

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

А.Н. БУРОВ Н.Г. ВАХРУШЕВА С.В. КЛИШИНА

ПРАКТИКУМ ПО СПЕЦГЛАВАМ МАТЕМАТИКИ

Утверждено Редакционно-издательским советом
университета в качестве учебного пособия.

Новосибирск
2001

Рецензенты: *В.М. Бородихин*, канд. физ.-мат. наук, доц.,
Б.Г. Писляков, канд. физ.-мат. наук, доц.

Работа подготовлена на кафедре
высшей математики для студентов
технических специальностей всех факультетов

Буров А.Н., Вахрушева Н.Г., Клишина С.В.

Практикум по спецглавам математики: Учеб. пособие. –
Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2001. – 102 с.

Данное учебное пособие содержит разработки 17 занятий по специальным главам высшей математики, традиционно включаемым в учебный план: теории функций комплексного переменного, операционному исчислению, рядам Фурье, уравнениям математической физики.

Каждая разработка содержит краткие теоретические сведения, примеры решения задач, задачи для самостоятельного решения. В качестве приложения приведены задачи типового расчета (индивидуального задания) по рядам Фурье.

© Новосибирский государственный
технический университет, 2001 г.

Предисловие

В данном пособии содержатся теоретические сведения, примеры решенных задач, а также задачи для самостоятельного решения по таким разделам специальных глав высшей математики, как теория функций комплексного переменного, операционное исчисление, ряды и интегралы Фурье. В качестве приложения рядов и интегралов Фурье рассмотрены уравнения колебания струны и теплопроводности. Задачи для самостоятельного решения снабжены ответами. В приложении даны условия задач типового расчета по рядам Фурье и таблица оригиналов и изображений. Приведен список литературы, рекомендованной для более глубокого изучения рассмотренных вопросов.

Это пособие содержит разработки 17 занятий по спецглавам математики. Однако, преподаватель, ведущий занятия, может по-иному распределить представленный здесь учебный материал, руководствуясь запросами факультета.

В разработках двух последних занятий нет задач для самостоятельного решения, поскольку сам материал включает в себя серьезные задачи, решенные в общем виде.

Большинство задач оригинальными не являются. Не имея возможности дать ссылку на каждый источник, авторы включили в список литературы учебники и сборники задач, из которых взяты задачи или идеи.

1 Теория функций комплексного переменного

ЗАНЯТИЕ № 1

Комплексные числа и операции над ними

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Комплексными называются числа z вида

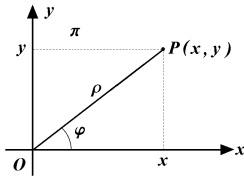
$$z = x + iy, \quad (1)$$

где $x \in \mathbb{R}$ и $y \in \mathbb{R}$ — вещественные числа, а i — мнимая единица, удовлетворяющая условию $i^2 = -1$.

Запись вида (1) называется алгебраической формой записи комплексного числа.

Числа x и y называются соответственно вещественной и мнимой частями комплексного числа z и обозначаются следующим образом: $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$.

Число $\bar{z} = x - iy$ называется комплексно сопряженным к числу $z = x + iy$.



Множество комплексных чисел будем обозначать символом $\mathbb{C}$.

Точка $P(x, y)$ с декартовыми координатами (x, y) может служить изображением комплексного числа

$$z = x + iy$$

Рис. 1

на плоскости Oxy (рис. 1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Длина ρ вектора $\overrightarrow{OP}$, где $O(0, 0)$ — начало координат, а $P(x, y)$ изображает комплексное число $z = x + iy$, называется модулем комплексного числа z и обозначается $|z|$. Угол φ , образованный вектором $\overrightarrow{OP}$ с осью Ox , называется аргументом комплексного числа z и обозначается $\operatorname{Arg} z$.

Поскольку угол φ определен с точностью до слагаемого $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, вводится понятие главного значения аргумента $\arg z \in (-\pi, \pi]$, при этом $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

ТЕОРЕМА 1. Связь модуля ρ и главного значения аргумента φ комплексного числа z с его вещественной и мнимой частями $x = \operatorname{Re} z$ и $y = \operatorname{Im} z$ задается формулами

$$\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (2)$$

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}(y/x), & \text{если } x > 0, \\ \operatorname{arctg}(y/x) + \pi, & \text{если } x < 0, y \geq 0, \\ \operatorname{arctg}(y/x) - \pi, & \text{если } x < 0, y < 0, \\ \pi/2, & \text{если } x = 0, y > 0, \\ -\pi/2, & \text{если } x = 0, y < 0, \\ \text{не определен,} & \text{если } x = 0, y = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Параметры ρ и φ можно интерпретировать как полярные координаты точки $P(x, y)$. Поскольку декартовы и полярные координаты связаны соотношением

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi. \end{cases}$$

можно дать следующее определение:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Тригонометрической *формой записи комплексных чисел* является запись вида

$$z = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (4)$$

Операции над комплексными числами в алгебраической форме производятся как обычные алгебраические операции с учетом того, что $i^2 = -1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Если даны числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$, то по определению

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2); \quad (5)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + i(x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1). \quad (6)$$

Легко заметить, что $(z_1 + z_2) \in \mathbb{C}$, если $z_1 \in \mathbb{C}$ и $z_2 \in \mathbb{C}$, а также $z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{C}$, если $z_1 \in \mathbb{C}$ и $z_2 \in \mathbb{C}$.

Отметим, что произведение взаимно сопряженных комплексных чисел является вещественным, положительным для $z \neq 0$ числом $z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$. Отсюда следует важная теорема.

ТЕОРЕМА 2. Частное от деления двух комплексных чисел является числом комплексным, то есть $\frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{C}$, если $z_1 \in \mathbb{C}$, $z_2 \in \mathbb{C}$, $z_2 \neq 0$.

В самом деле,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

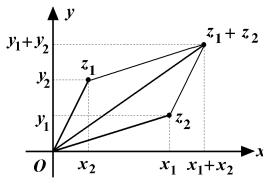


Рис. 2

Геометрический смысл суммы комплексных чисел заключается в том, что сумма изображается точкой, радиус-вектор которой есть векторная сумма радиус-векторов слагаемых (рис. 2).

Геометрический смысл умножения легко раскрывается в тригонометрической форме.

Пусть $z_1 = \rho_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $z_2 = \rho_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$. Тогда

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \rho_1 \rho_2 [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + \\ &+ i(\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2)] = \\ &= \rho_1 \rho_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \end{aligned}$$

Таким образом, модуль произведения равен произведению модулей, а аргумент — сумме аргументов.

Отсюда легко вывести формулу Муавра:

$$z^n = (\rho (\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \quad (7)$$

Из формулы Эйлера (12) следует, что комплексное число может быть записано также в показательной форме

$$z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \rho e^{i\varphi}, \quad (8)$$

где $\rho = |z|$, $\varphi = \operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi$.

Именно в показательной форме легче всего производить операцию извлечения корня n -й степени из комплексного числа.

Пусть $w = \sqrt[n]{z}$. Запишем z в показательной форме как $z = \rho e^{i(\varphi+2k\pi)}$, где $\varphi = \arg z$ — главное значение аргумента. Тогда

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} e^{i(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n})}$$

и при $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ получаем n различных значений корня n -й степени из комплексного числа. Все они находятся в вершинах правильного n -угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{|z|}$ с центром в начале координат.

ПРИМЕР 1. Найти вещественные решения уравнения

$$(1+i)x + (-2+5i)y = -4+17i.$$

РЕШЕНИЕ. Приведем к алгебраической форме левую часть уравнения.

$$(x-2y) + i(x+5y) = -4+17i.$$

Поскольку $(z_1 = z_2) \iff \begin{cases} \operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2, \\ \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2 \end{cases}$, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = -4, \\ x + 5y = 17, \end{cases}$$

решив которую, получим $x = \frac{10}{7}$, $y = \frac{19}{7}$.

ПРИМЕР 2. Найти модуль и аргумент, а также записать в тригонометрической и показательной формах число $z = -2\sqrt{3} + 2i$.

РЕШЕНИЕ. $|z| = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4$. С учетом того, что $\operatorname{Re} z < 0$, а $\operatorname{Im} z > 0$, получаем значение $\varphi = \arg z = \pi + \operatorname{arctg} \frac{2}{-2\sqrt{3}} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$. Таким образом, $z = 4 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = 4e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

ПРИМЕР 3. Найти все значения $\sqrt[3]{\sqrt{3} - i}$.

РЕШЕНИЕ. $|z| = \sqrt{3 + 1} = 2$; $\arg z = \operatorname{arctg}(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = -\frac{\pi}{6}$. Таким образом, $z = 2e^{i(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi)}$, следовательно, $w = \sqrt[3]{-\sqrt{3} + i} = \sqrt[3]{2}e^{i(-\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3})}$, и мы имеем три значения корня:

$$\begin{aligned} k = 0 : w_0 &= \sqrt[3]{2} e^{-i\frac{\pi}{18}} = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{\pi}{18} - i \sin \frac{\pi}{18} \right); \\ k = 1 : w_1 &= \sqrt[3]{2} e^{i(-\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi}{3})} = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{11\pi}{18} + i \sin \frac{11\pi}{18} \right); \\ k = 2 : w_2 &= \sqrt[3]{2} e^{i(-\frac{\pi}{18} + \frac{4\pi}{3})} = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{23\pi}{18} + i \sin \frac{23\pi}{18} \right). \end{aligned}$$

ПРИМЕР 4. Какое множество точек на плоскости комплексного переменного определяется условием $|z - z_0| \leq R$, где $z_0 = x_0 + iy_0$ — заданное комплексное число, $R > 0$ — заданное вещественное число?

РЕШЕНИЕ. Так как $|z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$, имеем неравенство $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq R^2$, которое задает круг радиуса R с центром в точке z_0 .

ПРИМЕР 5. Какое множество точек на плоскости комплексного переменного определяется условием $\operatorname{Im} \bar{z}^2 > 2$?

РЕШЕНИЕ. Если $z = x + iy$, то

$$\bar{z}^2 = (x - iy)^2 = (x^2 - y^2) - 2ixy.$$

Следовательно, $\operatorname{Im} \bar{z}^2 = -2xy$, и мы имеем неравенство $-2xy > 2$ или $xy < -1$, которое определяет множество точек плоскости, расположенное вне ветвей гиперболы $xy = -1$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Доказать тождества:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \overline{(z_1 \pm z_2)} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2; & \text{b) } \overline{(z_1 \cdot z_2)} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2; \\ \text{c) } \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}; & \text{d) } \overline{(\bar{z}_1 \pm \bar{z}_2)} = z_1 \pm z_2. \end{array}$$

2. Доказать следующие свойства модуля комплексного числа:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } |\bar{z}| = |z|; & \text{b) } |\operatorname{Re} z| \leq |z|; & \text{c) } |\operatorname{Im} z| \leq |z|; \\ \text{d) } |z\bar{z}| = |z|^2; & \text{e) } |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|; & \text{f) } |z^n| = |z|^n; \\ \text{g) } \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}; & \text{h) } |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|; & \text{i) } \left||z_1| - |z_2|\right| \leq |z_1 - z_2|. \end{array}$$

3. Найти вещественные решения уравнений:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } (3x - i)(2 + i) + (x - iy)(1 + 2i) = 5 + 6i; \\ \text{b) } 12((2x + i)(1 + i) + (x + y)(3 - 2i)) = 17 + 6i; \\ \text{c) } \frac{1}{z - i} + \frac{2 + i}{1 + i} = \sqrt{2}, \text{ где } z = x + iy. \end{array}$$

4. Привести к алгебраической форме комплексные числа:

$$\text{a) } \frac{(1 + i)(2 - 3i)}{(-2 + 4i)(2 + 3i)}; \quad \text{b) } \frac{(1 + i)(2 + 3i)}{(-2 + 4i)(2 - 3i)}; \quad \text{c) } \frac{(5 - i)(2 + i)}{(1 + i)(3 - 2i)}.$$

5. Решить квадратные уравнения:

$$\text{a) } x^2 + 2x + 5 = 0; \quad \text{b) } x^2 + 4x + 13 = 0; \quad \text{c) } x^2 - 3x + 7 = 0.$$

6. Найти модуль, главное значение аргумента, представить в тригонометрической и показательной формах следующие комплексные числа:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } z = 4 + 3i; & \text{b) } z = -2 + 2\sqrt{3}i; & \text{c) } z = -7 - i; \\ \text{d) } z = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}; & \text{e) } z = -\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}; & \text{f) } z = -1 - i\sqrt{3}. \end{array}$$

7. Вычислить:

$$\text{a) } \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^{40}; \quad \text{b) } (2 - 2i)^7; \quad \text{c) } (\sqrt{3} - 3i)^6; \quad \text{d) } \left(\frac{1 - i}{1 + i}\right)^8.$$

8. С помощью формулы Муавра выразить через степени $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$ следующие функции:

$$\text{a) } \sin 3\varphi; \quad \text{b) } \cos 3\varphi; \quad \text{c) } \sin 4\varphi; \quad \text{d) } \cos 4\varphi; \quad \text{e) } \sin 5\varphi; \quad \text{f) } \cos 5\varphi.$$

9. Вычислить все значения корня:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \sqrt[4]{-1}; & \text{b) } \sqrt{i}; & \text{c) } \sqrt[3]{i}; \quad \text{d) } \sqrt[4]{-i}; \quad \text{e) } \sqrt[4]{1}; \quad \text{f) } \sqrt[3]{-1 + i}; \\ \text{g) } \sqrt{2 - 2\sqrt{3}i}; & \text{h) } \sqrt[5]{\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)}. \end{array}$$

10. Определить, какие линии задаются условиями:

- | | |
|--|---|
| a) $\operatorname{Im} z^2 = 2$; | b) $\operatorname{Im} (\overline{z^2 - \bar{z}}) = 2 - \operatorname{Im} z$; |
| c) $ z - i + z + i = 4$; | d) $3 z - \operatorname{Re} z = 12$; |
| e) $ z - 2 - 1 - 2\bar{z} = 0$; | f) $\operatorname{Re} (1 + z) = z $; |
| g) $\operatorname{Im} z < -2$; | h) $ z + 2 + i \geq 1$; |
| i) $\left \frac{z - 1}{z + 1} \right \leq 1$; | j) $\operatorname{Im} \left(\frac{1}{z} \right) < -\frac{1}{2}$. |

ЗАНЯТИЕ № 2

Элементарные функции комплексного переменного

В области D комплексных чисел определена (быть может, многозначная) функция $w = f(z)$, если каждой точке $z \in D$ поставлено в соответствие комплексное значение w (быть может, несколько или бесконечно много).

Заданию функции $w = f(z)$ соответствует задание двух вещественнозначных функций от двух вещественных переменных каждая:

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

где $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$, $u = \operatorname{Re} w$, $v = \operatorname{Im} w$.

Основными элементарными функциями комплексного переменного являются:

1. Дробно-рациональная функция

$$w = \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0}{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0},$$

в частности многочлен $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ — целая функция.

2. Показательная функция, определяемая как сумма ряда

$$w = e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots, \quad (9)$$

абсолютно сходящегося на всей комплексной плоскости.

Отметим следующие свойства показательной функции:

- а) $e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$, $\forall z_1 \in \mathbb{C}, z_2 \in \mathbb{C}$;
- б) $e^{z + 2k\pi i} = e^z \quad \forall k \in \mathbb{Z}$ — то есть показательная функция в комплексной плоскости имеет период $2\pi i$;
- в) областью значений показательной функции являются все комплексные числа за исключением $z = 0$ (см. ниже пример 9).

3. *Тригонометрические функции* определяются степенными рядами

$$w = \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \quad (10)$$

$$w = \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad (11)$$

абсолютно сходящимися на всей комплексной плоскости.

Показательная и тригонометрические функции связаны формулами Эйлера:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z; \quad (12)$$

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z; \quad (13)$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}; \quad (14)$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \quad (15)$$

Тангенс и котангенс определяются равенствами

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Заметим, что тригонометрические функции могут принимать любое комплексное значение (см. ниже пример 10).

4. *Гиперболические функции* определяются следующим образом:

$$\text{а) } \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \text{ — косинус гиперболический;}$$

$$\text{б) } \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \text{ — синус гиперболический.}$$

Связь между гиперболическими и тригонометрическими функциями задается формулами:

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}(iz) &= i \sin z; & \operatorname{ch}(iz) &= \cos z; \\ \sin(iz) &= i \operatorname{sh} z; & \cos(iz) &= \operatorname{ch} z. \end{aligned}$$

Аналогично тригонометрическим, можно ввести гиперболические тангенс и котангенс $\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}$, $\operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}$.

5. *Логарифмическая функция* определяется как обратная к показательной. Поскольку $z = e^w$ имеет период $2\pi i$ и областью значений всю комплексную плоскость, кроме $z = 0$, логарифм — функция многозначная, определенная для всех $z \neq 0$.

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z = \ln |z| + i(\arg z + 2k\pi), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Главным значением логарифма называется значение при $k = 0$, то есть $\ln z = \ln |z| + i \arg z$.

Справедливы соотношения:

$$\operatorname{Ln} z = \ln z + 2k\pi i; \quad \operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2; \quad \operatorname{Ln} \left(\frac{z_1}{z_2} \right) = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2.$$

6. Обратные тригонометрические функции — это функции

$$w = \operatorname{Arcsin} z, \quad w = \operatorname{Arccos} z, \quad w = \operatorname{Arctg} z, \quad w = \operatorname{Arcctg} z,$$

определяемые как обратные соответственно к

$$z = \sin w, \quad z = \cos w, \quad z = \operatorname{tg} w, \quad z = \operatorname{ctg} w.$$

Эти функции являются многозначными и могут быть выражены через логарифм:

$$\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln} \left(iz + \sqrt{1 - z^2} \right); \quad (16)$$

$$\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln} \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right); \quad (17)$$

$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + iz}{1 - iz}; \quad (18)$$

$$\operatorname{Arcctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{z + i}{z - i}. \quad (19)$$

7. Общая степенная функция — функция $z^a = e^{a \operatorname{Ln} z}$, многозначная, $z^a = e^{a \ln z}$ — главное значение, $a = \alpha + \beta i$ — произвольное комплексное число.

8. Общая показательная функция — функция $a^z = e^{z \operatorname{Ln} a}$, многозначная, $e^{z \ln a}$ — ее главное значение, $a = \alpha + \beta i \neq 0$ — произвольное комплексное число.

ПРИМЕР 6. Найти вещественную и мнимую части функции

$$w = z^2 + \bar{z}.$$

$$\text{РЕШЕНИЕ. } w = (x + iy)^2 + (x - iy) = (x^2 - y^2 + x) + i(2xy - y).$$

Таким образом,

$$\begin{cases} u = \operatorname{Re} w = x^2 - y^2 + x, \\ v = \operatorname{Im} w = 2xy - y. \end{cases}$$

ПРИМЕР 7. Найти вещественную и мнимую части функции

$$w = \cos(z + 1).$$

РЕШЕНИЕ.

$$\begin{aligned} w &= \cos(z + 1) = \cos((x + 1) + iy) = \\ &= \cos(x + 1) \cos(iy) - \sin(x + 1) \sin(iy) = \\ &= \cos(x + 1) \operatorname{ch} y + i \sin(x + 1) \operatorname{sh} y. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{cases} u = \operatorname{Re} w = \cos(x + 1) \operatorname{ch} y, \\ v = \operatorname{Im} w = \sin(x + 1) \operatorname{sh} y. \end{cases}$$

ПРИМЕР 8. Найти вещественную и мнимую части функции

$$w = e^{z^2+z}.$$

РЕШЕНИЕ. $w = e^{(x+iy)^2+(x+iy)} = e^{(x^2-y^2+x)+i(2xy+y)} = e^{x^2-y^2+x} e^{i(2xy+y)}.$

Применив формулу Эйлера, получим

$$w = e^{x^2-y^2+x} (\cos(2xy + y) + i \sin(2xy + y)).$$

Таким образом,

$$\begin{cases} u = \operatorname{Re} w = e^{x^2-y^2+x} \cos(2xy + y), \\ v = \operatorname{Im} w = e^{x^2-y^2+x} \sin(2xy + y). \end{cases}$$

ПРИМЕР 9. Найти модуль и аргумент $w = e^z$ ($\forall z \in \mathbb{C}$).

РЕШЕНИЕ.

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y). \quad (20)$$

Таким образом $|w| = |e^z| = e^x \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = e^x > 0$.

Видим, что, в силу произвольности x , $|e^z|$ может принимать любое значение, кроме $|w| = 0$.

Из последней формы записи e^z в формуле (20) видим, что $\operatorname{Arg} w = y$. В силу произвольности значения y делаем вывод, что аргумент числа w может принимать любое значение.

Таким образом, область значений функции $w = e^z$ — вся комплексная плоскость, кроме $w = 0$.

ПРИМЕР 10. Решить уравнение $\sin z = 2$.

РЕШЕНИЕ. Решением по определению является $z = \operatorname{Arcsin} 2$. Приведем это значение к алгебраической форме.

$$\begin{aligned}\operatorname{Arcsin} 2 &= -i \operatorname{Ln} \left(2i + \sqrt{1 - 2^2} \right) = \\ &= -i \operatorname{Ln} \left(2i + \sqrt{-3} \right) = -i \operatorname{Ln} \left(2 \pm \sqrt{3} \right) i.\end{aligned}$$

Так как $2 > \sqrt{3}$, справедливы равенства

$$\left| \left(2 \pm \sqrt{3} \right) i \right| = 2 \pm \sqrt{3}, \quad \arg \left(2 \pm \sqrt{3} \right) i = \frac{\pi}{2},$$

поэтому

$$\begin{aligned}z &= \operatorname{Arcsin} 2 = -i \left(\ln \left(2 \pm \sqrt{3} \right) + i \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) \right) = \\ &= \frac{\pi}{2} + 2k\pi - i \ln \left(2 \pm \sqrt{3} \right), \quad k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

ПРИМЕР 11. Решить уравнение $e^z = -3$.

РЕШЕНИЕ. Решением является

$$z = \operatorname{Ln}(-3) = \ln|-3| + i(\arg(-3) + 2k\pi) = \ln 3 + i(\pi + 2k\pi); \quad k \in \mathbb{Z}.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

11. Найти вещественную и мнимую части функций:

$$\begin{aligned}\text{a) } w &= 2z - 1; \quad \text{b) } w = z + \bar{z}^2; \quad \text{c) } w = z^{-1}; \\ \text{d) } w &= e^{\bar{z}^2}; \quad \text{e) } w = e^{\bar{z}}; \quad \text{f) } w = \operatorname{ch}(z - i); \\ \text{g) } w &= 2^{z^2}; \quad \text{h) } w = \operatorname{sh} z; \quad \text{i) } w = \operatorname{tg} z.\end{aligned}$$

12. Найти логарифмы следующих чисел:

$$\text{a) } -2; \quad \text{b) } i; \quad \text{c) } (-1 - i); \quad \text{d) } 3 - 2i; \quad \text{e) } i^i.$$

13. Найти алгебраическую форму следующих комплексных чисел:

$$\text{a) } i^i; \quad \text{b) } (-1)^{\sqrt{2}}; \quad \text{c) } \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} \right)^{2i}; \quad \text{d) } \left(\frac{\sqrt{3}+i}{2} \right)^{1+i}; \quad \text{e) } e^{\frac{\pi}{4}i};$$

$$\text{f) } \ln(1-i); \quad \text{g) } \cos \pi i; \quad \text{h) } \operatorname{Arcsin} i; \quad \text{i) } \operatorname{Arctg} \frac{i}{3}; \quad \text{j) } \operatorname{sh} \frac{\pi i}{2}.$$

14. Решить уравнения:

$$\begin{aligned}\text{a) } e^{-z} + 1 &= 0; \quad \text{b) } 4 \cos z + 5 = 0; \\ \text{c) } \sin z &= \pi i; \quad \text{d) } e^{2z} + 2e^z - 3 = 0.\end{aligned}$$

ЗАНЯТИЕ № 3
Аналитические функции
Условия Коши-Римана

Пусть функция $w = f(z)$ определена в некоторой области $D \subseteq \mathbb{C}$. Введем обозначение $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$. Тогда, если $z \in D$ и $z + \Delta z \in D$, обозначим $\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Функция $w = f(z)$ называется дифференцируемой в точке $z \in D$, если существует

$$w' = f'(z) = \frac{dw}{dz}(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}.$$

Этот предел называется производной функции $f(z)$ в точке z .

ТЕОРЕМА 3. В каждой точке $z = x + iy$, в которой функция $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ дифференцируема, выполнены соотношения

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (21)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (22)$$

Обратно, если в некоторой точке вещественнозначные функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы, и при этом выполнены соотношения (21–22), то комплекснозначная функция

$$w = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

дифференцируема в точке $z = x + iy$.

Соотношения (21–22) называются условиями Коши-Римана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Комплекснозначная функция $w = f(z)$ называется аналитической в точке $z \in D \subseteq \mathbb{C}$, если она дифференцируема как в самой точке z , так и в некоторой ее окрестности. Функция $w = f(z)$ называется аналитической в области D , если она аналитична в каждой точке этой области.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Вещественнозначная функция $\varphi(x, y)$, удовлетворяющая в некоторой области $D \subseteq \mathbb{R}^2$ уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad (23)$$

называется гармонической в этой области.

Уравнение (23) носит название уравнение Лапласа.

ТЕОРЕМА 4. Действительная и мнимая части аналитической в некоторой области функции являются функциями, гармоническими в этой области.

С помощью условий Коши-Римана (21-22) можно восстановить, с точностью до константы, аналитическую функцию по ее действительной или мнимой части. Если заданы начальные условия, функция восстанавливается однозначно. В этом случае можно также воспользоваться формулами

$$f(z) = 2u \left(\frac{z + \bar{z}_0}{2}, \frac{z - \bar{z}_0}{2i} \right) - \bar{C}_0, \quad (24)$$

$$f(z) = 2iv \left(\frac{z + \bar{z}_0}{2}, \frac{z - \bar{z}_0}{2i} \right) + \bar{C}_0, \quad (25)$$

где $C_0 = f(z_0)$ (см. примеры 13 и 14).

ПРИМЕРЫ

ПРИМЕР 12. Показать, что функция $f(z) = \sin(z + i)$ является аналитической для всех $z \in \mathbb{C}$.

РЕШЕНИЕ. Выделим вначале действительную и мнимую части $f(z)$.

$$\begin{aligned} f(z) &= \sin(x + iy + i) = \sin x \cos i(y + 1) + \cos x \sin i(y + 1) = \\ &= \sin x \operatorname{ch}(y + 1) + i \cos x \operatorname{sh}(y + 1). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$u(x, y) = \sin x \operatorname{ch}(y + 1), \quad v(x, y) = \operatorname{Im} f(z) = \cos x \operatorname{sh}(y + 1).$$

Проверим выполнение условий Коши-Римана.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos x \operatorname{ch}(y + 1) = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \sin x \operatorname{sh}(y + 1) = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Следовательно, функция $f(z) = \sin(z + i)$ всюду является аналитической.

ПРИМЕР 13. Восстановить аналитическую функцию по известной действительной части $\operatorname{Re} w = u(x, y) = x^2 - y^2 - y$, при условии: $f(0) = 0$.

РЕШЕНИЕ. Прежде всего, проверим условие гармоничности (23).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 - 2 = 0.$$

Из первого условия Коши-Римана (21) имеем

$$v(x, y) = \int \frac{\partial u}{\partial x} dy = \int 2x dy = 2xy + \varphi(x),$$

где функция $\varphi(x)$ пока неизвестна. Найдем ее с помощью второго условия Коши-Римана (22). Будем иметь $2y + \varphi'(x) = 2y + 1$, откуда $\varphi'(x) = 1$, и после интегрирования получаем $\varphi(x) = x + C$, где C — произвольная константа. Значит,

$$\begin{aligned} f(z) &= u(x, y) + iv(x, y) = x^2 - y^2 - y + i(2xy + x + C) = \\ &= (x^2 + 2ixy - y^2) + i(x + iy) + iC = z^2 + iz + iC. \end{aligned}$$

Константу C находим из начального условия. Так как $f(0) = 0$, получаем, что $C = 0$ и окончательно $f(z) = z^2 + iz$.

ПРИМЕР 14. Восстановить аналитическую функцию по известной мнимой части $v(x, y) = e^{2x} \sin 2y$, начальное условие: $f(0) = 1$.

РЕШЕНИЕ. Прежде всего, проверим условие гармоничности (23).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4e^{2x} \sin 2y - 4e^{2x} \sin 2y = 0.$$

Воспользуемся формулой (25). У нас $z_0 = \bar{z}_0 = 0$, $C_0 = \bar{C}_0 = 1$.

$$\begin{aligned} f(z) &= 2iv \left(\frac{z + \bar{z}_0}{2}, \frac{z - \bar{z}_0}{2i} \right) + \bar{C}_0 = 2ie^{\frac{2(z+0)}{2}} \sin \left(\frac{2(z-0)}{2i} \right) + 1 = \\ &= 2ie^z \sin \left(\frac{z}{i} \right) + 1 = 2ie^z \sin(-iz) + 1 = 2i(-i)e^z \operatorname{sh} z + 1 = \\ &= 2e^z \frac{e^z - e^{-z}}{2} + 1 = e^{2z} - 1 + 1 = e^{2z}. \end{aligned}$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

15. Установить, какие из заданных функций являются аналитическими хотя бы в одной точке:

- a) $w = 2z - 1$; b) $w = z + \bar{z}^2$; c) $w = z^{-1}$;
d) $w = e^{z^2} \operatorname{Re} \bar{z}$; e) $w = e^{\bar{z}}$; f) $w = \sin(z + i)$;
g) $w = |z| + z$; h) $w = \operatorname{ch} \bar{z}$; i) $w = \operatorname{tg} z$.

16. Установить, какие из заданных функций являются гармоническими:

- a) $u = x^2 + 2x - y^2$; b) $u = 2e^x \cos y$; c) $u = 3x^2 + y$;
d) $u = \frac{x}{x^2 + y^2}$; e) $u = -\frac{y}{x^2 + y^2}$; f) $u = \frac{1}{x^2 + y^2}$;
g) $u = \arctg \frac{y}{x}$; h) $u = \ln(x^2 + y^2)$; i) $u = x \ln y$.

17. Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию $f(z)$ по известной функции $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ или $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$ и значению $f(z_0)$:

- a) $u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad f(\pi) = \frac{1}{\pi};$
- b) $v = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \quad (x > 0), \quad f(1) = 0;$
- c) $u = x^2 - y^2 + 2x, \quad f(i) = 2i - 1;$
- d) $v = 2(\operatorname{ch} x \sin y - xy), \quad f(0) = 0;$
- e) $u = 2 \sin x \operatorname{ch} y - x, \quad f(0) = 0;$
- f) $v = 2(2 \operatorname{sh} x \sin y + xy), \quad f(0) = 3;$
- g) $v = -2 \sin 2x \operatorname{sh} 2y + y, \quad f(0) = 2;$
- h) $v = 2 \cos x \operatorname{ch} y - x^2 + y^2, \quad f(0) = 2.$

ЗАНЯТИЕ № 4

Интеграл Коши

Интегральная формула Коши

Пусть функция $w = f(z)$ определена в области $D \subseteq \mathbb{C}$, через C обозначим кусочно-гладкую ориентированную кривую, целиком лежащую в D , эта кривая может быть и замкнута — в этом случае будем говорить о замкнутом цикле.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Определим интеграл Коши от функции $w = f(z)$ комплексного переменного z по кривой C с помощью следующей цепочки равенств:

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_C [u(x, y) + i v(x, y)] (dx + i dy) = \\ &= \int_C u dx - v dy + i \int_C v dx + u dy. \end{aligned} \quad (26)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из определения видно, что интеграл Коши сводится к вычислению криволинейных интегралов 2-го рода.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если кривая C замкнута, то для интеграла Коши будем использовать обозначение

$$\oint_C f(z) dz.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Кривую C назовем спрямляемой, если каждая конечная дуга этой кривой имеет длину.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Область $D \subseteq \mathbb{C}$ называется односвязной, если она ограничена непрерывной спрямляемой кривой C без самопересечений.

ТЕОРЕМА 5 (интегральная теорема Коши). Если $f(z)$ — однозначная аналитическая функция в односвязной области $D \subseteq \mathbb{C}$, то для любой замкнутой спрямляемой кривой C , целиком лежащей в этой области, выполнено равенство

$$\oint_C f(z) dz = 0. \quad (27)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Во всех рассмотренных примерах области ограничены кусочно-гладкими кривыми (а они являются спрямляемыми), поэтому теорему 5 нам достаточно было сформулировать только для этого случая.

ТЕОРЕМА 6 (формула Ньютона-Лейбница). Если $f(z)$ — однозначная аналитическая функция в односвязной области $D \subseteq \mathbb{C}$, $F(z)$ — ее первообразная, т. е. $F'(z) = f(z)$, C — ориентированная кривая с начальной точкой z_1 и с конечной точкой z_2 , то выполняется равенство

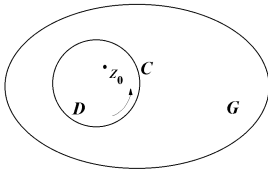
$$\int_C f(z) dz = \int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = F(z) \Big|_{z_1}^{z_2} = F(z_2) - F(z_1), \quad (28)$$

т. е. интеграл не зависит от пути, соединяющего точки z_1 и z_2 , а зависит только от функции и от конечных точек.

ТЕОРЕМА 7 (теорема Коши). Если $f(z)$ — однозначная аналитическая функция в области $D \subseteq \mathbb{C}$, ограниченной контуром C и непересекающимися контурами $C_1, C_2, \dots, C_n$, целиком лежащими внутри контура C , то выполнено равенство

$$\oint_C f(z) dz = \oint_{C_1} f(z) dz + \oint_{C_2} f(z) dz + \dots + \oint_{C_n} f(z) dz. \quad (29)$$

ТЕОРЕМА 8 (интегральная формула Коши). Если $f(z)$ — однозначная и аналитическая в области $G \subseteq \mathbb{C}$ функция, C — кусочно-



гладкий контур без самопересечений, целиком лежащий в G и ограничивающий односвязную область D , то

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{z - z_0}, \quad (30)$$

Рис. 3 где $z_0 \in D$. Контур обходится при этом так, что область D остается слева (рис. 3).

ТЕОРЕМА 9 (обобщенная интегральная формула Коши). В условиях теоремы 8 для любого $n \in \mathbb{N}$ справедлива формула

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}}. \quad (31)$$

ПРИМЕР 15. Вычислить интеграл $\int_C (1 + \bar{z}) dz$, где C — дуга параболы $y = x^2$ в пределах от $x_1 = 0$ до $x_2 = 1$.

РЕШЕНИЕ. Так как функция $f(z) = 1 + \bar{z}$ не является аналитической, будем вычислять интеграл непосредственно по формуле (26)

$$\begin{aligned} \int_C (1 + \bar{z}) dz &= \int_C (1 + x - iy) (dx + i dy) = \\ &= \int_C (1 + x) dx + y dy + i \int_C -y dx + (1 + x) dy = \\ &= \left| \begin{array}{ll} y = x^2 & x_1 = 0 \\ dy = 2x dx & x_2 = 1 \end{array} \right| = \\ &= \int_0^1 (1 + x + 2x^3) dx + i \int_0^1 (-x^2 + 2x + 2x^2) dx = \\ &= \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2} \right) \Big|_0^1 + i \left(\frac{x^3}{3} + x^2 \right) \Big|_0^1 = 2 + \frac{4}{3} i. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 16. Вычислить интеграл $\int_0^{1+i} z \sin z dz$.

РЕШЕНИЕ. Поскольку $z \sin z$ — аналитическая функция, воспользуемся формулой Ньютона-Лейбница (28). Для нахождения первообразной воспользуемся формулой интегрирования по частям:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{1+i} z \sin z \, dz &= \left| \begin{array}{ll} u = z & du = dz \\ dv = \sin z \, dz & v = -\cos z \end{array} \right| = \\
 &= -z \cos z \Big|_0^{1+i} + \int_0^{1+i} \cos z \, dz = \\
 &= -(1+i) \cos(1+i) + \sin(1+i) = \\
 &= -(1+i)(\cos 1 \cos i - \sin 1 \sin i) + \\
 &\quad + (\sin 1 \cos i + \cos 1 \sin i) = \\
 &= -(1+i)(\cos 1 \operatorname{ch} 1 - i \sin 1 \operatorname{sh} 1) + \\
 &\quad + \sin 1 \operatorname{ch} 1 + i \cos 1 \operatorname{sh} 1 = \\
 &= \sin 1 \operatorname{ch} 1 - \cos 1 \operatorname{ch} 1 - \sin 1 \operatorname{sh} 1 + \\
 &\quad + i(\sin 1 \operatorname{sh} 1 - \cos 1 \operatorname{ch} 1 + \cos 1 \operatorname{sh} 1).
 \end{aligned}$$

Последнее выражение можно упростить. Так как

$$\operatorname{ch} z - \operatorname{sh} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} - \frac{e^z - e^{-z}}{2} = e^{-z},$$

то окончательным ответом будет

$$\int_0^{1+i} z \sin z \, dz = \frac{\sin 1}{e} - \cos 1 \operatorname{ch} 1 + i \left(\sin 1 \operatorname{sh} 1 - \frac{\cos 1}{e} \right).$$

ПРИМЕР 17. Вычислить интеграл $\oint_{|z|=2} \frac{e^{2z}}{z-1} \, dz$.

РЕШЕНИЕ. Контуром интегрирования является окружность радиуса 2 с центром в точке $z = 0$. Точка $z_0 = 1$ внутри контура попадает. Функция $f(z) = e^{2z}$ является аналитической внутри контура интегрирования. Поэтому по формуле (30) имеем

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^{2z}}{z-1} \, dz = 2\pi i e^{2z} \Big|_{z=1} = 2\pi e^2 i.$$

ПРИМЕР 18. Вычислить интеграл $\oint_{|z|=3} \frac{e^{2z}}{z^2 - 3z + 2} \, dz$.

РЕШЕНИЕ. ПЕРВЫЙ СПОСОБ. Так как $z^2 - 3z + 2 = (z - 1)(z - 2)$, с помощью метода неопределенных коэффициентов подынтегральную функцию можно разложить в сумму элементарных дробей следующим образом:

$$\frac{e^{2z}}{z^2 - 3z + 2} = \frac{e^{2z}}{z - 2} - \frac{e^{2z}}{z - 1}.$$

Контуром интегрирования является окружность радиуса 3 с центром в точке $z = 0$. Особые точки $z_1 = 1$ и $z_2 = 2$ внутрь контура попадают. Функция $f(z) = e^{2z}$ является аналитической внутри контура интегрирования. Поэтому по формуле (30) имеем

$$\oint_{|z|=3} \frac{e^{2z}}{z^2 - 3z + 2} dz = \oint_{|z|=3} \frac{e^{2z}}{z - 2} dz - \oint_{|z|=3} \frac{e^{2z}}{z - 1} dz = 2\pi (e^4 - e^2) i.$$

РЕШЕНИЕ. ВТОРОЙ СПОСОБ. Окружим точки $z = 1$ и $z = 2$ окружностями C_1 и C_1 столь малого радиуса, чтобы они не пересекались и лежали внутри окружности $|z| = 3$ (например, $C_1 : |z - 1| = 1/3$, $C_2 : |z - 2| = 1/3$). Воспользуемся теоремой 7.

$$\oint_{|z|=3} \frac{e^{2z}}{z^2 - 3z + 2} dz = \oint_{C_1} \frac{e^{2z}}{(z - 1)(z - 2)} dz + \oint_{C_1} \frac{e^{2z}}{(z - 1)(z - 2)} dz.$$

К первому из этих интегралов применим формулу (30), считая

$$z_0 = 1, \quad f(z) = \frac{e^{2z}}{z - 2},$$

для второго интеграла —

$$z_0 = 2, \quad f(z) = \frac{e^{2z}}{z - 1}.$$

Получим

$$\oint_{|z|=3} \frac{e^{2z}}{z^2 - 3z + 2} dz = 2\pi i \left(\left. \frac{e^{2z}}{(z - 2)} \right|_{z=1} + \left. \frac{e^{2z}}{(z - 1)} \right|_{z=2} \right) = 2\pi (e^4 - e^2) i.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

18. Вычислить интегралы:

- $\int_C z \operatorname{Im} z^2 dz$, $C : |z| = 1$ ($-\pi \leq \arg z \leq 0$);
- $\int_C e^{|z|^2} \operatorname{Re} z dz$, C — прямая, соединяющая точки $z_1 = 0$, $z_2 = 1 + i$;

- c) $\int_C z \operatorname{Re} z \, dz$, $C : |z| = 1$, обход против часовой стрелки;
d) $\int_C z \bar{z} \, dz$, $C : |z| = 1$, обход против часовой стрелки.

19. Вычислить интегралы, предварительно убедившись в аналитичности подынтегральной функции:

a) $\int_{1+i}^{-1-i} (2z+1) \, dz$; b) $\int_0^{i+1} z^3 \, dz$; c) $\int_{1+i}^{2i} (z^3 - z) e^{(z^2/2)} \, dz$;
d) $\int_0^i z \cos z \, dz$; e) $\int_0^i (z-i) e^{-z} \, dz$; f) $\int_0^{1+i} \sin z \cos z \, dz$.

20. С помощью интегральной формулы Коши вычислить интегралы (все окружности обходятся против часовой стрелки):

a) $\int_{|z-1|=1} \frac{e^{iz}}{z^2+1} \, dz$; b) $\int_{|z|=2} \frac{\sin iz}{z^2-4z+3} \, dz$; c) $\int_{|z|=4} \frac{dz}{(z^2+9)(z+9)}$;
d) $\int_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3} \, dz$; e) $\int_{|z|=2} \frac{z \operatorname{sh} z}{(z^2-1)^2} \, dz$; f) $\int_{|z-3|=6} \frac{z \, dz}{(z-2)^3(z+4)}$.

ЗАНЯТИЕ № 5

Ряды в комплексной плоскости

Рассмотрим ряд с комплексными членами

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n \dots = \sum_{n=1}^{\infty} z_n, \quad (32)$$

где $z_n = x_n + iy_n$.

ТЕОРЕМА 10. Ряд (32) сходится тогда и только тогда, когда сходится каждый из рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n \dots, \quad (33)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} y_n = y_1 + y_2 + \dots + y_n \dots. \quad (34)$$

ТЕОРЕМА 11 (признак абсолютной сходимости). Из сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n| + \dots \quad (35)$$

следует сходимость ряда (32), который называется в этом случае абсолютно сходящимся.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Ряды (33), (34), (35) являются рядами с действительными членами, поэтому вопрос об их сходимости решается с помощью известных признаков из теории действительных рядов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = c_0 + c_1 (z - z_0) + \dots + c_n (z - z_0)^n \dots, \quad (36)$$

где $z_0, c_0, c_1, \dots, c_n, \dots$ — заданные комплексные числа, z — произвольное комплексное число, называется степенным рядом.

ТЕОРЕМА 12. Областью абсолютной сходимости ряда (36) является круг $|z - z_0| < R$, где R — радиус сходимости степенного ряда. В случае когда $c_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, он может быть найден по формулам

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} \quad (37)$$

или

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}, \quad (38)$$

если эти пределы существуют.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. В некоторых случаях, например, если $c_n = 0$ для некоторых n , можно искать область сходимости непосредственно по признаку Даламбера.

ТЕОРЕМА 13. Функция $f(z)$, однозначная и аналитическая в точке z_0 , разлагается в окрестности этой точки в степенной ряд Тейлора

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad (39)$$

коэффициенты c_n которого вычисляются по формулам

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (40)$$

где Γ — окружность с центром в точке z_0 , целиком лежащая в окрестности аналитичности функции $f(z)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Следует отметить, что при разложении функций в ряд Тейлора часто используют не формулу (40), а готовые разложения (9), (10), (11), для которых $R = \infty$ и

$$\begin{aligned}\ln(1+z) &= z - \frac{z^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} + \dots = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}, \quad R = 1,\end{aligned}\quad (41)$$

$$\begin{aligned}(1+z)^p &= 1 + pz + \frac{p(p-1)z^2}{2!} + \dots + \\ &+ \frac{p(p-1) \cdot \dots \cdot (p-n+1)z^n}{n!} + \dots = \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p-1) \cdot \dots \cdot (p-n+1)z^n}{n!}, \quad R = 1.\end{aligned}\quad (42)$$

ТЕОРЕМА 14. Функция $f(z)$, однозначная и аналитическая в кольце $r < |z - z_0| < R$ (допускается $r = 0$ или $R = \infty$), разлагается в этом кольце в ряд Лорана

$$\begin{aligned}f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,\end{aligned}\quad (43)$$

коэффициенты c_n которого вычисляются по формулам

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (44)$$

где Γ — окружность с центром в точке z_0 , целиком лежащая внутри кольца.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. В формуле (43) первое слагаемое называется главной или собственной частью ряда Лорана, а второе слагаемое — правильной, или регулярной, частью ряда Лорана (ряд Тейлора).

ЗАМЕЧАНИЕ 8. На практике при нахождении коэффициентов c_n ряда Лорана стараются избегать применения формул (44), так это приводит к громоздким выкладкам. Обычно, если это возможно, используют готовые разложения в ряд Тейлора элементарных функций (см. ниже примеры 22 и 23).

ПРИМЕР 19. Найти радиус сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{\ln in} \right)^n.$$

РЕШЕНИЕ. В нашем случае $c_n = \frac{1}{(\ln in)^n}$, поэтому по формуле (38) будем иметь $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} |\ln in|$. Так как

$$\ln in = \ln |in| + i \arg in = \ln n + i \frac{\pi}{2},$$

то

$$|\ln in| = \sqrt{\ln^2 n + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{4 \ln^2 n + \pi^2}}{2},$$

поэтому

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} |\ln in| = \infty.$$

ПРИМЕР 20. В окрестности точки $z_0 = 0$ разложить в ряд Тейлора функцию

$$f(z) = \frac{z}{z^2 - 2z - 3}.$$

РЕШЕНИЕ. Разложим $f(z)$ в сумму элементарных дробей

$$\frac{z}{z^2 - 2z - 3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{z+1} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{z-3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+z} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{3}}.$$

Используя разложение (42) для функции $(1+z)^{-1}$, получим

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{4} (1 - z + z^2 - z^3 + \dots) - \frac{1}{4} \left(1 + \frac{z}{3} + \frac{z^2}{9} + \dots \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left(-\frac{4}{3}z + \frac{8}{9}z^2 - \frac{28}{27}z^3 + \dots \right) = -\frac{z}{3} + \frac{2}{3^2}z^2 - \frac{7}{3^3}z^3 + \dots \end{aligned}$$

Радиус сходимости полученного ряда $R = 1$. Действительно, при разложении мы фактически пользовались формулой для суммы бесконечно убывающей ($|q| < 1$) геометрической прогрессии. В нашем случае $q_1 = -z$, $q_2 = z/3$. Отсюда $|z| < 1$ и $|z| < 3$, поэтому $R = \min\{1, 3\} = 1$.

ПРИМЕР 21. Разложить по степеням $z - 3$ функцию

$$f(z) = \frac{1}{3 - 2z}.$$

РЕШЕНИЕ. Преобразуем $f(z)$ следующим образом:

$$\frac{1}{3-2z} = \frac{1}{3-2(z-3+3)} = \frac{1}{-3-2(z-3)} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{2}{3}(z-3)}.$$

Используя разложение (42) для функции $(1+z)^{-1}$, где роль z играет $\frac{2}{3}(z-3)$, получим

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{3} \cdot \left[1 - \frac{2}{3}(z-3) + \frac{2^2}{3^2}(z-3)^2 - \frac{2^3}{3^3}(z-3)^3 + \dots \right] = \\ &= -\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2}(z-3) - \frac{2^2}{3^3}(z-3)^2 + \frac{2^3}{3^4}(z-3)^3 - \dots \end{aligned}$$

Из неравенства $\frac{2}{3} \cdot |z-3| < 1$, как и в предыдущем примере, получаем, что радиус сходимости полученного ряда $R = \frac{3}{2}$.

ПРИМЕР 22. Разложить в ряд Лорана функцию

$$f(z) = z^2 \cos \frac{1}{z}.$$

РЕШЕНИЕ. Разложим $f(z)$ по формуле (11), полагая в качестве z выражение $\frac{1}{z}$. Получим

$$\begin{aligned} z^2 \cos \frac{1}{z} &= z^2 \left(1 - \frac{1}{2! z^2} + \frac{1}{4! z^4} - \frac{1}{6! z^6} + \dots \right) = \\ &= z^2 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4! z^2} - \frac{1}{6! z^4} + \dots \end{aligned}$$

Это разложение справедливо для любого $z \neq 0$. В данном случае имеем $r = 0 < |z| < R = \infty$, то есть «кольцом» является вся комплексная плоскость с выколотой точкой $z = 0$.

ПРИМЕР 23. Полагая $z_0 = 0$, рассмотреть различные случаи разложения в ряд Лорана функции

$$f(z) = \frac{2z+1}{z^2+z-2}.$$

РЕШЕНИЕ. Представив функцию в виде

$$f(z) = \frac{2z+1}{z^2+z-2} = \frac{1}{z+2} + \frac{2}{z-1},$$

видим, что $f(z)$ имеет две особые точки: $z_1 = -2$ и $z_2 = 1$. Поэтому имеем три кольца с центром в точке $z_0 = 0$, в каждом из которых функция является аналитической. Найдём ряды Лорана в каждом из этих случаев.

При поиске разложения будем пользоваться формулой суммы геометрической прогрессии

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots = \frac{1}{1 - q},$$

подбирая каждый раз q так, чтобы выполнялось неравенство $|q| < 1$.

1. Рассмотрим круг $|z| < 1$.

В этом случае разложением будет являться ряд Тейлора. Действительно,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z+2} + \frac{2}{z-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z}{2}} - \frac{1}{1-z} = \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} - \frac{z^3}{8} + \dots \right) - (1 + z + z^2 + z^3 + \dots) = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{z}{4} + \frac{z^2}{8} - \frac{z^3}{16} + \dots - (1 + z + z^2 + z^3 + \dots) = \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{3}{4}z - \frac{7}{8}z^2 - \frac{15}{16}z^3 - \dots = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}} z^n. \end{aligned}$$

2. Рассмотрим кольцо $1 < |z| < 2$.

В этом случае

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z+2} + \frac{2}{z-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z}{2}} + \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} - \frac{z^3}{8} + \dots \right) + \frac{1}{z} \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots \right) = \\ &= \dots + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2} - \frac{z}{4} + \frac{z^2}{8} - \frac{z^3}{16} + \dots = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} z^n. \end{aligned}$$

3. Рассмотрим внешность круга $|z| \leq 2$ — множество точек z таких, что $2 < |z| < \infty$.

Функцию $f(z)$ представим в виде

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z+2} + \frac{2}{z-1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2}{z}} + \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \\ &= \frac{1}{z} \left(1 - \frac{2}{z} + \frac{4}{z^2} - \frac{8}{z^3} + \dots + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{z} \left(2 - \frac{1}{z} + \frac{5}{z^2} - \frac{7}{z^3} + \dots \right) = \\
&= \frac{2}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{5}{z^3} - \frac{7}{z^4} + \dots
\end{aligned}$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

21. Исследовать на сходимость ряды

$$\begin{aligned}
&\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos in}{2^n}; \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin in}{3^n}; \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos in^2}{5^{n^2}}; \quad \text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i2n}}{n\sqrt{n}}; \\
&\text{e) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\pi/n}}{\sqrt{n}}; \quad \text{f) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} i\sqrt{n}}{\sin in}; \quad \text{g) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\operatorname{sh} in}; \quad \text{h) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch}(i\pi/n)}{n^{\ln n}}.
\end{aligned}$$

22. Найти радиусы сходимости степенных рядов:

$$\begin{aligned}
&\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} e^{in} z^n; \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{ch} \frac{i}{n} z^n; \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \cos^n \frac{\pi i}{\sqrt{n}} z^n; \quad \text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \cos in \cdot z^n.
\end{aligned}$$

23. Разложить заданные функции в ряд Тейлора, используя готовые разложения, и найти радиусы сходимости полученных рядов:

$$\begin{aligned}
&\text{a) } \sin(2z+1) \text{ по степеням } z+1; \quad \text{b) } e^z \text{ по степеням } 2z-1; \\
&\text{c) } \frac{1}{3z+1} \text{ по степеням } z+2; \quad \text{d) } \frac{z+1}{z^2+4z-5} \text{ по степеням } z; \\
&\text{e) } \cos^2 \frac{iz}{2} \text{ по степеням } z; \quad \text{f) } \ln(2-z) \text{ по степеням } z.
\end{aligned}$$

24. Найти области сходимости рядов:

$$\begin{aligned}
&\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-i)^n z^n}; \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{2} + i\sqrt{2})^n}{z^n}; \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+1-i)^{-n}}{n+i}; \\
&\text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + in \right) (z+1+i)^n; \quad \text{e) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{z} \right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{4} \right)^n; \\
&\text{f) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n (z-2+i)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} (1+in)(z-2+i)^n.
\end{aligned}$$

25. Разложить следующие функции в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 0$:

$$\begin{aligned}
&\text{a) } \frac{\sin z}{z^2}; \quad \text{b) } z^4 \cos \frac{1}{z}; \quad \text{c) } \frac{1 - \cos z}{z^2}; \quad \text{d) } \frac{1 + \cos z}{z^4}.
\end{aligned}$$

26. Разложить следующие функции в указанных кольцах в ряд Лорана:

- a) $\frac{1}{(z-2)(z-3)}$, $a_1) 2 < |z| < 3$, $a_2) 3 < |z| < \infty$;
 b) $\frac{1}{z^2+z}$, $b_1) 0 < |z| < 1$, $b_2) 1 < |z| < \infty$;
 c) $\frac{2z+3}{z^2+3z+2}$, $1 < |z| < 2$;
 d) $\frac{z^2-z+3}{z^3-3z+2}$, $d_1) |z| < 1$, $d_2) 1 < |z| < 2$, $d_3) 2 < |z| < \infty$.

ЗАНЯТИЕ № 6

Нули и изолированные особые точки

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Пусть $f(z)$ — аналитическая в точке z_0 функция. Точка z_0 называется нулем порядка n , если выполнены условия

$$f(z_0) = 0, f'(z_0) = 0, \dots, f^{(n-1)}(z_0) = 0, f^{(n)}(z_0) \neq 0.$$

При $n = 1$ точка называется простым нулем.

ТЕОРЕМА 15. Точка z_0 является нулем порядка n функции $f(z)$ в том и только в том случае, если в некоторой окрестности точки z_0 функцию $f(z)$ можно представить в виде $f(z) = (z - z_0)^n \varphi(z)$, где $\varphi(z)$ — аналитическая в точке z_0 функция, $\varphi(z_0) \neq 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. Точка z_0 называется изолированной особой точкой функции $f(z)$, если $f(z)$ аналитична в каждой точке некоторой окрестности точки z_0 , за исключением самой точки $z = z_0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. Изолированная особая точка z_0 называется:

1) устранимой особой точкой, если существует $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$;

2) полюсом порядка n ($n \geq 1$), если не существуют пределы

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z), \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0), \dots, \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0)^{n-1},$$

и существует

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0)^n.$$

3) существенно особой, если она не является ни устранимой, ни полюсом.

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Устранимую особую точку можно называть полюсом нулевого порядка.

ТЕОРЕМА 16. *Изолированная особая точка $z = z_0$ является полюсом порядка n ($n \geq 1$) в том и только в том случае, если она является нулем порядка n для функции $\Phi(z) = \frac{1}{f(z)}$.*

ТЕОРЕМА 17. *Справедливы следующие утверждения о разложении функции в ряд Лорана в окрестности изолированной особой точки:*

1) *в окрестности устранимой особой точки ряд Лорана не содержит собственной части, то есть является рядом Тейлора;*

2) *в окрестности полюса порядка n ($n \geq 1$) собственная часть ряда Лорана содержит конечное число членов, при этом $c_{-n} \neq 0$*

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} + \dots + \frac{c_{-1}}{(z - z_0)} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k.$$

3) *в окрестности существенно особой точки собственная часть ряда Лорана содержит бесконечное число членов.*

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

27. У следующих функций найти нули и определить их порядок:

$$\begin{aligned} \text{a) } f(z) &= z^4 + 4z^2; & \text{b) } f(z) &= \frac{\sin z}{z}; \\ \text{c) } f(z) &= \frac{\operatorname{sh}^2 z}{z}; & \text{d) } f(z) &= z^2 \sin z; \\ \text{e) } f(z) &= 1 + \operatorname{ch} z; & \text{f) } f(z) &= \frac{(1 - \operatorname{sh} z)^2}{z}; \\ \text{g) } f(z) &= (z + \pi i) \operatorname{sh} z; & \text{h) } f(z) &= (z^2 + \pi^2) (1 + e^{-z}). \end{aligned}$$

28. Найти порядок нуля $z_0 = 0$ для следующих функций:

$$\begin{aligned} \text{a) } f(z) &= e^{\sin z} - e^{\operatorname{tg} z}; & \text{b) } f(z) &= \frac{z^6}{\left(\frac{z}{2}\right)^2 - \left(\sin \frac{z}{2}\right)^2}; \\ \text{c) } f(z) &= \frac{z^3}{1 + z - e^z}; & \text{d) } f(z) &= 2(\operatorname{ch} z - 1) - z^2. \end{aligned}$$

29. Для следующих функций определить характер особой точки $z_0 = 0$:

$$\begin{aligned} \text{a) } f(z) &= \frac{1}{z - \sin z}; & \text{b) } f(z) &= \frac{1}{e^{-z} + z - 1}; \\ \text{c) } f(z) &= \frac{\sin z}{e^{-z} + z - 1}; & \text{d) } f(z) &= \frac{z}{z - \operatorname{sh} z}. \end{aligned}$$

30. Найти особые точки и определить их характер для следующих функций:

$$\text{a) } f(z) = \frac{1}{1 - \sin z}; \quad \text{b) } f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^2};$$

$$\text{c) } f(z) = \frac{z}{z^5 + 2z^4 + z^3}; \quad \text{d) } f(z) = \frac{1}{e^{-z} - 1} + \frac{1}{z^2};$$

$$\text{e) } f(z) = e^{-(1/z^2)}; \quad \text{f) } f(z) = \operatorname{ch} \frac{1}{z}.$$

31. Определить характер указанных особых точек:

$$\text{a) } \frac{1 + \cos z}{z - \pi}, \quad z_0 = \pi; \quad \text{b) } \frac{z^2 - 3z + 2}{z^2 - 2z + 1}, \quad z_0 = 1;$$

$$\text{c) } \frac{z^2 - 1}{z^6 + 2z^5 + z^4}, \quad z_0 = 0, \quad z_1 = -1; \quad \text{d) } z \operatorname{sh} \frac{1}{z}, \quad z_0 = 0.$$

ЗАНЯТИЕ № 7

Элементы теории вычетов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15. Вычетом функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 (обозначается $\operatorname{res} f(z_0)$) называется число

$$\operatorname{res} f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(z) dz, \quad (45)$$

где Γ — произвольный контур, содержащий внутри себя точку z_0 и не выходящий за пределы области аналитичности функции $f(z)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Встречаются и другие обозначения для вычета, например:

$$\operatorname{Res} f(z_0), \quad \operatorname{Res} [f(z), (z_0)], \quad \operatorname{Res}_{z=z_0} f(z), \quad \operatorname{res} [f(z), z_0], \quad \operatorname{res}_{z=z_0} f(z).$$

ТЕОРЕМА 18 (о вычислении вычета). Вычет функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 равен коэффициенту при минус первой степени разложения в ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки $z = z_0$ ($\operatorname{res} f(z_0) = c_{-1}$);

При этом, в зависимости от характера особой точки z_0 , верны следующие утверждения:

1) вычет в устранимой особой точке равен нулю;

2) для простого полюса ($n = 1$)

$$\operatorname{res} f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) (z - z_0)]; \quad (46)$$

3) для полюса порядка n ($n > 1$)

$$\operatorname{res} f(z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left(f(z) (z - z_0)^n \right); \quad (47)$$

4) если функция $f(z)$ в окрестности точки $z = z_0$ представима в виде $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, причем $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — аналитические функции, такие, что $\varphi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) = 0$, $\psi'(z_0) \neq 0$ (z_0 — простой полюс), то

$$\operatorname{res} f(z_0) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}; \quad (48)$$

5) для существенно особой точки вычет находится из лорановского разложения $f(z)$ в окрестности точки z_0 , ($\operatorname{res} f(z_0) = c_{-1}$).

ТЕОРЕМА 19 (Коши о вычетах). Если функция $f(z)$ является аналитической на границе C односвязной области D и всюду внутри области, за исключением конечного числа точек $z_1, z_1, \dots, z_n$, то

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res} f(z_k). \quad (49)$$

ТЕОРЕМА 20 (интеграл от рациональной функции). Рассматривается рациональная функция $f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ являются многочленами степени m и n соответственно, при этом $Q_n(x)$ не имеет вещественных корней и $n \geq m + 2$. Тогда, если функцию $f(x)$ продолжить на комплексную плоскость как $f(z) = \frac{P_m(z)}{Q_n(z)}$, то верно равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{res} f(z_k), \quad (50)$$

где сумма вычетов берется по всем особым точкам функции, расположенным в верхней полуплоскости.

ПРИМЕР 24. Найти вычеты функции

$$f(z) = \frac{e^z}{(z+1)^3(z-2)}$$

в ее особых точках.

РЕШЕНИЕ. Особыми точками являются $z_1 = -1$ — полюс третьего порядка и $z_2 = 2$ — полюс первого порядка. Поэтому для z_1 по формуле (47) имеем

$$\operatorname{res} f(-1) = \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{e^z}{z-2} \right) = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{(z^2 - 6z + 10)e^z}{(z-2)^3} = -\frac{17}{54e}.$$

Для z_2 по формуле (46) имеем

$$\operatorname{res} f(2) = \lim_{z \rightarrow 2} \frac{e^z}{(z+1)^3} = \frac{e^3}{27}.$$

ПРИМЕР 25. Найти вычеты функции

$$f(z) = \frac{1}{z^4 + 1}$$

в ее особых точках.

РЕШЕНИЕ. Особые точки $f(z)$ — нули знаменателя, то есть корни уравнения $z^4 + 1 = 0$. Имеем

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}}, \quad z_3 = e^{-i\frac{3\pi}{4}}, \quad z_4 = e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

Все они — простые полюсы и, пользуясь формулой (48), имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{res} f(z_1) &= \left. \frac{1}{4z^3} \right|_{z=z_1} = \frac{1}{4} e^{-i\frac{3\pi}{4}}, \\ \operatorname{res} f(z_2) &= \left. \frac{1}{4z^3} \right|_{z=z_2} = \frac{1}{4} e^{-i\frac{9\pi}{4}}, \\ \operatorname{res} f(z_3) &= \left. \frac{1}{4z^3} \right|_{z=z_3} = \frac{1}{4} e^{i\frac{9\pi}{4}}, \\ \operatorname{res} f(z_4) &= \left. \frac{1}{4z^3} \right|_{z=z_4} = \frac{1}{4} e^{i\frac{3\pi}{4}}. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 26. Найти вычет функции

$$f(z) = z^2 \sin \frac{1}{z}$$

в ее особой точке.

РЕШЕНИЕ. Особой является точка $z = 0$ — существенно особая. Разложение в ряд Лорана в окрестности $z = 0$ имеет вид

$$f(z) = z^2 \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3! z^3} + \frac{1}{5! z^5} - \dots \right) = z - \frac{1}{3! z} + \frac{1}{5! z^3} - \dots$$

Отсюда, $\operatorname{res} f(0) = c_{-1} = -\frac{1}{6}$.

ПРИМЕР 27. Вычислить интеграл $\oint_{|z|=4} \frac{e^z dz}{(z-1)^3(z+2)}$.

РЕШЕНИЕ. Особые точки $z_1 = 1$ (полюс третьего порядка) и $z_2 = -2$ (простой полюс) находятся внутри контура $|z| = 4$.

$$\operatorname{res} f(1) = \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{e^z}{z+2} \right) = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z^2 + 2z + 2)e^z}{(z+2)^3} = \frac{5e}{54}.$$

$$\operatorname{res} f(-2) = \left. \frac{e^z}{(z-1)^3} \right|_{z=-2} = -\frac{1}{27e^2}.$$

По теореме Коши о вычетах

$$\oint_{|z|=4} \frac{e^z dz}{(z-1)^3(z+2)} = 2\pi i (\operatorname{res} f(1) + \operatorname{res} f(-2)) = 2\pi i \left(\frac{5e}{54} - \frac{1}{27e^2} \right).$$

ПРИМЕР 28. Вычислить интеграл $\oint_{|z|=3} (z^2 + z + 1) \sin \frac{2}{z-1} dz$.

РЕШЕНИЕ. Существенно особая точка $z_0 = 1$ находится внутри контура $|z| = 3$. Для нахождения вычета разложим подынтегральную функцию в ряд Лорана по степеням $z - 1$

$$f(z) = [(z-1)^2 + 3(z-1) + 3] \left(\frac{2}{z-1} - \frac{2^3}{3!(z-1)^3} + \dots \right).$$

Так как $\operatorname{res} f(1) = c_{-1}$, а из вышеприведенного разложения видим, что $(z-1)^{-1}$ возникает в произведении только в двух случаях, то

$$\operatorname{res} f(1) = c_{-1} = 2 \cdot 3 - \frac{8}{6} = \frac{14}{3}.$$

Таким образом,

$$\oint_{|z|=3} (z^2 + z + 1) \sin \frac{2}{z-1} dz = 2\pi i \operatorname{res} f(1) = \frac{28\pi i}{3}.$$

ПРИМЕР 29. Вычислить интеграл $I = \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^2} \quad (a > 0)$.

РЕШЕНИЕ. Так как подынтегральная функция четная, то

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^2}.$$

Функция $f(z) = \frac{z^2}{(z^2 + a^2)^2}$ имеет в верхней полуплоскости полюс второго порядка $z = ai$.

$$\operatorname{res} f(ai) = \lim_{z \rightarrow ai} \frac{d}{dz} \left[\frac{z^2}{(z + ai)^2} \right] = \frac{2aiz}{(z + ai)^3} \Big|_{z=ai} = \frac{1}{4ai},$$

и по формуле (50) имеем

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi i \cdot \frac{1}{4ai} = \frac{\pi}{4a}.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

32. Найти вычеты в особых точках следующих функций:

$$\text{a) } f(z) = \frac{4 \operatorname{tg} z}{4z^2 - \pi z}; \quad \text{b) } f(z) = \frac{z}{(z + 1)^3(z - 2)^2};$$

$$\text{c) } f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^3(z - 3)}; \quad \text{d) } f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2 - 1)(z + 3)}.$$

33. Вычислить интегралы:

$$\begin{aligned} \text{a) } \oint_{|z|=2} \frac{e^z dz}{z^3(z + 1)}; \quad \text{b) } \oint_{|z-i|=3} \frac{e^{z^2} - 1}{z^3 - iz^2} dz; \quad \text{c) } \oint_{|z|=\sqrt{3}} \frac{\sin \pi z}{z^2 - z} dz; \\ \text{d) } \oint_C \frac{\cos(z/2)}{z^2 - 4} dz, \quad C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1; \quad \text{e) } \oint_{|z|=1/3} (z + 1) e^{1/z} dz. \end{aligned}$$

34. Вычислить несобственные интегралы:

$$\begin{aligned} \text{a) } \int_0^{\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx; \quad \text{b) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{(x^2 + 4x + 13)^2}; \\ \text{c) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2(x^2 + b^2)^2}; \quad \text{d) } \int_0^{\infty} \frac{x^2 + 1}{x^6 + 1} dx. \end{aligned}$$

35. Вычислить с помощью вычетов следующие интегралы (в задаче 20 их предлагалось вычислить с помощью интегральной формулы Коши):

$$\text{a)} \quad \oint_{|z-1|=1} \frac{e^{iz}}{z^2+1} dz;$$

$$\text{b)} \quad \oint_{|z|=2} \frac{\sin iz}{z^2-4z+3} dz;$$

$$\text{c)} \quad \oint_{|z|=4} \frac{dz}{(z^2+9)(z+9)};$$

$$\text{d)} \quad \oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3} dz;$$

$$\text{e)} \quad \oint_{|z|=2} \frac{z \operatorname{sh} z}{(z^2-1)^2} dz;$$

$$\text{f)} \quad \oint_{|z-3|=6} \frac{z dz}{(z-2)^3(z+4)}.$$

2 Операционное исчисление

ЗАНЯТИЕ № 8

Определение и свойства оператора Лапласа

Пусть $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$ — комплекснозначная функция действительного аргумента t , $(f_1(t), f_2(t) \in \mathbb{R})$. Если $f_2(t) \equiv 0$, то $f(t)$ — вещественнозначная функция. Аргумент t для удобства будем интерпретировать как время.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 16. Оригиналom назовем функцию $f(t)$, удовлетворяющую следующим трём условиям:

1) $f(t) = 0$ при $t < 0$;

2) $f(t)$ локально интегрируема, то есть на любом конечном промежутке $[a, b]$, где $0 \leq a < b$, существует интеграл $\int_a^b f(t) dt$;

3) $f(t)$ ограниченного роста, то есть существуют такие константы $M > 0$ и $s_0 \geq 0$, что для всех $t \geq 0$ выполнено неравенство $|f(t)| \leq Me^{s_0 t}$;

Если функция $\varphi(t) \neq 0$ при $t < 0$, то её можно считать умноженной на функцию Хэвисайда $\eta(t)$, определенную равенствами:

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \geq 0, \\ 0, & \text{если } x < 0, \end{cases} \quad (51)$$

тогда функция

$$f(t) = \varphi(t) \cdot \eta(t) = \begin{cases} \varphi(t), & \text{если } t \geq 0 \\ 0, & \text{если } t < 0, \end{cases}$$

будет удовлетворять всем трём условиям определения 16. Множитель $\eta(t)$ обращает в ноль («гасит») функцию при $t < 0$. В дальнейшем будем предполагать, что все рассматриваемые оригиналы снабжены этим «гасящим» множителем, даже если он не указан явно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 17. Изображением по Лапласу функции $f(t)$ называется функция $F(p)$ комплексного переменного $p = s + i\sigma$, определённая равенством

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt. \quad (52)$$

Интеграл (52) в определении 17 носит название *оператор Лапласа*.

ТЕОРЕМА 21. *Изображение $F(p)$ оригинала $f(t)$ существует для всех p , таких, что $\operatorname{Re} p > s_0$, где $\operatorname{Re} p = s$ — вещественная часть числа $p = s + i\sigma$, s_0 — показатель степени роста оригинала $f(t)$ такой, что $|f(t)| \leq M e^{s_0 t}$, который существует по определению 16 оригинала.*

Отношение «оригинал-изображение» будем обозначать как

$$f(t) \dashrightarrow F(p),$$

соответственно отношение «изображение-оригинал» — через

$$F(p) \dashleftarrow f(t).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 11. *Как следует из доказательства теоремы 21 (мы его не приводим), $F(p) \rightarrow 0$ при $\operatorname{Re} p \rightarrow \infty$. Это необходимый признак того, что некоторая функция $F(p)$ является изображением.*

ПРИМЕР 30. *Проверить, являются ли оригиналами функции*

$$f(t) = \cos t \cdot \eta(t), \quad f(t) = e^{t^2} \cdot \eta(t).$$

РЕШЕНИЕ. Условия 1) и 2) определения 16, очевидно, выполнены. Проверим ограниченность роста.

Так как $|\cos t| \leq 1 = e^{0 \cdot t}$ для всех $t \in [0, \infty)$, функция $f(t) = \cos t$ оригиналом является.

Так как для любого положительного s_0 найдется бесконечно много t таких, что $t > s_0$, выполнено неравенство $e^{t^2} > e^{s_0 t}$ для всех достаточно больших t при любом s_0 , откуда следует, что функция $f(t) = e^{t^2}$ оригиналом не является.

ПРИМЕР 31. *Проверить, являются ли изображениями функции*

$$F(p) = e^p, \quad F(p) = p \sin p.$$

РЕШЕНИЕ. Нет, не являются, так как не выполнено необходимое условие: $F(p) \rightarrow 0$ при $\operatorname{Re} p \rightarrow \infty$.

ПРИМЕР 32. *Докажем непосредственно из определения, что*

$$1 = \eta(t) \dashrightarrow \frac{1}{p}; \tag{53}$$

$$e^{at} = \eta(t) e^{at} \dashrightarrow \frac{1}{p - a}. \tag{54}$$

РЕШЕНИЕ. Действительно,

$$1 = \eta(t) \dot{\rightarrow} \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} e^{-pt} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p}.$$

Аналогично

$$e^{at} = \eta(t)e^{at} \dot{\rightarrow} \int_0^{\infty} e^{at} e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{(a-p)t} dt = \frac{1}{a-p} e^{(a-p)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p-a}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 12. Примечательным в операционном исчислении является тот факт, что изображения других оригиналов непосредственно по определению мы искать не будем. Существует масса свойств оператора Лапласа, с помощью которых можно найти изображения всех элементарных функций.

Дадим без доказательства обзор основных свойств оператора Лапласа.

ТЕОРЕМА 22 (линейности). Если $f_1(t) \dot{\rightarrow} F_1(p)$ и $f_2(t) \dot{\rightarrow} F_2(p)$, то $\alpha f_1(t) + \beta f_2(t) \dot{\rightarrow} \alpha F_1(p) + \beta F_2(p)$, где α и β — произвольные константы.

ТЕОРЕМА 23 (подобия). Если $f(t) \dot{\rightarrow} F(p)$, то $f(\alpha t) \dot{\rightarrow} \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$ для любой константы $\alpha \neq 0$.

ТЕОРЕМА 24 (дифференцирования оригинала). Если функция $F(p)$ является изображением оригинала $f(t)$, то:

$$f'(t) \dot{\rightarrow} pF(p) - f(0); \quad f''(t) \dot{\rightarrow} p^2F(p) - pf(0) - f'(0).$$

В общем случае

$$f^{(n)}(t) \dot{\rightarrow} p^n F(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \dots - pf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

ТЕОРЕМА 25 (дифференцирования изображения). Если оригинал $f(t)$ имеет изображением функцию $F(p)$, то $(-t)f(t) \dot{\rightarrow} F'(p)$. В общем случае $(-t)^n f(t) \dot{\rightarrow} F^{(n)}(p)$.

ТЕОРЕМА 26 (интегрирования оригинала). Если $f(t) \dot{\rightarrow} F(p)$, то

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \dot{\rightarrow} \frac{F(p)}{p}.$$

ТЕОРЕМА 27 (интегрирования изображения). Если функция $F(p)$ является изображением оригинала $f(t)$, то $\frac{f(t)}{t} \dot{\rightarrow} \int_p^{\infty} F(s) ds$.

ТЕОРЕМА 28 (смещения). Если функция $F(p)$ является изображением оригинала $f(t)$, то $e^{at}f(t) \dashrightarrow F(p-a)$.

ТЕОРЕМА 29 (запаздывания). Если функция $F(p)$ является изображением оригинала $f(t)$, то

$$\eta(t-\tau) \cdot f(t-\tau) \dashrightarrow e^{-p\tau}F(p),$$

где $\tau > 0$ — время запаздывания, $\eta(t-\tau)$ — функция Хэвисайда, определенная равенством (51).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 18. Свёрткой функций $f(t)$ и $g(t)$ называется функция, которая обозначается через $(f * g)(t)$ и определяется следующим образом:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

ТЕОРЕМА 30 (произведения или о свёртке). Если $f(t) \dashrightarrow F(p)$ и $g(t) \dashrightarrow G(p)$, то

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \dashrightarrow F(p)G(p).$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

36. Используя определение оригинала, проверить, являются ли оригиналами следующие функции:

- | | |
|--|---|
| a) $f(t) = b^t \cdot \eta(t)$, $b > 0$, $b \neq 1$; | b) $f(t) = e^{(2+4i)t} \cdot \eta(t)$; |
| c) $f(t) = \frac{1}{t-3} \cdot \eta(t)$; | d) $f(t) = t^2 \cdot \eta(t)$; |
| e) $f(t) = \operatorname{tg} t \cdot \eta(t)$; | f) $f(t) = e^{-t^2} \cdot \eta(t)$; |
| g) $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \eta(t)$; | h) $f(t) = t^t \cdot \eta(t)$. |

37. Используя необходимый признак изображения (замечание 11 на стр. 38), проверить, являются ли изображениями следующие функции:

- a) $F(p) = \operatorname{tg} p$; b) $F(p) = p^2$; c) $F(p) = \cos p$.

38. Пользуясь определением, найти изображения следующих функций:

- a) $f(t) = t^2$; b) $f(t) = e^{6-t}$; c) $f(t) = \cos 2t$.

Нахождение изображений по оригиналам

ПРИМЕР 33. С помощью формул Эйлера (12) и теоремы линейности можно вывести формулу

$$\cos \omega t \div \frac{p}{p^2 + \omega^2}. \quad (55)$$

РЕШЕНИЕ.

$$\begin{aligned} \cos \omega t &= \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \div \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p - i\omega} + \frac{1}{p + i\omega} \right) = \\ &= \frac{p + i\omega + p - i\omega}{2(p^2 + \omega^2)} = \frac{p}{p^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

При выводе была использована формула (54).

ЗАМЕЧАНИЕ 13. Изображения $\sin t$, $\operatorname{sh} t$, $\operatorname{ch} t$ находятся аналогично. Таблица основных изображений и оригиналов приведена в прил. Б на стр. 93.

ПРИМЕР 34. Найдем изображение $\sin^2 t$.

РЕШЕНИЕ. По формуле понижения степени $\sin^2 t = (1/2) \cdot (1 - \cos 2t)$. Применив теорему линейности и формулы (53) и (55), получим

$$\sin^2 t \div \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 4} \right) = \frac{2}{p(p^2 + 4)}.$$

ПРИМЕР 35. Найдем изображение $\sin^2 t$, пользуясь теоремой о дифференцировании оригинала.

РЕШЕНИЕ. Пусть $f(t) \div F(p)$, тогда $f'(t) \div pF(p) - f(0)$. В нашем случае $f(0) = 0$, а $f'(t) = 2 \sin t \cos t = \sin 2t \div \frac{2}{p^2 + 4}$. Следовательно,

$$\frac{2}{p^2 + 4} = pF(p), \text{ откуда}$$

$$F(p) = \frac{2}{p(p^2 + 4)} \leftarrow \sin^2 t.$$

ПРИМЕР 36. Найти изображение функции $f(t) = t^2 e^t$.

РЕШЕНИЕ. Имеем $e^t \div \frac{1}{p - 1}$. По теореме дифференцирования изображений $\left(\frac{1}{p - 1} \right)' \leftarrow -te^t$, откуда $\frac{1}{(p - 1)^2} \leftarrow te^t$. Далее

$$\left(\frac{1}{(p - 1)^2} \right)' \leftarrow -t(te^t) \quad \text{или} \quad \frac{2}{(p - 1)^3} \leftarrow t^2 e^t.$$

ПРИМЕР 37. Найти изображение функции $\int_0^t e^{\tau} d\tau$.

РЕШЕНИЕ. Имеем $e^t \doteq \frac{1}{p-1}$. По теореме интегрирования оригинала

$$\int_0^t e^{\tau} d\tau \doteq \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p-1} = \frac{1}{p(p-1)}.$$

ПРИМЕР 38. Найти изображение функции $f(t) = \frac{\text{sh } t}{t}$.

РЕШЕНИЕ. Как известно, $\text{sh } t \doteq \frac{1}{p^2-1}$. Поэтому по теореме интегрирования изображения

$$\frac{\text{sh } t}{t} \doteq \int_p^{\infty} \frac{1}{s^2-1} ds = \frac{1}{2} \ln \frac{s-1}{s+1} \Big|_p^{\infty} = \ln \sqrt{\frac{p+1}{p-1}}, \quad (\text{Re } p > 1).$$

С помощью теоремы интегрирования изображения легко вычисляются некоторые несобственные интегралы. Пусть $f(t) \doteq F(p)$ и пусть несобственный интеграл $\int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ сходится. Тогда

$$\int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} dt = \int_0^{\infty} F(p) dp.$$

ПРИМЕР 39. Вычислить интеграл $\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

РЕШЕНИЕ. Имеем $\sin t \doteq \frac{1}{p^2+1}$. Поэтому

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{\infty} \frac{1}{p^2+1} dp = \text{arctg } p \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

ПРИМЕР 40. Найти изображение функции $f(t) = e^{-t} \cos 2t$.

РЕШЕНИЕ. Имеем $\cos 2t \doteq \frac{p}{p^2+4}$. По теореме смещения ($a = -1$) будем иметь

$$e^{-t} \cos 2t \doteq \frac{p+1}{(p+1)^2+4}.$$

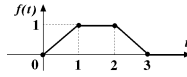
ПРИМЕР 41. Найти изображение функции $f(t-1) = (t-1)^2 \cdot \eta(t-1)$.

РЕШЕНИЕ. Для функции $f(t) = t^2 \cdot \eta(t)$ имеем $f(t) \doteq \frac{2}{p^3}$. Тогда по теореме запаздывания ($\tau = 1$) будем иметь

$$f(t-1) = (t-1)^2 \cdot \eta(t-1) \doteq \frac{2e^{-p}}{p^3}.$$

В задачах на применение теоремы запаздывания важно научиться рассуждать в терминах «процесс „включается-выключается“ с запаздыванием на время τ ». Так, в предыдущем примере, процесс, который задается функцией $f(t) = t^2$, «включается» с запаздыванием на время $\tau = 1$, соответственно функция t^2 сдвигается вправо на $t = 1$, и мы пишем $f(t-1) \cdot \eta(t-1)$, а не $f(t) \cdot \eta(t-1)$. Особенно важно научиться так рассуждать в задачах, где $f(t)$ задается графически.

ПРИМЕР 42. Найти изображение функции, заданной графически.



РЕШЕНИЕ. В первую очередь запишем $f(t)$ аналитически с помощью функции Хэвисайда.

В нулевой момент времени «включается» процесс $\varphi_1(t) = t$, а в момент $t = 1$ он «выключается». Запишем это как $f_1(t) = t - t \cdot \eta(t-1)$. Но второе слагаемое должно быть функцией от $(t-1)$. Поэтому, так как $t = (t-1) + 1$, запишем $f_1(t) = t - [(t-1) + 1] \cdot \eta(t-1)$.

Второе слагаемое $f_2(t) = \eta(t-1) - \eta(t-2)$, поскольку $\varphi_2(t) = 1$ в момент времени $t = 1$ «включается» и в момент $t = 2$ «выключается».

Наконец, при $t = 2$ «включается» процесс $\varphi_3(t) = -t + 3$, а в момент $t = 3$ он «выключается». Запишем это как

$$\begin{aligned} f_3(t) &= (-t + 3) \cdot \eta(t-2) - (-t + 3) \cdot \eta(t-3) = \\ &= -[(t-2) - 1] \cdot \eta(t-2) + (t-3) \cdot \eta(t-3). \end{aligned}$$

Окончательно

$$\begin{aligned} f(t) &= f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) = t - [(t-1) + 1] \cdot \eta(t-1) + \\ &+ \eta(t-1) - \eta(t-2) - [(t-2) - 1] \cdot \eta(t-2) + (t-3) \cdot \eta(t-3) = \\ &= t - (t-1) \cdot \eta(t-1) - (t-2) \cdot \eta(t-2) + (t-3) \cdot \eta(t-3). \end{aligned}$$

Так как $t \doteq \frac{1}{p^2}$, то по теореме запаздывания

$$f(t) \doteq \frac{1}{p^2} (1 - e^{-p} - e^{-2p} + e^{-3p}).$$

39. Найти изображения, используя свойство линейности:

- a) $f(t) = 1 + 2t + 5t^2$; b) $f(t) = -6 \cos^2 3t$;
 c) $f(t) = 4 \cos 2t \sin 5t$; d) $f(t) = \sin^3 5t$;
 e) $f(t) = 8 \cos^4 t$; f) $f(t) = -t^3 + \frac{1}{2}e^{-4t}$;
 g) $f(t) = \sin t \sin 3t$; h) $f(t) = \cos 2t \cos 4t$;
 i) $f(t) = \operatorname{sh} t \operatorname{ch} 2t$; j) $f(t) = 12 \operatorname{ch}^2 t$.

40. Найти изображения, пользуясь теоремой смещения:

- a) $f(t) = e^t \sin t$; b) $f(t) = e^{-4t} \cos 3t$;
 c) $f(t) = t^2 e^{-5t}$; d) $f(t) = \operatorname{sh} t \sin 4t$;
 e) $f(t) = te^{3t} + e^t \sin^2 3t$; f) $f(t) = e^t \cos 6t - 2te^{-t}$.

41. Найти изображения, применяя теорему о дифференцировании изображения:

- a) $f(t) = t \sin t$; b) $f(t) = t^2 \operatorname{sh} 3t$; c) $f(t) = (t + 1) \sin t$;
 d) $f(t) = t^2 \cos t$; e) $f(t) = t \sin t \cos 4t$; f) $f(t) = t^3 e^{-5t}$.

42. Пользуясь теоремой о дифференцировании оригинала, найти изображения дифференциальных уравнений:

- a) $x' + x = e^{-t}$, $x(0) = 1$;
 b) $x' + 2x = \sin t$, $x(0) = 0$;
 c) $x'' + x = \cos t$, $x(0) = -1$, $x'(0) = 1$;
 d) $x''' + x = 0$, $x(0) = 0$, $x'(0) = -1$, $x''(0) = 2$;
 e) $x'' - x' = te^t$, $x(0) = x'(0) = 0$;
 f) $x^{(4)} - x'' = 1$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0$;
 g) $x'' + x = te^t + 4 \sin t$, $x(0) = x'(0) = 0$.

43. Пользуясь теоремой об интегрировании оригинала, найти изображения интегралов:

- a) $f(t) = \int_0^t \tau \sin \tau d\tau$; b) $f(t) = \int_0^t \tau^2 e^{-3\tau} d\tau$; c) $f(t) = \int_0^t \sin^2 \tau d\tau$;
 d) $f(t) = \int_0^t (\tau + 2) \cos^2 \tau d\tau$; e) $f(t) = \int_0^t \tau \operatorname{ch}^2 \tau d\tau$

44. Используя теорему об интегрировании изображения, найти изображения:

$$\text{a) } f(t) = \frac{\sin t}{t}; \quad \text{b) } f(t) = \int_0^t \frac{\sin t}{t} dt; \quad \text{c) } f(t) = \frac{\sin^2 t}{t};$$

$$\text{d) } f(t) = \frac{1 - \cos t}{t}; \quad \text{e) } f(t) = \frac{e^t - 1 - t}{t}; \quad \text{f) } f(t) = \int_0^t \frac{e^t - e^{-t}}{t} dt.$$

45. Найти значения несобственных интегралов, пользуясь теоремой об интегрировании изображения:

$$\text{a) } \int_0^{\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt, \quad (a > 0, b > 0);$$

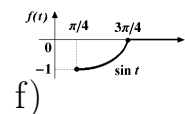
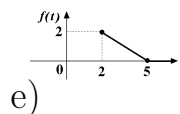
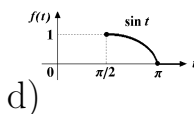
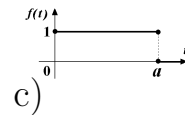
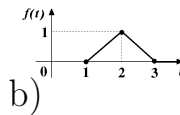
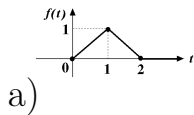
$$\text{c) } \int_0^{\infty} \frac{\cos at - \cos bt}{t} dt, \quad (a > 0, b > 0);$$

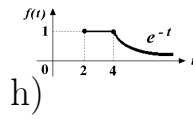
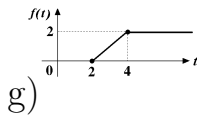
$$\text{d) } \int_0^{\infty} \frac{\sin at \cdot \sin bt}{t} dt, \quad (a > 0, b > 0).$$

46. Построить графики функций и найти их изображения, пользуясь теоремой запаздывания:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(t) = \sin^2(t - 3) \cdot \eta(t - 3); & \text{b) } f(t) = t^2 \cdot \eta(t); \\ \text{c) } f(t) = t^2 \cdot \eta(t - 2); & \text{d) } f(t) = t^2 \cdot \eta(t + 2); \\ \text{e) } f(t) = e^{2t+14} \cdot \eta(t + 7); & \text{f) } f(t) = \sin(t - \frac{\pi}{4}) \cdot \eta(t); \\ \text{g) } f(t) = \sin t \cdot \eta(t - \pi); & \text{h) } f(t) = (t^2 + 2t - 1) \cdot \eta(t); \\ \text{i) } f(t) = (t - 1)^2 \cdot \eta(t - 2); & \text{j) } f(t) = (t - 1)^2 \cdot \eta(t); \\ \text{k) } f(t) = \eta(t - \frac{\pi}{2}) \cos^2 t + \eta(t + \pi) e^{-t}. \end{array}$$

47. Найти изображения функций, заданных графически, используя теорему запаздывания:





48. Найти изображения интегралов, пользуясь теоремой о свёртке:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \int_0^t e^{t-\tau} \sin \tau \, d\tau; & \text{b)} \quad & \int_0^t e^{\tau} \sin(t-\tau) \, d\tau; & \text{c)} \quad & \int_0^t (t-\tau)^2 \operatorname{sh} \tau \, d\tau; \\ \text{d)} \quad & \int_0^t e^{3(t-\tau)} \tau^2 \, d\tau; & \text{e)} \quad & \int_0^t \tau^3 \operatorname{ch} 7(t-\tau) \, d\tau; & \text{f)} \quad & \int_0^t \tau \cos 2(t-\tau) \, d\tau. \end{aligned}$$

ЗАНЯТИЕ № 10

Нахождение оригинала по изображению

Для достаточно большого класса функций $f(t)$ и $F(p)$ имеются таблицы соответствия между оригиналами и изображениями (прил. Б, стр. 93). Особые трудности вызывает нахождение оригинала по заданному изображению. При решении этой задачи помогают теоремы разложения.

ТЕОРЕМА 31 (первая теорема разложения). Если $F(p)$ аналитична в кольце $R < |p| < \infty$ и разложение в ряд Лорана в этом кольце имеет вид

$$F(p) = \frac{c_1}{p} + \frac{c_2}{p^2} + \dots + \frac{c_n}{p^n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{p^n},$$

то $F(p)$ является изображением оригинала $f(t)$, определяемого рядом

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(n-1)!} \cdot t^{n-1} = c_1 + \frac{c_2}{2!} \cdot t + \frac{c_3}{3!} \cdot t^2 + \dots + \frac{c_n}{n!} \cdot t^{n-1} + \dots$$

ТЕОРЕМА 32 (вторая теорема разложения). Если изображение $F(p)$ является дробно-рациональной функцией, причём степень числителя меньше степени знаменателя и $p_1, p_2, \dots, p_n$ — полюсы этой функции, то его оригиналом служит функция

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \operatorname{res} [F(p)e^{pt}, p_k].$$

Кроме теорем разложения, бывает полезна теорема запаздывания, если в изображении возникают множители вида $e^{-\tau p}$, а также прием разложения изображения в сумму простых дробей с последующим обращением к таблице и свойствам оператора Лапласа.

ПРИМЕР 43. Найти оригинал, если $F(p) = \frac{1}{p(p-1)(p^2+4)}$.

РЕШЕНИЕ. Разложим $F(p)$ в сумму простых дробей:

$$\frac{1}{p(p-1)(p^2+4)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-1} + \frac{Cp+D}{p^2+4}.$$

Найдя коэффициенты A, B, C, D , получим

$$F(p) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{p} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{p-1} + \frac{1}{20} \cdot \frac{p}{p^2+4} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{p^2+4}.$$

Оригиналы для каждой из простых дробей находим по прил. Б. Ответом будет:

$$\frac{1}{p(p-1)(p^2+4)} \leftarrow \div -\frac{1}{4} + \frac{1}{5}e^t + \frac{1}{20}\cos 2t - \frac{1}{10}\sin 2t.$$

ПРИМЕР 44. Найти оригинал для функции $F(p) = \frac{1}{(p^2+1)^2}$.

РЕШЕНИЕ. В этом случае $F(p)$ уже является простой дробью. Воспользуемся теоремой о свертке. Так как $\frac{1}{p^2+1} \leftarrow \div \sin t$, имеем

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{1}{(p^2+1)^2} = \frac{1}{p^2+1} \cdot \frac{1}{p^2+1} \leftarrow \div \\ &\leftarrow \div \int_0^t \sin(t-\tau) \cdot \sin \tau d\tau = \frac{1}{2} \int_0^t [\cos t - \cos(2\tau-t)] d\tau = \\ &= \frac{1}{2} t \cos t - \frac{1}{4} \sin(2\tau-t) \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} = \frac{1}{2} t \cos t - \frac{1}{2} \sin t. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 45. Найти оригинал для функции $F(p) = \frac{e^{-p}}{p+1}$.

РЕШЕНИЕ. Поскольку в числителе стоит множитель e^{-p} , необходимо применить теорему запаздывания на время $\tau = 1$. Так как $\frac{1}{p+1} \leftarrow \div e^{-t}$, мы имеем:

$$\frac{e^{-p}}{p+1} \leftarrow \div e^{-(t-1)} \cdot \eta(t-1).$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

49. Найти оригиналы и построить их графики по заданным изображениям:

$$\text{a) } F(p) = \frac{pe^{-p}}{p^2+4p+5}; \quad \text{b) } F(p) = \frac{e^{-3p}}{p+3};$$

$$\text{c) } F(p) = \frac{e^{-2p}}{p^2+4p+3}; \quad \text{d) } F(p) = \frac{e^{-p}}{p^2}.$$

50. Найти оригиналы по изображениям:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a)} \quad F(p) = \frac{1}{p^3 + 2p^2 + p}; & \text{b)} \quad F(p) = \frac{2p + 3}{p^3 + 4p^2 + 5p}; \\
 \text{c)} \quad F(p) = \frac{1}{p^2(p^2 + 1)}; & \text{d)} \quad F(p) = \frac{e^{-p}}{p^2 - 2p + 5} + \frac{pe^{-2p}}{p^2 + 9}; \\
 \text{e)} \quad F(p) = \frac{p}{(p^2 + 1)^2}; & \text{f)} \quad F(p) = \frac{1}{p^2 + 1} (e^{-2p} + 2e^{-3p} + 3e^{-4p}); \\
 \text{g)} \quad F(p) = \frac{1}{(p - 1)^2(p + 2)}; & \text{h)} \quad F(p) = \frac{e^{-p}}{p^2 - 1} + \frac{pe^{-2p}}{p^2 - 4}; \\
 \text{i)} \quad F(p) = \frac{e^{-p/2}}{p(p + 1)(p^2 + 4)}; & \text{j)} \quad F(p) = \frac{e^{-p}}{p^2} + \frac{2e^{-2p}}{p^3} + \frac{6e^{-3p}}{p^4}.
 \end{array}$$

ЗАНЯТИЕ № 11

Решение дифференциальных уравнений операционным методом

Если дано дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$L[x] = a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = f(t),$$

где $x = x(t)$ — неизвестная функция с начальными условиями

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1, \dots, \quad x^{(n-1)}(0) = x_{n-1},$$

то его решение можно найти операторным методом.

Сначала, используя теорему о дифференцировании оригинала, составляем операторное уравнение, соответствующее данному дифференциальному уравнению

$$L[x] = f(t) \rightarrow A(p)X(p) = F(p),$$

где $A(p)$ — изображение линейного оператора L , $X(p)$ — изображение неизвестной функции $x(t)$, $F(p)$ — изображение правой части $f(t)$, откуда

$$X(p) = \frac{F(p)}{A(p)}.$$

Следовательно, решение уравнения $x(t)$ можно найти как оригинал изображения $X(p)$.

ПРИМЕР 46. Решить задачу Коши

$$x'' + x = 2 \cos t; \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$$

РЕШЕНИЕ. Найдем изображения:

$$\begin{aligned}x(t) &\divrightarrow X(p); \\x'(t) &\divrightarrow pX(p) - x(0) = pX(p); \\x''(t) &\divrightarrow p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p) + 1; \\\cos t &\divrightarrow \frac{p}{p^2 + 1}.\end{aligned}$$

Операторное уравнение будет иметь вид

$$p^2X(p) + 1 + X(p) = \frac{2p}{p^2 + 1},$$

отсюда,

$$X(p) = \frac{2p}{(p^2 + 1)^2} - \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Для нахождения оригинала функции $\frac{2p}{(p^2 + 1)^2}$ можно воспользоваться теоремой о свертке (аналогично примеру 44) или теоремой о дифференцировании изображения:

$$\frac{2p}{(p^2 + 1)^2} = - \left(\frac{1}{p^2 + 1} \right)'_p \leftarrow \div t \sin t.$$

Окончательно $x(t) = (t - 1) \sin t$.

Аналогично операторный метод применяется при решении систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, некоторых типов линейных уравнений и систем с переменными коэффициентами, а также некоторых интегральных и интегро-дифференциальных уравнений.

ПРИМЕР 47. *Найти общее решение уравнения $tx'' - 2x' = 0$.*

РЕШЕНИЕ. По теореме дифференцирования оригинала

$$\begin{aligned}x(t) &\divrightarrow X(p), \\x'(t) &\divrightarrow pX(p) - x(0), \\x''(t) &\divrightarrow p^2X(p) - px(0) - x'(0).\end{aligned}$$

По теореме дифференцирования изображения

$$\begin{aligned}tx''(t) &\divrightarrow -\frac{d}{dp} [p^2X(p) - px(0) - x'(0)] = \\&= -p^2 \frac{dX(p)}{dp} - 2pX(p) + x(0).\end{aligned}$$

Данное дифференциальное уравнение принимает операторный вид

$$-p^2 \frac{dX(p)}{dp} - 2pX(p) + x(0) - 2pX(p) + 2x(0) = 0$$

или

$$\frac{dX(p)}{dp} + \frac{4}{p} X(p) = \frac{3x(0)}{p^2}.$$

Решив полученное линейное неоднородное уравнение первого порядка относительно $X(p)$, получим

$$X(p) = \frac{x(0)}{p} + \frac{C_1}{p^4},$$

откуда придем к решению исходного уравнения

$$x(t) = x(0) + C_1 \frac{t^3}{3!}.$$

ПРИМЕР 48. Решить интегральное уравнение

$$y(t) = \cos t + \int_0^t (t - \tau) y(\tau) d\tau.$$

РЕШЕНИЕ. Перейдем к изображениям, рассматривая интеграл в правой части как свертку функций. Изображением уравнения будет

$$Y(p) = \frac{p}{p^2 + 1} + \frac{1}{p^2} Y(p),$$

откуда получим изображение $Y(p)$ неизвестной функции $y(t)$, а именно

$$Y(p) = \frac{p^3}{(p^2 + 1)(p^2 - 1)}.$$

Найдя оригинал, получим $y(t) = \frac{\cos t + \operatorname{ch} t}{2}.$

ПРИМЕР 49 (Интеграл Дюамеля). Рассмотрим одно важное следствие теоремы об умножении.

Справедливо следующее отношение:

$$\begin{aligned} p F(p) \cdot G(p) &= f(0) \cdot G(p) + [p F(p) - f(0)] G(p) \quad \leftarrow \div \\ &\leftarrow \div f(0) \cdot g(t) + (f' * g)(t). \end{aligned}$$

Представляя свёртку $(f' * g)$ интегралом, получим формулу Дюамеля:

$$p F(p) \cdot G(p) \quad \leftarrow \div \quad f(0) \cdot g(t) + \int_0^t f'(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau =$$

$$= f(0) \cdot g(t) + \int_0^t f'(t - \tau) \cdot g(\tau) d\tau.$$

Свёртка $(f' * g)$ называется *интегралом Дюамеля*.

Однако так как

$$p F(p) \cdot G(p) = g(0) \cdot F(p) + [p G(p) - g(0)] F(p),$$

возможен другой вариант записи формулы Дюамеля:

$$\begin{aligned} pF(p) \cdot G(p) &\leftarrowdiv g(0) \cdot f(t) + \int_0^t g'(\tau) \cdot f(t - \tau) d\tau = \\ &= g(0) \cdot f(t) + \int_0^t g'(t - \tau) \cdot f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

При решении задач формулу Дюамеля удобно применять в тех случаях, когда:

- найти изображение для правой части дифференциального уравнения затруднительно;
- нужно решать одно и то же уравнение с различными правыми частями.

В этих случаях наряду с решением уравнения $L[x] = f(t)$ с нулевыми начальными условиями решается уравнение $L[x_1] = 1$ с теми же условиями.

Операторные уравнения будут иметь вид

$$\begin{aligned} L[x] = f(t) &\divrightarrow A(p)X(p) = F(p); \\ L[x_1] = 1 &\divrightarrow A(p)X_1(p) = \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

Разделив первое равенство на второе, получим $X(p) = p F(p) \cdot X_1(p)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} x(t) &= f(0) \cdot x_1(t) + (f' * x_1)(t) = x_1(0) \cdot f(t) + (f * x_1')(t) = \\ &= f(0) \cdot x_1(t) + \int_0^t f'(\tau) \cdot x_1(t - \tau) d\tau = \end{aligned} \tag{56}$$

$$= f(0) \cdot x_1(t) + \int_0^t f'(t - \tau) \cdot x_1(\tau) d\tau = \tag{57}$$

$$= x_1(0) \cdot f(t) + \int_0^t f(\tau) \cdot x_1'(t - \tau) d\tau = \quad (58)$$

$$= x_1(0) \cdot f(t) + \int_0^t f(t - \tau) \cdot x_1'(\tau) d\tau. \quad (59)$$

При решении конкретной задачи можно выбирать наиболее простой вид интеграла Дюамеля из (56–59).

ПРИМЕР 50. С помощью интеграла Дюамеля решить задачу:

$$x''(t) - x(t) = \frac{1}{1 + e^t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

РЕШЕНИЕ. Рассмотрим вспомогательную задачу:

$$x_1''(t) - x_1(t) = 1, \quad x_1(0) = x_1'(0) = 0.$$

Применяя к ней операционный метод, находим $X_1(p) = \frac{1}{p(p^2 - 1)}$, откуда

$$x_1(t) = \int_0^t \operatorname{sh} \tau d\tau = \operatorname{ch} t - 1.$$

По формуле (58),

$$x(t) = \int_0^t \frac{1}{1 + e^\tau} \operatorname{sh}(t - \tau) d\tau = \frac{1}{2} (e^t - te^t - 1) + \operatorname{sh} t \cdot \ln \frac{1 + e^t}{2}.$$

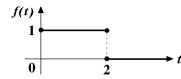
ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

51. Найти решения дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями (см. задачи № 42):

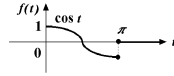
- a) $x' + x = e^{-t}$, $x(0) = 1$;
- b) $x' + 2x = \sin t$, $x(0) = 0$;
- c) $x'' + x = \cos t$, $x(0) = -1$, $x'(0) = 1$;
- d) $x''' + x = 0$, $x(0) = 0$, $x'(0) = -1$, $x''(0) = 2$;
- e) $x'' - x' = te^t$, $x(0) = x'(0) = 0$;
- f) $x^{(4)} - x'' = 1$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0$;
- g) $x'' + x = te^t + 4 \sin t$, $x(0) = x'(0) = 0$.

52. Найти решения дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями и графически заданной правой частью:

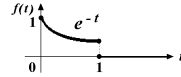
a) $x'' + 9x = f(t)$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$,



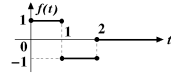
b) $x' + x = f(t)$, $x(0) = x'(0) = 0$,



c) $x'' + x = f(t)$, $x(0) = x'(0) = 0$,



d) $x'' - x' = f(t)$, $x(0) = x'(0) = 0$,



53. Найти решения однородных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, применяя теорему о дифференцировании изображения:

a) $tx'' + (2t - 1)x' + (t - 1)x = 0$;

b) $x'' + (t + 1)x' + tx = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = -1$.

54. Найти решения дифференциальных уравнений, применяя формулу Дюамеля:

a) $x' - x = \frac{1}{e^t + 3}$, $x(0) = x'(0) = 0$;

b) $x'' - x' = \frac{e^{2t}}{(1 + e^t)^2}$, $x(0) = x'(0) = 0$;

c) $x'' - x' = \frac{1}{1 + e^t}$, $x(0) = x'(0) = 0$;

d) $x'' + x = \frac{1}{2 + \cos t}$, $x(0) = x'(0) = 0$;

e) $x'' + x = e^{-t^2}$, $x(0) = x'(0) = 0$.

55. Дифференциальное уравнение вибратора при наличии возмущающей силы $f(t)$ имеет вид

$$x'' + 2nx' + k^2x = \frac{1}{m}f(t), \quad k > n.$$

Начальные условия $x(0) = x'(0) = 0$. Найти $x(t)$.

56. К цепи, состоящей из самоиндукции L , сопротивления R и ёмкости C , включённых последовательно, в момент времени $t = 0$ приложена ЭДС $E = \text{const}$. В начальный момент ток $I_0 = 0$, заряд $Q_0 = 0$. Найти ток I в момент времени t из уравнения

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = E, \quad \text{где } I = \frac{dQ}{dt}.$$

57. Дифференциальное уравнение свободных колебаний вибратора при наличии силы сопротивления, пропорциональной первой степени скорости, имеет вид

$$mx'' + \beta x' + cx = 0,$$

начальные условия: $x(0) = x_0$, $x'(0) = x'_0$. Найти $x(t)$.

58. Найти решения интегральных уравнений:

a) $y(t) = at + \int_0^t \sin(t - \tau) \cdot y(\tau) d\tau;$

b) $y(t) = \frac{t^2}{2} + \int_0^t e^{t-\tau} y(\tau) d\tau.$

59. Найти решения интегро-дифференциальных уравнений:

a) $\int_0^t e^{t-\tau} \sin(t - \tau) \cdot x(\tau) d\tau = x'' - x' + e^t(1 - \cos t), \quad x(0) = x'(0) = 1;$

b) $\int_0^t \text{sh}(t - \tau) \cdot x(\tau) d\tau = x'' - x' + \frac{1}{2} t \text{sh } t, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$

60. Найти решения систем дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями:

a)
$$\begin{cases} x' + y = 0, \\ x + y' = 0, \end{cases} \quad \begin{matrix} x(0) = 1, \\ y(0) = -1; \end{matrix}$$

b)
$$\begin{cases} 3x' + 2x + y' = 1, \\ x' + 4y' + 3y = 0, \end{cases} \quad \begin{matrix} x(0) = 0, \\ y(0) = 0; \end{matrix}$$

c)
$$\begin{cases} x' - x - 2y = t, \\ -2x + y' - e = t, \end{cases} \quad \begin{matrix} x(0) = 2, \\ y(0) = 4; \end{matrix}$$

d)
$$\begin{cases} 2x'' + x - y' = -3 \sin t, \\ x + y' = -\sin t, \end{cases} \quad \begin{matrix} x(0) = 0, \quad x'(0) = 1, \\ y(0) = 0; \end{matrix}$$

$$\begin{aligned}
\text{e)} \quad & \begin{cases} x'' - y' = 0, & x(0) = -1, x'(0) = 1, \\ x - y'' = 2 \sin t, & y(0) = 1, y'(0) = 1; \end{cases} \\
\text{f)} \quad & \begin{cases} x' = x - y + z, & x(0) = 9, \\ y' = x + y - z, & y(0) = 5, \\ z' = 2z - y, & z(0) = 7; \end{cases} \\
\text{g)} \quad & \begin{cases} x'' + y' = 2 \sin t, & x(0) = 0, x'(0) = -1, \\ y'' + z' = 2 \cos t, & y(0) = 0, y'(0) = -1, \\ z'' - x = 0, & z(0) = 0, z'(0) = 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

61. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = 2x - y + 2z, \\ y' = x + 2z, \\ z' = -2x + y - z. \end{cases}$$

3 Ряды Фурье и интегралы Фурье

ЗАНЯТИЕ № 12

Линейные нормированные пространства

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 19. *Линейное пространство L называется нормированным, если определено отображение $\| \cdot \| : L \rightarrow \mathbb{R}$, называемое нормой вектора, такое, что:*

- 1) $\|x\| \geq 0 \quad (\forall x \in L)$, при этом $\|x\| = 0 \iff x = 0$;
- 2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad (\forall \lambda \in \mathbb{R}, x \in L)$ — свойство однородности нормы;
- 3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (\forall x \in L, y \in L)$ — неравенство треугольника.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 20. *Множество M называется метрическим пространством, если определено отображение $\rho : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$, называемое расстоянием между точками множества M или метрикой на множестве M , удовлетворяющее следующим аксиомам:*

- 1) $\rho(x, y) \geq 0 \quad (\forall x, y \in M)$, при этом $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$ — расстояние не может быть отрицательным, а равно нулю в том и только в том случае, когда точки пространства, между которыми измеряется расстояние, совпадают;
- 2) $\rho(x, y) = \rho(y, x) \quad (\forall x, y \in M)$ — симметричность расстояния (расстояние от точки x до точки y равно расстоянию от точки y до точки x);
- 3) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) \quad (\forall x, y, z \in M)$ — неравенство треугольника.

ТЕОРЕМА 33. *Нормированное пространство L можно рассматривать, как метрическое пространство, если метрику определить равенством:*

$$\rho(x, y) = \|x - y\| \quad (\forall x, y \in L). \quad (60)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 14. Норма вектора из произвольного линейного пространства является обобщением понятия длины, или модуля, вектора двумерного или трехмерного векторного пространства.

Действительно,

$$\|\mathbf{a}\| = |\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}, \quad \text{где } \mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} = \{a_1, a_2, a_3\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 15. Формула (60) — обобщение известной формулы для расстояния между концами векторов на плоскости или в пространстве, а именно, если $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB} = \{b_1, b_2, b_3\}$, то, как известно,

$$|\overrightarrow{AB}| = \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}.$$

ПРИМЕР 51. Арифметическое линейное пространство

$$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

является нормированным пространством с нормой

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

и метрическим пространством с метрикой

$$\rho(x, y) = \|y - x\| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}.$$

Мы в дальнейшем будем рассматривать функциональные пространства $F = \{f : I \rightarrow \mathbb{R}\}$ — пространства функций, заданных на интервале $I \subseteq \mathbb{R}$. Операции сложения и умножения на число в этих пространствах определим как:

$$(f + g)(t) = f(t) + g(t); \quad \forall f, g \in F; \quad \forall t \in I; \quad (61)$$

$$(\lambda \cdot f)(t) = \lambda \cdot f(t); \quad \forall f \in F; \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}; \quad \forall t \in I. \quad (62)$$

ПРИМЕР 52. Линейное пространство $C_{[a,b]}$ непрерывных функций на отрезке $[a, b]$ станет нормированным, если ввести норму $\|f\|_C$ следующим образом:

$$\|f\|_C = \max_{[a,b]} |f(t)| \quad (\forall f \in C_{[a,b]}) . \quad (63)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 16. Как показывает следующий пример, на одном и том же линейном пространстве можно ввести различные нормы.

ПРИМЕР 53. Так как непрерывные функции на замкнутом отрезке являются интегрируемыми в собственном смысле, на пространстве $C_{[a,b]}$ можно ввести норму $\|f\|_{L_1}$ следующим образом:

$$\|f\|_{L_1} = \int_a^b |f(t)| dt; \quad (\forall f \in C_{[a,b]}) . \quad (64)$$

ПРИМЕР 54. Рассмотрим пространство $L_2[a, b]$ функций с интегрируемым (вообще говоря, в несобственном смысле) на отрезке $[a, b]$ квадратом, то есть функций $f(t)$, для которых

$$\int_a^b f^2(t) dt < +\infty.$$

Тогда на $L_2[a, b]$ можно ввести норму $\|f\|_{L_2}$ следующим образом

$$\|f\|_{L_2} = \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt} \quad (\forall f \in L_2[a, b]). \quad (65)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 21. Последовательность $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ элементов метрического пространства M называется сходящейся к элементу $x_0 \in M$ в метрике пространства M , если $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x_0) = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 17. Сходимость в пространстве $L_2[a, b]$ с нормой $\|f\|_{L_2}$ называется сходимостью в среднем квадратичном.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 22. Линейное пространство E называется евклидовым пространством, если на нем может быть определено скалярное произведение, то есть отображение $(\cdot, \cdot) : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющее аксиомам:

1) $(x, y) = (y, x) \quad (\forall x, y \in E)$ — коммутативность скалярного произведения;

2) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y) \quad (\forall x_1, x_2, y \in E)$ — аддитивность скалярного произведения;

3) $(\lambda x, y) = \lambda \cdot (x, y) \quad (\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R})$ — однородность скалярного произведения;

4) $(x, x) \geq 0$, при этом $(x, x) = 0 \iff x = 0$ — положительная определенность скалярного произведения.

ЗАМЕЧАНИЕ 18. Так определенное скалярное произведение является обобщением скалярного произведения векторов двумерного или трехмерного векторного пространства:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

ПРИМЕР 55. На арифметическом векторном пространстве $\mathbb{R}^n$ скалярное произведение можно ввести с помощью равенства:

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = \sum_{k=1}^n x_k y_k,$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

ТЕОРЕМА 34. Отображение евклидоваго пространства E в множество вещественных чисел, определенное равенством

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)} \quad (\forall f \in E),$$

является его нормой.

ПРИМЕР 56. Скалярное произведение в пространстве $L_2[a, b]$ определяется как

$$(f, g) = \int_a^b f(t) \cdot g(t) dt \quad (\forall f, g \in L_2[a, b]). \quad (66)$$

или, в более общем случае, как

$$(f, g) = \int_a^b f(t) \cdot g(t) \cdot p(t) dt \quad (\forall f, g \in L_2[a, b]), \quad (67)$$

где $p(t) > 0 \quad \forall t \in [a, b]$ — некоторая, заранее определенная функция, называемая весовой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 23. Система функций $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ некоторого функционального пространства F называется базисом, если:

- 1) любая конечная подсистема $\{\varphi_k\}$, $k = 1, 2, \dots, n$ образует линейно независимую систему;
- 2) система $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ полна в F , то есть

$$\forall f \in F \quad \exists \{a_k\}_{k \in \mathbb{N}} : \lim_{n \rightarrow \infty} \rho \left(f, \sum_{k=1}^n a_k \cdot \varphi_k \right) = 0,$$

то для любого элемента $f \in F$ существует последовательность линейных комбинаций элементов базиса, сходящаяся к нему в метрике пространства F .

ЗАМЕЧАНИЕ 19. Функциональные пространства бесконечномерны, поэтому в определении 23 приходится таким сложным образом формулировать 2-й пункт — аналог того, что в конечномерном пространстве любой элемент представляется линейной комбинацией базисных.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 24. Система функций $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ некоторого функционального евклидова пространства F называется ортогональной, если $\varphi_k \neq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$ и $(\varphi_i, \varphi_j) = 0$ при $i \neq j$. Если, дополнительно, $\|\varphi_k\| = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$, система называется ортонормированной.

ПРИМЕР 57. Система функций

$$\left\{ 1, \cos n \frac{2\pi t}{b-a}, \sin n \frac{2\pi t}{b-a} \right\}_{n \in \mathbb{N}} \quad (68)$$

является ортогональной системой в пространстве $L_2[a, b]$ — тригонометрическая система.

В частности, важными случаями являются

$$\left\{ 1, \cos \frac{n\pi t}{l}, \sin \frac{n\pi t}{l} \right\}_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{на} \quad L_2[-l, l] \quad (69)$$

и

$$\{1, \cos nt, \sin nt\}_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{на} \quad L_2[-\pi, \pi] \quad (70)$$

ПРИМЕР 58. Полиномы Лежандра

$$\left\{ L_0(x) = 1, L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n [(x^2 - 1)^n]}{dx^n} \right\}_{n \in \mathbb{N}} \quad (71)$$

образуют ортогональную систему в пространстве $L_2[-1, 1]$.

Приведем явные выражения для первых пяти многочленов Лежандра

$$\begin{aligned} L_0(x) &= 1; & L_1(x) &= x; \\ L_2(x) &= \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}; & L_3(x) &= \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x; \\ L_4(x) &= \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 59. Полиномы Чебышева

$$T_n(x) = \frac{(-2)^n \cdot n!}{(2n)!} \cdot \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{d^n [(\sqrt{1-x^2})^{2n-1}]}{dx^n} \quad (72)$$

образуют ортогональную систему с весом $p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ в пространстве $L_2[-1, 1]$.

Приведем явные выражения для первых пяти многочленов Чебышева

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, & T_1(x) &= x, & T_2(x) &= 2x^2 - 1, \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x, & T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1. \end{aligned}$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

62. Доказать, что линейными являются следующие пространства:

- a) $C_{[a,b]} = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ непрерывна}\};$
- b) $P_n[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f - \text{многочлен степени } \leq n\};$
- c) $L_2[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \int_a^b f^2(t) dt < +\infty\}.$

63. Доказать, что в пространстве $L_2[a, b]$ операция (66) является скалярным произведением, отображение (65) — нормой, а

$$\rho(f, g) = \|f - g\|_{L_2} = \sqrt{\int_a^b (f(t) - g(t))^2 dt}$$

является метрикой на $L_2[a, b]$.

64. Доказать, что ортогональная система в нормированном пространстве является линейно независимой.

65. Доказать ортогональность систем тригонометрических функций (68), (69), (70). Найти нормы этих функций.

66. Доказать, что система T -периодических функций

$$\left\{ \frac{e^{ik\omega t}}{\sqrt{T}} \right\}_{k \in \mathbb{Z}}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad (73)$$

образуют ортонормированный базис в $L_2 \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2} \right]$

67. Доказать, что система полиномов Лежандра (71) образуют ортогональную систему в $L_2[-1, 1]$ и показать, что $\|L_n\|_{L_2} = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}$.

68. Доказать, что система полиномов Чебышева (72) образуют ортогональную систему с весом $p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ в пространстве $L_2[-1, 1]$.

ЗАНЯТИЕ № 13

Разложение функций в ряд Фурье

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 25. Обобщенным рядом Фурье функции $f(t) \in L_2[a, b]$ по ортогональной системе функций $\{g_k(t)\}$, $k \in \mathbb{N}$ называется функциональный ряд

$$c_1 \cdot g_1(t) + c_2 \cdot g_2(t) + \dots + c_n \cdot g_n(t) + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot g_k(t), \quad (74)$$

коэффициенты которого находятся по формулам

$$c_k = \frac{(f, g_k)}{\|g_k\|^2}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \dots \quad (75)$$

Если ряд (74) составлен по функции $f(t)$, будем записывать это как

$$f(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot g_k(t).$$

Возникают вопросы сходимости ряда (74) к функции $f(t)$.

Если $f(t), g_k(t) \in L_2[a, b]$, то

$$\rho(f(t), S_n(t)) = \|f(t) - S_n(t)\|_{L_2} = \sqrt{\int_a^b [f(t) - S_n^2(t)]^2 dt}.$$

Поэтому можно дать следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 26. Среднеквадратичной ошибкой ∇_n^2 назовем величину, определенную равенством

$$\nabla_n^2 = \|f(t) - S_n(t)\|^2 = \int_a^b [f(t) - S_n^2(t)]^2 dt,$$

где $S_n(t)$ — частичная сумма ряда (74).

Иногда вводят относительную среднеквадратичную ошибку

$$\bar{\nabla}_n^2 = \frac{1}{b-a} \int_a^b [f(t) - S_n^2(t)]^2 dt.$$

ТЕОРЕМА 35 (Парсеваля). Пусть

$$\nabla_n^2 = \|f(t) - S_n(t)\|^2, \quad \text{где } S_n(t) = \sum_{k=1}^n c_k \cdot g_k(t)$$

для некоторого ряда. Тогда ∇_n^2 достигает минимума в случае ряда Фурье, то есть в случае, когда коэффициенты c_k находятся по формулам (75).

При доказательстве теоремы Парсеваля (см. задачу 69) возникает тождество Бесселя

$$\left\| f(t) - \sum_{k=1}^n a_k g_k(t) \right\|^2 = \|f(t)\|^2 - \sum_{k=1}^n c_k^2 \cdot \|g_k(t)\|^2, \quad (76)$$

которое позволяет записать:

1) формулу для вычисления ∇_n^2 с помощью коэффициентов ряда Фурье

$$\nabla_n^2 = \|f(t)\|^2 - \sum_{k=1}^n c_k^2 \cdot \|g_k(t)\|^2; \quad (77)$$

2) неравенство Бесселя

$$\|f(t)\|^2 \geq \sum_{k=1}^n c_k^2 \cdot \|g_k(t)\|^2. \quad (78)$$

В случае когда коэффициенты c_k вычисляются по формулам (75), выполняется равенство

$$\|f(t)\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \cdot \|g_k(t)\|^2, \quad (79)$$

называемое равенством Парсеваля.

ЗАМЕЧАНИЕ 20. В случае ортонормированной системы функций $\{g_k(t)\}$ равенство Парсеваля принимает более простой вид

$$\|f(t)\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2,$$

что является обобщением теоремы Пифагора на бесконечномерные пространства.

ЗАМЕЧАНИЕ 21. Равенство Парсеваля является условием полноты системы функций $\{g_k(t)\}$.

Действительно, переходя в тождестве Бесселя (76) к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим эквивалентность условий

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f(t) - \sum_{k=1}^n c_k \cdot g_k(t) \right\| = 0 \quad (80)$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\|f(t)\|^2 - \sum_{k=1}^n c_k^2 \cdot \|g_k(t)\|^2 \right) = 0,$$

а выполнение условия (80) влечет за собой полноту рассматриваемой системы $\{g_k(t)\}$, $k \in \mathbb{N}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 27. Интеграл

$$\mathcal{E} = \int_a^b f^2(t) dt = \|f(t)\|_{L_2}^2$$

в радиотехнике называют энергией сигнала.

Равенство Парсеваля (79) позволяет записать энергию в виде

$$\mathcal{E} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \cdot \|g_k(t)\|^2.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 28. Отношение

$$\frac{\mathcal{E}}{b-a} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f^2(t) dt$$

называют средней на $[a, b]$ мощностью сигнала $f(t)$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

69. Доказать теорему Парсеваля 35.

Указание. Вычислить $\nabla_n^2 = \|f(t) - \sum_{k=1}^n a_k g_k(t)\|^2$. Учитывая ортогональность системы $\{g_k(t)\}$, используя аксиомы скалярного произведения, показать, что ∇_n^2 будет наименьшей при $a_k = c_k$.

70. Разложить в ряд Фурье по полиномам Лежандра на отрезке $[-1, 1]$ многочлен $2x^3 - 3x^2 + 4x - 5$.

71. Разложить в ряд Фурье по полиномам Чебышева на отрезке $[-1, 1]$ многочлен $x^3 - 2x^2 + 3x - 4$.

ЗАНЯТИЕ № 14

Тригонометрические ряды Фурье Гармонический анализ

РАЗЛОЖЕНИЕ ПО ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМ СИСТЕМАМ ФУНКЦИЙ

Среди ортогональных систем функций естественным образом выделяются тригонометрические системы (68–70), которые позволяют любой периодический процесс (колебание) разложить в сумму гармонических колебаний.

Для системы функций (70) ряд Фурье может быть записан в виде

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt,$$

где коэффициенты a_n и b_n вычисляются по формулам

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (81)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (82)$$

функция $f(t)$ задана на отрезке $(-\pi, \pi]$.

Для более общего случая системы (69) получаем

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{l} + b_n \sin \frac{n\pi t}{l},$$

где коэффициенты a_n и b_n вычисляются по формулам

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) dt, \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{n\pi t}{l} dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (83)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin \frac{n\pi t}{l} dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (84)$$

функция $f(t)$ задана на отрезке $(-l, l]$.

ЗАМЕЧАНИЕ 22. Если рассматривать $f(t)$ как T -периодическую функцию с периодом $T = 2l$, ввести обозначение $\omega = \frac{2\pi}{T}$, учесть, что для T -периодической функции справедливо равенство

$$\int_0^T f(t) dt = \int_c^{c+T} f(t) dt \quad \forall c \in \mathbb{R},$$

можно получить следующую форму ряда Фурье:

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t, \quad (85)$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_c^{c+T} f(t) dt, \quad a_n = \frac{2}{T} \int_c^{c+T} f(t) \cos n\omega t dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (86)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_c^{c+T} f(t) \sin n\omega t dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (87)$$

где c — произвольное вещественное число.

Представление периодической функции $f(t)$ в виде ряда Фурье (85) можно записать как сумму гармонических колебаний (гармоник) следующим образом:

$$\begin{aligned} f(t) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t - \varphi_n) = \end{aligned} \quad (88)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \psi_n), \quad (89)$$

где $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ — амплитуда, $n\omega$ — частота, $\varphi_n = \arctg \frac{b_n}{a_n}$, $\psi_n = \arctg \frac{a_n}{b_n}$ — сдвиги по фазе соответствующей гармоники.

В задаче 66 мы доказали ортонормальность системы функций (73). Теперь, если ввести обозначение $T = 2l$, ряд Фурье для T -периодической функции $f(t)$ можно записать в комплексной форме:

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}, \quad \text{где} \quad c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) e^{-in\omega t} dt, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (90)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 23. T -периодическая функция (сигнал) $f(t)$ полностью определяется своими спектрами: амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) — набором $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ и фазо-частотной характеристикой (ФЧХ) — набором $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Поэтому в технических дисциплинах разложение функции в тригонометрический ряд Фурье называют спектральным гармоническим анализом.

ВОПРОСЫ СХОДИМОСТИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ

Если T -периодическая функция $f \in L_2[-l, l]$, то ее ряд Фурье сходится в среднем квадратичном, т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-l}^l [f(t) - S_n(t)]^2 dt = 0,$$

где $S_n(t)$ — частичная сумма ряда Фурье (см. замечание 21 на стр. 63). Полнота системы тригонометрических функций доказывается в курсах функционального анализа.

Однако с точки зрения применения рядов Фурье важно найти условия, которые бы гарантировали сходимость ряда Фурье не только в среднем, но и поточечно, а, возможно, и равномерно. Отметим, что самые простые из этих условий формулируются достаточно сложно, поэтому приведем самые слабые из них. Для тех функций (сигналов), которые мы будем рассматривать, этих условий будет достаточно.

Рассмотрим достаточный признак поточечной сходимости тригонометрических рядов Фурье.

ТЕОРЕМА 36 (Дирихле). *Если T -периодическая функция $f(t)$ на замкнутом промежутке длины T удовлетворяет следующим условиям:*

1) $f(t)$ либо непрерывна, либо имеет конечное число точек разрыва первого рода;

2) $f(t)$ либо монотонна, либо имеет конечное число максимумов и минимумов,

то:

1) ряд Фурье сходится для каждого значения t ;

2) сумма ряда Фурье равна $f(t)$ во всех точках непрерывности этой функции;

3) в точках разрыва первого рода

$$S(t_0) = \frac{1}{2} [f(t_0 + 0) + f(t_0 - 0)],$$

где t_0 — точка разрыва, $S(t_0)$ — сумма ряда Фурье в этой точке, $f(t_0 + 0)$ и $f(t_0 - 0)$ — соответственно правый и левый пределы функции $f(t)$ в точке t_0 .

Приведем достаточный признак равномерной сходимости.

ТЕОРЕМА 37. *Если функция $f(t)$, заданная на отрезке $[-l, l]$, непрерывна на этом промежутке, имеет в нем ограниченное изменение и,*

кроме того, $f(-l) = f(l)$, то ее ряд Фурье сходится на всем промежутке равномерно.

ЗАМЕЧАНИЕ 24. Под функцией ограниченного изменения (вариации) на отрезке $[a, b]$ понимается функция, для которой существует такое число $A > 0$, что $\sum_{k=1}^n |f(t_k) - f(t_{k-1})| \leq A < \infty$ для любого разбиения отрезка $[a, b]$

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < \dots < t_n = b$$

при любом, сколь угодно большом n . В частности, такими будут функции, удовлетворяющие второму условию теоремы Дирихле о поточечной сходимости.

Для многих задач математической физики и технических приложений рядов Фурье важны вопросы почленной дифференцируемости, интегрируемости и скорости сходимости рядов Фурье.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 29. Функция $f(t)$ называется абсолютно интегрируемой на отрезке $[a, b]$, если существуют оба интеграла

$$\int_{-l}^l f(t) dt \quad \int_{-l}^l |f(t)| dt.$$

ТЕОРЕМА 38. Если $f(t)$ абсолютно интегрируема на $[-l, l]$, то интеграл от нее получается почленным интегрированием ряда Фурье, то есть для любых t_1, t_2 таких, что $-l \leq t_1 < t_2 \leq l$, справедливо

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{a_0}{2} dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{t_1}^{t_2} \left[a_n \cos \frac{n\pi t}{l} + b_n \sin \frac{n\pi t}{l} \right] dt.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 25. Наиболее примечательно в предыдущей теореме то, что она справедлива без каких-либо дополнительных предположений, кроме абсолютной интегрируемости $f(t)$. Не делаются предположения даже о сходимости ряда Фурье для $f(t)$.

ТЕОРЕМА 39. Пусть функция $f(t)$ непрерывна на $[-l, l]$, удовлетворяет условию $f(-l) = f(l)$ и имеет, за исключением, быть может, конечного числа точек, производную $f'(t)$. Пусть $f'(t)$ абсолютно интегрируема на $[-l, l]$. Тогда ряд Фурье для производной $f'(t)$ может быть получен из ряда Фурье функции $f(t)$ почленным дифференцированием.

ЗАМЕЧАНИЕ 26. В предыдущей теореме утверждается лишь только, что ряд Фурье для $f'(t)$, составленный непосредственно по соответствующим формулам для коэффициентов, совпадает с рядом, полученным дифференцированием ряда для $f(t)$. Сходимость этого ряда к $f'(t)$ необходимо устанавливать отдельно, пользуясь какими-либо достаточными признаками.

ТЕОРЕМА 40. Если T -периодическая функция $f(t)$ непрерывна вместе со своими производными до $(m-1)$ -го порядка, а ее производная m -го порядка удовлетворяет условиям Дирихле, то порядок убывания $|a_n|, |b_n|$ не ниже чем $\frac{1}{n^{m+1}}$, т. е. существует $C > 0$, такое, что

$$|a_n| \leq \frac{C}{n^{m+1}}, \quad |b_n| \leq \frac{C}{n^{m+1}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Если же при этом производная порядка m разрывна, то порядок убывания $|a_n|, |b_n|$ и не выше чем $\frac{1}{n^{m+1}}$, т. е.

$$a_n = O\left(\frac{1}{n^{m+1}}\right), \quad b_n = O\left(\frac{1}{n^{m+1}}\right).$$

Пусть ряд Фурье T -периодической функции имеет вид (88), тогда правая часть тождества Бесселя (76) имеет вид

$$\|f(t)\|^2 - \sum_{k=1}^n c_k^2 \cdot \|g_k(t)\|^2 = \int_0^T f^2(t) dt - \frac{a_0^2}{4}T - \frac{T}{2} \sum_{k=1}^n A_k^2.$$

Относительная среднеквадратичная ошибка ∇_n^2 может быть записана через амплитуду отдельных гармоник:

$$\overline{\nabla}_n^2 = \frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n A_k^2. \quad (91)$$

Равенство Парсеваля (79) имеет вид

$$\int_0^T f^2(t) dt - \frac{a_0^2}{4}T = \frac{T}{2} \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2. \quad (92)$$

ТЕОРЕМА 41. Энергия спектра может быть найдена по формуле

$$\mathcal{E} = \frac{T}{2} \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2.$$

Действительно, энергия отдельной гармоники $A_k \cos(k\omega t - \varphi_k)$ за время T будет

$$\begin{aligned} E_k &= \int_0^T A_k^2 \cos^2(k\omega t - \varphi_k) dt = \\ &= \frac{A_k^2}{2} \int_0^T [1 + \cos(2k\omega t - \varphi_k)] dt = A_k^2 \frac{T}{2}. \end{aligned}$$

Равенство (92) позволяет записать энергию в виде

$$\mathcal{E} = \int_0^T f^2(t) dt - \frac{a_0^2}{4} T.$$

Оценить долю k -й гармоники в общей энергии спектра можно по формуле

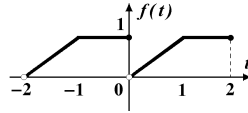
$$\mathcal{E}_k = \frac{E_k}{\mathcal{E}} = \frac{A_k^2 \cdot \frac{T}{2}}{\int_0^T f^2(t) dt - \frac{a_0^2}{4} T} \equiv \frac{A_k^2}{\frac{2}{T} \int_0^T f^2(t) dt - \frac{a_0^2}{2}}. \quad (93)$$

ПРИМЕР 60. Дадим пример решения задачи типового расчета для функции с периодом $T = 2$

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 < t \leq 1, \\ 1, & 1 < t \leq 2. \end{cases}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 27. Условия задач смотри в прил. А на стр. 90.

РЕШЕНИЕ. График заданной функции выглядит следующим образом



1. Запишем ряд Фурье для функции $f(t)$, используя формулы (83), (84).

$$a_0 = \int_{-1}^0 dt + \int_0^1 t dt = t \Big|_{-1}^0 + \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{3}{2};$$

$$\begin{aligned}
a_k &= \int_{-1}^0 \cos k\pi t \, dt + \int_0^1 t \cos k\pi t \, dt = \frac{(-1)^k - 1}{(k\pi)^2} = \\
&= \begin{cases} 0, & k = 2n, \\ -\frac{2}{(k\pi)^2}, & k = 2n - 1; \end{cases} \\
b_k &= \int_{-1}^0 \sin k\pi t \, dt + \int_0^1 t \sin k\pi t \, dt = -\frac{1}{k\pi}.
\end{aligned}$$

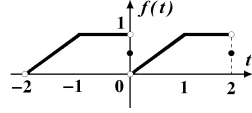
Ряд Фурье для заданной функции имеет вид

$$f(t) \sim \frac{3}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k - 1}{(k\pi)^2} \cos k\pi t - \frac{1}{k\pi} \sin k\pi t.$$

2. По теореме 36 сумма ряда Фурье для функции $f(t)$ имеет вид

$$S(t) = \begin{cases} t & \text{при } 0 < t \leq 1, \\ 1 & \text{при } 1 < t < 2, \\ 0,5 & \text{при } t = 0, t = 2. \end{cases}$$

График $S(t)$ показан на рисунке



3. Построим амплитудный спектр. Амплитуда вычисляется по формуле $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$. Результаты представлены в табл. 1.

Таблица 1

Амплитудный спектр

	π	2π	3π	4π	5π	6π	7π
a_k	-0,2026	0,0	-0,0226	0,0	-0,0081	0,0	-0,0041
b_k	-0,3183	-0,1592	-0,1061	-0,0796	-0,0636	-0,0531	-0,0455
A_k	0,3773	0,1592	0,1085	0,0796	0,0642	0,0531	0,0457

4. Определим число гармоник, содержащих не менее 90 % энергии. Воспользуемся формулой (93). Напомним, что у нас $T = 2$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_1 &= \frac{A_1^2 \cdot 100 \%}{\frac{2}{T} \int_0^T f^2(t) \, dt - \frac{a_0^2}{2}} \approx \frac{(0,3773)^2 \cdot 100 \%}{\int_0^1 t^2 \, dt + \int_1^2 dt - \frac{3^2}{2} \cdot \frac{1}{2}} \approx
\end{aligned}$$

$$\approx \frac{(0,3773)^2}{0,2083} \cdot 100 \% \approx 68,36 \%.$$

Аналогично вычисляя, получим

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_2 &\approx 12,16 \%; & \mathcal{E}_3 &\approx 5,65 \%; & \mathcal{E}_4 &\approx 3,04 \%; \\ \mathcal{E}_5 &\approx 1,98 \%; & \mathcal{E}_6 &\approx 1,35 \%; & \mathcal{E}_7 &\approx 1,00 \%. \end{aligned}$$

Первые пять гармоник в сумме дают 91,19 % энергии, что удовлетворяет поставленной задаче (четыре гармоники дают 89,21 % энергии).

5. Построим графики заданной функции, суммы первых пяти гармоник и квадрата отклонений частичной суммы от заданной функции. Информация для построения приведена в табл. 2.

Таблица 2

Частичная сумма пяти первых гармоник
и квадрат отклонений

t	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
$S_5(t)$	0,5167	0,1269	0,1150	0,3211	0,4393	0,4742	0,5799
$[f(t) - S_5(t)]^2$	0,2670	0,0007	0,0072	0,0004	0,0015	0,0007	0,0004
t	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3
$S_5(t)$	0,7255	0,8090	0,8775	0,9833	1,0345	0,9886	0,9697
$[f(t) - S_5(t)]^2$	0,0006	0,0001	0,0005	0,0003	0,0012	0,0001	0,0010
t	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
$S_5(t)$	1,0249	1,0258	0,9558	0,9837	1,0874	0,9611	0,5167
$[f(t) - S_5(t)]^2$	0,0006	0,0007	0,0019	0,0003	0,0076	0,0015	0,2335

На рис. 4 приведены графики $f(t)$, частичной суммы $S_5(t)$, а также квадрата отклонения $[f(t) - S_5(t)]^2$. Последних два графика построены по данным табл. 2.

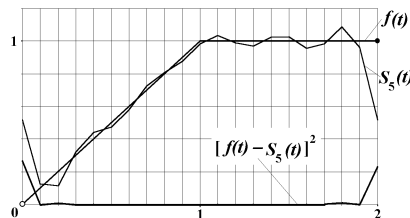


Рис. 4

6. Относительную среднеквадратичную ошибку при $n = 5$ вычисляем

по формуле (91)

$$\overline{\nabla}_5^2 = \frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^5 A_k^2 \approx 0,0092.$$

ЭФФЕКТ ГИББСА

Рассмотрим одну интересную особенность частичных сумм ряда Фурье для функций, имеющих разрывы первого рода.

ПРИМЕР 61. *Оценить вклад первых трех, отличных от нуля гармоник, для функции $f(t) = |t|$, $t \in [-1, 1]$ периода $T = 2$.*

Запишем ряд Фурье для этой функции:

$$|t| \sim \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \left[\cos \pi t + \frac{1}{9} \cos 3\pi t + \dots + \frac{1}{(n-1)^2} \cos(2n-1)\pi t + \dots \right].$$

Вычислив вклад первых трех гармоник по формуле (93), будем иметь $\mathcal{E}_1 \approx 98,55\%$, $\mathcal{E}_2 \approx 1,27\%$, $\mathcal{E}_3 \approx 0,16\%$.

Вывод: $\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3 \approx 99,98\%$.

Этот результат был предопределен, поскольку, во-первых, коэффициенты $a_k = O(1/k^2)$, во-вторых, заданная функция удовлетворяет условиям теоремы Вейерштрасса, что обеспечивает *равномерную* сходимость ряда Фурье к $f(t)$.

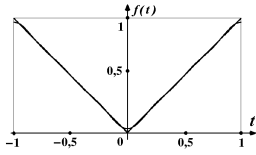


Рис. 5

Построим графики заданной функции и $S_3(t)$. Отклонение графика $S_3(t)$ от графика $f(t)$ не превосходит некоторой достаточно малой величины на всем промежутке задания. Как видно на рис. 5, графики практически сливаются и отклонения заметны только вблизи точек $t = 0$ и $t = \pm 1$.

ПРИМЕР 62. *Оценить долю первых трех отличных от нуля гармоник для функции периода $T = 2\pi$, заданной как*

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t \leq \pi, \\ -1, & \pi < t \leq 2\pi. \end{cases}$$

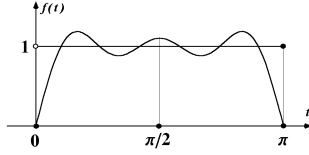
Запишем ряд Фурье для этой функции:

$$f(t) \sim \frac{4}{\pi} \left[\sin t + \frac{\sin 3t}{3} + \frac{\sin 5t}{5} + \dots + \frac{\sin(2n-1)t}{2n-1} + \dots \right].$$

Этот ряд сходится к $f(t)$ поточечно, поскольку удовлетворяет на отрезке $[0, 2\pi]$ условиям Дирихле и коэффициенты $b_k = O(1/k)$. Вычислив вклад первых трех гармоник по формуле (93), будем иметь $\mathcal{E}_1 \approx 81,06\%$, $\mathcal{E}_2 \approx 9,01\%$, $\mathcal{E}_3 \approx 3,24\%$.

Вывод: $\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3 \approx 93\%$.

Сравнивая выводы в примерах 61 и 62, видим, что первые три от-



личные от нуля гармоники в примере 61 описывают функцию лучше, чем в примере 62.

Это наглядно показывает рис. 6, на котором изображены график функции $f(t)$ и график суммы ее первых трех гармоник на отрезке $[0, \pi]$.

Рис. 6

Исследуем частичную сумму

$$S_n(t) = \frac{4}{\pi} \left[\sin t + \frac{\sin 3t}{3} + \frac{\sin 5t}{5} + \dots + \frac{\sin(2n-1)t}{2n-1} \right].$$

Найдем точки экстремума этой функции.

$$S'_n(t) = \frac{4}{\pi} [\cos t + \cos 3t + \cos 5t + \dots + \cos(2n-1)t].$$

Используем формулу

$$\begin{aligned} S &= \cos a + \cos(a+d) + \cos(a+2d) + \dots + \cos(a+(n-1)d) = \\ &= \cos\left(a + \frac{(n-1)d}{2}\right) \cdot \frac{\sin \frac{nd}{2}}{\sin \frac{d}{2}}. \end{aligned}$$

Положив в последней формуле $a = t$, $d = 2t$, получим

$$S'_n(t) = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\cos nt \cdot \sin nt}{\sin t} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sin 2nt}{\sin t},$$

следовательно,

$$S_n(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^t \frac{\sin 2n\tau}{\sin \tau} d\tau.$$

Экстремумы функции $S_n(t)$ определяются равенствами $\sin 2nx = 0$, поэтому на отрезке $[0, \pi/2]$ имеем n экстремальных точек

$$t_k = \frac{k\pi}{2n}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Найдем первый максимум.

$$S_n(t_1) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2n} \frac{\sin 2n\tau}{\sin \tau} d\tau = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin y}{2n \sin(y/2n)} dy,$$

где $y = 2n\tau$ — новая переменная интегрирования.

Пусть теперь n сколь угодно велико. Тогда $\sin(y/2n) \sim y/2n$ и мы имеем

$$S_n(t_1) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin y}{2n \sin(y/2n)} dy \approx \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin y}{y} dy = \frac{2}{\pi} \text{si } \pi \approx 1,179.$$

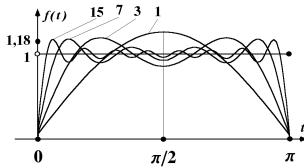


Рис. 7

Видим, что это значение больше 1. Этот эффект и был замечен Д. Гиббсом. Он означает, что при сколь угодно большом n в случае функции с разрывами 1-го рода $S_n(t)$ может не уклоняться от $f(t)$ на сколь угодно малую величину.

В разобранным примере уклонение составляет величину порядка 18%. Возникший при $n = 1$ максимум отклонения практически не уменьшается с ростом n , лишь только точка, в которой этот максимум достигается, приближается к точке разрыва. Отметим, что этот эффект является следствием отсутствия *равномерной* сходимости. Рисунок 7, на котором приведены графики частичных сумм при $n = 1, 3, 7, 15$, иллюстрирует это явление графически.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

72. Вывести формулы (81–84) для вычисления коэффициентов тригонометрического ряда Фурье.

Указание. Применить формулы (75) для тригонометрических систем.

73. Вывести формулы (90) для коэффициентов c_n ряда Фурье в комплексной форме. Доказать, что

$$c_n + c_{-n} = a_n, \quad c_n - c_{-n} = b_n i, \quad c_n = \frac{a_n + b_n i}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n - b_n i}{2}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где a_n, b_n — коэффициенты (83), (84) ряда Фурье в вещественной форме.

Указание. Применить формулы Эйлера (12), (13).

74. Удовлетворяют ли условиям теоремы Дирихле о почленной сходимости функции:

$$\text{a) } f(t) = \sin \frac{1}{t}, \quad t \in (-\pi, \pi]; \quad \text{b) } f(t) = \frac{1}{1-t}, \quad t \in (-2, 2] ?$$

75. Показать, что если $f(t)$ ($t \in (-l, l]$) — четная функция, то $b_n = 0$, и ряд Фурье имеет вид

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{l}.$$

Коэффициенты a_n при этом можно вычислять по формулам

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(t) dt, \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(t) \cos \frac{n\pi t}{l} dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

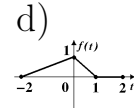
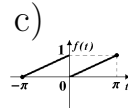
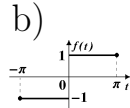
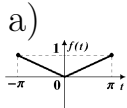
Если же $f(t)$ — нечетная функция, то $a_n = 0$ ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$), и ряд Фурье имеет вид

$$f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi t}{l},$$

где коэффициенты b_n можно вычислять по формулам

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(t) \sin \frac{n\pi t}{l} dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

76. Указать, выяснив по приведенным графикам дифференциальные свойства функций, скорость сходимости коэффициентов a_n , b_n рядов Фурье этих функций.



ЗАНЯТИЕ № 15

Интеграл Фурье

Ряд Фурье дает возможность представить периодическую функцию как суперпозицию гармонических колебаний. Если функция, заданная на всей числовой оси, не является периодической, то такое представление также возможно, но только не в виде ряда, а в виде интеграла.

Пусть $f(x)$ — функция, заданная на всей числовой оси. Предположим, что на каждом конечном интервале она удовлетворяет условиям, обеспечивающим ее разложение в ряд Фурье, при этом эта функция абсолютно интегрируема, то есть

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < +\infty. \quad (94)$$

Рассмотрим разложение этой функции в ряд Фурье на отрезке $(-l, l]$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi}{l}x + b_k \sin \frac{k\pi}{l}x.$$

Подставив выражения для коэффициентов a_k, b_k , найденные из формул (83), (84), в это разложение, получим

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{k\pi x}{l} \cos \frac{k\pi t}{l} dt + \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{k\pi t}{l} dt \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \\ &+ \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-l}^l f(t) \left[\cos \frac{k\pi x}{l} \cos \frac{k\pi t}{l} + \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{k\pi t}{l} \right] dt = \\ &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{k\pi}{l}(t-x) dt. \end{aligned}$$

Перейдем теперь в этом равенстве к пределу при $l \rightarrow \infty$. В силу (94) первое слагаемое стремится к нулю. Второе слагаемое можно рассматривать как интегральную сумму, распространенную на промежуток $[0, \infty)$

при $\lambda_k = \frac{k\pi}{l}$ и $\Delta\lambda = \frac{\pi}{l}$. Таким образом, после предельного перехода будем иметь

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \lambda(t-x) dt. \quad (95)$$

Это и есть искомое представление. Если воспользоваться формулой

$$\cos \lambda(t-x) = \cos \lambda t \cos \lambda x + \sin \lambda t \sin \lambda x$$

и ввести обозначения

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \lambda t dt, \quad b(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \lambda t dt,$$

то это представление можно записать в виде, аналогичном ряду Фурье

$$f(x) = \int_0^{\infty} [a(\lambda) \cos \lambda x + b(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda. \quad (96)$$

ПРИМЕР 63. Представить интегралом Фурье функцию

$$f(x) = e^{-a|x|}, \quad a > 0.$$

РЕШЕНИЕ. Так как $f(x)$ — четная функция, то $b(\lambda) = 0$, $a(\lambda)$ можно считать по упрощенной формуле

$$a(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-at} \cos \lambda t dt = \frac{2a}{\pi(a^2 + \lambda^2)}.$$

Таким образом,

$$e^{-a|x|} = \int_0^{\infty} \frac{2a \cos \lambda x}{\pi(a^2 + \lambda^2)} d\lambda.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 28. Последнее представление может быть обращено, то есть его можно рассматривать как способ вычисления несобственного интеграла:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \lambda x}{a^2 + \lambda^2} d\lambda = \frac{\pi e^{-a|x|}}{2a} \quad (a > 0).$$

Выведем *комплексную форму* интеграла Фурье.

В представлении (95) внутренняя функция является четной относительно λ . Поэтому можно записать

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \lambda(t-x) dt. \quad (97)$$

Далее,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \lambda(t-x) dt = 0, \quad (98)$$

так как из (94) следует существование интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \lambda(t-x) dt,$$

который является нечетной функцией относительно λ .

Если теперь сложить (97) с интегралом (98), умноженным на $-i$, то в силу формулы Эйлера $\cos z - i \sin z = e^{-iz}$ получим

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\lambda(t-x)} dt. \quad (99)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 30 (преобразование Фурье). *Интеграл Фурье (99) в комплексной форме можно записать в другом виде. Положим*

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt. \quad (100)$$

Тогда

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda. \quad (101)$$

Соответствие $f(x) \longrightarrow g(\lambda)$, задаваемое формулой (100) называется преобразованием Фурье функции f . Соответственно, формула (101) называется обращением преобразования Фурье, или обратным преобразованием Фурье.

Иногда для достижения большей симметрии прямое и обратное преобразования Фурье определяют как

$$g(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 29. Преобразование Фурье обладает многими свойствами, аналогичными оператору Лапласа $L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$ (см. определение 17 на стр. 37) и его также можно было бы использовать в операционном исчислении. Причина использования оператора Лапласа в том, что класс функций, к которым можно применить преобразование Фурье, уже оригиналов. Однако, преобразование Фурье с успехом применяется при решении многих задач математической физики.

ПРИМЕР 64. *Найти преобразование Фурье функции*

$$f(x) = e^{-a|x|}, \quad a > 0.$$

Представить ее интегралом Фурье в комплексной форме.

РЕШЕНИЕ. Проведем преобразование Фурье

$$\begin{aligned} g(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|} e^{-i\lambda x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|} (\cos \lambda x - i \sin \lambda x) dx = \\ &= 2 \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos \lambda x dx = \frac{2a}{a^2 + \lambda^2}. \end{aligned}$$

Представлением $f(x)$ в виде интеграла Фурье в комплексной форме будет

$$f(x) = e^{-a|x|} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2ae^{i\lambda x}}{a^2 + \lambda^2} d\lambda = \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{a^2 + \lambda^2} d\lambda.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

77. Представить в виде интеграла Фурье в вещественной и комплексной формах, найти преобразование Фурье для функций:

- a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } |x| \leq a, \\ 0 & \text{при } |x| > a; \end{cases}$
- b) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in [0, a], \\ 0 & \text{при } x \notin [0, a]; \end{cases}$
- c) $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{x}{2} & \text{при } x \in [0, \pi], \\ 0 & \text{при } x \notin [0, \pi]; \end{cases}$
- d) $f(x) = \frac{1}{x^2 + a^2};$

$$e) \quad f(x) = e^{-ax^2}, \quad a > 0;$$

$$f) \quad f(x) = \begin{cases} e^{-ax} & \text{при } x \geq 0, \\ 0 & \text{при } x < 0, \end{cases} \quad a > 0.$$

ЗАНЯТИЕ № 16

Приложение рядов Фурье Уравнение колебания струны

Задача о колебаниях струны является достойным примером приложения рядов Фурье. Кроме того, именно эта задача сыграла важную роль в постановке и решении задачи о разложении функций в тригонометрический ряд.

Введем ряд предположений для вывода уравнения колебаний струны:

1) струна однородна с линейной плотностью распределения масс ρ и свободно изгибаема;

2) действием силы тяжести пренебрегаем — струна колеблется под действием силы натяжения $T = \text{const}$, направленной по касательной к струне;

3) колебания *малы*, то есть отклонения от положения равновесия малы по сравнению с длиной l струны, и углы изгиба малы;

4) концы струны закреплены.

Введем систему координат (x, u) таким образом, чтобы струна в состоянии равновесия являлась отрезком $[0, l]$ оси Ox ; u — отклонение струны от положения равновесия; таким образом, состояние струны

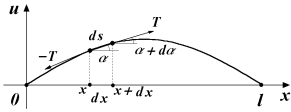


Рис. 8

будет описывать функция $u(x, t)$ — отклонение точки струны с координатой x в момент времени t от положения равновесия, при этом $u(0, t) = u(l, t)$ для любого момента времени t (рис. 8).

Для вывода уравнение колебаний рассмотрим участок струны длины ds . Его длину можно считать равной dx , так как

$$dx = ds \cdot \cos \alpha \approx ds \left(1 - \frac{\alpha^2}{2} \right) \approx ds,$$

где α — угол между выделенным участком струны и осью Ox . Заметим, что, в силу предположения о малости колебаний, мы пренебрегаем величинами порядка α^2 . В силу этих же предположений

$$\sin \alpha \approx \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_x = \operatorname{tg} \alpha \approx \alpha.$$

Поэтому вертикальные проекции сил, действующих на выделенный участок, запишутся как

$$T \sin(\alpha + d\alpha) - T \sin \alpha = T \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x+dx} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_x \right] = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx.$$

Масса участка равна $\rho \cdot ds = \rho \cdot dx$, ускорение равно $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_x$.

Поэтому, записав второй закон Ньютона ($ma = F$), будем иметь

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_x \rho \cdot dx = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx,$$

откуда получаем уравнение колебания струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (102)$$

где $a^2 = \frac{T}{\rho}$.

Чтобы уравнение (102) однозначно разрешалось, надо дополнить его краевыми и начальными условиями:

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad \forall t \in [0, \infty) \quad (103)$$

(струна с закрепленными концами),

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x), \quad (104)$$

где $\varphi(x)$ — начальный профиль струны, $\psi(x)$ — начальная скорость точек струны.

Решим задачу (102–104) методом Фурье разделения переменных.

Для этого предположим вначале, что решение уравнения (102) может быть найдено в виде $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$, то есть в виде произведения функций, зависящих только от x и t соответственно. Тогда уравнение (102) перепишется в виде $X(x) \cdot T''(t) = a^2 T(t) \cdot X''(x)$, или

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \quad (105)$$

Так как левая часть уравнения (105) не зависит от x , а правая — от t , в целом выражения, входящие в это уравнение, являются константой. Обозначим ее через $-\lambda^2$ (можно доказать, что константа не может быть нулевой или положительной). Тогда уравнение (105) запишется как

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2,$$

и после этого может быть сведено к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} T'' + a^2 \lambda^2 T = 0, \\ X'' + \lambda^2 X = 0, \end{cases} \quad (106)$$

общим решением которой будет

$$\begin{cases} T = C_1 \cos a\lambda t + C_2 \sin a\lambda t, \\ X = D_1 \cos \lambda x + D_2 \sin \lambda x. \end{cases}$$

Рассмотрим второе уравнение системы (106) совместно с условиями $X(0) = X(l) = 0$, которые являются следствием краевых условий (103).

Из условия $X(0) = 0$ следует, что $D_1 = 0$.

Таким образом, $X(x) = D_2 \sin \lambda x$.

Из второго краевого условия имеем $X(l) = D_2 \sin \lambda l = 0$, или

$$\sin \lambda l = 0,$$

откуда $\lambda l = n\pi$ при $n \in \mathbb{N}$. Таким образом, λ может принимать следующие значения:

$$\lambda_1 = \frac{\pi}{l}, \lambda_2 = \frac{2\pi}{l}, \dots, \lambda_n = \frac{n\pi}{l}, \dots \quad (107)$$

Положим при $\lambda = \lambda_n$, в силу произвольности констант, $C_1 \cdot D_2 = A_n$ и $C_2 \cdot D_2 = B_n$. В результате получим последовательность решений уравнения (102)

$$u_n(x, t) = (A_n \cos a\lambda_n t + B_n \sin a\lambda_n t) \sin \lambda_n x, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Так как уравнение (102) является линейным, можно предположить, что его решение может быть найдено в виде ряда

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos a\lambda_n t + B_n \sin a\lambda_n t) \sin \lambda_n x. \quad (108)$$

Предположим, что этот ряд сходится и сумма его является решением уравнения (102). Краевые условия (103) удовлетворены, поскольку именно так мы искали λ_n . Допустим теперь, что ряд (108) можно почленно дифференцировать по t . Будем иметь:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} (-A_n a\lambda_n \sin a\lambda_n t + B_n a\lambda_n \cos a\lambda_n t) \sin \lambda_n x. \quad (109)$$

Подставим $t = 0$ в ряды (108) и (109). Учитывая начальные условия (104), будем иметь

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \lambda_n x = \varphi(x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} B_n a\lambda_n \sin \lambda_n x = \psi(x).$$

Отсюда, если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, распространенные на отрезок $[-l, 0)$ нечетным образом, удовлетворяют условиям разложимости в ряд Фурье, мы получаем окончательно с учетом формул для коэффициентов тригонометрического ряда Фурье

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \lambda_n x \, dx, \quad B_n = \frac{2}{a\lambda_n l} \int_0^l \psi(x) \sin \lambda_n x \, dx. \quad (110)$$

Учитывая вышеизложенное, в том числе формулу (107) для λ_n , можно сформулировать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 42. *Если $\varphi(x)$ дважды дифференцируемая, а $\psi(x)$ дифференцируемая функции, причем производные $\varphi''(x)$, $\psi'(x)$ имеют ограниченную вариацию на отрезке $[0, l]$, то ряд*

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{an\pi t}{l} + B_n \sin \frac{an\pi t}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l},$$

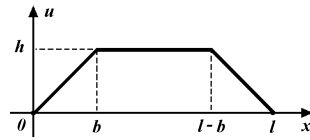
где коэффициенты A_n и B_n находятся по формулам

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} \, dx, \quad B_n = \frac{2}{an\pi} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} \, dx$$

является решением уравнения колебания струны (102) с краевыми условиями (103) и начальными условиями (104).

ЗАМЕЧАНИЕ 30. Теорема 42 справедлива и при более слабых предположениях относительно функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

ПРИМЕР 65. *Решить уравнение колебания струны с закрепленными концами при нулевой начальной скорости и начальном профиле, заданном графически.*



РЕШЕНИЕ. Так как $\psi(x) = 0$, то $B_n = 0$ и решение имеет вид

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{an\pi t}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Из рисунка можно понять, что начальный профиль аналитически задается следующим образом:

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \begin{cases} \frac{hx}{b} & \text{при } 0 \leq x < b, \\ h & \text{при } b \leq x < l - b, \\ \frac{h(l - x)}{b} & \text{при } l - b \leq x \leq l. \end{cases}$$

Тогда, в силу симметрии начального профиля относительно прямой $x = \frac{l}{2}$, коэффициенты A_n можно считать следующим образом:

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{4}{l} \int_0^b \frac{hx}{b} \sin \frac{n\pi x}{l} dx + \frac{4}{l} \int_b^{l/2} h \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Соответствующие выкладки дают значения

$$A_n = \frac{4h}{n\pi} \left(\frac{l}{bn\pi} \sin \frac{bn\pi}{l} - \cos \frac{n\pi}{2} \right),$$

и решением будет

$$u(x, t) = \frac{4h}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{l}{bn\pi} \sin \frac{bn\pi}{l} - \cos \frac{n\pi}{2} \right) \cos \frac{an\pi t}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

ЗАНЯТИЕ № 17

Приложение рядов Фурье и интегралов Фурье Уравнение теплопроводности

Пусть дан тонкий однородный стержень длины l , расположенный между точками $x = 0$ и $x = l$ по оси Ox . Сечение стержня мы считаем настолько малым, что все точки сечения в каждый момент времени имеют одну и ту же температуру. Боковая поверхность стержня считается теплоизолированной. В начальный момент времени $t = 0$ дано распределение температуры $u(x, 0) = f(x)$ ($0 \leq x \leq l$) стержня.

Температура $u(x, t)$ точки стержня с координатой x в момент времени t удовлетворяет *уравнению теплопроводности*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (111)$$

где $a^2 = k/(c\rho)$ выражается через физические характеристики вещества стержня: k — коэффициент внутренней теплопроводности, c — теплоемкость, ρ — плотность вещества.

Уравнение (111) необходимо решать при определенных краевых условиях. Рассмотрим несколько примеров.

ПРИМЕР 66. Предположим, что концы стержня погружены в термостат, то есть на них поддерживается постоянная температура, которую можно считать равной нулю (мы всегда можем сделать замену $u = u_1 - T_0$). Таким образом, надо решить уравнение (111) при начальных условиях

$$u(x, 0) = f(x), \quad f(0) = f(l) = 0, \quad 0 \leq x \leq l$$

и краевых условиях

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad 0 \leq t < \infty.$$

РЕШЕНИЕ. Решим задачу методом Фурье разделения переменных. Если предположить, что $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$, то уравнение (111) примет вид

$$XT' = a^2 X''T \quad \text{или} \quad \frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X}.$$

Левая часть последнего выражения не зависит от x , а правая — от t , значит, — это константа, которую обозначим через $-\lambda^2$ (случай нулевой и положительной константы можно исключить). В результате уравнение разобьется на два:

$$T' + a^2 \lambda^2 T = 0, \quad \text{общее решение } T = Ce^{-a^2 \lambda^2 t}$$

и

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \quad \text{общее решение } X = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x.$$

Краевые условия переходят для этого случая в $X(0) = X(l) = 0$, откуда получаем $A = 0$, $\lambda l = n\pi$, $n \in \mathbb{N}$ и λ может принимать только следующие значения

$$\lambda_1 = \frac{\pi}{l}, \quad \lambda_2 = \frac{2\pi}{l}, \quad \dots, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{l}, \quad \dots$$

Если ввести обозначения $B_n = BC$, то получим последовательность решений $u_n(x, t) = B_n e^{-a^2 \lambda_n^2 t} \sin \lambda_n x$, $n \in \mathbb{N}$.

Общее решение будем искать в виде ряда

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-a^2 \lambda_n^2 t} \sin \lambda_n x.$$

Коэффициенты B_n найдем из начальных условий:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{l} = f(x).$$

Если заданная функция $f(x)$ удовлетворяет условиям сходимости ряда Фурье, то, продолжив ее нечетным образом на интервал $(-l, l]$, получим

$$B_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

ПРИМЕР 67. *Предположим, что концы стержня теплоизолированы, то есть надо решить уравнение (111) при начальных условиях*

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq l$$

и краевых условиях

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0, \quad 0 \leq t < \infty.$$

РЕШЕНИЕ. Решаем, как и в предыдущем случае, методом Фурье. Решение следует решению примера 66 до нахождения собственных значений λ . В нашем случае имеем:

$$X(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x \quad \text{при условиях} \quad X'(0) = X'(l) = 0.$$

Так как

$$X'(x) = -\lambda A \sin \lambda x + \lambda B \cos \lambda x,$$

то $B = 0$ и $-\lambda \sin \lambda l = 0$, откуда следует, что $\lambda = 0$ и $\lambda l = n\pi$, $n \in \mathbb{N}$. Таким образом, λ может принимать только следующие значения

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_1 = \frac{\pi}{l}, \quad \lambda_2 = \frac{2\pi}{l}, \quad \dots, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{l}, \quad \dots$$

Имеем набор частных решений

$$u_0(x, t) = \frac{A_0}{2} \quad \text{и} \quad u_n(x, t) = A_n e^{-a^2 \lambda_n^2 t} \cos \lambda_n x, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Общее решение будем искать в виде ряда

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-a^2 \lambda_n^2 t} \cos \lambda_n x.$$

Коэффициенты A_n найдем из начальных условий:

$$u(x, 0) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{l} = f(x).$$

Если заданная функция $f(x)$ удовлетворяет условиям сходимости ряда Фурье, то, продолжив ее четным образом на интервал $(-l, l]$, получим

$$A_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx, \quad A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx.$$

ПРИМЕР 68 (формула Пуассона). Решим задачу о распространении тепла в неограниченном в обе стороны стержне. На уравнение (111) накладываем начальные условия

$$u(x, 0) = f(x), \quad -\infty < x < \infty.$$

Краевых условий в этом случае, естественно, нет.

РЕШЕНИЕ. Как и двух предыдущих примерах получаем частное решение в виде

$$u(x, t) = (a \cos \lambda x + b \sin \lambda x) e^{-a^2 \lambda^2 t}.$$

Здесь нет оснований выбирать из множества $\lambda \geq 0$ особые значения, как в предыдущих примерах (нет краевых условий). Поэтому считаем $a = a(\lambda)$, $b = b(\lambda)$ и вместо ряда для общего решения выбираем форму интеграла Фурье

$$u(x, t) = \int_0^\infty [a(\lambda) \cos \lambda x + b(\lambda) \sin \lambda x] e^{-a^2 \lambda^2 t} d\lambda. \quad (112)$$

Функции $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ должны быть найдены так, чтобы были выполнены начальные условия

$$u(x, 0) = \int_0^\infty [a(\lambda) \cos \lambda x + b(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda = f(x).$$

Видим, что получили представление функции $f(x)$ интегралом Фурье, и функции $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ могут быть найдены по формулам:

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(z) \cos \lambda z dz, \quad b(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(z) \sin \lambda z dz.$$

Подставив их в формулу (112), получим представление решения в виде:

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-a^2 \lambda^2 t} d\lambda \int_{-\infty}^\infty f(z) \cos \lambda(z - x) dz.$$

Если $f(z)$ абсолютно интегрируема на $(-\infty, \infty)$, то порядок интегрирования по λ и z можно изменить. Получим

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(z) dz \int_0^\infty e^{-a^2 \lambda^2 t} \cos \lambda(z - x) d\lambda.$$

Внутренний интеграл можно вычислить непосредственно:

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2 \lambda^2 t} \cos \lambda(z-x) d\lambda = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\frac{(z-x)^2}{4a^2 t}}.$$

Таким образом, окончательно получаем решение задачи в виде интеграла — формула Пуассона:

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-\frac{(z-x)^2}{4a^2 t}} dz. \quad (113)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 31. Не следует думать, что мы решили отвлеченный пример. Если стержень ограничен, и в начальный момент тепло локализовано, то формула (113) дает прекрасное приближение для достаточно малых значений t .

А. Типовой расчет по рядам Фурье

Условия и задания

Задача 1. Заданную функцию $f(x)$, $x \in [-1, 1]$ представить рядом Фурье по полиномам Лежандра.

Задача 2. Для графически заданной 2π -периодической функции $f(t)$ выполнить нижеследующие задания.

Задача 3. Построить периодическое продолжение данной функции $f(t)$ и выполнить нижеследующие задания.

ЗАДАНИЯ К ЗАДАЧАМ № 2, 3.

1. Обосновать возможность разложения заданных функций $f(t)$ в ряд Фурье, установить вид сходимости ряда Фурье к $f(t)$.

2. Построить график суммы ряда Фурье.

3. Представить заданную функцию тригонометрическим рядом Фурье. Предварительно: а) определить порядок убывания коэффициентов ряда Фурье; б) вычислить коэффициенты ряда Фурье.

4. Построить амплитудный и фазовый спектры функции.

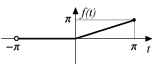
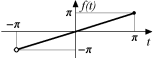
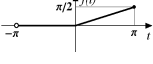
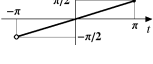
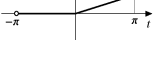
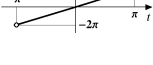
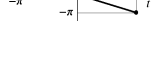
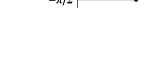
5. Определить число гармоник разложения функции в ряд Фурье, содержащих в сумме не менее 90 % энергии.

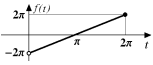
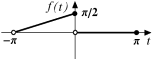
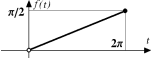
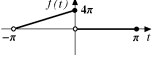
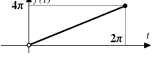
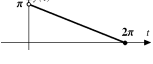
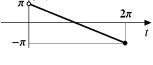
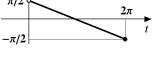
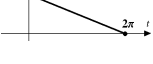
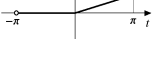
6. Вычислить среднеквадратичную ошибку между исходной функцией $f(t)$ и частичной суммой ряда Фурье для значений t , принадлежащих промежутку задания $f(t)$.

7. Построить графики заданной функции и частичной суммы ряда для значений t , принадлежащих промежутку задания $f(t)$, взяв число гармоник, определенных в п. 5.

8. Построить график функции, являющейся квадратом отклонений функции $f(t)$ от частичной суммы ряда для значений t , принадлежащих промежутку задания $f(t)$.

9. Представить заданную функцию рядом Фурье в комплексной форме.

Вар.	Задача 1	Задача 2	Задача 3
1	$f(x) = \begin{cases} -1, & -1 < x < 0; \\ 1, & 0 \leq x < 1. \end{cases}$		$f(t) = t^2,$ $t \in [0, 1];$ (четное)
2	$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 5.$		$f(t) = t(2 - t),$ $t \in [0, 2];$ (нечет.)
3	$f(x) = x .$		$f(t) = \sin \frac{t}{3},$ $t \in [0, 3\pi];$ (четное)
4	$f(x) = x^2 + x - 1.$		$f(t) = e^t,$ $t \in [0, 2];$ (четное)
5	$f(x) = \begin{cases} -2, & -1 < x < 0; \\ 2, & 0 \leq x < 1. \end{cases}$		$f(t) = \cos \frac{t}{2},$ $t \in [0, 2];$ (четное)
6	$f(x) = 3x^3 + 2x^2 - x + 1.$		$f(t) = e^{2t},$ $t \in [0, 2];$ (четное)
7	$f(x) = 2x .$		$f(t) = t^2,$ $t \in [0, 2];$ (четное)
8	$f(x) = 2x^2 - 3x + 4.$		$f(t) = t(3 - t),$ $t \in [0, 3];$ (нечет.)
9	$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & -1 < x < 0; \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq x < 1. \end{cases}$		$f(t) = \sin \frac{t}{2},$ $t \in [0, \pi];$ (четное)
10	$f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3.$		$f(t) = e^{t/2},$ $t \in [0, 2];$ (четное)
11	$f(x) = \left \frac{x}{2} \right .$		$f(t) = \cos \frac{t}{3},$ $t \in [0, 3];$ (четное)
12	$f(x) = x^2 - 2x + 3.$		$f(t) = e^{t/3},$ $t \in [0, 3];$ (четное)
13	$f(x) = \begin{cases} -3, & -1 < x < 0; \\ 3, & 0 \leq x < 1. \end{cases}$		$f(t) = t^2,$ $t \in [0, 3];$ (нечет.)

Вар.	Задача 1	Задача 2	Задача 3
14	$f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 4.$		$f(t) = t(\pi - t),$ $t \in [0, \pi];$ (нечет.)
15	$f(x) = 3x .$		$f(t) = \sin 3t,$ $t \in [0, 1];$ (четное)
16	$f(x) = 3x^2 + 2x - 1.$		$f(t) = e^{-t},$ $t \in [0, 2];$ (четное)
17	$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3}, & -1 < x < 0; \\ \frac{1}{3}, & 0 \leq x < 1. \end{cases}$		$f(t) = \cos \frac{t}{2},$ $t \in [0, \pi];$ (четное)
18	$f(x) = 3x^3 - x^2 + x - 4.$		$f(t) = e^{-2t},$ $t \in [0, 2];$ (четное)
19	$f(x) = \left \frac{x}{3} \right .$		$f(t) = t^2,$ $t \in [0, 4];$ (четное)
20	$f(x) = 4x^2 - 3x + 3.$		$f(t) = t(t - 2),$ $t \in [0, 2];$ (нечет.)
21	$f(x) = \begin{cases} -4, & -1 < x < 0; \\ 4, & 0 \leq x < 1. \end{cases}$		$f(t) = \sin 2t,$ $t \in [0, 1];$ (нечет.)
22	$f(x) = x^3 + 4x^2 + x + 2.$		$f(t) = e^{-t/2},$ $t \in [0, 2];$ (четное)
23	$f(x) = 4x .$		$f(t) = \operatorname{ch} 3t,$ $t \in [0, 1];$ (четное)
24	$f(x) = 4x^2 - 3x + 5.$		$f(t) = e^{-t/3},$ $t \in [0, 3];$ (четное)
25	$f(x) = \begin{cases} -5, & -1 < x < 0; \\ 5, & 0 \leq x < 1. \end{cases}$		$f(t) = 1 - t^2,$ $t \in [0, 1];$ (четное)

Б. Таблица основных оригиналов и изображений

№ п/п	Оригинал	Изображение	№ п/п	Оригинал	Изображение
1	1	$\frac{1}{p}$	12	$e^{\lambda t} \cos \omega t$	$\frac{p - \lambda}{(p - \lambda)^2 + \omega^2}$
2	t	$\frac{1}{p^2}$	13	$e^{\lambda t} \operatorname{sh} \omega t$	$\frac{\omega}{(p - \lambda)^2 - \omega^2}$
3	t^2	$\frac{2}{p^3}$	14	$e^{\lambda t} \operatorname{ch} \omega t$	$\frac{p - \lambda}{(p - \lambda)^2 - \omega^2}$
4	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}, n \in \mathbb{N}$	15	$t \sin \omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}$
5	$e^{\lambda t}$	$\frac{1}{p - \lambda}$	16	$t \cos \omega t$	$\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$
6	$t^n e^{\lambda t}$	$\frac{n!}{(p - \lambda)^{n+1}}$	17	$t \operatorname{sh} \omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2 - \omega^2)^2}$
7	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	18	$t \operatorname{ch} \omega t$	$\frac{p^2 + \omega^2}{(p^2 - \omega^2)^2}$
8	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	19	$t^n \sin \omega t$	$\frac{\operatorname{Im} (p + i\omega)^{n+1}}{(p^2 + \omega^2)^{n+1}} n!$
9	$\operatorname{sh} \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$	20	$t^n \cos \omega t$	$\frac{\operatorname{Re} (p + i\omega)^{n+1}}{(p^2 + \omega^2)^{n+1}} n!$
10	$\operatorname{ch} \omega t$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$	21	$te^{\lambda t} \sin \omega t$	$\frac{2\omega(p - \lambda)}{[(p - \lambda)^2 + \omega^2]^2}$
11	$e^{\lambda t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p - \lambda)^2 + \omega^2}$	22	$te^{\lambda t} \cos \omega t$	$\frac{(p - \lambda)^2 - \omega^2}{[(p - \lambda)^2 + \omega^2]^2}$

Ответы

3. а) $x = \frac{20}{17}$, $y = -\frac{36}{17}$; с) вещественных решений нет.

4. а) $-\frac{41}{130} + \frac{3}{130}i$; б) $\frac{31}{130} + \frac{27}{130}i$; с) $\frac{29}{13} + \frac{2}{13}i$.

5. а) $x_1 = -1 + 2i$, $x_2 = -1 - 2i$; б) $x_1 = -2 + 3i$, $x_2 = -2 - 3i$;

с) $x_1 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{19}}{2}i$, $x_2 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{19}}{2}i$.

6. а) $\rho = 5$, $\varphi = \arctg \frac{3}{4}$; б) $\rho = 4$, $\varphi = \frac{2}{3}\pi$; с) $\rho = 5\sqrt{2}$, $\varphi = \arctg \frac{1}{7} - \pi$;

д) $\rho = 2$, $\varphi = \frac{3}{4}\pi$; е) $\rho = 1$, $\varphi = \frac{4}{5}\pi$; ф) $\rho = 2$, $\varphi = -\frac{2}{3}\pi$.

7. а) $-2^{19}(1 + \sqrt{3})$; б) $2^{10}(1 + i)$; с) 1728; д) 1.

9. а) $\pm \frac{1 \pm i}{\sqrt{2}}$; б) $\pm \frac{1 + i}{\sqrt{2}}$; с) $\frac{1}{2}(\pm\sqrt{3} + i)$, $-i$;

д) $\pm \left(\cos \frac{\pi}{8} - i \sin \frac{\pi}{8}\right)$, $\pm \left(\cos \frac{3\pi}{8} + i \sin \frac{3\pi}{8}\right)$; е) ± 1 , $\pm i$;

ф) $\frac{\sqrt[3]{4}(1 + i)}{2}$, $\sqrt[6]{2} \left(-\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}\right)$, $\sqrt[6]{12} \left(\sin \frac{\pi}{12} - i \cos \frac{\pi}{12}\right)$; г) $\pm(\sqrt{3} - i)$;

х) $\sqrt[10]{2}(\cos 6^\circ + i \sin 6^\circ)$, $\sqrt[10]{2}(\cos 78^\circ + i \sin 78^\circ)$, $\sqrt[10]{2}(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ)$,
 $\sqrt[10]{2}(\cos 222^\circ + i \sin 222^\circ)$, $\sqrt[10]{2}(\cos 294^\circ + i \sin 294^\circ)$.

10. а) гипербола $xy = 1$; б) гипербола $xy = -1$; с) эллипс $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$;

д) эллипс $\frac{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2}{\left(\frac{9}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{(3\sqrt{2})^2} = 1$; е) окружность $x^2 + y^2 = 1$; ф) парабола $y^2 =$

$2x + 1$;

г) нижняя полуплоскость $y < -2$; х) часть плоскости, расположенная вне круга радиуса 1 с центром в точке $(-2, -1)$, включая его границу; и) правая полуплоскость, включая ось Oy ; j) внутренность окружности $x^2 + (y - 1)^2 = 1$.

11. а) $u = 2x - 1$, $v = 2y$; б) $u = x^2 - y^2 + x$, $v = (2x + 1)y$;

с) $u = \frac{x}{x^2 + y^2}$, $v = -\frac{y}{x^2 + y^2}$; д) $u = e^{x^2 - y^2} \cos 2xy$, $v = -e^{x^2 - y^2} \sin 2xy$;

е) $u = e^x \cos y$, $v = -e^x \sin y$; ф) $u = \operatorname{ch} x \cos(y - 1)$, $v = \operatorname{sh} x \sin(y - 1)$;

г) $\begin{cases} u = e^{(x^2 - y^2) \ln 2 - 4k\pi xy} \cos[2k\pi(x^2 - y^2) + 2xy \ln 2], \\ v = e^{(x^2 - y^2) \ln 2 - 4k\pi xy} \sin[2k\pi(x^2 - y^2) + 2xy \ln 2], \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z};$

х) $u = \operatorname{ch} x \cos y$, $v = \cos x \sin y$; и) $u = \frac{\sin x \cos x}{\operatorname{ch}^2 y - \sin^2 x}$, $v = \frac{\operatorname{sh} y \operatorname{ch} y}{\operatorname{ch}^2 y - \sin^2 x}$.

12. а) $\ln 2 + i(1 + 2k)\pi$; б) $i\left(\frac{1}{2} + 2k\right)\pi$; с) $\ln \sqrt{2} + i\left(2k - \frac{3}{4}\right)\pi$;

д) $\ln \sqrt{13} + i\left(2k\pi - \arctg \frac{2}{3}\right)$; е) $-\left(\frac{1}{2} + 2k\right)\pi + 2m\pi i$. Везде $k \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}$.

13. а) $e^{-\left(\frac{1}{2} + 2k\right)\pi}$; б) $\cos[\sqrt{2}(2k + 1)\pi] + i \sin[\sqrt{2}(2k + 1)\pi]$;

с) $e^{-\left(\frac{1}{2} + 4k\right)\pi}$; д) $e^{-\left(\frac{1}{6} + 2k\right)\pi} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$; е) $\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$;

- f) $\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{3}{4} \pi i$; g) $\operatorname{ch} \pi$; h) $2k\pi - i \ln(\sqrt{2} - 1)$, $(2k+1)\pi - i \ln(\sqrt{2} + 1)$;
i) $\left(2k + \frac{1}{2}\right) \pi - i \ln(\sqrt{2} + 1)$, $\left(2k - \frac{1}{2}\right) \pi - i \ln(\sqrt{2} - 1)$; j) i . Везде $k \in \mathbb{Z}$.

14. a) $z_k = (2k+1)\pi i$; b) $z_k = (2k+1)\pi i \pm i \ln 2$; c) $z_{2k} = 2k\pi - i \ln(\sqrt{\pi^2 + 1} - \pi)$,
 $z_{2k+1} = (2k+1)\pi - i \ln(\sqrt{\pi^2 + 1} + \pi)$; d) $z_{2k} = 2k\pi i$, $z_{2k+1} = (2k+1)\pi i + \ln 3$. Везде
 $k \in \mathbb{Z}$.

15. a) да; b) нет; c) да; d) нет; e) нет; f) да; g) нет; h) нет; i) да.

16. a) да; b) да; c) нет; d) да; e) да; f) нет; g) да; h) да; i) нет.

17. a) $f(z) = \frac{1}{z}$; b) $f(z) = \ln z$; c) $f(z) = z^2 + 2z$; d) $f(z) = 2 \operatorname{sh} z - z^2$;

e) $f(z) = 2 \sin z - z$; f) $f(z) = 4 \operatorname{ch} z + z^2 - 1$; g) $f(z) = 2 \cos 2z + z$;

h) $f(z) = 2i(\cos z - 1) - iz^2 + 2$.

18. a) $-\frac{\pi}{2}$; b) $\frac{1}{4}(e^2 - 1)(1 + i)$; c) 0; d) 0.

19. a) $-2(1 + i)$; b) -1 ; c) $-7e^{-2} + (3 - 2i)e^i$; d) $e^{-1} - 1$; e) $1 - \cos 1 + i(\sin 1 - 1)$;

f) $\frac{1}{4}[1 - \cos(2 + 2i)]$.

20. a) πe^{-1} ; b) $\pi \operatorname{sh} 1$; c) $-\frac{\pi}{45}i$; d) $-\pi i$; e) 0; f) $-\frac{\pi}{27}i$.

21. a) расходится; b) сходится; c) сходится; d) сходится; e) расходится;

f) сходится; g) расходится; h) сходится.

22. a) $R = 1$; b) $R = 1$; c) $R = 1$; d) $R = e^{-1}$.

23. a) $-\sin 1 + 2(z+1)\cos 1 + \frac{2^2}{2!}(z+1)^2 \sin 1 - \frac{2^3}{3!}(z+1)^3 \cos 1 - \dots$, $R = \infty$;

b) $\sqrt{e} \left[1 + \frac{1}{2}(2z-1) + \frac{1}{2! \cdot 2^2}(2z-1)^2 + \frac{1}{3! \cdot 2^3}(2z-1)^3 + \dots \right]$, $R = \infty$;

c) $-\frac{1}{5} \left[1 + \frac{3}{5}(z+2) + \frac{3^2}{5^2}(z+2)^2 + \frac{3^3}{5^3}(z+2)^3 + \dots \right]$, $R = \frac{5}{3}$;

d) $-\frac{1}{5} - \frac{9}{25}z - \frac{41}{125}z^2 - \dots$, $R = 1$; e) $1 + \frac{1}{2} \left(\frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots \right)$, $R = \infty$;

f) $\ln 2 - \frac{1}{2} \left(\frac{z}{2} + \frac{z^2}{2 \cdot 4} + \frac{z^3}{3 \cdot 8} + \dots \right)$, $R = 2$.

24. a) $|z| > \frac{1}{\sqrt{2}}$; b) $|z| > 2$; c) $|z+1-i| > 1$; d) $|z+1+i| < 1$; e) $2 < |z| < 4$;

f) $0 < |z-2+i| < 1$.

25. a) $\frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \frac{z^5}{7!} + \dots$; b) $z^4 - \frac{z^2}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!z^2} + \dots$;

c) $\frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - \frac{z^6}{8!} + \dots$; d) $\frac{2}{z^4} - \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{4!} - \frac{z^2}{6!} + \dots$

26. a₁) $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{z^n} - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^n}$; a₂) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1} - 2^{n-1}}{z^n}$; b₁) $\frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$;

b₂) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{n+2}}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} z^n$; d₁) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[n - \frac{(-1)^n}{2^n} \right] z^{n-1}$;

d₂) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} z^n$; d₃) $\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + (-2)^n}{z^{n+1}}$.

27. a) $z_1 = 0$ — второго порядка, $z_{2,3} = \pm 2i$ — простые;

b) $z_n = n\pi$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ — простые;

c) $z = 0$ — простой, $z_n = n\pi i$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ — второго порядка;

d) $z = 0$ — третьего порядка, $z_n = n\pi$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ — простые;

- е) $z_n = (2n + 1)\pi i$, $n \in \mathbb{Z}$ — второго порядка;
 ф) $z_n = (4n + 1)\frac{\pi}{2}i$, $n \in \mathbb{Z}$ — второго порядка;
 г) $z = -\pi i$ — второго порядка, $z_n = n\pi i$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ — простые;
 h) $z = \pm\pi i$ — второго порядка, $z_n = (2n + 1)\pi i$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, -1\}$ — простые.
- 28.** а) нуль третьего порядка; б) нуль второго порядка; с) простой нуль; д) нуль четвертого порядка.
- 29.** а) полюс третьего порядка; б) полюс второго порядка; с) простой полюс; д) полюс второго порядка.
- 30.** а) $z_n = (4n + 1)\frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$ — полюсы второго порядка;
 б) $z = 0$ — устранимая особая точка;
 с) $z_1 = 0$ — полюс второго порядка, $z_2 = -1$ — полюс второго порядка;
 д) $z_0 = 0$ — полюс второго порядка, $z_n = 2n\pi i$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ — простые полюсы;
 е) $z = 0$ — существенно особая точка; ф) $z = 0$ — существенно особая точка.
- 31.** а) устранимая особая точка; б) простой полюс; с) $z = 0$ — полюс четвертого порядка, $z = -1$ — простой полюс; д) существенно особая точка.
- 32.** а) $\operatorname{res} f(0) = 0$, $\operatorname{res} f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{4}{\pi}$, $\operatorname{res} f\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) = \frac{-8}{\pi^2(2n + 1)(4n + 1)}$, $n \in \mathbb{N}$;
 б) $\operatorname{res} f(-1) = \frac{1}{27}$, $\operatorname{res} f(2) = -\frac{1}{27}$; с) $\operatorname{res} f(0) = -\frac{1}{6}$, $\operatorname{res} f(3) = \frac{2}{27} \sin^2\left(\frac{3}{2}\right)$;
 д) $\operatorname{res} f(-3) = \frac{1}{8}e^{-3i}$, $\operatorname{res} f(-1) = -\frac{e^{-i}}{4}$, $\operatorname{res} f(1) = \frac{e^i}{8}$.
- 33.** а) $(1 - 2e^{-1})\pi i$; б) $2(1 - e^{-1})\pi i$; с) 0; д) 0; е) $3\pi i$.
- 34.** а) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$; б) $-\frac{\pi}{27}$; с) $\frac{\pi}{2(b^2 - a^2)^3} \left(\frac{5b^2 - a^2}{b^3} + \frac{b^2 - 5a^2}{a^3} \right)$; д) $\frac{2\pi}{3}$.
- 35.** Смотри ответы к задаче 20.
- 38.** а) $\frac{2}{p^3}$; б) $\frac{e^6}{p + 1}$; с) $\frac{p}{p^2 + 4}$.
- 39.** а) $\frac{1}{p} + \frac{2}{p^2} + \frac{10}{p^3}$; б) $\frac{-3p^2 + 3p - 108}{p(p^2 + 36)}$; с) $\frac{20(p^2 + 21)}{(p^2 + 49)(p^2 + 9)}$; д) $\frac{48}{(p^2 + 4)(p^2 + 36)}$;
 е) $\frac{3}{p} + \frac{5p^3 + 68p}{(p^2 + 4)(p^2 + 16)}$; ф) $\frac{p^4 - 12p - 48}{2p^4(p + 4)}$; г) $\frac{6p}{(p^2 + 16)(p^2 + 4)}$; h) $\frac{p^3 + 20p}{(p^2 + 36)(p^2 + 4)}$;
 и) $\frac{p^2 + 3}{(p^2 - 9)(p^2 - 1)}$; j) $\frac{12p^2 - 24}{p(p^2 - 4)}$.
- 40.** а) $\frac{1}{p^2 - 2p + 2}$; б) $\frac{p + 4}{p^2 + 8p + 25}$; с) $\frac{2}{(p + 5)^3}$; д) $\frac{8p}{p^4 + 30p^2 + 289}$;
 е) $\frac{1}{(p - 3)^2} + \frac{35}{2(p - 1)(p^2 - 2p + 37)}$; ф) $\frac{p^3 - p^2 + 3p - 75}{(p^2 - 2p + 37)(p + 1)^2}$.
- 41.** а) $\frac{2p}{(p^2 + 1)^2}$; б) $\frac{18p^2 + 54}{(p^2 - 9)^3}$; с) $\frac{(p + 1)^2}{(p^2 + 1)^2}$; д) $\frac{2p^3 - 6p}{(p^2 + 1)^3}$; е) $\frac{2p^5 - 60p^3 - 1470}{(p^2 + 25)^2(p^2 + 9)^2}$;
 ф) $\frac{6}{(p + 5)^4}$.
- 42.** а) $X(p) = \frac{p + 2}{(p + 1)^2}$; б) $X(p) = \frac{1}{(p^2 + 1)(p + 2)}$; с) $X(p) = \frac{p^2 + p + 1}{p(p + 1)(p^2 + 1)}$;
 д) $X(p) = \frac{2 - p}{p^3 + 1}$; е) $X(p) = \frac{1}{p(p + 1)(p - 1)^2}$; ф) $X(p) = \frac{1}{p^3(p - 1)}$;
 г) $X(p) = \frac{p^2 + 4p + 15}{(p - 1)(p^2 + 1)(p^2 + 16)}$.
- 43.** а) $\frac{2}{(p^2 + 1)^2}$; б) $\frac{2}{p(p + 3)^3}$; с) $\frac{p^2 - 6p + 36}{2p^2(p^2 + 36)}$; д) $\frac{2p^3 + p^2 + 8p - 4}{2p(p^2 + 4)^2} + \frac{1 + 2p}{2p^3}$;

e) $\frac{p^2 + 64}{2p(p^2 - 64)^2} + \frac{1}{2p^3}$.

44. a) $\operatorname{arctg} p$; b) $\frac{\operatorname{arctg} p}{p}$; c) $\frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{p^2 + 4}}{p}$; d) $\frac{\ln \sqrt{p^2 + 1}}{p}$; e) $\ln \frac{p}{p+1} - \frac{1}{p}$;

f) $\ln \frac{p+1}{p-1}$.

45. a) $\ln \frac{b}{a}$; b) $\ln \frac{b}{a}$; c) $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{a+b}{a-b} \right|$.

46. a) $\frac{2}{p(p^2 + 4)} \cdot e^{-3p}$; b) $\frac{2}{p^3}$; c) $\frac{2 + 4p + 4p^2}{p^3} \cdot e^{-2p}$; d) $\frac{2}{p^3} \cdot e^{-2p}$; e) $\frac{1}{p-2} \cdot e^{-7p}$;

f) $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1-p}{p^2+1}$; g) $-\frac{1}{p^2+1} \cdot e^{-\pi p}$; h) $\frac{2+2p-p^2}{p^3}$; i) $\frac{2+2p+p^2}{p^3} \cdot e^{-2p}$; j) $\frac{2-2p+p^2}{p^3}$;

k) $\frac{2}{p(p^2 + 4)} \cdot e^{-\pi p/2} + \frac{e^{-\pi(p+1)}}{p+1}$.

47. a) $\frac{1}{p^2} (1 - 2e^{-p} + e^{-2p})$; b) $\frac{1}{p^2} (e^{-p} - 2e^{-2p} + e^{-3p})$; c) $\frac{1 - e^{-ap}}{p}$;

d) $\frac{1}{p^2 + 1} (pe^{-\pi p/2} - e^{-\pi p})$; e) $\frac{1}{p^2} (e^{-2p} - e^{-3p}) - \frac{1}{p} \cdot e^{-2p}$;

f) $-\frac{1}{p^2 + 1} (pe^{-\pi p/4} + e^{-3\pi p/4})$; g) $\frac{1}{p^2} (e^{-2p} - e^{-4p})$; h) $\frac{1}{p} (e^{-2p} - e^{-4p}) + \frac{1}{p+1} \cdot e^{-4p}$.

48. a) $\frac{1}{(p-1)(p^2+1)}$; b) $\frac{1}{(p-1)(p^2+1)}$; c) $\frac{2}{p^3(p^2-1)}$; d) $\frac{2}{p^3(p-3)}$;

e) $\frac{6}{p^3(p^2-49)}$; f) $\frac{1}{p(p^2+4)}$.

49. a) $e^{-2(t-1)} (\cos(t-1) - 2 \sin(t-1)) \cdot \eta(t-1)$; b) $e^{-3(t-3)} \cdot \eta(t-3)$;

c) $\operatorname{sh}(t-2) e^{-2(t-2)} \cdot \eta(t-2)$; d) $(t-1) \cdot \eta(t-1)$.

50. a) $1 - e^{-t} \left(1 + \frac{1}{t}\right)$; b) $\frac{3}{5} - \frac{1}{5} (3 \cos t - 4 \sin t) e^{-2t}$; c) $t - \sin t$;

d) $\frac{1}{2} \sin 2(t-1) e^{t-1} \cdot \eta(t-1) + \cos 3(t-2) \cdot \eta(t-2)$; e) $\frac{1}{2} t \sin t$;

f) $\sin(t-2) \cdot \eta(t-2) + 2 \sin(t-3) \cdot \eta(t-3) + 3 \sin(t-4) \cdot \eta(t-4)$; g) $\frac{1}{9} (e^{-2t} - e^{-t} + 3te^t)$;

h) $\operatorname{sh}(t-1) \cdot \eta(t-1) + \operatorname{ch} 2(t-2) \cdot \eta(t-2)$;

i) $\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} e^{-(t-1/2)} - \frac{1}{20} \cos 2 \left(t - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{10} \sin 2 \left(t - \frac{1}{2} \right) \right) \cdot \eta \left(t - \frac{1}{2} \right)$;

j) $(t-1) \cdot \eta(t-1) + (t-2)^2 \cdot \eta(t-2) + (t-3)^3 \cdot \eta(t-3)$.

51. a) $x(t) = (t+1)e^{-t}$; b) $x(t) = \frac{1}{5} (e^{-2t} - \cos t + 2 \sin t)$;

c) $x(t) = \frac{1}{2} t \sin t - \cos t + \sin t$; d) $x(t) = e^{-t} - e^{t/2} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} t - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right)$;

e) $x(t) = e^t \left(1 - t - \frac{1}{2} t^2 \right) - 1$; f) $x(t) = \operatorname{ch} t - \frac{1}{2} t^2 - 1$;

g) $x(t) = \frac{1}{2} ((t-1)e^t + \cos t) + 2(\sin t - t \cos t)$.

52.

a) $x(t) = \frac{1}{3} \sin 3t + \frac{1}{9} \left[(t-1) - \frac{1}{3} \sin 3(t-1) \right] \cdot \eta(t-1) -$
 $- \frac{2}{9} \left[(t-2) - \frac{1}{3} \sin 3(t-2) \right] \cdot \eta(t-2) +$

$$+ \frac{1}{9} \left[(t-3) - \frac{1}{3} \sin 3(t-3) \right] \cdot \eta(t-3);$$

b) $x(t) = 1 - e^{-t} - (1 - e^{-t+4}) \cdot \eta(t-2)$; c) $x(t) = \frac{1}{2} t \sin t + \frac{1}{2} (t - \pi) \sin(t - \pi) \cdot \eta(t - \pi)$;

d) $x(t) = \operatorname{ch} t - 1 - \frac{1}{e} (\operatorname{ch}(t-1) - 1) \cdot \eta(t-1)$.

53. a) $x(t) = (c_1 + c_2 t^2) e^{-t}$; b) $x(t) = e^{-t}$.

54. a) $x(t) = \frac{1}{3} (e^t - 1) - \frac{1}{9} t e^t + \frac{1}{9} e^t \ln \frac{e^t + 3}{4}$; b) $x(t) = \frac{1}{2} (e^t - 1) - \ln \frac{1 + e^t}{2}$;

c) $x(t) = e^t - 1 - (t + \ln 2) (e^t + 1) + (e^t + 1) \ln (e^t + 1)$;

d) $x(t) = \sin t \left(t - \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}(t/2)}{\sqrt{3}} \right) + \cos t \cdot \ln(2 + \cos t) - \ln 3 \cdot \cos t$;

e) $x(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)^2} \sin \tau d\tau$ (не выражается через элементарные функции).

55. $x(t) = \frac{1}{k_1 m} \int_0^t e^{-n(t-\tau)} \sin k_1(t - \tau) f(\tau) d\tau$, где $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$.

56. $I = \frac{E}{nL} e^{-\mu t} \sin nt$, при $n^2 > 0$; $I = \frac{E}{L} t e^{-\mu t}$, при $n = 0$; $I = \frac{E}{kL} e^{-\mu t} \operatorname{sh} kt$, при $n^2 < 0$, где $\mu = \frac{R}{2L}$, $n^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}$, $k^2 = -n^2$.

57. $x(t) = e^{-nt} \left(x_0 \cos k_1 t + \frac{x'_0 + n x_0}{k_1} \sin k_1 t \right)$, при $k > n$;

$x(t) = e^{-nt} (x_0 + (x'_0 + n x_0) t)$, при $n = k$;

$x(t) = e^{-nt} \left(x_0 \operatorname{ch} n_1 t + \frac{x'_0 + x_0 n}{n_1} \operatorname{sh} n_1 t \right)$, при $k < n$,

где $k^2 = \frac{c}{m}$; $2n = \frac{\beta}{m}$; $k_1^2 = k^2 - n^2 = -n_1^2$.

58. a) $y(t) = a \left(t + \frac{1}{6} t^3 \right)$; b) $y(t) = \frac{1}{4} \left(t^2 - t - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{8} e^{2t}$.

59. a) e^t ; b) $\operatorname{ch} t$.

60. a) $x(t) = e^t$, $y(t) = -e^t$;

b) $x(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} e^{-t} - \frac{3}{10} e^{-6t/11}$,

$y(t) = \frac{1}{5} (e^{-t} - e^{-6t/11})$;

c) $x(t) = \frac{28}{9} e^{3t} - e^{-t} - \frac{1}{3} t - \frac{1}{9}$,

$y(t) = \frac{28}{9} e^{3t} + e^{-t} - \frac{1}{3} t - \frac{1}{9}$;

d) $x(t) = t \cos t$, $y(t) = -t \sin t$;

e) $x(t) = \sin t - \cos t$, $y(t) = \sin t + \cos t$;

f) $x(t) = (C_1 + C_2 t) e^t + C_3 e^{2t}$,

$y(t) = (C_1 - 2C_2 + C_3 t) e^t$,

$z(t) = (C_1 - C_2 + C_2 t) e^t + C_3 e^{2t}$, где $C_1 = 9$; $C_2 = 2$; $C_3 = 0$;

g) $x(t) = -\sin t$, $y(t) = -\cos t$, $z(t) = \sin t$.

61. $x(t) = C_2 \cos t + (C_2 + 2C_3) \sin t$,

$$\begin{aligned}y(t) &= 2C_1 e^t + C_2 \cos t + (C_2 + 2C_3) \sin t, \\z(t) &= C_1 e^t + C_3 \cos t - (C_2 + C_3) \sin t.\end{aligned}$$

70. $-6L_0(x) - \frac{26}{5}L_1(x) - 2L_2(x) + \frac{4}{5}L_3(3).$

71. $-5T_0(x) + \frac{15}{4}T_1(x) - T_2(x) + \frac{1}{4}T_3(3).$

74. а) нет; б) нет.

77. а) $f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda a \cos \lambda x}{\lambda} d\lambda;$

б) $f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda a \cos \lambda x + (1 - \cos \lambda a) \sin \lambda x}{\lambda} d\lambda;$

в) $f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(2\lambda \sin \lambda \pi - 1) \cos \lambda x + 2\lambda \cos \lambda \pi \sin \lambda x}{4\lambda^2 - 1} d\lambda;$

г) смотри замечание 28 на стр. 78;

е) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2/4a} \cos \lambda x d\lambda;$

ж) $f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{a \cos \lambda x + \lambda \sin \lambda x}{a^2 + \lambda^2} d\lambda.$

Список литературы

1. *Араманович И.Г., Луниц Г.Л., Эльсгольц Л.Э.* Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. — М.: Наука, 1968.
2. *Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И.* Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости: Учебн. пособие, — 2-е изд., перераб. и доп., — М.: Наука, 1981.
3. *Никольский С.М.* Курс математического анализа. — М.: Наука, 1973. — Т. I, II.
4. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. — М.: Наука, 1978. — Т. II.
5. *Сборник задач по математике для втузов.* Ч. 2. Специальные разделы математического анализа / Под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича. — 2-е изд. — М.: Наука, 1986.
6. *Сборник задач по математике для втузов.* Ч. 3. Специальные курсы / Под ред. А.В. Ефимова. — 2-е изд. — М.: Наука, 1986.

Содержание

Предисловие	3
1 Теория функций комплексного переменного	4
Занятие № 1. Комплексные числа и операции над ними	4
Занятие № 2. Элементарные функции комплексного переменного	9
Занятие № 3. Аналитические функции. Условия Коши-Римана .	14
Занятие № 4. Интеграл Коши. Интегральная формула Коши . .	17
Занятие № 5. Ряды в комплексной плоскости	22
Занятие № 6. Нули и изолированные особые точки	29
Занятие № 7. Элементы теории вычетов	31
2 Операционное исчисление	37
Занятие № 8. Определение и свойства оператора Лапласа	37
Занятие № 9. Нахождение изображений по оригиналам	41
Занятие № 10. Нахождение оригинала по изображению	46
Занятие № 11. Решение дифференциальных уравнений операционным методом	48
3 Ряды Фурье и интегралы Фурье	56
Занятие № 12. Линейные нормированные пространства	56
Занятие № 13. Разложение функций в ряд Фурье	62
Занятие № 14. Тригонометрические ряды Фурье. Гармонический анализ	64
Занятие № 15. Интеграл Фурье	77
Занятие № 16. Приложение рядов Фурье. Уравнение колебания струны	81
Занятие № 17. Приложение рядов и интегралов Фурье. Уравнение теплопроводности	85
Приложения	90
А. Типовой расчет по рядам Фурье	90
Б. Таблица основных оригиналов и изображений	93
Ответы	94
Литература	100