор прямой. И тогда нет никакой необходимости запоминать множество приведенных выше формул; все они (как и большинство векторных соотношений в механике, физике, технических дисциплинах) это последовательное и сознательное применение свойств векторных операций.

§ 4.3. Плоскость

4.3.1. Общее уравнение плоскости

Плоскость P однозначно определяется заданием какой-либо точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$, через которую она проходит и вектором $\mathbf{n}=\{A,B,C\}\neq\mathbf{0}$, перпендикулярным этой плоскости (рис. 3.11). Вектор $\mathbf{n}$ называется *вектором нормали* (или *нормальным вектором)* к плоскости.

Возьмем произвольную точку $M(x,y,z)$ в пространстве. Очевидно, что точка M лежит на плоскости P тогда и только тогда, когда вектор $\overline{M_0M}\perp\mathbf{n}$, т. е. скалярное произведение $\overline{M_0M}\cdot\mathbf{n}=0$.

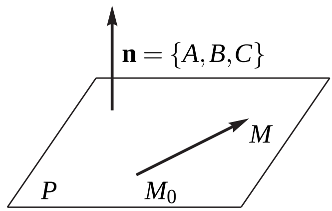


Рис. 3.11

Так как $\overline{M_0M}=\{x-x_0,y-y_0,z-z_0\}$, то предыдущее равенство равносильно уравнению
$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \qquad (4.3.1)$$

Это уравнение определяет плоскость P, проходящую через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и перпендикулярную вектору $\mathbf{n}=\{A,B,C\}$.

Раскрывая в уравнении (4.3.1) скобки и обозначая
$$-Ax_0-By_0-Cz_0=D$$
получаем
$$Ax+By+Cz+D=0. \qquad (4.3.2)$$
Уравнение (4.3.2) называется *общим уравнением плоскости*.

Итак, всякая плоскость задается в декартовой прямоугольной системе координат линейным уравнением (4.3.2). Легко показать и обратное: всякое линейное уравнение $Ax+By+Cz+D=0$ задает некоторую плоскость.

В самом деле, пусть x_0, y_0, z_0 — какое-либо решение уравнения (4.3.2). Тогда, подставляя эти числа в уравнение, будем иметь $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$. Вычитая это равенство из уравнения (4.3.2), получим
$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$
Это означает, что вектор $\overline{M_0M}=\{x-x_0,y-y_0,z-z_0\}$ ортогонален вектору $\mathbf{n}=\{A,B,C\}$. Значит, все точки $M(x,y,z)$ плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ перпендикулярно вектору $\mathbf{n}$ (и только они), удовлетворяют уравнению (4.3.2).

При решении задач важно помнить, что числа A, B и C, стоящие при переменных x, y и z — это координаты вектора нормали — вектора, перпендикулярного плоскости.

4.3.2. Неполные уравнения плоскости

Если в уравнении (4.3.2) отсутствует свободный член, то плоскость $Ax+By+Cz=0$ проходит через начало координат, так как координаты точки $O(0,0,0)$ удовлетворяют этому уравнению.

Так как вектор $\mathbf{n}=\{A,B,C\}$ ненулевой, то хотя бы одно из чисел A, B или C отлично от нуля. Пусть в уравнении (4.3.2) отсутствует член с одной из координат, например уравнение имеет вид $Ax+By+D=0$. Нормальным вектором к такой плоскости будет вектор $\mathbf{n}=\{A,B,0\}$. Он имеет проекцию на ось Oz, равную нулю, то есть ортогонален этой оси. А это означает, что сама плоскость параллельна этой оси. Аналогично, плоскость $Ax+Cz+D=0$ параллельна оси Oy и плоскость $By+Cz+D=0$ параллельна оси Ox. Впрочем, всё сказанное следует из п 4.1.3: уравнение $Ax+By+D=0$ можно рассматривать как уравнение цилиндрической поверхности, направляющей которой является прямая $Ax+By+D=0$.

Пусть в уравнении (4.3.2) отсутствуют члены с двумя координатами, например, уравнение имеет вид $Ax+D=0$. Это означает, что вектор $\mathbf{n}=\{A,B,C\}$ ортогонален как оси Oy, так и оси Oz, то есть ортогонален координатной плоскости Oyz. Следовательно, сама плоскость $Ax+D=0$ параллельна этой координатной плоскости, т. е. перпендикулярна оси Ox. Уравнение этой плоскости можно записать в виде $x=-\dfrac{D}{A}$. Аналогично, плоскости $By+D=0$ и $Cz+D=0$ перпендикулярны осям Oy и Oz соответственно.

Пример 4.3.1. *Даны две точки* $A(1,3,-2)$ *и* $B(3,-5,4)$. *Через точку* A *провести плоскость, перпендикулярную отрезку* AB.

Решение. В качестве нормали к искомой плоскости можно взять вектор $\mathbf{n}=\overline{AB}=\{2,-8,6\}$. Используя уравнение (4.3.1), получаем $2(x-1)-8(y-3)+6(z+2)=0$, или $x-4y+3z+17=0$ — искомая плоскость.

Пример 4.3.2. *Составить уравнение плоскости, проходящей через точку* $A(-2,7,3)$ *параллельно плоскости* $x-4y+5z-1=0$.

Решение. В качестве вектора нормали к искомой плоскости можно взять вектор нормали $\mathbf{n}=\{1,-4,5\}$ к данной плоскости. Значит, искомая плоскость имеет вид $1(x+2)-4(y-7)+5(z-3)=0$. Или $x-4y+5z+15=0$.

Пример 4.3.3. *Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки* $A(1,1,0)$, $B(3,0,5)$ *и* $C(4,1,2)$.

Решение. В качестве вектора нормали можно взять вектор $\mathbf{n} = \overline{AB} \times \overline{AC}$ по свойству векторного произведения он ортогонален векторам $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, а значит, и искомой плоскости.

$$\mathbf{n} = \{2,-1,5\} \times \{3,0,2\} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2\mathbf{i} + 11\mathbf{j} + 3\mathbf{k}.$$

Из уравнения (4.3.1) получаем $-2(x-1) + 11(y-1) + 3(z-0) = 0$. Или $2x - 11y - 3z + 9 = 0$.

Заметим, что эту задачу можно решить иначе. Если взять точку $M(x,y,z)$ в пространстве, то, очевидно, эта точка будет лежать на искомой плоскости, тогда и только тогда, когда векторы $\overline{AM}$, $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ компланарны, т. е. если их смешанное произведение равно нулю.

$$\overline{AM} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} = \{x-1, y-1, z\} \cdot \{2,-1,5\} \cdot \{3,0,2\} =$$

$$= \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая этот определитель, получим уравнение искомой плоскости $2x - 11y - 3z + 9 = 0$.

4.3.3. Угол между двумя плоскостями. Условие параллельности и перпендикулярности плоскостей

Пусть заданы две плоскости P_1: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и P_2: $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Очевидно, что угол между этими плоскостями совпадает с углом между их нормалями $\mathbf{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ и $\mathbf{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$. Отсюда

$$\cos\left(\widehat{P_1, P_2}\right) = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (4.3.3)$$

Условие параллельности плоскостей

$$P_1 \parallel P_2 \iff \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \quad (4.3.4)$$

Условие перпендикулярности плоскостей

$$P_1 \perp P_2 \iff A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \quad (4.3.5)$$

§ 4.4. Прямая в пространстве

4.4.1. Канонические уравнения прямой в пространстве

Прямая в пространстве может быть определена как линия пересечения двух плоскостей. Координаты точек, лежащих на прямой, должны удовлетворять уравнениям обеих плоскостей, т. е. удовлетворять системе линейных уравнений

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases} \tag{4.4.1}$$

Как и для прямой на плоскости любой ненулевой вектор, параллельный данной прямой, называется *направляющим вектором* этой прямой.

Прямая L может быть определена точкой $M_0(x_0,y_0,z_0)$ через которую она проходит и направляющим вектором $\mathbf{s}=\{l,m,n\}$. Очевидно, что произвольная точка $M(x,y,z)$ лежит на прямой L тогда и только тогда, когда вектор $\overline{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z- = z_0\}$ коллинеарен вектору $\mathbf{s}$. Используя условие коллинеарности векторов, получим

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}. \tag{4.4.2}$$

Эти уравнения называются *каноническими уравнениями прямой в пространстве.*

Двойное равенство (4.4.2) — иной способ записи системы (4.4.1)

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}, \\ \dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}. \end{cases} \tag{4.4.3}$$

Каждое из уравнений этой системы является неполным уравнением плоскости — плоскости, параллельной соответствующей оси координат. Например, уравнение $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}$ можно записать в виде $mx-ly+(-mx_0+ly_0)=0$ — это плоскость с нормалью $\mathbf{n}=\{m,-l,0\}$ параллельна оси Oz. Таким образом, и канонические уравнения (4.4.2) задают прямую в пространстве, как линию пересечения двух плоскостей, но параллельных координатным осям.

Как и для канонического уравнения прямой на плоскости, в уравнениях (4.4.2) одно или два из чисел l, m и n могут быть равными нулю. Это лишь подчеркивает, что направляющий вектор (а значит, и сама прямая) перпендикулярен соответствующей оси координат и нужно приравнять к нулю числитель соответствующей дроби.

4.4.2. Уравнение прямой, проходящей через две точки

Пусть даны две точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и $M_2(x_2,y_2,z_2)$ и требуется написать уравнение прямой, проходящей через эти точки. Очевидно, что в качестве направляющего вектора такой прямой можно взять вектор $\overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$ и из формулы (4.4.2) получаем

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \tag{4.4.4}$$

Это — уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.

Многие задачи на прямую в пространстве решаются проще, если уравнения прямых имеют каноническую форму записи (4.4.2). Поэтому нужно уметь приводить уравнения прямой (4.4.1) к каноническому виду. Это можно сделать, например, следующим образом.

В системе (4.4.1) придать одной из переменных, например z, два различных значения $z = z_1$ и $z = z_2$. Из полученных двух систем найти соответствующие пары чисел (x_1,y_1) и (x_2,y_2) Получим две точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и $M_2(x_2,y_2,z_2)$, лежащие на прямой. По формуле (4.4.4) получим канонические уравнения прямой.

Пример 4.4.1. *Привести к каноническому виду уравнение прямой*

$$\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0, \\ 5x + 4y - z - 7 = 0. \end{cases}$$

Решение. Пусть $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$. Для нахождения y и z имеем две системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - y + 3z - 1 = 0, \\ 5x_1 + 4y - z - 7 = 0. \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x_2 - y + 3z - 1 = 0, \\ 5x_2 + 4y - z - 7 = 0. \end{cases}$$

Решая каждую из этих систем, находим две точки $M_1(0,2,1)$ и $M_2(1,\frac{5}{11},-\frac{2}{11})$. По формуле (4.4.4) получаем

$$\frac{x-0}{1-0} = \frac{y-2}{\frac{5}{11}-2} = \frac{z-1}{-\frac{2}{11}-1}.$$

Упрощая, получаем канонические уравнения искомой прямой

$$\frac{x}{11} = \frac{y-2}{-17} = \frac{z-1}{-13}.$$

4.4.3. Параметрические уравнения прямой в пространстве

Если в канонических уравнениях прямой (4.4.2) все три дроби приравнять к параметру t
$$\frac{x-x_0}{l}=t,\quad \frac{y-y_0}{m}=t,\quad \frac{z-z_0}{n}=t,$$
то получим
$$\begin{cases} x=x_0+lt; \\ y=y_0+mt; \\ z=z_0+nt. \end{cases}$$

Это *параметрические уравнения прямой в пространстве.* Если параметру t придавать значения от $-\infty$ до $+\infty$, то точки $M(x_0+lt, y_0+mt, z_0+nt)$ будут пробегать всю прямую.

Параметрические уравнения прямой удобно использовать для нахождения точки пересечения прямой и плоскости.

Пример 4.4.2. *Найти точку пересечения прямой* $\frac{x-7}{5}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-5}{4}$ *и плоскости* $3x-y+2z-5=0$.

Решение. Перейдём к параметрическим уравнениям прямой $\frac{x-7}{5}=t$, $\frac{y-4}{1}=t$, $\frac{z-5}{4}=t$.

Отсюда $x=7+5t$, $y=4+t$, $z=5+4t$. При некотором значении параметра t точка этой прямой будет лежать на данной плоскости. Подставляя выражения x, y, z через параметр t в уравнение плоскости, получим $t=-1$. При этом значении параметра t находим координаты искомой точки: $x=7+5(-1)=2$, $y=4+(-1)=3$, $z=5+4(-1)=1$. Итак, прямая и плоскость пересекаются в точке $(2,3,1)$.

4.4.4. Угол между двумя прямыми в пространстве. Условия параллельности и перпендикулярности прямых

Пусть заданы две прямые L_1: $\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$ и L_2: $\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$. Очевидно, угол между прямыми равен углу между их направляющими векторами $\mathbf{s}_1 = \{l_1, m_1, n_1\}$ и $\mathbf{s}_2 = \{l_2, m_2, n_2\}$. Отсюда

$$\cos\left(\widehat{L_1, L_2}\right) = \frac{\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2}{|\mathbf{s}_1||\mathbf{s}_2|} =$$

$$= \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}. \quad (4.4.5)$$

Условие параллельности двух прямых имеет вид

$$L_1 \parallel L_2 \iff \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}. \quad (4.4.6)$$

Условие перпендикулярности двух прямых имеет вид

$$L_1 \perp L_2 \iff l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0. \quad (4.4.7)$$

4.4.5. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку перпендикулярно заданной плоскости

В качестве направляющего вектора искомой прямой можно взять нормальный вектор плоскости $\mathbf{n} = \{A, B, C\}$, поэтому уравнение прямой имеет вид

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}.$$

Пример 4.4.3. *Найти точку B, симметричную точке $A(4, -3, 1)$ относительно плоскости $x + 2y - z - 3 = 0$.*

Решение. Точки A и B должны лежать на одной прямой, перпендикулярной плоскости, и одинаково отстоять от этой плоскости. Найдём уравнение прямой, проходящей через точку A и перпендикулярной плоскости

$$\frac{x - 4}{1} = \frac{y + 3}{2} = \frac{z - 1}{-1}.$$

Найдём точку пересечения этой прямой и плоскости: $x = 4 + t$, $y = -3 + 2t$, $z = 1 - t$ подставим в уравнение плоскости $(4 + t) + 2(-3 + 2t) - (1 - t) - 3 = 0$; отсюда $t = 1$. Значит, точка пересечения $C(5, -1, 0)$. Она делит отрезок AB пополам. Но координаты середины отрезка равны полусумме координат крайних точек. Значит,

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_C = \frac{y_A + y_B}{2}, \quad z_C = \frac{z_A + z_B}{2}.$$

Отсюда

$$x_B = 2x_C - x_A = 6,$$

$$y_B = 2y_C - y_A = 1,$$

$$z_B = 2z_C - z_A = -1.$$

Симметричная точка $B(6, 1, -1)$ найдена.

4.4.6. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно заданной прямой

Очевидно, нормальным вектором к искомой плоскости может служить направляющий вектор прямой $\mathbf{s} = \{l, m, n\}$. Применяя формулу (4.3.1), получаем уравнение искомой плоскости

$$l(x - x_0) + m(y - y_0) + n(z - z_0) = 0.$$

Пример 4.4.4. *Найти расстояние точки* $A(7,9,7)$ *от прямой*

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}.$$

Решение. Запишем уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно прямой:

$$4(x-7) + 3(y-3) + 2(z-7) = 0$$

или

$$4x + 3y + 2z - 69 = 0.$$

Найдём точку пересечения прямой и плоскости $B(10,7,4)$. Искомое расстояние от точки A до прямой

$$AB = \sqrt{(10-7)^2 + (7-9)^2 + (4-7)^2} = \sqrt{22}.$$

4.4.7. Угол между прямой и плоскостью. Условие перпендикулярности и параллельности прямой и плоскости

Пусть даны прямая L: $\dfrac{x-x_0}{l} = \dfrac{y-y_0}{m} = \dfrac{z-z_0}{n}$ и плоскость $P: Ax + By + Cz + D = 0$.

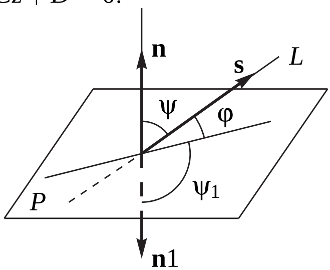


Рис. 3.12

Угол между прямой и плоскостью — это угол между прямой и проекцией прямой на плоскость. Обозначим искомый угол φ. Пусть ψ — угол между нормальным вектором плоскости $\mathbf{n} = \{A, B, C\}$ и направляющим вектором прямой $\mathbf{s} = \{l, m, n\}$, если этот угол острый и ψ_1, если этот угол — тупой (рис. 3.12).

Очевидно, $\varphi = |\dfrac{\pi}{2} - \psi|$. Значит, по формуле приведения

$$\sin\varphi = \sin|\frac{\pi}{2} - \psi| = |\cos\psi|.$$

Но $\cos\psi = \cos(\widehat{\mathbf{n}\mathbf{s}}) = \dfrac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{s}}{|\mathbf{n}||\mathbf{s}|}$.

Получаем формулу для угла между прямой и плоскостью

$$\sin\varphi = \frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}. \tag{4.4.8}$$

Прямая и плоскость перпендикулярны в том и только в том случае, если векторы $\mathbf{n}$ и $\mathbf{s}$ коллинеарны. Отсюда

$$L \perp P \iff \frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}. \tag{4.4.9}$$

Прямая и плоскость параллельны в том и только в том случае, если векторы $\mathbf{n}$ и $\mathbf{s}$ ортогональны, то есть $\mathbf{n}\cdot\mathbf{s} = 0$, или

$$L \parallel P \iff Al+Bm+Cn = 0. \tag{4.4.10}$$

4.4.8. Векторные уравнения прямой и плоскости

Рассмотренные выше уравнения прямых и плоскостей иногда называют уравнениями в координатной форме, так как они связывают координаты точек $M(x,y)$ или $M(x,y,z)$, лежащих на этих прямых и плоскостях. При этом легко заметить внешнюю схожесть или однотипность канонических уравнений прямых на плоскости и в пространстве, параметрических уравнений этих же прямых, общего уравнения прямой на плоскости и общего уравнения плоскости. Это объясняется тем, что при выводе таких уравнений мы использовали одни и те же свойства векторных операций. Например, канонические уравнения прямых выводились из условия коллинеарности прямой и ее направляющего вектора; общее уравнение прямой на плоскости и общее уравнение плоскости — их ортогональность вектору нормали. Можно ожидать, что в векторной форме эти уравнения будут одинаковыми. Векторную форму записи уравнений особенно удобно использовать при рассмотрении многих теоретических вопросов.

Выберем в пространстве произвольную точку O, называемую *полюсом*. Положение точки M в пространстве однозначно определяется вектором $\overline{OM}$, который называется *радиус-вектором* этой точки: при выбранном полюсе O, каждой точке M соответствует единственный вектор $\overline{OM}$, связывающий полюс с этой точкой, и, наоборот — каждому радиус-вектору $\mathbf{r} = \overline{OM}$ соответствует единственная точка М — конец радиус-вектора $\mathbf{r}$. Радиус-вектор точки M будем обозначать $\mathbf{r} = \mathbf{r}(M)$, а радиус-вектор точки M_0 обозначаем $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(M_0)$.

Векторное уравнение — это уравнение, связывающее радиус-вектор $\mathbf{r}$ произвольной точки точки M, радиус-векторы $\mathbf{r}_i$ заданных точек M_i и, возможно, заданные векторы ($\mathbf{a}$, $\mathbf{s}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{N}$ и т. п.).

Пусть в пространстве задана декартова прямоугольная система координат $Oxyz$, причём полюс совпадает с началом координат. Орт оси Ox обозначим $\mathbf{i}$, оси Oy — $\mathbf{j}$, оси Oz — $\mathbf{k}$. Тем самым в пространстве задан декартов прямоугольный базис.

Положение точки в пространстве однозначно определяется ее тремя координатами. Следовательно, чтобы задать точку, нужно задать или все три ее координаты, или задать три уравнения, которые однозначно задавали бы эти координаты. Если задано лишь два уравнения, то, в общем случае, они не могут определить единственную точку в пространстве — им удовлетворяют координаты бесконечного множества точек, лежащих на некоторой линии. Аналогично если задано лишь одно уравнение, то ему удовлетворяют координаты точек, лежащих на некоторой поверхности (опять же, если исключить вырожденные случаи типа $x^2+y^2+z^2=0$ или $x^2+y^2+z^2+1=0$, которые, очевидно, не задают никакой поверхности).

Если задано векторное уравнение, то оно может определять единственную точку или линию или поверхность и в каждом случае вопрос о том, что определяет данное уравнение решается его анализом. Рассмотрим, например, уравнение $\mathbf{r}\cdot\mathbf{a}=0$. По основному геометрическому свойству скалярного произведения ему удовлетворяют все радиус-векторы $\mathbf{r}$, перпендикулярные вектору $\mathbf{a}$. Таким образом, это уравнение на плоскости определяет прямую, проходящую через полюс (ведь радиус-вектор $\mathbf{r}=0$ удовлетворяет данному уравнению), перпендикулярно вектору $\mathbf{a}$, а в пространстве оно определяет плоскость, также проходящую через полюс перпендикулярно вектору $\mathbf{a}$.

Аналогично, уравнение $\mathbf{r}\times\mathbf{a}=0$ определяет геометрическое место точек, радиус-векторы которых параллельны вектору $\mathbf{a}$, т. е. и на плоскости и в пространстве оно задает прямую, проходящую через полюс параллельно вектору $\mathbf{a}$.

Таким образом, используя свойства операций над векторами, можно определить геометрический образ, соответствующий данному векторному уравнению. Важно уметь решать обратную задачу — составлять уравнение данного геометрического места точек.

Пусть символ $M(\mathbf{r})$ (или $\mathbf{r}(M)$) означает, что вектор $\mathbf{r}$ является радиус-вектором точки M.

Пример 4.4.5. *Составить векторное уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(\mathbf{r}_0)$, параллельно неколлинеарным векторам* $\mathbf{p}$ *и* $\mathbf{q}$.

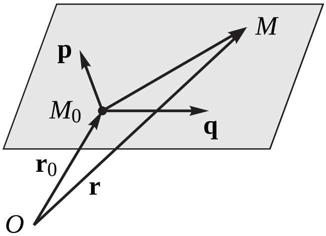


Рис. 3.13

Решение. Возьмем произвольную точку $M(\mathbf{r})$ в пространстве (рис. 3.13). Эта точка лежит на искомой плоскости тогда и только тогда, когда векторы $\overline{M_0M} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$, $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ компланарны, а, значит, их смешанное произведение равно нулю. Итак, искомое уравнение

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = 0.$$

Легко получить векторное параметрическое уравнение данной плоскости. Векторы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ неколлинеарны и, следовательно, образуют базис на искомой плоскости. Разлагая вектор $\overline{M_0M} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$, лежащий на той же плоскости по базису $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$, получим уравнение искомой плоскости

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t_1\mathbf{p} + t_2\mathbf{q}.$$

Здесь t_1 и t_2 — параметры, т. е. произвольные действительные числа.

Аналогичными рассуждениями можно получить следующие векторные уравнения прямых и плоскостей.

L.1) Параметрическое уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(\mathbf{r}_0)$ параллельно вектору $\mathbf{s}$:

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t\mathbf{s}. \tag{4.4.11}$$

L.2) Прямая проходит через точку $M_0(\mathbf{r}_0)$ параллельно вектору $\mathbf{s}$:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{s} = 0. \tag{4.4.12}$$

L.3) Прямая, параллельная вектору $\mathbf{s}$:

$$\mathbf{r} \times \mathbf{s} = \mathbf{m}. \tag{4.4.13}$$

L.4) Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(\mathbf{r}_1)$ и $M_2(\mathbf{r}_2)$:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = 0. \tag{4.4.14}$$

Это уравнение легко преобразуется к виду

$$\mathbf{r} \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2. \tag{4.4.15}$$

И, наконец, это же уравнение в параметрической форме:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1). \tag{4.4.16}$$

L.5) Уравнение прямой на плоскости, проходящей через точку $M_0(\mathbf{r}_0)$, перпендикулярно вектору $\mathbf{n}$:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n} = 0. \tag{4.4.17}$$

Это уравнение можно преобразовать к виду

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} + \lambda = 0, \tag{4.4.18}$$

где λ некоторый скаляр.

Р.1) Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(\mathbf{r}_0)$, перпендикулярно вектору $\mathbf{n}$:

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{n}=0, \tag{4.4.19}$$

или

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}+\lambda=0. \tag{4.4.20}$$

Р.2) Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(\mathbf{r}_0)$, параллельно неколлинеарным векторам $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$:

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}=0. \tag{4.4.21}$$

Р.3) Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(\mathbf{r}_0)$, параллельно неколлинеарным векторам $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$:

$$\mathbf{r}-\mathbf{r}_0=t_1\mathbf{p}+t_2\mathbf{q}. \tag{4.4.22}$$

Р.4) Уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(\mathbf{r}_1)$, $M_2(\mathbf{r}_2)$ и $M_3(\mathbf{r}_3)$:

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)\cdot(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)\cdot(\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1)=0. \tag{4.4.23}$$

Рекомендуем читателю обратить особое внимание на уравнения (4.4.11), (4.4.17), (4.4.19), (4.4.21), (4.4.22) и вывести эти формулы.

§ 4.5. Кривые второго порядка

До сих пор мы рассматривались уравнения линейных объектов — прямых и плоскостей, и это были уравнения первой степени. Пусть на плоскости задана декартова прямоугольная система координат. Рассмотрим общее алгебраическое уравнение второго порядка

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+a_1x+a_2y+a_0=0. \tag{4.5.1}$$

Возможны следующие случаи:

1) уравнению (4.5.1) не удовлетворяет ни одна точка плоскости. Например, если уравнение имеет вид $x^2+y^2+1=0$;

2) этому уравнению удовлетворяет единственная точка. Например, $x^2+y^2=0$;

3) уравнению удовлетворяют точки, лежащие на одной прямой. Например, уравнение $x^2-2xy+y^2=0$ эквивалентно уравнению $(x-y)^2=0$, т. е. $x-y=0$ — а это прямая;

4) уравнению удовлетворяют точки, лежащие на двух прямых. Например, $x^2-2xy+y^2-1=0$ эквивалентно уравнению $(x-y)^2=1$, или $(x-y)=\pm1$, а это — две прямые;

5) уравнению (4.5.1) удовлетворяют точки, лежащие на некоторой кривой (в обыденном понимании этого термина); такую кривую называют *кривой второго порядка*.

Последний случай и будет нас интересовать в этом разделе. Оказывается, таких кривых может быть всего лишь три: *эллипс, гипербола и парабола*.

Возьмем на плоскости вторую декартову прямоугольную систему координат, определяемую началом O' и базисными векторами $\mathbf{i}'$ и $\mathbf{j}'$ (рис. 3.14).

В подробных курсах аналитической геометрии доказывается, что переход от одной системы координат к другой сводится к параллельному переносу вдоль вектора $\overline{OO'}$ и последующему повороту осей на угол φ.

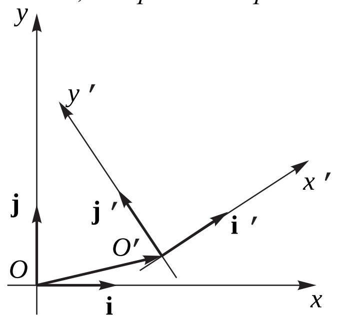


Рис. 3.14

Правда, это будет в том случае, когда базисные векторы направлены так, что кратчайшие повороты от $\mathbf{i}$ к $\mathbf{j}$ и от $\mathbf{i}'$ к $\mathbf{j}'$ совершаются в одном направлении.

Если кратчайшие повороты от $\mathbf{i}$ к $\mathbf{j}$ и от $\mathbf{i}'$ к $\mathbf{j}'$ совершаются в противоположных направлениях (рис. 3.15), то нужно еще изменить направление оси ординат на противоположное. Такое преобразование нельзя свести к параллельному переносу и повороту, не выводящему из плоскости Oxy.

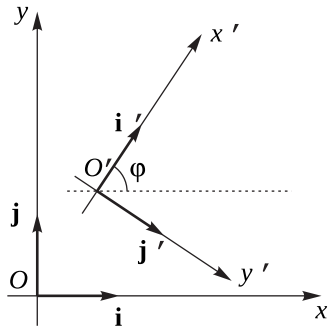


Рис. 3.15

Можно доказать, что при преобразовании системы координат кривая второго порядка останется кривой второго порядка, но уравнение этой кривой изменится.

Рассмотрим, например, уравнение $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0$. Выделяя полные квадраты, запишем это уравнение в виде $(x-2)^2 + (y-$ $-2)^2 = 1$. Это — окружность радиуса $R = 1$ с центром в точке $O'(2,2)$ (рис. 3.16). Если начало координат перенести в точку O', то уравнение принимает более простой вид: $x'^2 + y'^2 = 1$. При параллельном переносе системы координат формулы, связывающие координаты точки M в той и другой системах координат, особенно просты.

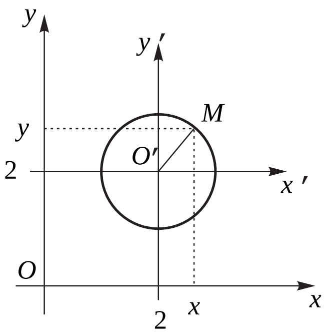


Рис. 3.16

Пусть точка M в системе координат Oxy имеет координаты (x,y), а в системе координат $O'x'y'$ — (x',y'). Тогда (рис. 3.16): $\overline{OM} = \overline{OO'} + \overline{O'M}$. Предположим, что точка O' в системе координат Oxy имеет координаты (x_0,y_0). Отсюда находим векторы $\overline{OO'} = \{x_0,y_0\}$, $\overline{O'M} = \{x',y'\}$ и $\overline{OM} = \{x,y\}$. Следовательно $\{x,y\} = \{x_0,y_0\} + \{x',y'\}$ и получаем формулы, связывающие «старые» координаты (x,y) точки M с её «новыми» координатами (x',y')

$$\begin{cases} x = x_0 + x', \\ y = y_0 + y'. \end{cases}$$

В связи с этим возникают две задачи.

1. Как выбрать систему координат, чтобы уравнение кривой имело простейший, или, как говорят, *канонический вид*?

2. Если кривая второго порядка задана «сложным» уравнением (4.5.1), то как и к какой системе координат перейти, чтобы эта кривая имела каноническое уравнение?

Вторая задача рассматривается ниже в теории приведения квадратичных форм к каноническому виду. Мы же остановимся на первой задаче.

4.5.1. Эллипс

Определение 4.5.1. *Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, для которых сумма расстояний до двух данных точек F_1 и F_2 этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная (и равная $2a$).*

Ясно, что должно выполняться неравенство $2a \geqslant F_1F_2$.

Для вывода канонического уравнения эллипса проведем ось Ox через фокусы F_1 и F_2, а ось Oy перпендикулярно оси Ox через середину отрезка F_1F_2 (рис. 3.17). Если фокусы совпадают, то оси координат проводим через фокус произвольно.

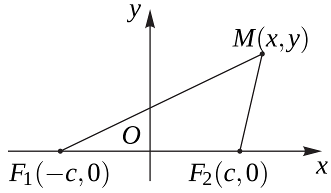


Рис. 3.17

Пусть длина отрезка F_1F_2 равна $2c$. Тогда точки F_1 и F_2 имеют координаты $(-c,0)$ и $(c,0)$ соответственно.

Возьмем точку $M(x,y)$ на плоскости. Она будет лежать на эллипсе тогда и только тогда, когда $MF_1+MF_2=2a$. Используя формулу расстояния между точками (3.3.10), получим

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a. \tag{4.5.2}$$

Это равенство является необходимым и достаточным условием принадлежности точки $M(x,y)$ данному эллипсу.

Перенесем в последнем равенстве один из корней вправо и возведем обе части в квадрат

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2.$$

Упростив это равенство и оставив корень справа,получим

$$cx-a^2=-a\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Снова возводим обе части в квадрат

$$c^2x^2-2a^2cx+a^4=a^2(x^2-2cx+c^2+y^2)$$

или

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=(a^2-c^2)y^2.$$

В любом треугольнике сумма двух его сторон больше третьей стороны. Значит $MF_1+MF_2>F_1F_2$, т. е. $2a>2c$ (рис. 3.17). Отсюда $a^2-c^2>0$. Обозначая $b^2=a^2-c^2$, получаем

$$b^2x^2+a^2y^2=b^2a^2.$$

Разделим обе части этого равенства на b^2a^2:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{4.5.3}$$

где

$$b^2=a^2-c^2. \tag{4.5.4}$$

При возведении в квадрат равенства (4.5.2) могли появиться «лишние корни», то есть такие точки $M(x,y)$, которые удовлетворяют уравнению

(4.5.3), но не удовлетворяют уравнению (4.5.2). Пусть координаты точки $M(x,y)$ удовлетворяют уравнению (4.5.3). Из этого уравнения найдём $y^2 = b^2\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)$ и подставим в уравнение (4.5.2)

$$\sqrt{(x+c)^2+b^2-\frac{b^2x^2}{a^2}}+\sqrt{(x-c)^2+b^2-\frac{b^2x^2}{a^2}}=2a.$$

После несложных преобразований получим

$$\sqrt{(a+\frac{c}{a}\cdot x)^2}+\sqrt{(a-\frac{c}{a}\cdot x)^2}=2a.$$

Из уравнения (4.5.3) очевидно, что $\dfrac{x^2}{a^2}\leqslant 1$, т. е. $|x|\leqslant a$, и так как $c<a$, то $\dfrac{c}{a}<1$. Следовательно, $a+\dfrac{c}{a}x>0$ и $a-\dfrac{c}{a}x>0$. Поэтому равенство (4.5.2) представляет собой верное числовое равенство $2a=2a$, то есть точка $M(x,y)$ с координатами, удовлетворяющими уравнению (4.5.3), лежит на эллипсе.

Уравнение (4.5.3) называется *каноническим уравнением эллипса*.

Числа a и b называются *большой и малой полуосями эллипса* (так как $a^2=b^2+c^2$, то $a>b$, отсюда и термины — большая и малая).

Отметим, что если полуоси равны $a=b=R$, то эллипс представляет собой окружность $x^2+y^2=R^2$ с центром в начале координат.

4.5.2. Эллипс. Исследование формы

Из канонического уравнения эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ получаем:

1) эллипс симметричен относительно осей координат и относительно начала координат.

Действительно, в уравнение эллипса x и y входят в четных степенях, поэтому если точка $M_1(x,y)$ лежит на эллипсе, то точки $M_2(-x,y)$ $M_3(-x,-y)$ и $M_4(x,-y)$ также лежат на на нём. А эти точки обладают указанной симметрией (рис. 3.18);

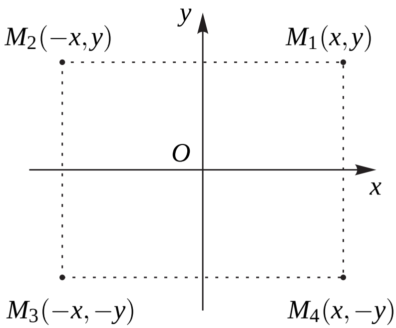


Рис. 3.18

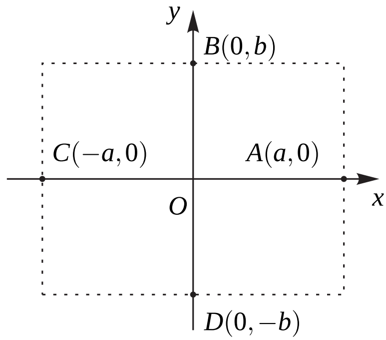


Рис. 3.19

2) эллипс пересекается с осями координат в точках $A(a,0)$, $B(0,b)$, $C(-a,0)$ и $D(0,-b)$.

Действительно, полагая в уравнении эллипса $y=0$, получаем $x^2=a^2$, то есть $x=\pm a$. Аналогично, при $x=0$ имеем $y=\pm b$ (рис. 3.19). Точки A, B, C и D называются вершинами эллипса. Отрезок $CA=2a$ называется большой осью эллипса, $DB=2b$ — малой осью;

3) эллипс содержится внутри прямоугольника $-a\leqslant x\leqslant a$, $-b\leqslant y\leqslant b$ (рис. 3.19).

В самом деле, из канонического уравнения эллипса имеем: $\dfrac{x^2}{a^2}\leqslant 1$ и $\dfrac{y^2}{b^2}\leqslant 1$. Отсюда $x^2\leqslant a^2$ и $y^2\leqslant b^2$, что эквивалентно неравенствам $-a\leqslant x\leqslant a$, $-b\leqslant y\leqslant b$;

4) в силу симметрии эллипса достаточно построить его график для первой четверти плоскости Oxy. В этой четверти $x>0$ и $y>0$. Из канонического уравнения эллипса находим $y=b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}$. Используя производные, можно показать, что при $0<x<a$ первая производная $y'\leqslant 0$ и вторая производная $y''\leqslant 0$. В дифференциальном исчислении будет доказано, что это означает монотонное убывание графика функции $y=b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}$ и что этот график является выпуклой вверх кривой.

На основании свойств 1)–4) строим эллипс (рис. 3.20).

Заметим, что если в уравнении эллипса $b>a$, например, уравнение имеет вид $\dfrac{x^2}{4^2}+\dfrac{y^2}{9^2}=1$, то это означает, что фокусы эллипса располагаются на оси ординат и он «вытянут» вдоль этой оси (рис. 3.21). В самом деле, переобозначая оси координат x и y: $x'=y$, $y'=-x$, получим рассмотренный случай — эллипс с фокусами на оси Ox'.

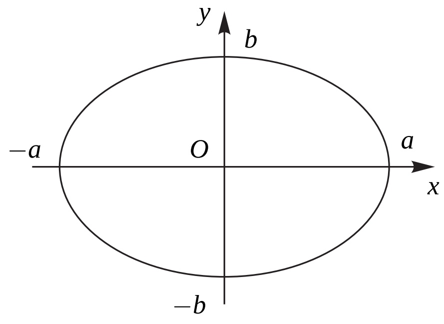


Рис. 3.20

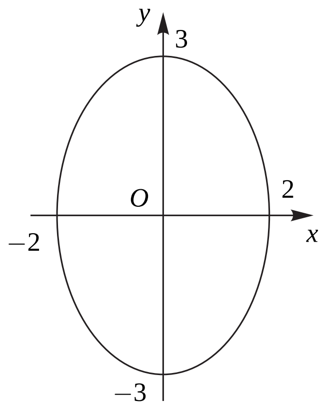


Рис. 3.21

Пример 4.5.1. *Составить каноническое уравнение эллипса, если:*
1) его полуоси равны 4 *и* 2*;*
2) расстояние между фокусами равно 6 *и большая полуось равна* 5.

Решение. 1) по условию $a = 4$ и $b = 2$. Из уравнения (4.5.3) имеем $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ — искомое уравнение эллипса;

2) дано $2c = 6$ и $a = 5$. По формуле (4.5.4) находим $b^2 = a^2 - c^2 = 5^2 - 3^2 = 16$. Следовательно, уравнение эллипса имеет вид $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$.

В заключение этого параграфа рассмотрим параметрические уравнения эллипса. Раньше мы вывели параметрические уравнения окружности

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t. \end{cases}$$

Здесь параметр t — угол между радиус-вектором $\overline{OM}$ и положительной полуосью Ox, где M — произвольная точка окружности.

Очевидно, $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ при подстановке в каноническое уравнение эллипса (4.5.3) обращает его в тождество. Следовательно,

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases}$$

и являются искомыми параметрическими уравнениями эллипса. Но здесь параметр t уже не будет углом между радиус-вектором точки эллипса и положительной полуосью Ox.

Пусть эллипс задан каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b).$$

Рассмотрим окружность

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1,$$

описанную около эллипса (рис. 3.22).

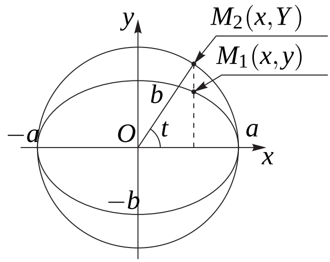


Рис. 3.22

Возьмем две точки $M_1(x,y)$ и $M_2(x,Y)$, расположенных соответственно на эллипсе и окружности, имеющих одну и ту же абсциссу x и лежащих по одну сторону от оси Ox. тогда

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{Y^2}{a^2}=1.$$

Отсюда

$$\frac{y^2}{b^2}=\frac{Y^2}{a^2}.$$

Разрешая это уравнение относительно y, получим $y=\frac{b}{a}Y$.

Так как параметрические уравнения окружности

$$\begin{cases} x=a\cos t, \\ Y=a\sin t, \end{cases}$$

то, заменяя здесь $Y=\frac{a}{b}y$, получим параметрические уравнения эллипса

$$\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t. \end{cases}$$

Таким образом, параметр t — это угол, соответствующий радиус-вектору точки M_2 окружности, описанной около эллипса, если эта точка лежит над или под точкой M_1 эллипса. Очевидно, точка $M_1(x,y)$ описывает весь эллипс, если параметр t пробегает интервал от 0 до 2π.

4.5.3. Гипербола

Определение 4.5.2. *Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, для которых абсолютная величина разности расстояний до двух данных точек F_1 и F_2 этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая расстояния между фокусами (и равная $2a$).*

Для вывода канонического уравнения гиперболы проведём ось Ox через фокусы F_1 и F_2, а ось Oy перпендикулярно оси Ox через середину отрезка

F_1F_2 (рис. 3.17). Обозначим расстояние между фокусами $2c$, тогда фокусы имеют координаты $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$. Возьмём точку $M(x,y)$ на плоскости. Эта точка лежит на гиперболе тогда и только тогда, когда $|MF_1 - MF_2| = 2a$. По формуле расстояния между двумя точками имеем $MF_1 = \sqrt{(x+c)^2+y^2}$, $MF_2 = \sqrt{(x-c)^2+y^2}$. Следовательно, точка M лежит на гиперболе тогда и только тогда, когда

$$|\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2}| = 2a. \qquad (4.5.5)$$

Отсюда

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a.$$

Далее проделаем без пояснений те же преобразования, что при выводе канонического уравнения эллипса:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = \sqrt{(x-c)^2+y^2} \pm 2a,$$

$$x^2+2cx+c^2+y^2 = x^2-2cx+c^2+y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+4a^2,$$

$$cx-a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}, \quad c^2x^2+a^4 = a^2(x^2+c^2+y^2),$$

$$(c^2-a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2-a^2).$$

В любом треугольнике разность двух любых его сторон меньше третьей стороны. Поэтому (рис. 3.17), $|MF_1 - MF_2| < F_1F_2$. Отсюда $2a < 2c$, то есть $c^2 - a^2 > 0$. Обозначим $b^2 = c^2 - a^2$, тогда

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2.$$

Разделив обе части на a^2b^2, получаем *каноническое уравнение гиперболы*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (4.5.6)$$

где

$$b^2 = c^2 - a^2. \qquad (4.5.7)$$

Как и при записи уравнения эллипса можно убедиться, что при алгебраических преобразованиях уравнения (4.5.5) мы не приобрели новых корней.

Величина a называется *действительной полуосью гиперболы*, величина b называется *мнимой полуосью гиперболы*.

4.5.4. Гипербола: исследование формы

Из канонического уравнения гиперболы $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ получаем:

1) гипербола симметрична относительно осей координат и относительно начала координат;

2) гипербола пересекается с осью Ox в двух точках $A(-a,0)$ и $B(a,0)$. Гипербола не имеет общих точек с осью Oy.

Действительно, полагая $y=0$, из канонического уравнения гиперболы имеем $\frac{x^2}{a^2}=1$. Отсюда $x=\pm a$. Если взять $x=0$, то получим $-\frac{y^2}{b^2}=1$ или $y^2=-b^2$, а это равенство невозможно для действительных чисел.

Точки A и B называются *вершинами гиперболы*. Ось Ox называется *действительной осью* гиперболы, а ось Oy — *мнимой осью*;

3) абсциссы точек гиперболы удовлетворяют неравенствам $x \leqslant -a$ или $x \geqslant a$.

В самом деле. Из канонического уравнения гиперболы имеем $\frac{x^2}{a^2}=1+\frac{y^2}{b^2} \geqslant 1$. Отсюда $x^2 \geqslant a^2$, а, значит, $x \leqslant -a$ или $x \geqslant a$;

4) в силу симметрии гиперболы достаточно построить ее часть в первой четверти.

Покажем, что прямая $y=\frac{b}{a}\cdot x$ является *асимптотой* гиперболы. Это означает, что если точка $M(x,y)$, двигаясь по гиперболе неограниченно удаляется от начала координат, то ее расстояние PM до этой прямой стремится к нулю (рис. 3.23).

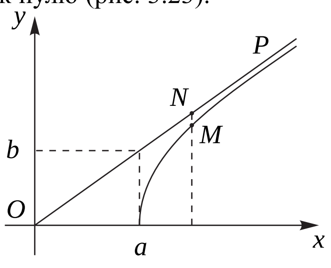


Рис. 3.23

Так как в первой четверти $x>0$ и $y>0$, то из канонического уравнения гиперболы ордината точки M равна $y=b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}$. Расстояние PM не превосходит длины отрезка MN, и если мы докажем, что $MN \to 0$ при $x \to +\infty$, то тогда и расстояние PM будет стремиться к нулю. Очевидно,

$$y_N-y_M=\frac{b}{a}x-b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}=\frac{b}{a}(x-\sqrt{x^2-a^2})=$$

$$=\frac{b}{a}\frac{(x-\sqrt{x^2-a^2})(x+\sqrt{x^2-a^2})}{x+\sqrt{x^2-a^2}}=$$

$$=\frac{b}{a}\frac{x^2-(x^2-a^2)}{x+\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}.$$

Знаменатель последней дроби неограниченно увеличивается, если $x \to +\infty$, а значит, сама дробь стремится к нулю. Итак, рассматриваемая часть гиперболы приближается к прямой $y=\frac{b}{a}x$ с ростом x. В силу симметрии аналогичным свойством обладают остальные части гиперболы расположенные во второй, третьей и четвертой четвертях;

5) используя производные можно показать, что при $x > 0$ первая производная функции $y = b\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2} - 1}$ положительна, а вторая — отрицательна. Это означает, что данная функция монотонно возрастает и ее график — выпуклая вверх кривая.

На основании свойств 1)–5) строим гиперболу (рис. 3.24).

Построение асимптот гиперболы $y = \pm\dfrac{b}{a}x$ позволяет более точно построить саму гиперболу. Очевидно, что асимптоты совпадают с диагоналями прямоугольника, центр которого совпадает с центром симметрии O гиперболы, а стороны параллельны действительной и мнимой осям симметрии. Отрезки длиной $2a$ и $2b$, соединяющие середины сторон этого прямоугольника, также называют осями (действительной и мнимой) гиперболы.

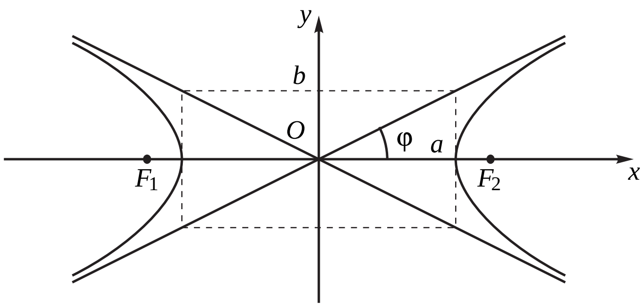


Рис. 3.24

Пример 4.5.2. *Составить каноническое уравнение гиперболы, зная, что*

1) расстояние между вершинами равно 8*, а расстояние между фокусами* — 10*;*

2) действительная полуось равна 5 *и вершины делят расстояние между центром и фокусами пополам.*

Решение. 1) Дано: $2a = 8$ и $2c = 10$ Отсюда по формуле (4.5.7) находим $b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 16 = 9$. Искомым уравнением гиперболы будет $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$;

2) по условию $a = 5$ и $c = 2a = 10$. Значит, $b^2 = c^2 - a^2 = 100 - 25 = 75$. Искомое уравнение гиперболы $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{75} = 1$.

Уравнение
$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{4.5.8}$$
определяет гиперболу с фокусами $F_1(0,b)$ и $F_1(0,-b)$ расположенными на оси ординат. В этом случае постоянная по модулю разность расстояний от точек гиперболы до фокусов равна $2b$.

Две гиперболы, заданные уравнениями
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \quad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$
называются *сопряженными.*

Гипербола с равными полуосями $a=b$ называется *равносторонней*. Ее каноническое уравнение
$$x^2-y^2=a^2, \quad -x^2+y^2=b^2.$$

4.5.5. Эксцентриситет эллипса и гиперболы

Важной характеристикой эллипса и гиперболы является эксцентриситет — отношение
$$e=\frac{c}{a}. \tag{4.5.9}$$

Таким образом, для эллипса эксцентриситет равен отношению расстояния между фокусами к большой оси: $e=\dfrac{2c}{2a}$. Для гиперболы эксцентриситет равен отношению расстояния между фокусами к действительной оси $e=\dfrac{2c}{2a}$.

Учитывая (4.5.4) и (4.5.7) легко получить следующие формулы для эксцентриситета
$$\text{для эллипса } e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}, \quad \text{для гиперболы } e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}.$$

Из этих формул вытекает, что эксцентриситет эллипса меньше единицы, эксцентриситет окружности равен нулю (так как для окружности $a=b$), эксцентриситет гиперболы больше единицы.

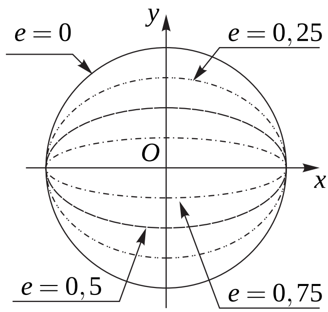


Рис. 3.25

Эксцентриситет эллипса является мерой его «сплюснутости»: чем меньше эксцентриситет, тем меньше отличаются его полуоси a и b и чем он больше, тем меньше отношение b/a. На рис. 3.25 изображены эллипсы с одинаковой большой осью и с разными эксцентриситетами.

Эксцентриситет гиперболы является характеристикой угла между асимптотами гиперболы. В самом деле, отношение b/a равно тангенсу половины угла между асимптотами гиперболы.

Пример 4.5.3. *Дан эллипс* $25x^2+169y^2=4225$. *Найти его эксцентриситет.*

Решение. Приводим уравнение эллипса к каноническому виду

$$\frac{25x^2}{4225}+\frac{169y^2}{4225}=1 \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1.$$

Отсюда $a^2=169$ и $b^2=25$. Следовательно

$$e=\sqrt{1-\frac{25}{169}}=\frac{12}{13}.$$

Пример 4.5.4. *Определить угол между асимптотами гиперболы, у которой эксцентриситет* $e=2$.

Решение. Искомый угол обозначим 2φ. Тогда (рис. 3.24) $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{b}{a}$ и, следовательно, $2=\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}$. Отсюда $\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{3}$, т. е. $\varphi=60^\circ$. Следовательно, угол между асимптотами гиперболы равен $2\varphi=120^\circ$.

4.5.6. Парабола

В школьном курсе математики параболой называется график функции $y=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$. В этом случае предполагается заданной декартова прямоугольная система координат. Если в этой системе координат кривую сдвинуть и повернуть на какой - либо угол, то ее уравнение изменится и называть ее параболой будет некорректно, между тем форма кривой при этом не изменится. Дадим определение параболы, не зависящее от выбора системы координат.

Определение 4.5.3. *Параболой называется геометрическое место точек плоскости, одинаково удаленных от данной точки F и от данной прямой, лежащих на этой плоскости.*

Указанные в этом определении точка F называется *фокусом* параболы, а прямая называется *директрисой* (то есть *направляющей*) параболы.

Обозначим расстояние от фокуса до директрисы p. Ось Ox проведем через фокус F перпендикулярно директрисе, а ось Oy — параллельно директрисе на расстоянии $p/2$ от нее (рис. 3.26). Пусть $M(x,y)$ — точка плоскости. Согласно определению параболы точка лежит на ней тогда и только тогда, когда $MF = MB$, где B — проекция точки M на директрису. Точка B имеет координаты $(-p/2, y)$, следовательно,

$$MB = \sqrt{(x+p/2)^2+(y-y)^2} = |x+p/2|$$

и

$$MF = \sqrt{(x-p/2)^2+y^2}.$$

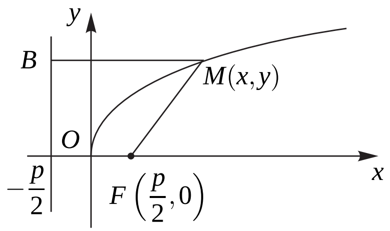


Рис. 3.26

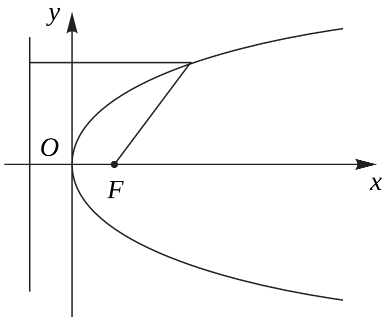


Рис. 3.27

Итак, имеем равенство

$$\sqrt{(x-p/2)^2+y^2} = |x+p/2|. \tag{4.5.10}$$

Возводя обе части этого равенства в квадрат и упрощая, получаем каноническое уравнение параболы

$$y^2 = 2px. \tag{4.5.11}$$

Число p называется *параметром параболы.*

При упрощении уравнения (4.5.10) могли появится посторонние корни, то есть точки, координаты которых удовлетворяют уравнению (4.5.11), но не удовлетворяют уравнению (4.5.10). Покажем, что этого не произошло. Пусть $M(x,y)$ — произвольная точка с координатами, удовлетворяющими уравнению (4.5.11). Надо показать, что эта точка одинаково удалена от фокуса и от директрисы. Из уравнения (4.5.11) следует,что $x \geqslant 0$. Для точек с неотрицательными абсциссами $MB = x + p/2$. Для расстояния MF имеем

$$MF = \sqrt{(x-p/2)^2+y^2} = \sqrt{(x-p/2)^2+2px} =$$
$$= \sqrt{x^2+px+p^2/4} = \sqrt{(x+p/2)^2} = x+p/2 = MB.$$

Если уравнение (4.5.11) записать в виде $x = \dfrac{1}{2p} \cdot y^2$, то получаем известную параболу $y = ax^2$, с точностью до обозначения осей координат. Отсюда получаем график параболы (рис. 3.27).

Отметим, что кривая $y^2 = 2px$ при $p < 0$ также является параболой, но расположенной в левой полуплоскости Oxy.

Если фокус параболы расположен на оси Oy, директриса параллельна оси Ox и вершина находится в начале координат, то каноническое уравнение параболы будет иметь вид $x^2 = 2py$.

Очевидно, что каноническая форма записи уравнения параболы позволяет легко найти его фокус.

4.5.7. «Почти канонические» уравнения эллипса, гиперболы и параболы

Пусть оси эллипса параллельны осям координат, но центр симметрии эллипса находится в точке $O'(x_0, y_0)$ (рис. 3.28).

Пусть в системе координат $O'(x'y')$ уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x'2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1. \qquad (4.5.12)$$

Но $x' = x - x_0$ и $y' = y - y_0$ (см. начало § 4.5). Следовательно в системе координат Oxy уравнение того же эллипса имеет вид:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1.$$

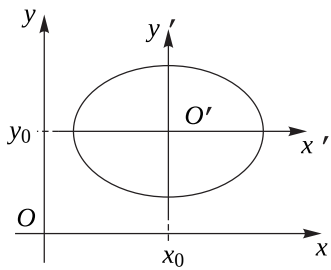


Рис. 3.28

Или

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2x_0}{a^2}x - \frac{2y_0}{b^2}y + \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1. \qquad (4.5.13)$$

Чаще возникает обратная задача: уравнение эллипса задано в виде (4.5.13) и его надо записать в виде (4.5.12). Для этого достаточно в уравнении (4.5.13) выделить полные квадраты по переменным x и y. Заметим, что это возможно, если в уравнении (4.5.13) отсутствует член с произведением xy. Определив точку O, строим эллипс.

Аналогично поступаем в случае гиперболы и параболы.

ПРИМЕР 4.5.5. *Установить, какие линии определяются уравнениями:*
1) $4x^2+3y^2-8x+12y-32=0$*;*
2) $16x^2-9y^2-64x-18y+199=0$*;*
3) $x+y^2-2y+1=0$.
Изобразить эти линии на чертеже.

РЕШЕНИЕ. 1). Проведем стандартные преобразования по выделению полных квадратов

$$4x^2+3y^2-8x+12y-32=4(x^2-2x)+3(y^2+4y)-32=$$
$$=4[(x-1)^2-1]+3[(y+2)^2-4]-32=$$
$$=4(x-1)^2+3(y+2)^2-48=0.$$

Отсюда получаем уравнение в виде

$$\frac{(x-1)^2}{12}+\frac{(y+2)^2}{16}=1.$$

Это — эллипс с центром в точке $(1,-2)$ и полуосями $a=$ $=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ и $b=\sqrt{16}=4$. Строим чертеж (рис. 3.29).

2). Выделяя полные квадраты, получаем

$$16x^2-9y^2-64x-18y+199=0=16(x^2-4x)-9(y^2+2y)+199=$$
$$=16(x-2)^2-9(y+1)^2+144=0.$$

Уравнение запишется в виде

$$-\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{16}=1.$$

Это — гипербола с центром $(2,-1)$, сопряженная к гиперболе $\dfrac{(x-2)^2}{9}-\dfrac{(y+1)^2}{16}=1$, имеющей параметры $a=3$ и $b=4$. Строим чертеж (рис. 3.30).

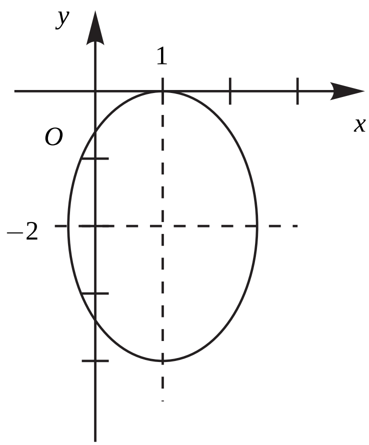


Рис. 3.29

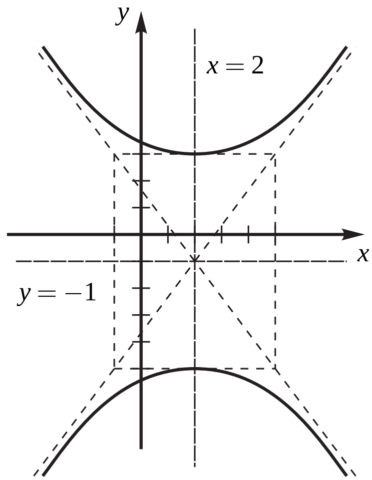
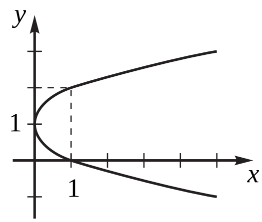


Рис. 3.30

3). Имеем $x + y^2 - 2y + 1 = x - (y-1)^2 = 0$. Отсюда $(y-1)^2 = x$. Это — парабола с вершиной в точке $(0,1)$, имеющая параметр $p = 1/2$. Строим чертеж.



4.5.8. Оптические свойства эллипса, гиперболы и параболы

В подробных курсах аналитической геометрии (например, [1, с. 170–171]) доказываются полезные и важные в приложениях оптические свойства кривых второго порядка:

1) лучи света, выходящие из одного фокуса эллипса, после зеркального отражения от эллипса проходят через второй фокус;

2) лучи света, выходящие из одного фокуса гиперболы, после зеркального отражения от гиперболы кажутся выходящими из другого фокуса;

3) лучи света, выходящие из фокуса параболы, после зеркального отражения от параболы параллельны.

Глава 5

Комплексные числа

Если ограничиваться только действительными числами, то многие задачи не имеют решения. Например, не существует корня четной степени из отрицательного числа. Если у квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ дискриминант $D = b^2 - 4ac < 0$, то это уравнение не имеет действительных корней. Простейшее из таких уравнений $x^2 + 1 = 0$. В математике, если доказано, что какая-либо задача не имеет решения, стараются так расширить основные понятия, чтобы задачу можно было решить. В нашем примере получим такое расширение, если примем, что уравнение $x^2 + 1 = 0$ имеет корень — «мнимую» единицу i: $i^2 + 1 = 0$. Очевидно, что тогда $i^2 = -1$ или $i = \sqrt{-1}$. И теперь все квадратные уравнения будут иметь корни независимо от знака дискриминанта. Например, уравнение $x^2 - 2x + 10 = 0$ имеет два корня

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{36}\sqrt{-1}}{2} = 1 \pm 3i.$$

Это обстоятельство приводит к необходимости введения новых чисел, частным случаем которых являются действительные числа. Причем для этих новых чисел должны выполняться все основные действия и законы, которым подчиняются действительные числа.

Комплексные числа появились в XVI в. и многими, если не большинством, были восприняты как нечто нереальное. В частности это отразилось в самом названии нового числа i — *мнимая* единица,

Тогда же была обнаружена неожиданная вещь: действительные числа могут «прятаться» за мнимыми. Для корней кубического уравнения $x^3 + px = q$ были получены формулы (*формулы Кардано*)

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}} - \frac{q}{2}}.$$

Если применить эту формулу к уравнению $x^3 - x = 0$, очевидно, имеющему действительные корни $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm 1$, то получим $x = \sqrt[3]{\sqrt{-\frac{1}{27}}} - \sqrt[3]{\sqrt{-\frac{1}{27}}}$. Формально это ноль, но выражение справа не имеет смысла на множестве действительных чисел.

В наше время комплексные числа используются всюду, где применяются математические методы. Так, например, в электротехнике полное сопротивление цепи представляется в виде $R = R_a + iR_p$, где R_a — активная составляющая и R_p — реактивная.

§ 5.1. Понятие комплексного числа

Комплексными числами называются числа вида $z = x + iy$, где x и y — действительные числа, а i — так называемая мнимая единица. Числа x и y называются соответственно действительной и мнимой частями комплексного числа z и обозначаются $x = \mathrm{Re}\, z$ (от real — действительный) и $y = \mathrm{Im}\, z$ (от imaginary — мнимый).

Если $y = \mathrm{Im}\, z = 0$, то комплексное число $z = x + i \cdot 0 = x$ — действительное число. Таким образом множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел является подмножеством множества $\mathbb{C}$ всех комплексных чисел: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Если $x = \mathrm{Re}\, z = 0$, то число $z = 0 + iy = iy$ называется чисто мнимым. Естественно обозначить $0 + 0i = 0$.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ считаются равными ($z_1 = z_2$) тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$. Множество $\mathbb{C}$ всех комплексных чисел не упорядочено, то есть запись $z_1 < z_2$ или $x_1 + iy_1 < x_2 + iy_2$ не имеет смысла.

Пусть на плоскости задана система координат Oxy. Каждому комплексному числу $z = x + iy$ можно поставить во взаимно однозначное соответствие точку $P(x, y)$. При этом действительные числа изображаются точками оси Ox и эта ось называется действительной осью. Чисто мнимые числа iy изображаются точками оси ординат и эта ось называется мнимой осью. Плоскость, точки которой изображают комплексные числа, называется комплексной плоскостью или плоскостью z. Термины «комплексное число» и «комплексная точка» будем применять как синонимы.

Между точками плоскости и радиус-векторами (то есть векторами с началом в точке $(0,0)$) имеется взаимно однозначное соответствие. Поэтому комплексное число $z = x + iy$ можно также изобразить радиус-вектором $\overline{OP} = \{x, y\}$ (рис. 4.1). Длина этого вектора называется *модулем* комплексного числа z и обозначается $|z|$. Очевидно, что $r = |z|$ — это расстояние точки z от начала координат.

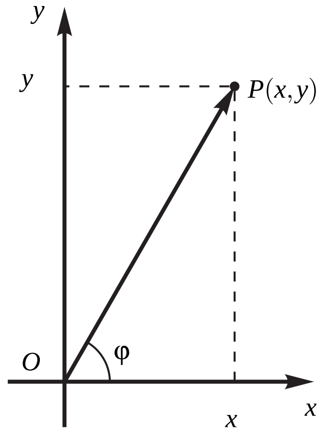


Рис. 4.1

Комплексные числа, имеющие один и тот же модуль, равный r, образуют окружность радиуса r с центром в начале координат.

Угол между положительным направлением действительной оси и радиус-вектором точки z называется *аргументом* комплексного числа z и обозначается $\varphi = \operatorname{Arg} z$. Для точки $z = 0$ аргумент не определен. Очевидно, модуль и аргумент комплексного числа $z = x + iy$ — это полярные координаты точки (x, y). Если модуль комплексного числа $z = x + iy$ однозначно определяется формулой $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, то его аргумент φ удовлетворяет равенству $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}$ и может быть определён с точностью до слагаемого $2n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Условие равенства двух комплексных чисел можно сформулировать так: их модули должны быть равны, а аргументы могут отличаться на слагаемое, кратное 2π. Из множества значений $\operatorname{Arg} z$ выделим одно, лежащее в промежутке $(-\pi, \pi]$. Это значение будем обозначать $\arg z$ и называть *главным значением аргумента*: $-\pi < \arg z \leqslant \pi$. Очевидно, $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Так как $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, то получаем *тригонометрическую форму* комплексного числа $z = x + iy$:

$$z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Комплексное число $x - iy$ называется *сопряженным* с комплексным числом $z = x + iy$ и обозначается $\overline{z}$. Например, $\overline{-2 + 3i} = -2 - 3i$. Очевидно, точки z и $\overline{z}$ симметричны относительно действительной оси и при этом $|z| = |\overline{z}|$, $\arg\overline{z} = -\arg z$.

§ 5.2. Операции над комплексными числами

На множестве комплексных чисел определим операции сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения корня.

Суммой $z_1 + z_2$ двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число $z = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$.

Очевидно, так определенная операция сложения обладает свойствами:

1) коммутативности: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ и

2) ассоциативности: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.

Для любого комплексного числа $z = x + iy$ существует единственное комплексное число (т. е. число $-x - iy$), дающее в сумме с z нуль. Тем самым определена операция *вычитания* $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$. Очевидно, $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$.

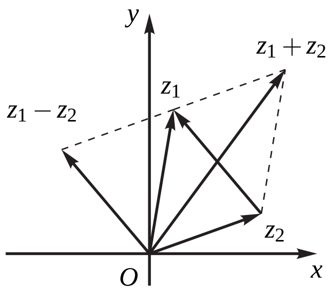


Рис. 4.2

Используя геометрическую интерпретацию комплексных чисел как векторов на плоскости, получаем, что вектор $z_1 + z_2$ является диагональю параллелограмма, построенного на векторах z_1 и z_2. Вектор $z_1 - z_2$ равен разности векторов z_1 и z_2 и направлен из точки z_2 в точку z_1 (рис. 4.2).

Отсюда следует, что модуль разности чисел $|z_1 - z_2|$ равен расстоянию между точками z_1 и z_2.

Пользуясь этим, легко написать уравнение окружности радиуса R с центром в точке a: для точек z этой окружности (и только для них) расстояние до центра a постоянно и равно R. Искомое уравнение $|z - a| = R$. Например, $|z - i| = 1$ — уравнение единичной окружности с центром в точке $a = i$. Аналогично, неравенству $|z - a| < R$ удовлетворяют те и только те точки комплексной плоскости, которые лежат внутри круга радиуса R с центром в точке a, а неравенствам $r < |z - a| < R$, где $r < R$, удовлетворяют точки, лежащие в кольце между двумя концентрическими окружностями радиусов r и R с общим центром a и только они.

Отметим, что для модулей комплексных чисел справедливы неравенства

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|,$$

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \leqslant |z_1 - z_2|.$$

Справедливость этих неравенств можно уяснить из рис. 4.2, если учесть, что в любом треугольнике сумма двух любых его сторон больше третьей стороны и любая сторона больше разности двух других сторон.

Умножение комплексных чисел определим равенством

$$z_1z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1). \qquad (5.2.1)$$

Непосредственным вычислением по этой формуле нетрудно убедиться в том, что операция умножения обладает свойствами:

1) коммутативности $z_1z_2 = z_2z_1$,

2) ассоциативности $(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$,

а операции сложения и умножения совместно обладают свойством дистрибутивности: $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$.

Если в формуле (5.2.1) положить $x_1 = x_2 = 0$, $y_1 = y_2 = 1$, то получим равенство $i \cdot i = i^2 = -1$. Умножая обе части равенства $i^2 = -1$ на i, получаем $i^3 = -i$; аналогично $i^4 = 1$. Легко понять, что $i^{4k+m} = i^m$ Очевидно, для любого комплексного числа z справедливо равенство $1 \cdot z = z$.

Отметим еще одну важную формулу, получающуюся из формулы (5.2.1) $z\overline{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$. Таким образом произведение сопряженных комплексных чисел является числом действительным.

Деление комплексных чисел определяется как операция, обратная умножению: частным от деления комплексного числа z_1 на число $z_2 \neq 0$ называется такое комплексное число z_3, для которого $z_3z_2 = z_1$. Очевидно, если $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$, то

$$z_3 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

При сложении и вычитании комплексных чисел целесообразнее использовать алгебраическую форму этих чисел $z = x + iy$. При умножении, делении и возведении в степень комплексных чисел рациональнее использовать тригонометрическую форму. Пусть

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Тогда

$$\begin{aligned} z_1z_2 = r_1r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) &+ \\ + ir_1r_2(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2) &= \\ = r_1r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)). & \qquad (5.2.2) \end{aligned}$$

Отсюда следует, что при перемножении комплексных чисел их модули перемножаются: $|z_1z_2| = |z_1||z_2|$. Это равенство, очевидно, справедливо и для произвольного количества сомножителей $|z_1z_2\ldots z_n| = |z_1||z_2|\ldots|z_n|$. В частности (если все сомножители одинаковы), $|z^n| = |z|^n$, $n = 1, 2, \ldots$

Аргумент произведения двух комплексных чисел равен (с точностью до $2k\pi$) сумме их аргументов: $\mathrm{Arg}(z_1z_2) = \mathrm{Arg}\,z_1 + \mathrm{Arg}\,z_2$. Это равенство, очевидно, справедливо и для произвольного количества сомножителей и, в частности, $\mathrm{Arg}\,z^n = n\,\mathrm{Arg}\,z$.

Геометрически это означает, что при умножении числа z_1 на z_2 радиус-вектор точки z_1 растягивается в $|z_2|$ раз и поворачивается на угол $\operatorname{Arg} z_2$.

Пример 5.2.1. *Найти вершины правильного шестиугольника, вписанного в окружность $|z| = 2$, если одна вершина находится в точке $z_1 = 1$.*

Решение. Так как в правильном шестиугольнике угол между радиус-векторами двух соседних вершин равен $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$, то k-я вершина равна $z_k = |z_1|\left(\cos\frac{(k-1)\pi}{3} + i\sin\frac{(k-1)\pi}{3}\right)$. Подставляя последовательно $k = 2, 3, 4, 5, 6$, получим искомые вершины

$$z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 1 + i\sqrt{3},$$

$$z_3 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = -1 + i\sqrt{3},$$

$$z_4 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{3} + i\sin\frac{3\pi}{3}\right) = -1,$$

$$z_5 = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = -1 - i\sqrt{3},$$

$$z_6 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 1 - i\sqrt{3}.$$

Для операции деления можно провести аналогичные рассуждения, но проще поступить так: используя тождество $z_1 = \left(\frac{z_1}{z_2}\right) z_2$, получаем $|z_1| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| |z_2|$ и $\operatorname{Arg} z_1 = \operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) + \operatorname{Arg} z_2$ и, значит,

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \operatorname{Arg}\frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2.$$

Итак,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right). \tag{5.2.3}$$

Обозначим выражение $\cos\varphi + i\sin\varphi$ символом $e^{i\varphi}$

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \tag{5.2.4}$$

не придавая пока этой записи никакого другого значения, кроме как обозначение. Ниже покажем, что символ $e^{i\varphi}$ обладает основными свойствами показательной функции. Но у $e^{i\varphi}$ появляется новое свойство — он имеет период 2π. Используя этот символ, комплексное число можно представить в форме

$$z = |z| e^{i \operatorname{Arg} z} = r e^{i\varphi} \tag{5.2.5}$$

и будем называть её *тригонометрической формой* комплексного числа.

Используя операции умножения и деления комплексных чисел в тригонометрической форме, будем иметь

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)) = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)},$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)) = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

Обобщая на несколько сомножителей, получаем

$$z_1 z_2 \dots z_n = r_1 r_2 \dots r_n e^{i(\varphi_1+\varphi_2+\dots+\varphi_n)}.$$

Полагая здесь $z_1 = z_2 = \dots = z_n = e^{i\varphi}$, будем иметь

$$z^n = \left(re^{i\varphi}\right)^n = r^n e^{in\varphi}. \qquad (5.2.6)$$

Это показывает, что введенные символы $e^{i\varphi_1}$ и $e^{i\varphi_2}$ перемножаются, делятся и возводятся в целую степень по правилам показательной функции $y = e^x$.

Записывая комплексные числа в правой и левой частях равенства (5.2.6) в тригонометрической форме, получаем *формулу Муавра*

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi. \qquad (5.2.7)$$

Определим *корень натуральной степени n из комплексного числа z* как такое число w, которое при возведении в степень n дает число z, то есть $w^n = z$. Записывая эти числа в показательной форме $z = re^{i\varphi}$, $w = \rho e^{i\psi}$, получим

$$\rho^n e^{in\psi} = re^{i\varphi} = re^{i(\varphi_0+2k\pi)},$$

где $\varphi_0 = \arg z$ — главное значение аргумента. Сравнивая модули и аргументы левой и правой частей, получим

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \quad \psi = \frac{\varphi}{n} = \frac{\varphi_0 + 2k\pi}{n}, \ k = 0, \pm 1, \dots$$

Таким образом,

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} e^{i\dfrac{\arg z + 2k\pi}{n}}, \quad k = 0, \pm 1, \dots \qquad (5.2.8)$$

Эта формула показывает, что модули всех значений корня одинаковы, а их аргументы отличаются на слагаемое, кратное $\dfrac{2\pi}{n}$. Отсюда следует, что корень n-й степени из любого числа $z \neq 0$ имеет n различных значений и что эти значения располагаются в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $\rho = \sqrt[n]{r}$ с центром в начале координат. Эти значения можно получить из формулы (5.2.8), полагая $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

При $z = 0$ все значения корня равны между собой и равны нулю.

Пример 5.2.2. *Вычислить $\sqrt[3]{i}$.*

Решение. Для числа $z = i$ имеем $|z| = 1$, $\arg z = \dfrac{\pi}{2}$, следовательно, по формуле (5.2.8)

$$w_k = \sqrt[3]{i} = e^{i\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}}.$$

Полагая здесь последовательно $k = 1, 2, 3$, получим

$$w_1 = e^{i\frac{\pi}{6}} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2},$$

$$w_2 = e^{i\frac{5\pi}{6}} = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2},$$

$$w_3 = e^{i\frac{9\pi}{6}} = \cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6} = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i.$$

При извлечении корня из комплексного числа понятие «арифметического корня» не вводится и все n значений равноправны. Поэтому при преобразованиях алгебраических выражений содержащих корни нужно следить, какие значения корня имеются в виду. Например, формула $\sqrt{z_1}\sqrt{z_2} = \sqrt{z_1 z_2}$ верна только при определенном выборе значения корня $\sqrt{z_1 z_2}$, если только значения для корней $\sqrt{z_1}$ и $\sqrt{z_2}$ уже выбраны. Иначе возможны «противоречия» типа $-1 = i^2 = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$.

§ 5.3. Показательная, тригонометрические и гиперболические функции комплексного переменного.

Полное и систематическое определение функций комплексного переменного возможно только после изучения математического анализа. Но некоторые разделы математического анализа используют эти функции (например, ряды и интеграл Фурье).

Понятие функции комплексного переменного вводится так же, как и понятие функции действительного переменного. Говорят, что на множестве E комплексной плоскости задана *функция комплексного переменного*, если задано правило по которому каждой точке множества E ставится в соответствие одно или несколько комплексных чисел. Это соответствие обозначается, как и для функций действительного переменного,в виде $w = f(z)$. Переменную z называют *независимым переменным*, или *аргументом*, а w — *зависимой переменной*, или *функцией*.

Если каждому значению $z \in E$ соответствует только одно значение w, то функция $w = f(z)$ называется *однозначной*, а если несколько значений — то *многозначной*. Например, функции $w = z^2$, $w = |z|$ — однозначные, а функции $w = \sqrt[n]{z}$, $w = \operatorname{Arg} z$ — многозначные.

Так как каждое комплексное число определяется парой действительных чисел, то задание комплексной функции $w = f(z) = u + iv$ комплексного аргумента $z = x + iy$ эквивалентно заданию двух действительных функций u и v двух действительных аргументов x и y:

$$w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y).$$

Функция $u(x,y)$ называется *действительной*, а функция $v(x,y)$ — *мнимой* частью функции $w = f(z)$.

Так как множество действительных чисел является подмножеством множества комплексных чисел, то, естественно, определяемая функция комплексного аргумента (например, $w = e^z$) должна совпадать с аналогичной функцией действительного аргумента.

В теории функций комплексного переменного доказывается *теорема единственности*, по которой для широкого класса функций из совпадения двух функций на оси Ox следует их тождественное равенство на всей комплексной плоскости.

Показательная функция

Определим функцию комплексного переменного $w = e^z$, задав её действительную и мнимую части формулами

$$u(x,y) = e^x \cos y, \quad v(x,y) = e^x \sin y.$$

И, таким образом,

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y). \tag{5.3.1}$$

На действительной оси $y = 0$ эта функция совпадает с действительной функцией e^x. Можно было бы определить функцию $w = e^z$ равенством $e^z = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n$, которая также совпадает с e^x на действительной оси и, по теореме единственности, будет совпадать с функцией, определенной формулой (5.3.1).

Символ e^{iy} обладает свойствами показательной функции, поэтому очевидны следующие свойства функции e^z:

1) $e^{z_1}e^{z_2} = e^{x_1}e^{iy_1}e^{x_2}e^{iy_2} = e^{x_1+x_2}e^{i(y_1+y_2)} = e^{z_1+z_2}$,

2) $\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = \dfrac{e^{x_1}e^{iy_1}}{e^{x_2}e^{iy_2}} = e^{x_1-x_2}e^{i(y_1-y_2)} = e^{z_1-z_2}$,

3) $(e^z)^n = (e^x)^n(e^{iy})^n = e^{nx}e^{iny} = e^{nz}$.

Функция e^z является периодической с чисто мнимым периодом $T = 2\pi i$; действительно, для любого целого k имеем

$$e^{z+2k\pi i} = e^z e^{2k\pi i} = e^z(\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi) = e^z.$$

Из определения показательной функции имеем $|e^z| = e^x$, $\operatorname{Arg} e^z = y + 2k\pi i$, где k — любое целое число. Отсюда, в свою очередь, получаем, что показательная функция не обращается в нуль и на комплексной плоскости, но может быть отрицательной (например, $e^{i\pi} = -1$).

Тригонометрические функции

Формулу (5.2.4) $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ называют *формулой Эйлера*. Подставляя в неё $-\varphi$ вместо φ и используя чётность косинуса и нечётность синуса, получим $e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$. Складывая и вычитая эти две формулы, получим равенства

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i},$$

справедливые для любых действительных φ.

Определим *тригонометрические функции* комплексного переменного равенствами

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \tag{5.3.2}$$

Тангенс и котангенс полагаем равными

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Для действительных z эти определения, очевидно, дают тригонометрические функции действительного переменного. Функции (5.3.2) сохраняют почти все свойства тригонометрических функций действительного аргумента. Например, периодичность этих функций с периодом 2π следует из периодичности функции e^z с периодом $2\pi i$. В самом деле,

$$\sin(z + 2\pi) = \frac{1}{2i}\left(e^{i(z+2\pi)} - e^{-i(z+2\pi)}\right) = \\ = \frac{1}{2i}\left(e^{iz+2\pi i} - e^{-iz+2\pi i}\right) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sin z.$$

Также справедливы все тригонометрические формулы. Например,

$$\sin^2 z + \cos^2 z = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 = 1,$$

$$2\sin z\cos z = 2\left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)\left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right) = \frac{e^{2iz} - e^{-2iz}}{2i} = \sin 2z.$$

Особое внимание следует обратить на то, что в отличие от тригонометрических функций действительного аргумента модули функций $\sin z$ и $\cos z$ могут быть больше единицы и даже сколь угодно большими. В самом деле, для действительных $t \to +\infty$

$$\cos it = \frac{1}{2}\left(e^t + e^{-t}\right) \to \infty.$$

Гиперболические функции комплексного аргумента определим равенствами

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \qquad (5.3.3)$$

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Из этих определений следует, что $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{ch} z$ периодические с периодом $2\pi i$, а $\operatorname{th} z$ и $\operatorname{cth} z$ имеют период πi.

Сравнивая формулы (5.3.2) и (5.3.3), получаем формулы, связывающие тригонометрические и гиперболические функции

$$\begin{array}{ll} \sin z = -i \operatorname{sh} iz, & \operatorname{sh} z = -i \sin iz, \\ \cos z = \operatorname{ch} iz, & \operatorname{ch} z = \cos iz, \\ \operatorname{tg} z = -i \operatorname{th} iz, & \operatorname{th} z = -i \operatorname{tg} iz, \\ \operatorname{ctg} z = i \operatorname{cth} iz, & \operatorname{cth} z = i \operatorname{ctg} iz. \end{array} \qquad (5.3.4)$$

Отсюда следует, что любая тригонометрическая формула имеет аналог в гиперболических функциях, и для получения этого аналога можно тригонометрические функции заменить на гиперболические по формулам (5.3.4). Например,

$$1 = \sin^2 z + \cos^2 z = (-i \operatorname{sh} iz)^2 + (\operatorname{ch} iz)^2 = (\operatorname{ch} iz)^2 - (\operatorname{sh} iz)^2.$$

Заменяя здесь iz на z получаем *основное гиперболическое тождество*

$$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1.$$

Глава 6

Элементарная теория предела

§ 6.1. Предел последовательности

6.1.1. Существо вопроса

При измерении величин различной природы мы получаем последовательности приближенных значений этих величин, с которыми приходится работать. Например, при вычислении длины окружности по формуле $L = 2\pi R$ в качестве значения π можно взять одно из приближенных значений 3; $3,1$; $3,14$; $3,1415$ и т. д., в зависимости от требуемой точности вычислений. Таким образом, операции с величинами сводятся к операциям над числовыми последовательностями, представляющими эти величины, и мы вынуждены ответить на три следующих вопроса:

1. Как соотнести измерение величины ко всем возможным последовательностям, приближающим эту величину?

2. Как по самой последовательности чисел определить, соответствует ли она сколь угодно точному приближению некоторой величины?

3. Как связаны операции, например арифметики, над приближенными значениями величин с теми же операциями над их точными значениями и для каких операций допустима подмена величин их приближениями?

При изображении действительных чисел точками числовой оси при помощи десятичной системы мы ответили на эти вопросы следующим образом:

1. Каждой точке M сопоставили числовую последовательность (конечную или бесконечную) x_1, x_2, $\ldots$, x_n, $\ldots (x_k = \beta_m \ldots \beta_1\beta_0, \alpha_1 \ldots \alpha_k$, $k = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$, приближающую число

$$x = \beta_m \ldots \beta_1\beta_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n \ldots$$

как угодно близко. Действительно, мы установили, что, ограничившись в записи числа x n знаками после запятой, мы получаем представление числа с погрешностью

$$\varepsilon = |x - x_n| \leqslant \frac{1}{10^n}.$$

2. Каждой числовой последовательности в десятичной записи составим некоторое число, причем если разность между двумя числами была как угодно мала, то эти числа считались совпадающими.

3. Арифметические операции над числами x заменялись операциями над приближениями x_n этих чисел.

Теория предела — это раздел математического анализа, который устанавливает соответствие между операциями над величинами x, функциями $f(x)$ и их приближения.

Перейдем к изложению теории пределов.

6.1.2. Определение числовой последовательности и ее предела

Числовая функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, областью определения которой является множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел, называется числовой последовательностью действительных чисел, или просто числовой последовательностью.

Значения $f(n)$, $n \in \mathbb{N}$ функции f называются членами последовательности, их принято обозначать $x_n = f(n)$ или $f_n = f(n)$; сама числовая последовательность есть пронумерованное множество ее членов и обозначается в виде $\{x_n\}$ или $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$

Примеры числовых последовательностей.

1. Множество четных чисел $\{2n\} = 2, 4, \ldots, 2n, \ldots$

2. Последовательность простых чисел 1, 3, 5, 7, 11, 13 (общий вид члена этой последовательности не вывести).

3. Последовательность обратных величин натуральных чисел $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots = \left\{\frac{1}{n}\right\}$.

4. Последовательность рациональных чисел, приближающих число π: $x_1 = 3$; $x_2 = 3,1$; $x_3 = 3,14$; $x_4 = 3,141$; $x_5 = 3,1415$; (заметим, что $|\pi - x_n| \leqslant \frac{1}{10^n}$).

Далее мы будем рассматривать только числовые последовательности действительных чисел: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Определение предела числовой последовательности.

Определение 6.1.1. *Число $A \in \mathbb{R}$ называется пределом числовой последовательности $\{x_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер n_0 такой, что при всех $n > n_0$ будет $|x_n - A| < \varepsilon$.*

Геометрический смысл этого определения в том, что в как угодно малую ε-окрестность числа A на числовой оси начиная с некоторого номера n_0 (зависящего от размера окрестности ε), попадают все члены x_n с номерами $n \geqslant n_0$ (или, что то же самое, вне любой ε-окрестности точки A находится лишь конечное число членов данной последовательности) (рис 5.1).

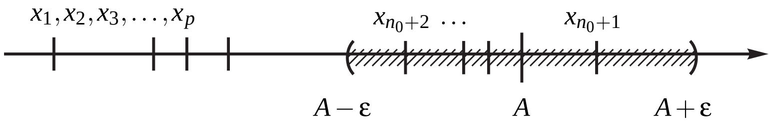


Рис. 5.1

Тот факт, что A есть предел x_n записывают в виде

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A$$

или $x_n \to A$ при $n \to \infty$.

Последовательность, имеющая предел, называется сходящейся, последовательность, не имеющая предела — расходящейся.

Пример 6.1.1. *1. Последовательность простых чисел расходящаяся, т. к. не существует самого большого простого числа (теорема Евклида).*

2. Последовательность $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ имеет предел 0:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

3. $x_n = 1,\underbrace{9\ldots9}_{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.

4. Последовательность $1,\ 2,\ \dfrac{1}{3},\ 4,\ \dfrac{1}{5},\ 6,\ \dfrac{1}{7},\ \ldots$ с n-м членом $x_n = n^{(-1)^n}$ расходящаяся. Действительно, ее нечетные члены имеют вид $1/(2n+1)$ и стремятся к 0, а четные члены имеют вид $2n$ и неограниченно возрастают, удаляясь от начала координат. Поэтому свойства «накапливаться» членами x_n около некоторого числа A здесь не наблюдается.

6.1.3. Свойства предела последовательности

Теорема 6.1.1 (об общих свойствах предела).

a) Сходящаяся последовательность имеет единственный предел.

b) Сходящаяся последовательность ограничена.

Доказательство. а) пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A_1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A_2$, но $A_1 \neq A_2$. Выберем $\varepsilon = 1/2\cdot|A_1 - A_2|$. По определению предела существует n_0 такое, что при $n > n_0$ все x_n удовлетворяют неравенству $|A_1 - x_n| < \varepsilon$, т. е. лежат в ε-окрестности точки A_1, (рис. 5.2). Тогда при этих же n ни одно из этих чисел не попадет в ε-окрестность точки A_2. Следовательно, A_2 не может быть пределом, если $A_2 \neq A_1$. Свойство а) доказано.

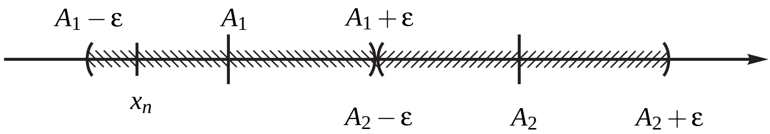


Рис. 5.2

Докажем b). Для заданного ε при $n > n_0$ будет $\varepsilon > |x_n - A_1|$. Учитывая свойства абсолютных значений, получаем $\varepsilon > |x_n - A_1| > ||x_n| - |A_1|| \Rightarrow |x_n| < |A_1| + \varepsilon$ (при $n > n_0$). Поэтому максимальное значение из конечного числа величин $|x_1|$, $|x_2|$, $\ldots$, $|x_{n_0}|$, $|A_1|+\varepsilon$ ограничивает по абсолютной величине все члены последовательности $\{x_n\}$. Теорема доказана.

Определение 6.1.2. Бесконечно малой числовой последовательностью *называется последовательность* $\{x_n\}$ *для которой* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Сокращенно будем писать б. м. $\{x_n\}$. Например, $\left\{\sin\dfrac{\pi}{n}\right\} = \{x_n\}$, $\left\{\dfrac{1}{n}\right\} = \{x_n\}$ б. м. последовательности.

Арифметические свойства б. м. последовательностей. Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ б. м. последовательности. Тогда $\{x_n \pm y_n\}$, $\{x_n y_n\}$, $\{Cx_n\}$ (C — const) также б. м. последовательности.

Все эти свойства несложно доказать исходя из определения б. м. последовательности.

Определение 6.1.3. Бесконечно большая последовательность *это такая числовая последовательность* $\{z_n\}$, *у которой для любого сколь угодно большого числа M начиная с некоторого номера* n_0 *все члены* $|z_n| > M$ *(*$n > n_0$*). (сокращенно б. б.)*

Учитывая равносильность неравенств (если $x_n \neq 0$ для всех n)

$$|x_n| < \varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon} < \frac{1}{|x_n|},$$

и то, что при $\varepsilon > \dfrac{1}{M}$ будет $\dfrac{1}{\varepsilon} > M$, заключаем: числовая последовательность $\{x_n\}$ б. м. $\iff \{z_n\} = \left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ б. б.

Пример 6.1.2. $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n^2+1}\right\}$ *б. м.* $\{z_n\} = \left\{\frac{1}{x_n}\right\} = \{n^2+$ $+1\}$ *б. б.*

Нетрудно доказать, что сумма и произведение конечного числа бесконечно малых являются бесконечно малыми.

Докажем,что произведение бесконечно малой на ограниченную является бесконечно малой. Напомним, что последовательность $\{C_n\}$ ограничена, если существует такое число M, что для всех n из $\mathbb{N}$ выполняется неравенство $|C_n| \leqslant M$.

Пусть $\{x_n\}$ б. м., C_n — ограниченная и $|C_n| \leqslant M$. Для любого малого заданного $\varepsilon > 0$ выберем номер n_0, начиная с которого, выполняется неравенство $|x_n| < \frac{\varepsilon}{M}$. Тогда для этих же номеров n последовательности $(n \geqslant n_0)$, $\{u_n\} = \{x_n C_n\}$ имеем неравенство $|u_n| = |x_n C_n| < \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon$, откуда следует, что $\{u_n\}$ б. м.

Теорема 6.1.2. *(о необходимых и достаточных условиях существования предела). Последовательность $\{x_n\}$ имеет пределом число A тогда и только тогда, когда $x_n = A + \Delta_n$, где $\{\Delta_n\}$ является б. м. последовательностью.*

Доказательство. Пусть $A = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Тогда из определения предела заключаем, что $x_n - A$ является б. м.

Обратно. Пусть $x_n - A = \Delta_n$ б. м., тогда условие того, что Δ_n б. м. эквивалентно условию того, что $A = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Теорема доказана.

Пример 6.1.3.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2+1} - \frac{2}{n^2+1}\right) = $$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{2}{n^2+1}\right) = 1.$$

Здесь $\left\{\frac{n^2-1}{n^2+1}\right\} = 1 + \left\{\frac{-2}{n^2+1}\right\}$, $A = 1$, $\{\Delta_n\} = \left\{\frac{-2}{n^2+1}\right\}$ *б. м.*

Эта теорема позволяет рассмотреть предельный переход в арифметических операциях.

Теорема 6.1.3. *(об арифметических свойствах пределов).*
Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$, *то*

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n = A \pm B$*;*

b) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = (\lim\limits_{n\to\infty} x_n)(\lim\limits_{n\to\infty} y_n) = AB$*. В частности,* $\lim\limits_{n\to\infty}(Cx_n) = CA$*, где* C — const*;*

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \dfrac{A}{B}$*, если* $B \neq 0$ *и* $y_n \neq 0$*,* $(n = 1, 2, \ldots)$*.*

d) Если $x_n = C$ — const*, для любого* n *то* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = C$*.*

Доказательство. Ограничимся доказательством свойства b). Согласно предыдущей теореме $x_n = A + \Delta_n$, $y_n = B + \delta_n$, где Δ_n и δ_n б. м. последовательности. Поэтому

$$x_n y_n = (A + \Delta_n)(B + \delta_n) = AB + (A\delta_n + B\Delta_n + \delta_n\Delta_n).$$

Ясно, что величина, стоящая в скобках, является бесконечно малой. Поэтому, опять-таки, согласно предыдущей теореме заключаем, что $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = AB = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Свойство $\lim\limits_{n\to\infty}(Cx_n) = C\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ следует из доказанного, если рассмотреть последовательность с постоянным значением общего члена $y_n = C$ (такая последовательность называется стационарной).

Упражнение 6.1.1. *Доказать свойства a), c) и d) предыдущей теоремы.*

6.1.4. Предельный переход в неравенствах

Основная связь операции предельного перехода и неравенств выражается следующими двумя свойствами.

Свойства предельного перехода в неравенствах.

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$. Тогда:

1) если начиная с некоторого n_0, $(n \geq n_0)$ выполняется неравенство $x_n < y_n$, то $A \leqslant B$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

2) если $A < B$, то, начиная с некоторого номера n_0 $(n \geqslant n_0)$, выполняется неравенство $x_n < y_n$.

Опуская доказательство, ограничимся рассмотрением примеров.

Пример 6.1.4.

1. $\{x_n\} = \left\{1 - \dfrac{1}{n}\right\}$, $\{y_n\} = \left\{1 + \dfrac{1}{n}\right\}$*. Здесь* $x_n < y_n$*, а* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1 = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$*.*

2. $\{x_n\} = \left\{\dfrac{1}{n}\right\}$, $\{y_n\} = \left\{1 - \dfrac{1}{n}\right\}$*. Здесь* $x_n < y_n$ *при* $n \geqslant 3$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 < 1 = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$*.*

Упражнение 6.1.2. *Привести примеры таких числовых последовательностей* $\{x_n\}$ *и* $\{y_n\}$ *с* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$*, что существует номер* n_0 *такой, что при любом* $n > n_0$*:*

a) $x_n > y_n$*, и* $A \geqslant B$*;*

b) $x_n \geqslant y_n$*, и* $A \geqslant B$*;*

c) $x_n > B$*, и* $A \geqslant B$*;*

d) $x_n \geqslant B$*, и* $A \geqslant B$*.*

6.1.5. Монотонные последовательности

Последовательность $\{x_n\}$ называют возрастающей, если при всех $n \in \mathbb{N}$ будет $x_n < x_{n+1}$; неубывающей, если при всех $n \in \mathbb{N}$ $x_n \leqslant x_{n+1}$; убывающей, если при всех $n \in \mathbb{N}$ $x_n > x_{n+1}$; невозрастающей, если при всех $n \in \mathbb{N}$ $x_n \geqslant x_{n+1}$. *Последовательности всех этих четырех типов называются монотонными последовательностями.*

Будем говорить, что последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху, если $x_n \leqslant M$ для некоторого числа M, и ограничена снизу, если $x_n \geqslant M$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Ограниченная последовательность — это последовательность, ограниченная и сверху, и снизу. Но если последовательность ограничена только снизу или сверху, то она может оказаться неограниченной. Например, $\{x_n\} = \{n\}$ ограничена снизу любым отрицательным числом, а сверху не ограничена.

Ограниченная числовая последовательность может не иметь предела. Например последовательность $\{x_n\} = \{\sin(\pi n/2)\}$ ограниченная числом 1, но предела не имеет. При четных $n = 2m$ $x_{2m} = 0$, при нечетных $n = 2m+1$ $x_{2m+1} = \pm 1$.

Отличительное свойство монотонных последовательностей состоит в том, что любая ограниченная монотонная последовательность сходится.

Теорема 6.1.4 (Вейерштрасса). *Неубывающая ограниченная сверху последовательность имеет предел.*

Если $\{x_n\}$ возрастающая монотонная последовательность, то $\{-x_n\}$ убывающая последовательность. Поэтому из теоремы Вейерштрасса следует, что невозрастающая ограниченная снизу последовательность также имеет предел.

6.1.6. Число e

Покажем, что последовательность $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ имеет предел. Этот предел называют числом e

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Для доказательства воспользуемся неравенством Я. Бернулли, справедливого для $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha > -1$

$$(1+\alpha)^n \geqslant 1 + n\alpha$$

(доказательство этого неравенства проводится методом математической индукции, и мы его опускаем).

Покажем вначале, что последовательность $y_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ убывающая (при $n \geqslant 2$). Используя неравенство Бернулли, преобразуем отношение

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \frac{\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{n^{2n}}{(n^2-1)^n}\frac{n}{n+1} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n \frac{n}{n+1} \geqslant \left(1+\frac{n}{n^2-1}\right)\frac{n}{n+1} \geqslant$$

$$\geqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{n}{n+1} = 1.$$

таким образом, $y_{n-1} > y_n$ и эта последовательность убывает. Так как $y_n \geqslant 0$, то она ограничена снизу и, согласно свойству монотонных последовательностей, имеет предел. Воспользовавшись свойством предела произведения, получаем существование предела

$$e = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\frac{1}{1+\dfrac{1}{n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} y_n \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\dfrac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Число e является иррациональным, $e = 2,718281828459045\ldots$

6.1.7. Применение к приближенным вычислениям

Метод доказательства арифметических свойств предела в п 6.1.3 содержит алгоритм нахождения погрешности при арифметических операциях, совершаемых с приближенными значениями чисел. Пусть, например, x_n и y_n — приближенные значения чисел A и B с точностью до ε

$$A = x_n + \Delta_1, \quad B = y_n + \Delta_2, \quad |\Delta_1 \leqslant \varepsilon|, \quad |\Delta_2 \leqslant \varepsilon|.$$

Тогда разность $||AB - x_n y_n|| = |x_n\Delta_2 + y_n\Delta_1 + \Delta_1\Delta_2|$ дает абсолютную погрешность величины $x_n y_n$, заменяющей значения AB. Оценим относительную погрешность этой разности

$$\Delta = \frac{|AB - x_n y_n|}{|AB|} = \frac{|x_n\Delta_2 + y_n\Delta_1 + \Delta_1\Delta_2|}{|AB|}.$$

Учитывая, что $|x_n| \leqslant |A| + \varepsilon$, $|y_n| \leqslant |B| + \varepsilon$, находим

$$\Delta \leqslant \frac{|x_n|\varepsilon + |y_n|\varepsilon + \varepsilon^2}{|AB|} \leqslant \frac{|A|\varepsilon + |B|\varepsilon + 3\varepsilon^2}{|AB|} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{|B|} + \frac{1}{|B|}\right)\varepsilon + \frac{3\varepsilon^2}{|AB|}.$$

Применим это неравенство для нахождения относительной погрешности при замене числа π^2 приближенным значением $(3,14)^2 = 9,8596$. Так как $|\pi - 3,14| = \varepsilon$ и $\varepsilon < \dfrac{1}{10^2}$, то, оставляя два знака после запятой, согласно полученной выше оценке находим

$$\Delta = \frac{|\pi^2 - (3,14)^2|}{\pi^2} = \frac{|\pi^2 - 9,85|}{\pi^2} \leqslant \left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi}\right)\frac{1}{10^2} + \frac{3}{\pi^2 10^4},$$

откуда заключаем, что относительная погрешность

$$\Delta \leqslant \frac{1}{\pi 10^2}\left(2 + \frac{3}{\pi 10^2}\right) < \frac{1}{10^2}.$$

Упражнение 6.1.3. *Оценить относительную погрешность значения площади круга πR^2, если значения $\pi = 3,1415\ldots$, $R = 1,111\ldots$ учитываются с точностью до третьего знака после запятой.*

Указание: представить $\pi = 3,142 + \varepsilon_1$, $R = 1,111 + \varepsilon_2$, где ε_1 и ε_2 абсолютные погрешности, не превосходящие значения 10^{-3}.

§ 6.2. Предел числовой функции

6.2.1. Определение и примеры

Суть понятия предела функции заключается в том, что при приближении аргумента x из области определения $f(x)$ к числу a, значение функции

f приближается к некоторому числу A. Это число A естественно назвать пределом функции $f(x)$ при x стремящемся к a. Для записи такого свойства договоримся, что выражение «переменная величина u стремится к фиксированному значению b» равносильно записи: для любого как угодно малого числа $\Delta > 0$ выполняется $|u - b| < \Delta$.

Определение 6.2.1 (предела функции по Коши). *Будем говорить, что функция $f(x)$ стремится к A при x, стремящемся к a, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что выполнение неравенства $0 < |x - a| < \delta$ для x из области определения f влечет выполнение неравенства $|f(x) - A| < \varepsilon$.*

Обратим внимание на то, что требование к значению $f(x)$ попадать в ε-окрестность числа A реализуется как следствие того, что x попадает в подходящую δ-окрестность точки a

$$0 < |x - a| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |A - f(x)| < \varepsilon.$$

Таким образом, вначале задается малое число ε, а затем по нему находится число δ (зависящее от ε, $\delta = \delta(\varepsilon)$), обеспечивающее указанное в определении требование. Если A — предел $f(x)$ при x, стремящемся к a, то будем писать

$$A = \lim_{x \to a} f(x) \quad \text{или} \quad f(x) \to A \text{ при } x \to a.$$

Пример 6.2.1. *Покажем, что $\lim\limits_{x \to 0} x \sin \dfrac{1}{x} = 0$. Пусть $\varepsilon > 0$. Рассмотрим неравенство $\left| x \sin \dfrac{1}{x} \right| < \varepsilon$. Так как $\left| \sin \dfrac{1}{x} \right| \leqslant 1$ при любых $x \neq 0$, то неравенство будет выполнено, если $x < \varepsilon$. В этом примере $\delta = \delta(\varepsilon) = \varepsilon$.*

Пример 6.2.2. *Функция*

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{при } x > 0; \\ 0, & \text{при } x = 0; \\ -1, & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

(читается «сигнум x») при $x \to 0$ предела не имеет.

Действительно, в любой δ-окрестности точки $x = 0$ функция $\operatorname{sgn} x$ принимает значения -1, 0, 1. Поэтому каким бы ни было число A, если $\varepsilon < 1$, никакой выбор $\delta > 0$ не обеспечивает попадания значений функции $\operatorname{sgn} x$ в ε-окрестность A (рис. 5.3).

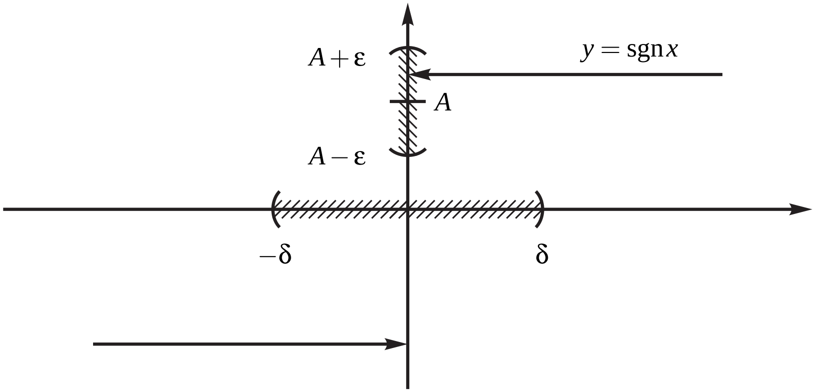


Рис. 5.3

Рассмотренное в предыдущем параграфе понятие предела числовой последовательности является частным случаем понятия предела функций, у которых значения аргумента пронумерованы натуральными числами. Можно сказать, что множество всевозможных числовых последовательностей $\{f_n\}$ образуют самый узкий класс функций, на котором реализуется теория предела. Напомним, что в п 6.1.1 сформулированы основные задачи теории предела. Эти же задачи мы будем рассматривать и для переменных величин, задаваемых числовыми функциями $f(x)$. Поскольку схема доказательств основных свойств предела для числовых последовательностей $\{f_n\}$ и числовых функций $f(x)$ одинакова, мы ограничиваемся уточнениям некоторых понятий и перечислением основных свойств предела функций. Читателю рекомендуется провести сравнительный анализ соответствующих свойств.

Единственность и ограниченность:

а) пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x)=B$. Тогда $A=B$;

b) пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ и $A\neq\infty$. Тогда существует некоторая δ-окрестность точки a, в которой величина $|f(x)|$ ограничена: $|f(x)|\leqslant M$ — const при $|x-a|<\delta$.

Бесконечно малой функцией называется функция, определенная в окрестности точки a со свойством $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$.

Свойства бесконечно малых функций

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые функции при $x\to a$. Тогда $\alpha(x)+\beta(x)$, $\alpha(x)\beta(x)$ и $C\alpha(x)$, где C — const, являются также бесконечно малыми функциями при $x\to a$.

Бесконечно большой функцией называется функция, определенная в окрестности точки a, со свойством: для любого натурального числа N существует число $\delta > 0$ такое, что выполняется импликация

$$|x-a| < \delta \implies |f(x)| > N.$$

В этом случае будем писать $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, в зависимости от знака $f(x)$ при $x \to a$.

Также будем считать, что запись $x \to \pm\infty$ означает, что функция $|x|$ есть бесконечно большая величина. Запись $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ будем употреблять, когда аргумент $f(x)$ есть бесконечно большая величина.

Функция $f(x)$ является бесконечно большой при $x \to a$ тогда и только тогда, когда функция $\dfrac{1}{f(x)}$ является бесконечно малой при $x \to a$.

Замечание 6.2.1. *В связи с введением понятия бесконечно большой переменной величины можно (и нужно) ввести понятие предела при $x \to \pm\infty$.*

Будем говорить, что $\lim\limits_{x\to+\infty\ (x\to-\infty)} f(x) = A$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное N, что из условия $x > N$ $(x < -N)$ следует выполнение неравенства $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Далее в операциях с пределами $x \to a$, где a может быть как конечным, так и бесконечностью того или иного знака.

Необходимое и достаточное условие существования предела. Функция $f(x)$ имеет предел число A при $x \to a$ тогда и только тогда, когда $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция при $x \to a$.

Арифметические свойства предела функции. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в окрестности точки $x = a$. Тогда, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, то

a) для постоянной функции $C(x) = C$ — const для любого x, выполняется: $\lim\limits_{x\to a} C = C$;

b) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x) = A + B$;

c) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \lim\limits_{x\to a} g(x) = AB$ (в частности, $\lim\limits_{x\to a}(Cf(x)) = C\lim\limits_{x\to a} f(x) = CA$, где C — const);

d) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{A}{B}$, при условии, что $B = \lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$.

6.2.2. Предельный переход в неравенствах

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$. Тогда, если в некоторой окрестности точки $x = a$

a) выполнено $f(x) > g(x)$, то $A \geqslant B$;
b) выполнено $f(x) \geqslant g(x)$, то $A \geqslant B$;
c) выполнено $f(x) > B$, то $A \geqslant B$;
d) выполнено $f(x) \geqslant B$, то $A \geqslant B$.

6.2.3. Первый замечательный предел

Применим изученные свойства пределов к доказательству одного из важнейших пределов

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

Доказательство этого равенства разобьем на несколько этапов.

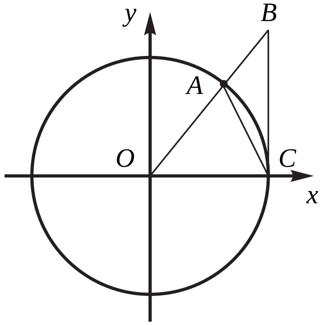


Рис. 5.4

1. В круге единичного радиуса через x обозначим радианную меру угла, образованного направлением OA с положительным направлением оси Ox. Пусть BC — касательная к окружности, C — точка касания, AC — хорда и угол $x \in (0,\pi/2)$ (рис. 5.4).

2. Вычислим площади:
площадь $_\Delta OAC$: $S_{\Delta OAC} = \frac{1}{2}OA\cdot OC\sin x = \frac{1}{2}\sin x$;
площадь сектора OAC: $S_{OAC} = \frac{1}{2}x$;
площадь $_\Delta OBC$: $S_{\Delta OBC} = \frac{1}{2}OC\cdot OC\,\mathrm{tg}\,x = \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,x$.
Между этими площадями выполняется соотношение

$$S_{\Delta OAC} < S_{OAC} < S_{\Delta OBC}.$$

Подставляя значение этих площадей, получим

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,x.$$

3. Выполняя деление в этих неравенствах на $\sin x$, и, переходя к обратным величинам, получим

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Так как функции $\cos x$ и $\frac{\sin x}{x}$ четные, то полученные неравенства верны и при $x \in (-\pi/2, 0)$.

4. Совершая предельный переход при $x \to 0$ в полученных неравенствах, согласно свойствам п 6.2.2, получим

$$1 = \lim_{x\to 0} \cos x \leqslant \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \leqslant 1,$$

откуда следует требуемое равенство.

Пример 6.2.3.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

2. $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \lim_{x\to 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}.$$

3. $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x} = \frac{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin \alpha x}{\alpha x} \alpha x}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin \beta x}{\beta x} \beta x} = \frac{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin \alpha x}{\alpha x}}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin \beta x}{\beta x}} \lim_{x\to 0} \frac{\alpha x}{\beta x} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

6.2.4. Предел сложной функции

Пусть определены функции $y = \varphi(x)$, $f(y)$ и их композиция — сложная функция $f(\varphi(x)) = \Phi(x)$. Тогда предел (если он существует) $\lim\limits_{x\to x_0} \Phi(x)$ называется пределом сложной функции $f(\varphi(x))$ при $x \to x_0$. Как вычислить предел сложной функции через пределы функций f и φ, входящих в композицию $\Phi = f \circ \varphi$? Ответ дает следующее утверждение.

Теорема 6.2.1. *(о пределе сложной функции). Пусть определены функции $y = \varphi(x)$, $f(y)$ и их композиция $\Phi(x) = f(\varphi(x))$. Пусть существуют пределы $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = a$, $\lim\limits_{y\to a} f(y) = A$. Тогда существует предел сложной функции*

$$\lim_{x\to x_0} f(\varphi(x)) = \lim_{y\to a} f(y) = A.$$

Доказательство. В силу существования пределов $\lim\limits_{y\to a} f(y) = A$ и $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = a$. Вначале для любого $\varepsilon > 0$ выберем $\varepsilon_1 > 0$ так, что

$$|y-a| < \varepsilon_1 \implies |f(y) - A| < \varepsilon;$$

затем для заданного ε_1 выберем $\delta > 0$ так, чтобы

$$|x - x_0| < \delta \implies |\varphi(x) - a| < \varepsilon_1.$$

Если теперь для заданного $\varepsilon > 0$ взять полученное $\delta > 0$, то выполняется следующая логическая цепочка

$$|x - x_0| < \delta \implies |\varphi(x) - a| = |y - a| < \varepsilon_1 \implies |f(y) - A| < \varepsilon.$$

Сравнивая первое и последнее неравенства этой цепочки и учитывая, что $y = \varphi(x)$, получаем импликацию

$$|x - x_0| < \delta \implies |\Phi(x) - A| < \varepsilon,$$

которое означает, что $\lim\limits_{x \to x_0} \Phi(x) = A$. Теорема доказана.

6.2.5. Второй замечательный предел

Так называется предел

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e = 2,718281828459045\ldots$$

Мы опускаем доказательство существования этого предела. В предположении, что он существует, вычислим его значение. Выбирая способ стремления $x \to 0$ в виде $x = x_n = \dfrac{1}{n} \to 0$ (при $n \to \infty$). Согласно вычислению числа $e = 2.71828...$ в п 6.1.6, находим

$$\lim_{x_n \to 0} (1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} = \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e = 2.718281828459045\ldots$$

Пример 6.2.4.

1. $$\lim_{x \to 0} (1 - x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} (1 + (-x))^{\frac{-1}{-x}} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{(1 + (-x))^{\frac{1}{-x}}} =$$

$$= \left(\lim_{-x \to 0} (1 + (-x))^{\frac{1}{-x}} \right)^{-1} = \frac{1}{e}.$$

2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} ln(1 + x) = \lim\limits_{x \to 0} \ln(1 + x)^{1/x} = \ln e = 1.$

6.2.6. Предел монотонной функции

Определение 6.2.2. *Функция $f(x)$, определенная на $E \subset \mathbb{R}$ называется возрастающей на E, если при любых $x_1, x_2 \in E$*

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2);$$

неубывающей на E, если при любых $x_1, x_2 \in E$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2);$$

невозрастающей на E, если при любых $x_1, x_2 \in E$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2);$$

убывающей на E, если при любых $x_1, x_2 \in E$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Функции, обладающие одним из указанных свойств называются монотонными на множестве E.

Теорема 6.2.2. *(о пределе монотонной функции). Если функция $f(x)$ монотонно возрастает (убывает) в окрестности точки x_0 и ограничена сверху (снизу), то она имеет предел.*

Доказательство этой теоремы мы опускаем.

6.2.7. Односторонние пределы

Будем говорить, что $f(x)$ имеет предел A слева в точке x_0 (или левый предел A), если $f(x) \to A$ при выполнении двух условий: $x \to x_0$ и $x < x_0$. Аналогично, $f(x)$ имеет предел B справа в точке x_0 (или правый предел B), если $f(x) \to B$ при $x \to x_0$ и $x < x_0$. Для обозначения левого предела используется запись

$$A = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$$

(читается: *предел слева в точке x_0*). Аналогично обозначается правый предел

$$B = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$$

(читается: *предел справа в точке x_0*).

Пример 6.2.5.

1. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x \leqslant 0; \\ -1, & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Имеем

$$\lim_{x \to 0-0} f(x) = 1, \quad \lim_{x \to 0+0} f(x) = -1.$$

2. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x < 0; \\ \cos x,, & \text{при } x \geqslant 0. \end{cases}$$

В этом случае $\lim\limits_{x \to 0-0} f(x) = 1 = \lim\limits_{x \to 0+0} f(x)$.

Замечание 6.2.2. *Сравнивая определение предела функции из п 6.2.1 и понятия односторонних пределов, приходим к следующему утверждению:* функция $f(x)$ имеет предел в точке x_0 тогда и только тогда, когда в этой точке она имеет равные левый и правый пределы.

В рассмотренном примере 6.2.5.1 $f(x)$ не имеет предела в точке $x = 0$ (левый и правый пределы не совпадают); в примере 6.2.5.2 $f(x)$ имеет предел в точке $x = 0$.

§ 6.3. Непрерывные функции

6.3.1. Определение и примеры

Интуитивное представление о непрерывной функции связано с таким процессом измерения, в котором измеряемая переменная величина мысленно определена для всех значений аргумента и может быть измерена со сколь угодно хорошей точностью. Принято считать, что такими свойствами обладают временные и пространственные протяженности. Задачи измерения переменной величины составляют суть теории предела и обсуждались в § 1.3. Отвлечемся от физического содержания переменной величины и обратимся к числовым функциям, представляющим эти величины. Тогда интуитивное понятие непрерывности принимает строгое определение.

Определение 6.3.1. *Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если выполнены следующие условия:*
1) $f(x)$ определена в точке x_0 и в некоторой ее окрестности;
2) существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;
3) этот предел равен значению функции в точке x_0

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Функция $f(x)$ называется *непрерывной на множестве E* числовой оси R, если $f(x)$ непрерывна в каждой точке $x \in E$.

Пример 6.3.1.
1) $f(x) = x\sin\dfrac{1}{x}$ (см. пример 6.2.1 из п 6.2.1). Эта функция определена в некоторой окрестности точки $x = 0$, но не определена в самой точке $x = 0$. Поэтому, несмотря на то, что существует предел $f(x) \to 0$ при $x \to 0$, эта функция не является непрерывной в точке $x = 0$, так как нельзя сказать, что $f(x) \to f(0)$ при $x \to 0$.

2) Пусть

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{при } x \neq 0; \\ 1, & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Эта функция определена в точке $x = 0$ $(y(0) = 1)$*, и в ее окрестности, имеет предел при* $x \to 0$ *и этот предел равен значению функции в точке* $x = 0$*:* $\dfrac{\sin x}{x} \to 1 = y(0)$*, при* $x \to 0$*, см. 6.2.4 — первый замечательный предел.*

6.3.2. Операции над непрерывными функциями

Определяющим свойством непрерывной функции является то, что она имеет пределом свое значение во всех точках определения. Поэтому непрерывные функции сохраняют все свойства предела числовой функции. Перечислим эти свойства.

Арифметические операции над непрерывными функциями (сложение, вычитание, умножение и деление, если делитель не обращается в ноль) дают снова непрерывные функции в области их определения.

Композиция двух и более непрерывных функций в области своего определения снова является непрерывной функцией.

Пример 6.3.2.

1) $f(x) = \ln\sin x$ *определена и непрерывна при* $x \in (2\pi k, 2\pi k + \pi)$*,* $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

2) $\varphi(x) = \ln \operatorname{tg} x$ *определена и непрерывна при* $x \in (\pi k, \pi k + \pi/2)$*,* $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

3) $\psi(x) = f(x) + \varphi(x) = \ln\sin x + \ln \operatorname{tg} x$ *определена и непрерывна при* $x \in (2\pi k, 2\pi k + \pi/2)$*,* $k = 0, 1, 2, \ldots$

6.3.3. Свойства функции, непрерывной на замкнутом промежутке

Функция $f(x)$, непрерывная на открытом интервале (a, b), называется *непрерывной на замкнутом интервале* $[a, b]$, если существует правый предел в точке a, равный $f(a)$ и левый предел в точке b, равный $f(b)$:

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = f(a), \quad \lim_{x \to b-0} f(x) = f(b).$$

Например, функция $y = \sin\dfrac{1}{x}$ определена и непрерывна на $(0, 1]$; в точке $x = 0$ она не определена и при $x \to 0$ предела не имеет.

Функции, непрерывные на замкнутом промежутке обладают следующими фундаментальными свойствами:

Первая теорема Вейерштрасса. *Если функция непрерывна на замкнутом промежутке, то она ограничена на этом промежутке.*

Вторая теорема Вейерштрасса. *Если функция непрерывна на замкнутом промежутке, то она принимает на этом промежутке свои наибольшее M и наименьшее m значения, т. е. существуют x_1 и $x_2 \in [a,b]$ такие, что*

$$m = f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2) = M$$

для всех $x \in [a,b]$.

Теорема о промежуточных значениях. *Если функция непрерывна на замкнутом промежутке, то она принимает все значения между своими наименьшим m и наибольшим M значениями, т. е. для любого числа A, $m < A < M$, существует точка $x_0 \in (a,b)$ такая, что $f(x_0) = A$.*

Теорема Больцано-Коши. *Если функция непрерывна на замкнутом промежутке и принимает на концах этого промежутка значения разных знаков (т. е. $f(a)f(b) < 0$), то внутри этого промежутка существует хотя бы одна точка x_0, такая, что $f(x_0) = 0$.*

Мы опускаем доказательство этих свойств, ограничившись их иллюстрацией, рис. 5.5.

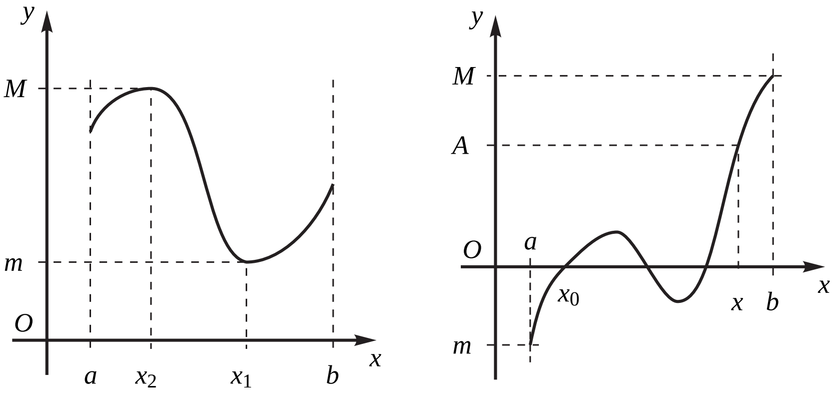


Рис. 5.5

6.3.4. Непрерывность обратной функции

Рассмотрим пример функции (рис. 5.6)

$$y = f(x) = \begin{cases} x, & \text{при } x \in [0,1) \\ x-1, & \text{при } x \in [2,3]. \end{cases}$$

(стрелкой на графике будем указывать точку, которая этому графику не принадлежит).

Эта функция монотонна, непрерывна и взаимно однозначно отображает точки множества $E = [0,1) \cup [2,3]$ на точки замкнутого интервала $[0,2]$. Обратная к ней функция

$$x = f^{-1}(y) = \begin{cases} y, \text{ при } y \in [0,1) \\ y+1, \text{ при } y \in [1,2], \end{cases}$$

разрывна в точке $x = 1$, так как

$$\lim_{y\to 1-0} f^{-1}(y) = 1 \neq \lim_{y\to 1+0} f^{-1}(y) = 2.$$

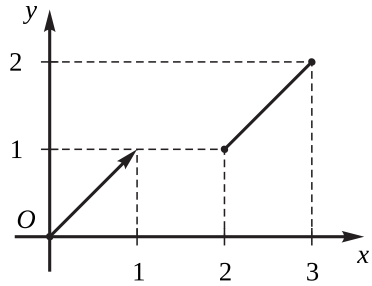


Рис. 5.6

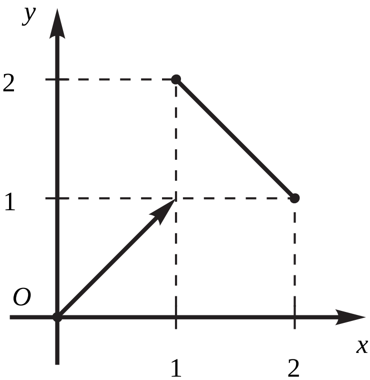


Рис. 5.7

Вывод: непрерывное взаимно однозначное отображение $f : E \to [c,d]$, определенное на некотором числовом множестве E может иметь обратное отображение, не являющееся непрерывным.

Однако если множество E — интервал, то верно следующее утверждение.

Теорема 6.3.1. *(об обратной функции). Пусть* $f : [a,b] \to [c,d]$ *— взаимно однозначное и непрерывное отображение интервала* $[a,b]$ *на* $[c,d]$. *Тогда обратное отображение также непрерывно.*

Замечание 6.3.1. *Если числовая функция одного переменного только возрастает (или только убывает) в области своего определения, то она может и не быть взаимно однозначной, как, например,* $f(x) = \mathrm{tg}\, x$, $x \neq \pi/2 + \pi k$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ *Обратно, если функция взаимно однозначно отображает отрезок, она не обязательно монотонна, например функция на рис. 5.7:*

$$y = \begin{cases} x, \text{ при } x \in [0,1) \\ 3 - x, \text{ при } x \in [1,2]. \end{cases}$$

6.3.5. Непрерывность элементарных функций

Всякая элементарная функция согласно своему определению (см. п 1.6.4) есть результат конечного числа арифметических операций, операций взятия обратной функции и операций композиции над основными элементарными функциями $y = ax + b$, $y = \sin x$ и $\log_a x$. Эти основные элементарные функции являются непрерывными в своих областях определения (см. упражнения ниже). Поэтому согласно свойствам непрерывных функций непрерывной будет любая элементарная функция в области своего определения.

УПРАЖНЕНИЕ 6.3.1. *Доказать непрерывность основных элементарных функций:* $ax + b$, $\sin x$, $\log_a x$.

Указание: преобразовать разности $f(x+h) - f(x)$ этих функций и показать, что при $h \to 0$ будет выполняться свойство $|f(x+h) - f(x)| \to 0$. Затем воспользоваться эквивалентностью определения непрерывности $f(x)$ в точке x_0 и импликации

$$x \to x_0 \implies f(x) \to f(x_0).$$

6.3.6. Сравнение бесконечно малых функций

Стремление бесконечно малой функции к нулю может происходить с различными скоростями как относительно аргумента, так и относительно других бесконечно малых функций. Приведем соответствующие определения.

Классификация бесконечно малых функций

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые функции при $x \to x_0$. Тогда будем говорить, что:

1) α и β — бесконечно малые одного порядка малости при $x \to x_0$, если

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \mathrm{const} \neq 0$$

(обозначается $\alpha = O(\beta)$, читается α есть O-большое от β);

2) α и β — эквивалентные бесконечно малые при $x \to x_0$, если

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$$

(в этом случае будем писать $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \to x_0$, читается α эквивалентно β);

3) $\alpha(x)$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем $\beta(x)$, если

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0,$$

(обозначается $\alpha = o(\beta)$, читается α есть o-малое от β);

4) α является бесконечно малой порядка k относительно бесконечно малой β при $x \to x_0$, если

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{(\beta(x))^k} = \text{const} \neq 0.$$

Замечание 6.3.2. *Учитывая, что* $\gamma(x) = \dfrac{1}{\alpha(x)}$ *есть бесконечно большая функция, если* α *— бесконечно малая функция, можно сформулировать аналогичную классификацию сравнения бесконечно больших функций.*

Приведенная классификация применяется для вычисления пределов. Продемонстрируем это в общем виде. Пусть $\alpha(x) = O(\alpha_1(x))$, $\beta(x) = O(\beta_1(x))$ и

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)} = C_1, \quad \lim_{x \to x_0} \frac{\beta(x)}{\beta_1(x)} = C_2.$$

Тогда

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \right) = \lim_{x \to x_0} \left(f(x) \frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)} \frac{\beta_1(x)}{\beta(x)} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} \right) =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left(f(x) \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} \right) \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)} \lim_{x \to x_0} \frac{\beta_1(x)}{\beta(x)} =$$

$$= \frac{C_1}{C_2} \lim_{x \to x_0} f(x) \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

Пример 6.3.3.

1) Найти предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin kx}{\sin lx}.$$

Так как $\sin kx \sim kx$, $\sin lx \sim lx$ *(проверить!), то* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin kx}{\sin lx} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{kx}{lx} = \dfrac{k}{l}$.

2) Найти предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 2x}{\sin^2 3x}.$$

Так как $1 - \cos 2x = 2\sin^2 x \sim 2x^2$, $\sin^2 3x \sim (3x)^2 = 9x^2$, *то* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 2x}{\sin^2 3x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^2}{9x^2} = \dfrac{2}{9}$.

Ниже мы рассмотрим более подробно технику нахождения пределов.

6.3.7. Три типа разрыва непрерывности функций

Будем говорить, что функция $f(x)$ имеет разрыв в точке x_0, если в этой точке $f(x)$ не является непрерывной. Различают следующие типы разрывов:

1. *Устранимый разрыв* в точке x_0 определяется как ситуация, в которой $f(x)$ определена в окрестности точки x_0 и имеет предел

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A$$

но при этом либо f не определена в точке x_0, либо $f(x_0)$ определена, но $f(x_0) \neq A$. В первом случае функцию $f(x)$ доопределяют в точке x_0 значением A, а во втором случае ее переопределяют, полагая за новое в точке x_0 значение A. После чего функция становится непрерывной.

Например, $y = \dfrac{\sin x}{x}$ при $x \to 0$ имеет такой устранимый разрыв. Действительно, достаточно положить

$$y = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{при } x \neq 0 \\ 1, & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

и $y(x)$ станет непрерывной в точке $x = 0$ (см. первый замечательный предел).

Аналогичной является функция $y = x \sin \dfrac{1}{x}$, (см. пример 6.2.1, п 6.2.1).

Здесь также существует $\lim\limits_{x\to 0} x \sin \dfrac{1}{x} = 0$, поэтому доопределенная функция

$$y = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & \text{при } x \neq 0 \\ 0, & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

также становится непрерывной.

2. *Разрыв первого рода (скачок)* в точке x_0 определяется как несовпадение левого и правого предела при $x \to x_0$:

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0 - 0) \neq \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0 + 0).$$

Поскольку левый и правый предел существуют, то этот случай называют скачком функции $f(x)$ в точке x_0. Сам скачок вычисляется как разность предела справа и слева: $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ (на рис. 5.8 обозначено $f_+ = f(x_0+0)$ и $f_- = f(x_0 - 0)$).

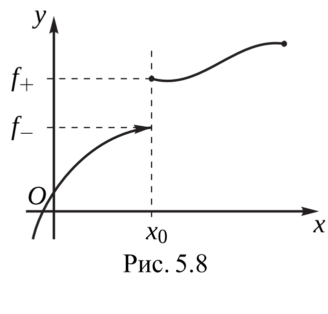


Рис. 5.8

3. *Разрыв второго рода* в точке x_0 определяется отсутствием (не существованием) хотя бы одного из односторонних пределов. Это равносильно тому, что хотя бы один из пределов либо не существует, либо бесконечен:

ПРИМЕР 6.3.4. $y = \sin\dfrac{\pi}{x}$. *Эта функция при* $x \to 0$ *предела не имеет ни справа, ни слева.*

Действительно, пусть $x_k = \dfrac{1}{k}$, $k = 1, 2, \ldots$, тогда $y(x_k) = \sin \pi k = 0$ и $\lim\limits_{x_k \to 0} y(x_k) = 0$; если взять $x'_k = \dfrac{2}{4k+1}$, то $y(x'_k) = \sin\dfrac{\pi}{2}(4k+1) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = 1$. Следовательно, $\lim\limits_{x'_k \to 0} y(x'_k) = 1$. Таким образом, в любой как угодно малой окрестности точки $x = 0$ справа будут существовать значения функции, равные 0 и 1, что противоречит существованию предела. Аналогично проверяется несуществование предела слева в точке $x = 0$.

УПРАЖНЕНИЕ 6.3.2. *Показать, что функция* $y = a^{\frac{1}{1-x}}$, *(*$a > 1$*) имеет разрыв второго рода в точке* $x = 1$.

Указание: Вычислить $\lim\limits_{x \to 1-0} a^{\frac{1}{1-x}} = \infty$ и $\lim\limits_{x \to 1+0} a^{\frac{1}{1-x}} = 0$.

Глава 7

Дифференциальное исчисление функции одной переменной

§ 7.1. Производная и дифференциал

7.1.1. Вычисление скорости прямолинейного движения

Процесс движения точки вдоль прямой называется прямолинейным движением точки и определяется законом движения $S = \varphi(t)$, указывающим координату S на числовой оси в момент времени t. Согласно этому закону за каждый определенный промежуток времени $\Delta t = t - t_0$, отсчитываемый от момента времени t_0, точка проходит расстояние $\Delta S = \varphi(t) - \varphi(t_0) = \varphi(t + \Delta t) - \varphi(t_0)$ со средней скоростью

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

Чем меньше временной промежуток Δt, тем точнее измеряется средняя скорость перемещения ΔS за время Δt. Принято считать, что в процессе уменьшения интервала Δt мы будем получать значение средних скоростей в момент времени t_0. Таким образом, мы приходим к понятию истинной скорости в момент времени t_0, определяемой пределом

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\varphi(t_0 + \Delta t) - \varphi(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = v(t_0).$$

Заметим, что если этот предел не существует, то величина скорости в момент времени t_0 не определена.

Пример 7.1.1.

1. Закон движения задается зависимостью координаты x от времени t $x = \dfrac{gt^2}{2}$. Найти скорость в момент времени $t = 1$.

Имеем $\Delta x = x(t+\Delta t) - x(t) = g\dfrac{(t+\Delta t)^2}{2} - g\dfrac{t^2}{2} = gt\Delta t + \dfrac{g\Delta t^2}{2}$,

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(gt + g\frac{\Delta t}{2} \right) = gt.$$

При $t = 1$ получаем $v(1) = g$.

2. Закон движения задается зависимостью

$$x(t) = (t - t_0)\sin\frac{1}{t - t_0}$$

Найти скорость в момент времени $t = t_0$

Вначале заметим, что функция $x(t)$ при $t = t_0$ имеет устранимый разрыв и становится непрерывной, если ее доопределить значением $x(t_0) = 0$ (см. устранимый разрыв в п 6.3.7). Учитывая это, находим

$$\Delta x = x(t_0 + \Delta t) - x(t_0) = \Delta t \cdot \sin\frac{1}{\Delta t}.$$

Поэтому предел

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \sin\frac{1}{\Delta t}$$

не существует (см. пример 6.3.4).

Таким образом, точка, выполняющая прямолинейное движение по заданному закону $x(t)$ в момент времени $t = t_0$ истинной скорости не имеет.

7.1.2. Понятие производной

Представление о процессах, происходящих в окружающем мире, связано с понятием скорости изменения тех или иных величин. Мы рассмотрели простейший процесс — прямолинейное движение точки. В других процессах указан закон $y = f(x)$ изменения величины y в зависимости от аргумента x и понятие «скорости» изменения y относительно x приводит к вычислению предела отношения приращения функции $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$ к приращению аргумента x.

Определение 7.1.1 (производной). *Если существует предел отношения приращения функции $f(x)$ в точке x к приращению независимого аргумента Δx, то он называется производной функции $f(x)$ по переменной x и обозначается $f'(x)$*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x).$$

Приняты различные способы обозначения производной: $f'(x)$, $\dfrac{df}{dx}$, $y'(x)$, f'_x и др.

Операция нахождения производной называется дифференцированием функции. Если $f'(x)$ существует во всех точках интервала (a,b), то говорят, что $f(x)$ имеет производную $f'(x)$ на (a,b) или $f(x)$ дифференцируема на (a,b).

7.1.3. Вычисление производной основных элементарных функций $y = ax + c$, $y = \sin x$, $y = \log_a x$

1. Для $ax + b$ находим $\Delta y = a(x + \Delta x) + c - (ax + c) = a\Delta x$,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a\Delta x}{\Delta x} = a.$$

В частности, для постоянной функции $y = C$ — const приращения $\Delta y = 0$ при любых Δx , поэтому

$$(C)' = 0, \quad (C - \text{ const}).$$

2. Для $y = \sin x$ приращение $\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$ представим в виде $\sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\cos\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right)\sin\dfrac{\Delta x}{2}$. Тогда, используя первый замечательный предел, получим

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}} = \cos x.$$

Таким образом,

$$(\sin x)' = \cos x.$$

Упражнение 7.1.1. *Получить аналогичным образом формулу* $(\cos x)' = -\sin x$.

3. Для $y = \log_a x$ преобразуем $\Delta y = \log_a(x + \Delta x) - \log_a x =$

$= \log_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)$. Используя второй замечательный предел, находим

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\frac{\log_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\dfrac{\Delta x}{x}} =$$

$$= \frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\dfrac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x\ln a}.$$

Таким образом

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x\ln a}.$$

В частности, для натурального логарифма при $a = e$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

7.1.4. Дифференциал функции

По теореме о необходимом и достаточном условии существования предела мы имеем два эквивалентных условия

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x) \iff \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x)+\alpha(\Delta x)$$

где $\alpha(\Delta x)$ — бесконечно малая функция от Δx при $\Delta \to 0$. Обозначим $\alpha(\Delta x)\Delta x = o(\Delta x)$ и напомним, что o-малое от Δx обозначает свойство $\dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x} \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Учитывая сказанное, запишем условие существования $f'(x)$ в виде

$$\Delta f = f'(x)\Delta x + o(\Delta x). \tag{7.1.1}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = 0. \tag{7.1.2}$$

Таким образом, нами доказано следующее утверждение

Теорема 7.1.1. *(о необходимом и достаточном условии дифференцируемости). Функция $f(x)$ дифференцируема в точке x тогда и только тогда, когда ее приращение представляется в виде* (7.1.1) *и в этом представлении выполняется условие* (7.1.2).

Обратим внимание на то, что: 1) в представлении (7.1.1) выражение $f'(x)\Delta x$ является линейной функцией по Δx в фиксированной точке x; 2) бесконечно малая функция $o(\Delta x)$ имеет более высокий порядок малости, чем Δx. В силу этих двух свойств представления (7.1.1) выражение $f'(x)\,dx$ называют линейной частью приращения Δf. Поэтому существует другое определение дифференцируемости.

Определение 7.1.2 (дифференцируемости). *Функция $f(x)$ называется дифференцируемой в точке x, если ее приращение Δf в этой точке имеет главную линейную часть, т. е. представляется в виде*

$$\Delta f = A(x)\Delta x + o(\Delta x), \quad \textit{где} \lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = 0.$$

При этом величина $A(x) = f'(x)$ называется производной функции $f(x)$ в точке x, а главная линейная часть $f'(x)\Delta x$ называется дифференциалом и обозначается

$$df = f'(x)\,dx.$$

7.1.5. Геометрический смысл производной и дифференциала

В декартовой системе координат Oxy изобразим график функции $y = f(x)$. Две точки $M_0(x_0, f(x_0))$ и $M_1(x_1, f(x_1))$ этого графика соединим отрезком прямой, которую назовем секущей, рис. 6.1.

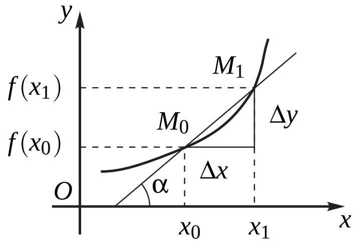


Рис. 6.1

Уравнение этой секущей ищем в виде $y = kx + b$. Учитывая, что угловой коэффициент $k = \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$, запишем уравнение секущей в виде $y = \dfrac{\Delta f}{\Delta x}x + b$. Так как эта прямая проходит через точку $(x_0, f(x_0))$, то выполняется условие

$$f(x_0) = \frac{\Delta f}{\Delta x}x_0 + b,$$

откуда находим коэффициент $b = f(x_0) - \dfrac{\Delta f}{\Delta x}x_0$. Подставляя найденное значение b в искомое уравнение секущей $y = \dfrac{\Delta f}{\Delta x} + b$ и выполняя группировку, получаем уравнение секущей в виде

$$y - f(x_0) = \frac{\Delta f}{\Delta x}(x - x_0). \tag{7.1.3}$$

Устремим теперь точку M_1 к точке M_0. Тогда приращение $\Delta x = x - x_0 \to 0$ и если существует предел

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0), \tag{7.1.4}$$

то одновременно выполняются два условия:

1) секущая M_1M_0 стремится при $M_1 \to M_0$ занять предельное положение, которое мы назовем касательной в точке $(x_0, f(x_0))$ к графику функции $f(x)$;

2) угловой коэффициент касательной в точке $(x_0, f(x_0))$ равен $f'(x_0)$, а само уравнение касательной получается из уравнения (7.1.3) предельным переходом в правой части при $\Delta x = x_1 - x_0 \to 0$ и принимает вид

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \tag{7.1.5}$$

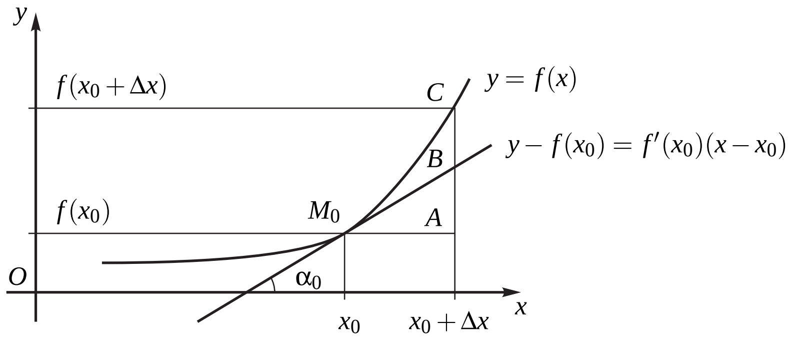


Рис. 6.2

Вывод 1 (геометрический смысл производной). Производная $f'(x_0)$ в точке x_0 есть угловой коэффициент касательной в этой точке, т. е. равна тангенсу угла наклона касательной к оси Ox, (рис. 6.2)

$$f'(x_0) = k_0 = \operatorname{tg}\alpha_0.$$

Вернемся к уравнению касательной (7.1.5) и заметим, что приращение зависимой переменной линейной функции, определяемой (7.1.5) и соответствующей приращению независимого аргумента Δx равно дифференциалу функции, вычисленному в точке касания x_0:

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x \tag{7.1.6}$$

Вывод 2 (геометрический смысл дифференциала). Дифференциал $df = f'(x_0)\Delta x$, вычисленный при заданных x_0 и Δx, равен приращению Δy координаты y уравнения касательной, проведенной к графику $y = f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$.

На рис. 6.2 величина дифференциала df обозначается отрезком AB. Отрезок AC равен приращению функции Δf, а отрезок BC представляет бесконечно малую более высокого порядка малости $o(\Delta x) = BC$. В этих обозначениях формула приращения функции (7.1.1) принимает вид $AC = AB + BC$.

Геометрический смысл формулы приближенного вычисления (7.1.1) состоит в том, что мы пренебрегаем величиной отрезка BC (при достаточно малых значениях Δx!) и считаем, что приближенно выполняется равенство $f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0)+AB$ (рис. 6.2).

Замечание 7.1.1. *На рис. 6.1 и рис. 6.2 мы ограничились изображением случая $\Delta x = x_1 - x_0 > 0$, полагая, что существование предела* (7.1.4) *соответствует совпадению левого предела при $\Delta x = x_1 - x_0 < 0$ и правого предела при $\Delta x > 0$, когда $\Delta x \to 0$. Может случится, что в точке x_0 существуют левый и правый пределы*

$$\lim_{x\to x_0-0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0-0), \quad \lim_{x\to x_0+0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0+0),$$

не равные между собой: $f'(x_0-0) \neq f'(x_0+0)$. Тогда говорят, что в точке x_0 существуют левая и правая производные, не равные друг другу. Это означает, что в точке x_0 существуют левая касательная с угловым коэффициентом $k_1 = \operatorname{tg}\alpha_1 = f'(x_0-0)$ и правая касательная с угловым коэффициентом $k_2 = \operatorname{tg}\alpha_2 = f'(x_0+0)$ (рис. 6.3).

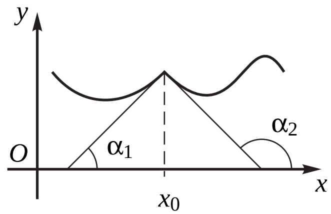


Рис. 6.3

Упражнение 7.1.2. *Показать, что функция*

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, \text{ при } x \leqslant 0 \\ x\sin\dfrac{1}{x}, \text{ при } x > 0 \end{cases}$$

в точке $x_0 = 0$ имеет левую производную и левую касательную и не имеет правой производной и правой касательной.

7.1.6. Непрерывность и дифференцируемость

Функция $f(x)$, дифференцируемая в точке x_0, будет в этой точке непрерывной. Это следует из формулы для приращений (7.1.2) для дифференцируемой функции. Действительно, согласно этой формуле и свойству абсолютных величин, имеем неравенство

$$|\Delta f| \leqslant |f'(x_0)||\Delta x| + |\Delta x|\frac{|o(\Delta x)|}{|\Delta x|} =$$

$$= |\Delta x|\left(|f'(x_0)| + \frac{|o(\Delta x)|}{|\Delta x|}\right) \leqslant |\Delta x| C,$$

где $|f'(x_0)| + \dfrac{|o(\Delta x)|}{|\Delta x|} \leqslant C -$ const.

Согласно этому неравенству для любого $\varepsilon > 0$ достаточно взять $\delta < \dfrac{\varepsilon}{C}$, тогда будет

$$|\Delta x| < \delta \implies |\Delta f| < C,$$

что означает непрерывность в точке x_0.

Обратное утверждение в общем случае не верно. Функция, непрерывная в точке x_0 может в этой точке не иметь производной. Рассмотрим два примера.

Пример 7.1.2. $y = |x - x_0| = \begin{cases} x - x_0, \ \text{при } x \geqslant x_0, \\ -(x - x_0), \ \text{при } x < x_0. \end{cases}$ *Здесь* $y'(x_0 + 0) = 1 \neq -1 = y'(x_0 - 0)$.

Пример 7.1.3. $y = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, \ \text{при } x \neq 0, \\ 0, \ \text{при } x = 0. \end{cases}$

В этом примере при $x = 0$ *не существует ни левая, ни правая производная, хотя эта функция непрерывная в точке* $x = 0$.

Не имеет производной при $x = 0$ функция $f(x)$ из упражнения 7.1.2 предыдущего пункта. Для нее $f'(x_0 - 0) = \cos 0 = 1$, а $f'(0 + 0)$ не определена.

§ 7.2. Свойства операции дифференцирования

Множество элементарных функций определялось в п 1.6.4 вводится как результат арифметических операций $\pm$, $\times$, div, а также взятия обратной функции f^{-1} и композиции двух и более функций $f \circ g \circ \ldots \circ \varphi$ совершаемых в начале над тремя основными функциями $ax + b$, $\sin x$, $\log_a x$, а затем над уже полученными функциями. Поэтому, чтобы выполнить дифференцирование произвольной элементарной функции, надо вывести правила дифференцирования исходных основных элементарных функций и указанных выше операций. Производные трех основных элементарных функций мы вычислили в п 7.1.3. В этом параграфе мы научимся дифференцировать указанные выше три типа операций.

7.2.1. Дифференцирование арифметических операций

Теорема 7.2.1. *(арифметические свойства производной). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x, тогда*

a) их сумма и разность дифференцируемы в x, причем

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x);$$

b) их произведение дифференцируемо в точке x, причем

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

в частности $(Cf(x))' = Cf'(x)$, если C —const;

c) их частное дифференцируемо в x, и, если $g(x) \neq 0$, то

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f(x)'g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Доказательство. a) используя определение производной и свойство предела суммы, запишем

$$(f(x) \pm g(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) \pm g(x+\Delta x) - (f(x) \pm g(x))}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = f'(x) \pm g'(x);$$

b) для доказательства этого свойства запишем $f(x+\Delta x) = f(x) + \Delta f$, $g(x+\Delta x) = g(x) + \Delta g$. Тогда, по определению производной, с учетом арифметических свойств предела, находим

$$(fg)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(f(x)+\Delta f)(g(x)+\Delta g) - f(x)g(x)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} g(x) + \lim_{\Delta x \to 0} f(x)\frac{\Delta g}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}\Delta g =$$
$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) + f'(x)\lim_{\Delta x \to 0} \Delta g.$$

Приращение дифференцируемой функции Δg является бесконечно малой функцией, см. п 7.1.6, поэтому $\Delta g \to 0$ при $\Delta x \to 0$ и мы получаем требуемое правило b). Правило $(Cf(x))' = Cf'(x)$ следует отсюда, если $g(x) = C -$ const, так как $C' = 0$;

c) вначале преобразуем отношение приращения функции $f(x)/g(x)$ к приращению аргумента Δx, предварительно заметив, что из дифференцируемости $g(x)$ в точке x следует непрерывность $g(x)$ и то, что $g(x) \neq 0$ влечет это свойство $g(x+\Delta x) \neq 0$ в некоторой окрестности x, поэтому определено частное

$$\frac{\dfrac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} = \frac{\dfrac{f(x)+\Delta f}{g(x)+\Delta g} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} = \frac{\dfrac{\Delta f}{\Delta x} g(x) - f(x)\dfrac{\Delta g}{\Delta x}}{g^2(x)+g(x)\Delta g}.$$

Теперь, учитывая, что $\Delta g \to 0$ при $\Delta x \to 0$, и используя арифметические свойства предела, заключаем, что левая часть этих равенств стремится по определению производной к величине $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'$, а правая часть — к величине $\dfrac{f'g-g'f}{g^2}$. Правило c), а вместе с ним и теорема 7.2.1 доказаны.

Следствие 7.2.1. *Пусть* $f(x) = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + \ldots + C_n f_n(x)$, *где* $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — const *и все функции* $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ *дифференцируемы, тогда*

$$f'(x) = C_1 f_1'(x) + \ldots + C_n f_n'(x).$$

Это следует из многократного применения свойств a) и b) теоремы 7.2.1.

Следствие 7.2.2. *Если* $f(x) = u(x)v(x)w(x)$ *и функции* $u(x)$, $v(x)$, $w(x)$ *дифференцируемы, то, применяя правило b) дважды, получим*

$$((uv)w)' = (uv)'w + uvw' = u'vw + uv'w + uvw'.$$

Аналогично дифференцируется произведение большего числа сомножителей.

Следствие 7.2.3. *Пусть* $f(x)$ *и* $g(x)$ *дифференцируемы в точке* x, *тогда:*

a) определен дифференциал их суммы и разности:

$$d(f \pm g) = df \pm g;$$

b) определен дифференциал их произведения

$$d(fg) = g\,df + f\,dg,$$

в частности при $g = C$ — const $d(Cf) = C\,df$*;*

c) определен дифференциал их частного и, если $g(x) \neq 0$, *то*

$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\,df - f\,dg}{g^2}.$$

Проверка этих свойств основана на связи между дифференциалом и производной функции $f(x) = f'\,dx$:

a) $d(f \pm g) = (g \pm g)'dx = f'\,dx \pm g'\,dx = df \pm dg$;

b) $d(fg) = (fg)'dx = (f'\,dx)g + f(g'\,dx) = g\,df + f\,dg$, в частности если $g = C -$ const, то $dg = C'\,dx = 0$ и мы получаем $d(Cf) = C\,df$;

c) $d\left(\dfrac{f}{g}\right) = \left(\dfrac{f}{g}\right)' dx = \dfrac{(f'\,dx)g - f(g'\,dx)}{g^2} = \dfrac{g\,df - f\,dg}{g^2}$.

Теорема 7.2.1 позволяет расширить список функций, которые мы уже умеем дифференцировать. Рассмотрим примеры.

Пример 7.2.1.

1. Вычислим $(\operatorname{tg} x)'$.

Так как $(\sin x)' = \cos x$, *а* $(\cos x)' = -\sin x$, *см. п 7.1.3, то согласно правилу c) теоремы 7.2.1 находим*

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{cos^2 x} =$$

$$= \frac{cos^2 x + sin^2 x}{cos^2 x} = \frac{1}{cos^2 x}.$$

Аналогично вычисляется

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{sin^2 x}.$$

2. $(x \ln x)' = x' \ln x + x(\ln x)' = \ln x + \dfrac{x}{x} = \ln x + 1.$

3. $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)' = \dfrac{(\sin x)'x - x' \sin x}{x^2} = \dfrac{(\cos x)x - \sin x}{x^2}.$

4. $(\ln x^{\alpha})' = (\alpha \ln x)' = \alpha(\ln x)' = \dfrac{\alpha}{x}$, α —const.

7.2.2. Производная сложной функции

Теорема 7.2.2. *(правило дифференцирования сложной функции). Пусть определена сложная функция* $f \circ \varphi(x)$ *и пусть:*

1) существует $\varphi'(x)$ *в точке x,*

2) существует $f'(y)$ *в точке* $y = \varphi(x)$.

Тогда существует $(f \circ \varphi(x))'$ *в точке x, причем*

$$(f \circ \varphi(x))' = (f' \circ \varphi(x)) \cdot \varphi'(x). \qquad (7.2.1)$$

Доказательство. По теореме о необходимом и достаточном условии дифференцируемости (п 7.1.4) напишем

$$\Delta f = f(y + \Delta y) - f(y) = f'(y)\Delta y + o(\Delta y),$$

где $o(\Delta y)/\Delta y \to 0$ при $\Delta y \to 0$. Разделив это равенство на Δx, получим
$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(y)\frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{o(\Delta y)}{\Delta x}.$$

Представим второе слагаемое в виде $\dfrac{o(\Delta y)}{\Delta x} = \dfrac{o(\Delta y)}{\Delta y}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ и, учитывая, что $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$, заключаем, что
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{o(\Delta y)}{\Delta y}\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x)\lim_{\Delta y\to 0}\frac{o(\Delta y)}{\Delta y} = 0.$$
Учитывая это и переходя к пределу в выражении $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$, получаем
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(y)y'(x).$$
Подставляя сюда $y = \varphi(x)$ и учитывая, что
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\circ\varphi(x+\Delta x) - f\circ\varphi(x)}{\Delta x} = (f\circ\varphi(x))'.$$
Получаем требуемое правило.

Следствие 7.2.4. *Пусть определена сложная функция, являющаяся композицией более двух функций $f\circ\varphi\circ\psi(x)$. Тогда, применяя теорему 7.2.2 вначале к сложной функции $f\circ f_1(x)$, где $f_1(x) = \varphi\circ\psi(x)$, а затем к $f_1(x) = \varphi\circ\psi(x)$, получим*
$$(f\circ\varphi\circ\psi(x))' = (f'\circ\varphi\circ\psi(x))(\varphi'\circ\psi(x))\psi'(x).$$

Применение этого правила требует правильной расстановки композиций в сложной функции.

Пример 7.2.2. *Найти* $(\mathrm{tg}^3(x))'$.

Здесь $\mathrm{tg}^3(x)$ есть композиция двух функций y^3 и $y = \mathrm{tg}\,x$. Поэтому $(\mathrm{tg}^3(x))' = (y^3)'_y y'_x = 3y^2(x)\dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{3\,\mathrm{tg}^2(x)}{\cos^2(x)}$.

Пример 7.2.3. *Найти* $(\mathrm{tg}\,x^3)'$.

Здесь $\mathrm{tg}\,x^3 = z(y(x))$, $z(y) = \mathrm{tg}\,y$, $y = x^3$. Поэтому $(\mathrm{tg}\,x^3)' = z'_y y'_x = \dfrac{1}{cos^2 y}3x^2 = \dfrac{3x^2}{cos^2 x^3}$.

Пример 7.2.4. *Найти* $(\ln(3+2\sin x)'$.

Здесь $\ln(3+2\sin x) = w(z(y(x)))$, где $w(z) = \ln z$, $z(y) = 3+2y$, $y(x) = \sin x$. Поэтому $(\ln(3+2\sin x))' = w'_z z'_y y'_x = \dfrac{1}{z}\cdot 2\cos x = \dfrac{2\cos x}{3+2\sin x}$.

Следствие 7.2.5. *(инвариантность формы дифференциала). Дифференциал сложной функции $w = w(y)$, где $y = y(x)$ может быть записан в виде $dw = w'_y\,dy$, где $dy = y'_x\,dx$. Таким образом формула для дифференциала сложной функции имеет такой же вид, как и в том случае, если бы промежуточный аргумент y являлся бы независимой переменной*

$$dw = (w(y(x)))'_x\,dx = w'_y y'_x\,dx = w'_y\,dy. \tag{7.2.2}$$

Это свойство дифференциала сложной функции называется инвариантностью формы дифференциала.

7.2.3. Производная обратной функции

Теорема 7.2.3. *(о производной обратной функции). Пусть*

1) функция $y = y(x)$ в окрестности точки x имеет обратную непрерывную непрерывную функцию $x = x(y)$,

2) существует конечная производная $y'(x) \neq 0$ в точке x.

Тогда обратная функция $x(y)$ имеет производную в точке $y = y(x)$, вычисляемую по правилу

$$x'_y(y) = \frac{1}{y'(x(y))}. \tag{7.2.3}$$

Доказательство. В силу непрерывности $x(y)$ условие $\Delta y \to 0$ влечет $\Delta x \to 0$. Поэтому

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{y'(x)}.$$

Следовательно существует предел левой части, который по определению равен $x'_y(y)$. Осталось заметить, что в правой части $x = x(y)$. Правило (7.2.3) доказано.

Замечание 7.2.1. *Обратим внимание на то, что левая и правая часть формулы* (7.2.3) *зависит того же аргумента, от которого зависит обратная функция.*

Применим теорему 7.2.3 к вычислению обратных функций.

1. Рассмотрим $y = a^x$. Эта функция является обратной к функции $x = \log_a y$. Так как

$$x'_y = (\log_a y)'_y = \frac{1}{y\ln a},$$

то $y'_x(x) = (a^x)' = \dfrac{1}{x'_y(y)} = y\ln a\Big|_{y=a^x} = a^x\ln a.$

Таким образом
$$(a^x)' = a^x \ln a,$$
в частности, при $a = e$, получаем $(e^x)' = e^x$.

Полученная формула справедлива для значений аргументов $x \in (-\infty, \infty) \Leftrightarrow y \in (0, \infty)$.

2. Рассмотрим функцию $y = \arcsin x$, $x \in (-1, 1) \Leftrightarrow y \in \in (-\pi/2, \pi/2)$, являющаяся обратной к $x = \sin y$.

Так как $(\sin y)' = \cos y > 0$ при $y \in (-\pi/2, \pi/2)$, то $y'_x = = (\arcsin x)'_x = \dfrac{1}{x'_y} = \dfrac{1}{\cos y} = \left.\dfrac{1}{\sqrt{1 - sin^2 y}}\right|_{y=\arcsin x} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$. Таким образом,
$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

3. Аналогично доказывается формула
$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

4. Вычислим $(\mathrm{arctg}\, x)'$. Здесь $x \in (-\infty, \infty) \Leftrightarrow \mathrm{arctg}\, x = y \in \in (-\pi/2, \pi/2)$, для этих y $(\mathrm{tg}\, y)' = \dfrac{1}{cos^2 y} > 0$. Применяя формулу (7.2.3), находим
$$(\mathrm{arctg}\, x)'_x = \frac{1}{(\mathrm{tg}\, y)'_y} = cos^2 y = \left.\frac{1}{1 + tg^2 y}\right|_{a=\mathrm{arctg}\, x} = \frac{1}{1 + x^2},$$
откуда
$$(\mathrm{arctg}\, x)'_x = \frac{1}{1 + x^2}.$$

5. Аналогично вычисляется формула
$$(\mathrm{arcctg}\, x)'_x = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

6. Рассмотрим $y = x^\alpha$, где α — любое действительное число (область определения $y(x)$ зависит от α). Представим эту функцию в виде композиции
$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x} = w(z(y(x))), \text{ где } w(z) = e^z,\ z(y) = \alpha y,\ y(x) = \ln x.$$
Тогда по правилу дифференцирования сложной функции получаем
$$(x^\alpha)'_x = w'_z z'_y y'_x = e^z \alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

7.2.4. Сводка основных правил и формул

Для удобства соберем воедино полученные нами правила дифференцирования и таблицу производных элементарных функций.

Правила дифференцирования	
производные	дифференциалы
$(Cu)' = Cu'$ ($C -$ const)	$d(Cu) = C\,du$
$(u \pm v)' = u' \pm v'$	$d(u \pm v) = du \pm dv$
$(uv)' = u'v \pm uv'$	$d(uv) = du\,v \pm u\,dv$
$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$	$d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{du\,v - u\,dv}{v^2}$
$(z(y(x)))' = z'_y(y(x))y'_x(x)$	$d(z(y(x))) = z'_y\,dy = z'_y y'_x(x)\,dx$

Таблица производных	
1. $(C)' = 0$ ($C -$ const)	
2. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $(x)' = 1$, $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$, $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	
3. $(\log_a(x))' = \dfrac{1}{x\ln a}$,	$(ln x)' = \dfrac{1}{x}$
4. $(a^x)' = a^x \ln a$	$(e^x)' = e^x$
5. $(\sin x)' = \cos x$	6. $(\cos x)' = -\sin x$
7. $(\mathrm{tg}\,x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	8. $(\mathrm{ctg}\,x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
9. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	10. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11. $(\mathrm{arctg}\,x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	12. $(\mathrm{arcctg}\,x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Пример 7.2.5.

1. $y = e^{\mathrm{tg}^2 x}$; $y' = (e^{\mathrm{tg}^2 x})' = e^{\mathrm{tg}^2 x} 2\,\mathrm{tg}\,x \dfrac{1}{cos^2 x}$.

2. $y = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$;
$y' = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + a_1$.

3. $y = \sin^3 ax$; $y' = 3\sin^2 ax \cos ax \cdot a$.

4. $y = \sqrt[n]{x^2+1} - \sqrt[n]{x^2-1}$; $y' = \left((x^2+1)^{1/n} - (x^2-1)^{1/n}\right)' =$
$= \dfrac{1}{n}(x^2+1)^{1/n-1}2x - \dfrac{1}{n}(x^2-1)^{1/n-1}2x =$
$$= \frac{2x}{n}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{(x^2+1)^{n-1}}} - \frac{1}{\sqrt[n]{(x^2-1)^{n-1}}}\right).$$

5. $(e^x \cos 3x)' = e^x \cos 3x - 3e^x \sin 3x$.

6. $\left(\dfrac{e^x}{\sin 2x}\right)' = \dfrac{e^x \sin 2x - 2e^x \cos 2x}{\sin^2 2x}$.

7. $(\operatorname{arctg}^2(\sin x))' = 2\operatorname{arctg}\sin x \dfrac{\cos x}{1+\sin^2 x}$.

7.2.5. Логарифмическое дифференцирование

Дифференцирование показательно-степенной функции $y = f(x)^{\varphi(x)}$. Эта функция не является элементарной (если обе функции f и φ отличны от постоянной), так как не является композицией вида $f \circ \varphi(x)$. Чтобы найти $y'(x)$ выполним операцию логарифмирования равенства $y = f^{\varphi}$:

$$\ln y(x) = \varphi(x) \ln f(x)$$

и продифференцируем обе части, считая $\ln y(x)$ сложной функцией по x. Тогда

$$\frac{y'}{y} = \varphi' \ln f + \frac{\varphi}{f} f'.$$

Выражая отсюда y' и подставляя значение $y(x)$, получим

$$y'(x) = y(x)\left(\varphi' \ln f + \frac{\varphi}{f} f'\right) = f^{\varphi} \varphi \ln f + f^{\varphi-1} \varphi f'.$$

Пример 7.2.6. $y = x^{\sin x}$. *Логарифмируем это равенство*

$$\ln y = \sin x \ln x,$$

дифференцируем и выражаем y':

$$\frac{y'}{y} = \cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}, \quad y' = x^{\sin x} \cos x \ln x + x^{\sin x - 1} \sin x.$$

7.2.6. Дифференцирование произведения

Пусть $F(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x)$. Применять правило дифференцирования произведения здесь неэффективно если $n \geqslant 3$. Логарифмируя это равенство, получим

$$\ln F(x) = \ln f_1(x) + \ldots + \ln f_n(x).$$

Дифференцируя обе части, получим

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{f_1'}{f_1} + \ldots + \frac{f_n'}{f_n},$$

откуда находим

$$F'(x) = (f_1(x) f_2(x) \cdots f_n(x)) \left(\frac{f_1'}{f_1} + \ldots + \frac{f_n'}{f_n}\right),$$

Пример 7.2.7. $y = \sin x \sin 2x \sin 3x$. *Логарифмируя это равенство, получаем*

$$\ln y = \ln\sin x + \ln\sin 2x + \ln\sin 3x.$$

Дифференцируем обе части и выражаем y'

$$y'(x) = (\sin x \sin 2x \sin 3x)(\operatorname{ctg} x + 2\operatorname{ctg} 2x + 3\operatorname{ctg} 3x).$$

7.2.7. Дифференцирование неявно заданных функций

Пусть функция $y(x)$ задана неявно посредством уравнения $F(x,y) = 0$. Тогда дифференцируем заданное уравнение $F(x,y(x)) = 0$, считая y зависящим от x. Из полученного после дифференцирования равенства выражаем $y'(x)$.

Рассмотрим примеры.

1. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (уравнение эллипса). Дифференцируя обе части этого уравнения по x, получим

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0.$$

Отсюда выражаем $y' = \dfrac{b^2}{a^2}\dfrac{x}{y}$

2. $e^{y+x} = 2y + x$. Дифференцируя, находим $e^{y+x}(y'+1) = 2y' + 1$. Отсюда выражаем y'

$$y' = \frac{e^{x+y} - 1}{2 - e^{x+y}}.$$

Чтобы найти значение такой производной в точке $x = x_0$, надо из уравнения $F(x,y) = 0$ при $x = x_0$ выразить значение y_0 и подставить в выражение для y'. Иногда это бывает практически невыполнимо, как в примере 2, где x и y связаны соотношением $e^{y+x} = 2y + x$, не допускающим разрешение относительно y.

7.2.8. Дифференцирование функций, заданных параметрически

Пусть функция $y(x)$ задана параметрически $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in (t_1,t_2)$, (см. п. 1.6.3).

Теорема 7.2.4. *Пусть*

1) функция $x(t)$ *и* $y(t)$ *имеют в точке* $t \in (t_1,t_2)$ *конечные производные* $x'(t)$ *и* $y'(t)$*;*

2) $x'_t(t) \neq 0$. *Тогда существует производная* $y'_x(x)$ *в точке* $x = x(t)$*, причем*

$$y'_x(x(t)) = \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)} \tag{7.2.4}$$

Доказательство. Следуя теореме о необходимом и достаточном условии дифференцируемости, напишем

$$\Delta x = x'_t(t)\Delta t + o_1(\Delta t), \quad \Delta y = y'_t(t)\Delta t + o_2(\Delta t),$$

где $o_i(\Delta t)/\Delta t \to 0$ при $\Delta t \to 0$ $(i = 1,2)$. Преобразуем отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y'_t\Delta t + o_2}{x'_t\Delta t + o_1} = \frac{y'_t\Delta t + o_2}{x'_t\Delta t\left(1 + \dfrac{o_1}{\Delta t}\dfrac{1}{x'_t}\right)} =$$

$$= \frac{y'_t}{x'_t}\frac{1}{1 + \dfrac{o_1}{\Delta t}\dfrac{1}{x'_t}} + \frac{o_2}{\Delta t}\frac{1}{x'_t + \dfrac{o_1}{\Delta t}}$$

Так как $o_i/\delta t \to 0$ при $\Delta t \to 0$, $(i = 1,2)$, то первое слагаемое имеет предел y'_t/x'_t, а второе является бесконечно малой функцией при $\Delta t \to 0$. Таким образом, правая часть равенства стремится к y'_t/x'_t.

В левой части, в силу непрерывности дифференцируемой функции $x(t)$, условие $\Delta t \to 0$ влечет $\Delta x \to 0$. Поэтому

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_x(x(t)).$$

Теорема доказана.

Пример 7.2.8. *Точка движется по окружности по закону $x = R\cos\omega t$, $y = R\sin\omega t$. Найти y'_x.*

Решение. $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{\omega R\cos\omega t}{-\omega R\sin\omega t} = -\dfrac{x(t)}{y(t)}$.

Из это формулы следует, что в точках пересечения с осью Ox, когда $y = 0$, касательная параллельна оси Oy.

Пример 7.2.9. *$x = e^t$, $y = \dfrac{1}{2}(e^t + e^{-t})$. Найти y'_x.*

Решение. $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{1}{2}\dfrac{e^t - e^{-t}}{e^t} = \dfrac{1 - e^{-2t}}{2} = \dfrac{1 - 1/x^2}{2} = \dfrac{x^2 - 1}{2x^2}$.

§ 7.3. Повторное дифференцирование

7.3.1. Производные старших порядков

Пусть $y = f(x)$ дифференцируема и $f'(x)$, рассматриваемая как функция от x, снова является дифференцируемой функцией. Тогда определена

вторая производная
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)=\frac{d^2f}{dx^2}.$$
(читается «d два f по dx дважды»).

Аналогично определяются производные третьего
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)=\frac{d^3f}{dx^3}.$$
(читается «d три f по dx трижды») и n-го порядков
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}\right)=\frac{d^nf}{dx^n}.$$

При небольших значениях n приняты обозначения
$$\frac{d^2f}{dx^2}=(f')'=f'',\quad \frac{d^3f}{dx^3}=(f'')'=f''',\quad \frac{d^4f}{dx^4}=f^{IV} \text{ и т. д.}$$

Если функция $f(x)$ имеет n-ю конечную производную в каждой точке интервала (a,b), то она называется n-раз дифференцируемой на (a,b) (дважды, трижды и т. д.)

Замечание 7.3.1. *Определение второй производной связано с вычислением ускорения — производной от скорости. Производные высоких порядков, как будет показано дальше, используются в задаче приближения функции многочленами.*

Рассмотрим примеры:

1. $y=x^m$.

$$\frac{d^ny}{dx^n}=y^{(n)}=\begin{cases} m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n} & \text{при } n\leqslant m,\\ 0 & \text{при } n>m.\end{cases}$$

2. xe^x. Найти $y^{(n)}$.

$y'=e^x+xe^x$;

$y''=e^x+e^x+xe^x=2e^x+xe^x$;

$\ldots$

$y^{(n)}=ne^x+xe^x$.

7.3.2. Повторное дифференцирование неявно заданных функций

Пусть $y(x)$ задана неявно уравнением $F(x,y)=0$. Дифференцируя это уравнение и выражая y', получаем зависимость вида $y'=F_1(x,y)$. Дифференцируя эту зависимость еще раз, получаем выражение вида $y''=F_2(x,y,y')$. Подставляя сюда $y'=F_1(x,y)$, получаем выражение для y''.

Рассмотрим примеры:

1. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=R^2$. Найти y''. Дифференцируя уравнение, получаем

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y\cdot y'}{b^2}=0 \iff y'=-\frac{x}{y}\frac{b^2}{a^2}.$$

Дифференцируя повторно и подставляя значение y', получаем

$$y''=-\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{y-xy'}{y^2}\right)=-\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{1}{y}+\frac{x^2}{y^3}\frac{b^2}{a^2}\right).$$

2. $x^2-y^2=1$. Найти y''. Дифференцируя первый раз, находим y':

$$2x-2yy'=0 \implies y'=\frac{x}{y}.$$

Дифференцируя второй раз и подставляя y', находим

$$y''=\frac{y-xy'}{y^2}=\frac{1}{y}-\frac{x^2}{y^3}.$$

7.3.3. Повторное дифференцирование функций, заданных параметрически

Пусть функция $y=y(x)$ задана параметрически $y=y(t)$, $x=x(t)$ и функции $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы на (t_1,t_2) требуемое число раз, причем $x'_t(t)\neq 0$. Будем считать, что в равенстве

$$y'_x(x(t))=\frac{y'_t(t)}{x'_t(t)},$$

выражающем неявную производную, обе части зависят от (одного и того же!) аргумента t. Дифференцируя это равенство по t и учитывая, что $y'_x(x(t))$ — сложная функция по t, получаем

$$\frac{d}{dx}(y'_x(x(t)))=y''_x x'_t=\frac{y''_t x'_t-x''_t y'_t}{x'_t} \quad \Rightarrow \quad y''_x(x(t))=\frac{y''_t x'_t-x''_t y'_t}{{x'_t}^3}.$$

Чтобы найти $y'''_x(x)$, дифференцируем обе части полученного равенства по t, и, учитывая, что $(y''_x(x(t)))'_t=y'''_x(x)\cdot x'_t$, выражаем $y'''_x(x)$. Таким образом можно вычислить производную по x $y^{(n)}_x(x)$ любого порядка n.

Пример 7.3.1 (движение по окружности). $x=R\cos\omega t,\quad y=R\sin\omega t.$ *Найти* y''_x. *Находим* $y'_x=-\dfrac{\cos\omega t}{\sin\omega t}=-\operatorname{ctg}\omega t$. *Дифференцируя по* t, *получаем*

$$y''_x x'_t=\frac{\omega}{\sin^2\omega t} \quad \Rightarrow \quad y''_x=\frac{1}{x'_t}\frac{\omega}{\sin^2\omega t}=-\frac{1}{R\sin^3\omega t}.$$

Пример 7.3.2. $x=e^t$, $y=\dfrac{1}{2}(e^t-e^{-t})$. *Найти* y''_x. *Находим* $y'_x=\dfrac{1}{2}(1+e^{-2t})$. *Дифференцируя по* t, *получим*

$$y''_x x'_t=-e^{-2t} \quad \Rightarrow \quad y''_x=-e^{-2t}\frac{1}{x'_t}=-e^{-3t}=-\frac{1}{x^3}.$$

7.3.4. Дифференциалы высших порядков

Пусть функция $y = f(x)$ имеет производные $f'(x)$ и $f''(x)$ при $x \in (a,b)$. Тогда определен дифференциал второго порядка $d^2 f = d(df)$ от дифференциала первого порядка $df = f'(x)dx$, в котором x является независимой переменной, а приращение dx считается фиксированным (постоянным). Таким образом, учитывая, что $d(dx) = 0$, получаем формулу

$$d^2 f = d(df) = d(f'(x)\,dx) = d(f'(x))\,dx = f''(x)\,dx^2.$$

Если существуют соответствующие производные старших порядков, то по индукции находим:

$$d^3 f = d(d^2 f) = d(f''(x)\,dx^2) = d(f''(x))\,dx^2 = f'''(x)\,dx^3;$$

если уже $d^{(n-1)} f = f^{(n-1)}(x)\,dx^{n-1}$, то

$$d^{(n)} f(x) = d(f^{(n-1)}(x)\,dx^{n-1}) = d(f^{(n-1)}(x))\,dx^{n-1} = f^{(n)}(x)\,dx^n.$$

Примеры:

1. $y = x^n$. Найти $d^{(m)}y$. Вычисляем m-ю производную

$$y^{(m)} = \begin{cases} n(n-1)\cdots(n-m+1)x^{n-m} & \text{при } n \leqslant m, \\ 0 & \text{при } m > n. \end{cases}$$

Затем по формуле n-го дифференциала находим

$$d^m y = \begin{cases} n(n-1)\cdots(n-m+1)x^{n-m}\,dx^m & \text{при } n \leq m \\ 0 & \text{при } m > n. \end{cases}$$

2. $y = \sin x$. Найти $d^3 y$. Вычисляем $y'''(x) = -\cos x$ и находим $d^3 y = y'''\,dx^3 = -\cos x\,dx^3$.

§ 7.4. Приложения дифференциального исчисления

Мы уже видели,что в основе большинства приложений дифференциального исчисления явно или опосредованно лежат физический и геометрический смыслы производных. С физической точки зрения, если отвлечься от истолкования переменных x и y, то производная $f'(x)$ функции $y = f(x)$ — это скорость изменения переменной y по сравнению с переменной x. Например:

1) Если $y = f(x)$ — это путь, пройденный материальной точкой за время x, то $f'(x)$ — скорость движения.

2) Если $y = f(x)$ — это скорость движения, то $f'(x)$ — ускорение (скорость изменения скорости).

3) Если $y = f(x)$ — это количество электричества (в кулонах), протекающего через поперечное сечение проводника за время x, то $f'(x)$ — сила тока.

4) Если $y = f(x)$ — это количество тепла (в калориях), которое нужно передать телу, чтобы нагреть его от $0°C$ до $x°C$, то $f'(x)$ — теплоемкость тела.

Геометрически производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 есть тангенс угла наклона касательной к графику функции в точке $(x_0, f(x_0))$ (если, конечно, эта касательная существует). Отсюда, в частности, следует, что существование производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 эквивалентно возможности проведения касательной к графику функции в точке $(x_0, f(x_0))$.

Сопоставляя физический и геометрический смыслы производной, получаем часто используемый в технических дисциплинах (например, в радиоэлектронике) метод геометрического дифференцирования. Пусть задана некоторая кривая, выражающая зависимость некоторой величины от какой-либо другой, причем аналитическое выражение этой зависимости неизвестно (например, это кривая на экране осциллографа) и требуется найти скорость роста этой величины. В данной точке кривой строим касательную и транспортиром измеряем угол наклона этой касательной к горизонтали. Тангенс этого угла и дает искомую скорость роста исследуемой величины.

В данном параграфе мы рассмотрим некоторые применения дифференциального исчисления к исследованию функций, заданных аналитически. При этом будем предполагать, что график функции является либо гладкой, либо кусочно-гладкой кривой. Это означает, что функция либо дифференцируема во всех точках области определения, либо эту область можно разбить на конечное число промежутков, на каждом из которых функция дифференцируема (сопоставьте понятие гладкости с геометрическим смыслом производной).

7.4.1. Основные теоремы дифференциального исчисления

Из геометрического смысла производной следует, что знание производной $f'(x)$ позволяет делать выводы о поведении самой функции $f(x)$. Этому вопросу посвящены теоремы данного параграфа.

Напомним, что функция $f(x)$ называется монотонно возрастающей (убывающей) на отрезке $[a, b]$, если большему значению аргумента соответствует большее (меньшее) значение функции:

$$a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b \implies f(x_1) \leqslant f(x_2);$$
$$(a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b \implies f(x_1) \geqslant f(x_2)).$$

Теорема 7.4.1. *Если* $f'(x_0) > 0$ *(*$f'(x_0) < 0$*), то в некоторой окрестности* $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ *точки* x_0 *функция* $f(x)$ *принимает значения, большие* *(меньшие), чем $f(x_0)$ справа от x_0; слева от x_0 функция $f(x)$ принимает значения, меньшие (большие), чем $f(x_0)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению производной

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Если $f'(x_0) > 0$, то по свойствам пределов (каких?), найдется такая окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0, в которой при $x \neq x_0$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0.$$

Если $x_0 - \delta < x < x_0$, то $x - x_0 < 0$ и, следовательно, $f(x) - f(x_0) < 0$, т. е. $f(x) < f(x_0)$. Если же $x_0 < x < x_0 + \delta$, то $x - x_0 > 0$, и тогда $f(x) - f(x_0) > 0$ то есть $f(x) > f(x_0)$. Теорема доказана.

Заметим, что из этой теоремы не следует монотонность функции в окрестности точки x_0, но если $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) во всех точках этой окрестности, то в ней функция будет монотонной.

Теорема 7.4.2 (теорема Ферма). *Если функция дифференцируема на промежутке $[a, b]$ и во внутренней точке c этого промежутка принимает наибольшее или наименьшее значение, то производная в этой точке равна нулю.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем теорему от противного. Предположим, что в точке c производная $f'(c) \neq 0$. Но тогда по предыдущей теореме в достаточно малой окрестности точки c функция либо монотонно возрастает (если $f'(x_0) > 0$), либо монотонно убывает (если $f'(x_0) < 0$). В обоих случаях значение $f(c)$ не может быть ни наибольшим, ни наименьшим. Теорема доказана.

Заметим, что требование дифференцируемости в этой теореме не может быть опущено. Например, функция $y = |x|$ на отрезке $[-1, 1]$ имеет в точке $x = 0$ наименьшее значение $y = 0$, а производная не обращается в нуль ни в одной точке данного отрезка.

Теорема Ферма выражает очевидный геометрический факт: касательная к гладкой кривой во внутренних точках наибольшего или наименьшего значений горизонтальна. На рис. 6.4 это точка c. В теореме существенны предположения, что точка c

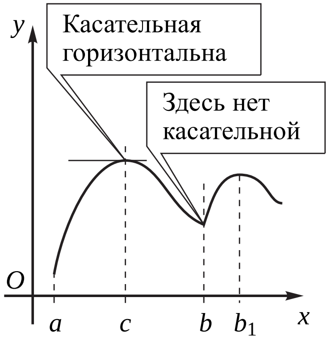


Рис. 6.4

является внутренней точкой промежутка и что кривая гладкая. Без этих предположений теорема неверна. Это видно из того же рисунка, если в качестве основного промежутка $[a,b]$ взять промежутки $[b,b_1]$ (здесь наибольшее и наименьшее значения достигаются на границе промежутка) и $[c,b_1]$ (внутри этого промежутка есть точка, в которой функция не имеет производную).

В основе многих теорем дифференциального исчисления лежит следующая теорема.

Теорема 7.4.3 (теорема Ролля). *Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет трем условиям:*

1) она определена и непрерывна в замкнутом промежутке $[a,b]$;

2) дифференцируема в открытом промежутке (a,b);

3) на концах промежутка принимает равные значения: $f(a)=f(b)$.

Тогда между a и b найдется точка c такая, что $f'(c)=0$.

Доказательство. По теореме Вейерштрасса функция,непрерывная на замкнутом промежутке, принимает на этом промежутке свои наименьшее m и наибольшее M значения.

Возможны два случая:

1) $m=M$. Так как $m\leqslant f(x)\leqslant M$ для всех $x\in[a,b]$, то на этом промежутке функция постоянна: $f(x)\equiv M$. Значит во всем промежутке $f'(x)=0$ и в качестве точки c можно взять любую точку промежутка $[a,b]$.

2) $m<M$. В этом случае, так как $f(a)=f(b)$, по крайней мере одно из значений m или M достигается во внутренней точке c промежутка $[a,b]$. По теореме Ферма производная $f'(c)$ в этой точке равна нулю. Теорема доказана.

Из теоремы Ролля получаем очевидное следствие: между двумя нулями дифференцируемой функции $f(x)$ содержится нуль ее производной: если $f(x_1)=f(x_2)=0$, то существует $x_3\in(x_1,x_2)$ такое, что $f'(x_3)=0$.

Геометрически теорема Ролля выражает вполне очевидный факт: если крайние ординаты гладкой кривой равны, то на кривой найдется по крайней мере одна точка, в которой касательная параллельна оси Ox (рис. 6.5).

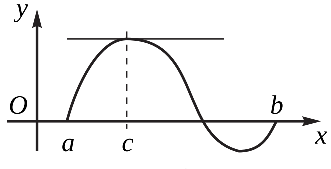


Рис 6.5

Теорема 7.4.4 (теорема Лагранжа). *Пусть функция* $f(x)$ *удовлетворяет двум условиям:*

1) она определена и непрерывна в замкнутом промежутке $[a,b]$*;*

2) дифференцируема в открытом промежутке (a,b).

Тогда между a *и* b *найдется точка* c *такая, что*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c). \tag{7.4.1}$$

Доказательство. Введем вспомогательную функцию

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Она удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля: $F(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и на (a,b) имеет производную

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Подставляя $x=a$ и $x=b$, убеждаемся, что $F(a)=F(b)=0$. Таким образом, между a и b найдется такая точка c, что $F'(c)=0$. Следовательно, $f'(c)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$. Что и требовалось доказать.

Теорему Лагранжа называют также *теоремой о среднем значении*, а формулу (7.4.1) *формулой Лагранжа*. Эту формулу часто записывают в виде

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a). \tag{7.4.2}$$

Следствие 7.4.1. *Если* $f'(x)=0$ *на промежутке* (a,b)*, то функция* $f(x)$ *постоянна на этом промежутке:* $f(x)\equiv C$.

Доказательство. Возьмем две произвольные точки x_1 и x_2 из промежутка (a,b) По формуле Лагранжа

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)=0\cdot(x_2-x_1)=0.$$

Следовательно, $f(x_2)-f(x_1)=0$ или $f(x_2)=f(x_1)$, то есть в двух произвольных точках промежутка (a,b) функция принимает одинаковые значения и, следовательно, она постоянна на этом промежутке. Что и требовалось доказать.

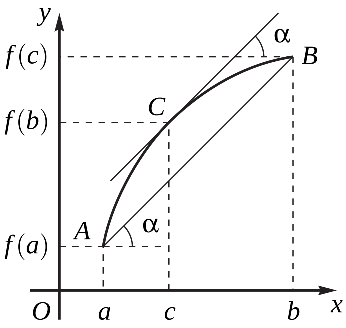


Рис 6.6

Для выяснения геометрического смысла теоремы Лагранжа, рассмотрим график функции $f(x)$, определенной на $[a,b]$. Через точки $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$ проведем секущую AB. Очевидно, отношение

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

есть тангенс угла наклона этой секущей к оси Ox. С другой стороны $f'(c)$ есть тангенс угла наклона касательной к графику функции $f(x)$ в точке $C(c, f(c))$. Формула Лагранжа (7.4.1) выражает очевидный геометрический факт: на гладкой кривой найдется точка C, в которой касательная параллельна секущей (рис. 6.6).

Теорема Лагранжа имеет полезное для последующего обобщение.

Теорема 7.4.5 (теорема Коши). *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$

1) непрерывны на $[a,b]$;

2) дифференцируемы на (a,b);

3) $g'(x) \neq 0$ *на* (a,b).

Тогда между a *и* b *найдется такая точка* c*, что*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{7.4.3}$$

Эта формула называется формулой Коши.

Доказательство. Прежде всего заметим, что $g(b)-g(a) \neq$ $\neq 0$, так как иначе по теореме Ролля на интервале (a,b) нашлась бы точка c, в которой $g'(c)=0$, что противоречило бы условию. Введем вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a)).$$

Эта функция удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля (проверьте!). Следовательно, существует точка $c \in (a,b)$, что $F'(c)=0$. Но

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(x).$$

Отсюда получаем требуемое. Теорема доказана.

Следствие 7.4.2. *Если функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *дифференцируемы на* (a,b), $g'(x) \neq 0$ *на* (a,b) *и* $f(a)=g(a)=0$*, то для любого* x*:* $a<x<b$*, существует такое* $c: a<c<x$*, что*

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

7.4.2. Формула Тейлора

Среди элементарных функций наиболее простыми являются степенные функции $y = x^n, n = 0, 1, 2, \ldots$ и их линейные комбинации $y = P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ — *многочлены* (или *полиномы*) степени n. Для вычисления значений $P_n(x_0)$ этих функций достаточно четырех арифметических операций — сложения, вычитания, умножения и деления (числа a_k могут быть дробными). Последнее обстоятельство является особенно ценным в вычислительной технике.

Пусть нам известны значения некоторой функции $y = f(x)$ и n ее первых производных в точке (x_0): $a_0 = f(x_0)$, $a_1 = f'(x_0)$, $a_2 = f''(x_0)$, $\ldots$, $a_n = f^{(n)}(x_0)$. Как приближенно вычислить значение функции $f(x)$ в точке x, близкой к x_0?

Рассмотрим многочлен

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \frac{a_2}{1 \cdot 2}(x - x_0)^2 + \frac{a_3}{1 \cdot 2 \cdot 3}(x - x_0)^3 + \\ + \ldots + \frac{a_n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}(x - x_0)^n.$$

Очевидно, $P_n(x_0) = a_0 = f(x_0)$. Найдем производные многочлена $P_n(x)$:

$$P_n'(x) = a_1 + a_2(x - x_0) + \frac{a_3}{1 \cdot 2}(x - x_0)^2 + \ldots + \\ + \frac{a_n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)}(x - x_0)^{n-1};$$

$$P_n''(x) = a_2 + a_3(x - x_0) + \frac{a_4}{1 \cdot 2}(x - x_0)^2 + \ldots + \\ + \frac{a_n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-2)}(x - x_0)^{n-2};$$

$$P_n^{(k)}(x) = a_k + a_{k+1}(x - x_0) + \ldots + \\ + \frac{a_n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-k)}(x - x_0)^{n-k}, \quad k < n;$$

$$P_n^{(n)}(x) = a_n.$$

Отсюда получаем $P_n'(x_0) = a_1 = f'(x_0)$, $P_n''(x_0) = a_2 = f''(x_0)$, $\ldots$, и вообще

$$P_n^{(k)}(x_0) = a_k = f^{(k)}(x_0), \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Условимся считать, что производная нулевого порядка функции совпадает с ней самой: $P_n^{(0)}(x) = P_n(x)$. Тогда последнее равенство справедливо и при $k = 0$.

Покажем, что такой многочлен единствен. Допустим, существует другой многочлен $\tilde{P}(x)$ степени не выше n, для которого

$$\tilde{P}(x_0) = a_0,\ \tilde{P}'(x_0) = a_1,\ \tilde{P}''(x_0) = a_2,\ \ldots,\ \tilde{P}^{(n)}(x) = a_n.$$

Положим $Q(x) = P_n(x) - \tilde{P}(x)$. Так как $Q^{(n)}(x) = P_n^{(n)}(x) - \tilde{P}^{(n)}(x) = a_n - a_n = 0$, то по следствию из теоремы Лагранжа $Q^{(n-1)}(x)$ тождественно равна постоянной, а так как $Q^{(n-1)}(x_0) = P_n^{(n-1)}(x_0) - \tilde{P}^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1} - a_{n-1} = 0$, то $Q^{(n-1)}(x) \equiv 0$. Повторяя рассуждения отсюда получаем, что $Q^{(n-2)}(x)$ постоянна и равна нулю. Продолжая эти рассуждения, получим, что $Q(x)$ постоянна и тождественно равна нулю. Следовательно, $P_n(x) \equiv \tilde{P}(x)$.

Определение 7.4.1. *Если функция $f(x)$ имеет производные порядка 1, 2, ..., n, то многочлен*

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{1\cdot 2}(x-x_0)^2 + \\ + \frac{f'''(x_0)}{1\cdot 2\cdot 3}(x-x_0)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}(x-x_0)^n. \quad (7.4.4)$$

называется многочленом Тейлора порядка n функции $f(x)$ в точке x_0.

Коэффициенты этого многочлена называются *коэффициентами Тейлора*: коэффициент при $(x-x_0)^k$ называется k-м коэффициентом Тейлора. Мы раньше условились считать производную нулевого порядка саму функцию $f(x)$: $f^{(0)}(x_0) = f(x)$. Тогда формулу (7.4.4) можно записать в виде

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k, \quad (7.4.5)$$

где обозначено $k! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots k$, причем условимся считать $0! = 1$.

Зададимся вопросом: насколько отличаются значения многочлена Тейлора $P_n(x)$ от значения функции $f(x)$ хотя бы при x близких к x_0? Для этого изучим *остаток*

$$R_{n+1}(x) = f(x) - P_n(x),$$

где $P_n(x)$ — многочлен Тейлора порядка n функции $f(x)$ в точке x_0.

Из равенства

$$R_{n+1}(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) - \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 - \\ - \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 - \ldots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

имеем

$$R_{n+1}(x_0) = R'_{n+1}(x_0) = R''_{n+1}(x_0) = \ldots = R_{n+1}^{(n)}(x_0) = 0. \quad (7.4.6)$$

Предположим, функция $f(x)$ определена и непрерывна в некотором интервале (a,b), содержащем точки x и x_0, и что она имеет в этом интервале производную $n+1$-го порядка.

Рассмотрим промежуток $[x_0, x]$ (или $[x, x_0]$), содержащийся в (a, b). Учитывая (7.4.6), по теореме Коши имеем

$$\frac{R_{n+1}(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{R_{n+1}(x) - R_{n+1}(x_0)}{(x-x_0)^{n+1} - (x_0-x_0)^{n+1}} = \frac{R'_{n+1}(c_1)}{(n+1)(c_1-x_0)^n},$$

для некоторого c_1, лежащего между x и x_0.

Аналогично,

$$\frac{R'_{n+1}(c_1)}{(n+1)(c_1-x_0)^n} = \frac{R'_{n+1}(c_1) - R'_{n+1}(x_0)}{(n+1)(c_1-x_0)^n - (n+1)(x_0-x_0)^{n+1}} =$$

$$= \frac{R''_{n+1}(c_2)}{(n+1)n(c_2-x_0)^{n-1}},$$

для некоторого c_2, лежащего между c_1 и x_0.

Продолжая рассуждать таким же образом, в итоге получим

$$\frac{R_{n+1}(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{R^{(n+1)}_{n+1}(c)}{(n+1)!},$$

для некоторого c между c_n и x_0, а следовательно, между x и x_0.

Так как многочлен $P_n(x)$ имеет порядок n, то $P_n^{(n+1)}(x) = 0$, значит, $R^{(n+1)}_{n+1}(x) = f^{(n+1)}(x)$, и для остатка получаем выражение

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \tag{7.4.7}$$

Остаток, записанный в таком виде, называется *остаточным членом в форме Лагранжа*. Из формулы (7.4.7) следует

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_{n+1}(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0) = 0.$$

Это означает, что $R_{n+1}(x)$ является при $x \to x_0$ бесконечно малой более высокого порядка, чем $(x-x_0)^n$. Остаток в этом случае записывают в виде

$$R_{n+1}(x) = o((x-x_0)^n), \quad x \to x_0 \tag{7.4.8}$$

и называют *остаточным членом в форме Пеано*.

Чаще всего используют остаточный член в форме Лагранжа, ввиду его простоты. Но иногда эта форма неприменима и тогда приходится применять другие формы, менее простые. Из них упомянем *остаточный член в форме Коши*

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{n!}(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1},$$

где $0 < \theta < 1$.

Таким образом, получили теорему

Теорема 7.4.6 (теорема Тейлора). *Если $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и во всех внутренних точках этой окрестности имеет производную $(n+1)$-го порядка, то для любого x из этой окрестности*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_{n+1}(x) =$$
$$= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 +$$
$$+ \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \ldots +$$
$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_{n+1}(x), \quad (7.4.9)$$

где остаточный член $R_{n+1}(x)$ можно представить в форме Лагранжа (7.4.7) *или в форме Пеано* (7.4.8).

При $x_0 = 0$ формула Тейлора имеет вид

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{k}(0)}{k!}x^k + R_{n+1}(x) =$$
$$= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1}(x) \quad (7.4.10)$$

и называется формулой Маклорена. Для остаточного члена в этом случае имеем

$$R_{n+1}(x) = o(x^n), \quad x \to 0, \quad (7.4.11)$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}x^{n+1}. \quad (7.4.12)$$

Здесь c — точка между нулем и x и, следовательно, ее можно представить в виде $c = \theta x$, где θ — некоторое число между нулем и единицей: $0 < \theta < 1$.

Значение формулы Тейлора (7.4.9) состоит в том, что она позволяет произвольную, достаточное число раз дифференцируемую в окрестности точки x_0 функцию представить в виде суммы многочлена и некоторой величины, имеющей, при x близких к x_0, порядок малости $|x-x_0|^{n+1}$. То есть приближенное равенство

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 +$$
$$+ \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad (7.4.13)$$

тем точнее, чем x ближе к x_0. В этом случае форма Пеано, характеризующая лишь стремление остатка к нулю при $x \to x_0$, непригодна для приближенных вычислений. В большинстве приложений у рассматриваемых функций существуют и непрерывны производные всех порядков, так что в формуле Тейлора в качестве n можно взять любое натуральное число. Предположим, все производные функции $f(x)$ ограничены одной и той константой:

$$|f^{(k)}(x)| \leqslant M.$$

Тогда, используя остаточный член в форме Лагранжа (7.4.7), будем иметь

$$|R_{n+1}(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \right| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}. \qquad (7.4.14)$$

Покажем, что правая часть последнего неравенства стремится к нулю при $n \to \infty$ для любого x. Возьмем произвольное число x и выберем натуральное число n_0, большее, чем $2|x-x_0|$. Тогда при $n \geqslant n_0$ будем иметь $n > 2|x-x_0|$ или $\dfrac{|x-x_0|}{n} < \dfrac{1}{2}$. Следовательно,

$$\left| \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \right| = \frac{|(x-x_0)^{n_0}|}{(n_0)!} \frac{|x-x_0|}{n_0+1} \frac{|x-x_0|}{n_0+2} \cdots \frac{|x-x_0|}{n+1} <$$

$$< \frac{|(x-x_0)^{n_0}|}{(n_0)!} \frac{1}{2^{n+1-n_0}} < \frac{|2(x-x_0)|^{n_0}}{(n_0)!} \frac{1}{2^n}.$$

Так как первый множитель в правой части последнего неравенства не зависят от n, а второй $1/2^n$ стремится к нулю при $n \to \infty$, то отсюда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1} = 0 \overset{(7.4.14)}{\Longrightarrow} \lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0.$$

Таким образом, в этом случае можно оценить погрешность приближенной формулы (7.4.13) (если n задано), либо подобрать n так, чтобы была гарантирована заданная точность. В общем случае необходимо исследовать стремление к нулю остатка в рассматриваемой точке x.

В недавнем прошлом основным приложением рядов Тейлора было их использование в приближенных вычислениях значений функции. С развитием вычислительной техники эти вопросы, по-видимому, потеряли свою актуальность. Тем не менее поле применения рядов Тейлора необозримо. Например, их часто с успехом используют для получения аналитического выражения, пусть хотя бы приближенного, решения функциональных уравнений (т. е. уравнений содержащих неизвестную функцию и, возможно, ее производные).

Пример 7.4.1. *Найти приближенное решение уравнения*

$$\sin x + \sin y = x - y$$

в окрестности точки $x_0 = 0$.

Решение. Функцию $y = y(x)$ ищем в виде (7.4.10). Подставляя в уравнение $x = x_0 = 0$, получим $\sin y = -y$. Значит, $y(x_0) = 0$. Продифференцируем данное уравнение

$$\cos x + \cos y \cdot y' = 1 - y'.$$

Подставим $x = 0, y = y(x_0) = 0$: $\cos 0 + \cos 0 \cdot y'(0) = 1 - y'(0)$. Отсюда $y'(0) = 1/2$. Дифференцируя еще раз, получим

$$-\sin x - \sin y \cdot y'^2 + \cos y \cdot y'' = -y''.$$

Подставляя $x = 0$, $y = y(0) = 0$, $y' = y'(0) = 1/2$, получим $y'' = -y''$. Значит $y''(0) = 0$. Проделав эту операцию еще один раз, будем иметь

$$-\cos x - \cos y \cdot y'^3 - 3\sin y \cdot y' \cdot y'' + \cos y \cdot y''' = -y'''.$$

Отсюда при $x = 0$, $y = y(0) = 0$, $y' = y'(0) = 1/2$, $y'' = y''(0) = 0$ получим $y''' = 9/16$. Таким образом, приближенное решение уравнения по формуле (7.4.10)

$$y \approx \frac{x}{2} + \frac{3}{32}x^3.$$

Но даже если аналитическое выражение для функции $f(x)$ известно, то формула Тейлора, как сказано выше, позволяет приближенно представить ее (или, как говорят в математике, *аппроксимировать* многочленом первой степени (линейная аппроксимация), второй степени (параболическая аппроксимация) и т. д.

Пример 7.4.2. *Представить приближенно в виде многочлена третьей степени функцию $y = x^x$ в окрестности точки $x_0 = 1$.*

Решение. Для нахождения производных прологарифмируем функцию: $\ln y = \ln x^x = x\ln x$. Отсюда последовательным дифференцированием находим

$$y' = y(\ln x + 1), \quad y'' = y'(\ln x + 1) + \frac{y}{x}, \quad y''' = y''(\ln x + 1) + 2\frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2}.$$

Подставляя в функцию и ее производные $x = 1$, получим $y(1) = 1$, $y'(1) = 1, y''(1) = 2, y'''(1) = 3$.

По формуле Тейлора (7.4.9) получаем искомое приближение

$$y = x^x \approx 1 + (x-1) + (x-1)^2 + \frac{(x-1)^3}{2} = \frac{2x^3 - 3x^2 + 3x + 3}{6}.$$

В качестве следующих примеров рассмотрим разложения некоторых элементарных функций по формуле Маклорена (7.4.10). При этом мы ограничимся функциями, коэффициенты Тейлора которых находятся сравнительно просто.

Показательная функция

У функции $f(x) = e^x$ все производные совпадают с $f(x)$ и поэтому при $x = 0$ все они принимают значения, равные 1. По формуле Маклорена (7.4.10) с остаточным членом в форме Лагранжа

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}, \tag{7.4.15}$$

где $0 < \theta < 1$, а значит, $c = \theta x$ находится между нулем и x. Покажем, что если неограниченно увеличивать n, то остаточный член будет стремиться к нулю при любом x. Пусть x произвольное действительное число. Выберем $H > 0$ настолько большим, чтобы $-H < x < H$. Так как функция e^x, то она и все ее производные ограничены одной и той же константой e^H. Из неравенства (7.4.14) получаем

$$|R_{n+1}(x)| \leqslant e^H \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Таким образом, равенство (7.4.15) справедливо на всей числовой оси для любого n.

Синус и косинус

Для производных функции $y = \sin x$ имеем

$$y' = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2});$$

$$y'' = -\sin x = \sin(x + 2\frac{\pi}{2});$$

$$y''' = -\cos x = \sin(x + 3\frac{\pi}{2}).$$

Следовательно,

$$y^{(n)} = (\sin x)^{(n)} = \sin(x + n\frac{\pi}{2}).$$

При $x = 0$ эти производные равны

$$y^{(n)}(0) = \sin(n\frac{\pi}{2}) = \begin{cases} 0, \text{ при } n = 2k, \\ (-1)^k, \text{ при } n = 2k+1. \end{cases}$$

Аналогично,

$$(\cos x)^{(n)} = \cos(x + n \cdot \frac{\pi}{2}).$$

И, значит,

$$y^{(n)}(0) = \cos(n\frac{\pi}{2}) = \begin{cases} (-1)^k, \text{ при } n = 2k, \\ 0, \text{ при } n = 2k+1. \end{cases}$$

Таким образом разложения Тейлора имеют вид

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n}(x). \tag{7.4.16}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+1}(x). \tag{7.4.17}$$

Так как функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ и все их производные по модулю не превосходят единицы, то разложения справедливы на всей числовой оси (т. е. остаточные члены при любом x стремятся к нулю, если $n \to \infty$).

Логарифм

Рассмотрим функцию $y = f(x) = \ln(1+x)$. Дифференцируя, находим

$$y' = \frac{1}{1+x},$$

$$y'' = -\frac{1}{(1+x)^2} = (-1)^1 \frac{1}{(1+x)^2},$$

$$y''' = \frac{1\cdot 2}{(1+x)^3} = (-1)^2 \frac{2!}{(1+x)^3},$$

$$y^{(4)} = -\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(1+x)^4} = (-1)^3 \frac{3!}{(1+x)^4},$$

$$\ldots$$

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

Следовательно,

$$y(0) = 0, \quad y^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

Искомое разложение по формуле (7.4.10) имеет вид

$$\ln x = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_{n+1}(x). \qquad (7.4.18)$$

Можно доказать, что остаточный член $R_{n+1}(x)$, будет стремиться к нулю при $n \to \infty$, если только $-1 < x \leqslant 1$.

Бином Ньютона

Рассмотрим функцию $f(x) = (a+x)^n$, где $n -$ натуральное число. Из школьного курса математики известны частные случаи $(a+x)^2 = a^2 + 2ax + x^2$ и $(a+x)^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3$. Очевидно, $f(x) -$ многочлен степени n, поэтому все производные, начиная с $n+1$-й тождественно равны нулю и остаток также равен нулю. Ясно, что $f'(x) = n(a+x)^{n-1}$, $f''(x) = n(n-1)(a+x)^{n-2}, \ldots, f^{(k)}(x) = n(n-1)\ldots(n-k+1)(a+x)^{n-k}, \ldots, f^{(n)}(x) = n(n-1)\ldots 2\cdot 1$.

Подставляя сюда $x = 0$ и учитывая, что $R_{n+1}(x) \equiv 0$, по формуле Маклорена (7.4.10) получаем *формулу бинома Ньютона*

$$(a+x)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2 + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}x^3 + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1}{n!}x^n.$$

Коэффициенты при $a^{n-k}x^k$ называются *биномиальными коэффициентами* и обозначаются C_n^k. Таким образом,

$$C_n^0 = 1,\ C_n^1 = n,\ C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2!},\ \ldots,$$
$$C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!},\ \ldots,\ C_n^n = 1.$$

Биномиальные коэффициенты можно выразить через факториалы

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!};\quad k = 0,1,2,\ldots,n;\quad 0! = 1.$$

Отметим важное свойство биномиальных коэффициентов

$$C_n^k = C_n^{n-k},\quad k = 0,1,2,\ldots,n,$$

удобное при вычислении биномиальных коэффициентов, у которых верхний индекс больше половины нижнего, например $C_{10}^7 = C_{10}^{10-7} = C_{10}^3 = 10\cdot 9\cdot 8/3! = 120$.

С использованием биномиальных коэффициентов формула бинома Ньютона может быть записана в виде

$$(a+x)^n = C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}x + C_n^2a^{n-2}x^2 + \ldots + C_n^nx^n =$$
$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k}x^k. \quad (7.4.19)$$

Отметим, что формула (7.4.19) была известна задолго до Ньютона. Заслуга Ньютона в том, что он распространил эту формулу на *не целые* n.

Рассмотрим функцию $f(x) = (1+x)^\alpha$, где $\alpha \neq 0$ — произвольное действительное число. Для $x > -1$ она имеет производные всех порядков

$$f'(x) = \alpha(a+x)^{\alpha-1},\quad f''(x) = \alpha(\alpha-1)(a+x)^{\alpha-2},\ \ldots,$$
$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)(a+x)^{\alpha-k}.$$

Следовательно,

$$f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1).$$

Введем биномиальные коэффициенты

$$\binom{\alpha}{0} = 1,\ \binom{\alpha}{1} = \alpha,\ \binom{\alpha}{2} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!},\ \ldots,$$
$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

Из формулы Маклорена (7.4.10) получаем

$$(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \ldots + \binom{\alpha}{n}x^n + R_{n+1}(x) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}x^k + R_{n+1}(x). \quad (7.4.20)$$

7.4.3. Правило Лопиталя

Правило Лопиталя – это метод вычисления некоторых пределов. Основное правило Лопиталя служит для раскрытия неопределенностей вида $0/0$. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в окрестности точки a за исключением, быть может, самой точки a, причем $g'(x) \neq 0$ в этой окрестности.

Тогда если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a) = 0$ и существует предел $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{7.4.21}$$

В самом деле, по теореме Коши 7.4.5 для $x \neq a$ найдется такое c между a и x , что $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$. Если $x \to a$, то $c \to a$ и $\lim\limits_{c\to a} \dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. Отсюда получаем требуемое.

Если окажется, что $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ снова дает неопределенность вида $0/0$, то можно попытаться применить правило Лопиталя повторно. Иногда приходится применять этот прием несколько раз.

Пример 7.4.3. *Найти* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+\sin x - e^x}{x^2}$.

Решение. Дважды применяя правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+\sin x - e^x}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^x}{2x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x - e^x}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Правило Лопиталя применимо также для неопределенностей вида ∞/∞: Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ и существует предел $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{7.4.22}$$

Пример 7.4.4. *Найти* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln \sin^2 x}{\operatorname{ctg} x}$.

Решение. По правилу Лопиталя

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln \sin^2 x}{\operatorname{ctg} x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1/\sin^2 x) 2 \sin x \cos x}{-1/\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} (-2 \sin x \cos x) = 0.$$

Правило Лопиталя справедливо также и в случаях, когда $x \to \pm\infty$, когда $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$ и наконец, оно справедливо для односторонних пределов.

Пример 7.4.5. *Показать, что*

$$1) \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^\alpha x}{x^\beta} = 0, \quad 2) \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} = 0, \quad (\alpha > 0, \beta > 0). \tag{7.4.23}$$

Решение. В обоих случаях, при положительных значениях параметров α и β, мы имеем неопределенности вида ∞/∞. В зависимости от конкретных численных значений этих параметров применяем правило Лопиталя до тех пор, пока не исчезнет неопределенность.

$$1) \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^\alpha x}{x^\beta} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{\alpha \ln^{\alpha-1} x}{x}}{\beta x^{\beta-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha \ln^{\alpha-1} x}{\beta x^\beta} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{\alpha(\alpha-1)\ln^{\alpha-2} x}{x}}{\beta^2 x^{\beta-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ln^{\alpha-2} x}{\beta^2 x^\beta} = \ldots$$

$$\ldots = \lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)\ln^{\alpha-k} x}{\beta^k x^\beta} = 0,$$

как только $\alpha - k < 0$.

Аналогично,

$$2) \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\beta e^{\beta x}} = \ldots$$

$$\ldots = \lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)x^{\alpha-k}}{\beta^k e^{\beta x}},$$

как только $\alpha - k < 0$.

Рассмотренный пример имеет некоторый теоретический интерес. Среди элементарных функций выделим три класса:

1) показательные функции $y = a^x = e^{x\ln a}$ с основанием $a > 1$;

2) степенные функции $y = x^\alpha$ с показателем $\alpha > 0$;

3) логарифмические функции $\ln^\alpha x$, возведенные в произвольную положительную степень α.

Все функции этих классов неограниченно возрастают с ростом x. Тогда любая функция из предыдущего класса возрастает медленнее любой функции из последующего класса. Отсюда, в частности, сразу получаем, что какое бы $\varepsilon > 0$ ни взять, для всех достаточно больших x выполняется неравенство $\ln x < x^\varepsilon$.

Правило Лопиталя позволяет раскрывать и все другие неопределенности $(\infty - \infty)$, $(0 \cdot \infty)$, (0^0), (∞^0), (1^∞). В каждом случае алгебраическими преобразованиями данное выражение нужно преобразовать к неопределенности вида $(0/0)$ или (∞/∞). Как это делается, рассмотрим на примерах.

Неопределенность $(\infty-\infty)$**.** Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x-\dfrac{1}{x}\right)$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{\sin x+x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\sin x+x\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\dfrac{\sin x}{x}+\cos x}=\frac{0}{1+1}=0.$$

Неопределенность $(0\cdot\infty)$**.** Найти предел $\lim\limits_{x\to +0} x\ln x$.

Решение. Функцию $x\ln x$ можно представить либо в виде $\dfrac{\ln x}{1/x}$, либо $\dfrac{x}{1/\ln x}$. Первое представление предпочтительнее, так как в этом случае производная знаменателя находится проще. В этом случае функция дает неопределенность вида (∞/∞) и по правилу Лопиталя имеем

$$\lim_{x\to +0} x\ln x=\lim_{x\to +0}\frac{\ln x}{1/x}=\lim_{x\to +0}\frac{1/x}{-1/x^2}=\lim_{x\to +0}(-x)=0.$$

При раскрытии трех последних неопределенностей можно использовать основное логарифмическое тождество $u^v=e^{\ln u^v}=e^{v\ln u}$. Нетрудно проверить, что во всех трех случаях в показателе экспоненты мы будем иметь неопределенность вида $(0\cdot\infty)$, рассмотренную в предыдущем примере.

Неопределенность (0^0)**.** Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^x$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}(\sin x)^x=\lim_{x\to 0} e^{x\ln\sin x}=\lim_{x\to 0} e^{\dfrac{\ln\sin x}{1/x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0} e^{\dfrac{\cos x/\sin x}{-1/x^2}}=\lim_{x\to 0} e^{-\dfrac{x^2\cos x}{\sin x}}=e^0=1.$$

На последнем шаге использован первый замечательный предел.

Неопределенность (∞^0)**.** Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}(\ln(1+x))^x$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}(\ln(1+x))^x = \lim_{x\to 0} e^{x\ln\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0} e^{\dfrac{\ln\ln(1+x)}{1/x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{\dfrac{1/((1+x)\ln(1+x))}{-1/x^2}} = \lim_{x\to 0} e^{-\dfrac{2x}{\ln(1+x)+1}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} e^0 = 1.$$

Неопределенность (1^∞). Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} e^{\dfrac{\ln\cos x}{x^2}} = \lim_{x\to 0} e^{-\dfrac{\operatorname{tg} x}{2x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{-\dfrac{1/\cos^2 x}{2}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

Даже при использовании правила Лопиталя не следует забывать теорему об использовании эквивалентных бесконечно малых (предел отношения бесконечно малых не изменится, если числитель или знаменатель заменить эквивалентными бесконечно малыми). Так, в последнем примере решение будет кратким, если заменить бесконечно малую $\operatorname{tg} x$, $x \to 0$ на эквивалентную x. Более показателен следующий пример.

Если предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^3}-x^3-1}{\sin^6 x}$ находить, используя только правило Лопиталя, то придется это правило шесть раз, причем при каждом дифференцировании числитель и знаменатель будут все более усложняться (убедитесь в этом). Если же воспользоваться эквивалентностью $\sin x \sim x$ при $x \to 0$, а затем сделать замену $x^3 = t$ (при этом, очевидно, $t \to 0$), то получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^3}-x^3-1}{\sin^6 x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^3}-x^3-1}{x^6} = \lim_{t\to 0}\frac{e^t-t-1}{t^2} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{2t} = \lim_{t\to 0}\frac{e^t}{2} = \frac{1}{2}.$$

Правило Лопиталя не всегда приводит к цели. Рассмотрим предел

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x},$$

имеющий неопределенность вида (∞/∞). Дважды применяя правило Лопиталя, будем иметь

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x/\sqrt{x^2+1}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x/\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}.$$

Между тем предел легко находится непосредственно

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=1.$$

Иногда правило Лопиталя неприменимо *логически*. Например, применяя его к первому замечательному пределу, получим, конечно, верный результат:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1.$$

Но ведь при этом мы используем тот факт, что производная синуса — косинус, а он обычно доказывается применением именно первого замечательного предела. Такие «доказательства» в логике называют *порочным логическим кругом*. В этом случае нужно этот круг разорвать — либо доказать, что производная синуса — косинус не используя первого замечательного предела, и тогда приведенное доказательство этого предела верно, либо доказывать первый замечательный предел без использования правила Лопиталя, что обычно и делают.

Наконец, обратим внимание на требование существования предела отношения производных. Может оказаться так, что этого предела нет, а сам предел отношения двух функций тем не менее существует. Например,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x}\sin x)=0,$$

так как произведение бесконечно малой $\dfrac{1}{x}$ на ограниченную $\sin x$ является бесконечно малой. В то же время предел отношения производных — $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+\sin x)'}{x'}=\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\cos x)$ — не существует.

7.4.4. Исследование поведения функции

Рассмотрим общие методы исследования поведения функции, основанные на дифференциальном исчислении.

Возрастание и убывание функции.

Теорема 7.4.7. *Для того, чтобы дифференцируемая функция $f(x)$ монотонно возрастала (убывала) на отрезке $[a.b]$ необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) \geqslant 0$ ($f'(x) \leqslant 0$.*

Необходимость вытекает из определения производной и свойств предела. Достаточность — это очевидное обобщение теоремы 7.4.1.

Установленная этой теоремой связь между знаком производной и возрастанием или убыванием функции геометрически очевидна. Так как производная — это тангенс угла наклона касательной к графику функции и так как тангенс острого угла положителен, а тангенс тупого угла — отрицателен, то знак этого углового коэффициента показывает, наклонена ли касательная вверх или вниз, а значит, идет вверх или вниз график функции.

Экстремумы функции

Точка x_0 называется точкой *максимума (локального максимума)* функции $f(x)$, если существует такая окрестность этой точки, что для всех точек x из этой окрестности выполняется неравенство

$$f(x) \leqslant f(x_0).$$

Аналогично, если для всех x из некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство

$$f(x) \geqslant f(x_0),$$

то точка x_0 называется точкой *минимума (локального минимума).*

Точки максимума и минимума функции называются *точками экстремума*, а значения функции в этих точках — ее *точками экстремумами*.

Очевидно, если $f'(x) \neq 0$ в малой окрестности точки x_0, то в этой окрестности функция $f(x)$ либо возрастает, либо убывает и, значит, в точке x_0 не может быть экстремума. Если же в точке x_0 есть экстремум, то по теореме Ферма и замечанию к ней, производная в этой точке x_0 или равна нулю или не существует. Отсюда получаем

Необходимые условия существования экстремума

Если точка x_0 является точкой экстремума функции $f(x)$, то либо $f'(x_0) = 0$, либо $f'(x_0)$ не существует.

Эти условия не являются достаточными. Это означает, что если в некоторой точке производная или равна нулю или не существует, то в этой точке экстремума может и не быть. В самом деле, рассмотрим две функции

$$f(x) = x^3, \quad g(x) = \begin{cases} x, \text{ при } x \leqslant 0, \\ 2x, \text{ при } x > 0. \end{cases}$$

В точке $x = 0$ производная функции $f(x)$ обращается в нуль, а производная функции $g(x)$ в этой точке не существует (в этой точке у графика нет касательной). В то же время обе функции не имеют экстремума в точке

$x = 0$ (например, потому, что в этой точке они обе обращаются в нуль, а рядом с ней принимают как положительные, так и отрицательные значения).

Точки, в которых производная равна нулю будем называть *стационарными* точками. Точки, в которых производная не существует будем называть *критическими*. Стационарные и критические точки называют точками *подозрительными на экстремум*.

Первый достаточный признак существования экстремума

Итак, пусть найдены все подозрительные на экстремум точки функции $f(x)$. Как проверить, есть ли на самом деле в каждой из этих точек максимум или минимум? Предположим, что в малой окрестности подозрительной на экстремум точки x_0 производная сохраняет знак (то есть по обе стороны от этой точки она либо положительна, либо отрицательна). Тогда в этой окрестности функция или возрастает или убывает, и, значит, в точке x_0 нет экстремума.

Если слева от точки, подозрительной на экстремум, производная $f'(x)$ положительна, а справа от этой точки она отрицательна, то это означает, что слева от точки x_0 она возрастает, а справа — убывает, и, значит, в этой точке максимум.

Аналогично, если слева от подозрительной на экстремум точки производная $f'(x)$ отрицательна, а справа от нее — положительна, то в этой точке минимум.

Итак, если при переходе через точку, подозрительную на экстремум, производная $f'(x)$:

1) меняет знак с «плюс» на «минус», то в этой точке максимум;

2) меняет знак с «минус» на «плюс», то в этой точке минимум;

3) не меняет знака, то в этой точке нет экстремума.

Этот признак удобен, в частности, тем, что мы совмещаем исследование на экстремум с исследованием монотонности.

ПРИМЕР 7.4.6. *Найти промежутки монотонности и точки экстремума функции*

$$y = \sqrt[3]{x^2}(x-2).$$

РЕШЕНИЕ. Функция определена на всей числовой прямой. Сначала находим производную

$$y' = \frac{2}{3}x^{-1/3}(x-2) + x^{2/3} = \frac{5x-4}{3\sqrt[3]{x}}.$$

Находим стационарные и критические точки: $y' = 0$, если $x = 1$; y' не существует, если $x = 0$.

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,4/5)$	$4/5$	$(4/5,+\infty)$
y'	$+$	не существует	-	0	$+$
y	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-1,1$	$\nearrow$

При заполнении этой таблицы включаем в нее точки разрыва производной (при переходе через них производная может сменить знак), а для определения знака производной достаточно подставить в нее какие-либо точки из соответствующих промежутков, например $x = -1$, $x = 1/2$, и $x = 2$.

Второй достаточный признак существования экстремума

Пусть x_0 — стационарная точка функции $f(x)$, т. е. $f'(x_0) = 0$. Предположим, что в этой точке существует вторая производная. Тогда, если $f''(x_0) > 0$, то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет минимум; если же $f''(x_0) < 0$, то в точке x_0 функция имеет максимум.

Этот признак, как частный случай (при $n = 2$), следует из следующего признака.

Третий достаточный признак существования экстремума

Предположим, функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производные до порядка $n (n \in \mathbb{N})$ включительно. Тогда, если

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0,$$

а $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, то:

1) при n четном в точке x_0 есть экстремум, причем это будет минимум, если $f^{(n)}(x_0) > 0$ и минимум, если $f^{(n)}(x_0) < 0$;

2) при n нечетном в точке x_0 экстремума нет.

Докажем этот признак, используя формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. Так как все производные до порядка n равны нулю, по этой формуле приращение $f(x) - f(x_0)$ представим в виде

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

Так как $o((x - x_0)^n)$ — бесконечно малая более высокого порядка, чем $(x - x_0)^n$, то ее можно представить в виде $o((x - x_0)^n) = \dfrac{\alpha(x)}{n!}(x - x_0)^n$, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to x_0$. Следовательно,

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0) + \alpha(x)}{n!}(x - x_0)^n. \tag{7.4.24}$$

Если $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, то, ввиду того, что $\alpha(x) \to 0$ при $x \to 0$, в достаточно малой окрестности точки x_0 знак $f^{(n)}(x_0) + \alpha(x)$ совпадает со знаком $f^{(n)}(x_0)$. Если n четное, то $(x - x_0)^n$ всегда положительно. Таким образом, если $f^{(n)}(x_0) > 0$, то в достаточно малой окрестности точки x_0 $f(x) - f(x_0) > 0$, то есть $f(x) > f(x_0)$ и, значит, в этой точке минимум.

Аналогично, если $f^{(n)}(x_0) < 0$, то $f(x) < f(x_0)$ и в точке x_0 максимум.

Если n нечетное, то $(x - x_0)^n$ меняет знак при переходе через точку x_0. Значит, с одной стороны от этой точки разность $f(x) - f(x_0)$ положительна, а с другой отрицательна и, следовательно, в точке x_0 нет экстремума.

Наибольшее и наименьшее значения функции

Если функция непрерывна на отрезке $[a, b]$, то по теореме Вейерштрасса она достигает на этом отрезке свои наибольшее и наименьшее значения. Как их найти?

Если в точках $x_1, x_2, \ldots, x_k \in [a,b]$ функция $f(x)$ имеет k локальных максимумов, то, очевидно, наибольшее значение равно наибольшему из чисел

$$f(x_1),\ f(x_2),\ \ldots,\ f(x_k),\ f(a),\ f(b).$$

Последние два числа добавляем потому, что точки a и b могут и не быть точками локальных максимумов, а наибольшее значение может достигаться именно в них (например, если функция монотонно возрастает).

Аналогично, если непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ имеет в точках $x'_1,\ x'_2,\ \ldots,\ x'_m \in [a,b]$ локальные минимумы, то ее наименьшее значение равно наименьшему из чисел

$$f(x'_1),\ f(x'_2),\ \ldots,\ f(x'_m),\ f(a),\ f(b).$$

Таким образом, получаем метод отыскания наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции:

1) находим точки, подозрительные на экстремум (используя необходимые условия существования экстремума);

2) выбираем те из них, которые принадлежат отрезку $[a,b]$;

3) вычисляем значение функции в выбранных точках и в точках a и b. Исследовать выбранные точки на экстремум нет необходимости, ведь мы точно знаем, что искомые наибольшее и наименьшее значения содержатся среди значений функции в указанных точках.

4) среди найденных значений выбираем самое большое и самое маленькое.

Пример 7.4.7. *Найти наибольшее и наименьшее значения функции*

$$y = \sqrt[3]{(x-2)(x+3)^2}$$

на отрезке $[0,3]$.

Решение. 1) Найдем точки, подозрительные на экстремум.

$$y' = \frac{3x-1}{3\sqrt[3]{(x-2)^2(x+3)}}.$$

Производная равна нулю при $x = 1/3$ и она не существует при $x = -3$ и $x = 2$.

2) На отрезок $[0,3]$ попадают точки $x_1 = 1/3$ и $x_2 = 2$.

3) Вычисляем значение функции в выбранных точках и в концевых точках отрезка: $f(x_1) = f(1/3) = -\sqrt[3]{50/9} \approx -1,77$; $f(x_2) = f(2) = 0$; $f(0) = -\sqrt[3]{18} \approx -2,62$; $f(3) = -\sqrt[3]{36} \approx 3,30$.

4) среди найденных значений выбираем наибольшее и наименьшее

$$f(0) = -\sqrt[3]{18}, \quad f(3) = \sqrt[3]{36}.$$

Во многих приложениях математического анализа требуется найти наибольшее и наименьшее значения некоторой переменной величины, являющейся функцией другой переменной.

Пример 7.4.8. *Из квадратного листа бумаги, вырезав по углам равные квадраты, изготавливаем открытую коробку. Какой должна быть сторона вырезаемого квадрата, чтобы эта коробка имела наибольший объем?*

Решение. Пусть сторона листа равна a. Обозначим через x сторону вырезаемого квадрата. Тогда, очевидно, объем V коробки будет равен $V = x(a-2x)^2$. Ясно, что $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{a}{2}$ и на этом промежутке требуется найти наибольшее значение функции $V = V(x)$. На концах промежутка эта функция не может достигать наибольшего значения (в этом случае получим «коробку» нулевого объема).

Находим стационарные точки: $V' = (a-2x)^2 + x2(a-2x)(-2) = (a-2x)(a-6x) = 0 \implies x = a/6$ (корень $x = a/2$ посторонний). В том, что в точке $x = a/6$ функция V имеет максимум, легко убедиться, вспомнив, например, первый достаточный признак экстремума, но, заметим, что из реального смысла задачи следует, что в найденной точке (так как она единственна) будет максимум.

Пример 7.4.9. *На какой высоте над центром круглой площадки радиуса R нужно повесить электрическую лампу, чтобы граница этой площадки имела максимальную освещенность?*

Решение. Обозначим через x высоту подвеса лампы, r — расстояние от лампы до границы площадки, φ — угол падения лучей. По законам физики, освещенность J в точке прямо пропорциональна косинусу угла падения лучей и обратно пропорциональна квадрату расстояния от точки до источника света, т. е.

$$J = \gamma \frac{\cos\varphi}{r^2},$$

где γ — коэффициент пропорциональности, зависящий от светосилы лампы. Но $\cos\varphi = x/r$, $r = \sqrt{x^2+R^2}$, значит,

$$J = \gamma \frac{x}{(x^2+R^2)^{3/2}} \quad 0 < x < +\infty.$$

Находим стационарные точки

$$J' = \gamma \frac{R^2-2x^2}{(x^2+R^2)^{5/2}} = 0 \implies x = \frac{R}{\sqrt{2}} \approx 0,7R.$$

Это и есть искомая высота подвеса лампы. Доказательство того, что здесь будет именно максимум, также можно опустить из физических соображений (положите лампу на землю в центре площадки или подвесьте на километровый столб).

Выпуклость

Пусть $f''(x) > 0$ на отрезке $[a, b]$. Тогда первая производная $f'(x)$ монотонно возрастает. Но $f'(x)$ — это тангенс угла наклона касательной и, значит этот тангенс монотонно возрастает. Каждая ветвь тангенса — монотонно возрастающая кривая, следовательно, если тангенс возрастает, то его аргумент на интервалах $(0, \pi/2)$ и $(\pi/2, \pi)$ также возрастает. Следовательно, если $f''(x) > 0$ на отрезке $[a, b]$, то график функции $f(x)$ является вогнутой (выпуклой вниз) кривой (рис.6.7).

Аналогично, если $f''(x) < 0$ на отрезке $[a, b]$, то график функции $f'(x)$ является выпуклой (выпуклой вверх) кривой (рис.6.8).

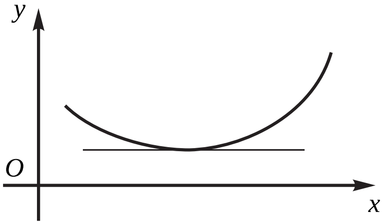


Рис. 6.7

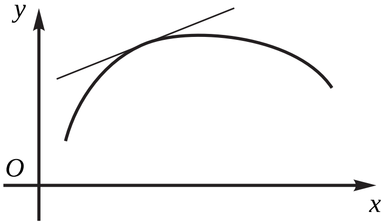


Рис. 6.8

Дадим более строгие формулировки. Пусть $Y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ — касательная к графику функции $y = f(x)$ в произвольной точке $x_0 \in [a, b]$. Введем функцию

$$g(x) = y - Y = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0). \tag{7.4.25}$$

График функции называется *выпуклым вверх (выпуклым вниз)* на промежутке $[a, b]$, если *для любой* точки $x_0 \in [a, b]$ функция $g(x) = y - Y \leqslant 0$ $(g(x) = y - Y \geqslant 0)$.

Геометрически это означает, что график функции лежит с одной стороны от *любой* касательной (рис. 6.7 и 6.8).

Интервалы выпуклости вверх и интервалы выпуклости вниз называются *интервалами выпуклости*. Точки, при переходе через которые меняется характер выпуклости, называются *точками перегиба*.

Например, выпуклыми вниз на всей числовой прямой являются графики функций $y = x^2$ и $y = e^x$. Выпуклым вверх для всех $x > 0$ является график функции $y = \ln x$. Для функций $y = x^3$ и $y = 1/x$ интервал $(-\infty, 0)$ это интервал выпуклости вверх, а интервал $(0, +\infty)$ — интервал выпуклости вниз.

Теорема 7.4.8 (Условие выпуклости функции).

Для того чтобы график дважды дифференцируемой на интервале (a, b) функции $y = f(x)$ был выпуклым вниз на этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы вторая производная была неотрицательна на (a, b), т. е. $f''(x) \geqslant 0, x \in (a, b)$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть график функции выпуклая вниз на интервале (a,b) кривая, и надо доказать, что в произвольной точке x_0 из этого интервала $f''(x_0) \geqslant 0$. По определению выпуклости вниз функция $g(x)$, определенная равенством (7.4.25), неотрицательна и, так как $g(x_0) = 0$, имеет в точке x_0 минимум. По второму достаточному признаку экстремума ее вторая производная в точке x_0 положительна: $g''(x_0) \geqslant 0$. Но $g''(x) = f''(x)$, и необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $f''(x) \geqslant 0$ во всех точках интервала (a,b). По определению выпуклости вниз надо доказать, что функция $g(x)$, определенная равенством (7.4.25), неотрицательна. Так как $g''(x) = f''(x)$, то $g''(x) \geqslant 0$ на интервале (a,b), а значит, $g'(x)$ монотонно возрастает на этом интервале. Но $g'(x_0) = 0$, следовательно, левее точки x_0 $g'(x)$ отрицательна, а правее ее — положительна. Значит, слева от точки x_0 функция $g(x)$ убывает, а справа от точки x_0 возрастает и, следовательно, имеет в этой точке минимум, равный $g(x_0) = 0$. Отсюда $g(x) \geqslant g(x_0) = 0$ и, значит, график функции $y = f(x)$ выпуклая вниз на интервале (a,b) кривая. Теорема доказана.

Аналогично необходимым и достаточным условием выпуклости вверх графика дважды дифференцируемой на интервале (a,b) функции $y = f(x)$ является выполнение неравенства

$$f''(x) \leqslant 0, x \in (a,b).$$

Пример 7.4.10. *Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции $y = e^{\sqrt[3]{x}}$.*

Решение. Вычислим первую и вторую производные функции

$$y' = \frac{e^{\sqrt[3]{x}}}{3\sqrt[3]{x^2}}, \quad y'' = \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{9x^{5/3}} e^{\sqrt[3]{x}}.$$

Решая неравенство (например методом интервалов)

$$y'' = \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{9x^{5/3}} e^{\sqrt[3]{x}} > 0,$$

получаем $x \in (-\infty, 0) \cup (8, +\infty)$. Очевидно, при $x \in (0, 8)$ выполняется неравенство $y'' < 0$.

Итак, при $x \in (-\infty, 0) \cup (8, +\infty)$ график функции является выпуклой вниз кривой, а на интервале $(0, 8)$ он выпуклый вверх. При переходе через точки $x = 0$ и $x = 8$ меняется характер выпуклости, следовательно, эти точки являются точками перегиба.

Асимптоты

Используя пределы, можно выяснить поведение функции на границе области определения функции.

Прямая $x = x_0$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов равен бесконечности

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \infty \quad \text{или} \quad \lim_{x\to x_0+0} f(x) = \infty. \tag{7.4.26}$$

Так, например, прямая $x = 0$ (т. е. ось Oy) является вертикальной асимптотой графика гиперболы $y = 1/x$, так как оба предела (7.4.26) бесконечны. Для логарифмической кривой $y = \ln x$ ось Oy также является вертикальной асимптотой, так как $\lim\limits_{x\to x_0+0} \ln x = -\infty$. График тангенса $\operatorname{tg} x$ имеет бесконечное множество вертикальных асимптот $x = \pi/2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Ясно, что вертикальные асимптоты возможны только либо в точках разрыва функции, либо на границе области определения (если эта граничная точка — конечное число).

Прямая $y = kx + b$ называется *наклонной асимптотой* графика функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ (при $x \to -\infty$), если

$$\begin{gathered}\lim_{x\to+\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0 \quad \text{или} \\ \lim_{x\to-\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0.\end{gathered} \tag{7.4.27}$$

Если $k = 0$, то асимптота $y = b$ называется *горизонтальной*.

Теорема 7.4.9. *Для того чтобы прямая $y = kx + b$ была наклонной асимптотой графика функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ (при $x \to -\infty$), необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = b, \tag{7.4.28}$$

$$\left(\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x\to-\infty} (f(x) - kx) = b\right). \tag{7.4.29}$$

Для доказательства заметим, что если $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0$, то и подавно $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x) - (kx + b)}{x} = 0$. Отсюда $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\dfrac{f(x)}{x} - k - \dfrac{b}{x}\right) = 0$ и, значит, $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

Оставшуюся часть доказательства предлагаем читателю воспроизвести самостоятельно.

В заключение рассмотрим пример

Пример 7.4.11. *Найти все асимптоты графика функции*

$$y = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}.$$

Решение. Запишем функцию в виде $y = \dfrac{\sqrt{x^4+1}}{|x|}$. Она определена и непрерывна для всех x, кроме $x=0$. Найдем односторонние пределы в этой точке разрыва

$$\lim_{x\to 0\pm 0} \frac{\sqrt{x^4+1}}{|x|} = +\infty,$$

то есть $x=0$ — вертикальная асимптота.

Выясним, есть ли наклонные асимптоты. По формулам (7.4.29) имеем

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^4+1}}{x|x|} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\sqrt{1+1/x^4}}{-x^2} = -1,$$

$$b = \lim_{x\to-\infty}(f(x)-kx) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{x^4+1}}{-x}+x\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^4+1}-x^2}{-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-x(\sqrt{x^4+1}+x^2)} = 0.$$

Значит, прямая $y=-x$ — наклонная асимптота при $x\to-\infty$.

Аналогично, По формулам (7.4.28)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\sqrt{1+1/x^4}}{x^2} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x^4-1}}{x}-x\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^4+1}-x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x(\sqrt{x^4+1}+x^2)} = 0.$$

Значит, $y=x$ — наклонная асимптота при $x\to+\infty$.

7.4.5. Построение графиков функций

Дифференциальное исчисление дает мощные методы для построения графиков функций. При этом основной целью является изучение *хода изменения* функции (возрастание, убывание, экстремумы, выпуклость) и точность значений функции не так важна.

При построении графиков функций удобно использовать следующую схему.

1) *Найти область определения функции.*

2) *Проверить, является ли функция четной, нечетной* или ни той, ни другой. Напомним, что функция $f(x)$ называется четной, если $f(-x)=f(x)$, и нечетной, если $f(-x)=-f(x)$. Очевидно, область определения таких

функций симметрична относительно начала координат и если в каких-либо двух симметричных точках x_0 и $-x_0$ функция $f(x_0) \neq \pm f(-x_0)$, то она не будет ни четной, ни нечетной. Так как график четной функции симметричен относительно оси ординат, а график нечетной функции симметричен относительно начала координат, то все дальнейшее исследование достаточно провести только для $x \geqslant 0$.

Аналогично если функция является *периодической*, то достаточно исследовать ее и построить график на любом промежутке, длина которого равна периоду.

3) *Найти точки пересечения графика с осями координат.* Для нахождения точки пересечения с осью Oy (если она существует), достаточно положить $x = 0$. Для нахождения точек пересечения с осью Ox нужно решить уравнение $f(x) = 0$, а это часто бывает или затруднительно, или даже невозможно. И тогда этот пункт пропускаем. Аналогично можно попытаться найти интервалы, на которых функция сохраняет определенный знак.

4) *Найти точки разрыва функции и асимптоты.*

5) *Найти первую производную* и по ней промежутки монотонности функции и ее экстремумы.

6) *Найти вторую производную* и по ней промежутки выпуклости вверх или вниз и точки перегиба графика.

7) *Построить график функции.*

Рассмотрим примеры на полное исследование функции и построение ее графика.

Пример 7.4.12. *Построить график функции*

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 1}.$$

Решение. 1) Функция определена на всей числовой прямой, кроме нулей знаменателя $x = \pm 1$.

2) $y(-x) = \dfrac{(-x)^3}{(-x)^2 - 1} = -\dfrac{x^3}{x^2 - 1} = -y(x) \implies$ функция нечетная, график симметричен относительно начала координат. Дальнейшее исследование проводим для $x \geqslant 0$.

3) $x = 0 \iff y = 0$. График пересекает оси координат в единственной точке $(0, 0)$. Используя метод интервалов, убеждаемся, что $\dfrac{x^3}{x^2 - 1} = \dfrac{x^3}{(x-1)(x+1)} > 0$, если $x > 1$. При $0 < x < 1$ функция отрицательна.

4) Найдем односторонние пределы в точке разрыва $x = 1$.

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{x^3}{(x-1)(x+1)} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 1+0} \frac{x^3}{x^2-1} = +\infty,$$

т. е. $x = 1$ — вертикальная асимптота.

Ищем наклонные асимптоты. По формулам (7.4.28) и (7.4.29) имеем

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x(x^2-1)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{1-1/x^2} = 1.$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x)-kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-1} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2-1} = 0.$$

Следовательно, прямая $y = x$ является асимптотой как при $x \to +\infty$, так и при $x \to -\infty$.

5) Находим производную $y' = \dfrac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$. Стационарных точек три: $x = 0$ и $x = \pm\sqrt{3}$. Производная не существует, если $x = \pm 1$, но эти точки не могут быть подозрительными на экстремум, так как в этих точках сама функция не определена.

x	0	$(0,1)$	1	$(1,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},+\infty)$
y'	0	-	$\nexists$	-	0	$+$
y		$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$	$3\sqrt{3}/2 \approx 2,5$	$\nearrow$

6) Находим вторую производную $y'' = \dfrac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$. Если $x > 1$, то $y'' > 0$ и график является выпуклой вниз кривой; а если $x \in (0,1)$, то $y'' < 0$ и график выпуклый вверх.

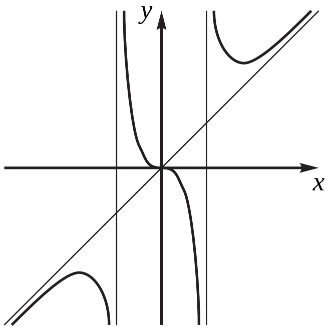


Рис. 6.9

7) На основании этого анализа строим график для $x \geqslant 0$ и, симметрично отражая полученную кривую относительно начала координат, получаем график функции $y = \dfrac{x^3}{x^2-1}$. При этом учитываем, что в точке $x = 0$ производная равна нулю, то есть касательная горизонтальна (рис. 6.9).

Пример 7.4.13. *Построить график функции*

$$y=\frac{x^3}{x-1}.$$

Решение. 1) Функция определена на всей числовой прямой, кроме нуля знаменателя $x=1$.

2) Функция не является ни четной ни нечетной (область определения несимметрична относительно начала координат).

3) $x=0 \iff y=0$. Точка $(0,0)$ — единственная точка пересечения с осями координат. Используя метод интервалов, убеждаемся,что $\dfrac{x^3}{x-1}>0$, если $x>1$ или $x<0$. При $0<x<1$ функция отрицательна.

4) Найдем односторонние пределы в точке разрыва $x=1$.

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x^3}{x-1}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{x^3}{x-1}=+\infty,$$

то есть $x=1$ — вертикальная асимптота.

Так как

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x(x-1)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{1-1/x^2}=\infty,$$

то наклонных асимптот нет.

5) Находим производную $y'=\dfrac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}$. Имеем две стационарные точки $x=0$ и $x=3/2$. В точке $x=1$ производная не существует, но экстремума в этой точке не может быть, так как в ней сама функция не определена.

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,3/2)$	$3/2$	$(3/2,+\infty)$
y'	-	0	-	$\nexists$	-	0	$+$
y	$\searrow$	0	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$	$6,75$	$\nearrow$

6) Находим вторую производную $y''=\dfrac{2x(x^2-3x+3)}{(x-1)^3}$. Если $x>1$ или $x<0$, то $y''>0$ и график является выпуклой вниз кривой; а если $x\in(0,1)$, то $y''<0$ и график выпуклый вверх.

7) На основании этого анализа строим график (рис. 6.10).

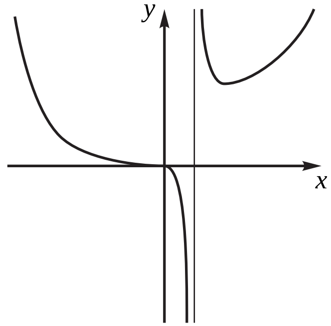


Рис. 6.10

Пример 7.4.14. *Построить график функции*

$$y = \frac{\ln^2 x}{x}.$$

Решение. 1) Функция определена при $x > 0$.

2) Функция не является ни четной ни нечетной.

3) $y = 0$, только при $x = 1$. Точка $(1, 0)$ — единственная точка пересечения с осями координат. Функция неотрицательна во всей области определения.

4) Найдем предел справа в граничной точке $x = 0$ области определения

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{\ln^2 x}{x} = +\infty,$$

т. е. $x = 0$ — ось Oy — вертикальная асимптота.

Ищем наклонные асимптоты. По формуле (7.4.28), используя пример (7.4.23), имеем

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^2 x}{x^2} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^2 x}{x} = 0.$$

Следовательно, у графика функции есть горизонтальная асимптота $y = 0$ (ось Ox) при $x \to +\infty$.

5) Производная равна $y' = \dfrac{\ln x(2 - \ln x)}{x^2}$. Две стационарные точки $\ln x = 0 \implies x = 1$ и $\ln x = 2 \implies x = e^2 \approx 7,4$.

x	$(0,1)$	1	$(1,e^2)$	e^2	$(e^2,+\infty)$
y'	-	0	$+$	0	-
y	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4/e^2 \approx 0,6$	$\searrow$

6) Находим вторую производную $y'' = \dfrac{2 - 6\ln x + 2\ln^2 x}{x^3}$.

Приравнивая числитель к нулю и решая квадратное (относительно $\ln x$) уравнение, находим точки перегиба графика функции:

$$\ln x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \implies \begin{cases} x_1 = e^{(3-\sqrt{5})/2} \approx 1,46, \\ x_2 = e^{(3+\sqrt{5})/2} \approx 13,74. \end{cases}$$

Если $x_1 < x < x_2$, то вторая производная отрицательна и график функции выпуклая вверх кривая. Для остальных x из области определения график будет выпуклым вниз.

7) На основании этого анализа строим график (рис. 6.11).

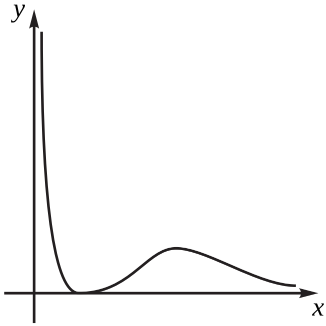


Рис. 6.11

Глава 8

Линейные пространства

В процессе изучения первых двух глав читатель, вероятно, обратил внимание на то, что линейные операции (т. е. операции сложения и умножения на число) были введены на множествах объектов совершенно различной природы: множестве матриц, множестве геометрических векторов, множестве столбцов и т. п. И хотя определялись эти операции в каждом из перечисленных множеств тоже по-разному, во всех случаях они обладали одним и тем же набором формальных свойств: например, свойства 1)–8) линейных операций над матрицами в п 2.1.1, аналогичные свойства операций сложения векторов и умножения вектора на число в § 3.1. Далее, как только линейные операции в упомянутых множествах были определены, для объектов этих множеств вводились новые понятия и изучались новые свойства, которые имели много общего или похожего. Так, например, понятия линейной комбинации, линейной зависимости, линейной независимости и другие определялись совершенно одинаково, практически дословно, для столбцов, строк и векторов. Все это наводит на мысль изучить общие свойства подобных структур, то есть множеств объектов произвольной природы с определенными на них линейными операциями сложения и умножения на число. Они и называются линейными, или векторными пространствами, и их изучению посвящена настоящая глава.

§ 8.1. Понятие линейного пространства

8.1.1. Определение линейного пространства

В дальнейшем изложении мы будем использовать следующие общепринятые в математике символы: $\forall$ («квантор всеобщности») и $\exists$ («квантор существования»). При этом символ $\forall$ будет означать (и заменять) одно из выражений: «для всякого», «для каждого», «для любых»; а символ $\exists$ будет означать одно из выражений: «существует», «найдется», «найдутся».

Определение 8.1.1. *Непустое множество* L *называется* линейным пространством над полем действительных чисел $\mathbb{R}$ *(или* действительным линейным пространством*), если оно удовлетворяет следующим условиям:*

I. На L *введена операция сложения, т. е. задано правило, по которому любым двум элементам* $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$ *множества* L *ставится в соответствие единственный элемент* $\mathbf{z}$ *этого множества, называемый суммой элементов* $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$ *и обозначаемый символом* $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$.

II. На L *введена операция умножения на число, т. е. задано правило, по которому каждому элементу* $\mathbf{x}$ *множества* L *и любому числу* $\lambda \in \mathbb{R}$ *ставится в соответствие единственный элемент* $\mathbf{y}$ *из* L*, называемый произведением элемента* $\mathbf{x}$ *на число* λ *и обозначаемый символом* $\mathbf{y} = \lambda \cdot \mathbf{x}$ *или просто* $\mathbf{y} = \lambda\mathbf{x}$.

III. Указанные операции удовлетворяют следующим восьми аксиомам:

1) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in L \ \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ *(коммутативность сложения);*

2) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in L \ (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$ *(ассоциативность сложения);*

3) существует нулевой элемент $\mathbf{0} \in L$ *такой, что* $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x} \ \forall \mathbf{x} \in L$*;*

4) для каждого элемента $\mathbf{x} \in L$ *существует противоположный элемент* $\mathbf{x}' \in L$ *такой, что* $\mathbf{x} + \mathbf{x}' = \mathbf{0}$*;*

5) $\forall \lambda \in \mathbb{R} \ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in L \ \lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}$ *(дистрибутивность относительно суммы элементов множества).*

6) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \ \forall \mathbf{x} \in L \ \lambda(\mu\mathbf{x}) = (\lambda\mu)\mathbf{x}$ *(ассоциативность умножения элемента на число);*

7) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \ \forall \mathbf{x} \in L \ (\lambda + \mu)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{x}$ *(дистрибутивность относительно суммы числовых множителей);*

8) $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \ \forall \mathbf{x} \in L$*;*

Элементы линейного пространства принято называть *векторами*, поэтому линейное пространство называется еще *векторным пространством*. Векторы линейного пространства будем обозначать, как правило, строчными буквами латинского алфавита, набранными полужирным шрифтом ($\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$, ..., $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$). Греческие буквы α, β, λ, ... используются для обозначения чисел. В некоторых случаях для обозначения чисел используются и буквы латинского алфавита, например, координаты векторов будут обозначаться строчными латинскими буквами, набранными светлым курсивом (x_1, x_2, ..., y_1, y_2, ...). Для обозначения строк и столбцов используется черта снизу или сверху соответственно: $\underline{x}$, $\underline{y}$, $\underline{a}$ или $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{a}$ и т. д.; матрицы, как и ранее, обозначаются заглавными латинскими буквами.

Замечание 8.1.1. *Если вместо поля действительных чисел* $\mathbb{R}$ *в определении линейного пространства использовано поле комплексных чисел* $\mathbb{C}$, *то линейное пространство называют* комплексным линейным пространством. *Если вместо поля действительных чисел использовано какое-то поле чисел K, то говорят, что задано* линейное пространство над полем K. *При этом понятие «поле чисел» вводится в следующем определении.*

Определение 8.1.2. *Множество чисел K называется* полем чисел *или* числовым полем, *если на нем определены операции сложения и умножения (обозначаемые обычным образом), которые обладают следующими свойствами:*

1) $\forall \alpha, \beta \in K \ \alpha + \beta = \beta + \alpha$*;*

2) $\forall \alpha, \beta, \gamma \in K \ (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$*;*

3) $\forall \alpha, \beta, \gamma \in K \ (\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$*;*

4) $\forall \alpha, \beta, \gamma \in K \ \alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$*;*

5) существует число $0 \in K$ *такое, что* $\alpha + 0 = \alpha \ \forall \alpha \in K$*;*

6) для каждого числа $\alpha \in K$ *существует противоположное число* $\alpha' \in K$ *такое, что* $\alpha + \alpha' = 0$*;*

7) существует число $1 \in K$ *такое, что* $1 \cdot \alpha = \alpha \ \forall \alpha \in K$*;*

8) для каждого числа $\alpha \in K$ $(\alpha \neq 0)$ *существует обратное число* $\beta \in K$ *такое, что* $\alpha\beta = 1$.

Нетрудно убедиться, что полем являются множество рациональных чисел, множество действительных (вещественных) чисел и множество комплексных чисел. Множество целых чисел не является полем, так как не для всякого целого числа определено обратное (в множестве целых чисел), следовательно, на множестве целых чисел не определена операция деления — обратная к умножению.

В дальнейшем, если не оговорено другое, мы будем рассматривать лишь действительные линейные пространства.

8.1.2. Следствия из аксиом линейного пространства

Следствие 8.1.1. *В линейном пространстве существует единственный нулевой вектор.*

Доказательство. Существование хотя бы одного нулевого вектора следует из аксиомы 3. Предположим, существуют два нулевых вектора $\mathbf{0}_1$ и $\mathbf{0}_2$. Тогда, полагая в аксиоме 3 сначала $\mathbf{x} = \mathbf{0}_1$, $\mathbf{0} = \mathbf{0}_2$, а затем $\mathbf{x} = \mathbf{0}_2$, $\mathbf{0} = \mathbf{0}_1$, получим два равенства: $\mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_1$ и $\mathbf{0}_2 + \mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_2$. Левые части этих равенств одинаковы в силу аксиомы 1, следовательно, правые части также равны, т. е. $\mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_2$, что доказывает единственность нулевого вектора.

Следствие 8.1.2. *В линейном пространстве для каждого вектора* $\mathbf{x}$ *существует единственный противоположный вектор* $\mathbf{x}'$.

Доказательство. Существование для каждого вектора хотя бы одного противоположного утверждается в аксиоме 4. Предположим, для некоторого вектора $\mathbf{x}$ существует два противоположных $\mathbf{x}'_1$ и $\mathbf{x}'_2$, так что $\mathbf{x}+\mathbf{x}'_1 = \mathbf{0}$ и $\mathbf{x}+\mathbf{x}'_2 = \mathbf{0}$. Запишем цепочку равенств, используя последовательно аксиомы 3, 2 и 1: $\mathbf{x}'_1 = \mathbf{x}'_1 + \mathbf{0} = \mathbf{x}'_1 + (\mathbf{x}+\mathbf{x}'_2) = (\mathbf{x}'_1 + \mathbf{x}) + \mathbf{x}'_2 = \mathbf{0} + \mathbf{x}'_2 = \mathbf{x}'_2$. Отсюда $\mathbf{x}'_1 = \mathbf{x}'_2$, что и требовалось доказать.

В дальнейшем противоположный для вектора $\mathbf{x}$ элемент будем обозначать символом «$-x$».

Следствие 8.1.3. *В любом линейном пространстве можно ввести разность векторов: вектор* $\mathbf{z}$ *называется разностью векторов* $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$ *(обозначение:* $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$*), если* $\mathbf{x} = \mathbf{z} + \mathbf{y}$.

Упражнение 8.1.1. *Используя аксиомы линейного пространства, покажите, что* $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{x} + (-\mathbf{y})$.

Следствие 8.1.4. *Произведение любого вектора* $\mathbf{x} \in L$ *на число* 0 *равно нулевому вектору:* $0 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Доказательство. Докажем сначала, что

$$\mathbf{x} + 0 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}. \tag{8.1.1}$$

Действительно, используя аксиомы 8 и 7, запишем следующую цепочку равенств: $\mathbf{x} + 0\cdot\mathbf{x} = 1\cdot\mathbf{x} + 0\cdot\mathbf{x} = (1+0)\cdot\mathbf{x} = 1\cdot\mathbf{x} = \mathbf{x}$. Для доказательства следствия 8.1.4 нужно доказать, что вектор $0\cdot\mathbf{x}$ удовлетворяет определению нулевого вектора, т. е. для любого вектора $\mathbf{y} \in L$ выполнено

$$\mathbf{y} + 0 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y}. \tag{8.1.2}$$

Представим вектор $\mathbf{y}$ в виде: $\mathbf{y} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} - \mathbf{x})$ (см. определение разности). Тогда

$$\mathbf{y} + 0\cdot\mathbf{x} = \mathbf{x} + (\mathbf{y}-\mathbf{x}) + 0\cdot\mathbf{x} = (\mathbf{y}-\mathbf{x}) + (\mathbf{x} + 0\cdot\mathbf{x}) = (\mathbf{y}-\mathbf{x}) + \mathbf{x} = \mathbf{y}.$$

В этих равенствах мы воспользовались определением разности (см. следствие 8.1.3), а также соотношением (8.1.1), тем самым равенство (8.1.2) доказано.

Следствие 8.1.5. *Для любого вектора* $\mathbf{x} \in L$ *противоположный вектор* $(-\mathbf{x})$ *равен произведению* $\mathbf{x}$ *на число* (-1)*, т. е.* $-\mathbf{x} = (-1)\cdot\mathbf{x}$.

Упражнение 8.1.2. *Докажите следствие* 8.1.5*, используя аксиомы линейного пространства.*

8.1.3. Примеры линейных пространств

Пример 8.1.1. *Множество $L = \mathbb{R}$ действительных (вещественных) чисел над полем $K = \mathbb{R}$ действительных чисел. Операции сложения и умножения на число вводятся как обычные операции с числами.*

Пример 8.1.2. *Множества $L = V_1$, $L = V_2$, $L = V_3$ всех геометрических векторов соответственно на прямой, на плоскости и в пространстве над полем действительных чисел $K = \mathbb{R}$. Операции сложения векторов и умножения вектора на число те же, что были введены в векторной алгебре (см. п 3.1.1).*

Пример 8.1.3. *Множество $L = A_{m\times n}$ матриц одной размерности $m \times n$ с операциями сложения и умножения на число, введенными в п § 2.1, $K = \mathbb{R}$.*

Пример 8.1.4. *Множество $L = C[a,b]$ функций $x = x(t)$, непрерывных на отрезке $[a,b]$, $K = \mathbb{R}$. Операции сложения таких функций и умножения на действительных число определены обычными правилами математического анализа.*

Пример 8.1.5. *Множество P всех многочленов и множество P_n многочленов, степень которых не превышает заданного натурального числа n. Операции сложения многочленов и умножения многочлена на действительное число определены так же, как в примере 8.1.4.*

Пример 8.1.6. *Важный пример линейного пространства — множество $\mathbb{R}_n$, элементами которого являются всевозможные упорядоченные наборы из n действительных чисел $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, если операции сложения элементов $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ и умножения элемента на действительное число λ определить правилами:*

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = \\ = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),$$

$$\lambda\mathbf{x} = \lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n).$$

Пространство R_n обычно называют n-мерным арифметическим пространством, или n-мерным координатным пространством. При этом если вместо n-мерных строк рассматривать n-мерные столбцы, а линейные операции ввести аналогично, то соответствующее линейное пространство будем обозначать $\mathbb{R}^n$.

Упражнение 8.1.3. *Проверьте, что операции сложения векторов и умножения вектора на число, введенные в примере 8.1.6, удовлетворяют аксиомам 1)–8) линейного пространства.*

Для лучшего понимания определения линейного пространства приведем также примеры множеств с введенными там операциями сложения элементов и умножения элемента на действительное число, которые не образуют линейных пространств.

Пример 8.1.7. *Множество $\mathbb{R}$ действительных чисел над полем $K = \mathbb{C}$ комплексных чисел не образует линейного пространства (не определена операция умножения на число, так как произведение $\lambda\mathbf{x}$ для $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$ и $\lambda \in \mathbb{C}$ может не быть действительным числом).*

Пример 8.1.8. *Множество V_2^o векторов плоскости xOy, каждый из которых лежит на одной из координатных осей, с обычными операциями сложения и умножения на число не образует линейного пространства, так как сумма векторов $\mathbf{x} \in Oy$ и $\mathbf{y} \in Oy$ может не принадлежать V_2^o. Этот пример проиллюстрирован на рис. 7.1:*

$$L = \{\mathbf{x} \in V_2 : \ \mathbf{x} \in Ox \cup Oy\},$$
$$\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y} \notin Ox \cup Oy.$$

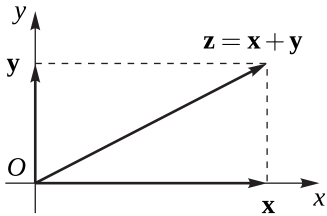


Рис. 7.1

Пример 8.1.9. *Множество всех многочленов степени n не образует линейного пространства, так как на этом множестве не определена операция сложения элементов: сумма двух многочленов степени n может иметь степень ниже n. Например, для многочленов $\mathbf{p}(t) = t^n + t^{n-1} + \ldots + 1$, $\mathbf{q}(t) = -t^n + t^{n-1} + \ldots + 1$, сумма $\mathbf{p}(t) + \mathbf{q}(t) = 2t^{n-1} + \ldots + 2$ — многочлен степени $n - 1$.*

8.1.4. Подпространства линейных пространств

Определение 8.1.3. *Подпространством линейного пространства L называется всякое подмножество $L_1 \subset L$, элементы которого сами образуют линейное пространство с теми же операциями сложения и умножения на число, что определены в L.*

Теорема 8.1.1. *Для того чтобы подмножество L_1 было подпространством линейного пространства L над числовым полем K, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:*

1) если $\mathbf{x} \in L_1$ *и* $\mathbf{y} \in L_1$*, то* $\mathbf{x}+\mathbf{y} \in L_1$*,*

2) если $\mathbf{x} \in L_1$ *и* $\lambda \in K$*, то* $\lambda\mathbf{x} \in L_1$*.*

Доказательство. *Необходимость* следует из того, что данные условия должны выполняться для любого линейного пространства, а L_1 (по условию) является линейным пространством.

Достаточность. Пусть условия 1 и 2 выполнены. Для доказательства того, что L_1 образует линейное пространство, нужно проверить выполнение восьми аксиом линейного пространства. Справедливость всех аксиом, кроме аксиом 3 и 4, очевидна, так как любой элемент L_1 является одновременно элементом L. Докажем выполнение аксиомы 3. По условию 2 теоремы для $\forall\mathbf{x} \in L_1$ и $\forall\lambda \in K$ элемент $\lambda\mathbf{x} \in L_1$. Поэтому, при $\lambda = 0$ элемент $0 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0} \in L_1$. Следовательно, $\exists\mathbf{0} \in L_1$ такой, что $\mathbf{x}+\mathbf{0} = x$, т. е. на множестве L_1 существует нулевой элемент и аксиома 3 выполнена. Аналогично если $\mathbf{x} \in L_1$ и $\lambda = -1$, то $(-1) \cdot \mathbf{x} = -\mathbf{x} \in L_1$ и $\mathbf{x}+(-\mathbf{x}) = 0$, т. е. вместе с любым элементом $\mathbf{x}$ множество L_1 содержит противоположный ему элемент $-\mathbf{x}$. Следовательно, выполнена и аксиома 4, что и доказывает теорему.

Приведем примеры подмножеств, являющихся подпространствами линейных пространств.

Пример 8.1.10. *Множество V_1 геометрических векторов, лежащих на прямой, и множество V_2 векторов, лежащих в плоскости, образуют подпространства линейного пространства V_3 трехмерных векторов.*

Пример 8.1.11. *Множество P_n многочленов, степень которых не превышает n, является подпространством пространства P всех многочленов, а множество P, в свою очередь, является подпространством линейного пространства $C(-\infty,\infty)$ всех непрерывных функций.*

Пример 8.1.12. *Важным примером подпространства линейного пространства L является линейная оболочка множества векторов. Пусть $M \subset L$ — некоторое подмножество линейного пространства L.* Линейной оболочкой *M называется множество всевозможных линейных комбинаций векторов из M, т. е. множество векторов вида*

$$\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \alpha_m\mathbf{x}_m,$$

где $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, …, $\mathbf{x}_m$ — произвольное конечное множество векторов из M, а коэффициенты α_1, α_2, …, α_m принимают произвольные действительные значения. Для линейной оболочки, очевидно, выполняются условия теоремы 8.1.1 (проверьте!), поэтому линейная оболочка подмножества $M \subset L$ является подпространством линейного пространства L. Будем обозначать линейную оболочку векторов символом $L(M)$. В частности, $L(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k)$ — линейная оболочка конечного множества векторов, которую иногда называют линейным подпространством, натянутым на векторы $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, …, $\mathbf{x}_k$.

Упражнение 8.1.4. *Показать, что подпространствами любого линейного пространства* L *являются: само пространство* L*, а также подпространство* $\mathrm{L}_0 = \{\mathbf{0}\}$*, состоящее из единственного нулевого элемента. Эти подпространства называются* несобственными.

Упражнение 8.1.5. *Показать, что множество решений однородной системы линейных алгебраических уравнений*

$$A\overline{x} = \overline{0}$$

с n *неизвестными является подпространством линейного пространства* n*-мерных столбцов или координатного пространства* $\mathbb{R}^n$.

Другими примерами подпространств являются пересечения и суммы подпространств, которые вводятся следующим определением.

Определение 8.1.4. *Пусть* L', L'' *— подпространства линейного пространства* L. Пересечением *этих подпространств называется множество* $L' \cap L''$*, снабженное линейными операциями, действующими в пространстве* L. Суммой подпространств L' *и* L'' *называется множество*

$$L' + L'' = \{\mathbf{x}' + \mathbf{x}'' : \mathbf{x}' \in L', \mathbf{x}'' \in L''\},$$

образованное всевозможными суммами векторов, принадлежащих подпространствам L' *и* L''*, и снабженное линейными операциями из* L.

Теорема 8.1.2. *Пересечение и сумма подпространств линейного пространства* L *являются подпространствами* L.

Доказательство. Докажем, что сумма подпространств также является подпространством. В силу теоремы 8.1.1 достаточно показать, что сумма элементов из $L' + L''$ снова принадлежит $L' + L''$ и произведение элемента из $L' + L''$ на число также принадлежит $L' + L''$. Пусть, например, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L' + L''$ — два вектора, принадлежащих сумме. Каждый из них можно представить в виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{x}'', \quad \mathbf{y} = \mathbf{y}' + \mathbf{y}'', \quad \mathbf{x}, \mathbf{y}' \in \mathbf{L}', \quad \mathbf{x}'', \mathbf{y}'' \in \mathbf{L}''.$$

Тогда их сумма имеет вид

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (\mathbf{x}' + \mathbf{x}'') + (\mathbf{y}' + \mathbf{y}'') = (\mathbf{x}' + \mathbf{y}') + (\mathbf{x}'' + \mathbf{y}''),$$

где первое слагаемое в правой части принадлежит L', а второе — L'', т. е. вся сумма есть элемент $L' + L''$. Аналогично доказывается, что произведение вектора из $L' + L''$ на число также принадлежит $L' + L''$. Таким образом, доказано, что сумма подпространств является подпространством. Читателю предлагается доказать в качестве упражнения аналогичное утверждение, касающееся пересечения подпространств.

В качестве примера рассмотрим следующие подпространства линейного пространства $L = V_3$ геометрических векторов: $L' = L(\mathbf{i})$ — множество векторов, параллельных оси Ox (линейная оболочка, натянутая на вектор $\mathbf{i}$), $L'' = L(\mathbf{j})$ — множество векторов, параллельных оси Oy. Нетрудно понять, что суммой этих подпространств является $L' + L'' = L(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ — множество векторов, параллельных (лежащих в) плоскости xOy — линейная оболочка, натянутая на векторы $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$. При этом пересечением этих подпространств является, очевидно, нулевое подпространство $L_0 = \{\mathbf{0}\}$, состоящее из единственного нулевого вектора.

Определение 8.1.5. *Пусть L', L'' — подпространства линейного пространства L. Сумма $L' + L''$ называется* прямой суммой подпространств *L', L'', если их пересечение является нулевым подпространством, т. е. $L' \cap L'' = \{\mathbf{0}\}$. Для прямой суммы используется обозначение $L' \oplus L''$.*

Теорема 8.1.3. *Если сумма подпространств прямая, т. е. $L' + L'' = L' \oplus L''$, то каждый вектор из $L' \oplus L''$ допускает единственное представление в виде*

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{x}'', \quad \mathbf{x}' \in L',\ \mathbf{x}'' \in L''. \tag{8.1.3}$$

Доказательство. Действительно, предположим, что есть еще другое представление:

$$\mathbf{x} = \mathbf{y}' + \mathbf{y}'', \quad \mathbf{y}' \in L',\ \mathbf{y}'' \in L''.$$

Тогда, вычитая это последнее равенство из (8.1.3), получим

$$\mathbf{0} = (\mathbf{x}' - \mathbf{y}') + (\mathbf{x}'' - \mathbf{y}''),$$

откуда вытекает: $(\mathbf{x}' - \mathbf{y}') = -(\mathbf{x}'' - \mathbf{y}'')$. Поскольку векторы в левой и правой частях этого равенства принадлежат соответственно L' и L'', то оба они принадлежат пересечению $L' \cap L''$ и, стало быть, оба равны нулевому вектору. Отсюда следует, что $\mathbf{x}' = \mathbf{y}'$, $\mathbf{x}'' = \mathbf{y}''$.

§ 8.2. Базис и размерность линейного пространства

8.2.1. Линейная зависимость векторов

Понятие линейной зависимости уже рассматривалось ранее на множестве столбцов или геометрических векторов. Теперь мы знаем, что эти множества с введенными в них линейными операциями являются линейными пространствами. Естественно что наиболее общее определение понятия линейной зависимости можно дать для произвольного линейного пространства.

Определение 8.2.1. *Пусть* $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, ..., $\mathbf{x}_m$ *— векторы линейного пространства* L *и* α_1, α_2, ..., α_m *— числа из поля* K. *Тогда вектор* $\mathbf{y} = \alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \alpha_m\mathbf{x}_m$ *называется линейной комбинацией векторов* $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, ..., $\mathbf{x}_m$. *Числа* α_1, α_2, ..., α_m *называются коэффициентами линейной комбинации.*

Определение 8.2.2. *Линейная комбинация* $\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \alpha_m\mathbf{x}_m$ *называется тривиальной, если все* $\alpha_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$. *В противном случае линейная комбинация называется нетривиальной.*

Определение 8.2.3. *Система векторов* $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, ..., $\mathbf{x}_m$ *называется линейно зависимой, если существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов, равная нулевому вектору, т. е. выполняется равенство*

$$\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \alpha_m\mathbf{x}_m = \mathbf{0}, \tag{8.2.1}$$

где хотя бы один из коэффициентов α_1, α_2, ..., α_m *отличен от нуля.*

Определение 8.2.4. *Система векторов* $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, ..., $\mathbf{x}_m$ *называется линейно независимой, если лишь тривиальная линейная комбинация может равняться нулевому вектору, т. е. равенство* (8.2.1) *выполняется, лишь тогда, когда все коэффициенты* α_i *равны нулю:*

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0.$$

Замечание 8.2.1. *Так как определения линейной зависимости и линейной независимости в произвольном линейном пространстве почти дословно совпадают с аналогичными определениями, введенными ранее для столбцов или геометрических векторов, то и свойства линейно зависимых и линейно независимых систем векторов остаются справедливыми в произвольном линейном пространстве. Мы ограничимся формулировками этих свойств, предоставляя читателю воспроизвести их доказательства.*

Свойство 8.2.1. *Система векторов* $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_m$ *линейного пространства* L *линейно зависима тогда и только тогда, когда один из этих векторов есть линейная комбинация остальных.*

Свойство 8.2.2. *Если система векторов* $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_m$ *линейного пространства* L *содержит нулевой вектор, то она линейно зависима.*

Свойство 8.2.3. *Если система векторов* $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_m$ *линейного пространства* L *содержит линейно зависимую подсистему, то вся система линейно зависима.*

Свойство 8.2.4. *Если система векторов* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ *линейного пространства L линейно независима, то любая ее подсистема также линейно независима.*

Упражнение 8.2.1. *Докажите,что система векторов, состоящая из единственного вектора* $\mathbf{a}_1$*, линейно зависима, если вектор* $\mathbf{a}_1 = \mathbf{0}$*, и линейно независима, если* $\mathbf{a}_1 \neq \mathbf{0}$.

Рассмотрим некоторые примеры, иллюстрирующие понятия линейной зависимости и линейной независимости систем векторов в различных линейных пространствах.

Пример 8.2.1. *Даны многочлены:* $P_1 = 3$, $P_2 = 3t - 1$, $P_3 = 2t^2 - 2t + 1$ *— векторы линейного пространства* M_2 *многочленов степени не выше 2. Проверить, что они образуют линейно независимую систему.*

Решение. Составим линейную комбинацию данных многочленов с произвольными коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и приравняем ее нулевому вектору пространства M_2, т. е. многочлену, тождественно равному нулю

$$\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 = \mathbf{0}. \tag{8.2.2}$$

Подставим в данное равенство явные выражения для P_1, P_2, P_3 и приведем подобные:

$$\alpha_1 3 + \alpha_2(3t - 1) + \alpha_3(2t^2 - 2t + 1) = \mathbf{0},$$

$$2\alpha_3 t^2 + (3\alpha_2 - 2\alpha_3)t + (3\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3) = 0t^2 + 0t + 0 \cdot 1.$$

Два многочлена равны тогда и только тогда, когда их коэффициенты при одинаковых степенях совпадают. Тогда из последнего равенства получим систему линейных уравнений для определения коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$:

$$\begin{cases} 2\alpha_3 = 0; \\ 3\alpha_2 - 2\alpha_3 = 0; \\ 3\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, найдем: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Следовательно, равенство (8.2.1) выполняется лишь тогда, когда все коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ равны нулю. Значит, согласно определению 8.2.4, многочлены P_1, P_2, P_3 линейно независимы.

Пример 8.2.2. *Проверить,будут ли линейно независимы матрицы:*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

как векторы линейного пространства $A_{2\times 2}$ *матриц размерности* 2×2.

Решение. Составим линейную комбинацию матриц A_1, A_2, A_3, A_4 с произвольными коэффициентами α_1, α_2, α_3, α_4 и приравняем ее нулевому вектору линейного пространства, т. е. нулевой матрице размерности 2×2

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 + \alpha_4 A_4 = \mathbf{0}, \tag{8.2.3}$$

или

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \\ + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Выполним над матрицами в левой части последнего равенства операции умножения на число и сложения, а затем приравняем соответствующие элементы матриц,которые окажутся слева и справа от знака равенства. Тем самым получим следующую систему уравнений для нахождения коэффициентов α_1, α_2, α_3, α_4:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0; \\ \alpha_2 + 2\alpha_3 - \alpha_4 = 0; \\ \alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_3 = 0; \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему линейных уравнений методом Гаусса, находим, что общее решение ее имеет вид

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = c \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Полагая $c = 1$, получим: $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = -1, \alpha_3 = 1, \alpha_4 = 1$, т. е. в равенстве (8.2.3) не все коэффициенты α_1, α_2, α_3, α_4 равны нулю, следовательно, матрицы A_1, A_2, A_3, A_4 линейно зависимы.

8.2.2. Базис линейного пространства

Определение 8.2.5. *Упорядоченная система векторов* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ *линейного пространства* L *называется базисом этого пространства, если выполнены два условия:*

1) векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ *линейно независимы;*

2) для любого вектора $\mathbf{x} \in L$ *найдутся числа* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *из числового поля* K *такие, что справедливо равенство*

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \ldots + x_n \mathbf{e}_n, \tag{8.2.4}$$

Равенство (8.2.4) называется *разложением* вектора $\mathbf{x}$ по базису $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$. Условимся записывать это равенство в следующей символической матричной форме:

$$\mathbf{x} = \underline{\mathbf{e}} \cdot \overline{x}, \tag{8.2.5}$$

где в правой части используется формальное правило умножения строки $\underline{\mathbf{e}} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ на столбец $\overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Замечание 8.2.2. *Используя равенство* (8.2.4) *и аксиомы линейного пространства, можно доказать, что если*

$$\mathbf{x} = \underline{\mathbf{e}} \cdot \overline{x}, \quad \mathbf{y} = \underline{\mathbf{e}} \cdot \overline{y}, \tag{8.2.6}$$

то

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \underline{\mathbf{e}} \cdot \overline{x} + \underline{\mathbf{e}} \cdot \overline{y} = \underline{\mathbf{e}} \cdot (\overline{x} + \overline{y}), \quad \lambda\mathbf{x} = \underline{\mathbf{e}} \cdot (\lambda\overline{x}),$$

т. е. при сложении векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ *и умножении вектора на число в правых частях* (8.2.6) *можно пользоваться обычными свойствами умножения строки на столбец.*

Определение 8.2.6. *Линейное пространство называется конечномерным, если в нем существует хотя бы один базис, состоящий из конечного числа векторов.*

В дальнейшем будут рассматриваться только конечномерные линейные пространства.

Пусть L — конечномерное линейное пространство и $\underline{\mathbf{e}} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ — некоторый его базис. Имеет место следующая

Теорема 8.2.1. *Для любого вектора* $\mathbf{x}$ *линейного пространства* L *его разложение по заданному базису* $\underline{\mathbf{e}}$ *единственно.*

Доказательство. Допустим, для некоторого вектора $\mathbf{x} \in L$ наряду с разложением (8.2.4) справедливо другое разложение по тому же базису $\underline{\mathbf{e}}$

$$\mathbf{x} = x_1'\mathbf{e}_1 + x_2'\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n'\mathbf{e}_n. \tag{8.2.7}$$

Вычтем почленно равенство (8.2.4) из равенства (8.2.7). Тогда, используя аксиомы линейного пространства, получим

$$(x_1' - x_1)\mathbf{e}_1 + (x_2' - x_2)\mathbf{e}_2 + \ldots + (x_n' - x_n)\mathbf{e}_n = 0. \tag{8.2.8}$$

В силу линейной независимости базисных векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$, равенство (8.2.8) может выполняться лишь в том случае, когда все коэффициенты в левой части (8.2.8) равны нулю, т. е. справедливы равенства:

$$x_1' = x_1, \quad x_2' = x_2, \quad \ldots, \quad x_n' = x_n,$$

что и доказывает единственность разложения по базису.

В силу доказанной теоремы, коэффициенты x_1, x_2, ..., x_n разложения (8.2.4) или (8.2.5) любого вектора $\mathbf{x}$ по базису $\underline{\mathbf{e}}$ определяются однозначно. Они называются *координатами* вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\underline{\mathbf{e}}$. Соответственно столбец $\overline{x}$ из (8.2.5)) называется *координатным столбцом* вектора $\mathbf{x}$ и будет обозначаться в дальнейшем $\overline{\mathbf{x}}$:

$$\overline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \iff \mathbf{x} = \underline{\mathbf{e}} \cdot \overline{\mathbf{x}} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n. \tag{8.2.9}$$

8.2.3. Линейные операции над векторами в координатной форме

Рассмотрим линейное пространство L, выберем в нем некоторый базис $\underline{\mathbf{e}} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ и разложим каждый вектор пространства по этому базису, т. е. сопоставим каждому вектору набор из n вещественных чисел — его координатный столбец:

$$\mathbf{x} = \underline{\mathbf{e}} \cdot \overline{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{y} = \underline{\mathbf{e}} \cdot \overline{\mathbf{y}}, \quad \overline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \overline{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}. \tag{8.2.10}$$

Покажем, как реализуются в координатах линейные операции над векторами конечномерного линейного пространства. Справедливы следующие утверждения:

Утверждение 8.2.1. *В одном и том же базисе равные векторы имеют равные координатные столбцы.*

Действительно, в силу единственности разложения вектора по базису, имеем:

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} \iff \underline{\mathbf{e}} \cdot \overline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{e}} \cdot \overline{\mathbf{y}} \implies \overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{y}}. \tag{8.2.11}$$

Утверждение 8.2.2. *При сложении векторов их координаты складываются, при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число.*

Доказательство. Используя (8.2.9) и замечание 8.2.2, найдем:

$$\underline{\mathbf{e}} \cdot (\overline{\mathbf{x} + \mathbf{y}}) = \mathbf{x} + \mathbf{y} = \underline{\mathbf{e}} \cdot \overline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{e}} \cdot \overline{\mathbf{y}} = \underline{\mathbf{e}} \cdot (\overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{y}}),$$

откуда в силу (8.2.11),

$$\overline{\mathbf{x}+\mathbf{y}} = \overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}. \tag{8.2.12}$$

Аналогично $\underline{\mathbf{e}} \cdot \overline{\lambda\mathbf{x}} = \lambda\mathbf{x} = \lambda(\underline{\mathbf{e}} \cdot \overline{\mathbf{x}}) = \underline{\mathbf{e}} \cdot (\lambda\overline{\mathbf{x}})$, откуда

$$\overline{\lambda\mathbf{x}} = \lambda\overline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}. \tag{8.2.13}$$

Следствие 8.2.1. *Из равенств* (8.2.12)–(8.2.13) *следует, что если вектор* $\mathbf{y}$ *есть линейная комбинация векторов* $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, …, $\mathbf{x}_m$, *то координатный столбец* $\overline{\mathbf{y}}$ *есть та же самая линейная комбинация координатных столбцов* $\overline{\mathbf{x}}_1$, $\overline{\mathbf{x}}_2$, …, $\overline{\mathbf{x}}_m$, *и обратно:*

$$\mathbf{y} = \alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \alpha_m\mathbf{x}_m \iff$$
$$\iff \overline{\mathbf{y}} = \alpha_1\overline{\mathbf{x}}_1 + \alpha_2\overline{\mathbf{x}}_2 + \ldots + \alpha_m\overline{\mathbf{x}}_m. \tag{8.2.14}$$

Следствие 8.2.2. *Векторы* $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, …, $\mathbf{x}_m$ *линейно зависимы тогда и только тогда, когда их координатные столбцы* $\overline{\mathbf{x}}_1$, $\overline{\mathbf{x}}_2$, …, $\overline{\mathbf{x}}_m$ *линейно зависимы.*

УПРАЖНЕНИЕ 8.2.2. *Докажите последнее следствие, используя соотношение* (8.2.14).

8.2.4. Размерность линейного пространства

Введем одну из важнейших характеристик линейного пространства — его размерность, которая тесно связана с понятием базиса. Предварительно докажем следующую теорему.

Теорема 8.2.2. *В конечномерном линейном пространстве все базисы состоят из одного и того же числа векторов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное: пусть в линейном пространстве L нашлись два базиса $\underline{\mathbf{e}} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ и $\underline{\mathbf{f}} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_m)$, состоящие из разного числа векторов, и пусть, например, $m > n$. Разложим векторы $\mathbf{f}_j$ второго базиса по первому: $\mathbf{f}_j = \underline{\mathbf{e}} \cdot \overline{\mathbf{f}}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ и составим матрицу A размерности $(n \times m)$ из координатных столбцов $\overline{\mathbf{f}}_1$, $\overline{\mathbf{f}}_2$, …, $\overline{\mathbf{f}}_m$.

Ранг этой матрицы равен максимальному числу ее линейно независимых столбцов и не превышает наименьшего из чисел m, n (см. п 2.4.2), т. е. $\text{Rang}A \leqslant n$. Следовательно, столбцы $\bar{\mathbf{f}}_1$, $\bar{\mathbf{f}}_2$, $\ldots$, $\bar{\mathbf{f}}_m$ (число которых больше n) линейно зависимы, а значит, линейно зависимы векторы $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\ldots$, $\mathbf{f}_m$, что противоречит определению базиса. Значит, наше предположение о том, что $m > n$ неверно, а стало быть $m \leqslant n$. Меняя в этих рассуждениях местами базисы $\underline{\mathbf{e}}$ и $\underline{\mathbf{f}}$, получим противоположное неравенство: $n \leqslant m$, откуда $m = n$. То есть все базисы конечномерного линейного пространства состоят из одного и того же числа векторов.

Определение 8.2.7. *Число векторов в (любом) базисе конечномерного линейного пространства L называется* размерностью *этого пространства и обозначается символом* $\dim L$. *Если* $\dim L = n$, *то пространство называется n-мерным и обозначается L_n.*

Теорема 8.2.3. *В n-мерном линейном пространстве не может быть более n линейно независимых векторов.*

Доказательство. Предположим противное, что в n-мерном линейном пространстве нашлась система из m линейно независимых векторов: $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\ldots$, $\mathbf{f}_m$, причем $m > n$. Разложим эти векторы по базису $\underline{\mathbf{e}}$ и, повторяя дословно рассуждения, проведенные в доказательстве предыдущей теоремы, придем к заключению, что векторы $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\ldots$, $\mathbf{f}_m$ линейно зависимы. Полученное противоречие доказывает теорему.

Замечание 8.2.3. *Доказанная теорема позволяет определить* размерность *линейного пространства как* максимальное число линейно независимых векторов *этого пространства.*

Действительно, если $\dim L = n$, то в L найдутся n линейно независимых векторов (базис L), а любая система из большего числа векторов по теореме 8.2.3 — линейно зависима. В частности, если $\dim L = n$,то любая система из $(n+1)$ вектора линейно зависима.

Следствие 8.2.3. *Любые n линейно независимых векторов n-мерного линейного пространства образуют базис.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\ldots$, $\mathbf{e}_n$ — произвольная система из n линейно независимых векторов пространства L_n. Чтобы доказать, что это — базис, нужно показать, что любой вектор $\mathbf{x} \in L_n$ может быть разложен по векторам $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\ldots$, $\mathbf{e}_n$ (см. определение 8.2.5). Возьмем произвольный вектор $\mathbf{x} \in L_n$ и рассмотрим систему векторов: $\mathbf{x}$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\ldots$, $\mathbf{e}_n$. Она линейно зависима, так как содержит $n+1$ вектор. Следовательно, имеет место равенство

$$\alpha_0\mathbf{x} + \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_n\mathbf{e}_n = \mathbf{0}, \tag{8.2.15}$$

в котором не все коэффициенты α_i равны нулю. Заметим при этом, что коэффициент α_0 в (8.2.15) непременно отличен от нуля, так как в противном случае из (8.2.15) вытекала бы линейная зависимость векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\ldots$, $\mathbf{e}_n$. Но тогда, поделив равенство (8.2.15) на $\alpha_0 \neq 0$ и перенеся все члены, кроме первого, в правую часть, найдем:

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n,$$

где

$$x_1 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_0}, \quad x_2 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_0}, \quad \ldots, \quad x_n = -\frac{\alpha_n}{\alpha_0}.$$

Полученное разложение доказывает, что векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\ldots$, $\mathbf{e}_n$ образуют базис пространства L_n.

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 8.2.3. *Пространство V_2 всех геометрических векторов на плоскости имеет размерность* 2, *так как в нем существует базис из двух векторов: любые два неколлинеарных вектора образуют базис этого пространства (см. п 3.2.3).*

Пространство V_3 всех геометрических векторов в пространстве является трехмерным: базис этого пространства образуют любые три некомпланарных вектора (см. п 3.2.3).

Пример 8.2.4. *Определить размерность линейного пространства* $L = A_{2\times 2}$ *всех матриц размерности* (2×2).

Решение. Рассмотрим матрицы:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко показать (см. пример 8.2.2), что эти матрицы линейно независимы. Используя правила линейных операций над матрицами, покажем, что любую матрицу $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix}$ можно представить в виде линейной комбинации матриц A_1, A_2, A_3, A_4.

Действительно,

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \\ + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Согласно определению 8.2.5, матрицы A_1, A_2, A_3, A_4 образуют базис пространства $A_{2\times 2}$, следовательно, размерность этого пространства равна четырем.

УПРАЖНЕНИЕ 8.2.3. *Докажите, что размерность пространства* M_3 *многочленов, степень которых не превосходит* 3, *равна четырем.*

Указание. Рассмотрите многочлены $1, t, t^2, t^3$ и докажите, что они образуют базис пространства M_3.

8.2.5. Изоморфизм линейных пространств

В курсе математического анализа изучается понятие функции. Под функцией понимается закон, согласно которому каждому значению одной переменной величины x из некоторого числового множества X ставится в соответствие единственное значение другой переменной величины y из числового множества Y. Для обозначения функции употребляют обозначение: $y = f(x)$. Понятие функции является частным случаем более общего понятия — отображения. Напомним некоторые определения, связанные с этим понятием.

Определение 8.2.8. *Пусть X, Y — произвольные множества. Говорят, что задано* отображение f множества X в множество Y, *если каждому элементу $x \in X$ по некоторому закону сопоставляется единственный элемент $y \in Y$.*

Обозначается отображение следующим образом:

$$f : X \longrightarrow Y. \tag{8.2.16}$$

Элемент $y \in Y$, сопоставляемый элементу $x \in X$, называется *образом* x и обозначается, как обычно, $y = f(x)$ или символически: $x \mapsto y$. Соответственно, элемент $x \in X$ называется *прообразом* элемента $y = f(x) \in Y$. При этом множество X называется *областью определения* отображения f, а множество образов

$$f(X) = \{y \in Y : y = f(x), x \in X\} \text{ —}$$

множеством значений f или *образом множества* X при отображении f.

Определение 8.2.9. *Отображение* $f : X \longrightarrow Y$ *называется* взаимно однозначным*, если каждый элемент* $y \in f(X)$ *является образом* только одного элемента $x \in X$. *Отображение* $f : X \longrightarrow Y$ *называется* взаимно однозначным, или биективным, отображением X на Y*, если оно взаимно однозначно и его множество значений совпадает с* Y*:* $f(X) = Y$.

Заметим, что если существует взаимно однозначное отображением X на Y, то эти множества в некотором смысле можно отождествить, сопоставив каждому элементу $x \in X$ единственный элемент $y \in Y$, и обратно. В этом случае говорят, что между множествами X и Y существует *взаимно однозначное соответствие.*

Определение 8.2.10. *Пусть* L *и* L' *— линейные пространства над одним и тем же полем чисел* K. L *и* L' *называются* изоморфными*, если существует биективное отображение* $f : L \longrightarrow L'$*, удовлетворяющее условию:* $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X\ \forall \lambda \in K$

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}',\ \mathbf{y} \mapsto \mathbf{y}' \implies \mathbf{x} + \mathbf{y} \mapsto \mathbf{x}' + \mathbf{y}',\ \lambda\mathbf{x} \mapsto \lambda\mathbf{x}',$$

т. е. при сложении векторов из L *их сумме сопоставляется сумма образов этих векторов в пространстве* L'*, и при умножении числа* $\lambda \in K$ *на вектор из* L *этому произведению сопоставляется произведение числа* λ *на соответствующий образ вектора в пространстве* L'. *При этом само отображение* $f : L \longrightarrow L'$ *называется* изоморфизмом *линейных пространств* L *и* L'.

Понятно, что изоморфные линейные пространства можно считать тождественными друг другу. С этой точки зрения, следующая теорема имеет принципиальное значение.

Теорема 8.2.4. *Все линейные пространства над полем* K*, имеющие одинаковые размерности, изоморфны.*

Доказательство. Все линейные пространства размерности n изоморфны, так как они изоморфны одному и тому же пространству $L' = K^n$ над полем K, где K^n обозначает множество всех n-мерных столбцов, элементы которых — числа из K, а изоморфизм задается отображением $\mathbf{x} \mapsto \overline{\mathbf{x}}$, сопоставляющим каждому вектору $\mathbf{x} \in L$ его координатный столбец.

Доказанная теорема позволяет отождествлять все действительные n-мерные линейные пространства. В частности, можно не различать координатные пространства $\mathbb{R}_n$ и $\mathbb{R}^n$ строк и столбцов, пространство геометрических векторов V_3 отождествлять с $\mathbb{R}^3$ и т. д.

8.2.6. Ранг системы векторов и размерность линейной оболочки

Рассмотрим линейное пространство L_n и систему векторов $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, …, $\mathbf{x}_m$, принадлежащих L_n.

Определение 8.2.11. *Рангом системы векторов* $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, …, $\mathbf{x}_m$ *называется максимальное число линейно независимых векторов этой системы.*

Теорема 8.2.5. *Ранг системы векторов* $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, …, $\mathbf{x}_m$ *равен рангу матрицы, составленной из координатных столбцов этих векторов в некотором базисе пространства* L_n.

Доказательство. Выберем в пространстве L_n некоторый базис, разложим векторы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$ по этому базису и составим матрицу из координатных столбцов векторов. Тогда максимальное число линейно независимых векторов системы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$ равно максимальному числу линейно независимых столбцов матрицы (см. следствие 8.2.2), т. е. ее рангу.

Пример 8.2.5. *Найти ранг системы векторов, заданных своими координатами в некотором базисе, проверить линейную зависимость системы*

$$\overline{\mathbf{a}}^T = (1,2,3,-1), \quad \overline{\mathbf{b}}^T = (1,-1,2,1), \quad \overline{\mathbf{c}}^T = (1,1,0,3).$$

Решение. Составим матрицу, в столбцах которой запишем координаты векторов, и найдем ее ранг, осуществляя элементарные преобразования только со строками матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Видим, что $\mathrm{Rang} A = 3$ и, стало быть, ранг системы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ равен числу векторов. Следовательно, векторы системы линейно независимы.

Рассмотрим линейную оболочку системы векторов $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, …, $\mathbf{x}_m$ некоторого линейного пространства L_n, т. е. множество всевозможных линейных комбинаций этих векторов $\{\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \alpha_m\mathbf{x}_m\}$. Линейная оболочка есть линейное подпространство пространства L_n. Определим размерность этого подпространства. Имеет место следующая

Теорема 8.2.6. *Размерность линейной оболочки системы векторов* $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, *…,* $\mathbf{x}_m$ *равна рангу данной системы векторов.*

Доказательство. Пусть ранг рассматриваемой системы векторов равен r. Это значит, что в системе имеются r линейно независимых векторов (например, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_r$), а любые $(r+1)$ векторов линейно зависимы. Добавляя к системе $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_r)$ поочередно один из векторов $\mathbf{x}_{r+1}, \ldots, \mathbf{x}_m$ и применяя те же рассуждения, что использовались при доказательстве следствия 8.2.3, установим, что каждый из векторов $\mathbf{x}_{r+1}, \ldots, \mathbf{x}_m$ может быть представлен в виде линейной комбинации векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_r$. Поэтому и каждый вектор линейной оболочки системы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$ может быть представлен в виде линейной комбинации только векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_r$. Вместе с линейной независимостью системы векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_r$ это означает, что они образуют базис линейной оболочки, следовательно, ее размерность равна r, т. е. рангу системы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$.

Замечание 8.2.4. *В качестве базиса линейной оболочки системы векторов* $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, *…,* $\mathbf{x}_m$ *могут быть выбраны любые* r *линейно независимых векторов этой системы, где* r *— ее ранг.*

Пример 8.2.6. *Найти размерность и базис линейной оболочки системы векторов, заданных своими координатами в некотором базисе:*

$$\overline{\mathbf{x}}_1^T = (1,2,-1,1), \quad \overline{\mathbf{x}}_2^T = (-1,0,2,1),$$
$$\overline{\mathbf{x}}_3^T = (0,2,1,2), \quad \overline{\mathbf{x}}_4^T = (2,-1,3,1).$$

Решение. Найдем ранг системы векторов $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$, $\mathbf{x}_4$, записав их координаты в столбцы матрицы. Ранг этой матрицы совпадает с искомым рангом системы векторов. При этом для нахождения ранга будем осуществлять элементарные преобразования только со строками матриц, тогда линейно независимыми столбцами исходной матрицы будут столбцы с номерами, соответствующими базисным столбцам финальной ступенчатой матрицы.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Видим, что $\operatorname{Rang} A = 3$. Следовательно, размерность линейной оболочки заданной системы векторов равна 3. В качестве базиса могут быть взяты векторы $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_4$, так как в качестве базисного минора финальной матрицы можно взять минор, расположенный в ненулевых строках и столбцах: первом, втором и четвертом.

УПРАЖНЕНИЕ 8.2.4. *Докажите, что размерность подпространства решений однородной системы линейных уравнений $A\overline{x} = \overline{0}$ равна $n - r$, где n — число неизвестных, r — ранг матрицы A системы.*

8.2.7. Замена базиса

Ранее уже отмечалось, что координаты вектора зависят от выбранного базиса. Выясним, как связаны координаты одного и того же вектора в разных базисах. Пусть в n-мерном линейном пространстве L_n выбраны два базиса

$$\underline{\mathbf{e}} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n) \quad \text{и} \quad \underline{\mathbf{e}}' = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n).$$

Назовем первый базис «старым», а второй — «новым». Возьмем произвольный вектор $\mathbf{x} \in L$ и разложим его по старому и новому базисам:

$$\mathbf{x} = \underline{\mathbf{e}} \cdot \overline{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{x} = \underline{\mathbf{e}}' \cdot \overline{\mathbf{x}}', \quad \overline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \overline{\mathbf{x}}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}. \tag{8.2.17}$$

Чтобы найти связь между координатными столбцами $\overline{\mathbf{x}}$ и $\overline{\mathbf{x}}'$, разложим каждый вектор нового базиса по старому. Получим

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= s_{11}\mathbf{e}_1 + s_{21}\mathbf{e}_2 + \ldots + s_{n1}\mathbf{e}_n, \\ \mathbf{e}'_2 &= s_{12}\mathbf{e}_1 + s_{22}\mathbf{e}_2 + \ldots + s_{n2}\mathbf{e}_n, \\ \ldots \\ \mathbf{e}'_n &= s_{1n}\mathbf{e}_1 + s_{2n}\mathbf{e}_2 + \ldots + s_{nn}\mathbf{e}_n. \end{aligned} \tag{8.2.18}$$

Или в матричной форме

$$\underline{\mathbf{e}}' = \underline{\mathbf{e}} \cdot S, \quad \text{где} \quad S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{n1} & s_{n2} & \cdots & s_{nn} \end{pmatrix}. \tag{8.2.19}$$

Определение 8.2.12. *Матрицей перехода от базиса $\underline{\mathbf{e}}$ к базису $\underline{\mathbf{e}}'$ называется матрица S, столбцами которой являются координатные столбцы векторов нового базиса, разложенных по старому.*

Отметим, что матрица S невырожденная, так как базисные векторы $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n$ линейно независимы. Следовательно, матрица S имеет обратную S^{-1}, которая является матрицей перехода от базиса $\underline{\mathbf{e}}'$ к базису $\underline{\mathbf{e}}$,

$$\underline{\mathbf{e}} = \underline{\mathbf{e}}' S^{-1}. \tag{8.2.20}$$

Чтобы особо подчеркнуть, что S есть матрица перехода от базиса $\underline{\mathbf{e}}$ к базису $\underline{\mathbf{e}}'$, удобно использовать обозначение: $S = S_{\underline{\mathbf{e}} \to \underline{\mathbf{e}}'}$. Таким образом, для матрицы S из (8.2.18)–(8.2.20) справедливы соотношения:

$$S = S_{\underline{\mathbf{e}} \to \underline{\mathbf{e}}'}, \quad S^{-1} = S_{\underline{\mathbf{e}}' \to \underline{\mathbf{e}}}. \tag{8.2.21}$$

Рассмотрим разложения (8.2.17) произвольного вектора $\mathbf{x} \in L$ по старому и новому базисам. Запишем цепочку равенств

$$\mathbf{x} = \underline{\mathbf{e}}' \cdot \overline{\mathbf{x}}' = (\underline{\mathbf{e}} \cdot S) \cdot \overline{\mathbf{x}}' = \underline{\mathbf{e}} \cdot (S \cdot \overline{\mathbf{x}}').$$

С другой стороны, $\mathbf{x} = \underline{\mathbf{e}} \cdot \overline{\mathbf{x}}$. В силу единственности разложения вектора по базису имеем

$$\underline{\mathbf{e}}(S\overline{\mathbf{x}}') = \underline{\mathbf{e}} \cdot \overline{\mathbf{x}} \implies \overline{\mathbf{x}} = S\overline{\mathbf{x}}'.$$

Или более подробно:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{n1} & s_{n2} & \cdots & s_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}. \tag{8.2.22}$$

Так как матрица S имеет обратную, то

$$\overline{\mathbf{x}}' = S^{-1}\overline{\mathbf{x}}.$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема 8.2.7. *Если $\overline{\mathbf{x}}$ и $\overline{\mathbf{x}}'$ — координатные столбцы вектора $\mathbf{x}$ в старом и новом базисах $\underline{\mathbf{e}}$ и $\underline{\mathbf{e}}'$ соответственно, то они связаны соотношениями:*

$$\overline{\mathbf{x}} = S\overline{\mathbf{x}}', \quad \overline{\mathbf{x}}' = S^{-1}\overline{\mathbf{x}}, \tag{8.2.23}$$

где S — матрица перехода от базиса $\underline{\mathbf{e}}$ к базису $\underline{\mathbf{e}}'$.

Формулы (8.2.22)–(8.2.23) устанавливают связь между координатами произвольного вектора $\mathbf{x}$ в старом и новом базисах.

Пример 8.2.7. *Две системы векторов: $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$ некоторого линейного пространства L заданы своими координатами в некотором базисе пространства L:*

$$\overline{\mathbf{e}}_1 = (1,1,1)^T, \quad \overline{\mathbf{e}}_2 = (0,1,-1)^T, \quad \overline{\mathbf{e}}_3 = (-1,2,2)^T,$$

$$\overline{\mathbf{e}}'_1 = (1,9,5)^T, \quad \overline{\mathbf{e}}'_2 = (3,1,-1)^T, \quad \overline{\mathbf{e}}'_3 = (-4,1,3)^T.$$

1) Показать, что каждая из систем векторов образует базис линейного пространства L_3.

2) Найти матрицу перехода от базиса $\underline{\mathbf{e}}$ к базису $\underline{\mathbf{e}}'$.

3) Найти координаты вектора $\mathbf{x} = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$ в базисе $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$.

Решение. 1) Покажем сначала, что каждая из заданных систем векторов образует базис. Векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$ принадлежат трехмерному пространству L_3, и число векторов каждой системы равно размерности этого пространства. Следовательно, каждая из систем образует базис, если векторы системы линейно независимы. Запишем матрицы A и A' из координатных столбцов векторов первой и второй систем соответственно и вычислим их ранги. Имеем

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 9 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & -26 & 37 \\ 0 & -16 & 23 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 6 & -9 \\ 0 & -16 & 23 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & -16 & 23 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда видно, что $\operatorname{Rang} A = \operatorname{Rang} A' = 3$, т. е. обе системы линейно независимы и образуют базисы пространства L_3.

2) Найдем матрицу перехода от базиса $\underline{\mathbf{e}} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ к базису $\underline{\mathbf{e}}' = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$. Для этого разложим векторы нового базиса $\underline{\mathbf{e}}'$ по старому базису $\underline{\mathbf{e}}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 &= \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_3 &= \gamma_1\mathbf{e}_1 + \gamma_2\mathbf{e}_2 + \gamma_3\mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Чтобы вычислить коэффициенты $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, запишем полученные разложения в координатной форме

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} &= \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} &= \beta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} &= \gamma_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Выполнив теперь действия над столбцами в правых частях этих равенств и приравнивая соответственные элементы равных столбцов, получим три системы линейных уравнений:

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3=1;\\ \beta_1+\beta_2-\beta_3=3;\\ \gamma_1+\gamma_2-\gamma_3=-4,\end{cases}\qquad \begin{cases}\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3=9;\\ \beta_1+\beta_2+2\beta_3=1;\\ \gamma_1+\gamma_2+2\gamma_3=1,\end{cases}$$

$$\begin{cases}\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3=5;\\ \beta_1-\beta_2+2\beta_3=-1;\\ \gamma_1-\gamma_2+2\gamma_3=3.\end{cases}$$

Решая каждую из систем (например, методом Гаусса), найдем

$$\alpha_1=3,\ \alpha_2=2,\ \alpha_3=2 \implies \mathbf{e}'_1=3\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2+2\mathbf{e}_3,$$
$$\beta_1=2,\ \beta_2=1,\ \beta_3=-1 \implies \mathbf{e}'_2=2\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3,$$
$$\gamma_1=-2,\ \gamma_2=-1,\ \gamma_3=2 \implies \mathbf{e}'_3=-2\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2+2\mathbf{e}_3.$$

Последние равенства означают, что координатные столбцы векторов $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$ в базисе $\underline{\mathbf{e}}=(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)$ имеют следующий вид:

$$\overline{\mathbf{e}}'_1=\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix},\quad \overline{\mathbf{e}}'_2=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix},\quad \overline{\mathbf{e}}'_3=\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}.$$

Матрицу $S=S_{\underline{\mathbf{e}}\to\underline{\mathbf{e}}'}$ получим, записав эти столбцы в матрицу (см. определение 8.2.12):

$$S=\begin{pmatrix}3&2&-2\\2&1&-1\\2&-1&2\end{pmatrix}.$$

3) Вычислим с помощью матрицы перехода S координаты вектора $\mathbf{x}=2\mathbf{e}_1+3\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3$ в базисе $\underline{\mathbf{e}}'$.

Для этого сначала найдем матрицу S^{-1} — обратную для S, используя формулу (2.3.6) обращения матриц,

$$S^{-1}=\begin{pmatrix}-1&2&0\\6&-10&1\\4&-7&1\end{pmatrix}.$$

Затем, выписывая координатный столбец $\overline{\mathbf{x}}$ вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\underline{\mathbf{e}}$ (старом) и используя формулы (8.2.23) перехода к новому базису, найдем координатный столбец вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\underline{\mathbf{e}}'$:

$$\overline{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix},\quad \overline{\mathbf{x}}'=S^{-1}\overline{\mathbf{x}}=$$

$$=\begin{pmatrix}-1&2&0\\6&-10&1\\4&-7&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-19\\-14\end{pmatrix}.$$

Таким образом, разложение вектора $\mathbf{x}$ по базису $\underline{\mathbf{e}}'$ имеет вид

$$\mathbf{x} = 4\mathbf{e}'_1 - 19\mathbf{e}'_2 - 14\mathbf{e}'_3.$$

§ 8.3. Линейные многообразия

8.3.1. Понятие линейного многообразия

Как мы знаем, множество точек пространства можно отождествить с множеством $\mathbb{R}^3$ всех упорядоченных троек чисел (x,y,z) — координат точек в некоторой, например декартовой, системе координат. С другой стороны, в пространстве было введено линейное пространство $L = V_3$ всех геометрических векторов над полем действительных чисел $K = \mathbb{R}$, которое тоже можно было отождествить с линейным пространством $\mathbb{R}^3$ — координатных столбцов (строк) векторов в некотором базисе. Таким образом, в некотором смысле векторы линейного пространства V_3 можно отождествить с точками трехмерного пространства. Можно, однако, и непосредственно установить соответствие между точками и векторами на плоскости или в пространстве. Если все векторы привести к общему началу — началу координат, т. е. считать векторы из V_3 радиус-векторами, то каждому вектору $\overrightarrow{\mathbf{r}} = \overrightarrow{OM} \in V_3$ соответствует точка пространства M — конец радиус-вектора, и обратно: каждой точке M соответствует единственный вектор $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM} \in V_3$. Таким образом, как говорят в математике, установлено взаимно однозначное соответствие между точками пространства и векторами линейного пространства V_3.

Интересно проследить, каким множествам точек соответствуют подпространства линейного пространства V_3. Как мы знаем, линейное пространство V_3 трехмерно (базисом в нем является любая тройка некомпланарных векторов). Тогда собственными его подпространствами являются подпространства размерности один или два. Пусть, например, V_1 — одномерное подпространство пространства V_3, и пусть его базис образован вектором $\overrightarrow{\mathbf{a}} \in V_3$. Тогда подпространство V_1 есть множество всех линейных комбинаций базисного вектора $\overrightarrow{\mathbf{a}} \in V_3$, т. е. — его линейная оболочка:

$$V_1 = L(\overrightarrow{\mathbf{a}}) = \{\overrightarrow{\mathbf{r}} \in V_3 : \overrightarrow{\mathbf{r}} = t\,\overrightarrow{\mathbf{a}},\, t \in \mathbb{R}\} =$$
$$= \{\overrightarrow{OM} \in V_3 : \overrightarrow{OM} = t\,\overrightarrow{\mathbf{a}},\, t \in \mathbb{R}\}.$$

Последние равенства показывают, что подпространство V_1 образовано радиус-векторами $\overrightarrow{\mathbf{r}} = \overrightarrow{OM}$, полученными всевозможными растяжениями вектора (радиус-вектора) $\overrightarrow{\mathbf{a}}$. Ясно, что соответствующее множество точек — концов радиус-векторов из V_1 совпадает с прямой, проходящей через начало координат и имеющей $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ своим направляющим вектором.

Таким образом, *если отождествить линейное пространство V_3 с множеством всех точек трехмерного пространства, то всевозможные одномерные подпространства $V_1 \subset V_3$ отождествляются с прямыми, проходящими через начало координат.*

Аналогичными рассуждениями можно показать (предлагаем это читателю), что *всевозможные двумерные подпространства $V_2 \subset V_3$ можно отождествить с плоскостями, проходящими через начало координат.*

Возникает вопрос: а каким подмножествам линейного пространства V_3 соответствуют прямые и плоскости, не проходящие через начало координат? Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим некоторую прямую $\mathcal{L}_1$ в пространстве, проходящую через точку M_0 и имеющую направляющий вектор $\overrightarrow{\mathbf{a}}$. Если обозначить $\overrightarrow{\mathbf{r}_0} = \overrightarrow{OM_0}$ радиус-вектор точки M_0, а $\overrightarrow{\mathbf{r}} = \overrightarrow{OM}$ — радиус-вектор текущей точки прямой $\mathcal{L}_1$, то векторное уравнение прямой $\mathcal{L}_1$ имеет вид

$$\overrightarrow{\mathbf{r}} - \overrightarrow{\mathbf{r}_0} = t\,\overrightarrow{\mathbf{a}}, \quad t \in \mathbb{R},$$

а значит, множество радиус-векторов $\overrightarrow{\mathbf{r}} = \overrightarrow{OM}$, концы которых пробегают прямую $\mathcal{L}_1$, есть подмножество M_1 пространства V_3, образованное векторами следующего вида:

$$M_1 = \{\overrightarrow{\mathbf{r}} \in V_3 : \ \overrightarrow{\mathbf{r}} = \overrightarrow{\mathbf{r}_0} + t\,\overrightarrow{\mathbf{a}},\ t \in \mathbb{R}\}.$$

Множества такого вида (подмножества V_3) называют одномерными *линейными многообразиями* пространства V_3 и обозначают следующим образом:

$$M_1 = \overrightarrow{\mathbf{r}_0} + L(\overrightarrow{\mathbf{a}}) = \overrightarrow{\mathbf{r}_0} + V_1,$$

где $\overrightarrow{\mathbf{r}_0}$ — некоторый вектор пространства V_3, $V_1 = L(\overrightarrow{\mathbf{a}})$ — одномерное подпространство пространства V_3.

Таким образом, *любая прямая в пространстве, не проходящая через начало координат, соответствует одномерному линейному многообразию векторного пространства V_3.*

Аналогичными рассуждениями можно показать, что *любая плоскость $\mathcal{P}_2$ пространства, не проходящая через начало координат, соответствует двумерному линейному многообразию векторного пространства V_3,* т. е. множеству векторов вида:

$$M_2 = \{\overrightarrow{\mathbf{r}} \in V_3 : \ \overrightarrow{\mathbf{r}} = \overrightarrow{\mathbf{r}_0} + t_1\overrightarrow{\mathbf{a}_1} + t_2\overrightarrow{\mathbf{a}_2},\ t_1, t_2 \in \mathbb{R}\} = \overrightarrow{\mathbf{r}_0} + V_2,$$

где $V_2 = L(\overrightarrow{\mathbf{a}_1}, \overrightarrow{\mathbf{a}_2})$ — линейное подпространство пространства V_3, базис которого образуют векторы $\overrightarrow{\mathbf{a}_1}$, $\overrightarrow{\mathbf{a}_2}$) и которое соответствует плоскости, проходящей через начало координат параллельно плоскости $\mathcal{P}_2$. В этом смысле можно считать, что *линейное многообразие $M_2 = \overrightarrow{\mathbf{r}_0} + V_2$ получено параллельным сдвигом линейного подпространства V_2 на вектор $\overrightarrow{\mathbf{r_0}}$.*

Определим теперь понятие линейного многообразия в произвольном линейном пространстве. Пусть L — линейное пространство, $\mathbf{x}_0 \in L$ — некоторый его вектор, а $V \subset L$ — некоторое подпространство.

Определение 8.3.1. Линейным многообразием *пространства L, полученным сдвигом подпространства V на вектор* $\mathbf{x}_0$, *называется подмножество* $M \subset L$ *следующего вида:*

$$M = \mathbf{x}_0 + V = \{\mathbf{x}_0 + \mathbf{v} : \ \mathbf{v} \in V\}.$$

Иначе говоря, линейное многообразие $\mathbf{x}_0 + V$ есть множество всевозможных сумм $\mathbf{x}_0 + \mathbf{v}$, где вектор $\mathbf{v}$ пробегает линейное подпространство V. *Размерностью* линейного многообразия $M = \mathbf{x}_0 + V$ называется размерность подпространства V. Например, $\mathbf{x}_0 + L_k$ обозначает линейное многообразие размерности k линейного пространства L; одномерные и двумерные многообразия линейного пространства V_3 соответственно имеют вид $M_1 = \overrightarrow{\mathbf{r}_0} + V_1$ и $M_2 = \overrightarrow{\mathbf{r}_0} + V_2$.

8.3.2. Линейные многообразия в $\mathbb{R}^n$

По аналогии с обычным трехмерным пространством, рассмотрим множество точек пространства $\mathbb{R}^n$ как множество всех упорядоченных наборов $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из n действительных чисел. Для обозначения точек из $\mathbb{R}^n$ сохраним традиционное обозначение: $M = M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, при этом, как и прежде, числа x_1, x_2, ..., x_n будем называть *координатами точки* M. Точку $O = O(0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ будем называть *началом координат*.

С другой стороны, ранее мы рассматривали пространство $L = \mathbb{R}^n$ как линейное (векторное) пространство n-мерных столбцов из n действительных чисел. Чтобы отличать векторное пространство $\mathbb{R}^n$ от пространства точек $\mathbb{R}^n$, будем обозначать векторное пространство V_n, а его векторы называть радиус-векторами и обозначать $\overrightarrow{\mathbf{r}} = \overrightarrow{OM}$, где точка $M = M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ имеет координаты, совпадающие с координатами вектора $\overrightarrow{\mathbf{r}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Таким образом, между точками пространства $\mathbb{R}^n$ и векторами линейного пространства V_n устанавливается взаимно однозначное соответствие. Для полноты аналогии между обычным трехмерным пространством $\mathbb{R}^3$ и пространством $\mathbb{R}^n$ введем вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ с началом в точке $M_1(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ и концом — в точке $M_2(x''_1, x''_2, \ldots, x''_n)$, полагая по определению:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = (x''_1 - x'_1, x''_2 - x'_2, \ldots, x''_n - x'_n).$$

Заметим, что линейное пространство V_n является n-мерным. В самом деле, базисом в нем является, например, следующий набор из n векторов V_n:

$$\overrightarrow{\mathbf{e}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathbf{e}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \overrightarrow{\mathbf{e}}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{8.3.1}$$

поскольку эти столбцы линейно независимы, а произвольный вектор пространства V_n можно представить в виде линейной комбинации векторов (8.3.1):

$$\overrightarrow{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Базис (8.3.1) пространства V_n называется *каноническим*.

Вспомнив, что базис любого линейного пространства есть максимальная линейно независимая система векторов этого пространства, можем сделать вывод: размерность любого подпространства V_k пространства V_n есть целое число k, заключенное в пределах: $0 \leqslant k \leqslant n$. Отбросив крайние случаи («0» — размерность подпространства $V_0 = \{\mathbf{0}\}$ и «n» — размерность всего пространства V_n), можем считать, что размерность любого собственного подпространства пространства V_n есть одно из чисел $1, 2, \ldots, n-1$. Все эти подпространства описаны в следующей теореме

Теорема 8.3.1. *Множество всех решений однородной системы линейных уравнений*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \iff A\overline{x} = \overline{0} \qquad (8.3.2)$$

является k-мерным подпространством линейного пространства V_n, где $k = n - r$, $r = \operatorname{Rang} A$. Обратно: всякое подпространство линейного пространства V_n определяется (совпадает с множеством всех решений) некоторой однородной системой линейных уравнений.

Доказательство. Если рассматривать множество всех решений однородной системы (8.3.2) как подмножество пространства V_n, то оно является подпространством V_n, в силу теоремы 8.1.1 и свойств решений однородной системы. Действительно, сумма любых двух решений системы (8.3.2) есть решение этой системы, и произведение любого решения системы (8.3.2) на действительное число снова есть решение этой системы. При этом фундаментальная система решений является, очевидно, базисом этого подпространства, и размерность его, согласно теореме 2.6.2, равна $n - r$. Таким образом, прямое утверждение теоремы 8.3.1 доказано.

Для доказательства обратного утверждения рассмотрим какое-нибудь подпространство V_k размерности k, $1 \leqslant k \leqslant (n-1)$ линейного пространства

V_n. Пусть $\overrightarrow{\mathbf{e}}'_1,\ \overrightarrow{\mathbf{e}}'_2,\ \ldots,\ \overrightarrow{\mathbf{e}}'_k$ — базис V_k. Поскольку $k < n$, в пространстве V_n найдется вектор $\overrightarrow{\mathbf{e}}'_{k+1}$, который не принадлежит V_k, а следовательно, не выражается линейно через векторы $\overrightarrow{\mathbf{e}}'_1,\ \overrightarrow{\mathbf{e}}'_2,\ \ldots,\ \overrightarrow{\mathbf{e}}'_k$. Стало быть, система $\overrightarrow{\mathbf{e}}'_1$, $\overrightarrow{\mathbf{e}}'_2,\ \ldots,\ \overrightarrow{\mathbf{e}}'_k,\ \overrightarrow{\mathbf{e}}'_{k+1}$ является линейно независимой. Если $k+1=n$, то эта система образует базис во всем пространстве V_n. Если $k+1<n$, то процесс можно продолжить, дополнив в конце концов исходный базис подпространства V_k до базиса $\underline{\mathbf{e}}' = (\overrightarrow{\mathbf{e}}'_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}'_2, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{e}}'_n)$ всего пространства V_n. Обозначим $S = (s_{ij})_{n\times n}$ матрицу перехода от канонического базиса $\underline{\mathbf{e}}$ к базису $\underline{\mathbf{e}}'$. Тогда координаты векторов пространства V_n в новом базисе выражаются через координаты в старом базисе по формулам (8.2.23):

$$\overline{\mathbf{x}} = S\overline{\mathbf{x}}', \quad \overline{\mathbf{x}}' = S^{-1}\overline{\mathbf{x}}.$$

Рассмотрим любой вектор $\overrightarrow{\mathbf{r}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, принадлежащий подпространству V_k. Тогда он разлагается по базису $(\overrightarrow{\mathbf{e}}'_1,\ \overrightarrow{\mathbf{e}}'_2,\ \ldots,\ \overrightarrow{\mathbf{e}}'_k)$ этого подпространства и может быть представлен в виде:

$$\overrightarrow{\mathbf{r}} = x'_1\overrightarrow{\mathbf{e}}'_1 + x'_2\overrightarrow{\mathbf{e}}'_2 + \ldots + x'_k\overrightarrow{\mathbf{e}}'_k$$

или

$$\overrightarrow{\mathbf{r}} = x'_1\overrightarrow{\mathbf{e}}'_1 + x'_2\overrightarrow{\mathbf{e}}'_2 + \ldots + x'_k\overrightarrow{\mathbf{e}}'_k + 0\,\overrightarrow{\mathbf{e}}'_{k+1} + \ldots + 0\,\overrightarrow{\mathbf{e}}'_n.$$

В силу единственности разложения по базису $\underline{\mathbf{e}}'$, координатный столбец вектора $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ в новом базисе $\underline{\mathbf{e}}'$ имеет вид: $\overline{\mathbf{x}}' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_k, 0, \ldots, 0)^T$. Обозначим матрицу $S^{-1} = (a_{ij})_{n\times n}$. Тогда, применяя формулы (8.2.23), получаем следующее равенство для координатных столбцов:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ a_{k+1,1} & a_{k+1,2} & \cdots & a_{k+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Приравнивая элементы столбцов, стоящие на последних $n-k$ местах слева и справа в последнем равенстве, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + \ldots + a_{k+1,n}x_n = 0; \\ a_{k+2,1}x_1 + a_{k+2,2}x_2 + \ldots + a_{k+2,n}x_n = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0, \end{cases} \tag{8.3.3}$$

которой удовлетворяют координаты вектора $\overrightarrow{\mathbf{r}} \in V_k$, что и требовалось в обратном утверждении доказываемой теоремы.

Следствие 8.3.1. *Множество всех решений совместной неоднородной системы линейных уравнений*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m; \end{cases} \iff A\overline{x} = \overline{b} \qquad (8.3.4)$$

является k-мерным многообразием линейного пространства V_n, где $k = n - r$, $r = \mathrm{Rang} A$. Обратно: всякое линейное многообразие пространства V_n определяется (совпадает с множеством всех решений) некоторой неоднородной системой линейных уравнений.

Доказательство. Как мы знаем, общее решение неоднородной системы (8.3.4) может быть представлено в виде (см. (2.6.15)):

$$\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{x}}_0 + \overline{\mathbf{y}}, \qquad (8.3.5)$$

где $\overline{\mathbf{x}}_0$ — частное решение неоднородной системы (8.3.4), а $\overline{\mathbf{y}}$ — общее решение однородной системы, соответствующей (8.3.4). В силу теоремы 8.3.1, общее решение однородной системы пробегает подпространство V_k линейного пространства V_n, где $k = n - r$. Если теперь перейти к обозначениям, принятым нами в пространстве V_n:

$$\overline{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{r}}, \quad \overline{\mathbf{x}_0} = \overrightarrow{\mathbf{r}_0},$$

то равенство (8.3.5) означает, что множество всех решений неоднородной системы (8.3.4) есть множество сумм вида

$$\overrightarrow{\mathbf{r}} = \overrightarrow{\mathbf{r}_0} + \rightarrow y, \qquad (8.3.6)$$

где $\rightarrow y$ пробегает подпространство V_{n-r}. Но это множество представляет собой $(n-r)$-мерное многообразие пространства V_n, что доказывает прямое утверждение теоремы.

Обратно: всякое k-мерное многообразие $\overrightarrow{\mathbf{r}_0} + V_k$ пространства V_n представляет собой множество векторов вида (8.3.6), где $\rightarrow y$, в силу теоремы 8.3.1, пробегает линейное подпространство решений некоторой однородной системы (8.3.3). Но тогда $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ из (8.3.6) пробегает множество всех решений неоднородной системы линейных уравнений с той же матрицей коэффициентов, что и в (8.3.3), для которой столбец $\overline{\mathbf{x}_0} = \overrightarrow{\mathbf{r}_0}$ является частным решением.

Пример 8.3.1. *Найти общее решение неоднородной системы линейных уравнений*

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6; \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4; \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2, \end{cases}$$

и представить множество решений системы как линейное многообразие в пространстве $\mathbb{R}^n$ (n — число неизвестных), найти базис и размерность этого многообразия.

Решение. Общее решение этой системы, полученное в примере 2.6.2, имеет вид

$$\overline{y} = \overline{z} + x_2\overline{e}_1 + x_3\overline{e}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix},$$

где свободные неизвестные x_2, x_3 играют роль произвольных постоянных. Таким образом, все множество решений данной неоднородной системы можно представить в виде: $M = \mathbf{x}_0 + V$, где $\mathbf{x}_0 = \overline{z}$ — частное решение неоднородной системы — можно считать вектором сдвига, а $V = \{x_2\overline{e}_1 + x_3\overline{e}_2\}$ — множество всех решений соответствующей однородной системы — линейное подпространство пространства $\mathbb{R}^4$, сдвигаемое на вектор $\mathbf{x}_0 = \overline{z}$. Сказанное означает, что множество всех решений данной неоднородной системы является линейным многообразием пространства $\mathbb{R}^4$, размерность его равна $n - r = 2$ (r — ранг системы), а базис совпадает с фундаментальной системой решений $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$ однородной системы.

8.3.3. Плоскости и прямые в $\mathbb{R}^n$

Как мы видели, в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ все линейные многообразия сводятся (если не считать всего пространства и «0-мерных» многообразий — отдельных точек) к плоскостям (двумерные многообразия) и прямым (одномерные многообразия). При этом, как известно из гл. 3, плоскость или прямая задаются соответственно одним линейным уравнением или системой из двух линейных уравнений. Естественным обобщением понятий прямой и плоскости в пространстве $\mathbb{R}^n$ является следующее

Определение 8.3.2. Плоскостью размерности k *в пространстве* $\mathbb{R}^n$ *называется* всякое k-мерное линейное многообразие M_k *линейного пространства* V_n. *При этом плоскость размерности* $(n-1)$ *называется* гиперплоскостью, *а плоскость размерности* 1 *называется* прямой.

Следствие 8.3.2. *Всякая гиперплоскость в пространстве* $\mathbb{R}^n$ *задается (совпадает с множеством всех решений) линейным уравнением вида*

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = B. \tag{8.3.7}$$

Доказательство. Действительно, согласно следствию 8.3.1, $(n-1)$-мерное многообразие задается совместной системой линейных уравнений (8.3.4), ранг которой $\mathrm{Rang} A = 1$, но такая система равносильна одному уравнению типа (8.3.7).

Следствие 8.3.3. *Всякая прямая в пространстве $\mathbb{R}^n$ задается уравнением в векторной форме:*

$$\overrightarrow{\mathbf{r}} = \overrightarrow{\mathbf{r}_0} + t\,\overrightarrow{\mathbf{a}}, \tag{8.3.8}$$

или в координатной форме — системой линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 = x_1^0 + ta_1; \\ x_2 = x_2^0 + ta_2; \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_n = x_n^0 + ta_n; \end{cases} \iff \frac{x_1 - x_1^0}{a_1} = \frac{x_2 - x_2^0}{a_2} = \ldots = \frac{x_n - x_n^0}{a_n}. \tag{8.3.9}$$

Действительно, уравнение (8.3.8) представляет одномерное линейное многообразие в пространстве V_n, а уравнения (8.3.9) есть координатная форма векторного уравнения (8.3.8). При этом первую систему в (8.3.9) естественно назвать *параметрическими уравнениями* прямой, а вторую — *каноническими уравнениями.* Точку $M_0 = M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ естественно назвать *начальной точкой* прямой, а вектор $\overrightarrow{\mathbf{a}} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ — *направляющим вектором*.

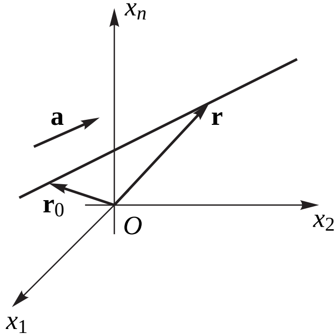


Рис. 7.2

Векторное уравнение прямой (8.3.8) имеет наглядный геометрический смысл: это уравнение прямой, проходящей через конец радиус-вектора $\overrightarrow{\mathbf{r}_0}$, параллельно направляющему вектору $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ (см. рис. 7.2). При этом когда параметр t пробегает все действительные значения $-\infty < t < \infty$ — конец радиус-вектора $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ из (8.3.8) пробегает указанную прямую.

Рассмотрим частный случай уравнения (8.3.8), когда направляющий вектор прямой есть вектор, соединяющий две точки, лежащие на этой прямой,

$$\overrightarrow{\mathbf{a}} = \overrightarrow{M_0M_1} = \overrightarrow{\mathbf{r}}_1 - \overrightarrow{\mathbf{r}}_0.$$

Подставляя этот направляющий вектор в уравнения (8.3.8)–(8.3.9), получим *уравнения прямой, проходящей через две заданные точки* в векторной форме —

$$\overrightarrow{\mathbf{r}} = \overrightarrow{\mathbf{r}}_0 + t(\overrightarrow{\mathbf{r}}_1 - \overrightarrow{\mathbf{r}}_0), \tag{8.3.10}$$

и в координатной форме —

$$\begin{cases} x_1 = x_1^0 + t\cdot(x_1^1 - x_1^0) \\ x_2 = x_2^0 + t\cdot(x_2^1 - x_2^0) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = x_n^0 + t\cdot(x_n^1 - x_n^0) \end{cases} \iff \begin{aligned} \frac{x_1 - x_1^0}{(x_1^1 - x_1^0)} = \frac{x_2 - x_2^0}{(x_2^1 - x_2^0)} = \dots \\ \dots = \frac{x_n - x_n^0}{(x_n^1 - x_n^0)}, \end{aligned} \tag{8.3.11}$$

где $\overrightarrow{\mathbf{r}_1} = \overrightarrow{OM_1} = (x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1)$. Как и раньше, если параметр t пробегает все действительные значения $-\infty < t < \infty$, то конец радиус-вектора $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ из (8.3.10) пробегает данную прямую. Если же t пробегает лишь все значения из отрезка $0 \leqslant t \leqslant 1$, то конец радиус-вектора $\overrightarrow{\mathbf{r}}$ (точка M) из (8.3.10) пробегает отрезок M_0M_1. Действительно, уравнение (8.3.10) равносильно следующим соотношениям:

$$\overrightarrow{\mathbf{r}} - \overrightarrow{\mathbf{r}_0} = t(\overrightarrow{\mathbf{r}}_1 - \overrightarrow{\mathbf{r}}_0) \iff$$
$$\iff \overrightarrow{M_0M} = t\overrightarrow{M_0M_1}.$$

Но при $t \in [0,1]$ это равносильно тому, что точка M принадлежит отрезку M_0M_1 (см. рис. 7.3) Из приведенного рассуждения вытекает следующее

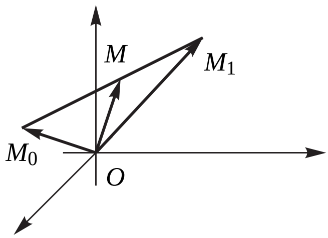


Рис. 7.3

Определение 8.3.3. *Отрезком M_0M_1 в пространстве R^n называется множество точек M (концов радиус-вектора $\overrightarrow{\mathbf{r}}$), определяемых уравнениями:*

$$\overrightarrow{\mathbf{r}} = \overrightarrow{\mathbf{r}}_0 + t(\overrightarrow{\mathbf{r}}_1 - \overrightarrow{\mathbf{r}}_0) \iff$$
$$\iff \overrightarrow{\mathbf{r}} = (1-t)\overrightarrow{\mathbf{r}}_0 + t\overrightarrow{\mathbf{r}}_1, \quad t \in [0,1]. \tag{8.3.12}$$

8.3.4. Системы линейных неравенств

Рассмотрим какую-нибудь гиперплоскость $\mathcal{P}_{n-1}$ в пространстве $\mathbb{R}^n$, заданную уравнением

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1. \tag{8.3.13}$$

Если в этом уравнении знак равенства заменить каким-нибудь знаком неравенства, то по аналогии с трехмерным пространством пространство R^n можно представить в виде объединения двух множеств: $\mathbb{R}^n = \mathcal{P}_{n-1}^+ \cup \mathcal{P}_{n-1}^-$, где $\mathcal{P}_{n-1}^+$ является множеством всех решений неравенства

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geqslant b_1, \tag{8.3.14}$$

а $\mathcal{P}_{n-1}^-$ — множеством всех решений неравенства

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant b_1. \tag{8.3.15}$$

Будем называть эти множества *полупространствами*, определяемыми гиперплоскостью $\mathcal{P}_{n-1}$. Если теперь вместо одного неравенства типа (8.3.14) или (8.3.15) рассмотреть систему линейных неравенств с n неизвестными, то множество ее решений представляет, очевидно, пересечение нескольких полупространств. Такие подмножества пространства $\mathbb{R}^n$, являющиеся пересечением конечного числа полупространств, будем называть *многогранниками*. Таким образом, всякий многогранник в $\mathbb{R}^n$ задается системой линейных неравенств вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leqslant b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leqslant b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leqslant b_m; \end{cases} \iff A\overline{\mathbf{x}} \leqslant \overline{\mathbf{b}}. \qquad (8.3.16)$$

Многогранники в пространстве $\mathbb{R}^n$, так же как многогранники на плоскости или в трехмерном пространстве, обладают следующим свойством выпуклости

Определение 8.3.4. *Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется* выпуклым*, если вместе с любыми двумя точками M_0, $M_1 \in A$ оно содержит в себе весь отрезок M_0M_1.*

Имеет место следующая

Теорема 8.3.2. *Всякий многогранник в пространстве R^n является выпуклым множеством.*

Доказательство. Пусть многогранник A является множеством всех решений системы неравенств (8.3.16). Рассмотрим две какие-нибудь точки $M_0, M_1 \in A$. Тогда их координаты удовлетворяют всем неравенствам системы (8.3.16). Покажем, что координаты любой точки M, принадлежащей отрезку M_0M_1 также будут удовлетворять системе (8.3.16). Ограничимся первым неравенством из (8.3.16). Для координат точек $M_0, M_1 \in A$ выполняются неравенства:

$$a_{11}x_1^0 + a_{12}x_2^0 + \ldots + a_{1n}x_n^0 \leqslant b_1,$$

$$a_{11}x_1^1 + a_{12}x_2^1 + \ldots + a_{1n}x_n^1 \leqslant b_1. \qquad (8.3.17)$$

Если точка M принадлежит отрезку M_0M_1, то, ввиду уравнений (8.3.12), ее координаты выражаются через координаты точек M_0, M_1 следующими равенствами:

$$x_i = (1-t)x_i^0 + tx_i^1; \quad 0 \leqslant t \leqslant 1; \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Тогда для координат точки M, учитывая неравенства (8.3.17), получим:

$$\begin{aligned} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = \\ & \qquad = a_{11}((1-t)x_1^0 + tx_1^1) + a_{12}((1-t)x_2^0 + tx_2^1) + \ldots \\ & \ldots + a_{1n}((1-t)x_n^0 + tx_n^1) = (1-t)(a_{11}x_1^0 + a_{12}x_2^0 + \ldots + a_{1n}x_n^0) + \\ & \qquad + t(a_{11}x_1^1 + a_{12}x_2^1 + \ldots + a_{1n}x_n^1) \leqslant (1-t)b_1 + tb_1 = b_1. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что координаты точки M удовлетворяют первому неравенству системы (8.3.16). Аналогично доказывается, что координаты точки M удовлетворяют остальным неравенствам системы (8.3.16). Следовательно, точка M принадлежит многограннику A.

Глава 9

Евклидовы пространства

До сих пор, рассматривая линейные пространства, мы ограничивались изучением лишь тех свойств векторов, которые определялись линейными операциями над ними (сложением векторов и умножением вектора на число), и нам нигде не встречались такие привычные в геометрии понятия, как длина вектора, угол между векторами, ортогональность векторов и т. д. В произвольном линейном пространстве этих понятий просто не существует. Для того чтобы их определить, оказывается достаточным ввести дополнительную операцию — скалярное произведение векторов. Линейные пространства, в которых введена операция скалярного умножения, называют евклидовыми. В настоящей главе мы ограничимся рассмотрением лишь действительных (вещественных) евклидовых пространств.

§ 9.1. Понятие евклидова пространства. Примеры

Определение 9.1.1. *Действительное линейное пространство L называется евклидовым, если выполнены два условия:*

I. В пространстве введено скалярное произведение векторов, т. е. задано правило, посредством которого любым двум векторам $\mathbf{x}$*,* $\mathbf{y}$ *этого пространства ставится в соответствие вещественное число, называемое скалярным произведением векторов* $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$ *и обозначаемое символом* $(\mathbf{x},\mathbf{y})$.

II. Указанное правило удовлетворяет следующим аксиомам:

1) $\forall \mathbf{x},\mathbf{y}\in L\ (\mathbf{x},\mathbf{y})=(\mathbf{y},\mathbf{x})$ *(коммутативность скалярного произведения);*

2) $\forall\lambda\in\mathbb{R}\ \forall \mathbf{x},\mathbf{y}\in L\ (\lambda\mathbf{x},\mathbf{y})=\lambda(\mathbf{x},\mathbf{y})$*;*

3) $\forall \mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in L\ (\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{z})=(\mathbf{x},\mathbf{z})+(\mathbf{y},\mathbf{z})$ *(дистрибутивность скалярного произведения относительно суммы векторов);*

4) $(\mathbf{x},\mathbf{x}) > 0$*, если* $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$*, и* $(\mathbf{x},\mathbf{x}) = 0$*, если* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 9.1.1. *Аксиомы 2) и 3) скалярного произведения сформулированы для первого сомножителя. На самом деле, в силу аксиомы 1), они справедливы также для второго сомножителя, т. е.*

$$(\mathbf{x},\lambda\mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x},\mathbf{y}), \quad (\mathbf{x},\mathbf{y}+\mathbf{z}) = (\mathbf{x},\mathbf{y}) + (\mathbf{x},\mathbf{z}).$$

Действительно, применяя последовательно аксиомы 1), 2), 1), а затем 1), 3), 1), получим

$$(\mathbf{x},\lambda\mathbf{y}) = (\lambda\mathbf{y},\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{y},\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x},\mathbf{y}),$$
$$(\mathbf{x},\mathbf{y}+\mathbf{z}) = (\mathbf{y}+\mathbf{z},\mathbf{x}) = (\mathbf{y},\mathbf{x}) + (\mathbf{z},\mathbf{x}) = (\mathbf{x},\mathbf{y}) + (\mathbf{x},\mathbf{z}).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 9.1.2. *Аксиомы 1), 2), 3) и предыдущее замечание позволяют применять к векторам в евклидовом пространстве обычные приемы преобразований: раскрывать скобки при умножении, приводить подобные и т. д.*

ПРИМЕР 9.1.1. *Вычислить скалярное произведение векторов* $3\mathbf{x}+2\mathbf{y}$ *и* $\mathbf{x}-3\mathbf{y}$*, если* $(\mathbf{x},\mathbf{x}) = 2$*,* $(\mathbf{y},\mathbf{y}) = 3$*,* $(\mathbf{x},\mathbf{y}) = -2$.

РЕШЕНИЕ. Запишем следующую цепочку равенств, используя аксиомы скалярного произведения и замечание 9.1.2:

$$\begin{aligned}
&(3\mathbf{x}+2\mathbf{y},\mathbf{x}-3\mathbf{y}) = (3\mathbf{x},\mathbf{x}-3\mathbf{y}) + (2\mathbf{y},\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \\
&\quad = 3(\mathbf{x},\mathbf{x}-3\mathbf{y}) + 2(\mathbf{y},\mathbf{x}-3\mathbf{y}) = 3(\mathbf{x},\mathbf{x}) + 3(\mathbf{x},-3\mathbf{y}) + 2(\mathbf{y},\mathbf{x}) + \\
&\quad = 2(\mathbf{y},-3\mathbf{y}) = 3(\mathbf{x},\mathbf{x}) - 9(\mathbf{x},\mathbf{y}) + 2(\mathbf{y},\mathbf{x}) - 6(\mathbf{y},\mathbf{y}) = \\
&\quad = 3(\mathbf{x},\mathbf{x}) - 9(\mathbf{x},\mathbf{y}) + 2(\mathbf{x},\mathbf{y}) - 6(\mathbf{y},\mathbf{y}) = \\
&\quad = 3(\mathbf{x},\mathbf{x}) - \mathbf{7}(\mathbf{x},\mathbf{y}) - \mathbf{6}(\mathbf{y},\mathbf{y}) = \mathbf{6} + \mathbf{14} - \mathbf{18} = \mathbf{2}.
\end{aligned}$$

УПРАЖНЕНИЕ 9.1.1. *С помощью аксиом евклидова пространства проверьте, что скалярное произведение нулевого вектора на любой другой равно нулю:*

$$(\mathbf{x},\mathbf{0}) = (\mathbf{0},\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

Рассмотрим некоторые примеры евклидовых пространств.

ПРИМЕР 9.1.2. *Множество* V_3 *всех свободных геометрических векторов образует евклидово пространство, если скалярное произведение этих векторов определить так, как это сделано в курсе векторной алгебры, т. е. как произведение длин векторов на косинус угла между ними (справедливость аксиом 1)–4) доказана в п 3.4.2.*

Пример 9.1.3. *Линейное пространство $C[a,b]$ всех функций $\mathbf{x} = x(t)$, непрерывных на отрезке $a \leqslant t \leqslant b$, представляет собой евклидово пространство, если скалярное произведение $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ определить как интеграл от произведения этих функций:*

$$(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \int\limits_a^b x(t)y(t)\,dt. \tag{9.1.1}$$

Заметим, что справедливость аксиом 1)–4) скалярного произведения следует из свойств определенного интеграла.

Пример 9.1.4. *Линейные пространства M всех многочленов и M_n многочленов, степень которых не превышает n, также являются евклидовыми, если ввести скалярное произведение с помощью равенства* (9.1.1)*, как и в пространстве* $C[a,b]$.

Пример 9.1.5. *Важным примером евклидова пространства является координатное (арифметическое) линейное пространство $\mathbb{R}_n$ упорядоченных наборов из n вещественных чисел, если скалярное произведение векторов $\mathbf{x} = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$ и $\mathbf{y} = (y_1,y_2,\ldots,y_n)$ этого пространства определить равенством*

$$(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n. \tag{9.1.2}$$

Упражнение 9.1.2. *Проверьте, что скалярное произведение векторов $\mathbb{R}_n$, введенное правилом* (9.1.2)*, удовлетворяет аксиомам 1)–4) евклидова пространства.*

§ 9.2. Неравенство Коши–Буняковского. Нормированные пространства

В дальнейшем будем обозначать n-мерное евклидово пространство символом E_n.

Теорема 9.2.1. *Для любых двух векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in E_n$ справедливо следующее* неравенство Коши–Буняковского:

$$(\mathbf{x},\mathbf{y})^2 \leqslant (\mathbf{x},\mathbf{x})(\mathbf{y},\mathbf{y}). \tag{9.2.1}$$

Доказательство. Для любых двух векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ и любого вещественного числа λ в силу аксиомы 4) скалярного произведения, справедливо неравенство

$$(\lambda\mathbf{x} - \mathbf{y}, \lambda\mathbf{x} - \mathbf{y}) \geqslant 0.$$

Раскроем скобки в левой части этого неравенства, используя аксиомы 1)–3) (см. замечание 9.1.2),

$$\lambda^2(\mathbf{x},\mathbf{x}) - 2\lambda(\mathbf{x},\mathbf{y}) + (\mathbf{y},\mathbf{y}) \geqslant 0.$$

В левой части полученного неравенства стоит квадратный трехчлен относительно λ, который принимает неотрицательные значения при всех значениях $\lambda \in \mathbb{R}$. Следовательно, его дискриминант неположительный, т. е.

$$(\mathbf{x},\mathbf{y})^2 - (\mathbf{x},\mathbf{x})(\mathbf{y},\mathbf{y}) \leqslant 0,$$

откуда вытекает (9.2.1).

Заметим, что неравенство Коши–Буняковского можно записать в эквивалентном виде

$$|\,(\mathbf{x},\mathbf{y})\,| \leqslant \sqrt{(\mathbf{x},\mathbf{x})(\mathbf{y},\mathbf{y})}. \tag{9.2.2}$$

Определение 9.2.1. *Линейное пространство L называется* нормированным*, если выполнены два условия.*

I. В пространстве введено понятие нормы (длины) вектора, т. е. имеется правило, посредством которого каждому вектору $\mathbf{x} \in L$ *ставится в соответствие вещественное число, называемое нормой (длиной) вектора и обозначаемое символом* $\|\mathbf{x}\|$.

II. Указанное правило удовлетворяет следующим аксиомам:

1) $\|\mathbf{x}\| > 0$, *если* $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, *и* $\|\mathbf{x}\| = 0$, *если* $\mathbf{x} = 0$.

2) $\forall\lambda \in \mathbb{R}\ \forall\mathbf{x} \in L\ \|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{x}\|$.

3) $\forall\mathbf{x},\mathbf{y} \in L$ *справедливо следующее* неравенство треугольника *(неравенство Минковского):*

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|.$$

Теорема 9.2.2. *Всякое евклидово пространство является нормированным, если в нем норму вектора* $\mathbf{x}$ *определить равенством*

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x},\mathbf{x})}. \tag{9.2.3}$$

Доказательство. Для доказательства теоремы необходимо проверить, что для нормы вектора, введенной формулой (9.2.3), выполняются аксиомы 1)–3) нормированного пространства. Справедливость аксиом 1) и 2) непосредственно следует из аксиом евклидова пространства (свойств скалярного произведения векторов). Убедимся в справедливости аксиомы 3). Опираясь на определение нормы (9.2.3) и неравенство Коши–Буняковского (9.2.2), имеем:

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| = \sqrt{(\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{x}+\mathbf{y})} = \sqrt{(\mathbf{x},\mathbf{x}) + 2(\mathbf{x},\mathbf{y}) + (\mathbf{y},\mathbf{y})} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\left(\sqrt{(\mathbf{x},\mathbf{x})}\right)^2 + 2\sqrt{(\mathbf{x},\mathbf{x})}\sqrt{(\mathbf{y},\mathbf{y})} + \left(\sqrt{(\mathbf{y},\mathbf{y})}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{(\mathbf{x},\mathbf{x})} + \sqrt{(\mathbf{y},\mathbf{y})}\right)^2} = \sqrt{(\mathbf{x},\mathbf{x})} + \sqrt{(\mathbf{y},\mathbf{y})} = \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|.$$

По аналогии с векторной алгеброй в любом евклидовом пространстве можно ввести понятия угла между векторами и перпендикулярности векторов.

Определение 9.2.2. *Углом между векторами* $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$ *называется угол* $\varphi \in [0,\pi]$*, косинус которого определяется формулой*

$$\cos\varphi = \frac{(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\|\cdot\|\mathbf{y}\|}. \tag{9.2.4}$$

Введенное определение корректно, так как в силу неравенства Коши–Буняковского (9.2.2), дробь, стоящая в правой части (9.2.4), по модулю не превышает единицы.

Определение 9.2.3. *Два вектора называются* ортогональными *(перпендикулярными), если их скалярное произведение равно нулю.*

Для обозначения ортогональных векторов традиционно используем $\perp$

$$\mathbf{x}\perp\mathbf{y} \iff (\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0. \tag{9.2.5}$$

Введенное понятие ортогональности векторов евклидова пространства аналогично понятию перпендикулярности геометрических векторов. Действительно, для геометрических векторов равенство нулю их скалярного произведения $(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$ равносильно перпендикулярности векторов (см. п 3.4.3).

Определение 9.2.4. *Система векторов* $\mathbf{x}_1$*,* $\mathbf{x}_2$*, …,* $\mathbf{x}_m$ *называется* ортогональной*, если векторы системы попарно ортогональны, т. е.*

$$(\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_j) = 0, \quad i\neq j, \quad (i,j = 1,2,\ldots,m). \tag{9.2.6}$$

Теорема 9.2.3. *Если система ненулевых векторов ортогональна, то она линейно независима.*

Доказательство. Пусть векторы $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, …, $\mathbf{x}_m$ попарно ортогональны, т. е. выполняются соотношения (9.2.6). Чтобы доказать линейную независимость векторов $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, …, $\mathbf{x}_m$, нужно установить, что равенство

$$\alpha_1\mathbf{x}_1+\alpha_2\mathbf{x}_2+\ldots+\alpha_m\mathbf{x}_m = \mathbf{0} \tag{9.2.7}$$

возможно лишь тогда, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$. Для этого умножим скалярно равенство (9.2.7) на вектор $\mathbf{x}_1$

$$\alpha_1(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_1)+\alpha_2(\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_1)+\ldots+\alpha_m(\mathbf{x}_m,\mathbf{x}_1) = 0.$$

Так как система векторов $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, …, $\mathbf{x}_m$ ортогональна, то ввиду (9.2.6) в левой части последнего равенства все слагаемые, кроме первого, равны нулю, и оно приобретает вид

$$\alpha_1(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_1) = 0.$$

Так как $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{0}$, отсюда следует, что $\alpha_1 = 0$.

Умножая далее равенство (9.2.7) на другие векторы $\mathbf{x}_k$ $(k = 2, \ldots, m)$, и повторяя аналогичные рассуждения, получим: $\alpha_k = 0$ для всех $k = 1, 2, \ldots, m$.

§ 9.3. Ортонормированный базис

В предыдущей главе было введено понятие базиса n-мерного линейного пространства и показано, что базис образуют любые n линейно независимых векторов этого пространства, при этом все базисы равноправны. Однако в евклидовом пространстве существуют особые, так называемые ортонормированные базисы, которые играют ту же роль, что и декартов прямоугольный базис в аналитической геометрии.

Определение 9.3.1. *Говорят, что векторы* $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ *образуют* ортонормированный базис *n-мерного евклидова пространства E_n, если система векторов* $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ *ортогональна и длина каждого вектора равна единице, т. е. выполняются равенства*

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \begin{cases} 1, \text{ если } i = j, \\ 0, \text{ если } i \neq j, \end{cases} = \delta_{i,j}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n. \tag{9.3.1}$$

где $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера, введенный в гл. 2.

Сформулируем теорему, которая доказывает существование ортонормированного базиса в евклидовом пространстве. В ходе ее доказательства описан алгоритм его построения. Этот алгоритм называется процессом ортогонализации.

Теорема 9.3.1. *Во всяком n-мерном евклидовом пространстве E_n существует ортонормированный базис.*

Доказательство. Согласно определению размерности пространства в E_n найдется n линейно независимых векторов $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, ..., $\mathbf{f}_n$, которые образуют базис этого пространства. Покажем, что можно построить n векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$, которые линейно выражаются через векторы $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, ..., $\mathbf{f}_n$ и образуют ортонормированный базис E_n. Сначала построим n попарно ортогональных векторов $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, ..., $\mathbf{g}_n$, линейно выраженных через векторы исходного базиса $\underline{\mathbf{f}}$.

Положим $\mathbf{g}_1 = \mathbf{f}_1$, $\mathbf{g}_2 = \mathbf{f}_2 + \alpha_1 \mathbf{g}_1$, причем коэффициент α_1 найдем из условия ортогональности $\mathbf{g}_2$ и $\mathbf{g}_1$, т. е. из условия: $(\mathbf{g}_2, \mathbf{g}_1) = 0$. Тогда получим

$$(\mathbf{g}_2,\mathbf{g}_1)=(\mathbf{f}_2+\alpha_1\mathbf{g}_1,\mathbf{g}_1)=(\mathbf{f}_2,\mathbf{g}_1)+\alpha_1(\mathbf{g}_1,\mathbf{g}_1)=0 \implies$$
$$\implies \alpha_1=-\frac{(\mathbf{f}_2,\mathbf{g}_1)}{(\mathbf{g}_1,\mathbf{g}_1)}.$$

Далее положим $\mathbf{g}_3=\mathbf{f}_3+\beta_2\mathbf{g}_2+\beta_1\mathbf{g}_1$, а коэффициенты β_1, β_2 найдем из условия ортогональности $\mathbf{g}_3$ к $\mathbf{g}_2$ и $\mathbf{g}_1$. Так как вектор $\mathbf{g}_2$ ортогонален $\mathbf{g}_1$, то для определения коэффициентов β_1 и β_2 получим систему уравнений:

$$(\mathbf{g}_3,\mathbf{g}_1)=(\mathbf{f}_3+\beta_2\mathbf{g}_2+\beta_1\mathbf{g}_1,\mathbf{g}_1)=(\mathbf{f}_3,\mathbf{g}_1)+\beta_1(\mathbf{g}_1,\mathbf{g}_1)=0,$$
$$(\mathbf{g}_3,\mathbf{g}_2)=(\mathbf{f}_3+\beta_2\mathbf{g}_2+\beta_1\mathbf{g}_1,\mathbf{g}_2)=(\mathbf{f}_3,\mathbf{g}_2)+\beta_2(\mathbf{g}_2,\mathbf{g}_2)=0.$$

Отсюда находим

$$\beta_1=-\frac{(\mathbf{f}_3,\mathbf{g}_1)}{(\mathbf{g}_1,\mathbf{g}_1)},\quad \beta_2=-\frac{(\mathbf{f}_3,\mathbf{g}_2)}{(\mathbf{g}_2,\mathbf{g}_2)}.$$

Таким образом, построены три попарно ортогональных вектора: $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$. Продолжая процесс ортогонализации, предположим, что построена ортогональная система из $n-1$ векторов $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, ..., $\mathbf{g}_{n-1}$, являющихся линейными комбинациями векторов $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, ..., $\mathbf{f}_{n-1}$. Положим

$$\mathbf{g}_n=\mathbf{f}_n+\sum_{k=1}^{n-1}\gamma_k\mathbf{g}_k \tag{9.3.2}$$

где коэффициенты γ_k $(k=1,\dots,n-1)$ определим из условия ортогональности вектора $\mathbf{g}_n$ найденным ранее попарно ортогональным векторам $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, ..., $\mathbf{g}_{n-1}$:

$$\gamma_k=-\frac{(\mathbf{f}_n,\mathbf{g}_k)}{(\mathbf{g}_k,\mathbf{g}_k)},\quad (k=1,\dots,n-1). \tag{9.3.3}$$

По построению, полученная система векторов $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, ..., $\mathbf{g}_n$ ортогональна, и никакой из векторов $\mathbf{g}_i$ не может быть нулевым (докажите это!), следовательно, по теореме 9.2.3 система линейно независима. Так как число этих векторов равно размерности пространства, то векторы $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, ..., $\mathbf{g}_n$ образуют ортогональный базис пространства E_n. Умножив каждый из векторов $\mathbf{g}_i$ на число $\lambda_i=1/\|\mathbf{g}_i\|$, $(i=1,2,\dots,n)$, получим ортонормированный базис пространства E_n:

$$\mathbf{e}_1=\frac{\mathbf{g}_1}{\|\mathbf{g}_1\|},\quad \mathbf{e}_2=\frac{\mathbf{g}_2}{\|\mathbf{g}_2\|},\quad \dots,\quad \mathbf{e}_n=\frac{\mathbf{g}_n}{\|\mathbf{g}_n\|}. \tag{9.3.4}$$

Использованный в ходе доказательства метод преобразования произвольной линейно независимой системы векторов в ортогональную называется *процессом ортогонализации Шмидта*.

Приведем примеры, иллюстрирующие применение процесса ортогонализации для построения ортонормированного базиса евклидова пространства.

Пример 9.3.1. *В пространстве геометрических векторов V_3 перейти от базиса $\mathbf{a}_1 = 2\mathbf{i} - \mathbf{k}$, $\mathbf{a}_2 = 3\mathbf{i} + \mathbf{k}$, $\mathbf{a}_3 = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ к ортогональному, а затем к ортонормированному базису.*

Решение. Прежде чем проводить процесс ортогонализации, заметим, что декартов базис $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — ортонормированный, и скалярное произведение векторов в этом базисе равно сумме произведений координат векторов (см. п 3.4.3). Запишем координатные столбцы векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ в базисе $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$:

$$\overline{\mathbf{a}}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \overline{\mathbf{a}}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overline{\mathbf{a}}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}. \tag{9.3.5}$$

Построим сначала ортогональный базис $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$ пространства V_3, применив процесс ортогонализации к базису $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$. Положим $\mathbf{g}_1 = \mathbf{a}_1$, $\mathbf{g}_2 = \mathbf{a}_2 + \alpha\mathbf{g}_1$. Коэффициент α найдем из условия, что $\mathbf{g}_2 \perp \mathbf{g}_1$ и, следовательно $(\mathbf{g}_2, \mathbf{g}_1) = 0$. Получим

$$(\mathbf{g}_2, \mathbf{g}_1) = (\mathbf{a}_2 + \alpha\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_1) = (\mathbf{a}_2, \mathbf{g}_1) + \alpha(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_1) = 0 \implies$$

$$\implies \alpha = -\frac{(\mathbf{a}_2, \mathbf{g}_1)}{(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_1)}. \tag{9.3.6}$$

Вычислим скалярные произведения векторов $(\mathbf{a}_2, \mathbf{g}_1)$ и $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_1)$, используя (9.3.5):

$$(\mathbf{a}_2, \mathbf{g}_1) = (\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1) = 3 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) = 5,$$
$$(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_1) = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1) = 2 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) = 5.$$

Подставляя полученные результаты в (9.3.6), найдем

$$\alpha = -\frac{5}{5} = -1.$$

Вычислим координаты вектора $\mathbf{g}_2$

$$\overline{\mathbf{g}}_2 = \overline{\mathbf{a}}_2 + \alpha\overline{\mathbf{g}}_1 = \overline{\mathbf{a}}_2 - \overline{\mathbf{a}}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}. \tag{9.3.7}$$

Положим теперь

$$\mathbf{g}_3 = \mathbf{a}_3 + \beta_2\mathbf{g}_2 + \beta_1\mathbf{g}_1, \tag{9.3.8}$$

а коэффициенты β_1 и β_2 найдем из условий: $\mathbf{g}_3 \perp \mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_3 \perp \mathbf{g}_2$, т. е. $(\mathbf{g}_3, \mathbf{g}_1) = 0$, $(\mathbf{g}_3, \mathbf{g}_2) = 0$. Умножим (9.3.8) последовательно на $\mathbf{g}_1$ и $\mathbf{g}_2$ и, учитывая, что $(\mathbf{g}_2, \mathbf{g}_1) = 0$, получим систему уравнений для определения β_1 и β_2

$$(\mathbf{g}_3, \mathbf{g}_1) = (\mathbf{a}_3, \mathbf{g}_1) + \beta_1(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_1) = 0,$$
$$(\mathbf{g}_3, \mathbf{g}_2) = (\mathbf{a}_3, \mathbf{g}_2) + \beta_2(\mathbf{g}_2, \mathbf{g}_2) = 0.$$

Следовательно,

$$\beta_1 = -\frac{(\mathbf{a}_3, \mathbf{g}_1)}{(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_1)}, \quad \beta_2 = -\frac{(\mathbf{a}_3, \mathbf{g}_2)}{(\mathbf{g}_2, \mathbf{g}_2)}. \tag{9.3.9}$$

Вычислим скалярные произведения векторов, входящие в полученные формулы

$$(\mathbf{a}_3,\mathbf{g}_1)=(\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_1)=4\cdot 2+3\cdot 0+3\cdot(-1)=5,$$
$$(\mathbf{a}_3,\mathbf{g}_2)=4\cdot 1+3\cdot 0+3\cdot 2=4+6=10,$$
$$(\mathbf{g}_2,\mathbf{g}_2)=1\cdot 1+0\cdot 0+2\cdot 2=1+4=5.$$

Из (9.3.9) найдем теперь коэффициенты β_1 и β_2:

$$\beta_1=-\frac{5}{5}=-1,\quad \beta_2=-\frac{10}{5}=-2.$$

Подставляя найденные значения β_1, β_2 в (9.3.8) и используя координаты векторов $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_1$, вычислим вектор $\mathbf{g}_3$:

$$\overline{\mathbf{g}}_3=\overline{\mathbf{a}}_3-2\overline{\mathbf{g}}_2-\overline{\mathbf{g}}_1=\begin{pmatrix}4\\3\\3\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}.$$

Построенный базис $\mathbf{g}_1=2\mathbf{i}-\mathbf{k}$, $\mathbf{g}_2=\mathbf{i}+2\mathbf{k}$, $\mathbf{g}_3=3\mathbf{j}$ — ортогональный базис V_3. Для построения ортонормированного базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ вычислим длины векторов $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$:

$$\|\mathbf{g}_1\|=\sqrt{(\mathbf{g}_1,\mathbf{g}_1)}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5},$$
$$\|\mathbf{g}_2\|=\sqrt{(\mathbf{g}_2,\mathbf{g}_2)}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5},$$
$$\|\mathbf{g}_3\|=\sqrt{(\mathbf{g}_3,\mathbf{g}_3)}=\sqrt{9}=3.$$

Ортонормированный базис $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ получим, умножив каждый из векторов $\mathbf{g}_i$ на число $\lambda_i=\dfrac{1}{\|\mathbf{g}_i\|}$, $i=1,2,3$:

$$\mathbf{e}_1=\frac{\mathbf{g}_1}{\|\mathbf{g}_1\|}=\frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{i}-\frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{k},\quad \mathbf{e}_2=\frac{\mathbf{g}_2}{\|\mathbf{g}_2\|}=\frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{i}+\frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{k},$$
$$\mathbf{e}_3=\frac{\mathbf{g}_3}{\|\mathbf{g}_3\|}=\mathbf{j}.$$

Пример 9.3.2. *В пространстве $M_2[0,1]$ многочленов, заданных на отрезке $[0,1]$, степень которых не выше второй, перейти от базиса $\underline{\mathbf{f}}=(\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2,\mathbf{f}_3)=(1,t,t^2)$ к ортогональному, а затем к ортонормированному базису, если скалярное произведение многочленов $\mathbf{P}=P(t)$ и $\mathbf{Q}=Q(t)$ определяется формулой*

$$(\mathbf{P},\mathbf{Q})=\int\limits_0^1 P(t)Q(t)\,dt. \tag{9.3.10}$$

Решение. Сначала, как и в примере 9.3.1, построим ортогональный базис пространства $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$. Положим $\mathbf{g}_1=\mathbf{f}_1=1$, $\mathbf{g}_2=\mathbf{f}_2+\alpha\mathbf{g}_1$. Коэффициент α найдем, как и раньше, из условия, что $\mathbf{g}_2\perp\mathbf{g}_1$ по формуле (9.3.6), заменив в ней $\mathbf{a}_2$ на $\mathbf{f}_2$. Сначала вычислим скалярные произведения векторов $(\mathbf{f}_2, \mathbf{g}_1)$ и $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_1)$, используя (9.3.10):

$$(\mathbf{f}_2, \mathbf{g}_1) = \int_0^1 f_2(t) g_1(t) dt = \int_0^1 t \cdot 1 \, dt = \int_0^1 t \, dt = \frac{1}{2},$$

$$(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_1) = \int_0^1 (g_1(t))^2 \, dt = \int_0^1 dt = 1.$$

Подставляя результаты вычислений в (9.3.6), получим $\alpha = -\dfrac{1}{2}$ и соответственно,

$$\mathbf{g}_2 = \mathbf{f}_2 + \alpha \mathbf{g}_1 = t - \frac{1}{2}.$$

Далее положим $\mathbf{g}_3 = \mathbf{f}_3 + \beta_2 \mathbf{g}_2 + \beta_1 \mathbf{g}_1$ и найдем коэффициенты β_1, β_2 из условия перпендикулярности $\mathbf{g}_3$ к $\mathbf{g}_2$ и $\mathbf{g}_1$ по формулам (9.3.9), заменив в них $\mathbf{a}_3$ на $\mathbf{f}_3$ и $\mathbf{a}_2$ на $\mathbf{f}_2$. Входящие в формулы для β_1 и β_2 скалярные произведения векторов $(\mathbf{f}_3, \mathbf{g}_1)$, $(\mathbf{f}_3, \mathbf{g}_2)$, $(\mathbf{g}_2, \mathbf{g}_2)$ вычислим, используя (9.3.10):

$$(\mathbf{f}_3, \mathbf{g}_1) = \int_0^1 t^2 \, dt = \frac{1}{3}, \quad (\mathbf{f}_3, \mathbf{g}_2) = \int_0^1 t^2 \left(t - \frac{1}{2}\right) dt = \frac{1}{12},$$

$$(\mathbf{g}_2, \mathbf{g}_2) = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 dt = \frac{1}{12}.$$

Подставляя полученные результаты в (9.3.9) и учитывая, что $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_1) = 1$, найдем $\beta_1 = -\dfrac{1}{3}$, $\beta_2 = -1$.

Следовательно,

$$\mathbf{g}_3 = \mathbf{f}_3 + \beta_2 \mathbf{g}_2 + \beta_1 \mathbf{g}_1 = t^2 - \frac{1}{3} - \left(t - \frac{1}{2}\right) = t^2 - t + \frac{1}{6}.$$

Многочлены $\mathbf{g}_1 = 1$, $\mathbf{g}_2 = t - \dfrac{1}{2}$, $\mathbf{g}_3 = t^2 - t + \dfrac{1}{6}$ образуют ортогональный базис пространства M_2. Чтобы перейти к ортонормированному базису, вычислим нормы векторов $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$ по формуле

$$\|\mathbf{g}_i\| = \sqrt{(\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_i)} = \sqrt{\int_0^1 \mathbf{g}_i^2(t) \, dt}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Получим

$$\|\mathbf{g}_1\| = \sqrt{(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_1)} = \sqrt{1} = 1,$$

$$\|\mathbf{g}_2\| = \sqrt{(\mathbf{g}_2, \mathbf{g}_2)} = \sqrt{\int\limits_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 dt} = \frac{1}{2\sqrt{3}},$$

$$\|\mathbf{g}_3\| = \sqrt{(\mathbf{g}_3, \mathbf{g}_3)} = \sqrt{\int\limits_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right)^2 dt} = \frac{1}{6\sqrt{5}}.$$

Ортонормированный базис пространства образуют многочлены

$$\mathbf{e}_1 = 1, \quad \mathbf{e}_2 = 2\sqrt{3}t - \sqrt{3}, \quad \mathbf{e}_3 = 6\sqrt{5}t^2 - 6\sqrt{5}t + \sqrt{5}.$$

Ортонормированный базис обладает рядом свойств, которые отличают его от других простотой и удобством использования. Рассмотрим эти свойства.

Свойство 9.3.1. *Скалярное произведение векторов в ортонормированном базисе равно сумме произведений координат этих векторов, т. е. если*

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n = \underline{\mathbf{e}} \cdot \overline{\mathbf{x}},$$
$$\mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + \ldots + y_n\mathbf{e}_n = \underline{\mathbf{e}} \cdot \overline{\mathbf{y}},$$

то

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n = \underline{\mathbf{x}} \cdot \overline{\mathbf{y}}. \tag{9.3.11}$$

Доказательство. Вычислим скалярное произведение векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, используя аксиомы скалярного произведения и определение ортонормированного базиса (9.3.1):

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n, y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + \ldots + y_n\mathbf{e}_n) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_iy_j(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_iy_j\delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i = \underline{\mathbf{x}} \cdot \overline{\mathbf{y}}.$$

Свойство 9.3.2. *В ортонормированном базисе норма вектора задается формулой*

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}. \tag{9.3.12}$$

Доказательство. Эта формула является следствием равенства (9.3.11), в котором нужно положить $\mathbf{y} = \mathbf{x}$.

Свойство 9.3.3. *Косинус угла между векторами в ортонормированном базисе вычисляется по формуле, справедливость которой следует из* (9.3.11), (9.3.12):

$$\cos\varphi = \frac{(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\|\cdot\|\mathbf{y}\|} =$$

$$= \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}\cdot\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2}}. \quad (9.3.13)$$

Свойство 9.3.4. *В ортонормированном базисе координаты вектора равны скалярным произведениям этого вектора на базисные векторы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, запишем разложение произвольного вектора $\mathbf{x}$ по ортонормированному базису $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n$$

и умножим это равенство последовательно на векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$. В силу ортогональности базисных векторов найдем

$$x_1 = (\mathbf{x},\mathbf{e}_1), \quad x_2 = (\mathbf{x},\mathbf{e}_2), \quad \ldots, \quad x_n = (\mathbf{x},\mathbf{e}_n). \quad (9.3.14)$$

Обозначим через $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ углы, которые вектор $\mathbf{x}$ образует с базисными векторами $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$. Учитывая (9.3.14) и то, что $\|\mathbf{e}_i\| = 1$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, получим

$$\cos\gamma_1 = \frac{(\mathbf{x},\mathbf{e}_1)}{\|\mathbf{x}\|}, \quad \cos\gamma_2 = \frac{(\mathbf{x},\mathbf{e}_2)}{\|\mathbf{x}\|}, \quad \ldots, \quad \cos\gamma_n = \frac{(\mathbf{x},\mathbf{e}_n)}{\|\mathbf{x}\|}.$$

Следовательно, равенства (9.3.14) можно записать в виде

$$x_1 = \|\mathbf{x}\|\cdot\cos\gamma_1, \quad x_2 = \|\mathbf{x}\|\cdot\cos\gamma_2, \quad \ldots, \quad x_n = \|\mathbf{x}\|\cdot\cos\gamma_n.$$

По аналогии с векторной алгеброй $\cos\gamma_1$, $\cos\gamma_2$, ..., $\cos\gamma_n$ естественно назвать *направляющими косинусами вектора* $\mathbf{x}$, а координаты $\mathbf{x}$ в ортонормированном базисе — его *проекциями на базисные векторы.*

§ 9.4. Замена ортонормированного базиса. Ортогональные матрицы

Пусть в евклидовом пространстве E_n заданы два ортонормированных базиса: старый $\underline{\mathbf{e}} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ и новый $\underline{\mathbf{e}}' = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n)$, причем $\underline{\mathbf{e}}' = \underline{\mathbf{e}}\cdot S$, где S — матрица перехода:

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{n1} & s_{n2} & \cdots & s_{nn} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим некоторые свойства матрицы S. Так как по определению матрицы перехода столбцы S — это координатные столбцы базисных векторов $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n$ в ортонормированном базисе $\underline{\mathbf{e}}$, то справедливы следующие свойства.

Свойство 9.4.1. *Сумма квадратов элементов каждого столбца равна единице (квадрат нормы соответствующего базисного вектора):*

$$\sum_{k=1}^{n} s_{ki}^2 = (\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}'_i) = \|\mathbf{e}'_i\|^2 = 1.$$

Свойство 9.4.2. *Сумма произведений соответствующих элементов различных столбцов равна нулю (скалярное произведение различных базисных векторов):*

$$\sum_{k=1}^{n} s_{ki} s_{kj} = (\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}'_j) = 0, \quad i \neq j.$$

Объединяя оба эти свойства в одно, получим:

$$\sum_{k=1}^{n} s_{ki} s_{kj} = (\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}'_j) = \delta_{ij}, \tag{9.4.1}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. Данное соотношение равносильно следующему матричному равенству (см. транспонирование и умножение матриц в п 2.1.3 и 2.1.4)

$$S^T S = E,$$

из которого следует, что для матрицы перехода S обратная матрица S^{-1} совпадает с транспонированной S^T.

Определение 9.4.1. *Матрица S, у которой обратная совпадает с транспонированной, т. е.*

$$S^T S = E \iff S^{-1} = S^T, \tag{9.4.2}$$

называется ортогональной матрицей.

Таким образом, переход от одного ортонормированного базиса к другому ортонормированному базису осуществляется с помощью ортогональной матрицы перехода.

Свойство 9.4.3. *Модуль определителя ортогональной матрицы равен* 1.

Доказательство. По определению ортогональной матрицы $SS^T = E$. Используя свойства определителей (см. п 2.2.3), имеем:

$$1 = \det E = \det(SS^T) = \det S \det S^T = (\det S)^2.$$

Следовательно, $|\det S| = 1$.

Свойство 9.4.4. *Матрица, обратная ортогональной, также ортогональна.*

Доказательство. Пусть S — ортогональная матрица. Тогда $S^T = S^{-1}$. Запишем цепочку равенств:
$$(S^{-1})^T = (S^T)^T = S = (S^{-1})^{-1} \Longrightarrow (S^{-1})^T = (S^{-1})^{-1}.$$
Отсюда следует, что матрица S^{-1} ортогональна.

Следствие 9.4.1. *Пусть $\underline{\mathbf{e}} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ — ортонормитрованный базис евклидова пространства E_n, S — ортогональная матрица и $\underline{\mathbf{e}}' = \underline{\mathbf{e}} \cdot S$, где $\underline{\mathbf{e}}' = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n)$. Тогда $\underline{\mathbf{e}}' = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n)$ — также ортонормированный базис E_n.*

Доказательство. По определению матрицы перехода столбцы S — это координатные столбцы векторов $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\ldots$, $\mathbf{e}'_n$ в ортонормированном базисе $\underline{\mathbf{e}}$. Следовательно, векторы $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\ldots$, $\mathbf{e}'_n$ удовлетворяют соотношениям (9.4.1). Значит, базис $\underline{\mathbf{e}}'$ — ортонормированный.

§ 9.5. Ортогональные подпространства

Пусть E — евклидово пространство, а F и G — некоторые его подпространства.

Определение 9.5.1. *Подпространства F и G называются* ортогональными*, если каждый вектор из F перпендикулярен каждому вектору из G, т. е.*
$$\forall \mathbf{x} \in F \ \forall \mathbf{y} \in G \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0.$$
Обозначение: $F \perp G$.

Пример 9.5.1. *В евклидовом пространстве V_3 всех геометрических векторов подпространство $V_2(XY) = L(\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}})$ — всех векторов, лежащих в плоскости xOy, и $V_1(Z) = L(\vec{\mathbf{k}})$ — подпространство всех векторов, лежащих на оси Oz, ортогональны. В то же время подпространства $V_2(XY)$ и $V_2(XZ)$ — не ортогональны, так как все векторы, принадлежащие оси Ox (или подпространству $V_1(X) = L(\vec{\mathbf{i}})$), принадлежат обоим этим подпространствам и, очевидно, не ортогональны.*

Определение 9.5.2. *Пусть F — подпространство евклидова пространства E.* Ортогональным дополнением *подпространства F называется множество всех векторов из E, ортогональных всем векторам из F. Ортогональное дополнение F обозначается $F^\perp$*
$$F^\perp = \{\mathbf{x} \in E : \ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \ \forall \mathbf{y} \in F\}.$$

Из этого определения сразу следует, что подпространство F и его ортогональное дополнение могут пересекаться лишь по нулевому вектору. Действительно, если вектор $\mathbf{x} \in F \cap F^{\perp}$, то он должен быть ортогонален сам себе, а значит, скалярное произведение $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$, что возможно лишь в случае, когда $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Ортогональные дополнения подпространств обладают и другими важными свойствами, которые формулируются в следующих теоремах:

Теорема 9.5.1. *Ортогональное дополнение любого подпространства евклидова пространства само является подпространством.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $F \subset E$ — подпространство, а $F^{\perp}$ — его ортогональное дополнение. Чтобы $F^{\perp}$ было подпространством E, необходимо и достаточно, чтобы сумма любых двух векторов из $F^{\perp}$ снова была вектором из $F^{\perp}$ и произведение числа на вектор из $F^{\perp}$ снова принадлежало $F^{\perp}$ (см. теорему 8.1.1). Пусть, например, $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in F^{\perp}$ — произвольные векторы. Тогда для них выполняются соотношения:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \quad (\mathbf{x}, \mathbf{z}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in F.$$

Складывая эти равенства, а затем умножая первое из них на число $\lambda \in \mathbb{R}$, получим

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{0}, \quad (\mathbf{x}, \lambda \mathbf{y}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{F},$$

откуда следует, что $\mathbf{y} + \mathbf{z} \in F^{\perp}$ и $\lambda \mathbf{y} \in F^{\perp}$.

Теорема 9.5.2. *Для любого подпространства F евклидова пространства E_n все пространство представимо в виде прямой суммы:*

$$E_n = F \oplus F^{\perp}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем какой-нибудь ортонормированный базис $\underline{\mathbf{f}}' = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_r)$ подпространства F и дополним его до ортонормированного базиса $\underline{\mathbf{f}} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_r, \mathbf{f}_{r+1}, \mathbf{f}_{r+2}, \ldots, \mathbf{f}_n)$ всего пространства E_n (это можно сделать, сначала дополняя $\underline{\mathbf{f}}'$ до какого-нибудь базиса, а затем применяя процесс ортогонализации). Тогда все векторы $\mathbf{f}_{r+1}$, $\mathbf{f}_{r+2}$, $\ldots$, $\mathbf{f}_n$ ортогональны каждому из векторов базиса $\underline{\mathbf{f}}' = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_r)$, а значит, и любой их линейной комбинации, т. е. любому вектору из подпространства F. Стало быть все векторы $\mathbf{f}_{r+1}$, $\mathbf{f}_{r+2}$, $\ldots$, $\mathbf{f}_n$ принадлежат ортогональному дополнению $F^{\perp}$. Тогда каждый вектор $\mathbf{x} \in \mathbf{E_n}$ можно представить в виде

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{f}_1 + x_2 \mathbf{f}_2 + \ldots + x_r \mathbf{f}_r + x_{r+1} \mathbf{f}_{r+1} + \ldots + x_n \mathbf{f}_n = \mathbf{x}' + \mathbf{x}'',$$

где $\mathbf{x}' = x_1 \mathbf{f}_1 + x_2 \mathbf{f}_2 + \ldots + x_r \mathbf{f}_r \in F$, $\mathbf{x}'' = x_{r+1} \mathbf{f}_{r+1} + \ldots + x_n \mathbf{f}_n \in F^{\perp}$. Это доказывает, что $L_n = F + F^{\perp}$. А так как пересечение $F \cap F^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$, то эта сумма — прямая, т. е. $E_n = F \oplus F^{\perp}$.

Следствие 9.5.1. *Сумма размерностей подпространства евклидова пространства и его ортогонального дополнения равна размерности всего пространства:*

$$\dim F + \dim F^{\perp} = \dim E_n.$$

Доказательство. Пусть $r = \dim F$. Достаточно показать, что система векторов $\mathbf{f}_{r+1}$, $\mathbf{f}_{r+2}$, $\ldots$, $\mathbf{f}_n$ из доказательства теоремы 9.5.2 образует базис подпространства $F^{\perp}$. Действительно, из доказательства теоремы следует, что эти векторы линейно независимы и все принадлежат $F^{\perp}$. Покажем, что любой вектор $\mathbf{x} \in F^{\perp}$ есть линейная комбинация векторов данной системы. Так как $\mathbf{x} \in F^{\perp}$ является одновременно вектором самого пространства E_n, то он разлагается по ортонормированному базису $\underline{\mathbf{f}}$:

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{f}_1 + x_2\mathbf{f}_2 + \ldots + x_r\mathbf{f}_r + x_{r+1}\mathbf{f}_{r+1} + \ldots + x_n\mathbf{f}_n.$$

Умножим скалярно это равенство на векторы $\mathbf{f}_i \in F$, где $i = 1, 2, \ldots, r$. Тогда получим

$$0 = (\mathbf{x}, \mathbf{f}_i) = x_i(\mathbf{f}_i, \mathbf{f_i}) = \mathbf{x_i}, \quad \mathbf{i = 1, 2, \ldots, r}.$$

Отсюда следует, что все r первых координат вектора $\mathbf{x}$ равны нулю, стало быть,

$$\mathbf{x} = x_{r+1}\mathbf{f}_{r+1} + \ldots + x_n\mathbf{f}_n.$$

Глава 10

Линейные операторы

В настоящей главе рассматривается понятие оператора, являющегося отображением одного линейного пространства в другое. При этом основное внимание уделяется изучению так называемых линейных операторов (или линейных преобразований). Однако прежде чем вводить точные определения, приведем некоторые примеры.

Пример 10.0.2. *Рассмотрим линейное пространство* $C^1[a,b]$ *всех функций, имеющих непрерывную производную на промежутке* $[a,b]$. *Сопоставим каждой функции* $\mathbf{f} = f(t)$ *ее производную* $\mathbf{f}' = f'(t)$. *Обозначим это отображение в виде:* $\mathcal{D}\colon C^1[a,b] \to C[a,b]$; $\mathbf{f}' = \mathcal{D}(\mathbf{f})$. *Из правил дифференцирования вытекают следующие свойства отображения* $\mathcal{D}$:

1. $\mathcal{D}(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2) = \mathcal{D}(\mathbf{f}_1) + \mathcal{D}(\mathbf{f}_2)$.

2. $\mathcal{D}(\lambda\mathbf{f}) = \lambda\mathcal{D}(\mathbf{f})$.

Пример 10.0.3. *Рассмотрим множество векторов на плоскости и осуществим поворот* Φ *плоскости на угол* φ *вокруг неподвижной точки. Обозначим через* $\mathbf{x}$ *— произвольный вектор плоскости, а через* $\mathbf{y}$ *— его образ при повороте:* $\mathbf{y} = \Phi(\mathbf{x})$. *Очевидно, поворот плоскости вокруг неподвижной точки обладает следующими свойствами:*

1. $\Phi(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \Phi(\mathbf{x}_1) + \Phi(\mathbf{x}_2) = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$.

2. $\Phi(\lambda\mathbf{x}) = \lambda\Phi(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{y}$.

Эти свойства удобно продемонстрировать графически (рис. 9.1):

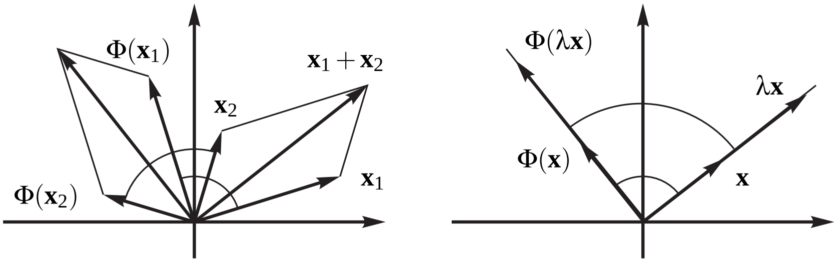


Рис. 9.1

В обоих примерах отображения обладали одинаковыми свойствами: образ суммы любых двух векторов заданного пространства равнялся сумме их образов, и образ произведения вектора на любое число был равен произведению этого числа на образ вектора. Именно эти свойства, называемые свойствами линейности, положены в основу определения линейных операторов.

§ 10.1. Определение и примеры линейных операторов

Пусть L и L' — линейные пространства над полем чисел K.

Определение 10.1.1. *Оператором $\mathcal{A}$, действующим из L в L', называется отображение $\mathcal{A}\colon L \to L'$, областью определения и множеством значений которого являются линейные пространства.*

Для обозначения оператора будем употреблять заглавные буквы, напечатанные курсивом, опуская при этом скобки там, где это не вызывает недоразумений:

$$\mathbf{y} = \mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}\mathbf{x}.$$

Как и раньше, вектор $\mathbf{y} \in L'$ называется образом вектора $\mathbf{x} \in L$, а $\mathbf{x}$ — прообразом $\mathbf{y}$.

Определение 10.1.2. *Оператор $\mathcal{A}$ называется линейным, если выполняются два условия:*

1) $\mathcal{A}(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2) = \mathcal{A}\mathbf{x}_1 + \mathcal{A}\mathbf{x}_2$ — образ суммы любых двух векторов из L равен сумме образов этих векторов,

2) $\mathcal{A}(\lambda\mathbf{x}) = \lambda\mathcal{A}\mathbf{x}$ — образ произведения вектора $\mathbf{x} \in L$ на любое число $\lambda \in K$ равен произведению этого числа на образ вектора $\mathbf{x}$.

Отметим некоторые свойства линейного оператора, которые непосредственно вытекают из его определения.

Свойство 10.1.1. *Линейный оператор переводит нулевой вектор пространства L в нулевой вектор пространства L', т. е.* $\mathcal{A}\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Доказательство. Действительно, возьмем $\lambda = 0$ и используем условие 2) определения 10.1.2. Получим

$$\mathcal{A}\mathbf{0} = \mathcal{A}(0 \cdot \mathbf{x}) = 0 \cdot \mathcal{A}\mathbf{x} = 0 \cdot \mathbf{y} = \mathbf{0}.$$

Свойство 10.1.2. *Линейный оператор любую линейную комбинацию векторов* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m \in L$ *переводит в линейную комбинацию образов этих векторов в* L' *с теми же коэффициентами, т. е.*

$$\mathcal{A}(\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \alpha_m\mathbf{x}_m) = \alpha_1\mathcal{A}\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathcal{A}\mathbf{x}_2 + \ldots + \alpha_m\mathcal{A}\mathbf{x}_m.$$

Доказательство. Используя последовательно условия 1) и 2) определения 10.1.2, имеем:

$$\begin{aligned}&\mathcal{A}(\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \alpha_m\mathbf{x}_m) = \\ &\qquad = \mathcal{A}(\alpha_1\mathbf{x}_1) + \mathcal{A}(\alpha_2\mathbf{x}_2) + \ldots + \mathcal{A}(\alpha_m\mathbf{x}_m) = \\ &\qquad\qquad = \alpha_1\mathcal{A}\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathcal{A}\mathbf{x}_2 + \ldots + \alpha_m\mathcal{A}\mathbf{x}_m.\end{aligned}$$

Следствие 10.1.1. *Множество образов* $\mathcal{A}(L) = \{\mathcal{A}\mathbf{x} :\ \mathbf{x} \in L\}$ *линейного оператора* $\mathcal{A}$ *образует линейное пространство, которое является подпространством* L'. *Это подпространство называется пространством образов.*

Докажите это следствие в качестве упражнения.

Замечание 10.1.1. *Линейный оператор* $\mathcal{A} : L \to L$, *действующий из линейного пространства L в себя, называется* линейным преобразованием.

В дальнейшем будем рассматривать только линейные преобразования, но термин «оператор» сохраним.

Приведем некоторые примеры линейных операторов:

1. Нулевой оператор: каждому вектору $\mathbf{x} \in L$ ставится в соответствие нулевой вектор этого же пространства. Обозначается нулевой оператор символом $\mathcal{O}$.

$$\mathcal{O}\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{x} \in L.$$

2. Тождественный оператор $\mathcal{E}$: каждому вектору $\mathbf{x} \in L$ ставится в соответствие этот же вектор

$$\mathcal{E}\mathbf{x} = \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in L.$$

3. Оператор $\mathcal{P}$ проектирования в подпространство: пусть L_n — n-мерное линейное пространство; каждому вектору $\mathbf{x} \in L_n$ с координатным столбцом $(x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)^T$ ставится в соответствие вектор $\mathbf{y} = \mathcal{P}\mathbf{x} \in L_n$ с координатным столбцом $(x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)^T$ в некотором базисе пространства L_n. Очевидно, множеством значений этого оператора является линейное подпространство $L_k \subset L_n$, заданное в том же базисе системой уравнений:

$$\begin{cases} x_{k+1} = 0; \\ \ldots \\ x_n = 0. \end{cases}$$

В частности, примером оператора проектирования является ортогональное проектирование пространства V_3 всех геометрических векторов на плоскость xOy

$$\forall \vec{\mathbf{x}} = (x, y, z) \in V_3 \; \mapsto \; \mathcal{P}\vec{\mathbf{x}} = (x, y, 0) \in xOy$$

4. Оператор подобия Λ: для некоторого $\lambda \in K$

$$\Lambda \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in L.$$

5. Если в n-мерном линейном пространстве L_n зафиксирован некоторый базис $\underline{\mathbf{e}}$, то каждая квадратная матрица $A = (a_{ij})_{n \times n}$ однозначно определяет линейный оператор $\mathcal{A}$ следующим равенством:

$$\mathcal{A}\mathbf{x} = \underline{\mathbf{e}} \cdot (A\overline{\mathbf{x}}). \tag{10.1.1}$$

То есть образом вектора $\mathbf{x} \in L_n$ является вектор $\mathbf{y} \in L_n$, координатным столбцом которого является столбец $A\overline{\mathbf{x}}$. Будем говорить, что *оператор $\mathcal{A}$ определяется матрицей A.*

Замечание 10.1.2. *Все перечисленные операторы являются линейными.*

Доказательство. Действительно,

$$\mathcal{O}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathcal{O}\mathbf{x} + \mathcal{O}\mathbf{y},$$
$$\mathcal{O}(\lambda \mathbf{x}) = \mathbf{0} = \lambda \mathbf{0} = \lambda \mathcal{O}\mathbf{x}.$$

Таким образом, нулевой оператор удовлетворяет определению линейности. Проверим свойство линейности оператора $\mathcal{A}$, определяемого матрицей A (см. (10.1.1)):

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2) &= \underline{\mathbf{e}} \cdot (A(\lambda_1 \overline{\mathbf{x}}_1 + \lambda_2 \overline{\mathbf{x}}_2)) = \\ &= \underline{\mathbf{e}} \cdot (A(\lambda_1 \overline{\mathbf{x}}_1)) + \underline{\mathbf{e}} \cdot (A(\lambda_2 \overline{\mathbf{x}}_2)) = \lambda_1 \underline{\mathbf{e}} \cdot (A\overline{\mathbf{x}}_1) + \lambda_2 \underline{\mathbf{e}} \cdot (A\overline{\mathbf{x}}_2) = \\ &= \lambda_1 \mathcal{A}\mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathcal{A}\mathbf{x}_2. \end{aligned}$$

Здесь неоднократно использовались свойства матричного умножения. Таким образом, для оператора $\mathcal{A}$ доказано свойство

$$\mathcal{A}(\lambda_1\mathbf{x}_1+\lambda_2\mathbf{x}_2)=\lambda_1\mathcal{A}\mathbf{x}_1+\lambda_2\mathcal{A}\mathbf{x}_2, \qquad (10.1.2)$$

из которого свойства 1), 2) в определении 10.1.2 вытекают как частные случаи. Линейность других операторов проверяется аналогично.

Линейные операторы поворота и дифференцирования были рассмотрены в начале главы.

§ 10.2. Матрица линейного оператора

10.2.1. Определение матрицы линейного оператора

Пусть линейный оператор $\mathcal{A}$ действует в n-мерном линейном пространстве L_n и $\underline{\mathbf{e}}=(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_n)$ — некоторый базис этого пространства. Возьмем произвольный вектор $\mathbf{x}\in L_n$, разложим его по базису $\underline{\mathbf{e}}$

$$\mathbf{x}=x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+\ldots+x_n\mathbf{e}_n=\underline{\mathbf{e}}\cdot\overline{\mathbf{x}}$$

и найдем образ вектора $\mathbf{x}$ при действии на него оператора $\mathcal{A}$. В силу линейности $\mathcal{A}$ справедливы следующие равенства:

$$\mathbf{y}=\mathcal{A}\mathbf{x}=x_1\mathcal{A}\mathbf{e}_1+x_2\mathcal{A}\mathbf{e}_2+\ldots+x_n\mathcal{A}\mathbf{e}_n=\mathcal{A}(\underline{\mathbf{e}})\cdot\overline{\mathbf{x}}, \qquad (10.2.1)$$

где в правой части используется операция умножения символической строки

$$\mathcal{A}(\underline{\mathbf{e}})=(\mathcal{A}\mathbf{e}_1,\mathcal{A}\mathbf{e}_2,\ldots,\mathcal{A}\mathbf{e}_n)$$

на столбец $\overline{\mathbf{x}}$. Равенство (10.2.1) показывает, что образ любого вектора $\mathbf{x}$ есть линейная комбинация образов базисных векторов, причем коэффициентами этой линейной комбинации являются координаты вектора $\mathbf{x}$ в заданном базисе. Таким образом, чтобы задать линейный оператор, нужно задать его действие только на базисные векторы.

Так как оператор $\mathcal{A}$, по предположению, действует из пространства L_n в себя, то образы базисных векторов также принадлежат L_n, и их можно разложить по базису $\underline{\mathbf{e}}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}\mathbf{e}_1&=a_{11}\mathbf{e}_1+a_{21}\mathbf{e}_2+\ldots+a_{n1}\mathbf{e}_n;\\
\mathcal{A}\mathbf{e}_2&=a_{12}\mathbf{e}_1+a_{22}\mathbf{e}_2+\ldots+a_{n2}\mathbf{e}_n;\\
&\ldots\\
\mathcal{A}\mathbf{e}_n&=a_{1n}\mathbf{e}_1+a_{2n}\mathbf{e}_2+\ldots+a_{nn}\mathbf{e}_n.
\end{aligned} \qquad (10.2.2)$$

В матричной форме эту систему равенств можно переписать короче:

$$\mathcal{A}(\underline{\mathbf{e}})=\underline{\mathbf{e}}\cdot A, \qquad (10.2.3)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (10.2.4)$$

Определение 10.2.1. Матрицей линейного оператора *называется матрица,* столбцами которой являются координатные столбцы образов базисных векторов $\mathcal{A}\,\mathbf{e}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *в базисе* $\underline{\mathbf{e}} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$.

Следовательно, задание базиса n-мерного линейного пространства позволяет каждому линейному оператору, действующему в этом пространстве, поставить в соответствие (притом однозначно) его матрицу — квадратную матрицу порядка n. Справедливо и обратное: любую квадратную матрицу порядка n можно рассматривать как матрицу некоторого линейного оператора в заданном базисе. Действительно, этот оператор можно задать с помощью формул (10.2.1)–(10.2.3), отправляясь от заданной матрицы (10.2.4).

10.2.2. Связь между координатами образа и прообраза при действии линейного оператора

Пусть в линейном пространстве L_n действует линейный оператор $\mathcal{A}$ и пусть $\mathcal{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Выберем в L_n некоторый базис $\underline{\mathbf{e}} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$, сопоставим оператору его матрицу A (10.2.4), а векторы $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ разложим по базису

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n = \underline{\mathbf{e}} \cdot \overline{\mathbf{x}}, \quad \overline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + \ldots + y_n\mathbf{e}_n = \underline{\mathbf{e}} \cdot \overline{\mathbf{y}}, \quad \overline{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Найдем связь между координатными столбцами $\overline{\mathbf{x}}$ и $\overline{\mathbf{y}}$ вектора $\mathbf{x}$ и его образа $\mathbf{y}$. Запишем цепочку равенств

$$\mathbf{y} = \mathcal{A}\,\mathbf{x} = \mathcal{A}\,(\underline{\mathbf{e}} \cdot \overline{\mathbf{x}}) = \mathcal{A}\,(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n) =$$
$$= x_1\mathcal{A}\,\mathbf{e}_1 + x_2\mathcal{A}\,\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathcal{A}\,\mathbf{e}_n = \mathcal{A}\,(\underline{\mathbf{e}}) \cdot \overline{\mathbf{x}} = (\underline{\mathbf{e}}A) \cdot \overline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{e}} \cdot (A\overline{\mathbf{x}}).$$

С другой стороны $\mathbf{y} = \underline{\mathbf{e}} \cdot \overline{\mathbf{y}}$. В силу единственности разложения вектора по базису имеем

$$\overline{\mathbf{y}} = A \cdot \overline{\mathbf{x}} \iff \overline{\mathcal{A}\,\mathbf{x}} = A \cdot \overline{\mathbf{x}}. \qquad (10.2.5)$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема 10.2.1. *Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор в линейном пространстве L_n и $\mathcal{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Если $\overline{\mathbf{x}}$ и $\overline{\mathbf{y}}$ — координатные столбцы векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ в некотором базисе пространства L_n, то они связаны равенством* (10.2.5), *где A — матрица оператора $\mathcal{A}$ в том же базисе.*

Замечание 10.2.1. *Справедливо и утверждение, в некотором смысле обратное теореме 10.2.1: пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор в линейном пространстве L_n, $\mathcal{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$, $\overline{\mathbf{x}}$, $\overline{\mathbf{y}}$ — координатные столбцы векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ в некотором базисе пространства L_n; тогда если равенство*

$$\overline{\mathbf{y}} = A' \cdot \overline{\mathbf{x}} \tag{10.2.6}$$

выполняется для любых векторов $\mathbf{x} \in L_n$, то матрица A' совпадает с матрицей A оператора $\mathcal{A}$ в данном базисе, т. е.

$$\overline{\mathbf{y}} = A' \cdot \overline{\mathbf{x}} \quad \forall \mathbf{x} \in L_n \implies A' = A. \tag{10.2.7}$$

Доказательство. Заметим прежде всего, что базисные векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\ldots$, $\mathbf{e}_n$ имеют соответственно координатные столбцы:

$$\overline{\mathbf{e}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{\mathbf{e}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \overline{\mathbf{e}}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{10.2.8}$$

Тогда, подставляя в равенство (10.2.6) вместо вектора $\mathbf{x}$ поочередно базисные векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\ldots$, $\mathbf{e}_n$, получим в левой части (10.2.6) координатные столбцы образов базисных векторов:

$$\mathcal{A}\mathbf{e}_1, \quad \mathcal{A}\mathbf{e}_2, \quad \ldots, \quad \mathcal{A}\mathbf{e}_n,$$

а в правой части (10.2.6) — столбцы матрицы A'. Это и означает, что матрица A' совпадает с матрицей оператора $\mathcal{A}$.

10.2.3. Примеры матриц линейных операторов

Рассмотрим линейное пространство L_n, выберем в нем некоторый базис $\underline{\mathbf{e}} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ и найдем матрицы линейных операторов, рассмотренных в § 10.1.

1. Нулевому оператору соответствует нулевая матрица. Действительно, заметим прежде всего, что нулевой вектор в любом базисе имеет нулевой координатный столбец. Далее, по определению нулевого оператора имеем:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}\mathbf{e}_1 &= 0\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 + \ldots + 0\mathbf{e}_n; \\ \mathcal{O}\mathbf{e}_2 &= 0\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 + \ldots + 0\mathbf{e}_n; \\ &\ldots \\ \mathcal{O}\mathbf{e}_n &= 0\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 + \ldots + 0\mathbf{e}_n. \end{aligned} \tag{10.2.9}$$

Следовательно, матрицей оператора $\mathcal{O}$ является нулевая матрица (матрица, составленная из координатных столбцов образов базисных векторов (10.2.9)):

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \tag{10.2.10}$$

2. Тождественному оператору соответствует единичная матрица. По определению тождественного оператора $\mathcal{E}\mathbf{x} = \mathbf{x}$ для $\forall \mathbf{x} \in L_n$, т. е.

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\mathbf{e}_1 &= 1\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 + \ldots + 0\mathbf{e}_n; \\ \mathcal{E}\mathbf{e}_2 &= 0\mathbf{e}_1 + 1\mathbf{e}_2 + \ldots + 0\mathbf{e}_n; \\ &\ldots \\ \mathcal{E}\mathbf{e}_n &= 0\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 + \ldots + 1\mathbf{e}_n. \end{aligned} \tag{10.2.11}$$

Следовательно, матрицей оператора $\mathcal{E}$ является матрица

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \tag{10.2.12}$$

3. Найдем матрицу оператора проектирования $\mathcal{P}\mathbf{x} = \mathbf{y}$, где векторы $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in L_n$ определяются своими координатными столбцами в некотором базисе $\underline{\mathbf{e}} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ пространства L_n:

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{x}} &= (x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)^T, \\ \overline{\mathbf{y}} &= (x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)^T. \end{aligned}$$

Рассмотрим действие оператора на базисные векторы:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\mathbf{e}_1 &= \mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0, 0, \ldots, 0); \\ \mathcal{P}\mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0, 0, \ldots, 0); \\ &\ldots \\ \mathcal{P}\mathbf{e}_k &= \mathbf{e}_k = (0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0); \\ \mathcal{P}\mathbf{e}_{k+1} &= \mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0, 0, \ldots, 0); \\ &\ldots \\ \mathcal{P}\mathbf{e}_n &= \mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0, 0, \ldots, 0). \end{aligned}$$

Следовательно, оператору $\mathcal{P}$ соответствует матрица

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \tag{10.2.13}$$

В частности, для оператора проектирования пространства V_3 геометрических векторов на плоскость xOy (рис. 9.2) имеем:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

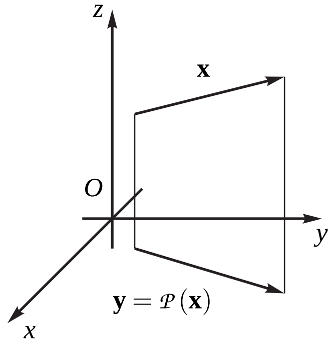


Рис. 9.2

4. Аналогично можно показать, что оператору подобия Λ соответствует диагональная матрица

$$\Lambda\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \implies \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}. \tag{10.2.14}$$

5. Если оператор $\mathcal{A}$ определяется матрицей A в соответствии с равенством (10.1.1), то, подставляя в (10.1.1) вместо вектора $\mathbf{x}$ поочередно базисные векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, …, $\mathbf{e}_n$ и принимая во внимание равенства (10.2.8), увидим, что столбцы матрицы A как раз и являются координатными столбцами векторов

$$\mathcal{A}\mathbf{e}_1, \quad \mathcal{A}\mathbf{e}_2, \quad \dots, \quad \mathcal{A}\mathbf{e}_n.$$

А это означает, что матрицей оператора $\mathcal{A}$, определяемого матрицей A в соответствии с равенством (10.1.1), является сама матрица A.

Упражнение 10.2.1. *Покажите, что матрица оператора поворота пространства V_3 геометрических векторов на угол φ вокруг неподвижной оси Oz в декартовом базисе $(\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}})$ имеет вид*

$$\Phi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Упражнение 10.2.2. *Покажите, что матрица оператора дифференцирования $\mathcal{D}$, действующего в пространстве M_3 многочленов, степень которых не превышает 3, в базисе 1, t, t^2, t^3 имеет вид*

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

10.2.4. Изменение матрицы линейного оператора при замене базиса линейного пространства

Пусть линейный оператор $\mathcal{A}$ действует в линейном пространстве L_n. Выберем в L_n два базиса: «старый» $\underline{\mathbf{e}} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ и «новый» $\underline{\mathbf{e}}' = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n)$, причем $\underline{\mathbf{e}}' = \underline{\mathbf{e}} \cdot S$, где S матрица перехода от базиса $\underline{\mathbf{e}}$ к базису $\underline{\mathbf{e}}'$. Обозначим координатные столбцы векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ через $\overline{\mathbf{x}}$, $\overline{\mathbf{y}}$ в базисе $\underline{\mathbf{e}}$ и через $\overline{\mathbf{x}}'$, $\overline{\mathbf{y}}'$ — в базисе $\underline{\mathbf{e}}'$. Тогда в силу (8.2.23) справедливы соотношения:

$$\overline{\mathbf{x}} = S\overline{\mathbf{x}}', \quad \overline{\mathbf{y}} = S\overline{\mathbf{y}}'.$$

Обозначим через A и A' соответственно матрицы линейного оператора $\mathcal{A}$ в базисах $\underline{\mathbf{e}}$ и $\underline{\mathbf{e}}'$ и найдем связь между A и A'. Запишем цепочку равенств

$$\overline{\mathbf{y}}' = S^{-1}\overline{\mathbf{y}} = S^{-1}(A\overline{\mathbf{x}}) = (S^{-1}A)\overline{\mathbf{x}} = (S^{-1}A)S\overline{\mathbf{x}}' = (S^{-1}AS)\overline{\mathbf{x}}'.$$

С другой стороны, $\overline{\mathbf{y}}' = A'\overline{\mathbf{x}}'$. Сравнивая два последних равенства, найдем

$$A' = S^{-1}AS. \tag{10.2.15}$$

Полученное соотношение задает закон преобразования матрицы линейного оператора, действующего в линейном пространстве, при переходу к другому базису.

Определение 10.2.2. *Матрицы A и $A' = S^{-1}AS$, где S — невырожденная матрица, называются* подобными.

Пример 10.2.1. *Оператор $\mathcal{A}$, действующий в линейном пространстве L_3, в базисе $\underline{\mathbf{e}} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ задан матрицей*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу A' оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\underline{\mathbf{e}}' = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$, где $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}'_2 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$.

Решение. Запишем матрицу перехода S от базиса $\underline{\mathbf{e}}$ к базису $\underline{\mathbf{e}}'$:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу S^{-1}, обратную матрице перехода S

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Используя закон преобразования матрицы линейного оператора при замене базиса линейного пространства (10.2.15), найдем матрицу A' оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\underline{\mathbf{e}}'$:

$$A' = S^{-1}AS =$$
$$= \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -4 & -6 \\ -5 & 7 & 2 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -20 \\ 0 & 4 & -10 \\ -1 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

§ 10.3. Ранг оператора

Пусть в линейном пространстве L_n действует линейный оператор $\mathcal{A}$. Выберем в L_n базис $\underline{\mathbf{e}} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ и сопоставим оператору $\mathcal{A}$ его матрицу A. Матрица линейного оператора, как следует из предыдущего, зависит от выбора базиса. Однако некоторые ее характеристики не зависят от выбора базиса и потому отражают свойства самого оператора. Одной из важнейших характеристик любой матрицы является ее ранг. Пусть ранг матрицы A линейного оператора равен r. Очевидно, $r \leqslant n$. Так как по определению матрицы линейного оператора столбцами матрицы A являются координатные столбцы векторов $\mathcal{A}\mathbf{e}_1$, $\mathcal{A}\mathbf{e}_2$, $\ldots$, $\mathcal{A}\mathbf{e}_n$, заключаем, что среди них имеется максимально r линейно независимых. Пусть, например, это векторы $\mathcal{A}\mathbf{e}_1$, $\mathcal{A}\mathbf{e}_2$, $\ldots$, $\mathcal{A}\mathbf{e}_r$. С другой стороны, любой вектор $\mathbf{y}$ пространства образов линейного оператора $\mathcal{A}$ можно представить в виде (10.2.1)

$$\mathbf{y} = x_1\mathcal{A}\mathbf{e}_1 + x_2\mathcal{A}\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathcal{A}\mathbf{e}_n.$$

Отсюда видно,что пространство образов есть линейная оболочка векторов $\mathcal{A}\mathbf{e}_1$, $\mathcal{A}\mathbf{e}_2$, $\ldots$, $\mathcal{A}\mathbf{e}_n$. В п 8.2.6 мы установили, что размерность линейной оболочки системы векторов равна максимальному числу линейно независимых векторов этой системы. Следовательно, размерность пространства образов равна r. Таким образом, доказана следующая теорема

Теорема 10.3.1. *Ранг матрицы линейного оператора равен размерности пространства образов этого оператора.*

Следствие 10.3.1. *Ранг матрицы линейного оператора не зависит от выбора базиса линейного пространства.*

Доказательство. Действительно, ранг матрицы линейного оператора (в любом базисе) равен размерности пространства образов, которая от выбора базиса не зависит.

Определение 10.3.1. *Размерность пространства образов называется* рангом оператора.

Из теоремы 10.3.1 следует, что ранг оператора равен рангу его матрицы.

Определение 10.3.2. *Оператор называется* невырожденным, *если ранг оператора равен размерности пространства прообразов. Если ранг оператора меньше размерности пространства прообразов, то оператор называется* вырожденным.

Очевидно, матрица невырожденного оператора также невырожденная.

Следствие 10.3.2. *Подобные матрицы имеют одинаковые ранги.*

Доказательство. Матрицы A и A' называются подобными, если $A' = S^{-1}AS$, где S — невырожденная матрица. В этом случае матрицы A и A' можно рассматривать как матрицы некоторого линейного оператора в разных базисах. Следовательно, $\mathrm{Rang}\, A = \mathrm{Rang}\, A'$.

§ 10.4. Собственные векторы и инвариантные подпространства

10.4.1. Собственный вектор линейного оператора. Характеристическое уравнение

Пусть в линейном пространстве L над числовым полем K задан линейный оператор $\mathcal{A}$.

Определение 10.4.1. *Ненулевой вектор* $\mathbf{x}$ *называется* собственным вектором *линейного оператора* $\mathcal{A}$*, если существует число* λ *из числового поля* K *такое, что имеет место равенство*

$$\mathcal{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}. \tag{10.4.1}$$

Число λ *называется* собственным числом *(или* собственным значением*) линейного оператора. При этом говорят, что* собственный вектор $\mathbf{x}$ принадлежит собственному значению λ.

Если λ — действительное число, то равенство (10.4.1) имеет наглядную геометрическую интерпретацию: собственным вектором линейного оператора является тот вектор, образ которого коллинеарен самому вектору, т. е. при действии линейного оператора собственный вектор только растягивается или сжимается.

Пример 10.4.1. *Пусть линейный оператор* Φ *в пространстве* V_3 *задает поворот пространства вокруг оси* Oz *на угол* φ.

Очевидно, собственным вектором данного преобразования является любой вектор, лежащий на оси Oz *или коллинеарный ей, причем собственное число, которому принадлежит этот вектор, равно* 1.

Доказательство. Действительно, каждый такой вектор $\mathbf{x}$ при повороте остается неподвижным, то есть для него выполняется равенство:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x},$$

откуда и вытекает, что $\mathbf{x}$ является собственным для оператора Φ.

Естественно, возникают вопросы: каждый ли оператор имеет собственные векторы; если имеет, то как их найти; какими свойствами обладают собственные векторы, и т. д. Ответим сначала на первый вопрос о существовании собственных векторов. Имеет место следующая теорема.

Теорема 10.4.1. *В комплексном конечномерном линейном пространстве каждый линейный оператор имеет по крайней мере один собственный вектор.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор, действующий в n-мерном линейном пространстве L_n над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел, а $\mathbf{x}$ — искомый собственный вектор этого оператора, принадлежащий собственному числу λ, т. е. $\mathcal{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Выберем в L_n некоторый базис $\underline{\mathbf{e}} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ и сопоставим вектору $\mathbf{x}$ его координатный столбец $\overline{\mathbf{x}}$, а оператору $\mathcal{A}$ — его матрицу A

$$\overline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Записав соотношение (10.4.1) в координатной форме, получим

$$A\overline{\mathbf{x}} = \lambda\overline{\mathbf{x}} = \lambda E\overline{\mathbf{x}} \iff (A - \lambda E)\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{0}}. \qquad (10.4.2)$$

Или в подробной записи

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (10.4.3)$$

Следовательно, если собственный вектор существует, то его координаты должны удовлетворять однородной системе линейных алгебраических уравнений (10.4.2) или, что то же, (10.4.3). Так как собственный вектор $\mathbf{x}$

ненулевой, то для отыскания его нужно найти ненулевые решения системы, а они существуют тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы меньше числа неизвестных, т. е. $\mathrm{Rang}(A-\lambda E) < n$. Это условие эквивалентно следующему (см. п 2.4.2, следствие 2.4.1):

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (10.4.4)$$

Левая часть полученного равенства $\det(A-\lambda E) = P_n(\lambda)$ — многочлен степени n от λ — называется *характеристическим многочленом* оператора $\mathcal{A}$, а уравнение (10.4.4) — *характеристическим уравнением* оператора.

Таким образом доказано: *для того чтобы существовал собственный вектор оператора, необходимо (и достаточно!), чтобы соответствующее ему собственное число было корнем характеристического уравнения.*

Согласно основной теореме алгебры (в поле комплексных чисел всякий многочлен имеет по крайней мере один корень) уравнение (10.4.4) всегда имеет хотя бы одно решение, а значит, найдется $\lambda \in \mathbb{C}$, при котором система (10.4.3) имеет ненулевое решение, которое и определит собственный вектор оператора $\mathcal{A}$.

Из доказательства теоремы получаем следующий алгоритм для нахождения собственных векторов оператора:

1. Составим характеристический многочлен оператора: $P_n(\lambda) = \det(A-\lambda E)$ и найдем все его корни λ_k, которые являются собственными числами оператора.

2. Каждое из собственных чисел λ_k подставим вместо λ в систему (10.4.3) и найдем все ее линейно независимые решения, которые определяют собственные векторы, соответствующие собственному значению λ_k.

Из общей теории систем линейных уравнений вытекает (см. теорему 2.6.2), что число линейно независимых собственных векторов, соответствующих собственному числу λ_k, равно $n - r_k$, где n — размерность пространства, а $r_k = \mathrm{Rang}(A-\lambda_k E)$ (см. п 2.6.2).

Замечание 10.4.1. *Если оператор $\mathcal{A}$ задан в вещественном линейном пространстве, то характеристический многочлен может не иметь ни одного вещественного корня. Следовательно, в вещественном линейном пространстве оператор может не иметь собственных векторов.*

Пример 10.4.2. *Оператор $\mathcal{A}$ в пространстве L_3 задан матрицей*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найти все собственные числа и собственные векторы оператора.

Решение. Составим характеристическое уравнение оператора

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 4-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 4-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Вычислив определитель третьего порядка, стоящий в левой части равенства, получим кубическое уравнение для определения собственных значений оператора:

$$(5-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix}=0,$$

$$(5-\lambda)(\lambda^2-8\lambda+15)=0 \implies (5-\lambda)(\lambda-5)(\lambda-3)=0.$$

Отсюда найдем

$$\lambda_1=\lambda_2=5, \quad \lambda_3=3.$$

Запишем систему линейных алгебраических уравнений (10.4.3) для определения координат собственного вектора $\mathbf{x}$

$$\left\{\begin{aligned} (5-\lambda)x_1+\quad 0\cdot x_2+\quad 0\cdot x_3 &= 0, \\ x_1+(4-\lambda)x_2-\qquad x_3 &= 0, \\ x_1-\qquad x_2+(4-\lambda)x_3 &= 0. \end{aligned}\right. \tag{10.4.5}$$

Подставим в систему сначала $\lambda=5$ и решим ее методом Гаусса. Для этого запишем матрицу $(A-5E)$ системы и приведем ее к ступенчатому виду. Получим

$$A-5E=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $\operatorname{Rang}(A-5E)=1$, а число неизвестных $n=3$, то система имеет два линейно независимых решения. Для их нахождения имеем эквивалентную систему

$$x_1-x_2-x_3=0.$$

Отсюда $x_1=x_2+x_3$, и общее решение системы запишется в виде

$$\overline{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_2+x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=x_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{10.4.6}$$

Или

$$\overline{\mathbf{x}}=c_1\overline{\mathbf{x}}_1+c_2\overline{\mathbf{x}}_2, \quad \overline{\mathbf{x}}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{\mathbf{x}}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь $x_2=c_1$ и $x_3=c_2$ — произвольные постоянные, а решения $\overline{\mathbf{x}}_1$ и $\overline{\mathbf{x}}_2$, образующие фундаментальную систему решений, задают два линейно независимых собственных вектора оператора $\mathcal{A}$, принадлежащих собственному значению $\lambda = 5$. Равенство (10.4.6) определяет все множество собственных векторов оператора, принадлежащих собственному значению $\lambda = 5$.

Теперь найдем собственные векторы, принадлежащие собственному значению $\lambda = 3$. Подставим $\lambda = 3$ в систему (10.4.5) и приведем матрицу $A - 3E$ к ступенчатому виду. Имеем

$$A - 3E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, $\mathrm{Rang}(A - 3E) = 2$, а число неизвестных $n = 3$ и, следовательно, решение системы зависит от одного параметра. Решив систему методом Гаусса, найдем $x_1 = 0$, $x_2 = x_3 = c$. Таким образом,

$$\overline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overline{\mathbf{x}} = c\overline{\mathbf{x}}_3, \quad \overline{\mathbf{x}}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad (10.4.7)$$

Здесь $\overline{\mathbf{x}}_3$ — единственный линейно независимый собственный вектор оператора $\mathcal{A}$, принадлежащий собственному значению $\lambda = 3$. Равенства (10.4.7) задают все множество собственных векторов оператора, принадлежащих собственному значению $\lambda = 3$.

ПРИМЕР 10.4.3. *Найти все собственные числа и собственные векторы линейного оператора $\mathcal{A}$, заданного в вещественном линейном пространстве L_2 матрицей*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

РЕШЕНИЕ. Составим характеристическое уравнение оператора

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -7 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \implies \lambda^2 - 5\lambda + 25 = 0.$$

Очевидно, полученное квадратное уравнение не имеет вещественных корней, так как его дискриминант меньше нуля: $D = -75$. Следовательно, заданный оператор в вещественном линейном пространстве не имеет собственных векторов.

ЗАМЕЧАНИЕ 10.4.2. *При нахождении собственных чисел и собственных векторов линейного оператора $\mathcal{A}$ мы оперировали с матрицей оператора A в некотором базисе. Поэтому могло сложиться впечатление, что* *понятия собственного вектора, собственного значения, характеристического многочлена относятся к матрице A, а не к оператору, и при замене базиса могут измениться. Следующая теорема показывает, что это не так.*

Теорема 10.4.2. *Характеристический многочлен линейного оператора не зависит от выбора базиса или, как говорят, является* инвариантом.

Доказательство. Пусть A' — матрица оператора $\mathcal{A}$ в некотором новом базисе $\underline{\mathbf{e}}'$. Тогда матрицы A и A' связаны соотношением: $A' = S^{-1}AS$, где S — матрица перехода от старого базиса $\underline{\mathbf{e}}$ к новому $\underline{\mathbf{e}}'$. Обозначим $P_{\underline{\mathbf{e}}}(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ характеристический многочлен оператора $\mathcal{A}$ в старом базисе. Тогда характеристический многочлен в новом базисе равен

$$\begin{aligned} P_{\underline{\mathbf{e}}'}(\lambda) &= \det(A' - \lambda E) = \det(S^{-1}AS - \lambda E) = \\ &= \det(S^{-1}AS - S^{-1}\lambda E S) = \det(S^{-1}(A - \lambda E)S) = \\ &= \det(S^{-1})\det(A - \lambda E)\det(S) = \det(A - \lambda E) = P_{\underline{\mathbf{e}}}(\lambda). \end{aligned}$$

Из доказанной теоремы вытекает, что инвариантами линейного оператора являются коэффициенты его характеристического многочлена. В следующем примере эти коэффициенты вычисляются для случая трехмерного пространства.

Пример 10.4.4. *Пусть линейный оператор $\mathcal{A}$ задан в некотором базисе линейного пространства L_3 матрицей*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Найдем выражение для коэффициентов характеристического многочлена $P(\lambda) = \det(A - \lambda E)$.

Решение. Искомый характеристический многочлен является многочленом третьей степени:

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = \\ = -\lambda^3 + b_1\lambda^2 + b_2\lambda + b_3.$$

При этом свободный член его равен $b_3 = P(0) = \det A$, а другие коэффициенты получаются после развертывания определителя $\det(A - \lambda E)$, группировки слагаемых по степеням λ и приведения подобных членов:

$$P(\lambda) = (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)(a_{33}-\lambda) + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} -$$
$$- a_{31}(a_{22}-\lambda)a_{13} - a_{21}a_{12}(a_{33}-\lambda) - a_{32}a_{23}(a_{11}-\lambda) =$$
$$= -\lambda^3 + (a_{11}+a_{22}+a_{33})\lambda^2 -$$
$$-(a_{22}a_{33}+a_{11}a_{33}+a_{11}a_{22}-a_{23}a_{32}-a_{13}a_{31}-a_{12}a_{21})\lambda + \det A.$$

Замечая, что коэффициент при первой степени λ можно представить в виде

$$(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}) + (a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31}) + (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}) =$$
$$= \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = A_{11} + A_{22} + A_{33},$$

получаем следующий результат: *характеристический многочлен оператора $\mathcal{A}$ в трехмерном пространстве имеет вид:*

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda E) = -\lambda^3 + J_1\lambda^2 - J_2\lambda + J_3, \tag{10.4.8}$$

где коэффициенты J_1, J_2, J_3 (инварианты линейного оператора, не зависящие от выбора базиса) выражаются равенствами: $J_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33}$ — сумма диагональных элементов матрицы (след оператора), $J_2 = A_{11} + A_{22} + A_{33}$ — сумма алгебраических дополнений диагональных элементов, $J_3 = \det A$ — определитель матрицы.

10.4.2. Свойства собственных чисел и собственных векторов линейного оператора

Сформулируем и докажем некоторые свойства собственных чисел и собственных векторов линейного оператора, которые будут использованы в дальнейшем.

Свойство 10.4.1. *Любому собственному вектору соответствует единственное собственное значение.*

Доказательство. Предположим противное: пусть собственному вектору $\mathbf{x}$ оператора $\mathcal{A}$ соответствуют два различных собственных значения, т. е.

$$\mathcal{A}\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{x}, \quad \mathcal{A}\mathbf{x} = \lambda_2\mathbf{x}.$$

Вычитая второе равенство из первого, получим

$$\lambda_1\mathbf{x} - \lambda_2\mathbf{x} = \mathbf{0} \implies (\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Так как вектор $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, то $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$, откуда следует, что $\lambda_1 = \lambda_2$, что и доказывает справедливость свойства.

Свойство 10.4.2. *Если* $\mathbf{x}_1$ *и* $\mathbf{x}_2$ *— собственные векторы линейного оператора* $\mathcal{A}$*, принадлежащие одному и тому же собственному значению* λ*, то их сумма* $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ *— собственный вектор оператора, принадлежащий тому же* λ*.*

Доказательство. Запишем следующую цепочку равенств, используя линейность оператора и определение собственного вектора

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \mathcal{A}\mathbf{x}_1 + \mathcal{A}\mathbf{x}_2 = \lambda\mathbf{x}_1 + \lambda\mathbf{x}_2 = \lambda(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2).$$

Таким образом, $\mathcal{A}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \lambda(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)$, откуда следует справедливость утверждения.

Свойство 10.4.3. *Если* $\mathbf{x}$ *— собственный вектор оператора* $\mathcal{A}$*, принадлежащий собственному числу* λ*, то для* $\forall\alpha$ *вектор* $\mathbf{y} = \alpha\mathbf{x}$ *— также собственный вектор оператора, принадлежащий тому же собственному числу.*

Доказательство. Аналогично доказательству свойства 10.4.2

$$\mathcal{A}\mathbf{y} = \mathcal{A}(\alpha\mathbf{x}) = \alpha\mathcal{A}\mathbf{x} = \alpha(\lambda\mathbf{x}) = \lambda(\alpha\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{y}.$$

Следовательно, $\mathcal{A}\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y}$, что и требовалось доказать.

Следствие 10.4.1. *Из свойств 10.4.1 и 10.4.2 следует, что множество собственных векторов линейного оператора, принадлежащих одному и тому же собственному значению, вместе с нуль-вектором образует линейное пространство.*

Так, в примере 10.4.2 множество собственных векторов линейного оператора, принадлежащих собственному значению $\lambda = 5$, образует двумерное линейное пространство, базисом которого служат линейно независимые собственные векторы $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ с координатными столбцами

$$\overline{\mathbf{x}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{\mathbf{x}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Множество собственных векторов линейного оператора, принадлежащих собственному значению $\lambda = 3$, образует одномерное линейное пространство с базисом $\mathbf{x}_3$, где $\overline{\mathbf{x}}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Читателю предлагается доказать следствие 10.4.1 в качестве упражнения.

Свойство 10.4.4. *Собственные векторы* $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\ldots$, $\mathbf{x}_m$ *оператора* $\mathcal{A}$, *принадлежащие попарно различным собственным значениям* λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_m, $(\lambda_i \neq \lambda_j, i \neq j)$, *линейно независимы.*

Доказательство проведем методом математической индукции. Для одного вектора утверждение очевидно, так как один ненулевой вектор $\mathbf{x}_1$ всегда образует линейно независимую систему: равенство $\alpha\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$ возможно только при $\alpha = 0$. Пусть утверждение справедливо для k собственных векторов $(k < n)$, т. е. собственные векторы $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\ldots$, $\mathbf{x}_k$, принадлежащие попарно различным собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, линейно независимы. Докажем справедливость данного свойства для $(k+1)$ собственного вектора. Для этого запишем равенство

$$\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \alpha_k\mathbf{x}_k + \alpha_{k+1}\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{0} \qquad (10.4.9)$$

и докажем, что в нем все коэффициенты α_i $(i = 1, 2, \ldots, k+1)$ равны нулю. Сначала подействуем на равенство (10.4.9) оператором $\mathcal{A}$. Получим

$$\alpha_1\mathcal{A}\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathcal{A}\mathbf{x}_2 + \ldots + \alpha_k\mathcal{A}\mathbf{x}_k + \alpha_{k+1}\mathcal{A}\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{0}.$$

Так как $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\ldots$, $\mathbf{x}_{k+1}$ — собственные векторы оператора $\mathcal{A}$, то $\mathcal{A}\mathbf{x}_i = \lambda_i\mathbf{x}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k+1)$, и предыдущее равенство примет вид

$$\alpha_1\lambda_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\lambda_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \alpha_k\lambda_k\mathbf{x}_k + \alpha_{k+1}\lambda_{k+1}\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{0}. \qquad (10.4.10)$$

Умножая теперь (10.4.9) на λ_{k+1} и вычитая полученный результат из (10.4.10), найдем

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1})\mathbf{x}_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_{k+1})\mathbf{x}_2 + \ldots + \alpha_k(\lambda_k - \lambda_{k+1})\mathbf{x}_k = \mathbf{0}.$$

В силу линейной независимости векторов $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\ldots$, $\mathbf{x}_{k+1}$ в последнем соотношении все коэффициенты равны нулю, т. е. $\alpha_i(\lambda_i - \lambda_{k+1}) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, а так как $\lambda_i \neq \lambda_{k+1}$, $i \neq k+1$, то отсюда следует, что все $\alpha_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$.

Тогда из равенства (10.4.9), учитывая, что $\mathbf{x}_{k+1}$ — собственный вектор оператора $\mathcal{A}$ и, следовательно, $\mathbf{x}_{k+1} \neq \mathbf{0}$, найдем, что $\alpha_{k+1} = 0$. Таким образом, равенство (10.4.10) возможно только при всех $\alpha_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, k+1)$, а это значит, что векторы $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\ldots$, $\mathbf{x}_{k+1}$ линейно независимы. В соответствии с принципом математической индукции, все собственные векторы $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\ldots$, $\mathbf{x}_m$ линейно независимы.

Свойство 10.4.5. *Матрица линейного оператора в базисе из собственных векторов диагональна.*

Доказательство. Пусть в линейном пространстве L_n, где действует линейный оператор $\mathcal{A}$, имеется n линейно независимых собственных векторов этого оператора: $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$, принадлежащих собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ соответственно. Выберем векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ в качестве базиса L_n и запишем матрицу A оператора в этом базисе. По определению матрицы линейного оператора, ее столбцы — это координатные столбцы векторов $\mathcal{A}\mathbf{e}_1$, $\mathcal{A}\mathbf{e}_2$, ..., $\mathcal{A}\mathbf{e}_n$. Так как векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ — собственные, получим

$$\begin{gathered}
\mathcal{A}\mathbf{e}_1 = \lambda_1\mathbf{e}_1 = \lambda_1\mathbf{e}_1 + 0\cdot\mathbf{e}_2 + \ldots + 0\cdot\mathbf{e}_n,\\
\mathcal{A}\mathbf{e}_2 = \lambda_1\mathbf{e}_1 = 0\cdot\mathbf{e}_1 + \lambda_2\mathbf{e}_2 + \ldots + 0\cdot\mathbf{e}_n,\\
\ldots\\
\mathcal{A}\mathbf{e}_n = \lambda_n\mathbf{e}_n = 0\cdot\mathbf{e}_1 + 0\cdot\mathbf{e}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{e}_n.
\end{gathered}$$

Следовательно, матрица оператора в базисе из собственных векторов имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}. \tag{10.4.11}$$

Таким образом, матрица диагональна, причем на диагонали стоят собственные числа оператора.

Замечание 10.4.3. *Из свойства 10.4.5 следует, что если в линейном пространстве L_n существует базис из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$, то действие такого оператора на любой вектор $\mathbf{x} \in L_n$ сводится к растяжению его вдоль координатных осей в λ_1, λ_2, ..., λ_n раз соответственно, где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — собственные значения оператора $\mathcal{A}$, которым принадлежат собственные векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$, образующие базис L_n.*

То есть в базисе из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$ равенство

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n$$

влечет равенство

$$\mathcal{A}\mathbf{x} = (\lambda_1 x_1)\mathbf{e}_1 + (\lambda_2 x_2)\mathbf{e}_2 + \ldots + (\lambda_n x_n)\mathbf{e}_n.$$

Базис, состоящий из собственных векторов линейного оператора, называется *каноническим*. Матрица оператора в этом базисе (диагональная) также называется *матрицей канонического вида*. Сформулируем одно достаточные условие приводимости матрицы оператора к каноническому виду.

Теорема 10.4.3. *Для того чтобы матрица линейного оператора приводилась к диагональному (каноническому) виду, достаточно, чтобы его характеристическое уравнение имело n различных вещественных корней.*

Доказательство. Пусть характеристическое уравнение оператора $\mathcal{A}$, действующего в линейном пространстве L_n, имеет n различных вещественных корней, которые являются собственными значениями оператора. Из теоремы 10.4.1 следует, что каждому собственному значению оператора принадлежит хотя бы один собственный вектор этого оператора, а собственные векторы, принадлежащие попарно различным собственным значениям, линейно независимы. Следовательно, оператор $\mathcal{A}$ имеет n линейно независимых собственных векторов, которые образуют базис L_n. В этом базисе матрица оператора диагональна.

Пример 10.4.5. *Линейный оператор $\mathcal{A}$, действующий в линейном пространстве L_3, задан матрицей*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Определить, можно ли матрицу оператора привести к диагональному виду.

Решение. Чтобы матрицу заданного линейного оператора можно было привести к диагональному виду, оператор должен иметь три линейно независимых собственных вектора. Найдем все собственные числа и собственные векторы оператора (аналогично примеру 10.4.2). Получим, что оператор имеет три вещественных собственных значения: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$. Но этим собственным значениям принадлежат только два линейно независимых собственных вектора: $\mathbf{e}_1$, принадлежащий собственному значению $\lambda = 1$ и $\mathbf{e}_2$, принадлежащий собственному значению $\lambda = 3$, где

$$\bar{\mathbf{e}}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{e}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, матрицу данного оператора нельзя привести к диагональному виду.

Пример 10.4.6. *Линейный оператор $\mathcal{A}$, действующий в линейном пространстве L_3, задан матрицей (в некотором базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$)*

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Определить, можно ли матрицу оператора переходом к новому базису привести к диагональному виду. Если да, то найти матрицу перехода к новому базису и записать канонический вид матрицы оператора.

Решение. Найдем сначала собственные значения оператора. Для этого воспользуемся представлением (10.4.8) для нахождения коэффициентов характеристического многочлена:

$$J_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33} = 15, \quad J_2 = A_{11} + A_{22} + A_{33} = 71,$$
$$J_3 = \det A = 105.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\det(A - \lambda E) = -\lambda^3 + 15\lambda^2 - 71\lambda + 105 = 0.$$

Так как свободный член приведенного уравнения равен, с точностью до знака, произведению всех его корней (теорема Виета), то разлагая на множители: $105 = 5 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 1$, можем предположить, что целочисленные корни нашего уравнения, если такие есть, совпадают с этими множителями. Подставляя их в уравнение, действительно убеждаемся, что корнями характеристического уравнения являются: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 5$, $\lambda_3 = 7$. Так как все собственные значения различны, то матрица оператора приведется к диагональному виду, если в качестве базиса линейного пространства L_3 взять собственные векторы оператора. Найдем теперь собственные векторы $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$ оператора, принадлежащие собственным значениям $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 5$, $\lambda_3 = 7$, соответственно

$$\overline{\mathbf{x}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \overline{\mathbf{x}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overline{\mathbf{x}}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Перейдем в линейном пространстве L_3 от старого базиса $\underline{\mathbf{e}}$ к новому базису $\underline{\mathbf{e}}'$, выбрав в качестве новых базисных векторов собственные векторы оператора: $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{x}_1$, $\mathbf{e}'_2 = \mathbf{x}_2$, $\mathbf{e}'_3 = \mathbf{x}_3$. Тогда матрица перехода от базиса $\underline{\mathbf{e}}$ к базису $\underline{\mathbf{e}}'$ имеет вид

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Канонический вид матрицы линейного оператора найдем, применив закон преобразования матрицы линейного оператора при замене базиса линейного пространства (проверьте!)

$$A' = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Упражнение 10.4.1. *Покажите, что матрица оператора, рассмотренного в примере 10.4.2, приводится к диагональному виду. Найдите матрицу перехода к базису, в котором матрица оператора диагональна, и запишите канонический вид матрицы оператора.*

10.4.3. Инвариантные подпространства

Пусть $\mathcal{A}$ — оператор, действующий в линейном пространстве $L = L_n$, а $M \subset L$ — некоторое подпространство.

Определение 10.4.2. *Подпространство M называется* инвариантным относительно оператора $\mathcal{A}$*, если $\mathcal{A}(M) \subset M$, т. е. образ подпространства M при действии оператора $\mathcal{A}$ снова содержится в M.*

Тривиальными примерами инвариантных подпространств являются: всё пространство L_n и нулевое подпространство $L_0 = \{\mathbf{0}\}$, состоящее из единственного нулевого вектора. Эти подпространства инвариантны относительно любого оператора. С другой стороны, если сами операторы тривиальны, например нулевой оператор $\mathcal{O}\colon\ \mathbf{x} \mapsto \mathbf{0}$ или тождественный оператор $\mathcal{E}\colon\ \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}$, то для них инвариантными являются любые подпространства.

Рассмотрим некоторые нетривиальные примеры инвариантных подпространств.

Пример 10.4.7. *Если $L = V_3$, то для оператора поворота Φ на угол φ вокруг оси Oz инвариантными являются двумерное подпространство $V_2(XY) = L(\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}})$ всех векторов плоскости xOy и одномерное подпространство $V_1(Z) = L(\vec{\mathbf{k}})$ всех векторов оси Oz. Действительно, любой вектор этих подпространств после поворота остается в том же подпространстве.*

Пример 10.4.8. *Если $L = P$ — пространство всех действительных многочленов, то для оператора $\mathcal{D}$ дифференцирования инвариантными являются все P_n — подпространства действительных многочленов, степень которых не превышает n. В самом деле, любой многочлен из подпространства P_n после дифференцирования понижает свою степень на единицу, следовательно, становится вектором подпространства P_{n-1}, а значит, остается в P_n.*

Существует важная связь между одномерными инвариантными подпространствами и собственными векторами линейного оператора.

Теорема 10.4.4. *Всякий собственный вектор $\mathbf{x}$ линейного оператора $\mathcal{A}$ порождает одномерное инвариантное подпространство $L_1 = L(\mathbf{x})$ этого оператора. И обратно: всякое одномерное инвариантное подпространство L_1 линейного оператора $\mathcal{A}$ определяет собственное число этого оператора, причем собственными векторами, принадлежащими этому собственному числу, являются все ненулевые векторы подпространства L_1.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{x}$ — собственный вектор линейного оператора $\mathcal{A}$, принадлежащий собственному значению λ. Покажем, что подпространство $L_1 = L(\mathbf{x})$, натянутое на вектор $\mathbf{x}$, инвариантно относительно $\mathcal{A}$. Возьмем произвольный вектор $\mathbf{y} = \alpha\mathbf{x} \in L(\mathbf{x})$ и покажем, что его образ $\mathcal{A}\mathbf{y}$ также принадлежит $L(\mathbf{x})$. В самом деле,

$$\mathcal{A}\mathbf{y} = \mathcal{A}(\alpha\mathbf{x}) = \alpha\mathcal{A}\mathbf{x} = \alpha(\lambda\mathbf{x}) = (\alpha\lambda)\mathbf{x} \in L(\mathbf{x}).$$

Чтобы доказать обратное утверждение, рассмотрим произвольное одномерное подпространство L_1, инвариантное относительно $\mathcal{A}$. Тогда для любого ненулевого вектора $\mathbf{x} \in L_1$ $\mathcal{A}\mathbf{x} \in L_1$. Так как подпространство L_1 одномерно, то в качестве его базиса можно выбрать любой ненулевой вектор, в частности вектор $\mathbf{x}$. Тогда вектор $\mathcal{A}\mathbf{x} \in L_1$ выражается линейно через $\mathbf{x}$: $\mathcal{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ для некоторого числа λ. Это и означает, что любой ненулевой вектор $\mathbf{x} \in L_1$ является собственным, принадлежащим собственному значению λ.

Упражнение 10.4.2. *Покажите, что пересечение и сумма инвариантных подпространств линейного оператора также являются инвариантными подпространствами этого оператора.*

Замечание 10.4.4. *Из определения инвариантного подпространства следует, что применяя линейный оператор $\mathcal{A}: L \to L$ к векторам инвариантного подпространства $M \subset L$, получим образы, снова принадлежащие M. Таким образом, оператор $\mathcal{A}: L \to L$, если ограничить его область определения подпространством M, задает некоторый линейный оператор $\mathcal{A}_M$: $M \to M$ по правилу $\mathcal{A}_M$: $\mathbf{x} \mapsto \mathcal{A}\mathbf{x}$, который называется* сужением оператора *$\mathcal{A}$ на инвариантное подпространство M.*

§ 10.5. Операторы в евклидовом пространстве

В настоящем параграфе рассматриваются линейные операторы, действующие в n-мерном действительном евклидовом пространстве E_n.

10.5.1. Понятие сопряженного оператора. Матрица сопряженного оператора

Определение 10.5.1. *Оператор $\mathcal{A}^*$, действующий в евклидовом пространстве E_n, называется* сопряженным *линейному оператору $\mathcal{A}$, если для любых векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in E_n$ выполняется соотношение*

$$(\mathcal{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathcal{A}^*\mathbf{y}). \tag{10.5.1}$$

Упражнение 10.5.1. *Покажите, что сопряженным для единичного оператора является он сам, так же как для нулевого оператора сопряженным является нулевой*

$$\mathcal{E}^* = \mathcal{E}, \quad \mathcal{O}^* = \mathcal{O}.$$

Пример 10.5.1. *Если $L = V_2$, то для оператора поворота Φ плоскости на угол φ вокруг неподвижной точки сопряженным является оператор $\Phi^* = \Phi^-$ поворота плоскости на угол $(-\varphi)$.*

Решение. Действительно, обозначим через $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ произвольные векторы плоскости, а через $\Phi\mathbf{x}$, $\Phi^-\mathbf{y}$ — их образы при поворотах соответственно на углы φ и $(-\varphi)$.

Тогда следующие скалярные произведения равны:

$$(\Phi\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}| \cos(\alpha + \varphi) = \\ = (\mathbf{x}, \Phi^-\mathbf{y}),$$

где $\alpha = (\widehat{\mathbf{x}, \mathbf{y}})$ — угол между векторами $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ (рис. 9.3).

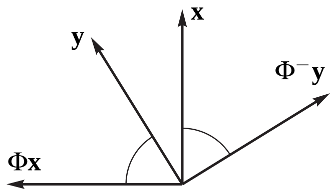


Рис. 9.3

Прежде чем рассмотреть свойства сопряженного оператора, докажем следующую лемму.

Лемма 10.5.1. *Если для двух линейных операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, действующих в евклидовом пространстве E, выполнено*

$$(\mathbf{x}, \mathcal{A}\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathcal{B}\mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E, \tag{10.5.2}$$

тогда $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

Доказательство. Выпишем цепочку эквивалентных соотношений:

$$(10.5.2) \iff (\mathbf{x}, \mathcal{A}\mathbf{y}) - (\mathbf{x}, \mathcal{B}\mathbf{y}) = 0 \iff \\ \iff (\mathbf{x}, \mathcal{A}\mathbf{y} - \mathcal{B}\mathbf{y}) = 0 \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E.$$

Поскольку все эти равенства выполнены при любых $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in E$, подставим в последнее $\mathbf{x} = \mathcal{A}\mathbf{y} - \mathcal{B}\mathbf{y}$, тогда получим

$$(\mathcal{A}\mathbf{y} - \mathcal{B}\mathbf{y}, \mathcal{A}\mathbf{y} - \mathcal{B}\mathbf{y}) = 0 \quad \forall \mathbf{y} \in E.$$

В силу аксиом скалярного произведения отсюда следует:

$$\mathcal{A}\mathbf{y} - \mathcal{B}\mathbf{y} = \mathbf{0}\, \forall \mathbf{y} \in E \iff \mathcal{A}\mathbf{y} = \mathcal{B}\mathbf{y}\, \forall \mathbf{y} \in E \iff \mathcal{A} = \mathcal{B}.$$

Докажем некоторые свойства сопряженных операторов.

Свойство 10.5.1. *Оператор $\mathcal{A}^*$, сопряженный линейному оператору $\mathcal{A}$, также является линейным.*

Доказательство. Используя линейность оператора $\mathcal{A}$ и свойства скалярного произведения, для любых векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2 \in E_n$ и любых вещественных чисел α, β имеем цепочку равенств:

$$(\mathbf{x}, \mathcal{A}^*(\alpha\mathbf{y}_1 + \beta\mathbf{y}_2)) = (\mathcal{A}\mathbf{x}, \alpha\mathbf{y}_1 + \beta\mathbf{y}_2) =$$
$$= (\mathcal{A}\mathbf{x}, \alpha\mathbf{y}_1) + (\mathcal{A}\mathbf{x}, \beta\mathbf{y}_2) = \alpha(\mathcal{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) + \beta(\mathcal{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}_2) =$$
$$= \alpha(\mathbf{x}, \mathcal{A}^*\mathbf{y}_1) + \beta(\mathbf{x}, \mathcal{A}^*\mathbf{y}_2) = (\mathbf{x}, \alpha\mathcal{A}^*\mathbf{y}_1 + \beta\mathcal{A}^*\mathbf{y}_2).$$

Таким образом,

$$(\mathbf{x}, \mathcal{A}^*(\alpha\mathbf{y}_1 + \beta\mathbf{y}_2)) = (\mathbf{x}, \alpha\mathcal{A}^*\mathbf{y}_1 + \beta\mathcal{A}^*\mathbf{y}_2).$$

Так как полученное равенство выполняется для любого вектора $\mathbf{x} \in E_n$, то, как и при доказательстве леммы 10.5.1, имеем:

$$\mathcal{A}^*(\alpha\mathbf{y}_1 + \beta\mathbf{y}_2)) = \alpha\mathcal{A}^*\mathbf{y}_1 + \beta\mathcal{A}^*\mathbf{y}_2.$$

Последнее соотношение доказывает линейность оператора $\mathcal{A}^*$.

Свойство 10.5.2. *В любом ортонормированном базисе матрица оператора $\mathcal{A}^*$, сопряженного оператору $\mathcal{A}$, совпадает с транспонированной матрицей оператора $\mathcal{A}$, т. е.*

$$A^* = A^T.$$

Доказательство. Выберем в пространстве E_n произвольный ортонормированный базис $\underline{\mathbf{e}} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ и разложим каждый вектор пространства E_n по базису. Тогда если оператору $\mathcal{A}$ сопоставим его матрицу A в базисе $\underline{\mathbf{e}}$, то координатные столбцы образа и прообраза при действии оператора $\mathcal{A}$ связаны равенством

$$\overline{\mathcal{A}\mathbf{x}} = A\overline{\mathbf{x}}.$$

Как мы помним (см. § 10.2, при фиксированном базисе каждому линейному оператору соответствует его матрица, причем верно и обратное: для каждой квадратной матрицы найдется оператор, матрицей которого в выбранном базисе служит данная матрица. Обозначим $\mathcal{A}^T$ оператор, соответствующий матрице A^T в выбранном ортонормированном базисе $\underline{\mathbf{e}}$, и покажем, что $\mathcal{A}^T = \mathcal{A}^*$. Как мы знаем, в ортонормированном базисе скалярное произведение векторов выражается через их координатные столбцы (строки) следующим равенством (см. (9.3.11)):

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \underline{\mathbf{x}} \cdot \overline{\mathbf{y}} = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n.$$

Представим в таком матричном виде скалярное произведение $(\mathcal{A}\mathbf{x}, \mathbf{y})$, входящее в левую часть равенства (10.5.1):

$$(\mathcal{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \underline{\mathcal{A}\mathbf{x}} \cdot \overline{\mathbf{y}} = \overline{\mathcal{A}\mathbf{x}}^T \cdot \overline{\mathbf{y}} = (A\overline{\mathbf{x}})^T \cdot \overline{\mathbf{y}} =$$
$$= (\overline{\mathbf{x}}^T \cdot A^T) \cdot \overline{\mathbf{y}} = \underline{\mathbf{x}} \cdot A^T\overline{\mathbf{y}} = (\mathbf{x}, \mathcal{A}^T\mathbf{y}).$$

Читателю полезно проследить, какие свойства были использованы в каждом из этих равенств. Сопоставляя крайние члены последней цепочки равенств с соотношением (10.5.1), получаем:

$$(\mathbf{x}, \mathcal{A}^T\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathcal{A}^*\mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E.$$

Отсюда в силу леммы 10.5.1 вытекает совпадение операторов $\mathcal{A}^T = \mathcal{A}^*$, а значит, и их матриц: $A^T = A^*$.

Свойство 10.5.3. *Если M — инвариантное подпространство линейного оператора $\mathcal{A}$, то его ортогональное дополнение $M^\perp$ является инвариантным подпространством сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$.*

Доказательство. Нужно показать, что для любого вектора $\mathbf{y} \in M^\perp$ его образ $\mathcal{A}^*\mathbf{y}$ при действии сопряженного оператора снова принадлежит ортогональному дополнению $M^\perp$. Для этого, в свою очередь, нужно доказать, что вектор $\mathcal{A}^*\mathbf{y}$ ортогонален любому вектору $\mathbf{x} \in M$. Возьмем произвольный вектор $\mathbf{x} \in M$ и вычислим скалярное произведение

$$(\mathbf{x}, \mathcal{A}^*\mathbf{y}) = (\mathcal{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Так как подпространство M инвариантно относительно оператора $\mathcal{A}$, то вектор $\mathcal{A}\mathbf{x}$ принадлежит M, значит, он ортогонален любому вектору $\mathbf{y} \in M^\perp$, а тогда их скалярное произведение равно нулю: $(\mathcal{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$. Поэтому и $(\mathbf{x}, \mathcal{A}^*\mathbf{y}) = 0\ \forall \mathbf{x} \in M$. То есть доказали, что $\mathcal{A}^*\mathbf{y} \in M^\perp$.

10.5.2. Самосопряженные операторы. Свойства самосопряженных операторов

Определение 10.5.2. *Линейный оператор $\mathcal{A}$, действующий в евклидовом пространстве E_n, называется самосопряженным, если он равен сопряженному оператору $\mathcal{A}^*$, т. е. для любых векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in E_n$ имеет место равенство*

$$(\mathcal{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathcal{A}\mathbf{y}). \tag{10.5.3}$$

Из приведенных выше примеров самосопряженными являются нулевой и единичный операторы. Другие примеры можно будет построить после рассмотрения некоторых свойств самосопряженных операторов. Доказательства некоторых свойств мы здесь не приводим. Их можно найти, например, в [1] или [2].

Свойство 10.5.4. *Матрица самосопряженного оператора симметрична, то есть*

$$A = A^T.$$

Доказательство. Действительно, так как $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$, а $A^* = A^T$, то матрица оператора $\mathcal{A}$ удовлетворяет условию $A^* = A^T$.

Справедливо и обратное: всякая симметричная матрица n-го порядка в n-мерном евклидовом пространстве задает некоторый самосопряженный оператор.

Свойство 10.5.5. *Собственные векторы самосопряженного оператора, принадлежащие различным собственным значениям, ортогональны.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ — собственные векторы самосопряженного оператора $\mathcal{A}$, принадлежащие соответственно собственным значениям λ_1, λ_2, причем $\lambda_1 \neq \lambda_2$. В этом случае справедливы два равенства:

$$(\mathcal{A}\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = (\lambda_1 \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \lambda_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2),$$
$$(\mathbf{x}_1, \mathcal{A}\mathbf{x}_2) = (\mathbf{x}_1, \lambda_2 \mathbf{x}_2) = \lambda_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$$

Так как оператор $\mathcal{A}$ самосопряженный и, следовательно, $(\mathcal{A}\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = (\mathbf{x}_1, \mathcal{A}\mathbf{x}_2)$, имеем

$$\lambda_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \lambda_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \implies (\lambda_1 - \lambda_2)(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 0.$$

Так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$, очевидно, что $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 0$, а это значит, что векторы $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ ортогональны.

Свойство 10.5.6. *У каждого самосопряженного оператора $\mathcal{A}$, действующего в n-мерном евклидовом пространстве, все собственные значения действительны.*

Имеется в виду, что все корни характеристического уравнения

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

действительны. Доказательство этого свойства можно найти в [2].

Свойство 10.5.7. *Если $M \subset E$ — подпространство, инвариантное относительно самосопряженного оператора $\mathcal{A}$, то его ортогональное дополнение $M^\perp$ также инвариантно относительно $\mathcal{A}$.*

Доказательство. Утверждение вытекает из свойства 10.5.3.

Свойство 10.5.8. *У каждого самосопряженного оператора $\mathcal{A}$, действующего в n-мерном евклидовом пространстве, существует n линейно независимых попарно ортогональных и единичных собственных векторов.*

Доказательство. В силу свойства 10.5.6 все собственные значения оператора $\mathcal{A}$ действительны. Пусть λ_1 — одно из них, и $\mathbf{x}_1$ — собственный вектор, принадлежащий λ_1. Тогда $\mathbf{e}_1 = \dfrac{1}{\|\mathbf{x}_1\|}\mathbf{x}_1$ — единичный собственный вектор, принадлежащий λ_1. Обозначим $E_1 = L(\mathbf{e}_1)$ одномерное подпространство, натянутое на вектор $\mathbf{e}_1$. Как вытекает из теоремы 10.4.4, E_1 является одномерным инвариантным подпространством относительно оператора $\mathcal{A}$. Тогда, по свойству 10.5.7, ортогональное дополнение $E_1^{\perp}$ также инвариантно относительно $\mathcal{A}$, а сужение $\mathcal{A}_{E_1^{\perp}}$ оператора $\mathcal{A}$ на подпространство $E_1^{\perp}$, очевидно, является самосопряженным оператором, действующим в пространстве $E_1^{\perp}$ размерности $n-1$ (и совпадающим там с $\mathcal{A}$). Пусть λ_2 — действительное собственное значение оператора $\mathcal{A}_{E_1^{\perp}}$ и $\mathbf{e}_2 \in E_1^{\perp}$ — единичный собственный вектор оператора $\mathcal{A}_{E_1^{\perp}}$, принадлежащий λ_2. Очевидно, $\mathbf{e}_2$ является также собственным вектором оператора $\mathcal{A}$ (так как оба оператора совпадают в $E_1^{\perp}$), и $\mathbf{e}_1 \perp \mathbf{e}_2$. Продолжая этот процесс, обозначим $E_2 = L(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ двумерное подпространство, натянутое на векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$. Это подпространство также инвариантно относительно самосопряженного оператора $\mathcal{A}$, так как для любого вектора $\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 \in E_2$ его образ:

$$\mathcal{A}\mathbf{x} = \alpha_1\mathcal{A}\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathcal{A}\mathbf{e}_2 = \alpha_1\lambda_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\lambda_2\mathbf{e}_2 \in E_2.$$

Тогда ортогональное дополнение $E_2^{\perp}$, имеющее размерность $n-2$, также инвариантно относительно $\mathcal{A}$, и, подобно предыдущему, найдется единичный собственный вектор $\mathbf{e}_3 \in E_2^{\perp}$, принадлежащий некоторому собственному значению λ_3, который будет ортогонален каждому из собственных векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$. Продолжая так дальше, мы получим набор $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_k$ попарно ортогональных единичных собственных векторов оператора $\mathcal{A}$. При этом если $k = n$, то процесс заканчивается, и теорема доказана. Если же $k < n$, то процесс может быть продолжен дальше.

Доказанное свойство означает, что в n-мерном евклидовом пространстве всегда найдется ортонормированный базис из собственных векторов самосопряженного оператора, в котором матрица оператора диагональна. Конкретный способ построения такого базиса рассматривается в следующем примере.

Пример 10.5.2. *Самосопряженный линейный оператор $\mathcal{A}$, действующий в евклидовом пространстве E_3, в некотором ортонормированном базисе $\underline{\mathbf{e}} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ задан матрицей*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найти ортонормированный базис $\underline{\mathbf{e}}' = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$ пространства E_3, в котором матрица оператора диагональна.

Решение. Так как матрица любого оператора диагональна в базисе из собственных векторов, найдем собственные числа и собственные векторы оператора. Получим: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 11$. Собственные векторы, принадлежащие собственным числам λ_1, λ_2, λ_3, соответственно равны

$$\overline{\mathbf{x}}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overline{\mathbf{x}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overline{\mathbf{x}}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Так как собственные значения λ_1, λ_2, λ_3 различны, собственные векторы $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$ попарно ортогональны. Действительно, вычислив скалярные произведения этих векторов, найдем

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = -2 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = 0;$$
$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3) = -2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 0;$$
$$(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 0.$$

Для построения ортонормированного базиса из собственных векторов оператора вычислим длины векторов $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$:

$$\|\mathbf{x}_1\| = \sqrt{(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1)} = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6};$$
$$\|\mathbf{x}_2\| = \sqrt{(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2)} = \sqrt{0+1+1} = \sqrt{2};$$
$$\|\mathbf{x}_3\| = \sqrt{(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_3)} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}.$$

Ортонормированный базис ($\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$) получим, умножив каждый из векторов $\mathbf{x}_i$ на число $\dfrac{1}{\|\mathbf{x}_i\|}$, $i = 1, 2, 3$:

$$\mathbf{e}'_1 = \frac{\mathbf{x}_1}{\|\mathbf{x}_1\|}, \quad \mathbf{e}'_2 = \frac{\mathbf{x}_2}{\|\mathbf{x}_2\|}, \quad \mathbf{e}'_3 = \frac{\mathbf{x}_3}{\|\mathbf{x}_3\|}.$$

Получим

$$\mathbf{e}'_1 = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}'_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, векторы $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$ — также собственные векторы оператора $\mathcal{A}$, принадлежащие собственным значениям λ_1, λ_2, λ_3 (проверьте!).

Матрица перехода S от базиса $\underline{\mathbf{e}}$ к базису $\underline{\mathbf{e}}'$ (составленная из координатных столбцов векторов $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$) ортогональна (проверьте!)

$$S = \begin{pmatrix} -\dfrac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{6}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

В новом базисе $\underline{\mathbf{e}}'$ матрица A' оператора $\mathcal{A}$ диагональна:

$$A' = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}.$$

Глава 11

Квадратичные формы

§ 11.1. Квадратичная форма и ее матрица

11.1.1. Определение квадратичной формы

Определение 11.1.1. Квадратичной формой *от переменных* x_1, x_2, $\ldots$, x_n *называется* однородный многочлен второй степени *относительно этих переменных*

$$A(X) = A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \ldots + \\ + a_{1n}x_1x_n + a_{21}x_2x_1 + \ldots + a_{nn}x_n^2, \quad (11.1.1)$$

где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *— вектор-столбец переменных* x_1, x_2, $\ldots$, x_n.

Заметим, что выражение «однородный многочлен второй степени» означает, что все одночлены, входящие в состав многочлена, имеют суммарную вторую степень относительно переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. В частности, квадратичная форма от двух переменных имеет вид

$$A(X) = A(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2.$$

Так как члены, содержащие произведения переменных x_1x_2 и x_2x_1, всегда можно объединить и перегруппировать, то естественно считать $a_{12} = a_{21}$. Например,

$$A(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2 = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_1 - x_2^2.$$

Квадратичная форма от трех переменных x_1, x_2, x_3 имеет вид

$$A(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + \\ + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3 + a_{31}x_3x_1 + a_{32}x_3x_2 + a_{33}x_3^2.$$

Аналогично квадратичной форме от двух переменных, считаем, что $a_{12} = a_{21}$, $a_{13} = a_{31}$, $a_{23} = a_{32}$. Например,

$$A(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 5x_1x_2 + 6x_2^2 - 4x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2 =$$
$$= 3x_1^2 + \frac{5}{2}x_1x_2 - 2x_1x_3 + \frac{5}{2}x_2x_1 + 6x_2^2 + x_2x_3 - 2x_3x_1 + x_3x_2 + x_3^2.$$

11.1.2. Матричная запись квадратичной формы

Используя операцию умножения матриц, можно записать квадратичную форму в матричном виде. Покажем это на примере квадратичной формы от двух переменных. Имеем

$$\begin{aligned} A(X) = A(x_1, x_2) &= a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 = \\ &= x_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + x_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2) = \\ &= (x_1, x_2)\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} = \\ &= (x_1, x_2)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$A(X) = X^T A X, \tag{11.1.2}$$

где

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad X^T = (x_1, x_2), \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Матрица A, составленная из коэффициентов квадратичной формы (11.1.2), называется *матрицей квадратичной формы*. В силу принятого условия $a_{ij} = a_{ji}$ матрица A симметрична. Например, для квадратичной формы $A(x,y) = 2x^2 + 4xy - y^2$ ее матрицей является $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, а сама форма может быть представлена в матричном виде

$$A(x,y) = (x,y)\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = X^T A X,$$

где

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad X^T = (x, y).$$

Аналогично, квадратичная форма от трех переменных x_1, x_2, x_3 может быть записана в виде

$$A(X) = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = X^T A X, \tag{11.1.3}$$

где

$$X=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Здесь матрица A квадратичной формы — симметричная матрица третьего порядка: $a_{ij}=a_{ji}$ для $i,j=1,2,3$; $i\neq j$.

Заметим, что если в квадратичной форме какой-либо член отсутствует, то в матрице A на соответствующем месте должен стоять элемент, равный нулю. Например,

$$A(x,y,z)=2x^2-4xy+6xz+2y^2-3z^2=X^TAX,$$

$$X=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3\\ -2 & 2 & 0\\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Элементы a_{23} и a_{32} матрицы A равны нулю, так как в квадратичной форме отсутствует член, содержащий произведение yz.

В общем случае квадратичной формы от n переменных матрица A квадратичной формы — симметричная матрица n-го порядка:

$$A(X)=A(x_1,x_2,\ldots,x_n)=X^TAX, \tag{11.1.4}$$

где

$$X=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n \end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Квадратичная форма называется *невырожденной*, если $\det A\neq 0$, и *вырожденной*, если $\det A=0$.

Если набор переменных x_1, x_2, $\ldots$, x_n рассматривать как координаты вектора $\mathbf{x}$ n-мерного линейного пространства L_n, то можно дать другое определение квадратичной формы.

Определение 11.1.2. Квадратичной формой *называется отображение линейного пространства L_n в множество $\mathbb{R}$ действительных чисел A: $L_n\to\mathbb{R}$, заданное формулой*

$$A(\mathbf{x})=\underline{\mathbf{x}}A\overline{\mathbf{x}}=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j, \tag{11.1.5}$$

где $A=(a_{ij})_{n\times n}$ — симметричная матрица порядка n, $\overline{\mathbf{x}}$ — координатный столбец вектора $\mathbf{x}$ в заданном базисе $\underline{\mathbf{e}}$, а $\underline{\mathbf{x}}=\overline{\mathbf{x}}^T$ — координатная строка

$$\mathbf{x}=x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+\ldots+x_n\mathbf{e}_n.$$

При таком определении квадратичной формы ее матрица A зависит от выбора базиса $\underline{\mathbf{e}}$ в линейном пространстве L_n. Действительно, если перейти в L_n к новому базису $\underline{\mathbf{e}}'$, то координатный столбец вектора $\mathbf{x}$ изменится. Чтобы при этом не изменилось значение функции $A(\mathbf{x})$ на векторе $\mathbf{x}$, матрица квадратичной формы в базисе $\underline{\mathbf{e}}'$ должна быть другой, т. е. должно выполняться равенство

$$A(\mathbf{x}) = \underline{\mathbf{x}}A\overline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{x}}'A'\overline{\mathbf{x}}', \tag{11.1.6}$$

где $\overline{\mathbf{x}}'$ и A' — координатный столбец вектора $\mathbf{x}$ и матрица квадратичной формы в базисе $\underline{\mathbf{e}}'$. Это равенство позволит нам установить закон преобразования матрицы квадратичной формы при замене базиса линейного пространства.

11.1.3. Изменение матрицы квадратичной формы при замене базиса

Рассмотрим квадратичную форму $A(\mathbf{x}) = \underline{\mathbf{x}}A\overline{\mathbf{x}}$, заданную матрицей A в некотором базисе $\underline{\mathbf{e}}$ линейного пространства L_n. Перейдем в L_n к новому базису $\underline{\mathbf{e}}' = \underline{\mathbf{e}}S$ (S — матрица перехода). В новом базисе квадратичная форма имеет вид: $A(\mathbf{x}) = \underline{\mathbf{x}}'A'\overline{\mathbf{x}}'$. Найдем связь между матрицами A и A', учитывая, что $\overline{\mathbf{x}} = S\overline{\mathbf{x}}'$ (см. закон преобразования координат (8.2.23)). Запишем цепочку равенств:

$$A(\mathbf{x}) = \underline{\mathbf{x}}A\overline{\mathbf{x}} = (S\overline{\mathbf{x}}')^T A(S\overline{\mathbf{x}}') = \\ = (\overline{\mathbf{x}}')^T(S^TAS)\overline{\mathbf{x}}' = \underline{\mathbf{x}}'(S^TAS)\overline{\mathbf{x}}' = \underline{\mathbf{x}}'A'\overline{\mathbf{x}}'.$$

Сравнивая матрицы из последнего равенства, получим закон преобразования матрицы квадратичной формы при замене базиса линейного пространства:

$$A' = S^TAS. \tag{11.1.7}$$

§ 11.2. Приведение к каноническому виду

11.2.1. Канонический вид квадратичной формы

Определение 11.2.1. Каноническим видом *квадратичной формы называется следующий ее вид:*

$$A(\mathbf{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2. \tag{11.2.1}$$

Коэффициенты λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_n называются *каноническими коэффициентами*.

Таким образом, в каноническом виде квадратичная форма представляет собой сумму квадратов. Здесь речь идет об алгебраической сумме, так как канонические коэффициенты могут быть положительными, отрицательными и равными нулю. Матрица квадратичной формы в каноническом виде диагональна, причем на главной диагонали стоят канонические коэффициенты:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}. \tag{11.2.2}$$

Например, квадратичная форма $A(x,y,z) = 3x^2 - 2y^2 + z^2 = X^TAX$, где

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Так как $\det A = 3 \cdot (-2) \cdot 1 = -6 \neq 0$, квадратичная форма невырожденна.

11.2.2. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа

Пусть $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — произвольная квадратичная форма от n переменных. Имеет место следующая

Теорема 11.2.1. *Всякая квадратичная форма невырожденным линейным преобразованием координат может быть приведена к каноническому виду.*

Вместо доказательства этой теоремы мы рассмотрим один из элементарных способов приведения квадратичной формы к каноническому виду, называемый методом Лагранжа и основанный на выделении полных квадратов, причем продемонстрируем этот метод на примере.

ПРИМЕР 11.2.1. *Рассмотрим квадратичную форму от трех переменных*

$$A(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3 + 3x_3^2.$$

Требуется привести ее к каноническому виду.

РЕШЕНИЕ. Выделим в квадратичной форме все слагаемые, содержащие переменную x_1, и добавим к ним члены, содержащие x_2 и x_3, такие, чтобы группа в целом представляла собой полный квадрат трех членов. Имеем

$$A(x_1,x_2,x_3) =$$
$$= (x_1^2+2x_1x_2+4x_1x_3+x_2^2+4x_2x_3+4x_3^2)+x_2^2+2x_2x_3-x_3^2 =$$
$$= (x_1+x_2+2x_3)^2+x_2^2+2x_2x_3-x_3^2.$$

В полученном выражении аналогичную процедуру проведем с переменной x_2:

$$A(x_1,x_2,x_3) = (x_1+x_2+2x_3)^2+(x_2^2+2x_2x_3+x_3^2)-2x_3^2 =$$
$$= (x_1+x_2+2x_3)^2+(x_2+x_3)^2-2x_3^2.$$

Перейдем к новым переменным x_1',x_2', x_3' по формулам

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1+x_2+2x_3; \\ x_2' &= x_2+x_3; \\ x_3' &= x_3. \end{aligned} \tag{11.2.3}$$

В матричной форме:

$$X' = S^{-1}X, \quad X = SX', \tag{11.2.4}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix},$$

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь матрица S, очевидно, невырожденная, так как $\det A \neq 0$. В новых переменных квадратичная форма имеет канонический вид

$$A(x_1,x_2,x_3) = {x_1'}^2+{x_2'}^2-2{x_3'}^2.$$

Матрица A' квадратичной формы в новых переменных диагональна

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что $A' = S^TAS$. Действительно,

$$S^TAS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = A'.$$

Поэтому (см. (11.1.7)) преобразование переменных (11.2.4), с помощью которого квадратичная форма приведена к каноническому виду, можно рассматривать как преобразование координат вектора в линейном пространстве L_3 при переходе от одного базиса к другому с матрицей перехода S.

ЗАМЕЧАНИЕ 11.2.1. *Рассмотренный в этом примере метод основан на выделении полных квадратов, отправляясь от полных квадратов вида $a_{ii}x_i^2$, имеющихся в квадратичной форме. Если же квадратичная форма не содержит ни одного такого квадрата, то ее можно привести к виду, содержащему квадраты, путем следующего преобразования переменных. Пусть, например, квадратичная форма содержит член $a_{12}x_1x_2$ и не содержит членов, содержащих квадраты x_1^2 и x_2^2. Перейдем к новым переменным с помощью преобразования:*

$$\begin{cases} x_1 = x_1' + x_2', \\ x_2 = x_1' - x_2', \\ x_3 = x_3', \\ \dots \\ x_n = x_n' \end{cases} \Leftrightarrow X = SX' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} X'.$$

Здесь матрица S, очевидно, невырожденная, а член $a_{12}x_1x_2$ перейдет в новых переменных в выражение с квадратами: $a_{12}({x_1'}^2 - {x_2'}^2)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 11.2.2. *Очевидно, преобразование переменных, которым квадратичная форма может быть приведена к каноническому виду, не единственно, и поэтому канонические коэффициенты определяются неоднозначно. Однако справедлива теорема: число положительных и отрицательных коэффициентов в каноническом виде квадратичной формы не зависит от преобразования, с помощью которого квадратичная форма приведена к каноническому виду. Эта теорема носит название «закон инерции квадратичных форм». Ее доказательство можно найти, например, в [1], [2].*

11.2.3. Приведение к каноническому виду квадратичной формы в евклидовом пространстве

Пусть E_n — евклидово пространство, в котором задана квадратичная форма $A(\mathbf{x})$. Выберем в E_n некоторый ортонормированный базис $\underline{\mathbf{e}} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ и обозначим через $A = (a_{ij})_{n\times n}$ матрицу квадратичной формы $A(\mathbf{x})$, а через $\overline{\mathbf{x}}$ — координатный столбец вектора $\mathbf{x}$ в заданном базисе $\underline{\mathbf{e}}$. Найдем базис $\underline{\mathbf{e}}' = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n)$ пространства E_n, в котором матрица квадратичной формы диагональна.

Рассмотрим самосопряженный оператор $\mathcal{A}$, действующий в E_n, который в базисе $\underline{\mathbf{e}}$ задается той же симметричной матрицей A, что и квадратичная форма $A(\mathbf{x})$. В п 10.5.2 отмечалось, что матрица самосопряженного оператора всегда приводится к диагональному виду, если в качестве базисных векторов выбрать собственные векторы данного оператора. Возьмем в качестве нового базиса $\underline{\mathbf{e}}'$ пространства E_n ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$. Тогда $\underline{\mathbf{e}}' = \underline{\mathbf{e}}S$, где S — матрица перехода. Так как базисы $\underline{\mathbf{e}}'$ и $\underline{\mathbf{e}}$ — ортонормированные, матрица перехода S — ортогональна, т. е. $S^{-1} = S^T$. Поэтому закон преобразования матрицы квадратичной формы при переходе к базису $\underline{\mathbf{e}}'$ совпадает с законом преобразования матрицы линейного оператора. Действительно,

$$A' = S^T A S = S^{-1} A S.$$

Следовательно, матрица A' квадратичной формы в базисе $\underline{\mathbf{e}}'$ совпадает с матрицей оператора $\mathcal{A}$. Так как матрица оператора в новом базисе диагональна и на диагонали стоят собственные числа, то матрица A' квадратичной формы также диагональна, причем канонические коэффициенты квадратичной формы равны собственным числам оператора. В дальнейшем для краткости собственные числа и собственные векторы оператора $\mathcal{A}$ будем называть собственными числами и собственными векторами матрицы A.

Таким образом, имеет место следующая

Теорема 11.2.2. *Всякая квадратичная форма $A(X)$ может быть приведена к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования координат, т. е. линейного преобразования:*

$$X = SX',$$

где S — некоторая ортогональная матрица. При этом в новых координатах квадратичная форма имеет следующий канонический вид:

$$A(X') = (X')^T A' X' = \lambda_1 {x'_1}^2 + \lambda_2 {x'_2}^2 + \ldots + \lambda_n {x'_n}^2,$$

где

$$X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}, \; A' = S^{-1}AS = S^T AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Достаточно к вышеприведенным рассуждениям добавить, что всякая квадратичная форма $A(X)$, определяемая симметричной матрицей A, может рассматриваться как функционал, задаваемый соотношением (11.1.5) в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ всех n-мерных столбцов с ортонормированным (каноническим) базисом, образованным векторами:

$$\mathbf{e}_1 = (1,0,\dots,0)^T,\ \mathbf{e}_2 = (0,1,\dots,0)^T,\ \dots,\ \mathbf{e}_n = (0,0,\dots,1)^T.$$

Заметим, что теорема 11.2.1 вытекает из теоремы 11.2.2. Из доказательства теоремы 11.2.2 можно вывести следующий алгоритм приведения квадратичной формы к каноническому виду.

1. Находим собственные числа и собственные векторы матрицы A (в пространстве столбцов $\mathbb{R}^n$).

2. Строим ортонормированный базис пространства $\mathbb{R}^n$ из собственных векторов матрицы A и записываем ортогональную матрицу перехода S к новому базису.

3. Находим матрицу квадратичной формы в новом базисе по формуле $A' = S^T AS$. Матрица A' будет диагональной, причем на главной диагонали будут стоять собственные числа матрицы.

4. Записываем канонический вид квадратичной формы, в котором канонические коэффициенты равны собственным числам матрицы A.

Данный метод приведения квадратичной формы к каноническому виду продемонстрируем на примере.

Пример 11.2.2. *Рассмотрим квадратичную форму:*

$$A(\mathbf{x}) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_2^2 - 4x_2x_3 + 3x_3^2 = \underline{\mathbf{x}}A\overline{\mathbf{x}},$$

$$\overline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Здесь $\overline{\mathbf{x}}$ *— координатный столбец вектора* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, A *— матрица квадратичной формы в каноническом базисе* $\underline{\mathbf{e}}$*:*

$$\mathbf{e}_1 = (1,0,0)^T, \quad \mathbf{e}_2 = (0,1,0)^T, \quad \mathbf{e}_3 = (0,0,1)^T.$$

Приведем эту квадратичную форму к каноническому виду, следуя описанному выше алгоритму:

1. Найдем собственные числа и собственные векторы матрицы A. Для этого составим характеристическое уравнение:

$$\det(A - \lambda E) = 0 \iff \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 2-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Раскроем определитель (например, по правилу треугольника), приведем подобные члены и получим алгебраическое уравнение для определения собственных чисел:

$$(2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda - 5) = 0.$$

Решая это характеристическое уравнение, находим: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 5$.

Найдем теперь собственные векторы матрицы A. Положим $\lambda = 2$. Координаты собственного вектора $\mathbf{x}$ являются ненулевым решением однородной системы линейных уравнений: $(A-2E)X = 0$ или

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решим эту систему методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эквивалентная система имеет вид:

$$-x_1 - 2x_2 = 0,$$
$$-2x_2 + x_3 = 0.$$

Выбрав в качестве свободной неизвестной x_2, найдем общее решение системы:

$$x_3 = 2x_2, \quad x_1 = -2x_2.$$

Запишем полученное решение в матричной форме

$$X = \begin{pmatrix} -2x_2 \\ x_2 \\ 2x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

В качестве первого собственного вектора матрицы возьмем вектор $\mathbf{x}_1$ с координатным столбцом

$$\overline{\mathbf{x}}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Аналогично найдем собственные векторы для собственных чисел $\lambda_2 = -1$ и $\lambda_3 = 5$. Получим

$$\lambda_2 \implies \overline{\mathbf{x}}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 \implies \overline{\mathbf{x}}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2. Найдем ортонормированный базис из собственных векторов матрицы A. Для этого нормируем векторы $\overline{\mathbf{x}}_1$, $\overline{\mathbf{x}}_2$, $\overline{\mathbf{x}}_3$, умножив каждый из них на число, обратное его длине. Получим:

$$\mathbf{e}_1' = \frac{\mathbf{x}_1}{\|\mathbf{x}_1\|}, \quad \mathbf{e}_2' = \frac{\mathbf{x}_2}{\|\mathbf{x}_2\|}, \quad \mathbf{e}_3' = \frac{\mathbf{x}_3}{\|\mathbf{x}_3\|},$$

$$\overline{\mathbf{e}_1'} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}, \quad \overline{\mathbf{e}_1'} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}, \quad \overline{\mathbf{e}_1'} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}.$$

Возьмем векторы $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$ за новый ортонормированный базис, положив $\underline{\mathbf{e}}' = \underline{\mathbf{e}}S$, и запишем матрицу перехода S от старого базиса к новому. Напомним, что в столбцах матрицы перехода стоят координаты новых базисных векторов в старом базисе. Следовательно, матрица перехода S имеет вид

$$S = \begin{pmatrix} -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

(Проверьте, что матрица S ортогональна, т. е. что $S^{-1} = S^T$!)

3. Найдем матрицу квадратичной формы в новом базисе по формуле $A' = S^T AS$ и убедимся, что она диагональна. Действительно (проверьте!)

$$A' = S^T AS = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

4. Запишем квадратичную форму в новом базисе, обозначив новые переменные через x'_1, x'_2, x'_3,

$$A(\mathbf{x}) = \underline{\mathbf{x}}' A' \overline{\mathbf{x}}' = 2{x'_1}^2 - {x'_2}^2 + 5{x'_3}^2.$$

Здесь $\overline{\mathbf{x}} = S\overline{\mathbf{x}}'$, $\overline{\mathbf{x}}' = S^{-1}\overline{\mathbf{x}} = S^T\overline{\mathbf{x}}$, $\overline{\mathbf{x}}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$.

Следовательно, линейное преобразование переменных с невырожденной (ортогональной) матрицей S приводит квадратичную форму к сумме квадратов.

Пример 11.2.3. *Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду, определить тип кривой, построить ее и найти координаты центра, вершин, фокусов:*

$$5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0.$$

Решение. Рассмотрим квадратичную форму $A(\mathbf{r}) = A(x,y) = 5x^2 + 8xy + 5y^2$ как функционал в евклидовом пространстве V_2 геометрических векторов плоскости xOy с ортонормированным базисом $\underline{\mathbf{e}} = (\mathbf{i}, \mathbf{j})$. Матрица квадратичной формы $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$. Приведем эту форму к каноническому виду, перейдя к ортонормированному базису из собственных векторов матрицы A:

1. Найдем собственные числа и собственные векторы матрицы A:

$$\det(A - \lambda E) = 0 \iff \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff \lambda_1 = 9, \lambda_2 = 1.$$

Собственные векторы, принадлежащие найденным собственным значениям, задаются координатными столбцами :

$$\lambda_1 = 9 \implies \overline{\mathbf{x}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \lambda = 1 \implies \overline{\mathbf{x}}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

2. Собственные векторы $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ ортогональны, так как принадлежат различным собственным числам симметричной матрицы A (это нетрудно видеть и непосредственно: $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 0$). Тогда, нормируя их, получим ортонормированный базис из собственных векторов матрицы A:

$$\mathbf{e}'_1 = \frac{\mathbf{x}_1}{\|\mathbf{x}_1\|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}'_2 = \frac{\mathbf{x}_2}{\|\mathbf{x}_2\|} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

или иначе:

$$\mathbf{e}'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j} = \cos\alpha \cdot \mathbf{i} + \sin\alpha \cdot \mathbf{j},$$
$$\mathbf{e}'_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j} = -\sin\alpha \cdot \mathbf{i} + \cos\alpha \cdot \mathbf{j},$$

где $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ — угол поворота вокруг начала координат, в результате которого новый базис $\underline{\mathbf{e}}'$ получен из старого $\underline{\mathbf{e}} = (\mathbf{i}, \mathbf{j})$.

3. Матрица перехода $S(\underline{\mathbf{e}} \to \underline{\mathbf{e}}')$ и обратная к ней равны:

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = S^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Координаты вектора $\mathbf{r}$ в старом базисе $\overline{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ и координаты в новом базисе $\overline{\mathbf{r}}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ связаны соотношениями:

$$\overline{\mathbf{r}} = S\overline{\mathbf{r}}' \iff \overline{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y', \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'. \end{cases} \tag{11.2.5}$$

4. Матрица квадратичной формы в новом базисе будет диагональной:

$$A' = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а сама квадратичная форма в базисе приобретет канонический вид
$$A(\mathbf{r}) = A(x', y') = 9x'^2 + y'^2.$$

Запишем теперь исходное уравнение кривой в новых координатах (x', y'), произведя в нем замену переменных по формулам (11.2.5):
$$9x'^2 + y'^2 - 18(\frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y') - 18(\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y') + 9 = 0 \iff$$
$$\iff 9x'^2 + y'^2 - 18\sqrt{2}x' + 9 = 0.$$
Избавимся в последнем уравнении от линейных членов, выделяя полные квадраты:
$$9(x'^2 - 2\sqrt{2}x' + (\sqrt{2})^2) - 9(\sqrt{2})^2 + y'^2 + 9 = 0,$$
или
$$9(x' - \sqrt{2})^2 + y'^2 = 9 \iff \frac{(x' - \sqrt{2})^2}{1} + \frac{y'^2}{9} = 1,$$
откуда, заменяя переменные $x' - \sqrt{2} = x''$, $y' = y''$, получим каноническое уравнение эллипса
$$\frac{x''^2}{1} + \frac{y''^2}{9} = 1$$
в системе координат $x''O'y''$, смещенной относительно системы $x'Oy'$ на вектор (x'_0, y'_0), где $x'_0 = \sqrt{2}$, $y'_0 = 0$. В свою очередь, система координат $x'Oy'$ получена поворотом системы xOy на угол $\alpha = \frac{\pi}{4}$ вокруг начала координат (см. п. 2 и рис. 10.1).

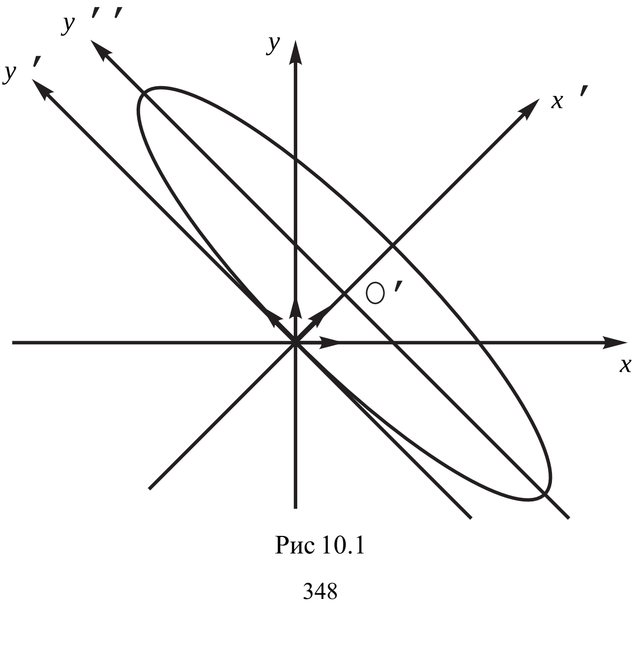


Рис 10.1

Координаты центра C, вершин A_1, A_2, фокусов F_1, F_2 в системе координат $x''O'y''$ будут соответственно:

$$C(0,0);\quad A_1(0,-3);\quad A_2(0,3);\quad F_1(0,-\sqrt{8});\quad F_2(0,\sqrt{8}).$$

Переходя от координат (x'',y'') к прежним координатам (x,y) по формулам:

$$x' = \sqrt{2}+x'',\ y' = y'';\qquad \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x' - \dfrac{1}{\sqrt{2}}y', \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x' + \dfrac{1}{\sqrt{2}}y', \end{cases}$$

получаем координаты центра, вершин и фокусов в системе координат xOy:

$$C(1,1);\quad A_1\left(1+\frac{3}{\sqrt{2}},1-\frac{3}{\sqrt{2}}\right);\quad A_2\left(1-\frac{3}{\sqrt{2}},1+\frac{3}{\sqrt{2}}\right);$$
$$F_1(3,-1);\quad F_2(-1,3).$$

§ 11.3. Классификация квадратичных форм

11.3.1. Основные определения

Определение 11.3.1. *Квадратичная форма называется* положительно (отрицательно) определенной, *если при любых значениях переменных* x_1, x_2, ..., x_n *она принимает неотрицательные (неположительные) значения и равна нулю, только если* $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$*; или иначе:*

$$A(\mathbf{x}) > 0\ (A(\mathbf{x}) < 0) \text{ для всех } \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \text{ и } A(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \text{ для } \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Определение 11.3.2. *Квадратичная форма называется* знакопостоянной положительной (знакопостоянной отрицательной)*, если она принимает лишь неотрицательные (неположительные) значения.*

Заметим, что знакопостоянная квадратичная форма может обращаться в нуль и при значениях $x_i \neq 0$ $(i = 1,2,\ldots,n)$.

Определение 11.3.3. *Квадратичная форма называется* знакопеременной*, если она может принимать как положительные, так и отрицательные значения.*

При решении многих задач часто возникает необходимость установить именно положительную (или отрицательную) определенность квадратичной формы.

11.3.2. Условия положительной определенности квадратичной формы

Проще всего сформулировать условия положительной (отрицательной) определенности квадратичной формы, когда она имеет канонический вид. В самом деле, пусть квадратичная форма приведена к сумме квадратов:

$$A(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2.$$

Тогда, очевидно, она является положительно определенной, если все канонические коэффициенты строго положительны ($\lambda_i > 0 \ \forall i = 1, \ldots, n$).

Так как число положительных и отрицательных коэффициентов в каноническом представлении квадратичной формы не зависит от преобразования, которым она была приведена к каноническому виду (см. замечание 11.2.1), то оказывается справедливой следующая

Теорема 11.3.1. *Для того чтобы квадратичная форма была положительно определенной (отрицательно определенной), необходимо и достаточно, чтобы все собственные числа матрицы квадратичной формы были положительны (отрицательны).*

ПРИМЕР 11.3.1. *Выяснить, является ли положительно определенной (отрицательно определенной) квадратичная форма:*

$$A(\mathbf{x}) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 - 4x_2x_3 + 5x_3^2.$$

РЕШЕНИЕ. Запишем матрицу квадратичной формы и найдем собственные числа этой матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = 7,\ \lambda_2 = 4,\ \lambda_3 = 1.$$

Таким образом, квадратичная форма приводится к каноническому виду

$$A(\mathbf{x}) = 7{x'_1}^2 + 7{x'_2}^2 + {x'_3}^2.$$

Очевидно, $A(\mathbf{x}) \geqslant 0$ при всех x'_1, x'_2, x'_3 и $A(\mathbf{x}) = 0$ только при $x'_1 = x'_2 = x'_3 = 0$. Следовательно, квадратичная форма — положительно определенная.

Отметим,что квадратичная форма, рассмотренная в примере 11.2.2, не является положительно определенной, она знакопеременная. (Проверьте !)

Однако приведение квадратичной формы к сумме квадратов — достаточно сложная процедура, чтобы использовать ее каждый раз для исследования положительной определенности. На практике чаще используют критерий, не требующий предварительного приведения квадратичной формы к каноническому виду. Он называется критерием Сильвестра. Прежде чем его сформулировать, введем некоторые обозначения. Рассмотрим матрицу квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Обозначим миноры этой матрицы, стоящие в левом верхнем углу (угловые миноры), соответственно:

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\ldots, \quad \Delta_n = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Критерий Сильвестра. *Для того чтобы квадратичная форма была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все ее угловые миноры были положительны:*

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \Delta_3 > 0, \quad \ldots, \quad \Delta_n > 0.$$

Для того чтобы квадратичная форма была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы знаки ее угловых миноров чередовались начиная со знака «минус»:

$$\Delta_1 < 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \Delta_3 < 0, \quad \ldots$$

Пример 11.3.2. *Исследовать вопрос о положительной определенности квадратичной формы из примера 11.3.1, используя критерий Сильвестра.*

Решение. Вычислим угловые миноры матрицы квадратичной формы $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$:

$$\Delta_1 = 3 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 8 > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 28 > 0.$$

Так как все угловые миноры положительны, то квадратичная форма положительно определена.

Пример 11.3.3. *Исследовать вопрос о положительной определенности квадратичной формы с матрицей* $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Решение. Вычислим угловые миноры матрицы A:

$$\Delta_1 = -1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -3,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Квадратичная форма не является ни положительно, ни отрицательно определенной. Чтобы установить, является ли квадратичная форма знакопостоянной или знакопеременной, нужно привести ее к каноническому виду.

Литература

[1] *Беклемишев Д.В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука, 1974. 320с.

[2] *Головина Л.И.* Линейная алгебра и некоторые ее применения. М.: Наука, 1971. 407с.

[3] *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Аналитическая геометрия. М: Наука, 1971. 232с.

[4] *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Линейная алгебра. М.: Наука, 1978. 296с.

[5] *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Основы математического анализа. М.: Наука, 1971. Ч. 1. 600с.

[6] *Кудрявцев Л.Д.* Математический анализ. М.: Высшая школа, 1973. Т.1. 616с.

[7] *Кудрявцев Л.Д.* Математический анализ. М.: Высшая школа, 1973. Т.2. 472с.

[8] *Лаптев Г.Ф.* Элементы векторного исчисления. М.: Наука, 1976. 336с.

[9] *Мышкис А.Д.* Математика. Специальные курсы. М.: Наука, 1971. 632с.

[10] *Никольский С.М.* Курс математического анализа. М.: Наука, 1973. Т.1. 432с.

[11] *Никольский С.М.* Курс математического анализа. М.: Наука, 1973. Т.2. 392с.

[12] *Очан Ю.С.* Методы математической физики. М.: Высшая школа, 1965. 384с.

[13] *Федорюк М.В.*Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1980. 352с.

[14] *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и инеграального исчисления. М.: Наука, 1966. Т.I. 607с.

[15] *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и инеграального исчисления. М.: Наука, 1966. Т.II. 800с.

[16] *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и инеграального исчисления. М.: Наука, 1966. Т.III. 656с.

[17] *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1965. 424с.