

Министерство общего и профессионального образования
Российской Федерации
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Том III

Учебное пособие для студентов нематематических специальностей
высших учебных заведений

Новосибирск
2006

УДК 51 (075.8)
В 937

Рецензенты: *В. Г. Чередниченко*, д-р физ.-мат. наук,
проф. СибУКП.

А. Г. Пинус, д-р физ.-мат. наук, проф.

Работа подготовлена на кафедре высшей математики
для студентов-заочников всех факультетов

В937 Высшая математика: Учеб. пособие / В. М. Бородихин,
М. Ю. Васильчик, Н. В. Вахрушев, В. А. Селезнев, В. В. Хаб-
лов. — Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2006. — Т. III — 231 с.

ISBN 5-7782-0422-1

Настоящее учебное пособие подготовлено для студентов 1-2 кур-
сов очного и заочного отделений всех направлений и специально-
стей, изучающих высшую математику в объеме первого курса. При
его написании были использованы методические разработки и дру-
гие материалы, ранее изданные кафедрами высшей и инженерной
математики НГТУ. Эти материалы включены в текст пособия без
ссылок, за что мы приносим свои извинения.

В третьем издании несколько пересмотрен порядок изложения
тем, изменены контрольные материалы и исправлены замеченные
опечатки.

Продолжительные обсуждения книги с доцентом кафедры ин-
женерной математики Э.Б. Шварцем значительно улучшили изда-
ние, и его вполне можно считать за одного из авторов.

Все замечания по содержанию данной работы просим переда-
вать на кафедру высшей математики. Они будут с благодарностью
приняты и учтены в следующих изданиях

УДК 51(075.8)

ISBN 6-7782-0422-1

- © Новосибирский государственный
технический университет, 2006
- © В. М. Бородихин, М. Ю. Васильчик,
Н. В. Вахрушев, В. А. Селезнев,
В. В. Хаблов, 2006

Оглавление

Глава 1.	Кратные интегралы	7
§ 1.1.	Определение двойного интеграла	8
§ 1.2.	Геометрический смысл двойного интеграла	11
§ 1.3.	Свойства двойного интеграла	12
§ 1.4.	Вычисление двойного интеграла	13
§ 1.5.	Замена переменных в двойном интеграле	21
§ 1.6.	Применения двойных интегралов	29
1.6.1.	Вычисление площадей плоских фигур	29
1.6.2.	Вычисление объемов	31
1.6.3.	Вычисление площади поверхности	32
1.6.4.	Приложения двойного интеграла в механике	34
§ 1.7.	Тройные интегралы	38
1.7.1.	Определение тройного интеграла, его свойства, вычисление	38
1.7.2.	Замена переменных в тройном интеграле	43
1.7.3.	Приложения тройных интегралов	48
Глава 2.	Криволинейные интегралы	52
§ 2.1.	Криволинейные интегралы 1-го рода	52
2.1.1.	Вектор-функции одного переменного	52
2.1.2.	Кривые на плоскости и в пространстве	56
2.1.3.	Криволинейные интегралы 1-го рода	59
2.1.4.	Свойства криволинейного интеграла 1-го рода	66
2.1.5.	Кривые и криволинейные интегралы 1-го рода в пространстве	67
2.1.6.	Приложение криволинейного интеграла 1-го рода в геометрии и физике	69
§ 2.2.	Криволинейные интегралы 2-го рода	70
2.2.1.	Определение криволинейного интеграла 2-го рода и его вычисление	70
2.2.2.	Формула Грина	78

2.2.3.	Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования	80
2.2.4.	Криволинейные интегралы 2-го рода по пространственным кривым	91
2.2.5.	Задача о работе силового поля	100
Глава 3.	Поверхностные интегралы	102
§ 3.1.	Поверхностные интегралы первого рода	102
3.1.1.	Определение поверхностного интеграла первого рода	102
3.1.2.	Вычисление поверхностного интеграла первого рода	104
3.1.3.	Применение поверхностного интеграла первого рода	111
§ 3.2.	Поверхностные интегралы второго рода	113
3.2.1.	Ориентация поверхности	113
3.2.2.	Определение поверхностного интеграла второго рода и его свойства	116
3.2.3.	Физический смысл поверхностного интеграла второго рода	118
3.2.4.	Вычисление поверхностного интеграла второго рода	119
3.2.5.	Формула Остроградского	125
3.2.6.	Формула Стокса	128
Глава 4.	Теория поля	133
§ 4.1.	Скалярные и векторные поля	133
§ 4.2.	Векторные линии. Векторные трубки	136
§ 4.3.	Поток векторного поля через поверхность. Дивергенция	138
§ 4.4.	Циркуляция векторного поля. Ротор	141
§ 4.5.	Правила действия с дивергенцией и ротором	144
§ 4.6.	Оператор Гамильтона	145
§ 4.7.	Специальные векторные поля	147
4.7.1.	Потенциальные векторные поля	147
4.7.2.	Соленоидальные векторные поля	147
4.7.3.	Нахождение векторного поля по заданным ротору и дивергенции	150
Глава 5.	Числовые и функциональные ряды	152
§ 5.1.	Числовые ряды и их общие свойства	152
5.1.1.	Основные понятия	152
5.1.2.	Остаток ряда. Сходимость ряда и его остатка	156
5.1.3.	Алгебраические свойства суммы ряда	157
5.1.4.	Необходимый признак сходимости ряда	158
§ 5.2.	Ряды с неотрицательными членами	159

5.2.1.	Характер сходимости ряда с положительными членами . . .	159
5.2.2.	Интегральный признак сходимости Коши	160
5.2.3.	Обобщённый гармонический ряд (ряд Дирихле)	163
5.2.4.	Признаки сравнения	164
5.2.5.	Признаки Даламбера и радикальный Коши	167
§ 5.3.	Знакопеременные ряды.	
	Абсолютная и условная сходимость	171
5.3.1.	Абсолютная и условная сходимость.	
	Теорема об абсолютно сходящихся рядах	171
5.3.2.	Знакопеременные ряды. Теорема Лейбница	173
§ 5.4.	Функциональные	
	последовательности и ряды.	
	Поточечная и равномерная сходимость	175
5.4.1.	Основные понятия и терминология	175
5.4.2.	Равномерная сходимость	177
§ 5.5.	Степенные ряды	180
5.5.1.	Область сходимости степенного ряда	180
5.5.2.	Почленное интегрирование	
	и дифференцирование степенного ряда	185
§ 5.6.	Разложение функций в степенные ряды	186
5.6.1.	Ряды Тейлора и Маклорена	186
5.6.2.	Тейлоровские разложения	
	элементарных функций	190
§ 5.7.	Применение степенных рядов	192
5.7.1.	Приближённое вычисление	
	значений функций	192
5.7.2.	Приближённое вычисление интегралов	194

Глава 6. **Ряды Фурье** **195**

§ 6.1.	2 π -периодические функции.	
	Тригонометрические полиномы.	
	Ряд Фурье 2 π -периодической функции	196
6.1.1.	Простейшие 2 π -периодические функции	196
6.1.2.	Ряд и коэффициенты Фурье	
	2 π -периодической функции	196
6.1.3.	Ряды Фурье чётных и нечётных функций	200
6.1.4.	Сдвиг промежутка интегрирования	202
6.1.5.	Комплексная форма ряда Фурье	202
6.1.6.	Разложение в ряд Фурье	
	функций с произвольным периодом	204
§ 6.2.	Поточечная сходимость ряда Фурье.	
	Ряды Фурье непериодических функций	206
6.2.1.	Теорема Дирихле	
	о поточечной сходимости ряда Фурье	206
6.2.2.	Разложение в ряд Фурье функций,	
	заданных на конечном промежутке	208
§ 6.3.	Интегралы Фурье и преобразование Фурье	211

6.3.1.	Интегралы Фурье	211
6.3.2.	Преобразование Фурье	213
§ 6.4.	Евклидовы пространства бесконечной размерности и обобщённые ряды Фурье	215
6.4.1.	Классические ряды Фурье и язык евклидовых пространств	215
6.4.2.	Обобщённые ряды Фурье	219
Контрольные работы		220
	Контрольная работа №5	220
	Контрольная работа №6	225
Список литературы		228

Глава 1

Кратные интегралы

В главе мы рассмотрим кратные интегралы — двойные и тройные. К кратным интегралам приводят многие задачи геометрии, математического анализа, механики, физики.

Схема применения кратных интегралов та же, что и для определенных интегралов. Чтобы проиллюстрировать, как возникает кратный интеграл, рассмотрим задачу о вычислении массы пластины.

На плоскости xOy рассмотрим материальную пластину, т. е. область G , на которой распределена масса с плотностью $\rho(x, y)$. Считая, что плотность $\rho(x, y)$ непрерывна, найдем массу пластины G .

Разобьем область G произвольно на n частей:

$$G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_n$$

так, что никакие две части не имеют общих внутренних точек.

Через ΔS_i обозначим площадь G_i . Если части G_i небольшие, то в силу непрерывности $\rho(x, y)$ можно считать, что плотность постоянна на каждой части G_i . Выберем произвольно точку (ξ_i, η_i) из G_i и будем считать, что $\rho(x, y) \approx \rho(\xi_i, \eta_i)$ при $(x, y) \in G_i$.

Через $d(G_i)$ обозначим диаметр части G_i , т. е. наибольшее расстояние между двумя точками из G_i ; через λ обозначим наибольший из диаметров: $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} d(G_i)$.

При наших допущениях масса части G_i приближенно равна $m_i \approx$

$\rho(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i$, а масса всей пластины G равна приближенно

$$m \approx \sum_{i=1}^n m_i = \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i .$$

Приближение будет тем точнее, чем мельче разбиение пластины G на части. Естественно принять за массу пластины предел

$$m = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i .$$

Предел в правой части равенства является двойным интегралом от функции $\rho(x, y)$ по множеству G и обозначается

$$\iint_G \rho(x, y) dx dy .$$

Мы подробно рассмотрим двойные интегралы. Определение и свойства тройных интегралов вполне аналогичны определению и свойствам двойных интегралов. Поэтому изучение тройных интегралов будет по возможности кратким.

§ 1.1. Определение двойного интеграла

Прежде чем определить двойной интеграл и рассмотреть его свойства, приведем некоторые понятия, связанные с множествами на плоскости и в пространстве. Ранее были введены понятия ограниченного множества, открытого и замкнутого множеств, области, границы множества.

Замкнутой областью называется объединение точек области и ее граничных точек.

Под гладкой кривой мы понимаем такую кривую (на плоскости и в пространстве), в каждой точке которой существует касательная и при непрерывном движении точки по кривой касательная меняется непрерывно. На плоскости это означает, что угол между касательной и положительной полуосью абсцисс меняется непрерывно. В случае пространственной кривой (как, впрочем, и на плоскости) непрерывно меняются направляющие косинусы направляющего вектора касательной к кривой.

Кривая называется кусочно-гладкой, если она состоит из конечного числа гладких кривых.

Гладкими кривыми на плоскости будут, например, окружность, парабола. Кусочно-гладкими кривыми будут треугольник, параллелограмм.

Далее мы всегда считаем, что граница плоской области гладкая или кусочно-гладкая кривая.

Пусть G — некоторая ограниченная замкнутая область на плоскости xOy и пусть на G определена функция $z = f(x, y)$.

Разделим область G гладкими или кусочно-гладкими кривыми на n частей $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_n$ так, что никакие две части G_i и G_j не имеют общих внутренних точек. Мы будем считать, что все G_i — замкнутые области, добавляя к каждой части разбиения точки ее границы.

Площадь части G_i будем обозначать ΔS_i , диаметр G_i обозначим $d(G_i)$. Как уже говорилось выше при рассмотрении примера, $d(G_i) = \max_{P, Q \in G_i} d(P, Q)$, где $d(P, Q)$ — расстояние между точками P и Q . Наибольший из диаметров $d(G_i)$ обозначим через λ и будем называть мелкостью разбиения области G на части.

Выберем в каждой части G_i произвольно точку $P_i(\xi_i, \eta_i)$ и составим сумму

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i = \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta S_i.$$

Сумма S_n называется интегральной суммой для функции $z = f(x, y)$ в области G .

Определение 1.1.1. Если при $\lambda \rightarrow 0$ существует конечный предел I интегральных сумм S_n , не зависящий от способов разбиения области G на части $G_1, G_2, \dots, G_n$ и выбора точек P_i , то он называется двойным интегралом от функции $z = f(x, y)$ по области G и обозначается

$$\iint_G f(x, y) dx dy \text{ или } \iint_G f(x, y) dS.$$

Таким образом, если конечный предел I интегральных сумм существует, то

$$I = \iint_G f(x, y) dS = \iint_G f(x, y) dx dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta S_i.$$

Понятие предела интегральных сумм нуждается в уточнении. Оно может быть в точности таким же, как и для предела интегральных сумм при определении определенного интеграла, и мы на этом останавливаться не будем.

Если двойной интеграл от функции $z = f(x, y)$ по области G существует, то про функцию $f(x, y)$ говорят, что она интегрируема по G ; если интеграл не существует, то говорят, что $f(x, y)$ не интегрируема по G .

Выражение $f(x, y) dx dy$ называется подынтегральным выражением, $f(x, y)$ — подынтегральной функцией, x и y — переменными интегрирования, G — областью интегрирования, $dS = dx dy$ — элементом площади.

Отметим, что, как и определенный интеграл, двойной интеграл зависит только от функции и области интегрирования. Переменные интегрирования — «немые», т. е. выражения $\iint_G f(x, y) dx dy$,

$\iint_G f(u, v) du dv$ и т. д. есть различные по форме записи одного и того же числа — двойного интеграла от функции f по области G .

Остановимся вкратце на условиях интегрируемости функций. Необходимым условием существования интеграла является ограниченность подынтегральной функции. Как и для случая одного переменного, ограниченности функции оказывается недостаточно для интегрируемости.

Мы не будем стараться описать наиболее общий класс интегрируемых функций. Отметим без доказательства, что если функция $z = f(x, y)$ непрерывна на ограниченно замкнутой области G , то она интегрируема по G . В приложениях — это наиболее часто встречающийся случай.

Отметим еще класс разрывных интегрируемых функций. Если функция $z = f(x, y)$ ограничена в ограниченной замкнутой области G и непрерывна в G всюду, за исключением точек, лежащих на конечном числе гладких или кусочно-гладких кривых в G , то она интегрируема по G .

Доказательства сделанных утверждений можно найти в более по-

дробных курсах математического анализа (см., например, [6] или [15]).

§ 1.2. Геометрический смысл двойного интеграла

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в ограниченной замкнутой области G , непрерывна и положительна в G . Рассмотрим в пространстве тело V , ограниченное сверху графиком функции $z = f(x, y)$, снизу — областью G , а с боков — цилиндрической поверхностью, направляющей которой служит граница области G , а образующие параллельны оси Oz . Разделим область G произвольным образом на n частей, $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_n$. Через ΔS_i обозначим площадь G_i . Выберем произвольно точку $P_i(\xi_i, \eta_i) \in G_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда произведение $v_i = f(P_i)\Delta S_i$ дает объем цилиндра, нижнее основание которого есть G_i , верхнее основание параллельно нижнему, боковые стенки параллельны оси Oz , а высота цилиндра равна $f(P_i)$. Объем v_i приближенно равен объему криволинейного цилиндра, ограниченного сверху частью графика функции $z = f(x, y)$ над G_i . Сумма $\sum_{i=1}^n v_i$ дает приближенное значение объема, заключенного между графиком функции $z = f(x, y)$ и плоскостью xOy ($(x, y) \in G$). Точность приближения будет тем больше, чем меньше части G_i . При неограниченном измельчении разбиения (т. е. $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} d(G_i) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$) сумма $\sum_{i=1}^n v_i$ будет все точнее приближать объем тела V , а в пределе мы получим истинный объем V . Обозначим через v объем V . Тогда, согласно вышесказанному,

$$v = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n v_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i)\Delta S_i = \iint_G f(x, y) dx dy.$$

Последнее равенство следует из определения двойного интеграла и интегрируемости функции $f(x, y)$ на G , так как она непрерывна (рис. 1.1).

Из приведенных рассуждений следует, что двойной интеграл от непрерывной положительной функции равен объему тела, ограниченного графиком функции, плоскостью xOy и боковыми стенками, параллельными оси Oz . В этом и заключается геометрический смысл двойного интеграла.

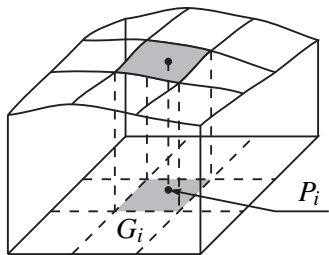


Рис. 1.1

§ 1.3. Свойства двойного интеграла

1. Обозначим через S площадь области G . Тогда

$$\iint_G dx dy = S.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В нашем случае $f(x, y) = 1$ всюду в G . Поэтому для любого разбиения $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_n$ и для любого выбора точек $P_i \in G_i$ мы получаем

$$S_n = \sum_{i=1}^n 1 \Delta S_i = S.$$

Что и требовалось доказать.

Следующие свойства 2–6 двойного интеграла аналогичны соответствующим свойствам определенного интеграла, поэтому мы опускаем их доказательства.

2. Линейные свойства двойного интеграла. Если функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ интегрируемы по области G и C — произвольная постоянная, то функции $Cf(x, y)$ и $f(x, y) + g(x, y)$ интегрируемы по G и справедливы равенства

$$\begin{aligned} \iint_G Cf(x, y) dx dy &= C \iint_G f(x, y) dx dy, \\ \iint_G [f(x, y) + g(x, y)] dx dy &= \iint_G f(x, y) dx dy + \iint_G g(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

3. Аддитивность двойного интеграла. Пусть области G_1 и G_2 не имеют общих внутренних точек и функция $f(x, y)$ интегрируема по G_1 и G_2 . Тогда функция $f(x, y)$ интегрируема по объединению $G = G_1 \cup G_2$ и выполняется

$$\iint_{G_1} f(x, y) dx dy + \iint_{G_2} f(x, y) dx dy = \iint_G f(x, y) dx dy.$$

4. Теорема с средним. Если функция $f(x, y)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области G , то в G найдется такая точка (x_0, y_0) , что будет выполняться равенство

$$\iint_G f(x, y) dx dy = f(x_0, y_0) S,$$

где S — площадь G .

Следующие свойства касаются оценок двойного интеграла.

5. Если функция $f(x, y)$ интегрируема по G и неотрицательна в G , то

$$\iint_G f(x, y) dx dy \geq 0.$$

Следствие 1.3.1. Если $f(x, y)$ и $g(x, y)$ интегрируемы по G и $f(x, y) \leq g(x, y)$ всюду в G , то

$$\iint_G f(x, y) \leq \iint_G g(x, y) dx dy.$$

6. Если функция $f(x, y)$ интегрируема по области G , то

$$\left| \iint_G f(x, y) dx dy \right| \leq \iint_G |f(x, y)| dx dy.$$

§ 1.4. Вычисление двойного интеграла

Теорема 1.4.1 (вычисление двойного интеграла по прямоугольнику). Пусть функция $z = f(x, y)$ интегрируема по прямоугольнику

$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

и пусть для каждого x из отрезка $[a, b]$ существует определенный интеграл

$$I(x) = \int_c^d f(x, y) dy.$$

Тогда существует интеграл

$$\int_a^b I(x) dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx,$$

называемый повторным, и справедливы равенства

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b I(x) dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

Доказательство теоремы мы не приводим. Его можно найти в более подробных курсах математического анализа.

Повторный интеграл принято записывать в виде

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

Если в последней теореме поменять ролями x и y , то получим утверждение о существовании повторного интеграла

$$\int_c^d I(y) dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy \equiv \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx$$

и справедливости равенства

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx.$$

С помощью этой формулы или формулы из теоремы вычисление двойного интеграла по прямоугольнику сводится к последовательному вычислению двух определенных интегралов. Заметим, что если функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике D , то без всяких дополнительных условий выполняются равенства

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx.$$

В этом случае выбор порядка интегрирования (сначала по переменной y , потом по x , или наоборот) может, в зависимости от подынтегральной функции, повлиять на объем вычислений.

ПРИМЕР 1.4.1.

1) Вычислить интеграл

$$\iint_D \frac{y}{x} dx dy,$$

где $D = \{(x, y) : 1 \leq x \leq e, 4 \leq y \leq 6\}$.

Записывая интеграл в виде повторного, вычисляем его

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{y}{x} dx dy &= \int_1^e dx \int_4^6 \frac{y}{x} dy = \int_1^e \left(\frac{1}{x} \frac{y^2}{2} \Big|_{y=4}^{y=6} \right) dx = \\ &= \int_1^e \frac{10}{x} dx = 10 \ln x \Big|_1^e = 10 \ln e = 10. \end{aligned}$$

2) Вычислить интеграл

$$\iint_D x e^{xy} dx dy,$$

где $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 2 \leq y \leq 3\}$.

Если записать интеграл в виде повторного

$$\iint_D x e^{xy} dx dy = \int_2^3 dy \int_0^1 x e^{xy} dx,$$

то мы видим, что интеграл по x требует применения формулы интегрирования по частям, и только потом мы будем вычислять интеграл по переменной y . Запишем интеграл в виде повторного следующим образом

$$\iint_D x e^{xy} dx dy = \int_2^3 dx \int_0^1 x e^{xy} dy.$$

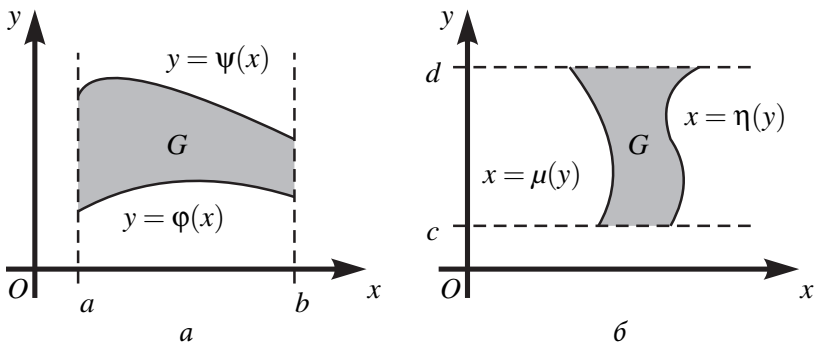


Рис. 1.2

Мы видим, что вычисление двойного интеграла сводится к последовательному вычислению двух простых определенных интегралов

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \int_2^3 x e^{xy} dy &= \int_0^1 e^{xy} \Big|_{y=2}^{y=3} dx = \int_0^1 (e^{3x} - e^{2x}) dx = \\ &= \left(\frac{1}{3} e^{3x} - \frac{1}{2} e^{2x} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} e^3 - \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2e^3 - 3e^2 + 1}{6}. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим вычисление двойного интеграла по криволинейной области.

Определение 1.4.1. Замкнутая область G на плоскости xOy называется нормальной относительно оси Oy , если она ограничена сверху и снизу графиками функций $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$ соответственно, а с боков — прямыми $x = a$ и $x = b$, т. е. если G имеет вид

$$G = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}.$$

Замкнутая область G называется нормальной относительно оси Ox , если ее можно задать следующим образом

$$G = \{(x, y) : c \leq y \leq d, \mu(y) \leq x \leq \eta(y)\}.$$

На рис. 1.2,а изображена область, нормальная относительно оси Oy (не Ox !), на рис. 1.2,б — область, нормальная относительно оси Ox (но не Oy !).

Если область нормальна относительно обеих осей координат, то она называется простой.

Простой областью будет, например, внутренность эллипса, внутренность прямоугольника. Несложно заметить, что любая выпуклая область будет простой.

Теорема 1.4.2 (вычисление двойного интеграла для криволинейной области). Пусть G — замкнутая область, нормальная относительно оси Oy

$$G = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\},$$

и пусть функция $z = f(x, y)$ интегрируема по G и для любого $x \in [a, b]$

существует интеграл $\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy$. Тогда существует повторный интеграл

$$\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy$$

и справедливо равенство

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть c и d — такие числа, что $c \leq \varphi(x) \leq \psi(x) \leq d$ при всех $x \in [a, b]$ (рис. 1.3). Тогда область G содержится в прямоугольнике $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$. Рассмотрим функцию

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{если } (x, y) \in G, \\ 0, & \text{в остальных точках } D. \end{cases}$$

По свойству аддитивности двойного интеграла

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \iint_G f(x, y) dx dy + \\ &+ \int_{D \setminus G} f(x, y) dx dy = \iint_G f(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

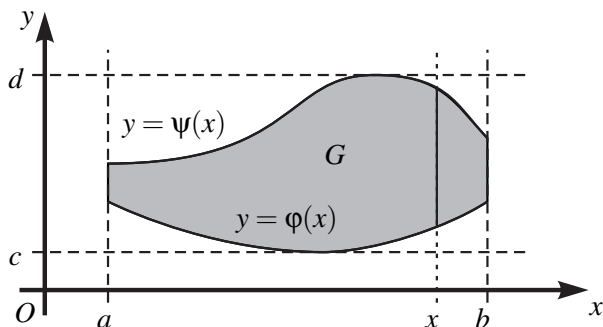


Рис. 1.3

Из аддитивности определенного интеграла и из определения функции $F(x, y)$ следует

$$\begin{aligned} \int_c^d F(x, y) dy &= \int_c^{\varphi(x)} F(x, y) dy + \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} F(x, y) dy + \\ &+ \int_{\psi(x)}^d F(x, y) dy = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} F(x, y) dy. \end{aligned}$$

Отсюда и из теоремы 1.4.1 мы получаем

$$\iint_D F(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d F(x, y) dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy.$$

Таким образом, мы доказали, что

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy.$$

Что и требовалось доказать.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4.1. Если область G нормальна относительно оси Ox

$$G = \{(x, y) : c \leq y \leq d, \mu(y) \leq x \leq \eta(y)\},$$

и функция $f(x, y)$ такова, что существуют интегралы $\iint_G f(x, y) dx dy$ и $\int_{\mu(y)}^{\eta(y)} f(x, y) dx$ при всех $y \in [c, d]$, то, повторяя

доказательство теоремы, установим равенство

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\mu(y)}^{\eta(y)} f(x, y) dx.$$

В случае простой области двойной интеграл сводится к повторному двумя способами. Отметим, что от того, как сделан переход от двойного интеграла к повторному, часто зависит объем вычислений. Чтобы вычислить двойной интеграл наиболее рациональным способом, следует аккуратно разобраться как с областью интегрирования, так и с подынтегральной функцией.

ПРИМЕР 1.4.2.

1) Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) dx.$$

В данном примере (рис. 1.4,а) замкнутая область интегрирования G задается неравенствами

$$G = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1, -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq 1-y\}.$$

Мы видим, что если интегрировать сначала по y , а потом по x , то область G придется разбить на две области:

$$G_1 = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\},$$

$$G_2 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x\}.$$

Но тогда

$$\begin{aligned} \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) dy &= \iint_G f(x, y) dx dy = \\ &= \int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x, y) dy. \end{aligned}$$

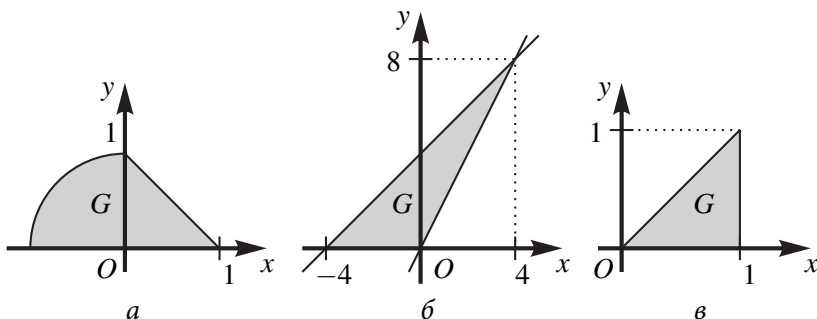


Рис. 1.4

2) Вычислить интеграл $\iint_G xy dx dy$, где G — область, ограниченная линиями $y = 2x$, $y = x + 4$, $x = 0$ (рис. 1.4, б).

Мы видим, что удобнее интегрировать сначала по y , а затем по x , так как в противном случае придется рассматривать два повторных интеграла. Имеем

$$\begin{aligned} \iint_G xy dx dy &= \int_0^4 dx \int_{2x}^{x+4} xy dy = \int_0^4 x \frac{y^2}{2} \Big|_{y=2x}^{y=x+4} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^4 (8x^2 + 16x - 3x^3) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{8}{3}x^3 + 8x^2 - \frac{3}{4}x^4 \right) \Big|_0^4 = \frac{160}{3}. \end{aligned}$$

3) Вычислить интеграл $\iint_G y^2 \cos xy dx dy$, где область G ограничена линиями $y = 0$, $y = x$, $x = 1$ (рис. 1.4, в).

В данном примере область устроена одинаково просто для перехода к повторному интегралу в любом порядке, но если вначале интегрировать по y , то придется дважды использовать формулу интегрирования по частям. В повторном интеграле удобнее вначале

брать интеграл по x . Имеем

$$\begin{aligned}\iint_G y^2 \cos xy \, dx dy &= \int_0^1 dy \int_y^1 y^2 \cos xy \, dx = \\ &= \int_0^1 y \left(\sin xy \Big|_{x=y}^{x=1} \right) dy = \int_0^1 y \sin y \, dy - \int_0^1 y \sin y^2 \, dy.\end{aligned}$$

Первый интеграл возьмем по частям,

$$u = y, \quad du = dy, \quad dv = \sin y \, dy, \quad v = -\cos y.$$

Поэтому

$$\int_0^1 y \sin y \, dy = -y \cos y \Big|_0^1 + \int_0^1 \cos y \, dy = -\cos 1 + \sin 1.$$

Второй интеграл берется заменой

$$y^2 = t, \quad y \, dy = \frac{1}{2} dt, \quad y = 0 \rightarrow t = 0, \quad y = 1 \rightarrow t = 1.$$

Имеем

$$\int_0^1 y \sin y^2 \, dy = \int_0^1 \sin t \, dt = -\frac{\cos t}{2} \Big|_0^1 = \frac{1 - \cos 1}{2}.$$

Окончательно получаем

$$\iint_G y^2 \cos xy \, dx dy = \sin 1 - \cos 1 - \frac{1}{2} + \frac{\cos 1}{2} = \sin 1 - \frac{1 + \cos 1}{2}.$$

§ 1.5. Замена переменных в двойном интеграле

Для вычисления или оценки определенных интегралов нам часто приходилось прибегать к замене переменной. Целью этого метода является получение более простого подынтегрального выражения. Не менее важна замена переменных и в кратных интегралах. При этом в кратных интегралах целью замены переменных может быть не только упрощение подынтегрального выражения, но и получение более простой области интегрирования.

Рассмотрим две экземпляра плоскости с декартовыми прямоугольными координатами. Одну — с системой координат uOv и другую — с системой координат xOy . Пусть Ω — замкнутая область в плоскости uOv и задано отображение $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ области Ω в плоскость xOy . Будем считать, что отображение непрерывно дифференцируемо. Это означает, что функции φ и ψ непрерывны в Ω , и их первые частные производные также непрерывны в Ω .

Если точка (u, v) пробегает область Ω , то соответствующая точка $(x, y) = (\varphi(u, v), \psi(u, v))$ пробегает в плоскости xOy некоторую замкнутую область G . Область G называется образом области Ω . Напомним, что якобианом отображения $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ называется определитель

$$J = J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Для якобиана еще используется обозначение $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$.

Напомним геометрический смысл якобиана. Если мы рассмотрим в области Ω прямоугольник Δ со сторонами, параллельными координатным осям с длинами Δu и Δv , и если Δ' — образ прямоугольника при отображении $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, то площади прямоугольника Δ и криволинейного прямоугольника Δ' — $\Delta u \Delta v$ и $\Delta S'$ соответственно связаны приближенным равенством

$$\Delta S' \approx |J(u, v)| \Delta u \Delta v.$$

Теорема 1.5.1 (о замене переменных в двойном интеграле).

Пусть отображение $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ непрерывно дифференцируемо в замкнутой области $\Omega \subset uOv$ и взаимно однозначно отображает область Ω на замкнутую область $G \subset xOy$, причем якобиан $J = J(u, v)$ отличен от нуля всюду в Ω . Тогда если функция $z = f(x, y)$ интегрируема по области G , то функция $g(u, v) = f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) |J(u, v)|$ интегрируема по области Ω и имеет место формула

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \iint_{\Omega} f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) |J(u, v)| du dv.$$

Это равенство называется формулой замены переменных в двойном интеграле.

Строгое доказательство теоремы слишком громоздко, поэтому мы ограничимся только наброском его.

Параллельно осям Ou и Ov проведем прямые, пересекающие область Ω . Из полученных прямоугольников выберем только те, которые целиком лежат в Ω (рис. 1.5).

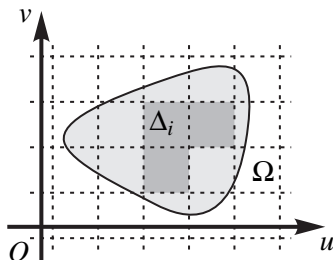


Рис. 1.5

Пусть это будут $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$. Их площади обозначим через $\Delta S_i, i = 1, 2, \dots, n$. При измельчении разбиения

Ω объединение прямоугольников, входящих в Ω целиком, будет все более точно приближать область Ω .

Соответствующие криволинейные четырехугольники в области G обозначим $\Delta'_1, \Delta'_2, \dots, \Delta'_n$, а их площади через $\Delta S'_1, \Delta S'_2, \dots, \Delta S'_n$ соответственно.

Выберем произвольно точки $P_i(u_i, v_i) \in \Delta_i \subset \Omega$. Тогда им будут соответствовать точки $M_i(\varphi(u_i, v_i), \psi(u_i, v_i))$ из $\Delta'_i \subset G$. Рассмотрим сумму

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta S'_i &= \sum_{i=1}^n f(\varphi(u_i, v_i), \psi(u_i, v_i)) \Delta S'_i \approx \\ &\approx \sum_{i=1}^n f(\varphi(u_i, v_i), \psi(u_i, v_i)) |J(u_i, v_i)| \Delta S_i = \sum_{i=1}^n g(P_i) \Delta S_i. \end{aligned}$$

Если $\lambda(\Omega) = \max_{1 \leq i \leq n} d(\Delta_i)$ — мелкость разбиения Ω , а $\lambda(G) = \max_{1 \leq i \leq n} d(\Delta'_i)$ — мелкость разбиения G , то при $\lambda(\Omega) \rightarrow 0$ выполняется $\lambda(G) \rightarrow 0$. Поэтому переходя в равенстве интегральных сумм к пределу при $\lambda(\Omega) \rightarrow 0$, мы получим в пределе искомую формулу замены переменных в двойном интеграле.

ПРИМЕР 1.5.1. Вычислить интеграл

$$\iint_G x dx dy,$$

где G — область, ограниченная прямыми $y = \frac{x}{2}$, $y = 2x$, $x + y = 1$, $x + y = 2$ (рис. 1.6,а).

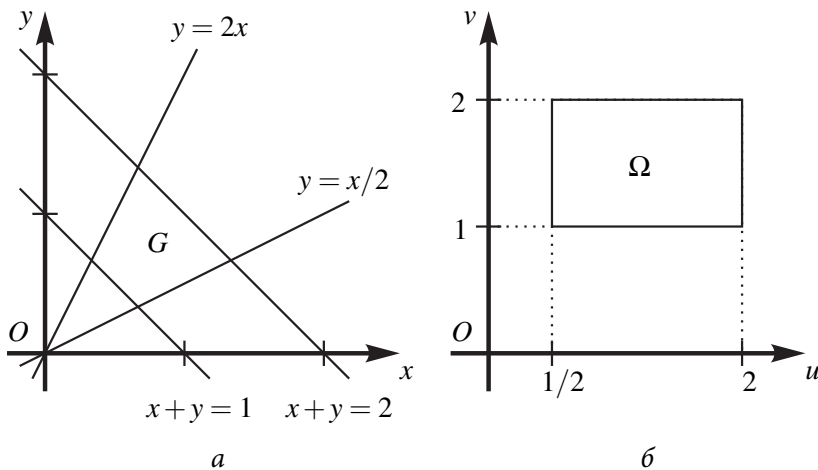


Рис. 1.6

Перейдем к новым координатам

$$u = \frac{y}{x}, \quad v = x + y.$$

Тогда $x = \frac{u}{1+v}$, $y = \frac{uv}{1+v}$.

Области $G \subset xOy$ будет соответствовать прямоугольник $\Omega = \{(u, v) : 1/2 \leq u \leq 2, 1 \leq v \leq 2\} \subset uOv$. Действительно, при отображении областей границы переходят в границы. Прямым $y = x/2$ и $y = 2x$ в плоскости xOy соответствуют прямые $u = 1/2$ и $u = 2$ в плоскости uOv , прямым $x + y = 1$ и $x + y = 2$ соответствуют прямые $v = 1$ и $v = 2$ (рис. 1.6,б).

Вычисляем якобиан.

$$J(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{1+v} & -\frac{u}{(1+v)^2} \\ \frac{v}{1+v} & \frac{u}{(1+v)^2} \end{vmatrix} = \frac{u}{(1+v)^2}.$$

Применяя формулу замены переменных, отсюда получаем

$$\begin{aligned}
 \iint_G x dx dy &= \iint_{\Omega} \frac{u}{1+v} \cdot \frac{u}{(1+v)^2} du dv = \iint_{\Omega} \frac{u^2}{(1+v)^3} du dv = \\
 &= \int_1^2 dv \int_{1/2}^2 \frac{u^2}{(1+v)^3} du = \left(-\frac{1}{2(1+v)^2} \Big|_1^2 \right) \cdot \left(\frac{u^3}{3} \Big|_{1/2}^2 \right) = \\
 &= \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{18} \right) \cdot \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{24} \right) = \frac{49}{96}.
 \end{aligned}$$

Важным частным случаем замены переменных в двойном интеграле является переход к полярным координатам.

Рассмотрим замкнутую область G на плоскости xOy и задание этой же области в полярных координатах. Полярные координаты выберем так, чтобы их полюс совпадал с началом декартовых координат, а полярная ось — с положительной полуосью Ox . Тогда, как известно, преобразование координат задается формулами $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, где r и φ — полярные координаты точек плоскости.

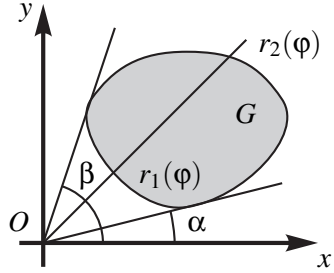


Рис. 1.7

Вычислим якобиан $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}$. Имеем

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -r \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r.$$

Пусть преобразование координат взаимно однозначно отображает на G следующую замкнутую область изменения переменных r и φ (рис. 1.7)

$$\Omega = \{(r, \varphi) : \alpha \leq \varphi \leq \beta, r_1(\varphi) \leq r \leq r_2(\varphi)\}.$$

Тогда согласно теореме 1.5.1 о замене переменных получаем

$$\begin{aligned}\iint_G f(x, y) dx dy &= \iint_{\Omega} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr.\end{aligned}$$

Отметим, что на практике чаще всего от двойного интеграла по x и y переходят сразу к повторному интегралу от r и φ .

ПРИМЕР 1.5.2.

1) Вычислить интеграл

$$\iint_G x dx dy,$$

где $G = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2x\}$ — круг (рис. 1.8, а).

Имеем $G = \{(x, y) : (x - 1)^2 + y^2 \leq 1\}$ — круг, касающийся оси Oy в точке $O(0, 0)$, с центром в точке $(1, 0)$. Ясно, что при переходе к полярным координатам $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, мы имеем $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, $r \leq 2 \cos \varphi$. Последнее неравенство получается из неравенства $y^2 + x^2 \leq 2x$, так как $x^2 + y^2 = r^2$, $x = r \cos \varphi$. Поэтому

$$\begin{aligned}\iint_G x dx dy &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} r^2 \cos \varphi dr = \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi \left(\frac{r^3}{3} \Big|_0^{2 \cos \varphi} \right) d\varphi = \frac{8}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 \varphi d\varphi = \\ &= \frac{8}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right)^2 d\varphi = \frac{2}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(1 + 2 \cos 2\varphi + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 + \cos 4\varphi}{2} \right) d\varphi = \frac{2}{3} \left[\frac{3}{2} \varphi + \sin 2\varphi + \frac{\sin 4\varphi}{8} \right] \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi.\end{aligned}$$

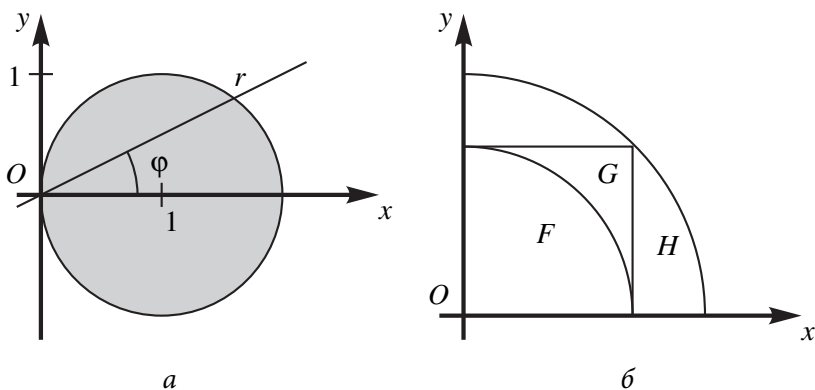


Рис. 1.8

2) Вычислим интеграл Пуассона. Покажем, что

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Напомним, что интеграл по неограниченному полуинтервалу $[0, \infty)$ понимается следующим образом

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-x^2} dx,$$

если предел существует.

Рассмотрим области (рис. 1.8, б)

$$F = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\};$$

$$G = \{(x, y) : 0 \leq x \leq R, 0 \leq y \leq R\};$$

$$H = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2R^2\}.$$

Ясно, что $F \subset G \subset H$ и что

$$\iint_F e^{-x^2-y^2} dx dy \leq \iint_G e^{-x^2-y^2} dx dy \leq \iint_H e^{-x^2-y^2} dx dy.$$

Интегралы по F и H легко вычисляются переходом к полярным коор-

динатам

$$\begin{aligned}\iint_F e^{-x^2-y^2} dx dy &= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^R e^{-r^2} r dr = \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^R e^{-r^2} d(r^2) = -\frac{\pi}{4} e^{-r^2} \Big|_0^R = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-R^2}).\end{aligned}$$

Аналогично

$$\iint_H e^{-x^2-y^2} dx dy = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-2R^2}).$$

Интеграл по G запишем в виде повторного и получим

$$\begin{aligned}\iint_G e^{-x^2-y^2} dx dy &= \int_0^R dx \int_0^R e^{-x^2} e^{-y^2} dy = \\ &= \int_0^R e^{-x^2} dx \cdot \int_0^R e^{-y^2} dy = \left(\int_0^R e^{-x^2} dx \right)^2.\end{aligned}$$

Подставим вычисленные интегралы в двойное неравенство для интегралов. Получаем

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{1 - e^{R^2}} \leq \int_0^R e^{-x^2} dx \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{1 - e^{-2R^2}}.$$

Устремляя в этом двойном неравенстве R к бесконечности, получаем

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-x^2} dx \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

т. е.,

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

3) Иногда бывает удобно использовать обобщенные полярные координаты $x = a \cos \varphi$, $y = b r \sin \varphi$, где a и b — некоторые положительные постоянные.

Якобиан для данной системы функций равен $J = abr$. (Проверьте это).

Вычислим интеграл

$$\iint_G \sqrt{25 - \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25}} dx dy,$$

где область G ограничена эллипсом $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$, т. е.

$$G = \left\{ (x, y) : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} \leq 1 \right\}.$$

Сделаем замену переменных $x = 4r \cos \varphi$, $y = 5r \sin \varphi$, $|J| = 20r$. Тогда из $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} \leq 1$ следует $r^2 \leq 1$, т. е. $r \leq 1$, и мы получаем

$$\begin{aligned} \iint_G \sqrt{25 - \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25}} dx dy &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{25 - r^2} 20r dr = \\ &= -10 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{25 - r^2} d(25 - r^2) = -20\pi \cdot 2 \cdot \left. \frac{(25 - r^2)^{3/2}}{3} \right|_0^1 = \\ &= \frac{40}{3} \pi (25^{3/2} - 24^{3/2}) = \frac{40}{3} \pi (125 - \sqrt{24^3}). \end{aligned}$$

§ 1.6. Применения двойных интегралов

1.6.1. Вычисление площадей плоских фигур

Первое приложение следует из первого свойства двойного интеграла (§ 1.3):

$$\iint_G dx dy = S,$$

где S — площадь G .

ПРИМЕР 1.6.1.

1) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями (рис. 1.9, а)

$$y^2 = 4 + x, \quad x + 3y = 0.$$

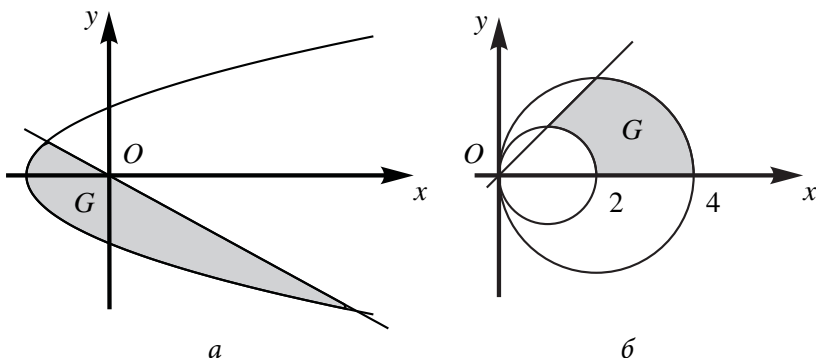


Рис. 1.9

Из рис. 1.9,а видно, что при переходе к повторному интегралу удобнее вначале интегрировать по x , а затем по y . Если же выбрать обратный порядок интегрирования, то придется рассматривать сумму двух повторных интегралов.

Вычисляем

$$S = \iint_G dx dy = \int_{-4}^1 dy \int_{y^2-4}^{-3y} dx = \int_{-4}^1 (4 - 3y - y^2) dy = \left(4y - \frac{3}{2}y^2 - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{-4}^1 = \frac{125}{6} = 20\frac{5}{6}.$$

2) Найти площадь фигуры, ограниченной линиями (рис. 1.9,б)

$$x^2 + y^2 = 2x, \quad x^2 + y^2 = 4x, \quad y = 0, \quad y = x.$$

Здесь удобнее перейти к полярным координатам. Тогда

$$\begin{aligned} S &= \iint_G dx dy = \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} r dr = \int_0^{\pi/4} \left(\frac{r^2}{2} \Big|_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} \right) d\varphi = \\ &= \int_0^{\pi/4} \frac{16\cos^2\varphi - 4\cos^2\varphi}{2} d\varphi = 6 \int_0^{\pi/4} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} d\varphi = \\ &= 2 \left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) \Big|_0^{\pi/4} = \frac{3(\pi + 2)}{4}. \end{aligned}$$

1.6.2. Вычисление объемов

Пусть V — пространственное тело, ограниченное снизу графиком функции $z = \varphi(x, y)$, сверху — графиком $z = \psi(x, y)$ ($\varphi(x, y) \leq \psi(x, y)$ при $(x, y) \in G$), с боков — цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси Oz и проходят через границу области G (рис. 1.10).

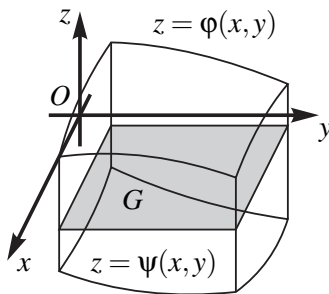


Рис. 1.10

Возьмем такую постоянную C , что для всех $(x, y) \in G$ будет выполняться $\varphi(x, y) + C \geq 0$. Тогда объем тела V будет равен объему, заключенному между графиками функций $z = \varphi(x, y) + C$ и $z = \psi(x, y) + C$, $(x, y) \in G$. Но тогда

$$\begin{aligned} v &= \iint_G [\psi(x, y) + C] dx dy - \iint_G [\varphi(x, y) + C] dx dy = \\ &= \iint_G [\psi(x, y) - \varphi(x, y)] dx dy. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 1.6.2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями

$$x + z = -2, \quad x + z = 2, \quad x^2 + y^2 = 1.$$

Ясно, что проекция тела на плоскость xOy есть круг

$$G = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

В этом примере $\varphi(x, y) = -2 - x$, $\psi(x, y) = 2 - x$. По формуле для вычисления объемов получаем

$$v = \iint_G [(2 - x) - (-2 - x)] dx dy = 4 \iint_G dx dy = 4 \cdot S = 4\pi,$$

где $S = \pi$ — площадь круга G .

1.6.3. Вычисление площади поверхности

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в ограниченной замкнутой области G , непрерывна в G и частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ существуют и непрерывны в G .

Обозначим через S график функции $z = f(x, y)$, т. е.

$$S = \{(x, y, z) : (x, y) \in G, z = f(x, y)\}.$$

Мы выведем формулу для вычисления площади S с помощью двойного интеграла. Сначала поясним, что мы понимаем под площадью поверхности S .

Рассмотрим произвольное разбиение области G ,

$$G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_n.$$

Как и ранее, через ΔS_i обозначим площадь G_i , через λ_n — мелкость разбиения, т. е. $\lambda_n = \max_{1 \leq i \leq n} d(G_i)$.

Через S_i обозначим часть графика S над множеством G_i , т. е. $S_i = \{(x, y, z) : (x, y) \in G_i, z = f(x, y)\}$. В каждой части G_i выберем произвольно точку (ξ_i, η_i) . На поверхности ей соответствует точка

$$M_i(\xi_i, \eta_i, f(\xi_i, \eta_i)) \in S_i.$$

Проведем через M_i касательную плоскость к поверхности S

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\xi_i, \eta_i) \cdot (x - \xi_i) + \frac{\partial f}{\partial y}(\xi_i, \eta_i) \cdot (y - \eta_i) = z - z_i,$$

где $z_i = f(\xi_i, \eta_i)$ и (x, y, z) — произвольная точка на касательной плоскости. Вектор

$$\mathbf{N} = \left\{ -\frac{\partial f}{\partial x}(\xi_i, \eta_i), -\frac{\partial f}{\partial y}(\xi_i, \eta_i), 1 \right\}$$

будет нормальным вектором касательной плоскости, направленным «вверх», т. е. составляющим острый угол с осью Oz .

На касательной плоскости рассмотрим ту ее часть, которая находится над G_i . Обозначим ее через σ_i , а ее площадь — через $\Delta \sigma_i$. Площадь $\Delta \sigma_i$ приближенно равна площади S_i , а сумму всех таких площадей $\sum_{i=1}^n \Delta \sigma_i$ можно считать приближенным значением площади графика S .

За точное значение площади S принимают предел такой суммы при неограниченном измельчении области G (а значит, и поверхности S) на части, т. е. если s — площадь S , то

$$s = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta \sigma_i.$$

Уточнить понятие предела сумм можно так же, как и определение предела интегральных сумм для определенного интеграла.

Пусть γ_i — угол между вектором $\mathbf{N}$ и осью Oz . Угол γ_i равен углу между касательной плоскостью и плоскостью xOy . Так как G_i есть проекция σ_i на плоскость xOy , то, как известно из школьного курса математики, площади этих областей связаны соотношением

$$\Delta \sigma_i = \frac{\Delta S_i}{\cos \gamma_i}.$$

Но

$$\cos \gamma_i = \frac{(\mathbf{N}, \mathbf{k})}{|\mathbf{N}|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\xi_i, \eta_i) \right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(\xi_i, \eta_i) \right]^2}},$$

где $\mathbf{k} = \{0, 0, 1\}$ — единичный вектор, направленный вдоль оси Oz .

Отсюда получаем

$$\sum_{i=1}^n \Delta \sigma_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\xi_i, \eta_i) \right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(\xi_i, \eta_i) \right]^2} \Delta S_i.$$

Мы видим, что в правой части равенства стоит интегральная сумма по области G функции

$$g(x, y) = \sqrt{1 + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right]^2}.$$

Поэтому, переходя к пределу при $\lambda_n \rightarrow 0$, получаем

$$s = \lim_{\lambda_n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i = \iint_G g(x, y) dx dy,$$

или

$$s = \iint_G \sqrt{1 + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right]^2} dx dy,$$

или окончательно

$$s = \iint_G \sqrt{1 + \left[\frac{\partial z}{\partial x} \right]^2 + \left[\frac{\partial z}{\partial y} \right]^2} dx dy.$$

ПРИМЕР 1.6.3. Найти площадь части гиперболического параболоида $xy = z$, ($x \geq 0$, $y \geq 0$), вырезаемой цилиндром $x^2 + y^2 = 8$.

Для $(x, y) \in G = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 8, x \geq 0, y \geq 0\}$ имеем

$$\sqrt{1 + \left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]^2} dxdy = \sqrt{1 + x^2 + y^2} dxdy.$$

При вычислении площади поверхности перейдем к полярным координатам $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $|J| = r$,

$$\begin{aligned} s &= \iint_G \sqrt{1 + x^2 + y^2} dxdy = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{1 + r^2} r dr = \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{1 + r^2} d(1 + r^2) = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2}{3} (1 + r^2)^{3/2} \Big|_0^{2\sqrt{2}} = \\ &= \frac{\pi}{6} (27 - 1) = \frac{13}{3} \pi. \end{aligned}$$

1.6.4. Приложения двойного интеграла в механике

В начале главы мы рассмотрели одно из приложений двойного интеграла — вычисление массы плоской материальной пластины.

Если в области $G \subset xOy$ распределена масса с плотностью $\rho(x, y)$, то масса пластины G вычисляется по формуле

$$m = \iint_G \rho(x, y) dxdy.$$

ПРИМЕР 1.6.4. Найти массу тела пластины G ,

$$G = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\},$$

если ее плотность $\rho(x, y) = xy$.

Согласно полученной формуле, находим

$$m = \iint_G xy \, dx \, dy = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} xy \, dy = \\ = \int_0^1 x \left(\frac{y^2}{2} \Big|_0^{x^2} \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^5 \, dx = \frac{1}{12}.$$

Найдем координаты центра тяжести материальной пластины G , плотность которой $\rho(x, y)$. Снова рассмотрим разбиение G на части

$$G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_n$$

и выберем в каждой части G_i произвольно точку $P_i(\xi_i, \eta_i)$. Мы будем считать, что масса G_i равна $m_i \approx \rho(P_i)\Delta S_i$ и сосредоточена в точке $P_i(\xi_i, \eta_i)$.

В силу непрерывности $\rho(x, y)$ мы допускаем небольшую ошибку, если размеры G_i невелики.

В силу нашего предположения, вся масса m пластины G сосредоточена в n точках $P_1, P_2, \dots, P_n$. Но тогда координаты центра тяжести системы материальных точек вычисляются по формулам:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i \rho(P_i) \Delta S_i}{\sum_{i=1}^n \rho(P_i) \Delta S_i}, \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n \eta_i \rho(P_i) \Delta S_i}{\sum_{i=1}^n \rho(P_i) \Delta S_i}.$$

При неограниченном измельчении разбиения G на части (т. е. при $n \rightarrow \infty$ и $\lambda_n \rightarrow 0$) будет выполняться $\bar{x} \rightarrow x_C, \bar{y} \rightarrow y_C$, где (x_C, y_C) — координаты центра тяжести G . Таким образом, при $n \rightarrow \infty$ и $\lambda_n \rightarrow 0$ мы получаем в пределе

$$x_C = \frac{1}{m} \iint_G x \rho(x, y) \, dx \, dy, \quad y_C = \frac{1}{m} \iint_G y \rho(x, y) \, dx \, dy,$$

где $m = \iint_G \rho(x, y) \, dx \, dy$ — масса G .

Величины $M_x = \iint_G y \rho(x, y) \, dx \, dy$ и $M_y = \iint_G x \rho(x, y) \, dx \, dy$ называются статистическими моментами пластины G относительно осей Oy и Ox соответственно.

Таким образом, формулы для нахождения координат центра тяжести материальной пластины G можно записать еще и в следующем виде

$$x_C = \frac{M_y}{m}, \quad y_C = \frac{M_x}{m}.$$

ПРИМЕР 1.6.5. Найти координаты центра тяжести пластины из предыдущего примера.

Имеем

$$G = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}, \quad \rho(x, y) = xy.$$

Как мы уже нашли,

$$m = \frac{1}{12}.$$

Найдем статистические моменты G относительно осей координат

$$\begin{aligned} M_y &= \iint_G x^2 y \, dx \, dy = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} x^2 y \, dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 \left(y^2 \Big|_0^{x^2} \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^6 dx = \frac{1}{14} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_x &= \iint_G xy^2 \, dx \, dy = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} xy^2 \, dy = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 x \left(y^3 \Big|_0^{x^2} \right) dx = \frac{1}{3} \int_0^1 x^7 dx = \frac{1}{24}. \end{aligned}$$

Отсюда находим координаты центра тяжести

$$x_C = \frac{M_y}{m} = \frac{1}{14} : \frac{1}{12} = \frac{6}{7}, \quad y_C = \frac{M_x}{m} = \frac{1}{24} : \frac{1}{12} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, точка $C\left(\frac{6}{7}, \frac{1}{2}\right)$ — центр тяжести пластины G .

Моментом инерции I_O материальной точки M с массой m относительно точки O называется произведение массы M на квадрат расстояния $r = d(O, M)$ между точками O и M , т. е. $I_O = mr^2$.

Моментом инерции системы материальных точек $M_1, M_2, \dots, M_n$ с массами $m_1, m_2, \dots, m_n$ относительно точки O называется сумма моментов инерции всех этих точек: $I_O = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$, где $r_i = d(O, M_i)$.

Аналогично определяется момент инерции системы материальных точек $M_1, M_2, \dots, M_n$ с массами $m_1, m_2, \dots, m_n$ относительно оси l ,

$$I_l = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2,$$

где r_i — расстояние от точки M_i до оси l .

Определим момент инерции пластины G с плотностью $\rho(x, y)$ относительно точки O — начала прямоугольных декартовых координат.

Рассмотрим произвольное разбиение $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_n$. Выберем произвольно в каждой части G_i точку $M_i(\xi_i, \eta_i)$. Как и выше, считаем, что масса G_i приближенно равна $\rho(M_i)\Delta S_i$, где ΔS_i — площадь G_i , и сосредоточена в точке M_i . Так как $r_i = d(O, M_i) = \sqrt{\xi_i^2 + \eta_i^2}$, то момент инерции этой системы точек относительно начала координат O выразится так:

$$\bar{I}_O = \sum_{i=1}^n r_i^2 m_i = \sum_{i=1}^n (\xi_i^2 + \eta_i^2) \rho(M_i) \Delta S_i.$$

Моментом инерции пластины G относительно начала координат называется предел сумм $\bar{I}_O$ при неограниченном измельчении разбиения G , т. е. при $n \rightarrow \infty$ и $\lambda_n = \max_{1 \leq i \leq n} d(G_i) \rightarrow 0$. Поэтому если обозначить момент инерции G относительно O через I_O , то

$$\begin{aligned} I_O &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \lambda_n \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n (\xi_i^2 + \eta_i^2) \rho(M_i) \Delta S_i = \\ &= \iint_G (x^2 + y^2) \rho(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

Моменты инерции пластины G с плотностью $\rho(x, y)$ относительно координатных осей Ox и Oy определяются соответственно формула-

МИ

$$I_x = \iint_G y^2 \rho(x, y) dx dy,$$

$$I_y = \iint_G x^2 \rho(x, y) dx dy.$$

Следовательно,

$$I_O = I_x + I_y.$$

ПРИМЕР 1.6.6. Найти момент инерции относительно оси Ox однородной пластины G , ограниченной линиями

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1, \quad x = 0, \quad y = 0.$$

Однородность G означает, что плотность постоянна, т. е.

$$\rho(x, y) = \rho_0$$

при всех $(x, y) \in G$, где $\rho_0 > 0$ — постоянное число. По формуле находим

$$\begin{aligned} I_x &= \rho_0 \iint_G y^2 dx dy = \rho_0 \int_0^2 dx \int_0^{3-\frac{3}{2}x} y^2 dy = \\ &= \frac{\rho_0}{3} \int_0^2 \left(3 - \frac{3}{2}x\right)^3 dx = -\frac{2}{9}\rho_0 \int_0^2 \left(3 - \frac{3}{2}x\right)^3 d\left(3 - \frac{3}{2}x\right) = \\ &= -\frac{2}{9}\rho_0 \frac{1}{4} \left(3 - \frac{3}{2}x\right)^4 \Big|_0^2 = \frac{9}{2}\rho_0. \end{aligned}$$

§ 1.7. Тройные интегралы

1.7.1. Определение тройного интеграла, его свойства, вычисление

Построение тройного интеграла и рассмотрение его свойств производится в точности по той же схеме, что и для двойного интеграла. Этим и объясняется краткость нашего дальнейшего изложения.

Множеством, по которому интегрируется функция трех переменных, будет трехмерная область. Мы далее считаем, что границы рассматриваемых областей — либо гладкие, либо кусочно-гладкие поверхности. Напомним, что поверхность гладкая, если в каждой ее точке существует касательная плоскость, непрерывно меняющаяся при непрерывном движении точки касания по поверхности. Кусочно-гладкая поверхность — это поверхность, состоящая из конечного числа гладких кусков. Плоскость и сфера — это гладкие поверхности, а поверхность куба — кусочно-гладкая поверхность.

Пусть V — некоторая ограниченная замкнутая область в пространстве и $u = f(x, y, z)$ — функция, ограниченная на V . Разобьем V произвольно на n частей $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_n$, не имеющих попарно общих внутренних точек. Присоединяя к каждой части V_i точки ее границы, мы считаем, что все части V_i — замкнутые области. Обозначим через ΔV_i объем V_i , через $d(V_i)$ — диаметр V_i , т. е. $d(V_i) = \max_{M, N \in V_i} d(M, N)$, где $d(M, N)$ — расстояние между точками M и N .

Наибольший из диаметров $d(V_i)$ обозначим через λ_n и будем называть мелкостью разбиения области V .

Выберем в каждой части V_i произвольно точку $M_i(\xi_i, \eta_i, \chi_i)$ и составим сумму

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \chi_i) \Delta V_i = \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta V_i.$$

Сумма S_n называется интегральной суммой для функции

$$u = f(x, y, z)$$

в области V .

Определение 1.7.1. Если существует конечный предел

$$I = \lim_{\lambda_n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta V_i,$$

не зависящий от способов разбиения области V на части и от выбора точек $M_i \in V_i$, то он называется тройным интегралом от функции f по области V и обозначается

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz, \text{ или } \iiint_V f(x, y, z) dV, \text{ или } \iiint_V f dV.$$

Уточнить понятие предела интегральных сумм можно точно так же, как и при определении определенного интеграла.

Терминология для двойных и тройных интегралов аналогична. Выражение $dV = dx dy dz$ называется элементом объема.

Так же как для определенных и двойных интегралов, можно показать, что интегрируемая функция необходимо ограничена, хотя ограниченности недостаточно для интегрируемости. Последнее показывается построением примера ограниченной неинтегрируемой функции. Пример такой функции строится так же, как это было сделано для двойного интеграла.

Как и ранее, при рассмотрении определенных и двойных интегралов мы не будем углубляться в изучении вопроса об условиях интегрируемости функций, ограничимся тем, что выделим класс интегрируемых функций, вполне достаточный для почти всех приложений тройных интегралов.

Если функция ограничена на ограниченной замкнутой области и непрерывна на ней всюду, за исключением конечного числа гладких или кусочно-гладких поверхностей или кривых, то эта функция интегрируема по данной области. В частности, функция непрерывная в ограниченной замкнутой области всегда интегрируема по этой области.

Свойства линейности и аддитивности для тройного интеграла формулируются в точности так же, как и для двойного.

Тройной интеграл от единицы равен объему области интегрирования. Доказывается это свойство так же, как и аналогичное свойство для двойного интеграла. Теорема о среднем для тройного интеграла выглядит следующим образом

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = f(x_0, y_0, z_0) v,$$

где v — объем V , (x_0, y_0, z_0) — некоторая точка из V .

Формулировки свойств, связанных с оценками интегралов, получаются из формулировок для двойных интегралов заменой их на тройные.

Обратимся к вычислению тройных интегралов. Нам понадобятся области специального вида.

Область V называется нормальной, относительно оси Oz , если она ограничена снизу поверхностью $z = \varphi(x, y)$, сверху — поверхностью $z = \psi(x, y)$, $\varphi(x, y) \leq \psi(x, y)$ при $(x, y) \in G$, где G — проекция V на плоскость xOy , а с боков — цилиндрической поверхностью с образующими параллельными оси Oz и проходящими через границу G .

Аналогично определяются области нормальные относительно осей Ox и Oy .

Теорема 1.7.1 (вычисление тройного интеграла). Пусть V — нормальная относительно оси Oz замкнутая область, т. е.

$$V = \{(x, y, z) : (x, y) \in G, \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\},$$

функция $f(x, y, z)$ интегрируема по V . Тогда функция

$$I(x, y) = \int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz$$

интегрируема по G и справедливы равенства

$$\begin{aligned} \iiint_V f(x, y, z) dv &= \iint_G I(x, y) dxdy = \\ &= \iint_G \left(\int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dxdy. \end{aligned}$$

Доказательство теоремы мы опускаем.

Если область G нормальна относительно оси Oy :

$$G = \{(x, y) : a \leq x \leq b, h(x) \leq y \leq g(x)\},$$

то, расписывая интеграл по G как повторный, мы получим

$$\iiint_V f(x, y, z) dv = \int_a^b \left(\int_{h(x)}^{g(x)} \left(\int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$$

Аналогично расписываются интегралы по областям нормальным относительно осей Ox и Oy . Отметим, что на порядок расстановки в повторном интеграле интегралов по переменным влияют как область интегрирования, так и подынтегральная функция.

ПРИМЕР 1.7.1.

1) Вычислить интеграл

$$I = \iiint_V y^2 z \sin(xyz) \, dv,$$

где V — параллелепипед,

$$V = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 1\}.$$

Здесь удобнее расставить порядок интегрирования следующим образом:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 dy \int_0^1 dz \int_0^1 y^2 \sin(xyz) \, dx = \\ &= \int_0^2 dy \int_0^1 \left(-y \cos(xyz) \Big|_{x=0}^{x=1} \right) dz = \int_0^2 dy \int_0^1 (y - y \cos(yz)) \, dz = \\ &= \int_0^2 (yz - \sin(yz)) \Big|_{z=0}^{z=1} dy = \int_0^2 (y - \sin y) \, dy = \\ &= \left(\frac{y^2}{2} + \cos y \right) \Big|_0^2 = 1 + \cos 2. \end{aligned}$$

2) Вычислить интеграл

$$I = \iiint_V y \cos(x+z) \, dv,$$

где V — область, ограниченная цилиндром $y = \sqrt{x}$ и плоскостями $y = 0$, $z = 0$, $x + z = \frac{\pi}{2}$.

Сведем интеграл I к двойному согласно теореме.

$$I = \iint_G \left(\int_0^{\pi/2-x} y \cos(x+z) \, dz \right) dx dy,$$

где

$$G = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$$

— проекция тела V на плоскость xOy . Вычисляем интеграл по z , а затем — двойной интеграл по G .

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_G y \left(\sin(x+z) \Big|_{z=0}^{z=\frac{\pi}{2}-x} \right) dx dy = \iint_G y(1 - \sin x) dx dy = \\
 &= \int_0^{\sqrt{\pi/2}} dy \int_{y^2}^{\pi/2} y(1 - \sin x) dx = \int_0^{\sqrt{\pi/2}} y \left[(x + \cos x) \Big|_{y^2}^{\pi/2} \right] dy = \\
 &= \int_0^{\sqrt{\pi/2}} \left(\frac{\pi}{2}y - y^3 - y \cos y^2 \right) dy = \left(\frac{\pi}{4}y^2 - \frac{y^4}{4} \right) \Big|_0^{\sqrt{\pi/2}} - \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{\pi/2}} \cos y^2 dy^2 = \frac{\pi^2}{16} - \frac{\sin y^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{\pi/2}} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

1.7.2. Замена переменных в тройном интеграле

В пространстве отображение одной области на другую осуществляется с помощью преобразования, задаваемого системой уравнений:

$$\begin{cases} x = x(u, v, w); \\ y = y(u, v, w); \\ z = z(u, v, w). \end{cases} \quad (1.7.1)$$

Эта система уравнений иногда называется преобразованием координат. Когда точка (u, v, w) пробегает область Ω , точка (x, y, z) пробегает некоторую область V .

Если функции $x(u, v, w)$, $y(u, v, w)$, $z(u, v, w)$ имеют все первые частные производные, то определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

называется якобианом отображения и обозначается

$$J(u, v, w), \quad \text{или} \quad \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}.$$

Напомним, что отображение называется взаимнооднозначным, если из $(u_1, v_1, w_1) \neq (u_2, v_2, w_2)$ следует, что соответствующие точки (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) из V различны.

Теорема 1.7.2 (замена переменных в тройном интеграле). Если отображение (1.7.1) взаимнооднозначно отображает область $\Omega \subset uvwO$ на область $V \subset xyzO$, причем, функции $x(u, v, w)$, $y(u, v, w)$, $z(u, v, w)$ имеют в Ω ограниченные непрерывные первые частные производные и якобиан $J(u, v, w)$ отличен от нуля всюду в Ω , и если функция $f(x, y, z)$ интегрируема по V , то справедлива формула замены переменных в тройном интеграле

$$\begin{aligned} \iiint_G f(x, y, z) dx dy dz &= \\ &= \iiint_{\Omega} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |J(u, v, w)| du dv dw. \end{aligned}$$

Доказательство теоремы мы не приводим.

В приложениях тройных интегралов наиболее употребительны цилиндрические и сферические координаты (рис. 1.11).

Цилиндрические координаты. В этой системе координат положение точки M пространства определяется полярными координатами r и φ точки M' — проекции точки M на плоскость xOy и аппликатой z (рис. 1.11,а). Числа r , φ , z называются цилиндрическими координатами точки M , причем $0 \leq r \leq \infty$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ (или $-\pi < \varphi \leq \pi$), z — любое число.

Ясно, что $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = z$. Вычисляем якобиан данного преобразования

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, z)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -r \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

Формула замены переменных будет в данном случае иметь вид

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) r dr d\varphi dz,$$

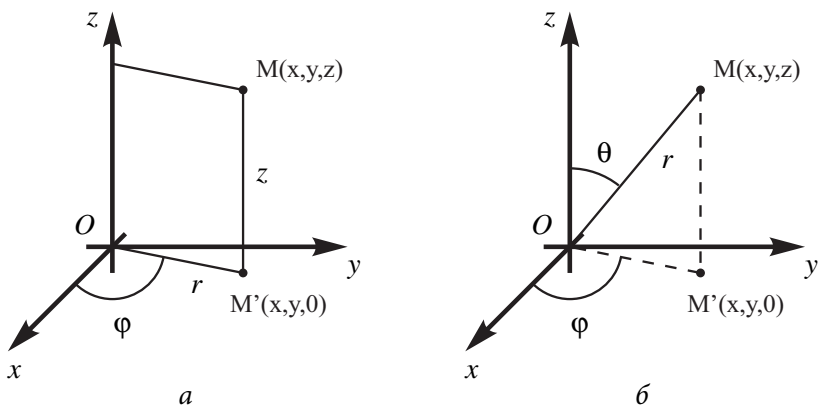


Рис. 1.11

где Ω — область пробегаемая точкой (r, φ, z) , когда соответствующая точка (x, y, z) пробегает область V .

ПРИМЕР 1.7.2. Вычислить интеграл

$$I = \iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz,$$

где V — область, ограниченная поверхностями $2z = x^2 + y^2$, $z = 2$.

Переходим к цилиндрическим координатам

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = z, \end{cases}$$

$|J| = r$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $0 \leq r \leq 2$. Поясним последнее неравенство. Проекцией V на плоскость xOy будет круг

$$G = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Область V задается неравенствами $\frac{x^2 + y^2}{2} \leq z \leq 2$ при $(x, y) \in G$. Подставляя в неравенства цилиндрические координаты, мы и полу-

чаем $\frac{r^2}{2} \leq z \leq 2$. Итак,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 dr \int_{r^2/2}^2 r^2 \cdot r dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r^3 \left(2 - \frac{r^2}{2}\right) dr = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^4}{2} - \frac{r^6}{12} \right) \Big|_0^2 d\varphi = 2\pi \cdot \left(8 - \frac{16}{3}\right) = \frac{16}{3}\pi. \end{aligned}$$

Сферические координаты. В пространстве, где уже есть декартова прямоугольная система координат, положение точки M можно определить с помощью следующей тройки чисел. Пусть r — это расстояние от точки M до начала координат O , φ — угол между положительным направлением оси Ox и вектором OM' , где M' — проекция точки M на плоскость xOy , и пусть θ — это угол между осью Oz и вектором OM (рис. 1.11,б). Ясно, что $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ (или $-\pi < \varphi \leq \pi$), $0 \leq \theta \leq \pi$. Числа r , φ , θ однозначно определяют положение точки в пространстве и называются сферическими координатами точки M .

Легко выразить x , y , z через r , φ , θ

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \sin \theta, \\ y = r \sin \varphi \sin \theta, \\ z = r \cos \theta. \end{cases}$$

Вычислим якобиан этого преобразования

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, \theta)} &= \begin{vmatrix} \cos \varphi \sin \theta & \sin \varphi \sin \theta & \cos \theta \\ -r \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \sin \theta & 0 \\ r \cos \varphi \cos \theta & r \sin \varphi \cos \theta & -r \sin \theta \end{vmatrix} = \\ &= -r^2 \cos^2 \varphi \sin^3 \theta - r^2 \sin^2 \varphi \sin \theta \cos^2 \theta - \\ &\quad - r^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \theta \sin \theta - r^2 \sin^2 \theta \sin^3 \theta = \\ &= -r^2 \sin^3 \theta - r^2 \cos^2 \theta \sin \theta = -r^2 \sin \theta. \end{aligned}$$

Формула перехода к сферическим координатам в тройном инте-

грале имеет вид

$$\begin{aligned} \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz &= \\ &= \iiint_{\Omega} f(r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \cos \theta, r \cos \theta) r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta, \end{aligned}$$

где Ω — область изменения переменных r, φ, θ .

ПРИМЕР 1.7.3. Вычислить интеграл

$$I = \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz,$$

где V — это шар $x^2 + y^2 + z^2 \leq y$.

Выделяя полный квадрат по y , видим, что V — это шар

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + z^2 \leq \frac{1}{4}$$

радиуса $R = 1/2$ с центром в точке $C(0, 1/2, 0)$. Подставим выражение x, y, z через сферические координаты в неравенство $x^2 + y^2 + z^2 \leq y$. Получим $r^2 \leq r \sin \varphi \sin \theta$, или, $r \leq \sin \varphi \sin \theta$. Мы получили задание нашего шара в сферических координатах. Ясно, что $0 \leq r \leq \sin \varphi \sin \theta$,

$0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq \pi$. Вычисляем интеграл

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^\pi d\varphi \int_0^\pi d\theta \int_0^{\sin \varphi \sin \theta} r \cdot r^2 \sin \theta dr = \\
 &= \int_0^\pi d\varphi \int_0^\pi \sin \theta \left(\frac{r^4}{4} \Big|_0^{\sin \varphi \sin \theta} \right) d\theta = \frac{1}{4} \int_0^\pi d\varphi \int_0^\pi \sin^4 \varphi \cdot \sin^5 \theta d\theta = \\
 &= \frac{1}{4} \int_0^\pi \left(\frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \right)^2 d\varphi \int_0^\pi [-(1 - \cos \theta)^2] d\cos \theta = \\
 &= -\frac{1}{4} \int_0^\pi \left(\frac{1}{4} - \frac{\cos 2\varphi}{2} + \frac{1 + \cos 4\varphi}{8} \right) d\varphi \times \\
 &\quad \times \int_0^\pi (1 - 2\cos^2 \theta + \cos^4 \theta) d\cos \theta = \\
 &= -\frac{1}{4} \left(\frac{\varphi}{4} - \frac{\sin 2\varphi}{4} + \frac{\varphi}{8} + \frac{\sin 4\varphi}{32} \right) \Big|_0^\pi \times \\
 &\quad \times \left(\cos \theta - \frac{2}{3} \cos^3 \theta + \frac{\cos^5 \theta}{5} \right) \Big|_0^\pi = \frac{\pi}{40}.
 \end{aligned}$$

1.7.3. Приложения тройных интегралов

Вычисление объемов. Основанием для такого применения тройного интеграла служит формула

$$\iiint_V dx dy dz = v,$$

где v — объем V .

ПРИМЕР 1.7.4. Вычислить объем тела V , ограниченного поверхностями $z = 6 - x^2 - y^2$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Тело V ограничено снизу конусом $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, а сверху — параболоидом $z = 6 - x^2 - y^2$. Вычислять объем здесь удобнее с использованием цилиндрических координат

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z, \quad |J| = r,$$

$$v = \iiint_V dx dy dz = \iiint_{\Omega} r dr d\varphi dz.$$

Из $6 - x^2 - y^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$ следует, что $6 - r^2 = r$, или $r^2 + r - 6 = 0$. Отсюда находим $r = 2$ — уравнение окружности ($x^2 + y^2 = 4$) — границы области G — проекции V на плоскость xOy . Переходим к повторному интегралу в цилиндрических координатах и вычисляем объем

$$\begin{aligned} v &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 dr \int_r^{6-r^2} r dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (6r - r^3 - r^2) dr = \\ &= 2\pi \left(3r^2 - \frac{r^4}{4} - \frac{r^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \frac{32}{3}\pi. \end{aligned}$$

Применение тройного интеграла в механике. Вывод следующих формул вполне аналогичен выводу соответствующих формул для плоских материальных пластинок. Поэтому вывод формул мы опускаем.

Если $\rho(x, y, z)$ — объемная плотность вещества, распределенного в области V , то масса V вычисляется по формуле

$$m = \iiint_V \rho(x, y, z) dv.$$

Координаты центра тяжести вычисляются по формулам:

$$x_C = \frac{1}{m} \iiint_V x \rho(x, y, z) dv;$$

$$y_C = \frac{1}{m} \iiint_V y \rho(x, y, z) dv;$$

$$z_C = \frac{1}{m} \iiint_V z \rho(x, y, z) dv.$$

Моменты инерции области V относительно координатных осей Ox , Oy , Oz и начала координат O определяются соответственно фор-

мулами:

$$I_x = \iiint_V (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dv;$$

$$I_y = \iiint_V (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) dv;$$

$$I_z = \iiint_V (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dv;$$

$$I_O = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dv.$$

Статические моменты относительно координатных плоскостей xOy , xOz , yOz тела V вычисляются по формулам

$$M_{xy} = \iiint_V z \rho(x, y, z) dv;$$

$$M_{xz} = \iiint_V y \rho(x, y, z) dv;$$

$$M_{yz} = \iiint_V x \rho(x, y, z) dv.$$

Таким образом, формулы для вычисления координат центра тяжести можно записать в следующем виде

$$x_C = \frac{M_{yz}}{m}, \quad y_C = \frac{M_{xz}}{m}, \quad z_C = \frac{M_{xy}}{m},$$

где m — масса тела V .

ПРИМЕР 1.7.5.

1) Вычислить массу тела V , ограниченного поверхностями $2x + z = 4$, $x + z = 2$, $y^2 = 2x$ ($y > 0$), если плотность $\rho(x, y, z) = y$.

Вычисляем

$$m = \iiint_V y dx dy dz = \iint_G \left(\int_{2-x}^{4-2x} y dz \right) dx dy = \iint_G y(2-x) dx dy,$$

где G — проекция V на плоскость xOy . Вычисляем двойной интеграл

$$\begin{aligned} m &= \iint_G y(2-x) dx dy = \int_0^2 f dy \int_{y^2/2}^2 y(2-x) dx = \\ &= \int_0^2 y \left(\left(2x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{y^2/2}^2 \right) dy = \int_0^2 y \left(2 - y^2 + \frac{y^4}{8} \right) dy = \\ &= \left(y^2 - \frac{y^4}{4} + \frac{y^6}{48} \right) \Big|_0^2 = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

2) Найти момент инерции относительно оси Oz однородного тела, ограниченного поверхностями $z = 4x$, $x^2 + y^2 = 2x$, $z = 0$.

Однородность означает, что плотность $\rho(x, y, z) = \rho_0$ — постоянная величина.

Для вычисления интеграла $I_z = \iiint_V (x^2 + y^2) \rho_0 dx dy dz$ используем цилиндрические координаты $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = z$, $|J| = r$. Тогда

$$\begin{aligned} I_z &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} r dr \int_0^{2\sqrt{r \cos \varphi}} r^2 \rho_0 dz = \\ &= 2\rho_0 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} r^{2/7} \sqrt{\cos \varphi} dr = \\ &= \frac{4}{9} \rho_0 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos \varphi} \left(r^{9/2} \Big|_0^{2 \cos \varphi} \right) d\varphi = \\ &= \frac{2^{13/2}}{9} \rho_0 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^5 \varphi d\varphi = \frac{\sqrt{2^{13}}}{9} \rho_0 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \sin^2 \varphi)^2 d\sin \varphi = \\ &= \frac{\sqrt{2^{13}}}{9} \rho_0 \left(\sin \varphi - \frac{2}{3} \sin^3 \varphi + \frac{\sin^5 \varphi}{5} \right) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\sqrt{2^{21}}}{135} \rho_0. \end{aligned}$$

Глава 2

Криволинейные интегралы

§ 2.1. Криволинейные интегралы 1-го рода

2.1.1. Вектор-функции одного переменного

В этом пункте мы рассмотрим векторные функции на плоскости или в пространстве, где введены декартовы прямоугольные координаты. На плоскости координаты будем обозначать x и y , в пространстве — x, y, z .

На плоскости xOy рассмотрим канонический базис $\mathbf{i}, \mathbf{j}$, в пространстве — базис $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. Любой вектор $\mathbf{a}$ на плоскости можно записать в виде $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j}$ или только координатами $\mathbf{a} = \{a_x, a_y\}$. В пространстве любой вектор $\mathbf{a}$ представим в виде $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$ или $\mathbf{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$.

Определение 2.1.1. Если каждому значению $t \in [\alpha, \beta]$ соответствует определенный вектор $\mathbf{r}(t)$, то $\mathbf{r}(t)$ называется векторной функцией скалярного аргумента t , или, короче, вектор-функцией.

Мы будем рассматривать свободные векторы, если не сказано что-то иное. Напомним, что свободные векторы — это такие векторы, которые остаются равными, если имеют равные модули и одинаковые направления.

Если вектор $\mathbf{r}(t)$ отложить от начала координат, то его конец при изменении параметра t от α до β будет описывать некоторую линию.

Линия Γ , описываемая концом $\mathbf{r}(t)$, называется годографом вектор-функции $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Начало координат называется при этом полюсом годографа.

Если у вектора $\mathbf{r}(t)$ при изменении параметра t меняется только модуль, то его годографом будет луч, исходящий из полюса, или некоторая часть этого луча. Если модуль вектора $\mathbf{r}(t)$ постоянен ($|\mathbf{r}(t)| = C = \text{const}$), то меняется только направление $\mathbf{r}(t)$. В этом случае, если $\mathbf{r}(t)$ — это вектор на плоскости, то годограф вектор-функции есть либо окружность $x^2 + y^2 = C^2$, где $C = |\mathbf{r}(t)|$, либо часть этой окружности. В пространстве в этом случае мы получаем линию на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = C^2$.

Определение 2.1.2. Вектор $\mathbf{r}_0$ называется пределом вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ при $t \rightarrow t_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что как только $|t - t_0| < \delta$, так сразу выполняется неравенство $|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0| < \varepsilon$.

Другими словами, $\mathbf{r}_0$ — предел $\mathbf{r}(t)$ при $t \rightarrow t_0$, если

$$\lim_{t \rightarrow t_0} |\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0| = 0.$$

Здесь записан предел скалярной функции одной переменной.

Обозначим предел вектор-функции

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}(t).$$

Стремление вектора $\mathbf{r}(t)$ к вектору $\mathbf{r}_0$ при $t \rightarrow t_0$ эквивалентно тому, что координатные функции $\mathbf{r}(t)$ стремятся при $t \rightarrow t_0$ к соответствующим координатам вектора $\mathbf{r}_0$. Точнее, справедлива

Теорема 2.1.1. Пусть $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$, $\mathbf{r}_0 = \{a, b, c\}$. Тогда равенство $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0$ будет справедливо в том и только в том случае, если одновременно будут выполняться три равенства

$$\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = a, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = b, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} z(t) = c.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как

$$\begin{aligned} |x(t) - a| &= \sqrt{(x(t) - a)^2} \leq \\ &\leq \sqrt{(x(t) - a)^2 + (y(t) - b)^2 + (z(t) - c)^2} = |\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0|, \end{aligned}$$

то из $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0$ следует $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = a$. Аналогично показывается, что из $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0$ следуют равенства $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = b$, $\lim_{t \rightarrow t_0} z(t) = c$.

Пусть теперь координатные функции вектора $\mathbf{r}(t)$ стремятся при $t \rightarrow t_0$ к координатам вектора $\mathbf{r}_0$. Но тогда из неравенства

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0| &\leq \sqrt{(x(t) - a)^2 + (y(t) - b)^2 + (z(t) - c)^2} \leq \\ &\leq |x(t) - a| + |y(t) - b| + |z(t) - c| \end{aligned}$$

следует, что $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0$. Тем самым теорема полностью доказана.

Определение 2.1.3. Вектор-функция $\mathbf{r}(t)$ называется непрерывной в точке t_0 , если выполняется $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0)$.

Вектор функция $\mathbf{r}(t)$ называется непрерывной на отрезке $[\alpha, \beta]$, если она непрерывна в каждой точке отрезка.

Из теоремы 2.1.1 и определения непрерывности вектор-функции следует, что вектор-функция $\mathbf{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$ будет непрерывна тогда и только тогда, когда непрерывными будут все координатные функции вектора $\mathbf{r}(t)$, т.е. функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

Определение 2.1.4. Производной вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ в точке t_0 называется предел, если он существует,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)}{t - t_0}.$$

Производная вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ обозначается либо $\mathbf{r}'(t)$, либо $\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t)$. Таким образом,

$$\mathbf{r}'(t_0) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)}{t - t_0}.$$

Положим $t - t_0 = \Delta t$ и $\mathbf{r}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}(t_0) = \Delta \mathbf{r}$. Тогда можно записать

$$\mathbf{r}'(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}.$$

Выясним геометрический смысл производной вектор-функции (рис. 2.1).

Пусть Γ — годограф вектор-функции $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, т.е. линия, описываемая концом вектора $\mathbf{r}(t)$, отложенного от начала координат. Пусть M_0 — точка на Γ , соответствующая значению параметра t_0 , т.е. $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0) = \overrightarrow{OM_0}$ — радиус-вектор точки M_0 . Пусть M — переменная точка Γ , и $\overrightarrow{OM} = \mathbf{r}(t)$ — ее радиус-вектор. Тогда вектор $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}(t_0)$, где $\Delta t = t - t_0$, — направляющий вектор секущей, проходящий через точки M_0 и M .

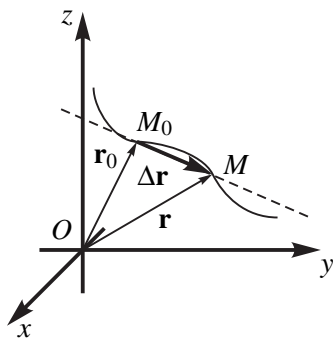


Рис. 2.1

При стремлении точки M по Γ к точке M_0 секущая поворачивается и стремится занять положение касательной к Γ в точке M_0 . Так как вектор $\Delta \mathbf{r}$ параллелен вектору $\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$, то вектор $\mathbf{r}'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$ направлен параллельно касательной. В этом и заключается геометрический смысл производной вектор-функции. Мы показали, что производная $\mathbf{r}'(t_0)$ — это направляющий вектор касательной, проведенной к Γ в точке M_0 , для которой $\mathbf{r}(t_0)$ является радиус-вектором.

Из теоремы 2.1.1 следует, что

$$\mathbf{r}'(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \left\{ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} \right\} = \{x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\}.$$

Если мы рассматриваем вектор-функцию на плоскости, то $\mathbf{r}(t) = \{x(t), y(t)\}$, $\mathbf{r}'(t) = \{x'(t), y'(t)\}$. Все рассуждения, проведенные для пространственной вектор-функции, остаются в силе.

ПРИМЕР 2.1.1. Найти уравнение касательной к кривой

$$\Gamma: x = t - \sin t, y = 1 - \cos t$$

в точке, где $t = \pi/2$.

Радиус-вектор точки кривой имеет вид

$$\mathbf{r}(t) = \{t - \sin t, 1 - \cos t\}.$$

Значит, вектор

$$\mathbf{r}'(t) = \{1 - \cos t, \sin t\}$$

будет направлен по касательной к Γ . Следовательно, вектор $\mathbf{r}'(\pi/2) = \{1, 1\}$ будет направляющим вектором касательной в точке, где $t = \pi/2$, т.е. в точке $M_0 = (\pi/2 - 1, 1)$ ($x(\pi/2) = \pi/2 - 1, y(\pi/2) = 1$). Составляем каноническое уравнение касательной

$$\frac{x - (\pi/2 - 1)}{1} = \frac{y - 1}{1}.$$

Отсюда находим

$$x - y - \pi/2 + 2 = 0$$

— уравнение касательной к Γ в точке M_0 .

Если производная $\mathbf{r}'(t)$ существует во всех точках интервала (α, β) , то говорят, что вектор-функция дифференцируема на интервале (α, β) .

Отметим некоторые свойства производной вектор-функции. Рекомендуем доказать их самостоятельно, используя свойства производных скалярных функций и равенство $\mathbf{r}'(t) = \{x'(t), y'(t), z'(t)\}$. Мы считаем, что вектор-функции $\mathbf{r}(t), \mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t)$ и скалярная функция $f(t)$ дифференцируемы на интервале (α, β) . Тогда справедливы следующие равенства:

$$1) (\mathbf{r}_1(t) \pm \mathbf{r}_2(t))' = \mathbf{r}_1'(t) \pm \mathbf{r}_2'(t);$$

$$2) [f(t)\mathbf{r}(t)]' = f'(t)\mathbf{r}(t) + f(t)\mathbf{r}'(t);$$

$$3) \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t)) = (\mathbf{r}_1'(t) \cdot \mathbf{r}_2(t)) + (\mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2'(t)) \text{ (дифференцирование скалярного произведения);}$$

$$4) \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2(t)) = \mathbf{r}_1'(t) \times \mathbf{r}_2(t) + \mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2'(t) \text{ (дифференцирование векторного произведения).}$$

2.1.2. Кривые на плоскости и в пространстве

Кривую на плоскости или в пространстве можно задать различными способами. Наиболее универсально параметрическое задание. Напомним, что на плоскости xOy параметрическое задание кривой Γ означает, что задана система параметрических уравнений $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, и при изменении параметра t от α до β точка $M(x(t), y(t))$ пробегает кривую Γ . В пространстве кривую Γ задает система из трех уравнений: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$.

Точки $A(x(\alpha), y(\alpha))$ и $B(x(\beta), y(\beta))$ называются концами кривой. Если $A \neq B$, то кривая называется незамкнутой, если $A = B$, то замкнутой, или контуром. Аналогичные определения даются и для пространственных кривых.

Далее мы будем рассматривать кривые на плоскости, но все рассуждения без труда переносятся и на пространственный случай.

Пусть кривая $\Gamma \subset xOy$ задана параметрически: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$. Если мы рассмотрим вектор-функцию $\mathbf{r}(t) = \{x(t), y(t)\} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, то годографом этой вектор-функции как раз и будет наша кривая Γ . Таким образом, параметрическое задание кривой эквивалентно заданию с помощью вектор-функции

$$\Gamma: \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \{x(t), y(t)\} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}, \quad \alpha \leq t \leq \beta.$$

Вектор $\mathbf{r}'(t) = \{x'(t), y'(t)\}$ направлен по касательной к Γ в точке $M(x(t), y(t))$ с радиус-вектором $\overrightarrow{OM} = \mathbf{r}(t)$ (рис 2.2).

Параметрическое задание кривой всегда не единственно. Например, верхнюю половину окружности $x^2 + y^2 = R^2$ можно задать так: $x = t$, $y = \sqrt{R^2 - t^2}$, $-R \leq t \leq R$. Но эту же линию можно задать и следующим образом: $x = R \cos t$, $y = R \sin t$, $0 \leq t \leq \pi$.

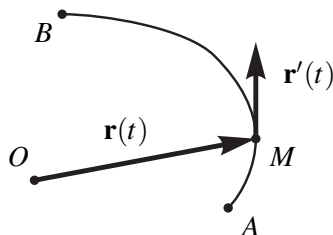


Рис. 2.2

Но для каждой кривой есть естественно связанный с ней способ задания. Пусть кривая Γ незамкнута и точки A и B — ее концы. Выберем один из концов, скажем A , за начало Γ , тогда второй конец — точка B будет концом Γ . Пусть $M \in \Gamma$ — текущая точка кривой. Обозначим через l длину дуги кривой Γ от начала A до точки M . Тогда число l вполне определяет положение точки M на кривой Γ . Если x и y — координаты точки M , то x и y являются функциями параметра l : $x = x(l)$, $y = y(l)$, $0 \leq l \leq L$, где L — длина всей кривой Γ .

Определение 2.1.5. Параметр l — длина дуги AM — части кривой Γ от начала A до точки $M \in \Gamma$ — называется натуральным параметром.

Параметрическое задание кривой Γ с помощью натурального параметра $x = x(l)$, $y = y(l)$, $0 \leq l \leq L$ называется натуральной параметризацией кривой Γ .

В векторной форме натуральная параметризация имеет вид $\mathbf{r} = \mathbf{r}(l) = \{x(l), y(l)\}$, $0 \leq l \leq L$.

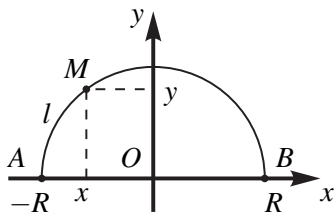


Рис. 2.3

Если кривая Γ замкнута, то выберем некоторую точку A на Γ и объявляем началом Γ (одновременно и концом кривой). Далее указываем, в каком направлении измеряется длина дуги от A до текущей точки M на кривой. И получаем натуральную параметризацию контура.

ПРИМЕР 2.1.2. Найдём натуральную параметризацию половины окружности (рис. 2.3)

$$\Gamma = \{(x, y) : -R \leq x \leq R, y = \sqrt{R^2 - x^2}\}.$$

Пусть $A(-R, 0)$ — начало Γ , $B(R, 0)$ — конец Γ . Если l — длина дуги AM от A до $M(x, y)$ то, как известно,

$$\begin{aligned} l &= \int_{-R}^x \sqrt{1 + (y'_x(x))^2} dx = \int_{-R}^x \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} dx = \\ &= \int_{-R}^x \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = R \arcsin \frac{x}{R} \Big|_{-R}^x = R \arcsin \frac{x}{R} + \frac{\pi}{2} R. \end{aligned}$$

Отсюда находим x : $\frac{l}{R} - \frac{\pi}{2} = \arcsin \frac{x}{R}$, значит, $x = -R \cos \frac{l}{R}$. Так как $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, то получаем $y = R \sin \frac{l}{R}$. Следовательно, мы нашли натуральную параметризацию половины окружности

$$\Gamma: x = -R \cos \frac{l}{R}, y = R \sin \frac{l}{R}, \quad 0 \leq l \leq \pi R.$$

Далее нам понадобится следующая теорема о касательном векторе к кривой, заданной с помощью натурального параметра.

Теорема 2.1.2. Пусть кривая Γ задана с помощью натурального параметра

$$\Gamma: \mathbf{r} = \mathbf{r}(l) = \{x(l), y(l)\}, \quad 0 \leq l \leq L$$

и пусть вектор-функция дифференцируема на $(0, L)$ и $\mathbf{r}'(t)$ непрерывна на $[0, L]$. Тогда

$$|\mathbf{r}'(l)| = 1$$

для всех $l \in (0, L)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A(x(0), y(0))$ — начало кривой Γ , l — длина дуги Γ от A до переменной точки $M \in \Gamma$. Если $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$ — некоторое параметрическое задание Γ , причем $A = (\varphi(\alpha), \psi(\alpha))$, то, как известно, для $M(\varphi(t), \psi(t))$

$$l = \int_{\alpha}^t \sqrt{(\varphi'(\tau))^2 + (\psi'(\tau))^2} d\tau. \quad (2.1.1)$$

Натуральная параметризация $\Gamma: x = x(l)$, $y = y(l)$, $0 \leq l \leq L$ является частным случаем параметрического задания. Рассматривая $t = l$, получаем из формулы (2.1.1)

$$l = \int_0^l \sqrt{(x'(s))^2 + (y'(s))^2} ds.$$

Дифференцируя это равенство по l , применяя при этом теорему о дифференцировании интеграла по переменному верхнему пределу, получаем

$$1 = \sqrt{(x'(l))^2 + (y'(l))^2} = |\mathbf{r}'(l)|.$$

Что и требовалось доказать.

Отметим, что все рассуждения, приведенные выше, остаются в силе и для пространственных кривых. В том числе и теорема 2.1.2.

2.1.3. Криволинейные интегралы 1-го рода

Рассмотрим подробно криволинейные интегралы на плоскости. Интегралы в пространстве рассматриваются аналогично и их рассмотрение будет кратким.

Пусть Γ — некоторая кривая на плоскости xOy и на кривой Γ задана функция $z = f(x, y)$. Разобьем кривую Γ произвольно на n частей точками $P_0, P_1, \dots, P_n$, где $P_0 = A$ — один конец Γ , а $P_n = B$ — другой (рис. 2.4). Через Δl_i обозначим длину дуги $P_{i-1}P_i$ кривой Γ — участка от точки P_{i-1} до точки P_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Через λ обозначим наибольшую из длин $\Delta l_1, \Delta l_2, \dots, \Delta l_n$, т.е.,

$$\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta l_i.$$

Произвольно выберем на дуге $P_{i-1}P_i$ точку $M_i(\xi_i, \eta_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ и составим сумму

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta l_i = \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta l_i.$$

S_n называется интегральной суммой для функции f по кривой Γ .

Определение 2.1.6. Если существует предел интегральных сумм S_n при неограниченном измельчении разбиения кривой Γ на части, т.е. при $\lambda \rightarrow 0$, не зависящий от выбора точек $M_i(\xi_i, \eta_i)$ и от способа разбиения Γ на части, то он называется криволинейным интегралом 1-го рода от функции $z = f(x, y)$ по кривой Γ и обозначается

$$\int_{\Gamma} f(x, y) dl.$$

Таким образом, можно записать

$$\int_{\Gamma} f(x, y) dl = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta l_i.$$

Заметим, что определение 2.1.6 вводит криволинейный интеграл 1-го рода не совсем строго. Строгое определение можно дать в точности так, как это было сделано для определенного интеграла. Мы не будем на этом останавливаться.

После определения криволинейного интеграла 1-го рода сразу возникает вопрос: когда этот интеграл существует? Мы ограничимся

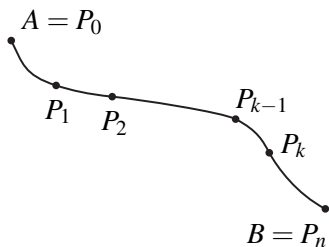


Рис. 2.4

случаями, когда криволинейный интеграл 1-го рода от функции по кривой заведомо существует и этих случаев вполне достаточно для большинства приложений.

Мы будем рассматривать криволинейный интеграл 1-го рода от функции $z = f(x, y)$ по гладким или кусочно-гладким кривым. Определения этих кривых были даны в предыдущих томах нашего курса. Далее, функции, интегрируемые по кривым, мы будем предполагать непрерывными на этих кривых. Если все перечисленное о кривых и функциях выполняется, то криволинейный интеграл 1-го рода существует.

В случае если кривая Γ — контур, т.е. замкнутая кривая, то начало и конец кривой совпадут, $A = B$. Но определение интеграла для контура ничем не отличается от определения интеграла для незамкнутой кривой.

Если кривая Γ имеет концами точки A и B , то часто пишут

$$\int_{\Gamma} f(x, y) dl = \int_{AB} f(x, y) dl.$$

Этим обозначением мы будем пользоваться часто.

Переходим к вычислению криволинейного интеграла 1-го рода. Сначала рассмотрим задание кривой с помощью натурального параметра.

Теорема 2.1.3. Пусть кривая Γ задана с помощью натуральной параметризации, $\Gamma: x = x(l), y = y(l), 0 \leq l \leq L$, и функция $z = f(x, y)$ определена и непрерывна на Γ . Тогда

$$\int_{\Gamma} f(x, y) dl = \int_0^L f(x(l), y(l)) dl,$$

где справа стоит определенный интеграл от функции

$$g(l) = f(x(l), y(l))$$

по отрезку $[0, L]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим разбиение $A = P_0, P_1, \dots, P_n = B$ кривой Γ на n частей, Δl_i — длина дуги $P_{i-1}P_i$ и выберем произвольно точки $M_i(\xi_i, \eta_i) \in P_{i-1}P_i$.

Разбиению кривой Γ на части соответствует разбиение отрезка $[0, L]$. Пусть точке P_i соответствует значение параметра l_i , тогда мы получаем разбиение отрезка $[0, L]: 0 = l_0 < l_1 < \dots < l_n = L$, точкам M_i соответствуют значения параметра l_i^* , $\xi_i = x(l_i^*)$, $\eta_i = y(l_i^*)$. Рассмотрим интегральную сумму для $z = f(x, y)$ на кривой Γ

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta l_i = \sum_{i=1}^n f(x(l_i^*), y(l_i^*)) \Delta l_i.$$

Мы видим, что S_n одновременно есть и интегральная сумма для функции $g(l) = f(x(l), y(l))$ по отрезку $[0, L]$. Поэтому, переходя к пределу при $\lambda \rightarrow 0$, мы получаем равенство

$$\int_{\Gamma} f(x, y) dl = \int_0^L f(x(l), y(l)) dl.$$

Что и требовалось доказать.

Доказанная теорема сводит криволинейный интеграл 1-го рода к определенному интегралу. Это удобно при рассмотрении свойств криволинейного интеграла 1-го рода, так как позволяет опираться на уже доказанные свойства определенного интеграла. Но для вычисления теорема мало что дает. Кривая может быть задана с помощью некоторых параметрических уравнений, и перейти от них к натуральной параметризации часто бывает довольно сложно технически. К счастью, этого и не нужно, как показывает следующая

Теорема 2.1.4. Пусть кривая Γ задана параметрически, $\Gamma: x = \varphi(t), y = \psi(t), \alpha \leq t \leq \beta$, причем, функции $\varphi(t), \psi(t)$ и их производные $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$. Тогда для всякой непрерывной на Γ функции $z = f(x, y)$ справедливо равенство

$$\int_{\Gamma} f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $M(x, y) \in \Gamma$ — текущая точка кривой, $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Пусть точка $A(\varphi(\alpha), \psi(\alpha))$ — начало Γ и l — длина дуги кривой от A до M . Тогда с помощью натурального параметра l можно параметрически задать кривую $\Gamma: x = x(l), y = y(l)$. Найдем длину

дути AM , считая, что точке M соответствует значение параметра t и значение натурального параметра l . Мы имеем

$$l = l(t) = \int_{\alpha}^t \sqrt{(\varphi'(\tau))^2 + (\psi'(\tau))^2} d\tau.$$

Мы имеем $x(l(t)) = \varphi(t)$, $y(l(t)) = \psi(t)$, так как это — координаты одной и той же точки M . По теореме о дифференцировании интеграла по переменному верхнему пределу мы имеем

$$l'(t) = \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}.$$

По теореме 2.1.3

$$\int_{\Gamma} f(x, y) dl = \int_0^L f(x(l), y(l)) dl.$$

Проводим в определенном интеграле в правой части замену переменной

$$l = l(t) = \int_{\alpha}^t \sqrt{(\varphi'(\tau))^2 + (\psi'(\tau))^2} d\tau.$$

Тогда мы получаем

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f(x, y) dl &= \int_{\alpha}^{\beta} f(x(l(t)), y(l(t))) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt. \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

Перепишем равенство теоремы 2.1.4 в векторной форме. Если $\mathbf{r}(t)$ — радиус-вектор точки $M \in \Gamma$, то $\mathbf{r}(t) = \{\varphi(t), \psi(t)\}$. Тогда

$$\mathbf{r}'(t) = \{\varphi'(t), \psi'(t)\}$$

и мы получаем, полагая $f(\varphi(t), \psi(t)) = f(\mathbf{r}(t))$,

$$\int_{\Gamma} f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(\mathbf{r}(t)) |\mathbf{r}'(t)| dt.$$

ПРИМЕР 2.1.3. Вычислим интеграл

$$\int_{\Gamma} xy dl,$$

где $\Gamma: x = t, y = t^2, 0 \leq t \leq 1$.

Найдем сначала dl

$$dl = \sqrt{1 + (2t)^2} dt = \sqrt{1 + 4t^2} dt.$$

По теореме 2.1.4 имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} xy dl &= \int_0^1 t^3 \sqrt{1 + 4t^2} dt = \left| \begin{array}{l} 1 + 4t^2 = s^2 \\ 4t dt = s ds \\ t = 0 \rightarrow s = 1 \\ t = 1 \rightarrow s = \sqrt{5} \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{4} \int_1^{\sqrt{5}} \frac{s^2 - 1}{4} s^2 ds = \frac{1}{16} \int_1^{\sqrt{5}} (s^4 - s^2) ds = \\ &= \frac{1}{16} \left(\frac{s^5}{5} - \frac{s^3}{3} \right) \Big|_1^{\sqrt{5}} = \frac{35\sqrt{5} + 1}{120}. \end{aligned}$$

Рассмотрим различные способы задания кривой на плоскости xOy и полученные формулы для вычисления криволинейного интеграла 1-го рода.

Если кривая Γ есть график функции $y = g(x)$, $a \leq x \leq b$, то за параметр можно взять переменную x . Тогда $dl = \sqrt{1 + (g'(x))^2} dx$ и мы получаем

$$\int_{\Gamma} f(x, y) dl = \int_a^b f(x, g(x)) \sqrt{1 + (g'(x))^2} dx.$$

ПРИМЕР 2.1.4. Вычислить интеграл

$$\int_{\Gamma} y dl,$$

где $\Gamma: y = e^x, 0 \leq x \leq \ln \sqrt{3}$.

Вычисляем

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma} y dl &= \int_0^{\ln \sqrt{3}} e^x \sqrt{1+e^{2x}} dx = \left| \begin{array}{l} e^x = \operatorname{tg} t \\ e^x dx = \frac{dt}{\cos^2 t} \\ x = 0 \rightarrow t = \frac{\pi}{4} \\ x = \ln \sqrt{3} \rightarrow t = \frac{\pi}{3} \end{array} \right| = \\
 &= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \operatorname{tg} t \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t} \frac{dt}{\cos^2 t} = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sin t}{\cos^4 t} dt = - \int_{\pi/4}^{\pi/3} \cos^{-4} t d \cos t = \\
 &= \frac{1}{3 \cos^3 t} \Big|_{\pi/4}^{\pi/3} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\cos^3 \pi/3} - \frac{1}{\cos^3 \pi/4} \right) = \\
 &= \frac{1}{3} (8 - 2\sqrt{2}) = \frac{2(4 - \sqrt{2})}{3}.
 \end{aligned}$$

Пусть кривая Γ задана в полярных координатах $\Gamma: r = r(\varphi), \alpha \leq \varphi \leq \beta$. Этот способ задания есть частный случай параметрического задания, так как $x = r(\varphi) \cos \varphi$, $y = r(\varphi) \sin \varphi$. В этом случае, как мы знаем (см. т. II, § 2.4),

$$dl = \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2} d\varphi.$$

Отсюда получаем формулу для вычисления интеграла

$$\int_{\Gamma} f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(r(\varphi) \cos \varphi, r(\varphi) \sin \varphi) \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2} d\varphi.$$

ПРИМЕР 2.1.5. Вычислить интеграл

$$\int_{\Gamma} x dl,$$

где $\Gamma: r = 1 + \cos \varphi, 0 \leq \varphi \leq \pi$.

Вычисляем dl

$$dl = \sqrt{(1 + \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi} d\varphi = \sqrt{2 + 2 \cos \varphi} d\varphi = 2 \left| \cos \frac{\varphi}{2} \right| d\varphi.$$

Поскольку $0 \leq \frac{\varphi}{2} \leq \frac{\pi}{2}$, то $\cos \frac{\varphi}{2} \geq 0$ и, следовательно,

$$dl = 2 \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma} x dl &= \int_0^{\pi} (1 + \cos \varphi) \cos \varphi \cdot 2 \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = \\
 &= 4 \int_0^{\pi/2} \cos^3 \frac{\varphi}{2} \left(2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} - 1 \right) d\varphi = \left| \begin{array}{l} \sin \frac{\varphi}{2} = t \\ \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = 2 dt \\ \varphi = 0 \rightarrow t = 0 \\ \varphi = \pi \rightarrow t = 1 \end{array} \right| = \\
 &= 8 \int_0^1 (1 - t^2)(2 - 2t^2 - 1) dt = 8 \int_0^1 (1 - 3t^2 + 2t^4) dt = \frac{16}{5}.
 \end{aligned}$$

2.1.4. Свойства криволинейного интеграла 1-го рода

Поскольку по теореме 2.1.3 криволинейный интеграл 1-го рода сводится к определенному интегралу, то многие свойства криволинейного интеграла 1-го рода обусловлены соответствующими свойствами определенного интеграла. Поэтому мы просто перечислим эти свойства:

1. $\int_{\Gamma} dl = L$, где L — длина кривой Γ .

2. Линейные свойства. Если функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ интегрируемы по кривой Γ , то $f(x, y) + g(x, y)$ и $Cf(x, y)$, где C — постоянная, также интегрируемы и выполняются равенства

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma} [f(x, y) + g(x, y)] dl &= \int_{\Gamma} f(x, y) dl + \int_{\Gamma} g(x, y) dl, \\
 \int_{\Gamma} Cf(x, y) dl &= C \int_{\Gamma} f(x, y) dl.
 \end{aligned}$$

3. Аддитивное свойство. Если кривая Γ есть объединение кривых $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m$, где любые Γ_i и Γ_j общими могут иметь только

концевые точки, то

$$\int_{\Gamma} f(x, y) dl = \sum_{j=1}^m \int_{\Gamma_j} f(x, y) dl.$$

4. Если $f(x, y) \geq 0$ на кривой Γ , то

$$\int_{\Gamma} f(x, y) dl \geq 0.$$

5. Если $f(x, y) \leq g(x, y)$ на кривой Γ , то

$$\int_{\Gamma} f(x, y) dl \leq \int_{\Gamma} g(x, y) dl.$$

6. Если $f(x, y)$ интегрируема по кривой Γ , то

$$\left| \int_{\Gamma} f(x, y) dl \right| \leq \int_{\Gamma} |f(x, y)| dl.$$

7. Если $|f(x, y)| \leq K$ при $(x, y) \in \Gamma$ и L — длина кривой Γ , то

$$\left| \int_{\Gamma} f(x, y) dl \right| \leq KL.$$

2.1.5. Кривые и криволинейные интегралы 1-го рода в пространстве

В пространстве кривую задают чаще всего параметрически. Это наиболее удобный способ задания, например для вычисления криволинейного интеграла.

Определение криволинейного интеграла 1-го рода для функции $u = f(x, y, z)$ по пространственной кривой Γ дословно повторяет определение этого интеграла для функции двух переменных по плоской кривой.

Если кривая Γ задана с помощью натуральной параметризации

$$x = x(l), \quad y = y(l), \quad z = z(l), \quad 0 \leq l \leq L,$$

то, как и в случае двух переменных, доказываем, что

$$\int_{\Gamma} f(x, y, z) dl = \int_0^L f(x(l), y(l), z(l)) dl.$$

Если кривая Γ задана с помощью некоторой параметризации

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta,$$

то

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f(x, y, z) dl &= \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2} dt. \end{aligned}$$

Если рассмотреть векторную форму задания кривой Γ

$$\mathbf{r}(t) = \{\varphi(t), \psi(t), \chi(t)\},$$

то последнее равенство переписывается в виде

$$\int_{\Gamma} f(x, y, z) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(\mathbf{r}(t)) |\mathbf{r}'(t)| dt,$$

где $f(\mathbf{r}(t)) = f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))$.

ПРИМЕР 2.1.6. *Вычислить интеграл*

$$\int_{\Gamma} (x - z) dl,$$

где Γ — один виток витой линии: $x = R \cos t$, $y = R \sin t$, $z = t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Вычислим сначала dl . Имеем

$$dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt = \sqrt{R^2 + 1} dt.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (x - z) dl &= \int_0^{2\pi} (R \cos t - t) \sqrt{R^2 + 1} dt = \\ &= \sqrt{R^2 + 1} \left(R \sin t - \frac{t^2}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = -2\pi^2 \sqrt{R^2 + 1}. \end{aligned}$$

2.1.6. Приложение криволинейного интеграла 1-го рода в геометрии и физике

Длина кривой. Если Γ — кривая на плоскости или в пространстве и L — длина Γ , то

$$\int_{\Gamma} dl = L.$$

ПРИМЕР 2.1.7. *Длина одного витка витой линии $x = R \cos t$, $y = R \sin t$, $z = t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, как следует из предыдущего примера 2.1.6, есть величина*

$$\int_{\Gamma} dl = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 + 1} dt = 2\pi \sqrt{R^2 + 1}.$$

Масса и координаты центра тяжести кривой. Если

$$\rho(x, y, z) \frac{\text{кг}}{\text{м}}$$

(или $\rho(x, y) \frac{\text{кг}}{\text{м}}$ на плоскости) — линейная плотность вещества, распределенного по кривой Γ , то масса m вещества вычисляется по формуле

$$m = \int_{\Gamma} \rho(x, y, z) dl$$

для пространственной кривой и

$$m = \int_{\Gamma} \rho(x, y) dl$$

для кривой на плоскости.

Если $M(x_0, y_0, z_0)$ — центр тяжести кривой ($M(x_0, y_0)$ — для кривой на плоскости), то

$$x_0 = \frac{1}{m} \int_{\Gamma} x \rho(x, y, z) dl,$$

$$y_0 = \frac{1}{m} \int_{\Gamma} y \rho(x, y, z) dl,$$

$$z_0 = \frac{1}{m} \int_{\Gamma} z \rho(x, y, z) dl$$

$(x_0 = \frac{1}{m} \int_{\Gamma} x \rho(x, y) dl, y_0 = \frac{1}{m} \int_{\Gamma} y \rho(x, y) dl$ — для кривой Γ на плоскости xOy).

ПРИМЕР 2.1.8. Найти массу кривой

$$\Gamma: y = \ln x, \quad \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8},$$

если плотность линии в каждой точке равна квадрату абсциссы точки.

Если $M(x, y)$ — точка на кривой Γ , то $\rho(x, y) = x^2$. Поэтому

$$\begin{aligned} m &= \int_{\Gamma} x^2 dl = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} x^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + x^2} x dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} x^2 + 1 = t^2 \\ x dx = t dt \\ x = \sqrt{3} \rightarrow t = 2 \\ x = \sqrt{8} \rightarrow t = 3 \end{array} \right| = \int_2^3 t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_2^3 = \frac{27 - 8}{3} = \frac{19}{3} \text{ кг.} \end{aligned}$$

§ 2.2. Криволинейные интегралы 2-го рода

2.2.1. Определение криволинейного интеграла 2-го рода и его вычисление

Интегралы по кривым от векторных полей играют очень важную роль во многих вопросах физики. С помощью таких интегралов вычисляется, например, работа, производимая силой $\mathbf{F}$ при перемещении материальной точки по некоторой кривой. Ниже мы остановимся на этом подробнее.

Интегралы по кривым от векторных полей рассматриваются по так называемым ориентированным кривым. Определим это понятие.

Если кривая Γ незамкнута, то у нее есть два конца, обозначим их A и B . Если один из концов кривой объявим началом кривой, а второй — концом кривой, то тем самым мы зададим направление движения по кривой или, как принято говорить, направление обхода кривой.

Определение 2.2.1. Если на кривой задано направление обхода, то такая кривая называется ориентированной.

Геометрически кривая — это линия, множество точек. Задавая направление обхода, мы из этого множества точек можем получить две ориентированные кривые с противоположным направлением обхода.

Если кривая замкнута, т.е. образован контур, то направление обхода задают исходя из конкретного вида контура. На плоскости для простых контуров (замкнутая линия без самопересечений) принято следующее соглашение. Направление обхода простого контура на плоскости называется положительным, если при обходе ограниченная часть плоскости, границей которой является контур, остается слева. Противоположное направление обхода называется отрицательным (рис. 2.5).

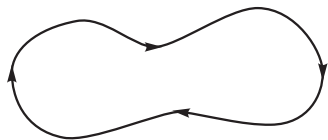


Рис. 2.5

Мы подробно изучим интегралы от векторных функций $\mathbf{F}(x, y) = \{P(x, y), Q(x, y)\} = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ по кривым на плоскости xOy . Интегралы от трехмерных векторных функций по пространственным кривым рассматриваются аналогично и поэтому их изучение будет кратким.

Векторную функцию двух независимых переменных

$$\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$$

(трех независимых переменных

$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k} —$$

в пространстве) далее будем называть векторным полем.

Пусть на плоскости xOy задана гладкая кривая Γ . Если $x = x(l)$, $y = y(l)$, $0 \leq l \leq L$ — натуральная параметризация Γ , то гладкость означает, что функции $x(l)$, $y(l)$ и их производные $x'(l)$ и $y'(l)$ непрерывны на отрезке $[0, L]$. Другими словами, вектор-функции $\mathbf{r}(l) = \{x(l), y(l)\}$ и $\mathbf{r}'(l) = \{x'(l), y'(l)\}$ непрерывны на $[0, L]$. За начало Γ мы возьмем точку $A(x(0), y(0))$.

Определение 2.2.2. Пусть на гладкой кривой Γ задано векторное поле $\mathbf{F}(x, y) = \{P(x, y), Q(x, y)\}$ и пусть $\mathbf{r}(l) = \{x(l), y(l)\}$, $0 \leq l \leq L$ — натуральная параметризация Γ . Тогда криволинейным интегралом 2-го рода от векторного поля $\mathbf{F}(x, y) = \{P(x, y), Q(x, y)\}$ по кривой Γ называется интеграл

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F} d\mathbf{l} = \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}' dl = \int_0^L \mathbf{F}(x(l), y(l)) \cdot \mathbf{r}'(l) dl.$$

В этой цепочке равенств первым стоит обозначение для криволинейного интеграла 2-го рода, вторым — криволинейный интеграл 1-го рода от скалярного произведения $\mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{r}'$. Вектор $\mathbf{r}'$, касательный к Γ , зависит от координат точки $(x, y) \in \Gamma$. Третьим в цепочке равенств стоит определенный интеграл от функции

$$g(l) = \mathbf{F}(x(l), y(l)) \cdot \mathbf{r}'(l)$$

по отрезку $[0, L]$ (см. теорему 2.1.3).

Определение 2.2.3. Если кривая Γ кусочно-гладкая и $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \dots \cup \Gamma_m$, где Γ_i — гладкие кривые и любые две кривые Γ_i и Γ_j могут иметь общими только свои концевые точки, то криволинейным интегралом 2-го рода от векторного поля $\mathbf{F}$ по кривой Γ называется сумма

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F}(x, y) d\mathbf{l} = \sum_{j=1}^m \int_{\Gamma_j} \mathbf{F}(x, y) d\mathbf{l}.$$

Если кривая Γ — контур, то за начало можно взять любую точку на Γ . Можно показать, что интеграл не зависит от выбора точки на контуре. Натуральный параметр l отсчитывается от начала в заданном направлении обхода Γ . Определение криволинейного интеграла 2-го рода по контуру ничем не отличается от определения криволинейного интеграла 2-го рода по незамкнутой кривой.

Далее мы всегда будем предполагать, что векторное поле $\mathbf{F}(x, y) = \{P(x, y), Q(x, y)\}$ непрерывно на Γ . Это эквивалентно тому, что обе координатные функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны на Γ . Непрерывность векторного поля на гладкой или кусочно-гладкой кривой гарантирует нам существование криволинейного интеграла 2-го рода. Так

что, рассматривая, скажем, свойства криволинейного интеграла 2-го рода, нет необходимости каждый раз говорить о его существовании.

Заметим, что во многих учебных пособиях криволинейный интеграл 2-го рода вводится для скалярных функций с помощью интегральных сумм. При этом по очереди рассматриваются проекции кривой на каждую координатную ось и разбиению кривой на части соответствует разбиение проекции кривой на координатную ось на соответствующие части. Мы определяем криволинейный интеграл 2-го рода сразу для векторного поля, используя криволинейный интеграл 1-го рода. При этом мы исходим из того, что, во-первых, такой способ введения криволинейного интеграла 2-го рода не доставляет значительных затруднений при изучении интеграла по сравнению с другими способами определения, во-вторых, в приложениях криволинейный интеграл 2-го рода — это всегда интеграл от векторного поля, именно в этом качестве он применяется в физике.

Рассмотрим некоторые формы записи криволинейного интеграла 2-го рода через координатные функции векторного поля.

По теореме 2.1.2 имеем $|\mathbf{r}'(l)| = 1$, $0 < l < L$, если l — натуральный параметр. Но тогда, как известно из векторной алгебры, $\mathbf{r}'(l) = \{\cos \alpha, \sin \alpha\}$, где α — это угол $(\widehat{\mathbf{r}'(l), Ox})$ и, очевидно, α зависит как от параметра l , так и от координат точки (x, y) . Но тогда мы получаем

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F}(x, y) d\mathbf{l} = \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}' dl = \int_{\Gamma} [P(x, y) \cos \alpha + Q(x, y) \sin \alpha] dl.$$

Величину $d\mathbf{l} = \mathbf{r}'(l) dl$ часто называют векторным элементом длины кривой.

Далее, из того что $\mathbf{r}'(l) = \{x'(l), y'(l)\} = \{\cos \alpha, \sin \alpha\}$, следует, что $dx = x'(l) dl = \cos \alpha dl$, $dy = y'(l) dl = \sin \alpha dl$. Но тогда мы можем записать интеграл в виде

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \mathbf{F}(x, y) d\mathbf{l} &= \int_{\Gamma} [P(x, y) \cos \alpha + Q(x, y) \sin \alpha] dl = \\ &= \int_{\Gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy. \end{aligned}$$

Обращаем внимание на то, что хотя в правой части стоит сумма интегралов, скобки тем не менее не ставятся. Приведенная форма

записи криволинейного интеграла 2-го рода является традиционной и, кроме того, отражает тот факт, что сумма $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ считается цельным подынтегральным выражением.

Отметим некоторые свойства криволинейного интеграла 2-го рода. Доказательства этих свойств мы не приводим, поскольку криволинейный интеграл 2-го рода сводится к криволинейному интегралу 1-го рода, и тогда свойства криволинейного интеграла 2-го рода есть следствия свойств криволинейного интеграла 1-го рода.

1. Линейные свойства криволинейного интеграла 2-го рода.

Если $\mathbf{F}_1 = \{P_1, Q_1\}$ и $\mathbf{F}_2 = \{P_2, Q_2\}$ — непрерывные векторные поля на кривой Γ , C_1 и C_2 — постоянные, то справедливо равенство

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} [C_1 \mathbf{F}_1(x, y) + C_2 \mathbf{F}_2(x, y)] d\mathbf{l} &= \\ &= C_1 \int_{\Gamma} \mathbf{F}_1(x, y) d\mathbf{l} + C_2 \int_{\Gamma} \mathbf{F}_2(x, y) d\mathbf{l}. \end{aligned}$$

2. Аддитивное свойство. Пусть Γ — гладкая или кусочно-гладкая кривая и $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \dots \cup \Gamma_k$, где у кривых Γ_i и Γ_j общими могут быть только концевые точки. Тогда справедливо равенство

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F} d\mathbf{l} = \sum_{j=1}^k \int_{\Gamma_j} \mathbf{F} d\mathbf{l}.$$

Свойства линейности и аддитивности присущи всем интегралам — и неопределенным, и определенным, и кратным, и криволинейным. Но есть свойства, присущие одним интегралам и не присущие другим. Таким свойством, отличающим криволинейный интеграл 1-го рода от интеграла 2-го рода, является зависимость от ориентации кривой.

Ограничимся случаем гладкой незамкнутой кривой с концами A и B . Обозначим через Γ^+ кривую Γ с направлением обхода от A к B , а через Γ^- — кривую Γ с противоположным направлением обхода.

Если l — натуральный параметр, отсчитываемый от A , а s — натуральный параметр, отсчитываемый от B , то $l + s = L$, где L — длина Γ .

Пусть $\mathbf{r}(l) = \{x(l), y(l)\}$ — параметризация Γ^+ , а $\rho(s) = \{\varphi(s), \psi(s)\}$ — параметризация Γ^- . Тогда $x(l) = \varphi(L-l)$, $y(l) = \psi(L-l)$.

Пусть $z = f(x, y)$ — функция, определенная на кривой Γ . Тогда по теореме 2.1.3

$$\int_{\Gamma^+} f(x, y) dl = \int_0^L f(x(l), y(l)) dl.$$

Сделаем в определенном интеграле замену переменной $l = L - s$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma^+} f(x, y) dl &= - \int_L^0 f(x(L-s), y(L-s)) ds = \\ &= \int_0^L f(\varphi(s), \psi(s)) ds = \int_{\Gamma^-} f(x, y) ds, \end{aligned}$$

что и означает независимость криволинейного интеграла 1-го рода от ориентации кривой Γ .

Рассмотрим теперь криволинейный интеграл 2-го рода. Справедлива следующая

Теорема 2.2.1. Если Γ^+ — это кривая Γ , ориентированная в направлении от начала A к концу B , а Γ^- — это кривая Γ , ориентированная в противоположном направлении, то

$$\int_{\Gamma^+} \mathbf{F} d\mathbf{l} = - \int_{\Gamma^-} \mathbf{F} d\mathbf{l}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\mathbf{r}(l) = \{x(l), y(l)\}$ — параметризация Γ^+ , а $\rho(s) = \{\varphi(s), \psi(s)\}$ — параметризация Γ^- , то в силу того, что $x(L-s) = \varphi(s)$, $y(L-s) = \psi(s)$, так как $x(l) = \varphi(s) = x$, $y(l) = \psi(s) = y$ — координаты точки $M(x, y)$ на кривой Γ и $l+s = L$, мы имеем $-x'(L-s) = \varphi'(s)$, $-y'(L-s) = \psi'(s)$, т.е. $-\mathbf{r}'(l) = \rho'(s)$. Поэтому,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma^+} \mathbf{F} d\mathbf{l} &= \int_{\Gamma} \mathbf{F}(x(l), y(l)) \cdot \mathbf{r}'(l) dl = \\ &= \int_0^L \mathbf{F}(x(l), y(l)) \cdot \mathbf{r}'(l) dl = \left| \begin{array}{l} l = L - s \\ dl = -ds \\ 0 \rightarrow L \\ L \rightarrow 0 \end{array} \right| = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_L^0 \mathbf{F}(x(L-s), y(L-s)) \cdot (-\rho'(s)) ds = \\
&= \int_0^L \mathbf{F}(\varphi(s), \psi(s)) \cdot \rho'(s) ds = - \int_{\Gamma^-} \mathbf{F} ds,
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Обратимся теперь к вычислению криволинейного интеграла 2-го рода. Конечно, поскольку

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F} d\mathbf{l} = \int_0^L \mathbf{F}(x(l), y(l)) \cdot \mathbf{r}'(l) dl,$$

то, найдя натуральную параметризацию кривой Γ , мы сведем вычисление криволинейного интеграла к вычислению определенного интеграла. Но это не самый короткий путь к вычислению криволинейного интеграла, во-первых, и часто очень сложный технически — во-вторых.

Оказывается, нет необходимости переходить к натуральной параметризации, метод вычисления криволинейного интеграла 2-го рода для произвольной параметризации кривой дает следующая

Теорема 2.2.2. Пусть Γ — гладкая кривая, заданная параметрически $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, и пусть $A(\varphi(\alpha), \psi(\alpha))$ — начало кривой Γ , а $B(\varphi(\beta), \psi(\beta))$ — конец Γ . Тогда справедливы равенства

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} \mathbf{F} d\mathbf{l} &= \int_{\Gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \\
&= \int_{\alpha}^{\beta} [P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)] dt.
\end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Кроме данной параметризации рассмотрим еще и натуральную параметризацию Γ : $x = x(l)$, $y = y(l)$, $0 \leq l \leq L$. Если $M(x, y) \in \Gamma$, то $x = x(l) = \varphi(t)$, $y = y(l) = \psi(t)$. Параметр l выражается через t следующим образом:

$$l = l(t) = \int_0^t \sqrt{(\varphi'(\tau))^2 + (\psi'(\tau))^2} d\tau.$$

По теореме о дифференцировании интеграла по верхнему переменному пределу

$$dl = l'(t) dt = \sqrt{(\varphi'(\tau))^2 + (\psi'(\tau))^2} dt.$$

Тогда

$$\varphi'(t) = x'(l)l'(t) = x'(l)\sqrt{(\varphi'(\tau))^2 + (\psi'(\tau))^2},$$

$$\psi'(t) = y'(l)\sqrt{(\varphi'(\tau))^2 + (\psi'(\tau))^2}.$$

И мы получаем, производя замену переменной $l = l(t)$ в определенном интеграле,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy &= \int_{\Gamma} \mathbf{F}(x(l), y(l)) \cdot \mathbf{r}'(l) dl = \\ &= \int_0^L [P(x(l), y(l))x'(l) + Q(x(l), y(l))y'(l)] dl = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \left[P(\varphi(t), \psi(t)) \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}} + \right. \\ &\quad \left. + Q(\varphi(t), \psi(t)) \frac{\psi'(t)}{\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}} \right] \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} [P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)] dt. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

ПРИМЕР 2.2.1. 1) Вычислить интеграл

$$\int_{\Gamma} x dx - y dy,$$

где $\Gamma: x = a \cos t, y = b \sin t, 0 \leq t \leq \pi/2$, точка $A(a, 0)$ — начало Γ .

Используя теорему 2.2.2, вычисляем

$$\int_{\Gamma} x dx - y dy = \int_0^{\pi/2} [a \cos t (-a \sin t) - b \sin t \cdot b \cos t] dt =$$

$$= -(a^2 + b^2) \int_0^{\pi/2} \sin t \cos t dt = -(a^2 + b^2) \frac{\sin^2 t}{2} \Big|_0^{\pi/2} = -\frac{a^2 + b^2}{2}.$$

2) Вычислить интеграл

$$\int_{\Gamma} y dx - x dy,$$

где $\Gamma: y = \ln x, 1 \leq x \leq e$. Начало Γ — точка $A(1, 0)$. Здесь за параметр удобно взять x и тогда

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} y dx - x dy &= \int_1^e \left[\ln x - x \cdot \frac{1}{x} \right] dx = \\ &= \int_1^e \ln x dx - (e - 1) = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} - (e - 1) = \\ &= e - e + 1 - e + 1 = 2 - e. \end{aligned}$$

2.2.2. Формула Грина

Напомним (т. II, § 2.4) определение области, нормальной относительно координатной оси Ox (рис. 2.6). Область G будет нормальной относительно оси Ox , если она задается следующим образом

$$G = \{(x, y) : c \leq y \leq d, \mu(y) \leq x \leq \eta(y)\},$$

где $\mu(y)$ и $\eta(y)$ — некоторые непрерывные функции.

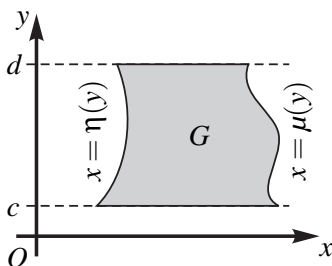


Рис. 2.6

Аналогично определяется область, нормальная относительно оси Oy .

Если область нормальна относительно обеих осей координат, то она называется нормальной.

Теорема 2.2.3 (формула Грина). Пусть G — нормальная область на плоскости xOy с границей Γ , и пусть на $\mathbf{G} = G \cup \Gamma$ определено векторное поле $\mathbf{F}(x, y) = \{P(x, y), Q(x, y)\}$, причем функции $P(x, y), Q(x, y), \frac{\partial P}{\partial y}(x, y), \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$ непрерывны в замкнутой области $\mathbf{G}$.

Тогда справедливо равенство, называемое формулой Грина,

$$\iint_G \left[\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right] dx dy = \int_{\Gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy,$$

где обход Γ в криволинейном интеграле осуществляется в положительном направлении.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать по отдельности два равенства

$$\iint_G \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) dx dy = \int_{\Gamma} Q(x, y) dy,$$

$$\iint_G \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dx dy = - \int_{\Gamma} P(x, y) dx.$$

Так как оба равенства доказываются одинаковыми рассуждениями, мы докажем только первое из них (рис. 2.7).

Рассмотрим на границе Γ точки A, B, C, D такие, что дуга границы DAB есть график функции $x = \mu(y), c \leq y \leq d$, а дуга DCB есть график функции $x = \eta(y), c \leq y \leq d$, и отрезок $[c, d]$ есть проекция области G на ось Oy . Тогда, переходя в двойном интеграле к повторному, получаем

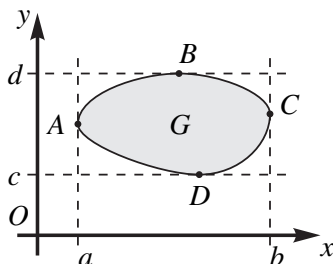


Рис. 2.7

$$\begin{aligned} & \iint_G \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) dx dy = \\ &= \int_c^d dy \int_{\mu(y)}^{\eta(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) dx = \int_c^d [Q(\eta(y), y) - Q(\mu(y), y)] dy. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь криволинейный интеграл $\int_{\Gamma} Q(x, y) dy$. Имеем

$$\int_{\Gamma} Q(x, y) dy = \int_{DCB} Q(x, y) dy + \int_{BAD} Q(x, y) dy.$$

Так как DCB : $x = \eta(y), c \leq y \leq d$ и BAD : $x = \mu(y), c \leq y \leq d$, то по теореме 2.2.2, с учетом направления обхода, получаем,

$$\int_{DCB} Q(x, y) dy = \int_c^d Q(\eta(y), y) dy,$$

$$\int_{BAD} Q(x, y) dy = \int_d^c Q(\mu(y), y) dy = - \int_c^d Q(\mu(y), y) dy.$$

Следовательно,

$$\int_{\Gamma} Q(x, y) dy = \int_c^d Q(\eta(y), y) dy - \int_c^d Q(\mu(y), y) dy,$$

и мы видим, что

$$\iint_G \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) dx dy = \int_{\Gamma} Q(x, y) dy.$$

Что и требовалось доказать.

Отметим без доказательства, что теорема 2.2.3 остается справедливой и в том случае, когда область не является нормальной, но ее можно разбить на конечное число областей кусочно-гладкими кривыми так, что каждая получившаяся область будут нормальной.

2.2.3. Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования

Рассмотрим вначале пример. Вычислить интеграл

$$\int_{\Gamma} (2xy + 1) dx + x^2 dy$$

в случаях, когда

а) $\Gamma = \Gamma_1$: $y = x, 0 \leq x \leq 1$,

б) $\Gamma = \Gamma_2$: $y = x^2, 0 \leq x \leq 1$,

в) $\Gamma = \Gamma_3 = I_1 \cup I_2$, где I_1 — отрезок оси Ox от $x = 0$ до $x = 1$, I_2 — отрезок прямой $x = 1$ от $y = 0$ до $y = 1$. Во всех трех случаях начало координат $O(0, 0)$ — начало пути интегрирования (рис. 2.8). Вычисляем, используя теорему 2.2.2.

$$\int_{\Gamma_1} (2xy + 1) dx + x^2 dy = \int_0^1 (2x^2 + 1 + x^2) dx = (x^3 + x) \Big|_0^1 = 2.$$

Далее,

$$\int_{\Gamma_2} (2xy + 1) dx + x^2 dy = \int_0^1 (2x^3 + 1 + 2x^3) dx = (x^4 + x) \Big|_0^1 = 2.$$

Наконец,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_3} (2xy + 1) dx + x^2 dy &= \int_{I_1} (2xy + 1) dx + x^2 dy + \\ &+ \int_{I_2} (2xy + 1) dx + x^2 dy = \int_0^1 dx + \int_0^1 dy = 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

Мы видим, что во всех трех случаях получается одно и то же число. Это не случайно. Мы могли бы рассмотреть любую другую гладкую или кусочно-гладкую кривую, соединяющую точки $O(0,0)$ и $B(1,1)$ и результат был бы тот же. Оказывается, есть такой класс векторных полей, интеграл от которых не зависит от пути интегрирования, а только от начала и конца пути. С этим классом векторных полей связано и понятие потенциала векторного поля.

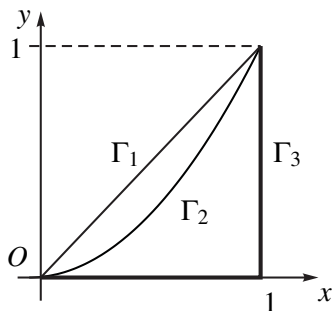


Рис. 2.8

Определение 2.2.4. Дифференцируемая функция $u(x,y)$ называется потенциалом векторного поля $\mathbf{F}(x,y) = P(x,y)\mathbf{i} + Q(x,y)\mathbf{j}$, если выполняются равенства:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = P(x,y), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = Q(x,y).$$

Если у векторного поля есть потенциал, то оно называется потенциальным векторным полем.

Два равенства из определения можно записать в виде одного векторного равенства. Функция $u(x,y)$ будет потенциалом векторного поля $\mathbf{F}(x,y) = \{P(x,y), Q(x,y)\}$, если выполняется

$$\text{grad } u(x,y) = \mathbf{F}(x,y),$$

где слева стоит градиент функции $u(x, y)$, т.е. вектор $\left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right\}$.

Наконец, функция $u(x, y)$ будет потенциалом векторного поля $\mathbf{F}(x, y) = \{P, Q\}$, если

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = du,$$

т.е. выражение $P dx + Q dy$ есть полный дифференциал функции u . Это утверждение есть лишь другая форма определения потенциала.

Прежде чем сформулировать условия независимости криволинейного интеграла 2-го рода от пути интегрирования, введем еще одно

Определение 2.2.5. Область G на плоскости xOy называется односвязной, если для любого простого контура, находящегося в области G , множество точек, ограниченных этим контуром, целиком состоит из точек области G .

Примером односвязной области является круг, внутренность прямоугольника. Примером неодносвязной области будет кольцо — множество, содержащееся между двумя простыми контурами, один из которых находится внутри другого.

Теорема 2.2.4. Пусть G — замкнутая односвязная область на плоскости xOy и пусть функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $\frac{\partial P}{\partial y}(x, y)$, $\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$ непрерывны в G . Тогда следующие четыре утверждения эквивалентны.

1. Для любого контура L , содержащегося в G ,

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0.$$

2. Для любых точек A и B из G интеграл $\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ не зависит от пути, соединяющего в G точку A с точкой B , а только от точек A и B .

3. Выражение $P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ есть полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$.

4. Для всех точек $(x, y) \in G$ выполняется

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем доказательство по схеме $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$. Отсюда будет следовать, что если верно одно из утверждений, то выполняются и остальные три.

$1 \rightarrow 2$. Пусть A и B — произвольные точки из G . Соединим A и B двумя кривыми γ_1 и γ_2 . Тогда кривая $L = \gamma_1^+ \cup \gamma_2^-$, где плюсом мы отметили направление обхода γ_1 от A к B , а минусом — кривую γ_2 , проведенную от B к A , будет контуром. По условию

$$\int_L P dx + Q dy = 0.$$

Но тогда, по свойству аддитивности,

$$\int_L P dx + Q dy = \int_{\gamma_1^+} P dx + Q dy + \int_{\gamma_2^-} P dx + Q dy = 0.$$

Теперь по теореме 2.2.1 получаем

$$\int_{\gamma_1^+} P dx + Q dy - \int_{\gamma_2^+} P dx + Q dy = 0,$$

что означает справедливость 2.

$2 \rightarrow 3$. Зафиксируем некоторую точку $A(x_0, y_0) \in G$ и пусть $B(x, y)$ — переменная точка из G . Тогда интеграл

$$\int_{AB} P dx + Q dy,$$

не зависящий по условию от пути интегрирования, зависит, при фиксированной точке A , только от точки B . Следовательно, мы получаем функцию

$$u(x, y) = \int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy,$$

определенную в области G . Покажем, что $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = P(x, y)$. Рассмотрим

рим точку $C(x + \Delta x, y) \in G$. Тогда

$$\begin{aligned} u(x + \Delta x, y) &= \int_{AC} P dx + Q dy = \int_{AB} P dx + Q dy + \\ &+ \int_{BC} P dx + Q dy = u(x, y) + \int_{BC} P dx + Q dy. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \int_{BC} P dx + Q dy.$$

Отрезок $[B, C]$ задается следующим образом: $x = t$, $y = y = \text{const}$, $t \in [x, x + \Delta x]$. Тогда $x'(t) = 1$, $y'(t) = 0$ и мы получаем

$$\frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x + \Delta x} P(t, y) dt.$$

Применяя к определенному интегралу теорему о среднем, получаем

$$\frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} P(t^*, y) \Delta x = P(t^*, y),$$

где t^* — некоторая точка между x и $x + \Delta x$ и, следовательно, $t^* \rightarrow x$ при $\Delta x \rightarrow 0$. Переход к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$ дает нам

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = P(x, y),$$

в силу непрерывности функции $P(x, y)$ в области G . Аналогично доказывается, что $\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = Q(x, y)$. Следовательно, $du = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$. Пункт 3 доказан.

3 $\rightarrow$ 4. Пусть существует функция $u(x, y)$ такая, что $du = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$. Тогда $\frac{\partial u}{\partial x} = P$, $\frac{\partial u}{\partial y} = Q$ и, следовательно,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

Так как, по условию, функции $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны в G , то смешанные производные равны, т.е. $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$. Но это означает, что

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \text{ в области } G.$$

4 $\rightarrow$ 1. Рассмотрим произвольный контур L в области G . Для простоты предполагаем, что L — простой контур. Более общий случай сводится к этому простейшему. Обозначим через D часть области G , ограниченную контуром L . Тогда, согласно формуле Грина, мы имеем

$$\int_L P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0$$

по условию, так как выполняется п. 4. Но полученное равенство и доказывает п. 1, следовательно, теорема доказана полностью.

Доказанная теорема дает необходимые и достаточные условия потенциальности векторного поля $\mathbf{F}(x, y) = \{P(x, y), Q(x, y)\}$ в односвязной области G . В другой формулировке теорема дает необходимые и достаточные условия того, что выражение $P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ есть полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$.

Условие односвязности области G в формулировке теоремы существенно. Рассмотрим следующий пример. Пусть G — кольцо,

$$G = \{(x, y) : \frac{1}{4} < x^2 + y^2 < 4\}.$$

В области G рассмотрим векторное поле

$$\mathbf{F} = \left\{ -\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right\}.$$

В кольце G координатные функции $P(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}$ и $Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные. Вычисляя производные, убеждаемся

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2} = \frac{\partial P}{\partial y}(x, y).$$

То есть условие 4 теоремы 2.2.4 в области G выполнено. Покажем тем не менее, что условие 1 теоремы не выполняется.

Рассмотрим контур $L = \{(x, y) : x = \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi\}$, т.е. L — это окружность $x^2 + y^2 = 1$ и, очевидно, $L \subset G$. Вычис-

ляем

$$\begin{aligned} \int_L P(x,y) dx + Q(x,y) dy &= \int_L \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy = \\ &= \int_0^{2\pi} [-\sin t(-\sin t) + \cos^2 t] dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0. \end{aligned}$$

Если векторное поле $\mathbf{F}(x,y) = \{P(x,y), Q(x,y)\}$ потенциально, или, что то же самое, выражение $P(x,y) dx + Q(x,y) dy$ есть полный дифференциал некоторой функции двух переменных, то для любых точек A и B интеграл

$$\int_{AB} P(x,y) dx + Q(x,y) dy$$

зависит только от точек A и B . Поэтому часто его обозначают следующим образом:

$$\int_A^B P(x,y) dx + Q(x,y) dy = \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} P(x,y) dx + Q(x,y) dy,$$

где (x_1, y_1) — координаты A , (x_2, y_2) — координаты B .

Как мы видели, потенциал $u(x,y)$ векторного поля $\mathbf{F}(x,y) = \{P(x,y), Q(x,y)\}$ можно определить формулой

$$u(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y) dx + Q(x,y) dy,$$

где (x_0, y_0) — некоторая фиксированная точка. Тогда, как несложно заметить,

$$\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} P(x,y) dx + Q(x,y) dy = u(x_2, y_2) - u(x_1, y_1) = u(x,y) \Big|_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)}.$$

Таким образом, если найден потенциал векторного поля, то вычисление интеграла сводится к нахождению значений потенциала в концах кривой. Если кривая — контур, то интеграл от потенциального векторного поля равен нулю.

ПРИМЕР 2.2.2. Вычислим интеграл

$$\int_{(-1,2)}^{(1,-3)} (2xy + 1) dx + x^2 dy.$$

Здесь $P(x, y) = 2xy + 1$, $Q(x, y) = x^2$, $\frac{\partial P}{\partial y} = 2x = \frac{\partial Q}{\partial x}$, следовательно, векторное поле $\mathbf{F} = \{2xy + 1, x^2\}$ потенциально. Легко проверить, что функция $u(x, y) = x^2y + x$ — потенциал этого векторного поля. Но тогда

$$\int_{(-1,2)}^{(1,-3)} (2xy + 1) dx + x^2 dy = (x^2y + x) \Big|_{(-1,2)}^{(1,-3)} = (-3 + 1) - (2 - 1) = -3.$$

Как найти потенциал? Мы рассмотрим два способа нахождения потенциала $u(x, y)$ для векторного поля $\mathbf{F}(x, y) = \{P(x, y), Q(x, y)\}$.

Первый способ. Проинтегрируем равенство $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = P(x, y)$ по x . Тогда $u(x, y) = \int P(x, y) dx + C(y)$, т.е. функция находится с точностью до постоянного (по x) слагаемого. Дифференцируем это равенство по y и используем равенство $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$

$$\frac{\partial}{\partial y} \int P(x, y) dx + C'(y) = Q(x, y).$$

Мы получаем уравнение для нахождения $C(y)$. Найдя эту функцию, мы вычислим потенциал $u(x, y)$. Необходимо отметить, что потенциал $u(x, y)$ восстанавливается по своим производным $\frac{\partial u}{\partial x} = P$, $\frac{\partial u}{\partial y} = Q$ с точностью до постоянного слагаемого. Действительно, если $u(x, y)$ — потенциал векторного поля

$$\mathbf{F}(x, y) = \{P(x, y), Q(x, y)\},$$

то и функция $u(x, y) + C$, где C — постоянная, — тоже потенциал $\mathbf{F}$. С другой стороны, если $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$ — потенциалы векторного поля $\mathbf{F}(x, y) = \{P(x, y), Q(x, y)\}$, то $\frac{\partial u_1}{\partial x} =$

$= \frac{\partial u_2}{\partial x} = P, \frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{\partial u_2}{\partial y} = Q$. Следовательно, если положить $v(x, y) = u_1(x, y) - u_2(x, y)$, то $\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = 0$ и $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$ в области G . Можно показать (мы не будем здесь этого делать), что в этом случае $v(x, y) = C$ — постоянная в области G . Таким образом, потенциальное векторное поле всегда имеет семейство потенциалов $\{u(x, y) + C : C \in \mathbb{R}\}$, где $u(x, y)$ — какой-нибудь конкретный потенциал.

ПРИМЕР 2.2.3. Пусть дано векторное поле $\mathbf{F}(x, y) = \{3x^2y + x, x^3 - y^3\}$. Проверяем это поле на потенциальность

$$\frac{\partial(3x^2y + x)}{\partial y} = 3x^2, \quad \frac{\partial(x^3 - y^3)}{\partial x} = 3x^2.$$

Следовательно, векторное поле потенциально. Имеем, $\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2y + x$, где $u(x, y)$ — потенциал $\mathbf{F}$. Тогда $u(x, y) = x^3y + \frac{x^2}{2} + C(y)$. Дифференцируя по y , получаем

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^3 + C'(y) = x^3 - y^3.$$

То есть $C'(y) = -y^3$, откуда находим $C(y) = -\frac{y^4}{4} + C$, где C — постоянная, не зависящая от x и от y . Окончательно получаем $u(x, y) = x^3y + \frac{x^2}{2} - \frac{y^4}{4} + C$.

Второй способ нахождения потенциала. Из доказательства теоремы 2.2.4 мы знаем, что функция

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

где (x_0, y_0) — некоторая фиксированная точка, является потенциалом векторного поля $\mathbf{F}(x, y) =$

$\{P(x, y), Q(x, y)\}$. Рассмотрим точку $C(x, y_0)$, положим $A =$

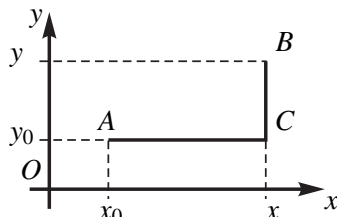


Рис. 2.9

$= (x_0, y_0)$, $B = (x, y)$ и вычислим криволинейный интеграл 2-го рода (раз он не зависит от пути интегрирования) по ломаной, состоящей из отрезков AC и CB (рис. 2.9). Имеем

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{AC \cup CB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \\ &= \int_{AC} P(x, y) dx + Q(x, y) dy + \int_{CB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy. \end{aligned}$$

На отрезке AC : $x = t, y = y_0 = \text{const}$. Следовательно, $x' = 1, y' = 0$, и мы получаем

$$\int_{AC} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx.$$

На отрезке CB : $x = \text{const}, x' = 0, y = t$ — изменяется от y_0 до $y, y' = 1$. Следовательно,

$$\int_{CB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{y_0}^y Q(x, y) dy.$$

Окончательно получаем

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy.$$

Точку (x_0, y_0) следует выбирать так, чтобы выражения получались как можно проще.

ПРИМЕР 2.2.4. Найдём по этой формуле потенциал для векторного поля $\mathbf{F}(x, y) = \{3x^2y + x, x^3 - y^3\}$. Потенциальность этого поля мы уже проверили. Имеем

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{x_0}^x (3x^2y_0 + x) dx + \int_{y_0}^y (x^3 - y^3) dy = \left(x^3y_0 + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{x_0}^x + \\ &+ \left(x^3y - \frac{y^4}{4} \right) \Big|_{y_0}^y = x^3y_0 + \frac{x^2}{2} - x_0^3y_0 - \frac{x_0^2}{2} + x^3y - \frac{y^4}{4} - \\ &- x^3y_0 + \frac{y_0^4}{4} = x^3y + \frac{x^2}{2} - \frac{y^4}{4} - \left(x_0^3y_0 + \frac{x_0^2}{2} - \frac{y_0^4}{4} \right). \end{aligned}$$

Если положить $C = -\left(x_0^3 y_0 + \frac{x_0^2}{2} - \frac{y_0^4}{4}\right)$, то мы получаем

$$u(x, y) = x^3 y + \frac{x^2}{2} - \frac{y^4}{4} + C. \text{ Если } x_0 = 0, y_0 = 0 \text{ и } u_1(x, y) = x^3 y + \frac{x^2}{2} - \frac{y^4}{4}, \text{ то } u(x, y) = u_1(x, y) - u_1(x_0, y_0).$$

Если требуется вычислить интеграл

$$\int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy,$$

то нет необходимости вначале находить потенциал. Используя независимость интеграла от пути интегрирования, можно за счет выбора пути от точки (x_1, y_1) до точки (x_2, y_2) значительно упростить вычисления. Если выбрать в качестве пути интегрирования ломаную со звеньями, параллельными осям координат, то вычисление криволинейного интеграла сведется к вычислению определенных интегралов. Пусть $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, $C = (x_2, y_1)$. Тогда

$$\int_A^B P dx + Q dy = \int_A^C P dx + Q dy + \int_C^B P dx + Q dy.$$

На отрезке AC : $x = t, y = y_1 = \text{const}, t \in [x_1, x_2], x' = 1, y' = 0$ и, следовательно, получаем

$$\int_A^C P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{x_1}^{x_2} P(x, y_1) dx.$$

На отрезке CB : $x = x_2 = \text{const}, y = t, t \in [y_1, y_2], x' = 0, y' = 1$ и мы получаем

$$\int_C^B P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{y_1}^{y_2} Q(x_2, y) dy.$$

Таким образом,

$$\int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{x_1}^{x_2} P(x, y_1) dx + \int_{y_1}^{y_2} Q(x_2, y) dy.$$

ПРИМЕР 2.2.5. Вычислим интеграл

$$\int_{(0,\pi/3)}^{(1/2,2\pi/3)} 2e^{2x} \cos 3y dx - 3e^{2x} \sin 3y dy.$$

Проверим, что векторное поле потенциально.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (2e^{2x} \cos 3y) = -6e^{2x} \sin 3y,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (-3e^{2x} \sin 3y) = -6e^{2x} \sin 3y.$$

Значит, интеграл не зависит от пути интегрирования. Пусть $C = (\frac{1}{2}, \frac{\pi}{3})$. Тогда

$$\begin{aligned} & \int_{(0,\pi/3)}^{(1/2,2\pi/3)} 2e^{2x} \cos 3y dx - 3e^{2x} \sin 3y dy = \\ &= \int_0^{1/2} 2e^{2x} \cos \pi dx - \int_{\pi/3}^{2\pi/3} 3e \sin 3y dy = \\ &= -e^{2x} \Big|_0^{1/2} + e \cos 3y \Big|_{\pi/3}^{2\pi/3} = -e + 1 + e \cos 2\pi - e \cos \pi = e + 1. \end{aligned}$$

2.2.4. Криволинейные интегралы 2-го рода по пространственным кривым

Пространственное векторное поле представляет собой трехмерный вектор, каждая координата которого есть функция переменных x , y и z , $\mathbf{F}(x, y, z) = \{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$.

Мы рассмотрим здесь интегрирование пространственного векторного поля по кривой, расположенной в пространстве с декартовыми координатами x , y и z .

Понятия гладкой, кусочно-гладкой кривой вводятся в пространстве точно так же, как и на плоскости. Как и на плоскости, вводится понятие ориентированной кривой.

Рассмотрим гладкую незамкнутую кривую Γ с концами A и B . Если мы будем считать точку A началом Γ , а точку B — концом, то тем самым задаем направление обхода Γ , т.е. ориентируем кривую.

Длина дуги AM кривой Γ от начала A до текущей точки $M \in \Gamma$, как и в плоском случае, называется натуральным параметром. Обозначим его l . Тогда кривую Γ можно задать параметрически, используя этот параметр: $x = x(l)$, $y = y(l)$, $z = z(l)$, $0 \leq l \leq L$, где L — длина Γ . Кривая Γ является годографом вектор-функции $\mathbf{r}(l) = \{x(l), y(l), z(l)\}$.

Гладкость Γ означает, что производная

$$\mathbf{r}'(l) = \{x'(l), y'(l), z'(l)\}$$

есть непрерывная вектор-функция на отрезке $[0, L]$. Как и в плоском случае, покажем, что $|\mathbf{r}'(l)| = 1$ при $l \in [0, L]$. Это означает, что координатами вектора $\mathbf{r}'(l)$ будут направляющие косинусы,

$$\mathbf{r}'(l) = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\},$$

где α , β и γ — углы, которые вектор $\mathbf{r}'(l)$ образует с осями Ox , Oy и Oz соответственно. При задании кривой с помощью натурального параметра точка, соответствующая значению параметра $l = 0$, всегда считается началом кривой.

Пусть Γ — гладкая кривая, заданная с помощью натурального параметра l , $\mathbf{r} = \mathbf{r}(l) = \{x(l), y(l), z(l)\}$, $0 \leq l \leq L$, и пусть на Γ определено векторное поле

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\}.$$

Криволинейный интеграл 2-го рода от поля $\mathbf{F}$ по кривой Γ определим, как и на плоскости, равенством

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F} d\mathbf{l} = \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}' dl,$$

где слева стоит обозначение криволинейного интеграла 2-го рода от $\mathbf{F}$ по Γ , а справа — криволинейный интеграл 1-го рода от функции $f(x, y, z) = \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{r}'(x, y, z)$ — скалярного произведения векторного поля $\mathbf{F}(x, y, z)$ на касательный вектор $\mathbf{r}'$ в точке (x, y, z) на Γ .

Расписывая скалярное произведение в координатах, получаем следующую формулу записи интеграла 2-го рода

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F} d\mathbf{l} = \int_{\Gamma} [P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma] dl.$$

Учитывая, что $\cos \alpha dl = x'(l) dl = dx$, $\cos \beta dl = y'(l) dl = dy$, $\cos \gamma dl = z'(l) dl = dz$, получаем традиционную форму записи для криволинейного интеграла 2-го рода

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F} d\mathbf{l} = \int_{\Gamma} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz.$$

Скобки в интеграле в правой части не ставятся. Выражение

$$P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$$

считается одним целым подынтегральным выражением.

Если кривая Γ кусочно-гладкая и $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \dots \cup \Gamma_m$, где Γ_i — гладкие кривые, причем при всех i и j кривые Γ_i и Γ_j могут иметь общими разве только концевые точки, то криволинейный интеграл 2-го рода от векторного поля $\mathbf{F} = \{P, Q, R\}$ по Γ определяется как сумма

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F} d\mathbf{l} = \sum_{j=1}^m \int_{\Gamma_j} \mathbf{F} d\mathbf{l}.$$

Мы считаем, как и ранее, векторные поля непрерывными на кривых, которые предполагаем гладкими или кусочно-гладкими. Это гарантирует существование криволинейного интеграла 2-го рода.

Как и на плоскости, криволинейный интеграл 2-го рода в пространстве сводится к определенному интегралу

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F} d\mathbf{l} = \int_0^L \mathbf{F}(x(l), y(l), z(l)) \cdot \mathbf{r}'(l) dl.$$

Поэтому свойства криволинейного интеграла 2-го рода линейности и аддитивности сводятся к соответствующим свойствам определенного интеграла.

Как и в плоском случае, пространственный криволинейный интеграл 2-го рода зависит от ориентации.

Вычисление криволинейного интеграла 2-го рода с использованием натуральной параметризации часто бывает весьма неэффективным. Как и в плоском случае, в пространстве возможно переходить от криволинейного интеграла к определенному при любом параметрическом задании кривой.

Пусть кривая Γ задана параметрически $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, и пусть точка $A(\varphi(\alpha), \psi(\alpha), \chi(\alpha))$ является началом кривой. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \\ = \int_{\alpha}^{\beta} [P(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\psi'(t) + \\ + R(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\chi'(t)] dt. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 2.2.6. Вычислить интеграл

$$\int_{\Gamma} xy dx + y^2 dy + (x - z) dz,$$

где $\Gamma: x = t, y = t^2, z = t^3, 0 \leq t \leq 1$, и точка $A(0, 0, 0)$ — начало кривой Γ , а $B(1, 1, 1)$ — конец. Согласно формуле получаем

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} xy dx + y^2 dy + (x - z) dz = \int_0^1 [t^3 + t^4 \cdot 2t + (t - t^3) \cdot 3t^2] dt = \\ = \int_0^1 (4t^3 - t^5) dt = \left(t^4 - \frac{t^6}{6} \right) \Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

Как и на плоскости, в пространстве важную роль играют потенциальные векторные поля. Определения аналогичны тем, что давались для случая плоскости. Функция $u(x, y, z)$ называется потенциалом векторного поля $\mathbf{F}(x, y, z) = \{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\}$, если выполняется равенство

$$\text{grad } u(x, y, z) = \mathbf{F}(x, y, z),$$

т.е. $\frac{\partial u}{\partial x} = P, \frac{\partial u}{\partial y} = Q, \frac{\partial u}{\partial z} = R.$

Если у векторного поля $\mathbf{F}$ есть потенциал, то оно называется потенциальным.

Необходимые и достаточные условия потенциальности векторного поля дает следующая

Теорема 2.2.5. Пусть в пространственной области V задано векторное поле $\mathbf{F}(x, y, z) = \{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\}$, координатные функции которого имеют все частные производные первого порядка, непрерывные в V . Тогда следующие три условия эквивалентны:

1. Для любого контура $L \subset V$ выполняется

$$\int_L P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = 0.$$

2. Для любых двух точек A и B из V интеграл

$$\int_{AB} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$$

не зависит от кривой, соединяющей в V точку A с точкой B , а только от точек A и B .

3. Существует потенциал $u(x, y, z)$ векторного поля $\mathbf{F}(x, y, z) = \{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\}$, т.е. такая функция u , что выполняется

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y, z) = P(x, y, z),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y, z) = Q(x, y, z),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}(x, y, z) = R(x, y, z).$$

Доказательство теоремы мы опускаем.

В теореме 2.2.4 для векторного поля $\mathbf{F}(x, y) = \{P(x, y), Q(x, y)\}$ было простое условие $4 \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$ для всех (x, y) из односвязной области $G \subset xOy$. Благодаря этому условию мы довольно просто могли проверить, является ли векторное поле потенциальным. Отметим, что четыре условия теоремы 2.2.4 эквивалентны только для односвязных областей.

Введем в пространстве некоторый аналог односвязной области на плоскости.

Определение 2.2.6. Трехмерная область V называется поверхностно-односвязной, если на любой простой кусочно-гладкий контур, принадлежащий области V , можно натянуть поверхность, целиком лежащую в области V .

Иначе говоря, область будет поверхностно-односвязной, если любой кусочно-гладкий контур, принадлежащий V , можно стянуть в точку, принадлежащую V . При этом в процессе стягивания контур должен все время принадлежать V .

Шар является поверхностно-односвязной областью, но если шар проткнуть насквозь, т.е. выбросить из шара, скажем, диаметр большого круга, то получившаяся область уже не будет односвязной.

Нам нужен еще пространственный аналог условия 4 в теореме 2.2.4.

Определение 2.2.7. Пусть координатные функции векторного поля $\mathbf{F}(x, y, z) = \{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\}$ имеют в области V все первые частные производные. Тогда векторное поле

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \left\{ \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right\}$$

называется ротором, или вихрем векторного поля $\mathbf{F}$, или вихрем.

Для запоминания ротор векторного поля $\mathbf{F} = \{P, Q, R\}$ удобно записывать в виде определителя

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

При раскрытии определителя следует считать, что «произведение», например $\frac{\partial}{\partial x} \cdot Q$, есть частная производная $\frac{\partial Q}{\partial x}$.

ПРИМЕР 2.2.7. Найдем ротор векторного поля

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \{xy, y^2, x - z\}.$$

Вычисляем, раскрывая определитель по первой строке,

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & y^2 & x - z \end{vmatrix} = \mathbf{i} \left(\frac{\partial(x - z)}{\partial y} - \frac{\partial y^2}{\partial z} \right) - \\ &\quad - \mathbf{j} \left(\frac{\partial(x - z)}{\partial x} - \frac{\partial(xy)}{\partial z} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial y^2}{\partial x} - \frac{\partial(xy)}{\partial y} \right) = \\ &= 0 \cdot \mathbf{i} - \mathbf{j} - x \cdot \mathbf{k} = \{0, -1, -x\}. \end{aligned}$$

Теорема 2.2.6. Если область V поверхностно-односвязна и координатные функции векторного поля

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\}$$

имеют в области V непрерывные производные первого порядка по всем переменным, то условия 1, 2, 3 теоремы 2.2.5 эквивалентны условию

$$4. \operatorname{rot} \mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{0} = \{0, 0, 0\} \text{ всюду в области } V.$$

Часто векторное поле $\mathbf{F}$ такое, что $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$, называют безвихревым. Таким образом, в поверхностно-односвязной области потенциальность векторного поля эквивалентна тому, что векторное поле будет безвихревым.

Часто используют эквивалентность условия потенциальности $\operatorname{grad} u = \mathbf{F}$ с тем, что выражение

$$P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$$

является полным дифференциалом функции $u(x, y, z)$.

Если векторное поле $\mathbf{F} = \{P, Q, R\}$ потенциально, то интеграл по дуге AB , где $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$, от $\mathbf{F}$ зависит только от точек A и B . Чтобы это подчеркнуть, записываем интеграл в виде

$$\int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz.$$

При вычислении интеграла от потенциального векторного поля в качестве пути интегрирования удобно выбирать ломаную, состоящую из звеньев, параллельных координатным осям.

Если отрезок $[AB]$, $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_1, z_1)$ параллелен оси Ox , то его можно задать параметрически следующим образом: $x = t$, $y = y_1$, $z = z_1$, t изменяется от x_1 до x_2 . Тогда $y' = z' = 0$, $x' = 1$ и

$$\int_{AB} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \int_{x_1}^{x_2} P(x, y_1, z_1) dx.$$

аналогично вычисляются интегралы по отрезкам, параллельным осям Oy и Oz .

ПРИМЕР 2.2.8. Проверить, что под знаком интеграла стоит полный дифференциал, и вычислить интеграл.

$$\int_{(1,0,1)}^{(-2,1,2)} (2xy + yz) dx + (x^2 + xz) dy + xy dz.$$

Вычисляем ротор векторного поля $\mathbf{F}(x, y, z) = \{2xy + yz, x^2 + xz, xy\}$:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy + yz & x^2 + xz & xy \end{vmatrix} = \mathbf{i}(x - x) - \mathbf{j}(y - y) + \\ &+ \mathbf{k}(2x + z - 2x - z) = 0 \cdot \mathbf{i} - 0 \cdot \mathbf{j} + 0 \cdot \mathbf{k} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Таким образом, векторное поле потенциально и интеграл не зависит от пути интегрирования. Рассмотрим ломаную с вершинами $A(1, 0, 1)$, $C(-2, 0, 1)$, $D(-2, 1, 1)$ и $B(-2, 1, 2)$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{AB} \mathbf{F} d\mathbf{l} &= \int_{AC} \mathbf{F} d\mathbf{l} + \int_{CD} \mathbf{F} d\mathbf{l} + \int_{DB} \mathbf{F} d\mathbf{l} = \\ &= \int_1^{-2} (2x \cdot 0 + 0 \cdot 1) dx + \int_0^1 ((-2)^2 + (-2) \cdot 1) dy + \\ &+ \int_1^2 (-2) \cdot 1 dz = 2 \int_0^1 dy - 2 \int_1^2 dz = 2 - 2 = 0. \end{aligned}$$

Допустим, мы проверили, что векторное поле $\mathbf{F} = \{P, Q, R\}$ потенциально. Как найти потенциал $u(x, y, z)$ векторного поля $\mathbf{F}$? Мы приведем формулу для нахождения потенциала без вывода. Вывод может быть сделан в точности так же, как и для двумерного векторного поля.

$$u(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(x, y_0, z_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y, z_0) dy + \int_{z_0}^z R(x, y, z) dz,$$

где (x_0, y_0, z_0) — некоторая фиксированная точка. Точку (x_0, y_0, z_0) выбирают так, чтобы получающиеся выражения были проще. Часто для

этого достаточно положить $x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = 0$. Напомним, что потенциал находится с точностью до произвольного постоянного слагаемого. Если мы нашли какой-нибудь потенциал $u_1(x, y, z)$ векторного поля, то множество всех потенциалов имеет вид $u_1(x, y, z) + C$, где C — произвольная постоянная.

Если потенциал $u(x, y, z)$ найден, то

$$\int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz =$$

$$= u(x, y, z) \Big|_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} = u(x_2, y_2, z_2) - u(x_1, y_1, z_1).$$

ПРИМЕР 2.2.9. Проверить, что векторное поле

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \{x^2 - 2yz, y^2 - 2xz, z^2 - 2xy\}$$

потенциально, найти его потенциал и вычислить интеграл

$$\int_{(0,1,2)}^{(1,0,-1)} (x^2 - 2yz) dx + (y^2 - 2xz) dy + (z^2 - 2xy) dz.$$

Вычисляем вначале $\text{rot } \mathbf{F}$.

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 - 2yz & y^2 - 2xz & z^2 - 2xy \end{vmatrix} = \begin{matrix} \mathbf{i}(-2x + 2x) - \\ -\mathbf{j}(-2y + 2y) + \\ +\mathbf{k}(-2z + 2z) \end{matrix} = \mathbf{0}.$$

Векторное поле потенциально. Ищем потенциал.

$$u(x, y, z) = \int_0^x x^2 dx + \int_0^y y^2 dy + \int_0^z (z^2 - 2xy) dz =$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} + \frac{z^3}{3} - 2xyz + C.$$

Вычисляем интеграл.

$$\int_{(0,1,2)}^{(1,0,-1)} (x^2 - 2yz) dx + (y^2 - 2xz) dy + (z^2 - 2xy) dz =$$

$$= \left(\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} - 2xyz \right) \Big|_{(0,1,2)}^{(1,0,-1)} = 0 - 3 = -3.$$

2.2.5. Задача о работе силового поля

Если сила $\mathbf{F}$ постоянна по величине и по направлению, а путь MN прямолинеен, то работы силы по перемещению материальной точки вдоль отрезка MN равна произведению $A = |\mathbf{F}|MN \cdot \cos \alpha$, где $\alpha = \widehat{(\mathbf{F}, \overline{MN})}$. Таким образом, работа равна скалярному произведению

$$A = \overline{\mathbf{F}} \cdot \overline{MN}.$$

Пусть теперь переменная сила $\mathbf{F}(x, y) = \{P(x, y), Q(x, y)\}$ воздействует на материальную точку, которая движется по траектории $\Gamma: x = \varphi(t), y = \psi(t), \alpha \leq t \leq \beta$ от точки $A(\varphi(\alpha), \psi(\alpha))$ до точки $B(\varphi(\beta), \psi(\beta))$. Найдем работу, совершаемую силой $\mathbf{F}$.

Разобьем кривую Γ произвольно на n частей точками

$$A = M_0, M_1, M_2, \dots, M_n = B.$$

Пусть точке M_i соответствует значение параметра t_i , т.е.

$$M_i = (\varphi(t_i), \psi(t_i)).$$

Если дуги $M_{i-1}M_i$ малы, то можно считать, что сила $\mathbf{F}$ на участке $M_{i-1}M_i$ постоянна. Участок $M_{i-1}M_i$ можно заменить на отрезок $[M_{i-1}M_i]$. Тогда работа, совершаемая силой при перемещении точки по дуге $M_{i-1}M_i$, приближенно равна $\mathbf{F} \cdot \overline{M_{i-1}M_i}$. Так как $M_{i-1}M_i = \{\Delta x_i, \Delta y_i\}$, где $\Delta x_i = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})$, $\Delta y_i = \psi(t_i) - \psi(t_{i-1})$, то, применяя теорему Лагранжа, получаем

$$\Delta x_i = \varphi'(t'_i) \Delta t_i, \quad \Delta y_i = \psi'(t''_i) \Delta t_i,$$

где мы положили $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. Тогда

$$\mathbf{F} \cdot \overline{M_{i-1}M_i} = P \Delta x_i + Q \Delta y_i = P \varphi'(t'_i) \Delta t_i + Q \psi'(t''_i) \Delta t_i.$$

Так как сила $\mathbf{F} = \{P, Q\}$ постоянна на дуге $M_{i-1}M_i$ (по нашему допущению), то мы считаем, что $P = P(\varphi(t'_i), \psi(t'_i))$, $Q = Q(\varphi(t''_i), \psi(t''_i))$.

Тогда, суммируя по i , мы получаем приближенное значение для работы A , совершаемой силой $\mathbf{F}$ при перемещении материальной точки вдоль кривой Γ

$$A \approx \sum_{i=1}^n P(\varphi(t'_i), \psi(t'_i)) \varphi'(t'_i) \Delta t_i + \sum_{i=1}^n Q(\varphi(t''_i), \psi(t''_i)) \psi'(t''_i) \Delta t_i.$$

Переходя к пределу при $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta t_i \rightarrow 0$, мы получаем точное значение работы

$$\begin{aligned} A &= \int_{\alpha}^{\beta} P(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) dt + \int_{\alpha}^{\beta} Q(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t) dt = \\ &= \int_{\Gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy. \end{aligned}$$

Если работу совершает сила

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\}$$

при перемещении материальной точки вдоль кривой Γ в пространстве, то работа вычисляется по формуле

$$A = \int_{\Gamma} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz. \quad (2.2.1)$$

ПРИМЕР 2.2.10. 1. Найти работу, совершаемую силой

$$\mathbf{F} = \{\cos^3 x, y\}$$

вдоль дуги линии $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ от точки $A(0, 0)$ до точки $B(\frac{\pi}{2}, 1)$.

Согласно формуле (2.2.1), вычисляем

$$\begin{aligned} A &= \int_{\Gamma} \cos^3 x dx + y dy = \int_0^{\pi/2} [\cos^3 x + \sin x \cdot \cos x] dx = \\ &= \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 x + \sin x) d \sin x = \\ &= \left(\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^2 x}{2} \right) \Big|_0^{\pi/2} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6}. \end{aligned}$$

Глава 3

Поверхностные интегралы

§ 3.1. Поверхностные интегралы первого рода

3.1.1. Определение поверхностного интеграла первого рода

Рассмотрим вначале физическую задачу, естественно приводящую к поверхностному интегралу.

Пусть на поверхности S непрерывно распределено вещество с известной поверхностной плотностью $\rho(M) = \rho(x, y, z)$, где $M(x, y, z)$ — точка поверхности S . Найдем массу вещества, распределенного по поверхности. Мы предполагаем далее, что поверхность S гладкая или кусочно-гладкая.

Разделим поверхность S гладкими или кусочно-гладкими кривыми на n частей $S_1, S_2, \dots, S_n$ с площадями $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$. Через λ обозначим наибольший из диаметров частей, т.е. $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} d(S_i)$. (Определение диаметра множества в разделе «Определение двойного интеграла», том II.) Если части S_i малы, то в силу непрерывности плотности можно считать, что $\rho(M)$ постоянна на S_i , т.е. если $M_i \in S_i$ — произвольная точка, то $\rho(M) \approx \rho(M_i)$ при $M \in S_i$. Тогда масса части S_i приближенно равна $\rho(M_i)\Delta S_i$, а вся масса пластины S приближенно равна $\sum_{i=1}^n \rho(M_i)\Delta S_i$. Приближение будет тем точнее, чем мельче разбиение поверхности S на части. Поэтому естественно будет за массу

изогнутой пластины S принять предел

$$m = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(M_i) \Delta S_i.$$

Так появляется понятие поверхностного интеграла.

Сформулируем понятие поверхностного интеграла первого рода в общем случае.

Пусть функция $f(x, y, z)$ определена на гладкой или кусочно-гладкой поверхности S . Разобьем поверхность S произвольным образом на n частей $S_1, S_2, \dots, S_n$ гладкими или кусочно-гладкими кривыми. Через $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$ обозначим площади частей $S_1, S_2, \dots, S_n$ соответственно, через λ — мелкость разбиения поверхности на части, т.е. наибольший из диаметров $d(S_1), d(S_2), \dots, d(S_n)$. Выберем произвольную точку $M_i(x_i, y_i, z_i) \in S_i$ и составим сумму

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta S_i.$$

σ_n называется интегральной суммой для функции $f(x, y, z)$ по поверхности S . Предел интегральных сумм σ_n при $\lambda \rightarrow 0$, если он существует и не зависит от способа деления поверхности S на части и от выбора точек M_i , называется поверхностным интегралом первого рода от функции $f(x, y, z)$ по поверхности S и обозначается $\iint_S f(M) dS$ или

$$\iint_S f(x, y, z) dS. \text{ Таким образом, по определению}$$

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i.$$

Если поверхностный интеграл первого рода от функции $f(x, y, z)$ по поверхности S существует, то функция называется интегрируемой по поверхности S . Если S есть ограниченная гладкая или кусочно-гладкая поверхность, а функция $f(x, y, z)$ непрерывна на S , то поверхностный интеграл первого рода от $f(x, y, z)$ по S заведомо существует. Мы не будем обосновывать здесь этот факт, отсылая читателя к более подробным курсам математического анализа (см., например, [7]). Отметим, что для подавляющего числа приложений поверхностного интеграла непрерывных функций вполне достаточно.

Несложно заметить, что определение поверхностного интеграла первого рода, по сути дела, аналогично определению двойного интеграла. Поэтому свойства двойных интегралов без особых изменений переносятся на поверхностные интегралы. В частности, если $f(x, y, z) \equiv 1$, то, как и в случае с двойным интегралом, получаем

$$\iint_S dS = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \Delta S_i = s,$$

где через s обозначена площадь S .

3.1.2. Вычисление поверхностного интеграла первого рода

Вычисление поверхностного интеграла первого рода производится сведением поверхностного интеграла к двойному.

Пусть поверхность S — это график функции $z = \varphi(x, y)$, определенной в замкнутой ограниченной области G на плоскости xOy . Мы предполагаем, что как сама функция $\varphi(x, y)$, так и ее производные $\varphi'_x(x, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y)$ и $\varphi'_y(x, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y)$ непрерывны в области G . На поверхности S задана непрерывная функция $f(x, y, z)$.

Разобьем поверхность S произвольно на n частей $S_1, S_2, \dots, S_n$ с площадями $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$. Разбиению S соответствует разбиение области G на n частей $G_1, G_2, \dots, G_n$, где G_i есть проекция части поверхности S_i на плоскость xOy (рис 3.1). Как мы знаем (см. тему «Двойные интегралы»), площадь ΔS_i вычисляется по формуле

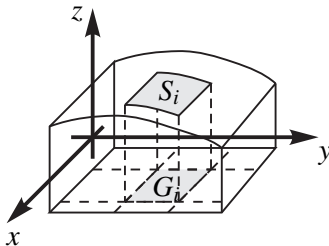


Рис. 3.1

$$\Delta S_i = \iint_{G_i} \sqrt{1 + (\varphi'_x(x, y))^2 + (\varphi'_y(x, y))^2} dx dy.$$

Применив к двойному интегралу теорему о среднем, получим

$$\Delta S_i = \sqrt{1 + (\varphi'_x(\xi_i, \eta_i))^2 + (\varphi'_y(\xi_i, \eta_i))^2} \Delta \sigma_i,$$

где (ξ_i, η_i) — некоторая точка области G_i , а $\Delta \sigma_i$ — площадь G_i . Обозначим через M_i точку на S_i с координатами (ξ_i, η_i, ζ_i) , где $\zeta_i = \varphi(\xi_i, \eta_i)$.

Составим интегральную сумму для функции $f(x, y, z)$, соответствующую нашему разбиению S , и выберем в качестве точек из S_i точки $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$. Получили

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta S_i &= \\ &= \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \varphi(\xi_i, \eta_i)) \sqrt{1 + (\varphi'_x(\xi_i, \eta_i))^2 + (\varphi'_y(\xi_i, \eta_i))^2} \Delta \sigma_i. \end{aligned}$$

В левой части этого равенства стоит интегральная сумма для $f(x, y, z)$ по поверхности S , а справа — интегральная сумма для непрерывной функции $f(x, y, \varphi(x, y)) \sqrt{1 + (\varphi'_x(x, y))^2 + (\varphi'_y(x, y))^2}$ по области G . Если обозначить через λ_G наибольший из диаметров $\text{diam}(\sigma_1), \text{diam}(\sigma_2), \dots, \text{diam}(\sigma_n)$, то можно показать, что λ_G стремится к нулю одновременно с $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \text{diam}(S_i)$. Мы не будем здесь останавливаться на обосновании этого факта, отсылая читателя к более подробным курсам математического анализа (см., например, [7]).

Переходя к пределу при $\lambda \rightarrow 0$ (значит, и $\lambda_G \rightarrow 0$), мы получаем равенство

$$\begin{aligned} \iint_S f(M) dS &= \\ &= \iint_G f(x, y, \varphi(x, y)) \sqrt{1 + (\varphi'_x(x, y))^2 + (\varphi'_y(x, y))^2} dx dy. \end{aligned}$$

Для поверхностного интеграла первого рода dS называется элементом площади поверхности S . В случае явного задания поверхности — в виде графика функции,

$$dS = \sqrt{1 + \varphi_x'^2(x, y) + \varphi_y'^2(x, y)} dx dy.$$

Если поверхность S есть график функции $x = \psi(y, z)$, где точки (y, z) принадлежат D — проекции поверхности S на плоскость yOz , то, повторяя рассуждения, получаем формулу

$$\begin{aligned} \iint_S f(M) dS &= \\ &= \iint_D f(\psi(y, z), y, z) \sqrt{1 + (\psi'_y(y, z))^2 + (\psi'_z(y, z))^2} dy dz. \end{aligned}$$

Аналогично получаем формулу, выражающую интеграл по поверхности S — графику функции $y = h(x, z)$, через двойной интеграл по проекции S на плоскость xOz .

ПРИМЕР 3.1.1. Вычислить интеграл

$$\iint_S \left(x^2 + y^2 + z - \frac{1}{2} \right) dS,$$

где S — конечная часть поверхности $2z = 2 - x^2 - y^2$, отсеченная плоскостью xOy . Поверхность S есть график функции $z = 1 - \frac{x^2 + y^2}{2}$, проекцией S на плоскость xOy будет круг $G = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2\}$.

Вычисляем интеграл согласно полученной формуле

$$\begin{aligned} \iint_S \left(x^2 + y^2 + z - \frac{1}{2} \right) dS &= \\ &= \iint_G \left(x^2 + y^2 + 1 - \frac{x^2 + y^2}{2} - \frac{1}{2} \right) \sqrt{1 + x^2 + y^2} dx dy = \\ &= \frac{1}{2} \iint_G (x^2 + y^2 + 1)^{3/2} dx dy. \end{aligned}$$

Перейдем в последнем интеграле к полярным координатам $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Тогда

$$\begin{aligned} \iint_S \left(x^2 + y^2 + z - \frac{1}{2} \right) dS &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} (r^2 + 1)^{3/2} r dr = \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\sqrt{2}} (r^2 + 1)^{3/2} d(r^2 + 1) = \frac{\pi}{5} (r^2 + 1)^{5/2} \Big|_0^{\sqrt{2}} = \pi \frac{9\sqrt{3} - 1}{5}. \end{aligned}$$

Более общим способом задания поверхности является параметрическое задание.

Пусть Ω — некоторая ограниченная замкнутая область на плоскости uOv , и пусть на Ω определены три функции $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$. Мы будем считать, что функции $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ дифференцируемы в области Ω .

Когда точка (u, v) пробегает область Ω , точка

$$(x, y, z) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

описывает поверхность S в пространстве с декартовыми прямоугольными координатами x, y, z (рис. 3.2). Равенства

$$\begin{aligned}x &= x(u, v); \\y &= y(u, v); \\z &= z(u, v)\end{aligned}$$

называются параметрическими уравнениями поверхности S , переменные u и v — параметрами.

Рассмотрим вектор-функцию

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= \mathbf{r}(u, v) = \{x(u, v), y(u, v), z(u, v)\} = \\&= x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k},\end{aligned}$$

зависящую от двух скалярных аргументов u и v . Если откладывать вектор $\mathbf{r}(u, v)$ от начала координат, то конец его будет описывать поверхность S . Задание поверхности S с помощью параметрических уравнений эквивалентно заданию S с помощью вектор-функции.

Рассмотрим в области Ω отрезок, проходящий через точку $(u_0, v_0) \in \Omega$ и параллельный оси Ou . Отрезок состоит из точек вида (u, v_0) , где $a < u < b$ и $u_0 \in (a, b)$, a и b — некоторые числа, такие, что отрезок $[A, B]$ содержится в Ω , где обозначено $A = (a, v_0)$ и $B = (b, v_0)$. Отрезку в Ω

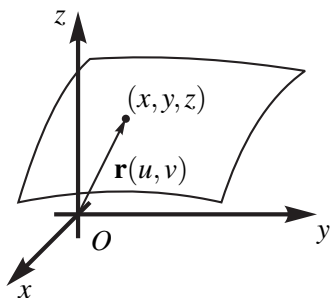


Рис. 3.2

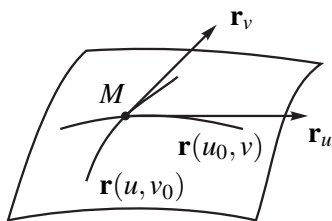


Рис. 3.3

соответствует на поверхности S кривая

$\Gamma_u: \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v_0) = \{x(u, v_0), y(u, v_0), z(u, v_0)\}$ — радиус-вектор точек Γ_u . Вектор

$$\mathbf{r}_u(u_0, v_0) = \frac{d\mathbf{r}}{du}(u_0, v_0) = \left\{ \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \right\}$$

будет касательным вектором к Γ_u в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, где $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$, $z_0 = z(u_0, v_0)$.

Аналогично, рассматривая в области Ω отрезок, проходящий через точку (u_0, v_0) и параллельный оси On , на поверхности S мы получаем соответствующую кривую Γ_v , проходящую, как и Γ_u , через точку $M_0 \in S$. Вектор

$$\mathbf{r}_v = \frac{d\mathbf{r}}{dv}(u_0, v_0) = \left\{ \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \right\}$$

будет касательным вектором к Γ_v в точке M_0 .

В разделах «Дифференцируемость функции двух переменных» и «Отображения $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^3$ » т. II настоящего курса было показано, что если векторы $\mathbf{r}_u$ и $\mathbf{r}_v$ не параллельны, то они определяют касательную плоскость к S в точке M_0 . Условие непараллельности векторов $\mathbf{r}_u$ и $\mathbf{r}_v$ эквивалентно тому, что векторное произведение $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ не равно нулю, т.е. тому, что $|\mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_u| \neq 0$. Мы далее всегда предполагаем, что условие $|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \neq 0$ выполняется во всех точках области Ω . Напомним, что согласно определению векторного произведения вектор $\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ будет нормальным вектором касательной плоскости к S , так как $\mathbf{N}$ перпендикулярен обоим векторам $\mathbf{r}_u$ и $\mathbf{r}_v$.

ПРИМЕР 3.1.2. 1. *Задание поверхности как графика некоторой функции есть частный случай параметрического задания. Действительно, пусть S — это график дифференцируемой функции $z = \varphi(x, y)$, $(x, y) \in G$. Тогда за параметры можно взять переменные x и y : $x = u$, $y = v$. Тогда $x = u$, $y = v$, $z = \varphi(u, v)$ — параметрические уравнения поверхности S . Обычно новые параметры в этом случае не вводят, считая параметрами x и y . Таким образом, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y) = \{x, y, \varphi(x, y)\}$ — радиус-вектор точек поверхности S . Отсюда находим*

$$\mathbf{r}_x = \{1, 0, \varphi'_x(x, y)\}, \quad \mathbf{r}_y = \{0, 1, \varphi'_y(x, y)\}$$

и вектор

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & \varphi'_x \\ 0 & 1 & \varphi'_y \end{vmatrix} = -\varphi'_x \mathbf{i} - \varphi'_y \mathbf{j} + \mathbf{k} = \mathbf{N}$$

будет нормальным вектором касательной плоскости к поверхности S в точке $(x, y, \varphi(x, y))$. Отметим, что в этом случае всегда

$$|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y| = \sqrt{1 + (\varphi'_x(x, y))^2 + (\varphi'_y(x, y))^2} \neq 0.$$

2. Пусть S — боковая стенка цилиндра $x^2 + y^2 = 4$, $0 \leq z \leq 3$. Рассмотрим цилиндрические координаты $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $z = z$. Тогда равенства

$$x = 2 \cos \varphi, \quad y = 2 \sin \varphi, \quad z = z$$

будут параметрическими уравнениями цилиндра, φ и z — параметры, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq z \leq 3$. Радиус-вектор точки $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\varphi, z) = \{2 \cos \varphi, 2 \sin \varphi, z\}$. Отсюда находим

$$\mathbf{r}_\varphi = \{-2 \sin \varphi, 2 \cos \varphi, 0\},$$

$$\mathbf{r}_z = \{0, 0, 1\}.$$

Тогда $\mathbf{r}_\varphi \times \mathbf{r}_z = \{2 \cos \varphi, 2 \sin \varphi, 0\} = \mathbf{N}$ — нормальный вектор касательной плоскости к S . Мы видим, что вектор $\mathbf{N}$ параллелен плоскости xOy . Отметим, что $|\mathbf{N}| = |\mathbf{r}_\varphi \times \mathbf{r}_z| = 2 \neq 0$ всюду на S .

3. Пусть S — сфера $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Переходя к сферическим координатам, мы получаем параметрические уравнения сферы

$$x = R \cos \varphi \sin \theta, \quad y = R \sin \varphi \sin \theta, \quad z = R \cos \theta.$$

Здесь φ и θ — параметры, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$. Вектор-функция $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\varphi, \theta) = \{R \cos \varphi \sin \theta, R \sin \varphi \sin \theta, R \cos \theta\}$ определяет радиус-вектор точки сферы. Найдем векторы $\mathbf{r}_\varphi$, $\mathbf{r}_\theta$ и $\mathbf{r}_\varphi \times \mathbf{r}_\theta$. Вычисляя производные, получаем

$$\mathbf{r}_\varphi = \{-R \sin \varphi \sin \theta, R \cos \varphi \sin \theta, 0\},$$

$$\mathbf{r}_\theta = \{R \cos \varphi \cos \theta, R \sin \varphi \cos \theta, -R \sin \theta\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_\varphi \times \mathbf{r}_\theta &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -R \sin \varphi \sin \theta & R \cos \varphi \sin \theta & 0 \\ R \cos \varphi \cos \theta & R \sin \varphi \cos \theta & -R \sin \theta \end{vmatrix} = \\ &= R^2 \{-\cos \varphi \sin^2 \theta, -\sin \varphi \sin^2 \theta, -\sin \theta \cos \theta\}, \end{aligned}$$

следовательно, $|\mathbf{r}_\varphi \times \mathbf{r}_\theta| = R^2 \sin \theta$.

Пусть поверхность S задана параметрически:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = \{x(u, v), y(u, v), z(u, v)\}, \quad (u, v) \in \Omega,$$

и пусть функция $f(x, y, z)$ определена и непрерывна на S . Тогда можно доказать, что вычисление поверхностного интеграла первого рода

$$\iint_S f(x, y, z) dS \text{ сводится к двойному интегралу:}$$

$$\begin{aligned} \iint_S f(x, y, z) dS &= \\ &= \iint_{\Omega} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv. \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

В частности, если $f(x, y, z) = 1$ и s — площадь поверхности S , то

$$s = \iint_S dS = \iint_{\Omega} |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv.$$

Мы опускаем доказательство этих равенств, отсылая к более подробным курсам математического анализа (см., например, [7] или [11]).

Для параметрического задания поверхности элемент площади поверхности имеет вид $dS = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv$.

Часто используется следующая запись для двойного интеграла в (3.1.1). Пусть $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, $(u, v) \in \Omega$ — параметрические уравнения поверхности S . Положим

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2;$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2;$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}.$$

Несложно заметить, что $E = |\mathbf{r}_u|^2$, $G = |\mathbf{r}_v|^2$, $F = (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)$ — скалярное произведение векторов $\mathbf{r}_u$ и $\mathbf{r}_v$. Тогда справедливо равенство

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{\Omega} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

Таким образом, $dS = \sqrt{EG - F^2} du dv$.

Заметим, что формула, полученная в начале этого пункта для случая, когда поверхность S есть график функции $z = \varphi(x, y)$, является частным случаем формулы (3.1.1), что следует из примера 3.1.2.1.

ПРИМЕР 3.1.3. Вычислить интеграл $\iint_S z dS$, где S — боковая сторона цилиндра $x^2 + y^2 = 4$, $0 \leq z \leq 3$.

Как мы видели в примере 3.1.2.2, поверхность S задается с помощью параметров φ и z : $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\varphi, z) = \{2 \cos \varphi, 2 \sin \varphi, z\}$, $\Omega = \{(\varphi, z): 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 3\}$. Используя наши вычисления из примера 2 и формулу (3.1.1), мы получаем

$$\iint_S z dS = \iint_{\Omega} z 2 d\varphi dz = 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 z dz = 4\pi \left. \frac{z^2}{2} \right|_0^3 = 18\pi.$$

3.1.3. Применение поверхностного интеграла первого рода

Мы видели в начале параграфа, как можно найти массу вещества, непрерывно распределенного по поверхности S с поверхностной плотностью $\rho(x, y, z) = \rho(M)$:

$$m = \iint_S \rho(x, y, z) dS.$$

Из свойств поверхностного интеграла первого рода, а именно из того, что $\iint_S dS = s$, где s — площадь S , мы получаем формулу для нахождения площади поверхности с помощью поверхностного интеграла первого рода. Кроме того, с помощью поверхностного интеграла первого рода можно вычислять статические моменты, моменты инерции, координаты центра масс и подобные величины для материальных поверхностей с известной поверхностной плотностью распределения масс.

ПРИМЕР 3.1.4. Найти площадь части поверхности геликоида S : $x = u \cos v, y = u \sin v, z = v$, $\Omega: 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2\pi$.

Радиус-вектор точки поверхности S имеет вид

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = \{u \cos v, u \sin v, v\}.$$

Отсюда находим

$$\mathbf{r}_u = \{\cos v, \sin v, 0\}, \quad \mathbf{r}_v = \{-u \sin v, u \cos v, 1\}.$$

Тогда $|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = |\{\sin v, -\cos v, u\}| = \sqrt{1+u^2}$. Вычисляем площадь S

$$\begin{aligned} \iint_S dS &= \iint_{\Omega} \sqrt{1+u^2} du dv = \int_0^{2\pi} dv \int_0^1 \sqrt{1+u^2} du = \\ &= 2\pi \int_0^1 \sqrt{1+u^2} du = \left| \begin{array}{l} u = \operatorname{tg} z \\ du = \frac{dz}{\cos^2 z} \\ u = 0 \rightarrow z = 0 \\ u = 1 \rightarrow z = \pi/4 \end{array} \right| = \\ &= 2\pi \int_0^{\pi/4} \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 z} \frac{dz}{\cos^2 z} = 2\pi \int_0^{\pi/4} \frac{dz}{\cos^3 z} = \\ &= 2\pi \int_0^{\pi/4} \frac{\cos z dz}{\cos^4 z} = \left| \begin{array}{l} \sin z = t \\ \cos z dz = dt \\ z = 0 \rightarrow t = 0 \\ z = \pi/4 \rightarrow t = \sqrt{2}/2 \end{array} \right| = \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{dt}{(1-t^2)^2} = \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\sqrt{2}/2} \left[\frac{1}{(t-1)^2} - \frac{1}{t-1} + \frac{1}{t+1} + \frac{1}{(t+1)^2} \right] dt. \end{aligned}$$

Продолжаем вычисления:

$$\begin{aligned} \iint_S dS &= \frac{\pi}{2} \left(\ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right| - \frac{2t}{t^2-1} \right) \Big|_0^{\sqrt{2}/2} = \\ &= \pi \left[\sqrt{2} + \frac{1}{2} \ln(3+2\sqrt{2}) \right]. \end{aligned}$$

§ 3.2. Поверхностные интегралы второго рода

3.2.1. Ориентация поверхности

Поверхностные интегралы второго рода определяются для векторных полей, причем не просто по поверхности, а по определенной ее стороне. Под векторным полем мы понимаем здесь векторную функцию трех переменных вида $\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$.

Остановимся подробнее на определении стороны поверхности (рис. 3.4). Пусть S — гладкая поверхность. Вектор, перпендикулярный касательной плоскости к S называется нормальным вектором поверхности S . Возьмем на S точку M и рассмотрим в этой точке единичный нормальный вектор $\mathbf{n}(M)$. Рассмотрим далее на поверхности S какой-либо контур L , проходящий через точку M и не пересекающий край поверхности S . Будем перемещать точку M по контуру L вместе с вектором $\mathbf{n}$ так, чтобы вектор $\mathbf{n}$ все время оставался нормальным к S и чтобы его направление менялось непрерывно. Тогда в начальное положение, после обхода всего контура, точка M вернется либо с тем же направлением нормали, либо с противоположным.

Если обход по любому контуру, лежащему на поверхности S и не пересекающему ее границы, при возвращении в исходную точку не меняет направления нормали к поверхности, то поверхность называется двусторонней. Если же на поверхности S существует контур, при обходе которого направление нормали, изменяясь непрерывно, после возвращения в исходную точку меняется на противоположное, то поверхность называется односторонней.

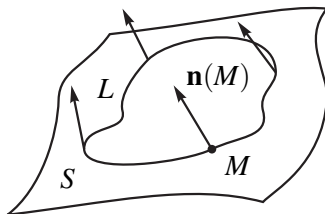


Рис. 3.4

Примерами двусторонних поверхностей служат плоскость, сфера, график функции $z = \varphi(x, y)$, где функции $\varphi(x, y)$, $\varphi'_x(x, y)$ и $\varphi'_y(x, y)$ непрерывны в некоторой области G плоскости xOy .

Простейшим примером односторонней поверхности служит лист Мёбиуса. Его можно получить следующим образом. Рассмотрим прямоугольник $ABCD$. Склеим стороны AB и CD , повернув сторону CD

на 180° , т.е. при склеивании точка A склеится с точкой C , а точка B — с точкой D . Средняя линия MN прямоугольника склеится в контур L на полученной поверхности. При перемещении вектора единичной нормали вдоль контура L этот вектор приходит в исходную точку с противоположным начальному направлением.

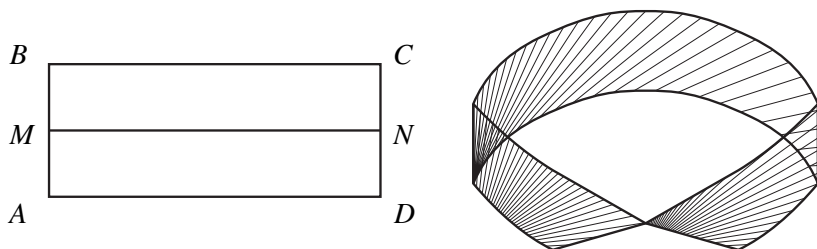


Рис. 3.5

Таким образом, если бы мы начали красить одностороннюю поверхность в какой-то цвет, не отрывая при этом кисти от поверхности и не пересекая ее края, то через некоторое время вся поверхность оказалась бы покрашенной в этот цвет. Если бы мы точно так же начали закрашивать двустороннюю поверхность, то через некоторое время обнаружили бы, что покрашена только часть поверхности (одна сторона), а другую часть можно закрасить, только пересекая край поверхности или же отрывая кисть от поверхности.

Далее мы будем рассматривать только двусторонние поверхности. Для двусторонней поверхности множество всех ее точек с выбранным в них направлением нормального вектора, изменяющимся непрерывно при переходе от точки к точке, называется *стороной* поверхности, а вектор, определяющий сторону, называется *ориентацией* поверхности. Двустороннюю поверхность называют также *ориентируемой*. Если у двусторонней поверхности мы выбрали сторону, то эта сторона называется *ориентированной* поверхностью.

Рассмотрим, например, сферу. Выбирая в некоторой ее точке единичную нормаль, мы одновременно выбираем и сторону сферы — внутреннюю (обращенную к центру) или внешнюю. У сферы, таким образом, есть две ориентированные поверхности — внутренняя сторона сферы и внешняя сторона.

Мы описали двусторонние гладкие поверхности и указали, как выбрать одну определенную сторону поверхности из двух возможных. Наше описание не годится для кусочно-гладких поверхностей, так как при переходе через ребро — стык двух гладких кусков, нормальный вектор меняет направление скачком, т.е. терпит разрыв (рис. 3.6).

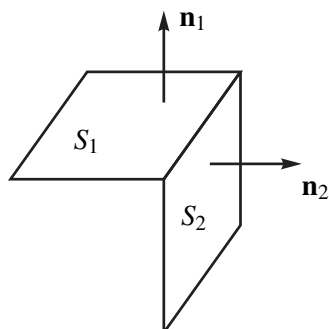


Рис. 3.6

Многие часто встречающиеся простые поверхности являются кусочно-гладкими, например — поверхность куба или пирамиды. Поэтому отказываться от рассмотрения негладких, но кусочно-гладких поверхностей, было бы неразумно.

Ориентируют кусочно-гладкую поверхность с помощью ориентации краев гладких кусков, составляющих поверхность. Напомним, что ориентация кривой — это выбор направления обхода этой кривой.

Пусть S — гладкая ориентированная поверхность с краем Γ — простым контуром (рис. 3.7).

Будем считать положительным направлением обхода контура Γ то направление, при движении по которому выбранная сторона поверхности остается слева. Противоположное направление обхода называется отрицательным. Напомним, что ориентированная поверхность — это зафиксированная сторона двусторонней поверхности.

Пусть теперь $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n$ — кусочно-гладкая поверхность, S_i — гладкие поверхности, Γ_i — край S_i . Пусть S_i и S_j — соседние куски, т.е. края Γ_i и Γ_j имеют общую часть — кривую γ . Ориентируем каждую из частей S_i и S_j и, тем самым, мы задаем направление обходов краев Γ_i и Γ_j (рис. 3.8).

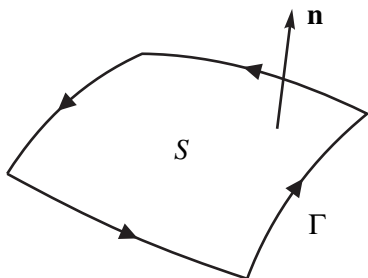


Рис. 3.7

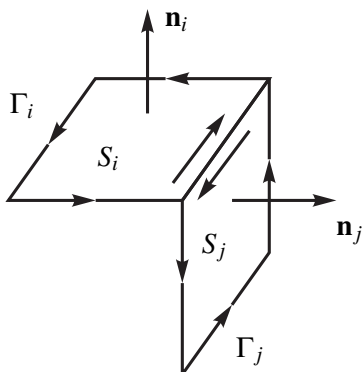


Рис. 3.8

Ориентация частей S_i и S_j (выбор стороны) называется согласованной, если при положительном направлении обхода краев Γ_i и Γ_j движение по общей части $\gamma = \Gamma_i \cap \Gamma_j$ происходит в противоположных направлениях.

Кусочно-гладкая поверхность $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n$ где S_i — гладкие части S , называется ориентируемой (двусторонней), если все части S_i можно ориентировать так, что любые два соседних гладких куска будут ориентированы согласованно.

Легко заметить, например, что поверхность куба — ориентируемая поверхность. Мы можем выбрать внутреннюю сторону поверхности или внешнюю. При этом все соседние грани куба будут ориентированы согласованно.

3.2.2. Определение поверхностного интеграла второго рода и его свойства

Пусть S — гладкая ориентированная поверхность (т.е. сторона поверхности уже выбрана), и на S определено векторное поле $\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k} = \{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\}$. Через $\mathbf{n}$ обозначим непрерывный единичный вектор нормали поверхности S , определяющий сторону поверхности.

Поверхностным интегралом второго рода от векторного поля $\mathbf{F}$ по ориентированной поверхности S называется интеграл первого рода

по S

$$\iint_S \mathbf{F} d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \mathbf{n} dS$$

от скалярного произведения $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma$ векторного поля $\mathbf{F} = \{P, Q, R\}$ и единичного нормального вектора

$$\mathbf{n} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\},$$

определяющего сторону S .

Выражение $d\mathbf{S} = \mathbf{n}(M) dS$ называется дифференциальным элементом ориентированной поверхности S в точке $M \in S$ и является векторной величиной.

Если S — кусочно-гладкая поверхность и $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n$, где S_i — гладкие части S , то поверхностным интегралом второго рода от $\mathbf{F}$ по S называется сумма

$$\iint_S \mathbf{F} d\mathbf{S} = \sum_{i=1}^n \iint_{S_i} \mathbf{F} d\mathbf{S}.$$

Поскольку поверхностный интеграл второго рода определяется через поверхностный интеграл первого рода, то для него справедливы свойства линейности и аддитивности. Отметим свойство поверхностного интеграла второго рода, которого нет у поверхностного интеграла первого рода.

Теорема 3.2.1. *Поверхностный интеграл второго рода зависит от ориентации поверхности, т.е. если S^+ — одна сторона поверхности S , а S^- — другая, то справедливо равенство*

$$\iint_{S^+} \mathbf{F} d\mathbf{S} = - \iint_{S^-} \mathbf{F} d\mathbf{S}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть случай, когда S — гладкая ориентируемая поверхность. Пусть $\mathbf{n}$ — непрерывный вектор единичной нормали, определяющий сторону S^+ . Тогда вектор $\mathbf{m} = -\mathbf{n}$ будет определять сторону S^- . Поэтому мы имеем

$$\iint_{S^+} \mathbf{F} d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \mathbf{n} dS,$$

с одной стороны, и

$$\iint_{S^-} \mathbf{F} d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \mathbf{m} dS = - \iint_S \mathbf{F} \mathbf{n} dS$$

— с другой. Из сравнения правых частей этих равенств следует утверждение теоремы.

3.2.3. Физический смысл поверхностного интеграла второго рода

Поверхностный интеграл второго рода от векторного поля $\mathbf{F}$ часто называют потоком векторного поля через заданную сторону поверхности S . Выясним происхождение этой терминологии, рассмотрим гидромеханическую интерпретацию векторного поля.

Пусть $\mathbf{v}(M) = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ — скорость движения жидкости в точке M . Вычислим количество Π жидкости, протекающей за единицу времени через ориентированную поверхность S , считая плотность жидкости $\rho = 1$. Для простоты считаем поверхность гладкой.

Разобьем поверхность S произвольно на n частей, $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n$, с площадями $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$. В каждой из частей выберем точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$. Найдем количество жидкости Π_i , протекающей через площадку S_i за единицу времени. Если разбиение поверхности S достаточно мелкое, то можно считать, что скорость $\mathbf{v}$ постоянна на S_i , т.е. $\mathbf{v}(M) = \mathbf{v}(M_i) = \mathbf{v}_i$ при $M \in S_i$, а сам участок S_i можно считать плоским, тогда $\mathbf{n}(M) = \mathbf{n}(M_i) = \mathbf{n}_i$ при $M \in S_i$. При этих предположениях величина Π_i приближенно равна объему цилиндра с площадью основания ΔS_i и высотой, равной модулю проекции вектора $\mathbf{v}_i$ на нормальный вектор $\mathbf{n}_i$, т.е. $\Pi_i \approx \pm \Delta S_i h$, где h — указанная проекция, а знак берется в зависимости от направления движения. Если $\varphi_i = (\widehat{\mathbf{v}_i, \mathbf{n}_i})$ — острый угол, т.е. жидкость течет в сторону, куда указывает вектор $\mathbf{n}_i$, то величину Π_i считаем положительной, $\Pi_i \approx h_i \Delta S_i$. Если угол φ_i тупой, т.е. жидкость течет в обратную сторону, то отрицательной. Таким образом, $\Pi_i \approx \text{пр}_{\mathbf{n}_i} \mathbf{v}_i \cdot \Delta S_i = |\mathbf{v}_i| \cos \varphi_i \Delta S_i = \mathbf{v}_i \mathbf{n}_i \Delta S_i$. Суммируя по i от 1 до n , получаем приближенное значение количества жидкости Π , протекающей через ориентированную поверхность S за единицу

времени,

$$\Pi = \sum_{i=1}^n \Pi_i \approx \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_i \mathbf{n}_i \Delta S_i.$$

Но поскольку

$$\iint_S \mathbf{v} dS = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_i \mathbf{n}_i \Delta S_i,$$

где $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} d(S_i)$, то окончательно получаем

$$\Pi = \iint_S \mathbf{v} dS = \iint_S \mathbf{v} dS.$$

3.2.4. Вычисление поверхностного интеграла второго рода

Пусть S — ориентированная гладкая поверхность, $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали, определяющий выбранную сторону S . Тогда, как известно из векторной алгебры, $\mathbf{n} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$, где $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ — направляющие косинусы вектора $\mathbf{n}$. Если $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ — векторное поле, определенное на S , то, согласно определению поверхностного интеграла второго рода,

$$\iint_S \mathbf{F} dS = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS.$$

Эта формула позволяет нам вычислять поверхностный интеграл второго рода от $\mathbf{F}$ по поверхности S , так как вычисление интегралов первого рода мы уже рассматривали. Но в некоторых случаях бывает удобнее переходить от поверхностного интеграла второго рода не к поверхностному интегралу первого рода, а непосредственно к двойным интегралам. Эти случаи мы сейчас и рассмотрим.

Положим

$$\begin{aligned} \iint_S P \cos \alpha dS &= \iint_S P dydz; \\ \iint_S Q \cos \beta dS &= \iint_S Q dzdx; \\ \iint_S R \cos \gamma dS &= \iint_S R dx dy. \end{aligned}$$

В обоснование этих равенств может быть взято интуитивное соображение о том, что элемент площади dS поверхности S , помноженный на косинус угла, который он «составляет» с плоскостью xOy (речь идет о последнем, третьем равенстве), равен элементу площади $dxdy$ этой плоскости, т.е. соотношение между dS и $dxdy$ такое же, как если бы речь шла о площади плоской фигуры и ее проекции: $\cos \gamma dS \approx dxdy$.

Тогда для поверхностного интеграла второго рода мы получаем следующий вид:

$$\iint_S \mathbf{F} d\mathbf{S} = \iint_S P dydz + Q dzdx + R dxdy.$$

Хотя справа и стоит сумма трех интегралов, скобки по традиции не ставятся, так как $P dydz + Q dzdx + R dxdy$ считается одним цельным подынтегральным выражением.

Рассмотрим интеграл $\iint_S R(x, y, z) dxdy$, и пусть S есть график функции $z = f(x, y)$, а область ее определения — область G есть проекция S на плоскость xOy . Тогда $\mathbf{r}(x, y) = \{x, y, f(x, y)\}$ — это радиус-вектор точки поверхности S , а векторы $\mathbf{r}_x = \{1, 0, f'_x\}$, $\mathbf{r}_y = \{0, 1, f'_y\}$, где $f'_x = \frac{\partial f}{\partial x}$, $f'_y = \frac{\partial f}{\partial y}$, будут параллельны касательной плоскости к S в точке $M(x, y, z)$, $z = f(x, y)$. Следовательно, векторы $\mathbf{n} = \pm \frac{\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y}{|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y|}$ являются единичными векторами нормали поверхности S , направленными противоположно. Выбирая определенный знак перед дробью, мы выбираем сторону S .

Так как $\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \{-f'_x, -f'_y, 1\}$, то, выбирая $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y}{|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y|}$, мы выбираем «верхнюю» сторону поверхности. На ней вектор

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}} \{-f'_x, -f'_y, 1\}$$

составляет острый угол с осью Oz . В данном случае

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= -\frac{f'_x}{\sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}}; \\ \cos \beta &= -\frac{f'_y}{\sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}}; \\ \cos \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}}.\end{aligned}$$

Напомним, что если поверхность S есть график функции $z = f(x, y)$, то элемент площади dS имеет вид

$$dS = \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2} dx dy.$$

Учитывая все сказанное, получаем

$$\begin{aligned}\iint_S R(x, y, z) dx dy &= \int_S R(x, y, z) \cos \gamma dS = \\ &= \iint_G R(x, y, f(x, y)) \frac{\sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2} dx dy}{\sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}} = \\ &= \iint_F R(x, y, f(x, y)) dx dy.\end{aligned}$$

Если мы выберем «нижнюю» сторону S , то $\cos \gamma = -\frac{1}{\sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}}$, и тогда мы получим

$$\iint_S R(x, y, z) dx dy = - \iint_G R(x, y, f(x, y)) dx dy.$$

Аналогично рассматриваются два других интеграла, поэтому мы приведем только окончательные формулы.

Пусть S есть график функции $z = h(y, z)$ и D — это проекция S на плоскость yOz . Геометрически это означает, что прямая, параллельная оси Ox и проходящая через D , пересекает поверхность S только один раз. Тогда если мы выберем сторону S так, что определяющий ее

единичный вектор нормали образует острый угол с осью Ox , то

$$\iint_S P(x, y, z) dydz = \int_D P(h(y, z), y, z) dydz.$$

Если вектор нормали, соответствующий выбранной стороне, образует с Ox тупой угол, то

$$\iint_S P(x, y, z) dydz = - \int_D P(h(y, z), y, z) dydz.$$

Пусть, наконец, S есть график функции $y = g(x, z)$ и Ω — проекция S на плоскость xOz . Если $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали S , определяющий сторону поверхности, то при $(\widehat{\mathbf{n}, Oy}) < \pi/2$

$$\iint_S Q(x, y, z) dzdx = \iint_{\Omega} Q(x, g(x, z), z) dx dz,$$

а при $(\widehat{\mathbf{n}, Oy}) > \pi/2$

$$\iint_S Q(x, y, z) dzdx = - \iint_{\Omega} Q(x, g(x, z), z) dx dz.$$

Если поверхность не проектируется на координатную плоскость взаимнооднозначно (в этом случае она не является графиком соответствующей функции), то нужно либо разбить поверхность на части, которые уже будут графиками функций, либо перейти к поверхностному интегралу первого рода.

ПРИМЕР 3.2.1. 1. Вычислить интеграл $\iint_S x dydz + z dx dy$, где S — верхняя сторона части плоскости $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$ в первом октанте (рис. 3.9).

Поскольку поверхность S взаимно однозначно проектируется на все три координатные плоскости, то вычислим оба интеграла в сумме по отдельности. Имеем

$$\begin{aligned} \iint_S x dydz &= \iint_D 2 \left(1 - \frac{y}{3} - \frac{z}{4} \right) dydz = \\ &= 2 \int_0^3 dy \int_0^{4-4y/3} \left(1 - \frac{y}{3} - \frac{z}{4} \right) dz = \end{aligned}$$

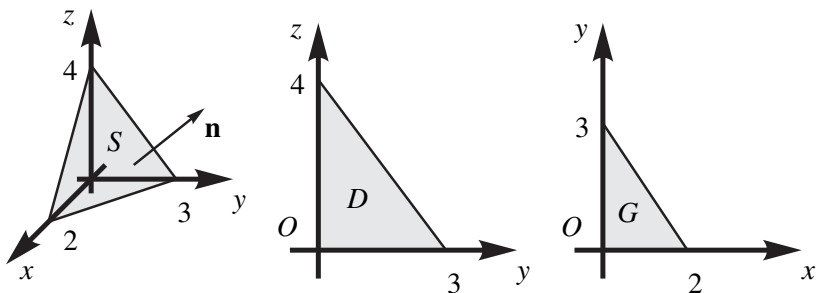


Рис. 3.9

$$\begin{aligned}
 &= 2 \int_0^3 \left(z - \frac{yz}{3} - \frac{z^2}{8} \right) \Big|_{z=0}^{z=4-4y/3} dy = \\
 &= 4 \int_0^3 \left(1 - \frac{2}{3}y + \frac{1}{9}y^2 \right) dy = 4 \left(y - \frac{y^2}{3} - \frac{y^3}{27} \right) \Big|_0^3 = 4.
 \end{aligned}$$

Вычисляем второй интеграл

$$\begin{aligned}
 \iint_S z dx dy &= 4 \iint_G \left(1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{3} \right) dx dy = \\
 &= 4 \int_0^2 dx \int_0^{3-3x/2} \left(1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{3} \right) dy = \\
 &= 4 \int_0^2 \left(y - \frac{xy}{2} - \frac{y^2}{6} \right) \Big|_{y=0}^{y=3-3x/2} dx = \\
 &= 6 \int_0^2 \left(1 - x + \frac{x^2}{4} \right) dx = 6 \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{12} \right) \Big|_0^2 = 4.
 \end{aligned}$$

Итак,

$$\iint_S x dy dz + z dx dy = 4 + 4 = 8.$$

Вычислим этот же интеграл, перейдя к поверхностному интегралу первого рода. Напомним, если поверхность S задана неявно: $\Phi(x, y, z) = 0$, то вектор $\mathbf{N} = \text{grad } \Phi = \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right\}$ будет

нормальным вектором поверхности S . В нашем случае $\Phi(x, y, z) = \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} - 1$. Поэтому $\mathbf{N} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \right\}$ — нормальный вектор нашей плоскости. Вектор $\mathbf{n} = \left\{ \frac{6}{\sqrt{61}}, \frac{4}{\sqrt{61}}, \frac{3}{\sqrt{61}} \right\}$ будет единичным вектором нормали S , образующим острый угол с осью Oz , т.е. определяющим верхнюю сторону. Тогда из формулы $\iint_S \mathbf{F} d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \mathbf{n} dS$ мы получаем

$$\iint_S x dy dz + z dx dy = \iint_S \frac{6x + 3z}{\sqrt{61}} dS.$$

Спроектируем S на плоскость xOy . Тогда S есть график функции $z = 4 \left(1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{3} \right)$ с областью определения

$$G = \left\{ (x, y) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3 - \frac{3}{2}x \right\}.$$

Отсюда находим

$$dS = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy = \sqrt{1 + 4 + \frac{16}{9}} dx dy = \frac{\sqrt{61}}{3} dx dy.$$

Вычисляем интеграл

$$\begin{aligned} \iint_S \frac{6x + 3z}{\sqrt{61}} dS &= \frac{1}{\sqrt{61}} \iint_G \left[6x + 12 \left(1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{3} \right) \right] \frac{\sqrt{61}}{3} dx dy = \\ &= 4 \iint_G \left(1 - \frac{y}{3} \right) dx dy = 4 \int_0^3 dy \int_0^{2-2y/3} \left(1 - \frac{y}{3} \right) dx = \\ &= 8 \int_0^3 \left(1 - \frac{y}{3} \right)^2 dy = -8 \left(1 - \frac{y}{3} \right)^3 \Big|_0^3 = 8. \end{aligned}$$

2. Вычислить интеграл $\iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy$, где S — внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Замкнутая поверхность взаимно однозначно заведомо не проецируется ни на одну координатную плоскость. Рассматривать разбиение сферы на полусферы для каждого из трех интегралов нерацionalmente. Здесь удобнее перейти к поверхностному интегралу первого рода. У нас

$$S: \Phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0,$$

значит, вектор $\mathbf{N} = \text{grad} \Phi = \{2x, 2y, 2z\}$ будет нормальным к S , и, кстати, направлен от начала координат. Следовательно, $\mathbf{n} = \frac{1}{R}\{x, y, z\}$ будет единичным вектором нормали, определяющим внешнюю сторону сферы. Мы имеем $\cos \alpha = \frac{x}{R}$, $\cos \beta = \frac{y}{R}$, $\cos \gamma = \frac{z}{R}$, значит,

$$\begin{aligned} \iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy &= \iint_S \frac{x^2 + y^2 + z^2}{R} dS = \\ &= \iint_S \frac{R^2}{R} dS = R \iint_S dS = 4\pi R^3, \end{aligned}$$

так как площадь сферы равна $4\pi R^2$.

3.2.5. Формула Остроградского

Здесь мы рассмотрим формулу, связывающую тройной интеграл с поверхностным. Формула играет очень важную роль в приложениях, в частности в теории поля, которую мы рассмотрим ниже.

Напомним определение области, нормальной относительно координатной оси (рис. 3.10). Область V называется нормально относительно оси Oz , если ее можно задать следующим образом:

$$V = \{(x, y, z) : (x, y) \in G, \\ \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\},$$

где $G \subset xOy$ — проекция V на плоскость xOy , $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ — непрерывные функции на G . Аналогично определяются области, нормальные относительно осей Ox и Oy . Если область нормальна относительно всех координатных осей, то она называется нормальной.

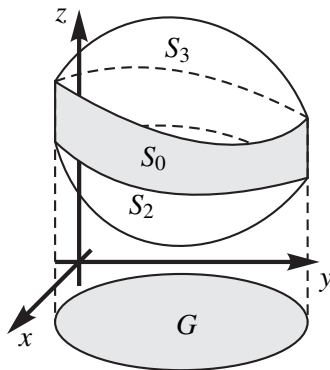


Рис. 3.10

Таким образом, если область V нормальна относительно оси Oz , то граница V состоит из поверхностей S_1 и S_2 , заданных явно как графики функций $S_1 : z = \varphi(x, y)$, $S_2 : z = \psi(x, y)$ и, может быть, части

S_0 цилиндра, направляющей которого является граница Γ области G , а образующие параллельны оси Oz .

Теорема 3.2.2. Пусть V — ограниченная замкнутая область с границей S , нормальная относительно всех координатных осей, и пусть в области V определены функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$, непрерывные в V и имеющие в V непрерывные производные $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial z}$. Тогда справедлива формула, называемая формулой Остроградского,

$$\begin{aligned} \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \\ = \iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy, \end{aligned}$$

где поверхностный интеграл в правой части вычислен по внешней стороне поверхности S .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим интеграл $\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz$ и представим область V в виде

$$V = \{(x, y, z) : (x, y) \in G, \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz &= \iint_G \left(\int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz \right) dx dy = \\ &= \iint_G [R(x, y, \psi(x, y)) - R(x, y, \varphi(x, y))] dx dy. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим поверхностный интеграл

$$\iint_S R(x, y, z) dx dy = \iint_S R(x, y, z) \cos \gamma dS.$$

На поверхности S_0 единичный вектор внешней нормали параллелен плоскости xOy , следовательно, на S_0 $\cos \gamma = 0$. На поверхности S_1 угол

$(\widehat{\mathbf{n}}, Oz)$ тупой, а на S_2 — острый. Поэтому мы получаем

$$\begin{aligned} \iint_S R dx dy &= \iint_{S_0} R dx dy + \iint_{S_1} R dx dy + \iint_{S_2} R dx dy = \\ &= - \iint_G R(x, y, \varphi(x, y)) dx dy + \iint_G R(x, y, \psi(x, y)) dx dy \end{aligned}$$

и видим, что тройной интеграл оказался равен поверхностному

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_S R dx dy.$$

Аналогично доказываются равенства:

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz &= \iint_S P dy dz, \\ \iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz &= \iint_S Q dz dx. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Теорема Остроградского верна и для областей более общего вида. Теорема остается верной, если область V можно разбить на конечное число областей, нормальных относительно всех координатных осей.

Выражение $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ называется дивергенцией векторного поля $\mathbf{F} = \{P, Q, R\}$ и обозначается $\operatorname{div} \mathbf{F}$. Таким образом, $\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$. Используя это обозначение, формулу Остроградского можно записать в виде

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F} dx dy dz = \iint_S \mathbf{F} d\mathbf{S}.$$

С помощью формулы Остроградского часто бывает удобно вычислять поверхностные интегралы.

ПРИМЕР 3.2.2. Вычислить интеграл

$$\iint_S (yz + x) dy dz + (x^2 + y) dz dx + (xy^2 + z) dx dy,$$

где S — внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$.

Сфера S ограничивает шар $V: x^2 + y^2 + (z - 1)^2 \leq 1$. Применяя формулу Остроградского, получаем

$$\begin{aligned} \iint_S (yz + x) dydz + (x^2 + y) dzdx + (xy^2 + z) dxdy = \\ = \iiint_V (1 + 1 + 1) dxdydz = 3 \iiint_V dxdydz = 3 \cdot \frac{4}{3} \pi = 4\pi, \end{aligned}$$

так как объем шара V равен $4\frac{\pi}{3}$.

3.2.6. Формула Стокса

Формула Стокса устанавливает связь между поверхностным интегралом и интегралом по контуру — краю этой поверхности. Наряду с формулой Остроградского формула Стокса играет очень важную роль в различных приложениях в механике и физике.

Теорема 3.2.3. Пусть функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка в некоторой трехмерной области V . Тогда для любой гладкой поверхности S с краем Γ , лежащей в области V , имеет место формула, называемая формулой Стокса,

$$\begin{aligned} \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \\ + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \int_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz, \end{aligned}$$

где в криволинейном интеграле обход контура Γ осуществляется в положительном направлении относительно выбранной стороны поверхности S .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для простоты будем считать, что вектор единичной нормали $\mathbf{n} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$, определяющий сторону S , образует острые углы со всеми осями координат.

Очевидно, теорема будет доказана, если будут доказаны равенства

$$\iint_S \frac{\partial P}{\partial z} dzdx - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_{\Gamma} P dx,$$

$$\iint_S \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy - \frac{\partial Q}{\partial z} dy dz = \int_{\Gamma} Q dy,$$

$$\iint_S \frac{\partial R}{\partial y} dy dz - \frac{\partial R}{\partial x} dz dx = \int_{\Gamma} R dz.$$

Мы докажем только первое из этих равенств, поскольку все они доказываются однотипно.

Обозначим через G проекцию S на плоскость xOy , через γ — границу G . Очевидно, γ есть проекция края Γ на плоскость xOy . Поверхность S есть график некоторой дифференцируемой функции $z = \varphi(x, y)$, $(x, y) \in G$. Тогда вектор $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|}$,

где $\mathbf{N} = \left\{ -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, 1 \right\}$, будет единичным вектором нормали S ,

определяющим верхнюю сторону S . Положим $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = p$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = q$,

тогда $\mathbf{n} = \left\{ -\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, -\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \right\}$, следовательно, $\cos \alpha = -\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$, $\cos \beta = -\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$, $\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$. Тогда, преобразуя поверхностный интеграл, получаем

$$\begin{aligned} \iint_S \frac{\partial P}{\partial z} dz dx - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cos \beta - \frac{\partial P}{\partial x} \cos \gamma \right) dS = \\ &= - \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial y} + q \frac{\partial P}{\partial z} \right) \frac{dS}{\sqrt{1+p^2+q^2}}. \end{aligned}$$

Если продифференцируем $P(x, y, \varphi(x, y))$ как сложную функцию по y , то получим

$$\frac{\partial}{\partial y} P(x, y, z) = \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} + q \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Учитывая, что $\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \cos \gamma$, имеем

$$\begin{aligned} \iint_S \frac{\partial P}{\partial z} dz dx - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= - \iint_S \frac{\partial}{\partial y} P(x, y, \varphi(x, y)) \cos \gamma dS = \\ &= - \iint_S \frac{\partial}{\partial y} P(x, y, \varphi(x, y)) dx dy = - \iint_G \frac{\partial}{\partial y} P(x, y, \varphi(x, y)) dx dy. \end{aligned}$$

Применим к двойному интегралу в правой части формулу Грина (рассматривая в G векторное поле $\vec{P}(x, y)\mathbf{i} + \vec{Q}(x, y)\mathbf{j}$, где $\vec{P}(x, y) = P(x, y, \varphi(x, y))$, $\vec{Q}(x, y) = 0$). Тогда

$$- \iint_G \frac{\partial}{\partial y} P(x, y, \varphi(x, y)) dx dy = \int_{\gamma} P(x, y, \varphi(x, y)) dx.$$

Теперь рассмотрим криволинейный интеграл $\int_{\Gamma} P(x, y, z) dx$. Зададим кривую γ в плоскости xOy параметрически $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$. Это можно сделать, например, используя натуральный параметр. Но тогда, так как контур Γ принадлежит S , то для точки $(x, y, z) \in \Gamma$ мы имеем: $(x, y) \in \gamma$, $z = \varphi(x, y)$. Но тогда мы получаем параметрические уравнения, задающие контур Γ : $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t) = \varphi(x(t), y(t))$, $\alpha \leq t \leq \beta$. Сведем криволинейные интегралы по контурам Γ и γ к определенным интегралам, используя параметрическое задание контуров Γ и γ . Получим

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} P(x, y, z) dx &= \int_{\alpha}^{\beta} P(x(t), y(t), \varphi(x(t), y(t))) x'(t) dt, \\ \int_{\gamma} P(x, y, \varphi(x, y)) dx &= \int_{\alpha}^{\beta} P(x(t), y(t), \varphi(x(t), y(t))) x'(t) dt. \end{aligned}$$

Мы видим, что $\int_{\Gamma} P(x, y, z) dx = \int_{\gamma} P(x, y, \varphi(x, y)) dx$. Отсюда и из того, что $\iint_S \frac{\partial P}{\partial z} dz dx - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_{\gamma} P(x, y, \varphi(x, y)) dx$, следует искомое равенство.

Оставшиеся равенства доказываются аналогично, только при этом нужно рассмотреть проекции S на координатные плоскости yOz и xOz соответственно. Теорема доказана.

Теорема Стокса остается справедливой и для более общих поверхностей, например для ограниченной кусочно-гладкой ориентируемой поверхности с кусочно-гладким краем.

В гл. 2 был введен ротор векторного поля $\mathbf{F}$. Используя его, обозначение формулу Стокса можно записать в следующем виде:

$$\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} d\mathbf{S} = \int_{\Gamma} \mathbf{F} d\mathbf{l}.$$

Заметим, что КИ-2 $\int_{\Gamma} \mathbf{F} d\mathbf{l}$ сводится к поверхностному интегралу по поверхности с краем Γ . Такая поверхность не единственна. Этим часто пользуются для вычисления криволинейных интегралов, выбирая поверхность таким образом, чтобы поверхностный интеграл вычислялся просто.

ПРИМЕР 3.2.3. Вычислить $\int_{\Gamma} (y-z) dx + (z-x) dy + (x-y) dz$, где

Γ — это эллипс, лежащий в пересечении цилиндра $x^2 + y^2 = 4$ с плоскостью $x/2 + z = 1$, пробегаемый против часовой стрелки, если смотреть со стороны положительного направления оси Ox .

В нашем случае векторное поле $\mathbf{F} = \{y-z, z-x, x-y\}$. Найдём его ротор. Вычисляем

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y-z & z-x & x-y \end{vmatrix} = -2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}.$$

Следовательно, применив формулу Стокса, мы получим

$$\int_{\Gamma} (y-z) dx + (z-x) dy + (x-y) dz = -2 \iint_S dydz + dzdx + dxdy.$$

В качестве S возьмем верхнюю сторону плоскости $\frac{x}{2} + z = 1$, ограниченную контуром Γ . Вектор $\mathbf{n} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}} \right\}$ будет единичным вектором нормали плоскости S , составляющим с осью Oz

острый угол. Переходим к поверхностному интегралу первого рода

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} (y-z) dx + (z-x) dy + (x-y) dz &= -2 \iint_S \left(\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}} \right) dS = \\ &= -\frac{6}{\sqrt{5}} \iint_S dS.\end{aligned}$$

Спроектируем S на плоскость xOy . Проекцией будет круг $G = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$. Поскольку S есть график функции $z = 1 - x/2$, то $dS = \sqrt{1 + 1/4} dx dy = \sqrt{5}/2 dx dy$. Отсюда получаем

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} (y-z) dx + (z-x) dy + (x-y) dz &= -\frac{6}{\sqrt{5}} \iint_G \frac{\sqrt{5}}{2} dx dy = \\ &= -3 \iint_G dx dy = -12\pi,\end{aligned}$$

так как площадь круга G равна 4π .

Глава 4

Теория поля

В предыдущих разделах мы рассмотрели элементы теории криволинейных и поверхностных интегралов. Эта теория находит множество приложений в механике и физике. При этом математическая основа физических приложений криволинейных и поверхностных интегралов имеет некоторую общую схему, которую обычно называют математической теорией поля. У нас нет возможности изложить здесь сколько-нибудь обширную и более-менее глубокую теорию поля. Мы представим здесь краткий очерк, описав в нем, может, несколько поверхностно, важнейшие из понятий теории поля и связывающих их соотношений. Новых математических фактов будет немного, значительное место займет терминология. Дело в том, что для большинства понятий и соотношений теории поля в механике и физике используется своя, более наглядная терминология, и будущие инженеры безусловно должны быть с нею знакомы.

§ 4.1. Скалярные и векторные поля

Среди величин, с которыми имеют дело механика и физика, выделяются две важнейшие группы — скалярные и векторные. Скалярной величине соответствуют численные значения, векторной — численное значение и направление. В физике оперируют величинами, описание которых еще сложнее, но мы здесь такие величины затрагивать не будем.

Пусть G — некоторое множество в пространстве (или на плоскости). Если в каждой точке M из G определена скалярная величина u , то говорят, что в G задано скалярное поле. Таким образом, каждой точке M из G соответствует определенное значение u . Обозначим это соответствие $u = f(M)$. Мы получаем, что понятия скалярного поля и функции, определенной в G , совпадают. Как часто говорят, скалярное поле задается с помощью скалярной функции $u = f(M)$. Здесь необходимо сделать замечание. Физическая скалярная величина u (скалярное поле) может зависеть не только от точки M из G , но и от времени t , т.е. правильнее было бы написать $u = f(t, M)$, где t — время. Если скалярное поле не зависит от времени, то оно называется стационарным. *Далее мы будем рассматривать только стационарные скалярные поля.*

Примером скалярного поля является поле температур в пространственной области G , например в некотором помещении. В различных точках G температура — скалярное поле T — различна. Чем ближе к источнику тепла, тем выше температура.

Если в пространстве ввести систему координат $x y z O$, то каждой точке M из G соответствуют свои координаты x, y, z и стационарное скалярное поле полностью определяется скалярной функцией трех действительных переменных $u = f(M) = f(x, y, z)$.

Векторное поле вводится аналогично скалярному. Если в каждой точке M из множества G (G может совпадать и со всем пространством) определен вектор $\mathbf{F} = \mathbf{F}(M)$, то говорят, что на множестве G задано векторное поле. Если векторное поле зависит от времени, то правильнее писать $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t, M)$, где t — время. Если поле не зависит от времени, то оно называется стационарным. *Мы будем рассматривать только стационарные векторные поля.*

Если в пространстве введены координаты $x y z O$, то, во-первых, у каждой точки $M \in G$ появляются свои координаты (x, y, z) , и, во-вторых, у вектора $\mathbf{F}$ можно определить проекции на оси координат, и мы получаем вектор-функцию трех действительных переменных, полностью определяющую векторное поле: $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k} = \{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\}$.

ПРИМЕР 4.1.1. Рассмотрим поле сил тяготения, образованное некоторым притягивающим телом.

Пусть в начале координат O помещено некоторое тело массы m (считаем его материальной точкой массы m). Тогда единичная масса, помещенная в точку $M(x, y, z)$, будет притягиваться к началу координат с силой, равной $\gamma \frac{m}{r^2}$, где γ — гравитационная постоянная, а $r = |\overline{OM}|$ — расстояние от точки M до начала координат, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Таким образом, в каждой точке M , лежащей вне начала координат, определен некоторый вектор силы $\mathbf{F}$, направленный от M к началу координат O и численно равный $\gamma \frac{m}{r^2}$ ($|\mathbf{F}| = \gamma \frac{m}{r^2}$). Мы имеем в данном случае векторное поле. Оно определено во всех точках пространства, кроме начала координат, где вектор $\mathbf{F}$ не определен.

Зададим поле сил тяготения аналитически, в виде вектор-функции. Из того, что $|\mathbf{F}| = \gamma \frac{m}{r^2}$ и вектор $\mathbf{F}$ направлен так же, как вектор $\overline{MO}$, а точка M имеет координаты (x, y, z) , следует: $\mathbf{F} = -\lambda \{x, y, z\}$, где λ — некоторое положительное число. Приравнивая модули, находим λ : $|\mathbf{F}| = \gamma \frac{m}{r^2} = \lambda \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \lambda r$. Следовательно, $\lambda = \gamma \frac{m}{r^3}$. Поэтому

$$\mathbf{F} = -\gamma \frac{m}{r^3} \{x, y, z\} = -\frac{\gamma m x}{r^3} \mathbf{i} - \frac{\gamma m y}{r^3} \mathbf{j} - \frac{\gamma m z}{r^3} \mathbf{k}.$$

Остановимся кратко на геометрических характеристиках поля.

Скалярное поле называется плоскопараллельным, если в пространстве можно выбрать декартову систему координат так, чтобы величина, заданная этим полем, не зависела от одной из координат. Например, выберем систему координат $xyzO$ так, чтобы величина, заданная этим полем, не зависела от z . Тогда скалярное плоскопараллельное поле можно задать формулой $u = f(x, y)$.

Векторное поле называется плоскопараллельным, если в пространстве можно выбрать декартову систему координат так, чтобы вектор поля не зависел от одной из координат и был расположен в плоскости, где эта координата постоянна. Например, выбираем систему координат $xyzO$ так, что вектор поля не зависит от z и расположен во всех точках параллельно плоскости xOy . Тогда это плоскопараллельное поле можно задать формулой $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$.

Ясно, что всякое плоскопараллельное поле можно изучать только на плоскости xOy (за счет выбора системы координат $xyzO$ в пространстве). В любой плоскости, параллельной координатной плоскости xOy , картина будет одна и та же. Поэтому плоскопараллельное поле называют также плоским полем.

Скалярное поле называется сферическим, если скалярная величина, определяемая полем, зависит только от расстояния между точкой и началом координат. Такая величина постоянна на каждой сфере с центром в начале координат. Скалярное сферическое поле задается формулой $u = f(r)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Например, модуль силы притяжения точки $M(x, y, z)$ единичной массы к точечной массе m , расположенной в начале координат, является сферическим скалярным полем:

$$u = |\mathbf{F}| = \frac{\gamma m}{r^2}, \quad \text{где } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Следует заметить, что в математической теории поля той величине, которая задана этим полем, конкретный физический смысл не придается. То есть рассматриваются только самые общие свойства полей, присущие любому скалярному или векторному полю. Результаты, полученные в общей (математической) теории поля, в физике затем применяются к конкретным физическим полям, например к электромагнитному полю, полю температур, полям скоростей и т.д. Такие конкретные поля изучаются различными разделами физики: к тем общим свойствам полей, которые рассматриваются в векторном анализе, добавляются свойства, характерные только для того или иного конкретного поля.

§ 4.2. Векторные линии. Векторные трубки

Векторной линией стационарного векторного поля называется такая линия, у которой касательная в каждой точке направлена вдоль заданного в этой точке векторного поля (рис. 4.1).

Понятие о векторной линии возникает как обобщение линии тока в стационарном потоке жидкости, т.е. линии, по которой движется частица жидкости такого потока.



Рис. 4.1

Хорошо известными примерами векторных линий являются также силовые линии магнитного и электрического полей.

Пусть дано векторное поле $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ и пусть $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ — радиус-вектор точки искомой векторной линии. Касательный вектор $\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}$ направлен, как мы знаем, по касательной к линии. Тогда из условия параллельности векторов $\mathbf{F}$ и $\mathbf{r}'(t)$ вытекает

$$\frac{x'}{P} = \frac{y'}{Q} = \frac{z'}{R}.$$

Отсюда, умножая все части равенства на dt , получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений для нахождения векторной линии (Дифференциальные уравнения, мы рассмотрим ниже). Поэтому при первом чтении текущее изложение материала может восприниматься интуитивно.)

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}.$$

Если эту систему из двух уравнений проинтегрировать, то получим систему двух уравнений с двумя произвольными постоянными: $\varphi_1(x, y, z) = C_1$, $\varphi_2(x, y, z) = C_2$. Геометрически каждое из этих уравнений задает семейство поверхностей в пространстве. При конкретных значениях C_1 и C_2 мы получаем определенную векторную линию. Можно задать также точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, через которую должна проходить векторная линия. Тогда однозначно найдутся такие постоянные C_1 и C_2 , что через M_0 будет проходить единственная векторная линия.

ПРИМЕР 4.2.1. Найдем векторные линии поля тяготения

$$\mathbf{F} = \left\{ -\frac{\gamma m x}{r^3}, -\frac{\gamma m y}{r^3}, -\frac{\gamma m z}{r^3} \right\}.$$

Выписываем систему дифференциальных уравнений, описывающих векторную линию, и после упрощения получаем

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}.$$

Отсюда получаем систему

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \\ \frac{dz}{dx} = \frac{z}{x} \end{cases}$$

Складываем эти уравнения и принимаем $y + z = u$. Тогда для $u = u(x)$ получаем уравнение

$$\frac{du}{dx} = \frac{u}{x}.$$

Это — уравнение с разделяющимися переменными. Перепишем его в виде $\frac{du}{u} = \frac{dx}{x}$ и проинтегрируем. Получаем $u = C_1 x$.

Если в системе дифференциальных уравнений из первого слагаемого вычесть второе и положить $y - z = v$, то для v мы получим дифференциальное уравнение $\frac{dv}{dx} = \frac{v}{x}$. Отсюда находим $v = C_2 x$. Решая систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} y + z = C_1 x, \\ y - z = C_2 x \end{cases}$$

находим $y = \frac{C_1 + C_2}{2}x$, $z = \frac{C_1 - C_2}{2}x$. Полагая $\frac{C_1 + C_2}{2} = p$, $\frac{C_1 - C_2}{2} = q$, получаем $y = px$, $z = qx$. Эти уравнения определяют прямую в пространстве. Запишем ее параметрические уравнения

$$x = t, \quad y = pt, \quad z = qt.$$

Таким образом, векторные линии поля тяготения представляют собой лучи, исходящие из начала координат.

Векторной поверхностью векторного поля называется совокупность векторных линий, проходящих через некоторую линию Γ в каждой ее точке. Если линия Γ замкнута (контур), то векторная поверхность называется векторной трубкой.

§ 4.3. Поток векторного поля через поверхность. Дивергенция

Пусть в пространстве или в некоторой его части определено непрерывное векторное поле $\mathbf{F}$ и пусть в этой же части про-

странства располагается гладкая или кусочно-гладкая ориентируемая поверхность S . Выберем сторону поверхности и будем называть ее положительной, а противоположную сторону — отрицательной. Мы считаем, что в пространстве введена декартова прямоугольная система координат $xyzO$, так что векторное поле полностью определено вектор-функцией $\mathbf{F} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$.

Поверхностный интеграл второго рода от векторного поля $\mathbf{F}$ через выбранную сторону поверхности S называется потоком векторного поля $\mathbf{F}$ через ориентированную поверхность S . Происхождение термина связано с гидромеханической интерпретацией поверхностного интеграла, но затем термин стал использоваться применительно к векторному полю любой природы.

Напомним, что дивергенцией векторного поля $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ называется скалярная функция $\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$. Формула Остроградского позволяет получить геометрический подход к понятию дивергенции.

Пусть функции P, Q, R и их частные производные первого порядка непрерывны в области задания. Рассмотрим произвольную точку M в области определения $\mathbf{F}$ и возьмем какую-нибудь область V , содержащую точку M и ограниченную поверхностью S . Покажем, что

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(M) = \lim_{S \rightarrow M} \frac{1}{v} \iint_S \mathbf{F} d\mathbf{S},$$

где v — объем V , поверхностный интеграл берется по внешней стороне S , а предел $S \rightarrow M$ обозначает, что область V стягивается к точке M . Часто это равенство принимают за определение дивергенции.

Действительно, применив к поверхностному интегралу формулу Остроградского, получим

$$\iint_S \mathbf{F} d\mathbf{S} = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F} dx dy dz.$$

К тройному интегралу применим теорему о среднем

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F} dx dy dz = \operatorname{div} \mathbf{F}(M') v,$$

где M' — некоторая точка из V . Ясно, что если $S \rightarrow M$, то и $M' \rightarrow M$. Следовательно,

$$\frac{1}{v} \iint_S \mathbf{F} d\mathbf{S} = \operatorname{div} \mathbf{F}(M').$$

Стягивая поверхность S к точке M , мы получаем требуемое равенство.

Конкретный смысл дивергенции зависит от конкретного характера векторного поля. Выясним гидромеханический смысл дивергенции.

Если поток векторного поля скоростей движущейся *идеальной несжимаемой* жидкости через замкнутую поверхность S положителен, то это означает, что из той части пространства, которая ограничена поверхностью S , вытекает больше жидкости, чем втекает в нее. В этом случае говорят, что внутри S есть *источники*, постоянно выделяющие жидкость. Если же поток отрицателен, то внутрь S втекает больше жидкости, чем вытекает из нее. В этом случае говорят, что внутри S имеются *стоки*, поглощающие жидкость.

Поток векторного поля через замкнутую поверхность S иногда называют производительностью той части пространства V , которая ограничена поверхностью S . Терминология происходит из гидромеханической интерпретации поверхностного интеграла, так как в этом случае поток через S равен количеству жидкости, «произведенной» внутри V .

Отношение потока через S к величине объема v области V дает «среднюю производительность» области V . Однако средняя производительность недостаточно полно характеризует интенсивность векторного поля в окрестности каждой точки.

Поэтому для того, чтобы оценить производительность вблизи какой-либо точки M , лежащей внутри области V , мы должны вычислить среднюю производительность во все меньших и меньших областях, окружающих точку M . При стягивании области к точке M мы получим число, достаточно полно характеризующее «производительность» векторного поля в окрестности точки M . Это число и будет $\operatorname{div} \mathbf{F}(M)$. Те точки $M \in V$, для которых $\operatorname{div} \mathbf{F}(M) > 0$, называются *источниками*. Этот термин объясняется так: если около такой точки описать малую замкнутую поверхность, то поток через нее будет положительным, т.е. через эту поверхность жидкость вытекает наружу.

Точки, где дивергенция отрицательна, называются *стоками*.

§ 4.4. Циркуляция векторного поля. Ротор

В этом пункте мы вспомним теорему Стокса, одну из двух важнейших в теории поля (наряду с теоремой Остроградского), и более подробно, чем ранее, рассмотрим важнейшее для теории поля понятие — «ротор (вихрь) векторного поля».

Мы считаем, что векторное поле $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ в области своего задания непрерывно дифференцируемо, т.е. координатные функции P, Q, R имеют непрерывные частные производные первого порядка.

Циркуляцией векторного поля $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ по контуру Γ называется криволинейный интеграл второго рода от $\mathbf{F}$ по Γ :

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F} d\mathbf{l} = \int_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz.$$

Ввиду важности приложений циркуляции для интеграла по контуру иногда используется специальное обозначение — кружок на интеграле:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{F} d\mathbf{l} = \oint_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz.$$

Напомним, что ротором векторного поля $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ называется векторное поле

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{F} = & \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \\ & + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Пусть S — гладкая или кусочно-гладкая ориентированная поверхность с краем Γ — гладким или кусочно-гладким контуром, расположенная в области задания векторного поля $\mathbf{F}$. Тогда в теореме Стокса утверждается, что циркуляция векторного поля по контуру Γ равна потоку ротора векторного поля через ориентированную поверхность S , т.е.

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F} d\mathbf{l} = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} d\mathbf{S}.$$

Ориентации поверхности S и контура Γ согласованы, т.е. обход Γ происходит в положительном направлении относительно выбранной стороны S .

Из определения ротора, данного выше, непосредственно не следует независимость понятия ротации от выбора координатной системы. Можно показать, что понятие ротации есть понятие, определенное внутренними свойствами поля, инвариантное по отношению к выбору системы координат. Аналогичное замечание верно в отношении дивергенции. Мы не будем здесь этого доказывать, отсылая к более полным курсам математического анализа (см., например, [7]) или учебникам по теории поля (см., например, [8] или [12]).

Приведем здесь геометрический подход к понятию ротора векторного поля.

Возьмем в области задания векторного поля $\mathbf{F}$ точку M и исходящий из нее единичный вектор $\mathbf{n}_0$. Проведем через точку M плоскость, перпендикулярную вектору $\mathbf{n}_0$. На этой плоскости возьмем какую-либо область S , содержащую точку M и окруженную контуром Γ . На основании формулы Стокса мы можем написать

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F} d\mathbf{l} = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} d\mathbf{S} = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_0 dS.$$

К поверхностному интегралу первого рода применим теорему о среднем. В результате получим

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F} d\mathbf{l} = \operatorname{rot} \mathbf{F}(M') \cdot \mathbf{n}_0 s,$$

где s — площадь S и M' — некоторая точка из S . Разделив обе части полученной формулы на s и предположив, что контур Γ стягивается к выбранной точке M , мы получим

$$\lim_{M' \rightarrow M} \operatorname{rot} \mathbf{F}(M') \cdot \mathbf{n}_0 = \operatorname{rot} \mathbf{F}(M) \cdot \mathbf{n}_0 = \lim_{\Gamma \rightarrow M} \frac{1}{s} \oint_{\Gamma} \mathbf{F} d\mathbf{l}.$$

Отсюда следует, что правая часть полученного равенства может быть принята за определение проекции ротора данного поля на произвольный, но фиксированный единичный вектор $\mathbf{n}_0$, поскольку $\operatorname{rot} \mathbf{F}(M) \cdot \mathbf{n}_0 = \operatorname{pr}_{\mathbf{n}_0} \operatorname{rot} \mathbf{F}(M)$. Это приводит к новому определению самого ротора, так как достаточно, например, взять три произвольных линейно независимых единичных вектора $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, проекциями на

которые, как известно из векторной алгебры, однозначно определяется всякий вектор.

Пусть точка M лежит на поверхности S и Γ — контур на S , содержащий точку M внутри. Через σ обозначим площадь части S , ограниченную контуром Γ . Отношение

$$\frac{1}{\sigma} \oint_{\Gamma} \mathbf{F} d\mathbf{l}$$

называется средней плотностью циркуляции векторного поля по контуру Γ . Если стягивать контур Γ к точке M , находящейся все время внутри Γ , то предел

$$\lim_{\Gamma \rightarrow M} \frac{1}{\sigma} \oint_{\Gamma} \mathbf{F} d\mathbf{l}$$

называется плотностью циркуляции в точке M .

Мы показали, что плотность циркуляции векторного поля в точке M есть $\text{pr}_{\mathbf{n}_0} \text{rot} \mathbf{F}(M)$, где $\mathbf{n}_0$ — единичный вектор нормали поверхности, по которой контур стягивается к точке M . Но отсюда же следует, что плотность циркуляции в точке M фактически не зависит от поверхности S , а только от единичного вектора $\mathbf{n}_0$.

Так как $\text{pr}_{\mathbf{n}_0} \text{rot} \mathbf{F}(M) = |\text{rot} \mathbf{F}(M)| \cos \varphi$, где φ — угол между векторами $\text{rot} \mathbf{F}(M)$ и $\mathbf{n}_0$, то мы видим, что наибольшего значения плотность циркуляции достигает при $\varphi = 0$, т.е. плотность циркуляции в точке M будет наибольшей в направлении ротора ($\mathbf{n}_0 \parallel \text{rot} \mathbf{F}(M)$). Таким образом, смысл ротора в том, что это — вектор, в направлении которого плотность циркуляции в данной точке является наибольшей. Численно ротор в данной точке равен наибольшей плотности циркуляции в этой точке.

ПРИМЕР 4.4.1. Рассмотрим твердое тело, вращающееся с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси Oz . Скорость $\mathbf{v}$ каждой точки вращающегося тела зависит от положения этой точки. Исследуем векторное поле скоростей. Обозначим через ω — вектор, по модулю равный угловой скорости ω ($|\omega| = \omega$) и направленный по оси вращения в ту сторону, откуда вращение кажется совершающимся против часовой стрелки. Тогда $\omega = \mathbf{k}\omega$, где $\mathbf{k}$ — орт оси Oz .

Вектор скорости $\mathbf{v}(M)$ в точке $M(x, y, z)$ перпендикулярен к ω и к вектору $\mathbf{R} - \mathbf{R}_0$, где $\mathbf{R} = \overline{OM}$ — радиус-вектор точки M , $\mathbf{R}_0$ —

радиус-вектор центра окружности, по которой происходит вращение точки M . Вектор $\mathbf{v}$ по модулю равен $\omega|\mathbf{R} - \mathbf{R}_0|$. Но тогда $\mathbf{v} = \omega \times |\mathbf{R} - \mathbf{R}_0| = \omega \times \mathbf{R} - \omega \times \mathbf{R}_0 = \omega \times \mathbf{R}$, так как векторы ω и $\mathbf{R}_0$ параллельны. Учитывая, что $\omega = \{0, 0, \omega\} = \omega\mathbf{k}$, $\mathbf{R} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, находим

$$\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{R} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\omega y\mathbf{i} + \omega x\mathbf{j}.$$

Найдем ротор поля скоростей.

$$\text{rot } \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = 2\omega\mathbf{k} = 2\omega.$$

Таким образом, ротор скоростей вращающегося тела направлен по вектору угловой скорости. Этого и следовало ожидать: в любой точке пространства циркуляция будет наибольшей по тем контурам, которые лежат в плоскости вращения (у нас — в плоскости, параллельной плоскости xOy).

§ 4.5. Правила действия с дивергенцией и ротором

Дивергенция и ротор являются дифференциальными операциями, аналогичными операции вычисления производной от функции одного переменного. Перечислим основные правила действия с этими операциями:

1. Дивергенция и ротор постоянного вектора равны нулю, т.е. если $\mathbf{F} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$, где a, b, c — постоянные, то

$$\text{div } \mathbf{F} = 0;$$

$$\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0} = \{0, 0, 0\}.$$

2. Дивергенция и ротор обладают свойством линейности, т.е. если $\mathbf{H} = a\mathbf{F} + b\mathbf{G}$, где $\mathbf{F}$ и $\mathbf{G}$ — векторные поля, a и b — постоянные, то

$$\text{div } \mathbf{H} = a \text{div } \mathbf{F} + b \text{div } \mathbf{G};$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = a \text{rot } \mathbf{F} + b \text{rot } \mathbf{G}.$$

3. Пусть u — скалярное поле, $\mathbf{F}$ — векторное поле. Тогда произведение $u\mathbf{F}$ будет векторным полем и имеют место следующие формулы:

$$\operatorname{div}(u\mathbf{F}) = \operatorname{grad} u \cdot \mathbf{F} + u \operatorname{div} \mathbf{F},$$

$$\operatorname{rot}(u\mathbf{F}) = \operatorname{grad} u \times \mathbf{F} + u \operatorname{rot} \mathbf{F},$$

где $\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k}$, $\operatorname{grad} u \times \mathbf{F}$ означает векторное произведение и $\operatorname{grad} u \cdot \mathbf{F}$ — скалярное.

4. Для любых дифференцируемых векторных полей $\mathbf{F}$ и $\mathbf{G}$ справедлива формула

$$\operatorname{div} \mathbf{F} \times \mathbf{G} = \mathbf{G} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{G}.$$

Мы докажем только равенство $\operatorname{div}(u\mathbf{F}) = \operatorname{grad} u \cdot \mathbf{F} + u \operatorname{div} \mathbf{F}$. Остальные формулы рекомендуем доказать читателю самостоятельно, представив векторные поля $\mathbf{F}$ и $\mathbf{G}$ в виде: $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$, $\mathbf{G} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + K\mathbf{k}$.

Из представления $u\mathbf{F} = (uP)\mathbf{i} + (uQ)\mathbf{j} + (uR)\mathbf{k}$ по определению дивергенции и по правилу дифференцирования произведения функции получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(u\mathbf{F}) &= \frac{\partial(uP)}{\partial x} + \frac{\partial(uQ)}{\partial y} + \frac{\partial(uR)}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x} P + \frac{\partial u}{\partial y} Q + \frac{\partial u}{\partial z} R + \\ &\quad + u \frac{\partial P}{\partial x} + u \frac{\partial Q}{\partial y} + u \frac{\partial R}{\partial z} = \operatorname{grad} u \cdot \mathbf{F} + u \operatorname{div} \mathbf{F}, \end{aligned}$$

что и требовалось показать.

§ 4.6. Оператор Гамильтона

У. Р. Гамильтон (1805–1865) заметил, что операторы grad , div , rot можно записать проще, если ввести символический векторный дифференциальный оператор «набла» (оператор Гамильтона):

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

«Умножение», т.е. действие оператора Гамильтона на скалярное поле u и на вектор $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ производится по следующим правилам:

$$\nabla u = \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) u = \mathbf{i} \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial u}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial u}{\partial z} = \operatorname{grad} u,$$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{F} &= \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}) = \\ &= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \operatorname{div} \mathbf{F}, \\ \nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \operatorname{rot} \mathbf{F}.\end{aligned}$$

В формулах, содержащих ∇ , этот оператор действует как дифференциальный только на расположенный за ним множитель; последующие множители результат такого действия уже не дифференцирует. Поэтому следует избегать записи вида ∇uv , которую естественно понимать как $(\nabla u)v = v \operatorname{grad} u$. Выражение $\nabla(uv)$ означает совсем другое. Если за оператором ∇ нет множителя, то запись представляет собой оператор, например

$$\mathbf{F} \cdot \nabla = (P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}) \cdot \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) = P \frac{\partial}{\partial x} + Q \frac{\partial}{\partial y} + R \frac{\partial}{\partial z}.$$

Используя язык векторной алгебры и формулы, определяющие действия оператора ∇ на скалярное и векторное поля, через оператор Гамильтона можно записать:

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} u = \nabla \times \nabla u = \mathbf{0};$$

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0;$$

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{F});$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{F});$$

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \nabla \cdot \nabla u.$$

Оператор $\operatorname{div} \operatorname{grad} = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2$ обозначается Δ («дельта») и называется оператором Лапласа, или лапласианом. Легко видеть, что для скалярного поля $u(x, y, z)$ $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$. Таким образом, последнее равенство из пяти выписанных можно записать в виде

$$\Delta u = \nabla \cdot \nabla u = \nabla^2 u.$$

Обращение в нуль первых двух из выписанных пяти операторов с точки зрения векторной алгебры вполне естественно, так как векторное произведение вектора на себя есть нулевой вектор (первое равенство), и сомножитель в векторном произведении всегда перпендикулярен этому произведению.

§ 4.7. Специальные векторные поля

4.7.1. Потенциальные векторные поля

Векторное поле, ротор которого равен нулевому вектору, называется безвихревым.

Векторное поле $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ называется потенциальным, если существует функция $u(x, y, z)$ такая, что $\mathbf{F} = \text{grad} u$. Функция u при этом называется потенциалом векторного поля $\mathbf{F}$.

Напомним (см. гл. 2), что область V в пространстве называется поверхностно-односвязной, если для любого кусочно-гладкого контура Γ , расположенного в V , можно указать такую ориентируемую кусочно-гладкую поверхность S , расположенную в V , границей которой является Γ .

Следующие утверждения характеризуют потенциальное векторное поле. Мы считаем, что векторное поле определено в поверхностно-односвязной области V .

1. Циркуляция по любому контуру в V равна нулю

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{F} d\mathbf{l} = 0.$$

2. Векторное поле потенциально, т.е. существует потенциал u векторного поля $\mathbf{F}$,

$$\mathbf{F} = \text{grad} u.$$

3. Интеграл от $\mathbf{F}$ по дуге, соединяющей две любые точки A и B из V , не зависит от вида этой дуги, а только от концевых точек A и B .

4. Векторное поле $\mathbf{F}$ безвихревое

$$\text{rot} \mathbf{F} = 0.$$

Примером безвихревого векторного поля будет градиент любой дважды непрерывно дифференцируемой функции (см. § 4.6).

4.7.2. Соленоидальные векторные поля

Векторное поле называется соленоидальным, или трубчатым, в области V , если во всех точках этой области выполняется $\text{div} \mathbf{F} = 0$.

Примером соленоидального векторного поля будет ротор произвольного векторного поля: если векторное поле $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} +$

$+R\mathbf{k}$ дважды непрерывно дифференцируемо (то есть функции P, Q, R имеют непрерывные частные производные второго порядка), то векторное поле $\operatorname{rot} \mathbf{F}$ будет соленоидальным. Это следует из рассуждений предыдущего параграфа.

Покажем, что поле тяготения соленоидально (см. пример 4.1.1). Имеем $\mathbf{F} = -\frac{\gamma m x}{r^3} \mathbf{i} - \frac{\gamma m y}{r^3} \mathbf{j} - \frac{\gamma m z}{r^3} \mathbf{k}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Тогда

$$P = -\frac{\gamma m x}{r^3}, \quad Q = -\frac{\gamma m y}{r^3}, \quad R = -\frac{\gamma m z}{r^3}.$$

Вычисляя производные, находим,

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= -\gamma m \frac{y^2 + z^2 - 2x^2}{r^5}; \\ \frac{\partial Q}{\partial y} &= -\gamma m \frac{x^2 + z^2 - 2y^2}{r^5}; \\ \frac{\partial R}{\partial z} &= -\gamma m \frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{r^5}. \end{aligned}$$

Складывая полученные выражения, получаем

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0.$$

Пусть область V такова, что любая замкнутая поверхность S , лежащая в V , содержит внутри себя только точки из V . Используя формулу Остроградского и определение дивергенции как предела (см. § 4.3)

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(M) = \lim_{S \rightarrow M} \frac{1}{v} \iint_S \mathbf{F} dS,$$

можно показать, что векторное поле $\mathbf{F}$ в V будет соленоидальным тогда и только тогда, когда поток векторного поля через любую замкнутую поверхность, лежащую в V , равен нулю.

Выясним теперь, почему векторное поле с нулевой дивергенцией называют трубчатым.

Рассмотрим в области V , где векторное поле $\mathbf{F}$ соленоидально, отрезок векторной трубки, ограниченной двумя поперечными сечениями S_1 и S_2 (рис. 4.2). Напомним (см. § 4.2), что векторной трубкой называется поверхность, состоящая из векторных линий, проходящих через некоторый контур.

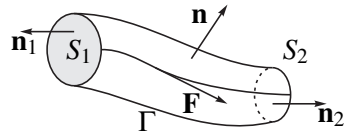


Рис. 4.2

Поток поля через полную поверхность этой трубки (замкнутая поверхность) равен нулю, т.е.

$$\iint_{S_1(\text{наружн})} \mathbf{F} d\mathbf{S} + \iint_{S_2(\text{наружн})} \mathbf{F} d\mathbf{S} + \iint_{S_{\text{бок}}(\text{наружн})} \mathbf{F} d\mathbf{S} = 0.$$

Но на боковой поверхности трубки $\mathbf{F} \perp \mathbf{n}$, где $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали, так как $\mathbf{F}$ направлен по касательной к векторным линиям, следовательно, $\mathbf{F} d\mathbf{S} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = 0$. Нормали к S_1 и S_2 направим в ту сторону, куда направлены векторы поля $\mathbf{F}$. Если, например, «течение поля» направлено от S_1 к S_2 , то на поверхности S_1 внешнюю нормаль надо заменить на внутреннюю. Тогда мы получаем

$$-\iint_{S_1} \mathbf{F} d\mathbf{S} + \iint_{S_2} \mathbf{F} d\mathbf{S} = 0.$$

Откуда следует

$$\iint_{S_1} \mathbf{F} d\mathbf{S} = \iint_{S_2} \mathbf{F} d\mathbf{S}.$$

Итак, поток векторного поля через любое поперечное сечение данной векторной трубки один и тот же. Он называется мощностью этой трубки.

Отсюда следует, что векторная трубка не может окончиться внутри области, где $\text{div } \mathbf{F} = 0$.

Действительно, если бы векторная трубка сошлась в точку, то площадь сечения S трубки стремилась бы к нулю, а поток $\iint_S \mathbf{F} d\mathbf{S}$

оставался бы постоянным. Но это было бы возможным только в том случае, если в этой точке вектор поля $\mathbf{F}$ обратился бы в бесконечность.

Полученное свойство и называют свойством трубчатости, или соленоидальности, поля.

Равенство нулю потока векторного поля через любую замкнутую поверхность является характеристикой соленоидального поля. Укажем, как еще можно способ охарактеризовать соленоидальное поле.

Векторное поле $\mathbf{G}$ называется векторным потенциалом поля $\mathbf{F}$, если выполняется: $\mathbf{F} = \text{rot } \mathbf{G}$.

Справедливо утверждение: векторное поле $\mathbf{F}$ будет соленоидальным тогда и только тогда, когда у него есть векторный потенциал.

Резюмируя, перечислим характеристические признаки соленоидального поля:

1. Дивергенция поля равна тождественно нулю

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = 0.$$

2. Вектор поля $\mathbf{F}$ является ротацией некоторого векторного поля $\mathbf{G}$ (поле векторного потенциала):

$$\mathbf{F} = \operatorname{rot} \mathbf{G}.$$

3. Поток поля через любую замкнутую поверхность равен нулю, если только поверхность можно стянуть в точку области задания поля, не пересекая границ этой области:

$$\iint_S \mathbf{F} d\mathbf{S} = 0.$$

Любой из этих признаков влечет за собой остальные, т.е. признаки представляют из себя эквивалентные утверждения.

4.7.3. Нахождение векторного поля по заданным ротору и дивергенции

При исследовании общих векторных полей возникает задача о построении векторного поля $\mathbf{F}$, если заданы его ротор и дивергенция, т.е. задача о нахождении векторного поля $\mathbf{F}$, если

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{A}, \quad \operatorname{div} \mathbf{F} = \alpha,$$

где $\mathbf{A}$ — известное векторное поле, α — известное скалярное поле.

Мы считаем, что поля $\mathbf{A}$ и α заданы во всем пространстве и либо обращаются в нуль вне некоторого шара, либо достаточно быстро стремятся к нулю, когда точка $M(x, y, z)$ стремится в бесконечность ($\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{A}(M) = \mathbf{0}$, $\lim_{r \rightarrow \infty} \alpha(M) = 0$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$). Кроме того, должно выполняться необходимое условие (см. § 4.6) $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$.

Оказывается, что эта задача при дополнительном требовании

$$\mathbf{F}(M) \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} 0,$$

где $r = |\overline{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ для $M(x, y, z)$, имеет одно и только одно решение. Доказательство этого факта мы опустим, отсылая читателя к более полным изложениям теории поля (см., например, [9]).

Из этого результата можно вывести, что любое векторное поле $\mathbf{F}$, обращающееся в нуль вне некоторого шара или достаточно быстро исчезающее на бесконечности, можно представить в виде

$$\mathbf{F} = \mathbf{A} + \mathbf{B},$$

где $\mathbf{A}$ — безвихревое, а $\mathbf{B}$ — соленоидальное поля.

Глава 5

Числовые и функциональные ряды

§ 5.1. Числовые ряды и их общие свойства

5.1.1. Основные понятия

В этой главе будут изучаться ряды, т.е. суммы бесконечного числа слагаемых. Частный случай этого понятия уже встречался в курсе элементарной математики. Это сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Однако само понятие суммы бесконечного числа слагаемых требует пояснения.

Пусть задана числовая последовательность a_n .

Определение 5.1.1. *Формальная сумма $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$, или в краткой записи $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, называется числовым рядом; общий член последовательности a_n называется общим членом этого ряда.*

Словом «формальная» в этом определении подчеркивается то, что никакого смысла в запись $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ ещё не вложено, ряд $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ не число, а символ, которому нужно придать смысл. С этой целью введём вспомогательное понятие.

Определение 5.1.2. *Число $A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ (коротко $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$) называется n -й частичной суммой ряда $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$.*

Таким образом, $A_1 = a_1$, $A_2 = a_1 + a_2$ и т.д. При всяком значении n в частичную сумму A_n входит конечное число членов ряда. Словами «сумма ряда» мы хотим охватить всё бесконечное множество слагаемых, т.е. «раздуть» эту частичную сумму до «полной».

Определение 5.1.3. Если существует конечный предел $A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$, то он называется суммой ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, и ряд в этом случае называется сходящимся; если же последовательность A_n не имеет конечного предела при n , стремящемся к бесконечности, то ряд называется расходящимся. В этом случае понятие его суммы не определено.

В дальнейшем из контекста всегда будет ясно, идёт ли речь о числовых или о других рядах (функциональных, степенных и т.д.) Поэтому слово «числовой» в определении часто опускается. Теперь о символике. В литературе символ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ используется для обозначения не только самого ряда, но и его суммы. Такое употребление не вносит путаницы, если символ суммы ряда возникает в каких-либо равенствах или неравенствах. Например, если написано

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots = 2,$$

или

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} > 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^{n-1}} + \dots,$$

то ясно, что в первой строке дано равенство для суммы ряда, а во второй — сравнение сумм соответствующих рядов.

Рассмотрим некоторые примеры.

ПРИМЕР 5.1.1. Найдём сумму бесконечной геометрической прогрессии

$$a + aq + \dots + aq^{n-1} + \dots \quad (a \neq 0).$$

Формула общего члена этого ряда

$$a_n = aq^{n-1}.$$

Вычислим его частичные суммы. Если $q = 1$, то

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = a, \quad A_n = na.$$

Если $q \neq 1$, то по формуле для суммы геометрической прогрессии получим

$$A_n = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q}.$$

Исследуем вопрос о сходимости ряда. Если $q = 1$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} na = \pm\infty,$$

где знак бесконечности совпадает со знаком числа a . Ряд расходится.

Если $q = -1$, то последовательность A_n имеет вид

$$A_1 = a, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = a, \quad \dots$$

и не имеет предела. Ряд расходится.

Если $|q| > 1$, то абсолютная величина члена последовательности A_n стремится вместе с n к бесконечности, и последовательность A_n не имеет конечного предела. Таким образом, если $|q| \geq 1$, то ряд расходится. Если же $|q| < 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$, поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \frac{a}{1 - q}$. Окончательно, заключаем: ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} \quad (a \neq 0)$$

сходится тогда и только тогда, когда $|q| < 1$. В этом случае справедлива формула для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, известная из курса элементарной математики

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1 - q}.$$

ПРИМЕР 5.1.2. Пусть A — какое-нибудь действительное число. В десятичной записи оно представляется последовательностью цифр,

в которой запятая отделяет целую часть от дробной. Например, $\pi = 3,1415\dots$ Такая запись отражает в данном случае равенство

$$\pi = 3 + 1 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,01 + 1 \cdot 0,001 + 5 \cdot 0,0001 + \dots$$

Любое действительное число A является, таким образом, суммой конечного или бесконечного числового ряда. Рациональные числа при этом подходе выделяются тем, что их десятичное представление периодическое, и ряд, суммой которого является данное число, можно представить как сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Например,

$$3\frac{15}{99} = 3,151515\dots = 3 + 15 \cdot 0,01 + 15 \cdot (0,01)^2 + 15 \cdot (0,01)^3 + \dots$$

ПРИМЕР 5.1.3. Найти сумму ряда с общим членом $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$.

РЕШЕНИЕ. Найдём частичные суммы:

$$\begin{aligned} A_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Очевидно, $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 1$, т.е. ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

сходится и его сумма

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

ПРИМЕР 5.1.4. Рассмотрим числовой ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

Этот ряд называется гармоническим. Сейчас трудно исследовать его сходимость, но позже мы сделаем это и увидим, что гармонический ряд расходится.

Ряд более общего вида

$$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots$$

называется обобщённым гармоническим или рядом Дирихле, соответствующим показателю p . Сходимость или расходимость этого ряда зависит от значения p . Этот ряд тоже будет исследован ниже.

Заметим, что, даже зная о сходимости ряда, например

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{2}},$$

найти его сумму точно мы не сможем. Вопрос о сходимости ряда часто оказывается более простым, чем вопрос о его сумме. Если известно, что ряд сходится, то можно попытаться найти его сумму хотя бы приближённо. Но, во всяком случае, вопрос о том, сходится ли данный ряд или расходится, — первый, на который нужно ответить. Поэтому в дальнейшем изложении теории на первом месте будут стоять вопросы сходимости тех или иных рядов.

5.1.2. Остаток ряда. Сходимость ряда и его остатка

Рассмотрим ряд

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (5.1.1)$$

Определение 5.1.4. Если m — натуральное число, то ряд

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \dots = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n \quad (5.1.2)$$

называется остатком ряда (5.1.1).

Теорема 5.1.1. Числовой ряд сходится тогда и только тогда, когда сходится любой его остаток.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A_n — последовательность частичных сумм ряда (5.1.1), а A'_n — последовательность частичных сумм ряда (5.1.2) — его остатка. Очевидны равенства:

$$\begin{aligned} A_{m+1} &= a_1 + a_2 + \dots + a_m + a_{m+1} = A_m + A'_1, \\ A_{m+2} &= A_m + a_{m+1} + a_{m+2} = A_m + A'_2, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Для произвольного числа n $A_{m+n} = A_m + A'_n$. Таким образом, начиная с некоторого номера члены последовательности частичных сумм ряда (5.1.1) отличаются от членов последовательности частичных сумм ряда (5.1.2) на постоянную A_m . Поэтому если сходится остаток, т.е. существует предел последовательности частичных сумм A'_n ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A'_n = A',$$

то существует и предел последовательности частичных сумм A_n

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A_m + A',$$

т.е. ряд (5.1.1) сходится. Обратно: если сходится ряд (5.1.1), т.е. существует конечный $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$, то существует и $\lim_{n \rightarrow \infty} A'_n = A - A_m$, т.е. остаток ряда сходится.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1.1. *В тех случаях, когда (как в этой теореме) один из двух рассматриваемых рядов сходится тогда и только тогда, когда сходится другой, говорят, что эти ряды сходятся или расходятся одновременно*

5.1.3. Алгебраические свойства суммы ряда

Теорема 5.1.2. 1. Если c — постоянная, а ряд (5.1.1) сходится, то сходится и ряд с общим членом ca_n и

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

2. Если ряды (5.1.1) и

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots \quad (5.1.3)$$

сходятся, то сходится ряд с общим членом $a_n + b_n$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Обозначим через A_n n -ю частичную сумму ряда (5.1.1), а через A'_n — n -ю частичную сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$. Очевидно, что

$A'_n = cA_n$. Поэтому по теореме о пределе последовательности, если $A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} A'_n = cA$, т.е. если ряд (5.1.1) сходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ сходится и

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

2. Второе утверждение теоремы доказывается аналогично. Теорему можно обобщить на случай любого конечного числа слагаемых.

Следствие 5.1.1. Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(1)}, \dots, \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(k)}$ сходятся, а $c_1, \dots, c_k$ — постоянные, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (c_1 a_n^{(1)} + \dots + c_k a_n^{(k)})$ сходится и справедливо равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} (c_1 a_n^{(1)} + \dots + c_k a_n^{(k)}) = c_1 \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(1)} + \dots + c_k \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(k)}.$$

5.1.4. Необходимый признак сходимости ряда

Теорема 5.1.3. Если ряд (5.1.1) сходится, то его общий член стремится к нулю при n , стремящемся к бесконечности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сравним члены последовательности частичных сумм ряда (5.1.1), следующие друг за другом:

$$A_n = a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n = A_{n-1} + a_n.$$

Так как ряд сходится, то при $n \rightarrow \infty$ члены одной и той же последовательности A_{n-1} и A_n стремятся к одному и тому же пределу — сумме A ряда (5.1.1). Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (A_n - A_{n-1}) = A - A = 0.$$

Теорема доказана.

Приступающие к изучению теории рядов часто неправильно употребляют доказанную теорему, а именно: убедившись в том, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, делают вывод о сходимости ряда. Это необоснованно и часто неверно. Условие $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ является не достаточным для сходимости ряда, а только необходимым. Его можно использовать только для доказательства расходимости ряда: если условие $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ нарушено, то ряд $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ расходится, иначе по теореме 5.1.3 это условие было бы выполнено.

ПРИМЕР 5.1.5. *Исследовать сходимость ряда $1 - 1 + 1 - \dots + (-1)^{n-1} + \dots$*

РЕШЕНИЕ. Предела последовательности $(-1)^{n-1}$ не существует, следовательно, ряд расходится по необходимому признаку.

ПРИМЕР 5.1.6. *Исследуем гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.*

Применим необходимый признак:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Необходимое условие сходимости выполнено, поэтому вопрос о сходимости или расходимости этого ряда требует дальнейшего исследования. Вернёмся к этому ниже.

§ 5.2. Ряды с неотрицательными членами

5.2.1. Характер сходимости ряда с положительными членами

Рассмотрим ряд (5.1.1) $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ с неотрицательными членами: $a_1 \geq 0, \dots, a_n \geq 0, \dots$. В этом случае можно более точно определить характер и условия сходимости ряда.

Теорема 5.2.1. *Сходимость ряда (5.1.1) с неотрицательными членами равносильна ограниченности сверху последовательности его частичных сумм A_n . Если эта последовательность не ограничена, то*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если ряд (5.1.1) сходится, т.е. последовательность A_n имеет конечный предел, то она ограничена (свойство сходящейся последовательности).

Обратно: пусть последовательность A_n ограничена сверху. Сравним её следующие друг за другом члены

$$A_{n+1} = A_n + a_{n+1}.$$

По условию $a_{n+1} \geq 0$, поэтому $A_{n+1} \geq A_n$. Таким образом, последовательность A_n является монотонно неубывающей и ограниченной сверху. Следовательно, по теореме о монотонной и ограниченной последовательности она имеет конечный предел и ряд (5.1.1) сходится. Если же последовательность A_n не является ограниченной, то это означает её монотонное возрастание до $+\infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = +\infty.$$

Теорема доказана.

5.2.2. Интегральный признак сходимости Коши

Теорема 5.2.2. *Пусть функция f определена и непрерывна на промежутке $[1, \infty)$. Если эта функция принимает только положительные значения и убывает, то числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = f(n)$, $n = 1, 2, \dots$*

и несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x) dx$ сходятся или расходятся одновременно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим площади трёх фигур на плоскости xOy над отрезком $[1, n]$ оси Ox (рис. 5.1).

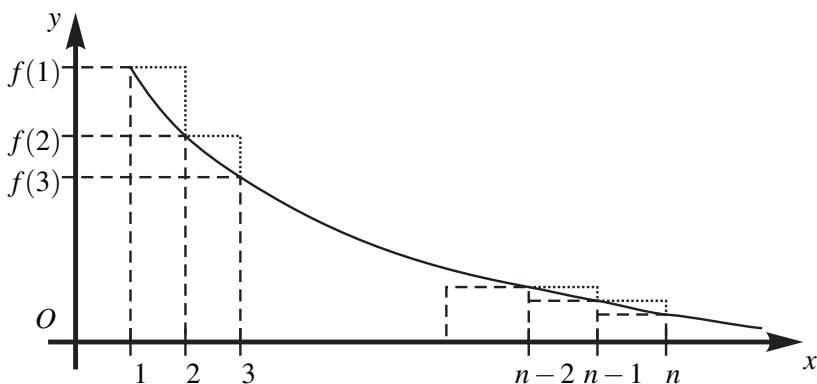


Рис. 5.1

Площадь самой большой из этих фигур — под «верхними» ступеньками — является суммой площадей прямоугольников, основания которых равны единице, а высоты определяются значениями функции f в левых концах соответствующих интервалов:

$$S_{\text{верх}} = 1f(1) + 1f(2) + \dots + 1f(n-1).$$

Аналогично самая малая из площадей — под «нижними» ступеньками — вычисляется по формуле

$$S_{\text{нижн}} = 1f(2) + 1f(3) + \dots + 1f(n).$$

Площадь под графиком функции $y = f(x)$ совпадает с интегралом

$$S_{\text{гр}} = \int_1^n f(x) dx.$$

Если A_n — последовательность частичных сумм ряда $\sum_{a=1}^{\infty} a_n$, то

$$S_{\text{верх}} = A_{n-1}, \quad S_{\text{нижн}} = A_n - f(1)$$

и выполнены неравенства

$$A_n - f(1) \leq \int_1^n f(x) dx \leq A_{n-1}. \quad (5.2.1)$$

Пусть несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x) dx$ сходится. Из полученного неравенства (5.2.1) следует, что

$$A_n \leq f(1) + \int_1^n f(x) dx \leq f(1) + \int_1^{\infty} f(x) dx.$$

Поэтому последовательность A_n ограничена и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится по теореме 5.2.1 о характере сходимости ряда с положительными членами.

Обратно: допустим, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Тогда последовательность его частичных сумм A_n ограничена и из неравенства (5.2.1) следует, что

$$\int_1^n f(x) dx \leq A_{n-1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Таким образом, функция верхнего предела $F(n) = \int_1^n f(x) dx$ является ограниченной и монотонно возрастает, так как с ростом n растёт и площадь $F(n)$ под графиком функции $y = f(x)$. Поэтому по теореме об ограниченной и монотонной последовательности существует конечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f(x) dx = \int_1^{\infty} f(x) dx,$$

т.е. несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x) dx$ сходится.

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2.1. *Так как сходимость числового ряда равносильна сходимости его остатка, то интегральный признак сходимости*

можно переформулировать: если функция f непрерывна, положительна, убывает на промежутке $[t, \infty)$ и $a_n = f(n)$ при $n = t, t+1, \dots$, то ряд $\sum_{n=t}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда сходится несобственный интеграл $\int_t^{\infty} f(x) dx$.

ПРИМЕР 5.2.1. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}.$$

Его члены совпадают со значениями положительной при $x \geq 2$ функции

$$f(x) = \frac{1}{x \ln^2 x}, \quad a_n = \frac{1}{n \ln^2 n} = f(n).$$

На основании сделанного перед примером замечания ряд сходится, если сходится несобственный интеграл $\int_2^{\infty} f(x) dx$. По определению несобственного интеграла

$$\begin{aligned} \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \frac{dx}{x \ln^2 x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{\ln x} \right) \Big|_2^b = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln b} \right) = \frac{1}{\ln 2}. \end{aligned}$$

Поэтому ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$ сходится.

5.2.3. Обобщённый гармонический ряд (ряд Дирихле)

Применим интегральный признак сходимости для исследования обобщённого гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.

Заметим вначале, что при $p \leq 0$ этот ряд расходится, так как нарушено необходимое условие сходимости — общий член ряда $\frac{1}{n^p}$ не стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Пусть теперь $p > 0$. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{x^p}$. Эта функция непрерывна, положительна и убывает на промежутке $[1, \infty)$. Поэтому по интегральному признаку Коши сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ равносильна сходимости интеграла $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$. Рассмотрим случаи:

$$1. 0 < p < 1$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^a \frac{dx}{x^p} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{a^{1-p} - 1}{1-p} = \infty.$$

$$2. p = 1$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^a \frac{dx}{x} = \lim_{a \rightarrow \infty} \ln a = \infty.$$

Таким образом, если $0 < p \leq 1$, то интеграл и, следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ расходятся.

$$3. p > 1$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^a \frac{dx}{x^p} = \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{(p-1)a^{p-1}} \right) = \frac{1}{p-1},$$

интеграл и ряд сходятся.

Окончательно: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ сходится тогда и только тогда, когда $p > 1$. Этот факт полезно запомнить. Как и геометрическая прогрессия, обобщённый гармонический ряд часто используют для сравнения с другими рядами при исследовании сходимости. Об этом — в следующем разделе.

5.2.4. Признаки сравнения

Теорема 5.2.3 (1-й признак сравнения). Пусть для членов рядов (5.1.1)

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

и (5.1.2)

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots$$

для некоторого натурального числа m выполнены неравенства $0 \leq a_n \leq b_n$ при всех $n > m$. Тогда:

- 1) если ряд (5.1.3) сходится, то и ряд (5.1.1) тоже сходится;
- 2) если ряд (5.1.1) расходится, то и ряд (5.1.3) тоже расходится.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A_n и B_n — последовательности частичных сумм рядов (5.1.1) и (5.1.3) соответственно.

1. Допустим, ряд (5.1.3) сходится. По теореме 5.2.1 о характере сходимости рядов с положительными членами это означает, что последовательность B_n ограничена. Из условия $0 \leq a_n \leq b_n$ следует, что

$$0 \leq A_n - A_m \leq B_n - B_m \quad (n > m).$$

Следовательно, последовательность A_n тоже ограничена, и по той же теореме 5.2.1 ряд (5.1.1) сходится.

2. Если ряд (5.1.1) расходится, то ряд (5.1.3) не может сходитьсь, так как в этом случае по 1-му утверждению теоремы ряд (5.1.1) сходилсь бы и получается противоречие.

Теорема доказана.

Теорема 5.2.4 (2-й признак сравнения). Пусть для членов рядов (5.1.1)

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

и (5.1.3)

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots \quad (4.3)$$

выполнены неравенства $a_n > 0$ и $b_n > 0$ при $n = 1, 2, \dots$, и существует конечный предел

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} \neq 0.$$

Тогда ряды (5.1.1) и (5.1.3) сходятся или расходятся одновременно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сначала, что ряд (5.1.3) сходится. Докажем, что тогда и ряд (5.1.1) тоже сходится. Возьмём произвольное

положительное число $\varepsilon > 0$. Так как $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ то, в согласии с определением предела, найдётся такое число $m \in \mathbb{N}$, что при $n > m$

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - L \right| < \varepsilon,$$

откуда

$$a_n \leq (L + \varepsilon)b_n \quad (n = m + 1, m + 2, \dots). \quad (5.2.2)$$

Поскольку ряд (5.1.3) сходится, то по теореме 5.1.2 сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (L + \varepsilon)b_n.$$

Так как при $n > m$ выполнено неравенство (5.2.2), то по первому признаку сравнения сходится ряд (5.1.1). Таким образом, доказано, что из сходимости ряда (5.1.3) следует сходимость ряда (5.1.1).

Обратно: пусть сходится ряд (5.1.1). Для доказательства сходимости ряда (5.1.3) заметим, что из условия

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L \neq 0$$

и теорем о пределах следует равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = L^{-1}.$$

Мы пришли к условиям уже доказанной первой части теоремы и точно так же можем доказать, что ряд (5.1.3) сходится.

ПРИМЕР 5.2.2. Применим признак сравнения к исследованию сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+3}$.

Если обозначить $a_n = \frac{1}{2n+3}$, $b_n = \frac{1}{n}$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+3} = \frac{1}{2}$. По теореме 5.2.4 сходимость рассматриваемого ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+3}$ равносильна сходимости гармонического ряда

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Так как последний расходится, то расходится и данный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+3}$.

ПРИМЕР 5.2.3. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \ln n} = \frac{1}{2^2 \ln 2} + \frac{1}{3^2 \ln 3} + \dots$$

Его члены меньше соответствующих членов обобщённого гармонического ряда с показателем $p = 2$:

$$\frac{1}{2^2 \ln 2} < \frac{1}{1^2}; \quad \frac{1}{3^2 \ln 3} < \frac{1}{2^2}; \quad \dots$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится. По первому признаку сравнения ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \ln n}$ тоже сходится.

Заметим, что использование второго признака сравнения было бы в этом примере затруднительным. Кроме того, заметим, что уже эти простые примеры показывают — успех в исследовании на сходимость числового ряда в большой мере определяет правильное видение ответа. В этом случае формальное доказательство можно найти и, зачастую, не одно.

5.2.5. Признаки Даламбера и радикальный Коши

Указанные в заголовке признаки являются результатом сравнения рядов с положительными членами с рядом, члены которого образуют геометрическую прогрессию.

Теорема 5.2.5 (признак Даламбера). Пусть для членов ряда (5.1.1)

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

выполнены неравенства $a_n > 0$, $n = 1, 2, \dots$, и существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$$

Тогда:

- 1) если $q < 1$ то ряд (5.1.1) сходится;
- 2) если $q > 1$ (в частности, если $q = \infty$), то ряд (5.1.1) расходится.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Пусть $q < 1$. Докажем, что в этом случае ряд (5.1.1) сходится. Для этого возьмём такое положительное число ε , что $q + \varepsilon < 1$. Так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q,$$

то в соответствии с определением предела найдётся такое число n_0 , что при $n > n_0$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - q \right| < \varepsilon.$$

Отсюда

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q + \varepsilon,$$

и при $n > n_0$

$$a_{n+1} < (q + \varepsilon)a_n. \quad (5.2.3)$$

Оценим члены ряда (5.1.1) с помощью неравенства (5.2.3)

$$a_{n_0+2} < (q + \varepsilon)a_{n_0+1};$$

$$a_{n_0+3} < (q + \varepsilon)a_{n_0+2} < (q + \varepsilon)^2 a_{n_0+1};$$

.....

$$a_{n_0+m} < (q + \varepsilon)^{m-1} a_{n_0+1};$$

.....

В правых частях этих неравенств стоят члены бесконечно убывающей (так как $q + \varepsilon < 1$) геометрической прогрессии, образующие сходящийся ряд. По первому признаку сравнения ряд (5.1.1) тоже сходится.

2. Пусть теперь $q > 1$. Так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q,$$

то найдётся такое число n_0 , что при $n > n_0$ будет выполняться неравенство

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1.$$

Это означает, что последовательность a_n возрастает при $n > n_0$ и, следовательно, условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

нарушено. Ряд (5.1.1) расходится по необходимому признаку.

Теорема доказана.

Приведём формулировку радикального признака Коши (доказательство опускаем).

Теорема 5.2.6 (признак Коши). Пусть $a_n \geq 0$, $n = 1, 2, \dots$ и существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q.$$

Тогда:

- 1) если $q < 1$ то ряд (5.1.1) сходится;
- 2) если $q > 1$ (в частности, если $q = \infty$), то ряд (5.1.1) расходится.

Заметим, что ни признак Даламбера, ни радикальный признак Коши не дают ответа на вопрос о сходимости ряда (5.1.1) в случае, когда $q = 1$. Это не случайно. Покажем, что такого ответа в общем случае дать нельзя. Например, для обобщённого гармонического ряда $a_n = \frac{1}{n^p}$ и при любом p $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^p = 1$. Поэтому при $q = 1$ возможна как сходимость ряда (5.1.1) (в нашем случае при $p > 1$), так и его расходимость (при $p \leq 1$).

Приведём без доказательства несколько предельных формул, полезных при применении признака Коши

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 n^{m_1} + a_2 n^{m_2} + \dots + a_k n^{m_k}} = 1. \quad (5.2.4)$$

В этом пределе $m_1, \dots, m_k, a_1, \dots, a_k$ — постоянные, не зависящие от n .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\log_a n} = 1. \quad (5.2.5)$$

Здесь основание a — произвольное, $a > 1$.

$$n! \sim \left(\frac{n}{e} \right)^n \sqrt{2\pi n}. \quad (5.2.6)$$

Это известная формула Стирлинга, в которой знак « $\sim$ » следует читать как «эквивалентен при n , стремящемся к бесконечности».

ПРИМЕР 5.2.4. *Исследуем сходимость ряда*

$$\frac{3}{1} + \frac{9}{1 \cdot 3} + \frac{27}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \dots + \frac{3^n}{(2n-1)!!} + \dots$$

Символ $n!!$ (двойной факториал) служит сокращением для произведений $n!! = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ (если n нечётно) и $n!! = 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n$ (если n чётно).

Применим признак Даламбера. Заметим, что если $a_n = \frac{3^n}{(2n-1)!!}$, то следующий член ряда a_{n+1} отличается от a_n дополнительными множителями в числителе и в знаменателе:

$$a_{n+1} = a_n \frac{3}{2n+1}.$$

Поэтому

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3}{2n+1},$$

и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$. Следовательно, согласно признаку Даламбера, ряд сходится.

ПРИМЕР 5.2.5. *Исследуем сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{2n+3} \right)^{n^2}$.*

Применим радикальный признак Коши. Обозначив

$$a_n = \left(\frac{2n-1}{2n+3} \right)^{n^2},$$

получим

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{2n-1}{2n+3} \right)^n = \left[\left(1 + \frac{-4}{2n+3} \right)^{\frac{2n+3}{-4}} \right]^{\frac{-4n}{2n+3}}.$$

При $n \rightarrow \infty$ показатель степени $\frac{-4n}{2n+3}$ стремится к -2 , а основание — к числу e (второй замечательный предел). Таким образом,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = e^{-2} < 1.$$

По радикальному признаку Коши ряд сходится.

§ 5.3. Знакопеременные ряды.

Абсолютная и условная сходимость

5.3.1. Абсолютная и условная сходимость.

Теорема об абсолютно сходящихся рядах

Рассмотрим знакопеременный ряд (5.1.1)

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

и ряд, составленный из абсолютных величин членов этого ряда,

$$|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots \quad (5.3.1)$$

Определение 5.3.1. Ряд (5.1.1) называют абсолютно сходящимся, если ряд (5.3.1) сходится.

Таким образом, в определении ничего не говорится о сходимости или расходимости самого ряда (5.1.1). Но, оказывается, что сходимость ряда является следствием его абсолютной сходимости.

Теорема 5.3.1 (об абсолютно сходящихся рядах). Если ряд абсолютно сходится, то он сходится.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что ряд (5.3.1) сходится. Докажем, что ряд (5.1.1) тоже сходится. Пусть A_n — последовательность частичных сумм ряда (5.1.1), A'_n — последовательность частичных сумм ряда (5.3.1). Если A_n^+ — сумма положительных слагаемых в A_n , а A_n^- — сумма абсолютных величин отрицательных членов в A_n , то, очевидно,

$$A_n = A_n^+ - A_n^-, \quad A'_n = A_n^+ + A_n^-. \quad (5.3.2)$$

По условию теоремы ряд (5.3.1) сходится, т.е. последовательность A'_n имеет конечный предел, поэтому она ограничена. Отсюда следует ограниченность последовательностей A_n^+ и A_n^- , дающих в сумме A'_n . Заметим, что неотрицательные последовательности A_n^+ и A_n^- монотонны, так как с ростом n число положительных слагаемых, составляющих каждую из них, может только возрастать. Поэтому последовательности A_n^+ и A_n^- как монотонные и ограниченные имеют конечные пределы A^+ и A^- . Из алгебраических свойств предела и равенств (5.3.2) следует, что последовательность A_n тоже имеет конечный предел, и, следовательно, ряд (5.1.1) сходится.

Теорема доказана.

ПРИМЕР 5.3.1. *Исследуем сходимость ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^3 n!}{n\sqrt{n}}.$$

Отметим, что при любом n

$$\left| \frac{\cos^3 n!}{n\sqrt{n}} \right| \leq \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ сходится, как ряд Дирихле с показателем $p = 3/2 > 1$, следовательно, по первому признаку сравнения ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^3 n!}{n\sqrt{n}}$ абсолютно сходится. По теореме об абсолютно сходящихся рядах этот ряд сходится.

Определение 5.3.2. *Если сходящийся числовой ряд не сходится абсолютно, то говорят, что он сходится условно.*

ЗАМЕЧАНИЕ 5.3.1. Абсолютно сходящиеся ряды ведут себя во многом так же, как конечные суммы. Например, любая перестановка членов абсолютно сходящегося ряда не влияет ни на его сходимость, ни на сумму. Напротив, члены условно сходящегося ряда можно переставить так, что его сумма станет равной произвольному, наперёд заданному числу (правда, для этого потребуется переставить

бесконечное число членов ряда). Можно сказать, что условная сходимость — явление неустойчивое. Анализ этих фактов выходит за рамки книги.

5.3.2. Знакопередающиеся ряды. Теорема Лейбница

Рассмотрим числовую последовательность a_n с положительными членами: $a_n > 0, n = 1, 2, \dots$. Из них можно составить числовой ряд

$$a_1 - a_2 + a_3 - \dots + (-1)^{n+1}a_n + \dots \quad (5.3.3)$$

Такой ряд называется *знакопередающимся*.

Теорема 5.3.2 (Лейбница). Если $a_1 > a_2 > \dots > a_n > \dots$, и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, то:

- 1) ряд (5.3.3) сходится;
- 2) для его суммы S выполнены неравенства

$$0 < S < a_1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть s_n — последовательность частичных сумм ряда (5.3.3). Для доказательства теоремы рассмотрим вначале поведение частичных сумм с чётными номерами, $n = 2m$. Сгруппируем слагаемые в такой частичной сумме двумя способами:

$$s_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2m-1} - a_{2m}); \quad (5.3.4)$$

$$s_{2m} = a_1 - (a_2 - a_3) - \dots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m}. \quad (5.3.5)$$

Из представления (5.3.4) видно: при возрастании m частичная сумма s_{2m} растёт, потому что из-за убывания последовательности a_n разности в каждой скобке положительны. Кроме того, из (5.3.4) и (5.3.5) следует, что

$$a_1 - a_2 < s_{2m} < a_1 - (a_2 - a_3). \quad (5.3.6)$$

Таким образом, последовательность s_{2m} монотонна и ограничена, а потому имеет конечный предел:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} s_{2m} = S.$$

По теореме о предельном переходе в неравенстве из (5.3.6) следует, что $a_1 - a_2 \leq S \leq a_1 - (a_2 - a_3)$, и, стало быть, $0 < S < a_1$.

Для завершения доказательства теоремы осталось показать, что число S является суммой ряда (5.3.3). К S стремятся частичные суммы с чётными номерами. Покажем, что число S является пределом для частичных сумм и с нечётными номерами. Имеем равенство

$$s_{2m+1} = s_{2m} + a_{2m+1}.$$

По условию $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2m+1} = 0$, поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2m+1} = S$.

Теорема полностью доказана.

Теорема Лейбница часто применяется для оценки погрешностей в приближённых вычислениях. Основанием этого служит

Следствие 5.3.1. При замене суммы S ряда, удовлетворяющего условиям теоремы Лейбница, его частичной суммой s_n , абсолютная величина погрешности приближённого равенства $S \approx s_n$ не превосходит a_{n+1} , т.е. первого отброшенного члена ряда.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеет место точное равенство

$$S = s_n + (-1)^n (a_{n+1} - a_{n+2} + \dots).$$

Погрешность приближения $S \approx s_n$ равна по абсолютной величине сумме ряда

$$a_{n+1} - a_{n+2} + \dots,$$

который удовлетворяет условиям теоремы Лейбница, так как является остатком такого же ряда. Поэтому, по второму утверждению теоремы Лейбница, сумма этого ряда, т.е. величина погрешности, не превосходит его первого члена a_{n+1} .

ПРИМЕР 5.3.2. В следующих разделах будет показано, что для любого числа x

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

В частности,

$$\frac{1}{e} = e^{-1} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} + \dots$$

Зададимся вопросом: сколько членов этого ряда нужно для приближённого вычисления числа $\frac{1}{e}$ с точностью 0,001? По доказанному выше следствию для этого достаточно ограничиться пятью членами ряда, так как погрешность в этом случае не превысит

$$\frac{1}{7!} = \frac{1}{5040} < 0,001.$$

§ 5.4. Функциональные последовательности и ряды. Поточечная и равномерная сходимость

5.4.1. Основные понятия и терминология

В разных разделах математического анализа возникают ряды, членами которых являются функции одной или нескольких переменных. Один из таких рядов воспроизведён в конце предыдущего раздела. Члены такого ряда образуют последовательность функций — функциональную последовательность. Последовательность частичных сумм — ещё одна функциональная последовательность. Переходим к определениям.

Если каждому натуральному числу n поставлена в соответствие числовая функция f_n , определённая на некотором множестве M , одном и том же для всех n , то говорят, что задана последовательность f_n функций на множестве M .

Если для некоторого $x \in M$ последовательность $f_n(x)$ имеет конечный предел при $n \rightarrow \infty$, то говорят, что функциональная последовательность f_n сходится в точке x .

Если последовательность f_n сходится в каждой точке $x \in M_1$ для некоторого подмножества $M_1 \subset M$, то говорят, что последовательность f_n сходится на множестве M_1 (сходится на M_1 поточечно). В этом случае можно определить функцию на множестве M_1 равенством

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Эту функцию называют *предельной функцией* последовательности f_n на множестве M_1 .

Пусть u_n — некоторая последовательность функций на множестве M .

Формальная бесконечная сумма $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется функциональным рядом.

Обозначим $f_n = \sum_{k=1}^n u_k$.

Говорят, что этот ряд *сходится в точке x* , если последовательность его частичных сумм f_n сходится в точке x . Соответственно, ряд сходится (поточечно) на множестве $M_1 \subset M$, если последовательность f_n сходится на M_1 . Предельная функция f , определённая на множестве M_1 , называется *суммой ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ на множестве M_1* . Говорят и по-другому: *функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится к функции f на множестве M_1* . Символически

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = f(x), \quad x \in M_1.$$

Определение 5.4.1. Множество всех значений x , на котором функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится, называется *областью сходимости этого ряда*.

ПРИМЕР 5.4.1. Рассмотрим функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + x^{2n}}.$$

Члены этого ряда $u_n(x) = \frac{1}{n + x^{2n}}$ определены на всей числовой прямой. Найдём его область сходимости.

Отметим, что если $|x| \leq 1$, то

$$u_n(x) \geq \frac{1}{n+1}.$$

Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ расходится, так как является остатком гармонического. Поэтому для $|x| \leq 1$ наш функциональный ряд расходится.

ся по первому признаку сравнения. Для $|x| > 1$

$$0 < u_n(x) < \frac{1}{x^{2n}} = \left(\frac{1}{x^2}\right)^n.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x^2}\right)^n$ сходится — его члены образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию. Отсюда: исследуемый ряд для $|x| > 1$ сходится по первому признаку сравнения.

Область сходимости ряда — множество $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

5.4.2. Равномерная сходимость

Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ на множестве M . Это значит, что для любого элемента $x \in M$ значения $f_n(x)$ при достаточно больших n становятся близкими к $f(x)$, т.е. для произвольного положительного числа ε можно указать такое число n_0 , что при любом $n > n_0$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

При выбранном значении ε число n_0 зависит, вообще говоря, от рассматриваемого элемента $x \in M$, т.е. значения $f_n(x)$ с ростом n приближаются к $f(x)$ с разной скоростью. При этом какие-то свойства членов последовательности f_n у предельной функции f могут пропадать. Например, если все функции f_n непрерывны на числовом промежутке, то этого нельзя утверждать о функции f . Чтобы обеспечить наследование предельной функцией каких-то свойств членов последовательности, используют другие типы сходимости функций, отличные от поточечной, например *равномерную сходимость*

Определение 5.4.2. Говорят, что последовательность f_n сходится к функции f при n , стремящемся к бесконечности, равномерно на множестве M , если для произвольного положительного числа ε найдётся такое число n_0 , зависящее только от ε , что при $n > n_0$ и любом $x \in M$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

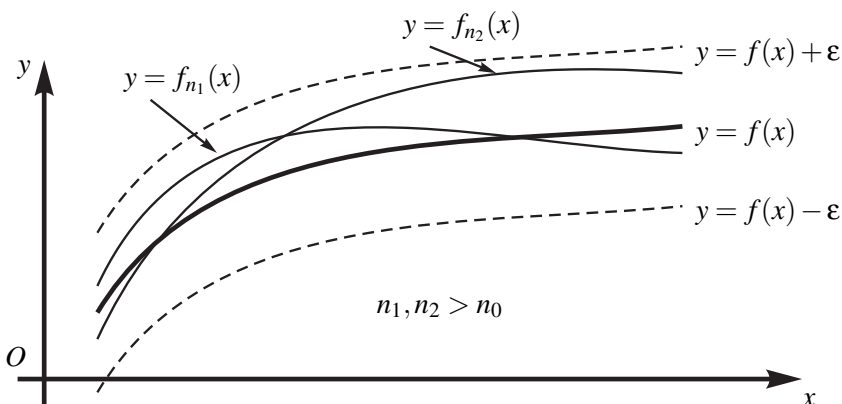


Рис. 5.2

Особенностью этого определения является требование выполнения неравенства $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ одновременно для всех $x \in M$ при надлежащем выборе n (рис. 5.2). Тот факт, что последовательность f_n сходится к функции f равномерно на M , символически записывают следующим образом:

$$f_n \Rightarrow f \text{ на } M \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Если функция f является поточечным пределом для последовательности f_n на множестве M , то пишут иначе: $f_n \rightarrow f$ на M при $n \rightarrow \infty$. Очевидно, что если $f_n \Rightarrow f$, то $f_n \rightarrow f$ на M при $n \rightarrow \infty$, т.е. из равномерной сходимости следует поточечная. Обратное неверно. Разницу между поточечной и равномерной сходимостью иллюстрирует

ПРИМЕР 5.4.2. Пусть $f_n(x) = x^n$, $M = (0; 1)$. Очевидно, $f_n(x) \rightarrow 0$ на $(0; 1)$ при $n \rightarrow \infty$, т.е. последовательность f_n поточечно сходится к функции, тождественно равной нулю. Покажем, что эта сходимость не является равномерной. Для этого возьмём какое-нибудь число ε из интервала $(0; 1)$. Если бы сходимость последовательности f_n была равномерной на $(0; 1)$ при $n \rightarrow \infty$, то для этого числа ε нашёлся бы такой номер n_0 члена последовательности, что при $n > n_0$ при всех $x \in (0; 1)$

$$|f_n(x) - 0| < \varepsilon \implies x^n < \varepsilon. \quad (5.4.1)$$

Но это не так: для любого такого ε неравенство (5.4.1) не будет выполнено при $x \in [\sqrt[n]{\varepsilon}, 1)$. Поэтому сходимость $x^n \rightarrow 0$ на $(0; 1)$ не является равномерной (рис. 5.3).

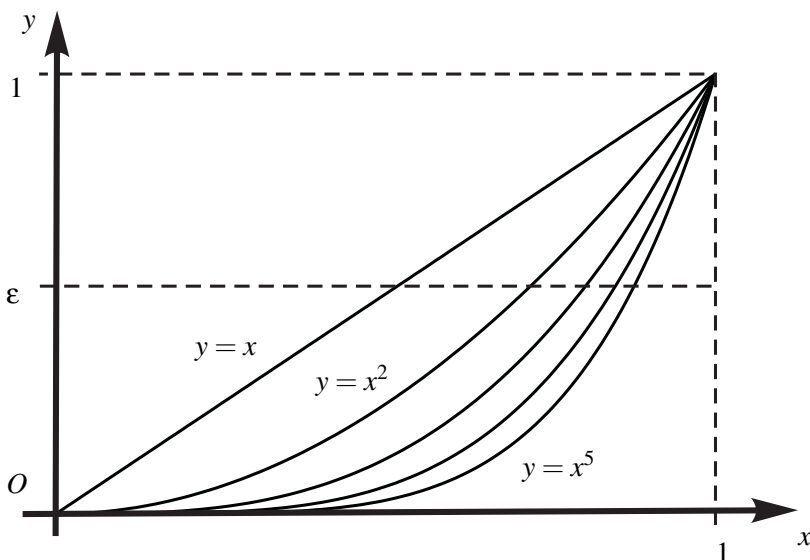


Рис. 5.3

В то же время $x^n \Rightarrow 0$ на любом интервале $(0; \delta)$, если $0 < \delta < 1$. Действительно, для любого положительного числа ε неравенство $x^n < \varepsilon$ выполняется сразу для всех $x \in (0; \delta)$ при $n > \log_{\delta} \varepsilon$.

Понятия поточечной и равномерной сходимостей переносятся на функциональные ряды. Если f_n — последовательность частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на M , то говорят, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится к сумме f равномерно на M , если $f_n \Rightarrow f$ на M при $n \rightarrow \infty$. Сформулируем несколько теорем о равномерно сходящихся рядах без доказательства.

Теорема 5.4.1 (Вейерштрасса). Если для всех $x \in M$ и любого $n \in \mathbb{N}$ $|u_n(x)| \leq a_n$ и числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то функциональный ряд сходится на множестве M равномерно.

Если выполнены условия теоремы 5.4.1, то числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *мажорантой* для функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Теорема 5.4.2. *Сумма равномерно сходящегося на числовом промежутке функционального ряда, составленного из непрерывных функций, является функцией непрерывной.*

В этой теореме промежутки может быть любым — конечным или нет, открытым, замкнутым, полуконечным.

Теорема 5.4.3. *Равномерно сходящийся на отрезке $[a; b]$ ряд, члены которого — непрерывные функции, можно почленно интегрировать:*

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx.$$

Теорема 5.4.4. *Если ряд из непрерывно дифференцируемых на $[a; b]$ функций $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится в какой-нибудь точке этого промежутка, а ряд из производных $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ равномерно сходится к функции $\varphi(x)$ на $[a; b]$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится на $[a; b]$, его сумма f дифференцируема, и $f' = \varphi$ на $[a; b]$.*

В этой теореме при $x = a$ и $x = b$ подразумеваются односторонние производные.

§ 5.5. Степенные ряды

5.5.1. Область сходимости степенного ряда

Из всех функциональных рядов наиболее изученными являются степенные ряды.

Определение 5.5.1. Пусть $x_0, c_0, c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ — постоянные. Функциональный ряд вида

$$c_0 + c_1(x - x_0) + \dots + c_n(x - x_0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n \quad (5.5.1)$$

называется *степенным*; числа $c_0, c_1, c_2, \dots$ называются *коэффициентами ряда* (5.5.1).

Членами ряда (5.5.1) являются степенные функции $c_n(x - x_0)^n$, отсюда название ряда.

ПРИМЕР 5.5.1. Рассмотрим степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{2n}}{\sqrt{n}}$. Здесь $x_0 = -1$. Коэффициенты ряда: $c_0 = 0, c_1 = 0, c_2 = 1, \dots, c_{2k-1} = 0, c_{2k} = \frac{1}{\sqrt{k}}, (k = 1, 2, \dots)$.

Заметим, что заменой переменной $x - x_0 = y$ степенной ряд (5.5.1) приводится к ряду более специального вида, соответствующего случаю $x_0 = 0$. Это позволяет изучать степенные ряды только вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n. \quad (5.5.2)$$

Оказывается, что область сходимости любого степенного ряда вида (5.5.2) устроена в некотором смысле одинаково. Это подтверждает

Теорема 5.5.1 (Абеля). Если степенной ряд (5.5.2) сходится в некоторой точке $x_1 \neq 0$, то он сходится абсолютно и равномерно на любом симметричном относительно нуля отрезке $[-r, r]$, если $0 < r < |x_1|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_1^n$ сходится, то по необходимому признаку сходимости $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n x_1^n = 0$, и по теореме об ограниченности сходящейся последовательности существует такое число M , что $|c_n x_1^n| \leq M$ для $n = 1, 2, \dots$. Поэтому, если $x \in [-r, r]$, то

$$|c_n x^n| = |c_n x_1^n| \left| \frac{x}{x_1} \right|^n \leq M \left| \frac{r}{x_1} \right|^n.$$

Следовательно, при $r < |x_1|$ ряд (5.5.2) имеет на отрезке $[-r, r]$ сходящуюся мажоранту — ряд $\sum_{n=1}^{\infty} M \left| \frac{r}{x_1} \right|^n$, члены которого образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию. Поэтому на отрезке $[-r, r]$ ряд (5.5.2) сходится абсолютно (по первому признаку сравнения) и равномерно (по теореме Вейерштрасса). Теорема доказана.

Следствие 5.5.1. Областью сходимости E ряда (5.5.2) может быть множество только одного из трёх видов:

- (I) $E = \{0\}$ — из одного элемента;
- (II) E — промежуток конечной длины $2R$ центром в нуле;
- (III) $E = (-\infty, +\infty)$.

В случаях (II) и (III) ряд (5.5.2) сходится абсолютно и равномерно на любом отрезке вида $[-r, r]$, лежащем внутри E .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим сначала, что для любого ряда вида (5.5.2) $0 \in E$. Допустим, что область сходимости E ряда (5.5.2) содержит хотя бы одну точку $x_0 \neq 0$. Тогда по теореме Абеля в E содержится целый интервал $(-|x_0|, |x_0|)$. Заметим, что в E нет «дырок»: если бы при некотором $x = x_1$ ряд (5.5.2) расходился, а при $x = x_2, |x_2| > |x_1|$ — сходил, то это привело бы к противоречию с теоремой Абеля. Следовательно, область сходимости — промежуток: только промежутком может быть множество без дырок, содержащее в себе другой промежуток. Допустим, что E не совпадает с $(-\infty, +\infty)$. Тогда его длина конечна и концы равноудалены от нуля. Если бы это было не так, например правый конец отстоял бы дальше от нуля, чем левый, то это опять привело бы к противоречию с теоремой Абеля. Итак, если область сходимости не относится к типу (I) или (III), то она обязательно имеет вид (II), т.е. является промежутком вида $< -R, +R >$ (никаких выводов о принадлежности его концов области сходимости E мы не делаем!) Абсолютная и равномерная сходимость ряда (5.5.2) на $[-r, r] \subset E$ следует из теоремы Абеля. Следствие доказано.

Следствие 5.5.2. Для степенных рядов границы области сходимости и области абсолютной сходимости совпадают.

Это так, ибо по теореме Абеля сходимость внутри промежутка сходимости абсолютна.

Определение 5.5.2. Радиусом сходимости ряда (5.5.2) называется число $R = 0$ — если область сходимости $\{0\}$; число $R > 0$ — если область сходимости — промежуток длины $2R$; $R = +\infty$, если $E = (-\infty, +\infty)$.

Теорема 5.5.2. Если существует конечный или бесконечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$, то он совпадает с радиусом сходимости степенного ряда (5.5.2).

Аналогично, если существует конечный или бесконечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$, то радиус сходимости ряда (5.5.2) равен

$$R = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} \right)^{-1}.$$

Доказательство теоремы опускаем. Формулами же

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| \quad (5.5.3)$$

и

$$R = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} \right)^{-1} \quad (5.5.4)$$

будем пользоваться.

ПРИМЕР 5.5.2. Найдём область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$. Его коэффициенты: $c_0 = 0$, $c_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $n \geq 1$. Воспользуемся формулой (5.5.3).

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} = 1.$$

Исследуем сходимость ряда на концах промежутка $< -1, 1 >$. При $x = -1$ получаем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, он сходится по теореме Лейбница. При $x = 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ расходится, как ряд Дирихле с показателем $p = 1/2 < 1$. Окончательно область сходимости $E = [-1, 1)$.

ПРИМЕР 5.5.3. Найдём область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n-1}}{2^n n^2}.$$

Коэффициенты ряда

$$c_{2n-1} = \frac{1}{2^n n^2}, \quad c_{2n} = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Таким образом, пределы (5.5.3) и (5.5.4) не существуют. Установим границы абсолютной сходимости ряда, используя признак Даламбера.

Общий член ряда $a_n = \frac{(x-1)^{2n-1}}{2^n n^2}$.

$$a_{n+1} = \frac{(x-1)^{2n+1}}{2^{n+1} (n+1)^2}, \quad \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{|x-1|^2}{2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{(x-1)^2}{2}.$$

Ряд абсолютно сходится, если

$$\frac{(x-1)^2}{2} < 1, \quad \text{т.е. } x \in (1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}),$$

и расходится, если $x \in (-\infty, 1 - \sqrt{2}) \cup (1 + \sqrt{2}, +\infty)$. Так как границы области сходимости и абсолютной сходимости для степенных рядов совпадают, то промежуток сходимости $E = < 1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2} >$. При $x = 1 - \sqrt{2}$ получаем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\sqrt{2})^{2n-1}}{2^n n^2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

При $x = 1 + \sqrt{2}$ — ряд

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Эти ряды сходятся, так как сходится обобщённый гармонический ряд с показателем $p = 2 > 1$. Окончательно область сходимости $E = [1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}]$.

5.5.2. Почленное интегрирование и дифференцирование степенного ряда

Параллельно с рядом (5.5.2) рассмотрим степенные ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}, \quad (5.5.5)$$

и

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}. \quad (5.5.6)$$

Ряд (5.5.5) получен почленным дифференцированием, а (5.5.6) — почленным интегрированием ряда (5.5.2).

Теорема 5.5.3. 1. Степенные ряды (5.5.5) и (5.5.6) имеют тот же радиус сходимости, что и ряд (5.5.2).

2. Если $R > 0$, и $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, то

а) функция f дифференцируема внутри интервала сходимости и $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$ при $|x| < R$;

$$б) \int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1} \text{ при } |x| < R.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из общих теорем о почленном интегрировании и почленном дифференцировании функционального ряда, нужно только убедиться в том, что радиусы сходимости рядов (5.5.5) и (5.5.6) совпадают с радиусом сходимости ряда (5.5.2). Проверим это, например, для ряда (5.5.5) в простом случае, а именно когда существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$ и радиус сходимости можно вычислить по формуле (5.5.3). Применим эту же формулу для вычисления радиуса сходимости ряда (5.5.5). Получим

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)c_{n+1}}{(n+2)c_{n+2}} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_{n+2}} \right| \left| \frac{n+1}{n+2} \right| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_{n+2}} \right| \frac{1+1/n}{1+2/n} = R, \end{aligned}$$

т.е. радиусы сходимости рядов (5.5.5) и (5.5.2) совпадают. Аналогично этот факт доказывается и для ряда (5.5.6), и для обоих рядов в том случае, когда радиус сходимости можно вычислить по формуле (5.5.4). Доказательство совпадения радиусов сходимости в общем случае требует более тонкого подхода и выходит за рамки пособия.

Следствие 5.5.3. *Если радиус сходимости степенного ряда (5.5.2) $R > 0$, то его сумма $f(x)$ является для $|x| < R$ бесконечное число раз дифференцируемой функцией, и при $|x| < R$*

$$f^{(m)}(x) = \sum_{n=m}^{\infty} c_n n(n-1) \cdots (n-m+1) x^{n-m}.$$

Иными словами, теорему о почленном дифференцировании степенного ряда можно применять и к производной исходного ряда, и ко второй его производной, и так далее — сколько угодно раз.

§ 5.6. Разложение функций в степенные ряды

5.6.1. Ряды Тейлора и Маклорена

Определение 5.6.1. *Говорят, что функция f раскладывается в степенной ряд в окрестности точки x_0 , если в некоторой окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ этой точки она определена, и при $|x - x_0| < \delta$ совпадает с суммой некоторого степенного ряда: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$.*

Заметим, что как сумма степенного ряда такая функция f бесконечное число раз дифференцируема в окрестности x_0 . Докажем, что если функция может быть разложена в степенной ряд в окрестности точки x_0 , то такое разложение единственно.

Теорема 5.6.1. *Если для $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n, \quad (5.6.1)$$

то функция f бесконечно дифференцируема в этой окрестности и

$$c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем определять коэффициенты степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ по порядку, начиная с c_0 :

1. Подставим в равенство (5.6.1) значение $x = x_0$. Все члены ряда примут значение «ноль», кроме первого:

$$f(x_0) = c_0.$$

2. По теореме о почленном дифференцировании степенного ряда для $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x - x_0)^{n-1}.$$

Подставим в это равенство значение $x = x_0$

$$f'(x_0) = c_1.$$

Продолжая дифференцировать степенной ряд почленно, получим

$$f^{(m)}(x) = \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-m+1) c_n (x-x_0)^{n-m}.$$

При $x = x_0$

$$f^{(m)}(x_0) = m(m-1) \cdots 2 \cdot 1 c_m = m! c_m,$$

откуда

$$c_m = \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}.$$

Теорема доказана.

Пусть теперь f — произвольная бесконечно дифференцируемая в некоторой окрестности точки x_0 функция.

Определение 5.6.2. *Степенной ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$

называется *рядом Тейлора функции f в точке x_0* . В частном случае, когда $x_0 = 0$, ряд Тейлора называют *рядом Маклорена*.

Теорема 5.6.1 может быть переформулирована так: *степенной ряд является рядом Тейлора своей суммы.*

Практический смысл теоремы состоит в том, что раскладывать функцию в степенной ряд можно любыми удобными способами. Результат будет совпадать с рядом Тейлора этой функции.

ПРИМЕР 5.6.1. Разложим функцию $f(x) = \frac{1}{x+3}$ в окрестности точки $x_0 = 1$. Для этого представим функцию в виде

$$f(x) = \frac{1}{x+3} = \frac{1}{(x-1)+4} = \frac{1}{4} \frac{1}{1 - \left(-\frac{x-1}{4}\right)}.$$

При $|x-1| < 4$ функция совпадает с суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$f(x) = \frac{1}{4} \frac{1}{1 - \left(-\frac{x-1}{4}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} (x-1)^n.$$

В соответствии с теоремой 5.6.1 этот ряд является рядом Тейлора функции $f(x)$ в окрестности $x_0 = 1$.

Не каждая бесконечно дифференцируемая функция может быть разложена в степенной ряд. Иными словами, сумма ряда Тейлора бесконечно дифференцируемой функции не обязана совпадать с этой функцией. Сформулируем одно из достаточных условий разложимости функции в ряд Тейлора.

Теорема 5.6.2. Если функция f бесконечно дифференцируема в окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0 , и существует такое число L , что $|f^n(x)| \leq L$ при $n = 0, 1, 2, \dots$, $|x - x_0| < \delta$, то при $|x - x_0| < \delta$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n. \quad (5.6.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $|x - x_0| < \delta$. Для доказательства равенства (5.6.2) нужно показать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x) - f_n(x)) = 0,$$

где $f_n(x)$ — n -я частичная сумма ряда Тейлора функции f в точке x_0 . Воспользуемся формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!} (x - x_0)^n = \\ &= f_n(x) + \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!} (x - x_0)^n. \end{aligned}$$

Здесь x_1 — некоторая точка, лежащая между x и x_0 . Рассмотрим разность

$$f(x) - f_n(x) = \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Так как по условию теоремы все производные ограничены по абсолютной величине числом L , то

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{L}{n!} |x - x_0|^n.$$

Теорема будет доказана, если мы покажем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L}{n!} |x - x_0|^n = 0. \quad (5.6.3)$$

Проще всего к этому равенству подойти «круглым путём». Именно: числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{L}{n!} |x - x_0|^n$ сходится по признаку Даламбера

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! L |x - x_0|^{n+1}}{(n+1)! L |x - x_0|^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x - x_0|}{n+1} = 0 < 1.$$

Поэтому равенство (5.6.3) выполнено по необходимому признаку сходимости.

Теорема доказана.

5.6.2. Тейлоровские разложения элементарных функций

Получим таблицу разложений в ряд Маклорена элементарных функций:

1. $f(x) = e^x$. В этом случае $f^{(n)}(x) = e^x$, $f^{(n)}(0) = 1$ и для любого $\delta > 0$ $|f^{(n)}(x)| = e^x \leq e^\delta$ при $|x| < \delta$. Следовательно, по теореме 5.6.2 для любых x

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

2. $f(x) = \cos x$. Нетрудно показать, что $f^{(2n-1)}(x) = (-1)^n \sin x$, $f^{(2n)}(x) = (-1)^n \cos x$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Поэтому $f^{(2n-1)}(0) = 0$, $f^{(2n)}(0) = (-1)^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Кроме того, при всех $n \geq 0$ $|f^{(n)}(x)| \leq 1$, $x \in (-\infty, +\infty)$. По теореме 5.6.2

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

3. Аналогично предыдущему разложению получим

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

4. $f(x) = \ln(1+x)$. Разложение в ряд Маклорена этой функции можно получить так. По формуле суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии при $|t| < 1$

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \dots$$

Очевидно, что при $|x| < 1$

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x (1 - t + t^2 - \dots) dt.$$

По теореме о почленном интегрировании степенного ряда при $|x| < 1$

$$\ln(1+x) = \int_0^x dt - \int_0^x t dt + \dots = x - \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} + \dots$$

Можно доказать, что это равенство справедливо и при $x = 1$:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} + \dots, \quad -1 < x \leq 1.$$

5. Аналогично можно получить разложение

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{2n-1} + \dots, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

6. $f(x) = (1+x)^m$, m — любое действительное число. Так как $f^{(n)}(x) = m(m-1)\dots(m-n+1)(1+x)^{m-n}$, и $f^{(n)}(0) = m(m-1)\dots(m-n+1)$, то ряд Маклорена этой функции имеет вид

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots$$

Можно показать, что если относительно числа m не делать никаких дополнительных предположений, то имеет место разложение

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots, \quad -1 < x < 1.$$

На первый взгляд, полученная таблица из шести разложений в ряд Маклорена элементарных функций невелика. Тем не менее эта таблица служит хорошей основой для получения тейлоровских разложений довольно широкого круга функций.

ПРИМЕР 5.6.2. Разложим функцию 2^x в ряд Тейлора в окрестности точки $x = -2$. Для этого преобразуем функцию

$$2^x = 2^{(x+2)-2} = \frac{1}{4}2^{x+2} = \frac{1}{4}e^{(x+2)\ln 2}.$$

Воспользуемся первым из шести полученных выше разложений в ряд Маклорена, подставляя в него вместо x выражение $(x+2)\ln 2$,

$$2^x = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{\ln 2}{1!}(x+2) + \frac{\ln^2 2}{2!}(x+2)^2 + \dots + \frac{\ln^n 2}{n!}(x+2)^n + \dots \right).$$

По теореме 5.6.1 это разложение является тейлоровским. Задача решена.

ПРИМЕР 5.6.3. Разложить функцию $\sin^2 x$ в ряд по степеням $x - 1$.

РЕШЕНИЕ.

$$\begin{aligned}\sin^2 x &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2(x-1) + 2)) = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\cos 2)\cos 2(x-1) + \frac{1}{2}(\sin 2)\sin 2(x-1).\end{aligned}$$

Теперь можно воспользоваться разложениями в ряд Маклорена функций $\cos x$ и $\sin x$, подставляя в них выражение $2(x-1)$ вместо x ,

$$\begin{aligned}\sin^2 x &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\cos 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n}}{(2n)!} (x-1)^{2n} + \\ &\quad + \frac{1}{2}(\sin 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{(2n+1)!} (x-1)^{2n+1} = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{(2n)!} \left(\frac{2 \sin 2}{2n+1} (x-1)^{2n+1} - (\cos 2)(x-1)^{2n} \right).\end{aligned}$$

§ 5.7. Применение степенных рядов

Степенные ряды широко применяются как в разных разделах математики, так и в её приложениях. Не пытаясь охватить всё, остановимся на нескольких аспектах.

5.7.1. Приближённое вычисление значений функций

Для приближённого вычисления значения функции могут быть заменены на значения частичной суммы её ряда Тейлора, а мерой ошибки в этом случае является абсолютная величина суммы отброшенных членов ряда. Очевидно, что результат такого приближённого вычисления совпадает с тем, который был бы получен при использовании формулы Тейлора. Сравним подходы, предоставляемые формулой Тейлора и рядом Тейлора:

1. Подход, использующий формулу Тейлора, является более общим, т.е. применим к более широкому классу функций. Это объясняется тем, что формулу Тейлора порядка n можно применить уже в том случае, когда функция имеет только n производных. Если в этой ситуации удаётся оценить остаточный член в формуле Тейлора, то цель достигнута. Применение же ряда Тейлора требует от рассматриваемой функции существования производных всех порядков. Более того, функция должна раскладываться в степенной ряд, бесконечной дифференцируемости для этого ещё не достаточно.

2. Хотя результаты приближённого вычисления в обоих подходах совпадают, при использовании ряда Тейлора возможна более гибкая оценка погрешности приближения. В формуле Тейлора для оценки погрешности используют разные представления остаточного члена (например, форму Лагранжа, интегральную, и т. д.) В случае ряда Тейлора погрешность можно оценить ещё и с помощью теорем теории рядов, что иногда проще. Кроме того, ряд можно видоизменять таким образом, чтобы его скорость сходимости увеличивалась. Для этого разработаны различные методы. Подход теории рядов к приближённым вычислениям иллюстрирует

ПРИМЕР 5.7.1. Вычислим $\sqrt{27}$ с точностью 0,001. Для этого используем биномиальное разложение

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots, \quad -1 < x < 1.$$

При $m = \frac{1}{2}$, $x = \frac{2}{25}$ получим

$$\begin{aligned} \sqrt{27} &= (25+2)^{1/2} = 5 \left(1 + \frac{2}{25} \right)^{1/2} = \\ &= 5 \left(1 + \frac{\frac{1}{2}}{1!} \frac{2}{25} + \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right)}{2!} \left(\frac{2}{25} \right)^2 + \dots \right). \end{aligned}$$

Этот ряд начиная со второго своего члена удовлетворяет условиям теоремы Лейбница. Вычислим третий и четвёртый члены: $a_3 = -\frac{1}{250}$, $a_4 = \frac{1}{6250}$. Следовательно, если ограничиться суммой первых трёх членов, а остальные отбросить, то погрешность δ будет меньше первого отброшенного, т.е. $\sqrt{27} \approx 5,204$ с точностью 0,001.

5.7.2. Приближённое вычисление интегралов

ПРИМЕР 5.7.2. Вычислим

$$\int_0^1 \cos \sqrt{x} dx$$

с точностью 0,001. Для этого разложим подынтегральную функцию в степенной ряд. Подставляя в ряд Маклорена функции $\cos x$ $\sqrt{x}$ вместо x , получаем

$$\cos \sqrt{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\sqrt{x})^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(2n)!}.$$

По теореме о почленном интегрировании степенного ряда операции интегрирования и суммирования можно поменять местами

$$\begin{aligned} \int_0^1 \cos \sqrt{x} dx &= \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(2n)!} \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \int_0^1 x^n dx = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(2n)!} = 1 - \frac{1}{2 \cdot 2!} + \frac{1}{3 \cdot 4!} - \frac{1}{4 \cdot 6!} + \dots \end{aligned}$$

Очевидно, полученный числовой ряд удовлетворяет условиям теоремы Лейбница, поэтому при замене суммы ряда частичной суммой погрешность не превосходит абсолютной величины первого отброшенного члена ряда. С точностью 0,001

$$\int_0^1 \cos \sqrt{x} dx \approx 1 - \frac{1}{2 \cdot 2!} + \frac{1}{3 \cdot 4!} = \frac{55}{72}.$$

Глава 6

Ряды Фурье

Особенностью степенных рядов, рассмотренных в предыдущей главе, является то, что, во-первых, на любом замкнутом промежутке внутри интервала сходимости они сходятся равномерно (теорема Абеля и её следствия), и, во-вторых, раскладываются в степенные ряды только функции, обладающие специфическими свойствами гладкости. Достаточно вспомнить, что для разложимости функции в ряд Тейлора мало наличия у неё производных всех порядков. Нужно, чтобы эти производные не росли слишком быстро с увеличением порядка. В математическом анализе и его приложениях приходится иметь дело с функциями, которые таким жёстким условиям не удовлетворяют. В то же время желательно уметь раскладывать их в функциональные ряды, членами которых являются функции, хорошо изученные, богатые дополнительными свойствами, удобные с точки зрения анализа сходимости рядов и использования свойств их сумм. Хорошо бы в качестве членов таких рядов иметь, например, многочлены, тригонометрические или показательные функции. При этом, видимо, нужно вводить эти ряды так, чтобы их суммы не обязательно сохраняли свойства гладкости членов ряда, а позволяли раскладывать в эти ряды «плохие» функции. Оказывается, физики используют такие разложения уже многие десятилетия, применяя «теорему»: любое периодическое колебание может быть представлено суммой (возможно, бесконечной) колебаний простейшей формы — синусоидальных. В математике эту «теорему» обосновывает, уточняет и обобщает тео-

рия рядов Фурье.

§ 6.1. 2π -периодические функции.

Тригонометрические полиномы.

Ряд Фурье 2π -периодической функции

6.1.1. Простейшие 2π -периодические функции

Напомним, что функция $f(x)$ называется T -периодической, если для любого $x \in \mathbb{R}$ $f(x) = f(x + T)$.

Простейшие 2π -периодические функции — тригонометрические — изучались в курсе элементарной математики. Если ограничиться функциями, определёнными на всей вещественной прямой, то это функции вида $a \cos nx$, $b \sin nx$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Более общие функции $m \sin(nx + \varphi)$ и $m \cos(nx + \varphi)$ являются их линейными комбинациями. Например,

$$m \sin(nx + \varphi) = (m \sin \varphi) \cos nx + (m \cos \varphi) \sin nx.$$

Линейные комбинации вида

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$$

с постоянными $\alpha_0, \alpha_k, \beta_k, k = 1, 2, \dots$ называются тригонометрическими полиномами, т.е. многочленами n -го порядка. Значение тригонометрических полиномов в том, что ими можно приближать значения других 2π -периодических функций.

6.1.2. Ряд и коэффициенты Фурье

2π -периодической функции

Рассмотрим теперь «тригонометрический полином бесконечного порядка», т.е. сумму сходящегося ряда

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (6.1.1)$$

и попытаемся выразить коэффициенты $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$ этого ряда через сумму f . Для этого получим сначала несколько формул, которыми далее будем регулярно пользоваться.

1. Если $m, n = 0, 1, 2, \dots$ и $m \neq n$, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = 0; \quad (6.1.2)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = 0; \quad (6.1.3)$$

при любых m и n (и в случае $m = n$)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx dx = 0; \quad (6.1.4)$$

2. Для $n = 1, 2, \dots$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \pi; \quad (6.1.5)$$

Выведем, например, равенство (6.1.4)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin(m+n)x - \sin(m-n)x) dx.$$

Если $m \neq n$, то получаем

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx dx &= \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{m+n} \cos(m+n)x + \frac{1}{m-n} \cos(m-n)x \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0. \end{aligned}$$

Равенство нулю является здесь следствием чётности косинуса.

При $m = n$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin mx dx = -\frac{1}{4m} \cos 2mx \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Равенства (6.1.2) и (6.1.3) доказываются аналогично. Последние соотношения (6.1.5):

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2nx) dx = \pi + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2nx dx = \pi; \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2nx) dx = \pi - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2nx dx = \pi. \end{aligned}$$

Теорема 6.1.1. Пусть выполнено равенство (6.1.1) и ряд в его правой части сходится на отрезке $[-\pi, \pi]$ равномерно. Тогда

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx; \quad (6.1.6)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx; \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.1.7)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx; \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.1.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как ряд в правой части равенства (6.1.1) сходится на $[-\pi, \pi]$ равномерно, и его члены — непрерывные функции, то сумма f непрерывна на интервале $[-\pi, \pi]$ и ряд можно почленно интегрировать (по теореме о почленном интегрировании равномерно сходящегося ряда):

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx \right).$$

Все члены этого ряда при $n = 1, 2, \dots$ равны нулю в соответствии с равенствами (6.1.2) и (6.1.4), в которых выбрано $m = 0$. Поэтому

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx = a_0 \pi.$$

Отсюда следует формула (6.1.6).

Умножим равенство (6.1.1) на $\cos nx$:

$$f(x) \cos nx = \frac{a_0}{2} \cos nx + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mx \cos nx + b_m \sin mx \cos nx).$$

Проинтегрируем полученное равенство почленно

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx + b_m \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx \right). \end{aligned}$$

По формулам (6.1.2)–(6.1.6) все интегралы в правой части равны нулю, кроме одного. Приходим к равенству

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = a_n \pi.$$

Получаем формулу (6.1.7). Последняя формула доказывается аналогично. Теорема доказана.

Пусть теперь функция f —произвольная 2π -периодическая, не обязательно непрерывная.

Определение 6.1.1. *Рядом Фурье функции f называется ряд вида*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (6.1.9)$$

в котором коэффициенты Фурье a_0, a_n, b_n ($n = 1, 2, \dots$) определены формулами (6.1.6)–(6.1.8) (при условии, что все интегралы в этих формулах существуют).

В этих терминах короткая формулировка теоремы (6.1.1) такова: *равномерно сходящийся тригонометрический ряд (6.1.9) является рядом Фурье своей суммы.*

Следствие 6.1.1. *Если 2π -периодическую функцию можно разложить в равномерно сходящийся ряд*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

то это можно сделать единственным образом.

Действительно, это сразу вытекает из теоремы 6.1.1.

Отметим, что класс функций, для которых определён ряд Фурье, довольно широк, и описать его сложно. Такими, в частности, являются 2π -периодические абсолютно интегрируемые на отрезке $[-\pi, \pi]$ функции. Абсолютная интегрируемость функции на промежутке $[-\pi, \pi]$ означает сходимость интеграла $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx$.

6.1.3. Ряды Фурье чётных и нечётных функций

Пусть функция f определена на отрезке $[-a, a]$, число $a > 0$. Если f — чётная функция, то

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a f(x) dx &= \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = \\ &= \left| \begin{array}{c} \text{во втором интеграле} \\ \text{замена } x = -t \end{array} \right| = \int_0^a f(x) dx - \int_a^0 f(-t) dt = \\ &= \left| \begin{array}{c} \text{чётность} \\ \text{функции } f \end{array} \right| = \int_0^a f(x) dx - \int_a^0 f(t) dt = \\ &= \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(x) dx. \end{aligned}$$

Такие же вычисления для нечётной функции приводят к равенству

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

Рассмотрим теперь 2π -периодическую функцию f . Если она чётная, то произведения вида $f(x) \cos nx$ являются чётными, а $f(x) \sin nx$ — нечётными функциями. В случае, когда f нечётная функция, наоборот, $f(x) \cos nx$ — нечётные, а $f(x) \sin nx$ — чётные функции. Формулы коэффициентов Фурье дают

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n \geq 0); \quad b_n = 0 \quad (n \geq 1)$$

для чётной функции f ;

$$a_n = 0 \quad (n \geq 0); \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n \geq 1)$$

для нечётной функции f . Сформулируем результат в виде теоремы.

Теорема 6.1.2. Ряд Фурье чётной 2π -периодической функции $f(x)$ имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx, \quad \text{где} \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx.$$

Ряд Фурье нечётной 2π -периодической функции $f(x)$ имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad \text{где} \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

6.1.4. Сдвиг промежутка интегрирования

Для любой $2l$ -периодической функции f и любого числа c

$$\begin{aligned}
 \int_c^{c+2l} f(x) dx &= \int_c^l f(x) dx + \int_l^{c+2l} f(x) dx = \\
 &= \left| \begin{array}{l} \text{во втором интеграле} \\ \text{замена } x = y + 2l \end{array} \right| = \int_c^l f(x) dx + \int_{-l}^c f(y + 2l) dy = \\
 &= \left| \begin{array}{l} \text{в силу периодичности} \\ f(y + 2l) = f(y) \end{array} \right| = \int_c^l f(x) dx + \int_{-l}^c f(y) dy = \\
 &= \int_{-l}^l f(y) dy.
 \end{aligned}$$

Таким образом, значение интеграла периодической функции по промежутку не зависит от того, где этот промежуток находится на числовой оси, если длина промежутка равна периоду функции. В применении к коэффициентам Фурье это даёт:

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_c^{c+2\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n \geq 0), \\
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_c^{c+2\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n \geq 1),
 \end{aligned}$$

число c — любое.

6.1.5. Комплексная форма ряда Фурье

Пусть функция f 2π -периодическая и

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Из теории функций комплексной переменной известны формулы Эйлера, связывающие тригонометрические и показательные функции:

$$e^{\pm inx} = \cos nx \pm i \sin nx; \quad (6.1.10)$$

$$\cos nx = \frac{1}{2} (e^{inx} + e^{-inx}); \quad (6.1.11)$$

$$\sin nx = \frac{1}{2i} (e^{inx} - e^{-inx}) = -\frac{i}{2} (e^{inx} - e^{-inx}). \quad (6.1.12)$$

Подставим последние формулы в ряд Фурье функции

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} (a_n - b_n i) e^{inx} + \frac{1}{2} (a_n + b_n i) e^{-inx} \right).$$

Обозначим

$$c_0 = \frac{a_0}{2}; \quad c_n = \frac{1}{2} (a_n - b_n i); \quad c_{-n} = \frac{1}{2} (a_n + b_n i), \quad n = 1, 2,$$

Тогда разложение функции f в ряд Фурье можно переписать в виде

$$\begin{aligned} f(x) &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-inx} = \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx} + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}. \end{aligned}$$

Получим интегральные формулы комплексных коэффициентов c_n . При $n \geq 0$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2} (a_n - b_n i) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (\cos nx - i \sin nx) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx. \end{aligned}$$

При $n < 0$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2}(a_{-n} - b_{-n}i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos(-nx) + i\sin(-nx)) dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx - i\sin nx) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx} dx. \end{aligned}$$

Таким образом, комплексная форма ряда Фурье такова:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}, \quad \text{где} \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx} dx.$$

6.1.6. Разложение в ряд Фурье функций с произвольным периодом

Пусть функция f $2l$ -периодическая. Тогда функция

$$g(t) = f\left(\frac{l}{\pi}t\right)$$

является 2π -периодической, так как

$$g(t + 2\pi) = f\left(\frac{l}{\pi}(t + 2\pi)\right) = f\left(\frac{l}{\pi}t + 2l\right) = f\left(\frac{l}{\pi}t\right) = g(t).$$

Если для функции g определён ряд Фурье, и

$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

то

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \cos nt dt \quad (n \geq 0), \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin nt dt \quad (n \geq 1). \end{aligned}$$

Выразим коэффициенты a_n и b_n в терминах функции f :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \cos nt \, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right) \cos nt \, dt = \\ &= \left| \frac{l}{\pi}t = x \right| = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi nx}{l} \, dx. \end{aligned}$$

Аналогично выражаются коэффициенты b_n . Получаем формулы

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi nx}{l} \, dx, \quad n \geq 0; \quad (6.1.13)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi nx}{l} \, dx, \quad n \geq 1. \quad (6.1.14)$$

Если для какого-то значения t выполнялось равенство

$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

то для соответствующего значения $x = \frac{l}{\pi}t$

$$f(x) = g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi nx}{l} + b_n \sin \frac{\pi nx}{l} \right).$$

Определение 6.1.2. Говорят, что функциональный ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi nx}{l} + b_n \sin \frac{\pi nx}{l} \right)$$

является рядом Фурье $2l$ -периодической функции f , если его коэффициенты a_n и b_n вычислены по формулам (6.1.13) и (6.1.14).

§ 6.2. Поточечная сходимость ряда Фурье. Ряды Фурье неперiodических функций

6.2.1. Теорема Дирихле о поточечной сходимости ряда Фурье

Пусть функция f $2l$ -периодическая. Будем говорить, что она удовлетворяет условиям Дирихле, если:

- 1) на промежутке $[-l, l]$ имеет лишь конечное число точек разрыва, и все они первого рода;
- 2) промежутки $[-l, l]$ можно разбить на конечное число промежутков, внутри каждого из которых функция монотонна.

Теорема 6.2.1 (Дирихле). Если $2l$ -периодическая функция f удовлетворяет условиям Дирихле, то её ряд Фурье (6.1.9) сходится во всех точках. При этом

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l} \right) = f(x),$$

если x — точка непрерывности функции, и

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l} \right) = \frac{1}{2} (f(x-0) + f(x+0)),$$

если x — точка разрыва. Здесь символами $f(x \pm 0)$ обозначены пределы функции в точке x справа и слева.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.2.1. Всюду далее запись

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l} \right)$$

будет использоваться в случае, когда сумма ряда равна $f(x)$ в точках непрерывности и $\frac{1}{2} (f(x-0) + f(x+0))$ в точках разрыва 1-го рода.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.2.2. Условия Дирихле не являются необходимыми для того, чтобы имело место утверждение теоремы. Нетрудно привести пример функции, для которой эти условия не выполняются.

Такой является 2π -периодическая функция, значения которой на промежутке $(0, 2\pi]$ определяются равенством

$$f(x) = x^4(x - 2\pi)^2 \cos \frac{1}{x}.$$

Эта функция бесконечное число раз принимает нулевое значение в любой окрестности нуля, поэтому бесконечное число раз меняет своё поведение с возрастания на убывание — нарушено второе условие Дирихле. Тем не менее ряд Фурье этой функции сходится к ней на всей числовой оси. В самом деле, оценим коэффициенты Фурье этой функции. Для этого заметим, что её производная

$$f'(x) = x^2(x - 2\pi) \left([4x(x - 2\pi) + 2x^2] \cos \frac{1}{x} + (x - 2\pi) \sin \frac{1}{x} \right)$$

непрерывна, дифференцируема при всех x и обращается в ноль при $x = 0$ и при $x = 2\pi$. Поэтому, вычисляя, например, коэффициент a_n , можно применить формулу интегрирования по частям. В результате получим

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx = -\frac{1}{n} \int_0^{2\pi} f'(x) \sin nx \, dx.$$

Можно показать ограниченность второй производной функции $f(x)$. Второе интегрирование по частям даст равенство

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{n^2} \int_0^{2\pi} f''(x) \cos nx \, dx.$$

Воспользовавшись свойством определённого интеграла

$$\left| \int_a^b u(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |u(x)| \, dx,$$

получим неравенство

$$|a_n| \leq \frac{c}{n^2}$$

с некоторой постоянной c . Рассуждая и дальше аналогичным образом, можно прийти к следующей оценке: существует такая постоянная C , что каждый член сходящегося числового ряда

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C}{n^2}$$

не меньше абсолютной величины соответствующего члена ряда Фурье. По теореме Вейерштрасса ряд Фурье сходится равномерно на всей числовой оси. По теореме (6.1.1) его сумма совпадает с $f(x)$.

ПРИМЕР 6.2.1. Найдём сумму $S(x)$ ряда Фурье 2π -периодической функции, заданной на промежутке $(0, 2\pi]$ равенством

$$f(x) = x.$$

Точками непрерывности функции являются все значения x , кроме $x_n = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Односторонние пределы в этих точках равны $f(x_n - 0) = 2\pi$ и $f(x_n + 0) = 0$. Следовательно, для всех $x \neq x_n$ $S(x) = f(x)$, а $S(x_n) = \pi$.

6.2.2. Разложение в ряд Фурье функций, заданных на конечном промежутке

Пусть функция f определена на конечном промежутке $< a, b >$ (замкнутом, открытом или полуоткрытом). Допустим, удалось доопределить функцию f до $2l$ -периодической функции $\mathbf{f}$ (говорят, что $\mathbf{f}$ — продолжение функции f) и разложить это продолжение в ряд Фурье

$$\mathbf{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l} \right). \quad (6.2.1)$$

В этом случае автоматически получается разложение функции f на промежутке $< a, b >$: для $x \in < a, b >$

$$f(x) = \mathbf{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l} \right). \quad (6.2.2)$$

Заметим, что если разложение (6.2.2) удаётся получить таким образом, то это разложение заведомо не единственно, так как перейти от функции f к её продолжению $\mathbf{f}$ можно по-разному. При этом руководствуются или соображениями простоты, или дополнительными условиями, которым должно удовлетворять продолжение $\mathbf{f}$, или стремлением получить в результате быстро сходящийся ряд Фурье.

ПРИМЕР 6.2.2. Разложим функцию $f(x) = x$, $x \in [0, \pi)$ (рис. 6.1.а) в ряд Фурье по косинусам. Для этого заметим, что ряд Фурье не содержит синусов в случае, когда функция является чётной. Поэтому для $x \in (-\pi, 0)$ $\mathbf{f}(x) = -x$ (рис. 6.1.б). График продолжения $\mathbf{f}$ с минимально возможным периодом 2π представлен на рис. 6.1.в. Коэффициенты

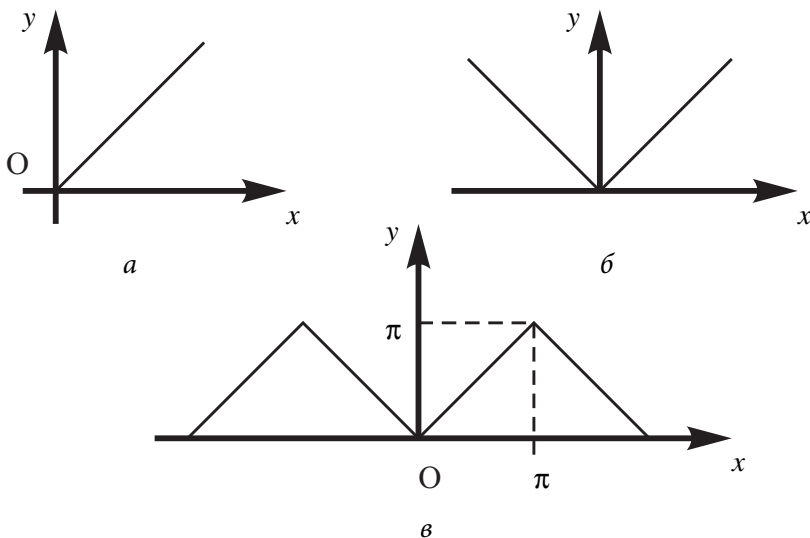


Рис. 6.1

Фурье чётной функции $\mathbf{f}$ равны

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \left(\frac{x}{n} \sin nx + \frac{1}{n^2} \cos nx \right) \Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi n^2} (\cos \pi n - 1) = \frac{2}{\pi n^2} ((-1)^n - 1), \quad n \geq 1.$$

Отличны от нуля только коэффициенты с нечётными индексами

$$a_{2n-1} = -\frac{4}{\pi(2n-1)^2}.$$

Функция f удовлетворяет условиям Дирихле, поэтому для всех x

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)x.$$

ПРИМЕР 6.2.3. Разложим функцию $f(x) = x$, $x \in [0, \pi)$ в ряд Фурье по синусам. Рассуждая аналогично тому, как это было сделано в предыдущем примере, строим нечётное 2π -периодическое продолжение f данной функции (рис. 6.2). Коэффициенты Фурье

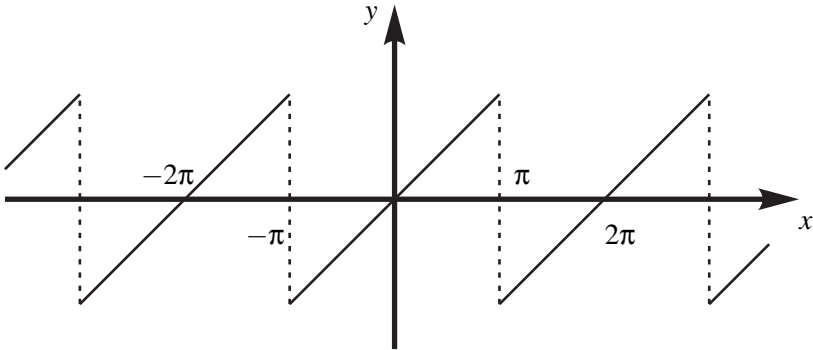


Рис. 6.2

$$a_n = 0, \quad n \geq 0;$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \left(-\frac{x}{n} \cos nx + \frac{1}{n^2} \sin nx \right) \Big|_0^{\pi} = \\ &= -\frac{2}{n} \cos \pi n = \frac{2}{n} (-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

При $-\pi < x < \pi$

$$x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx.$$

§ 6.3. Интегралы Фурье и преобразование Фурье

6.3.1. Интегралы Фурье

Заметим, что для периодических функций разложение в ряд Фурье ведётся по синусам и косинусам аргументов $\frac{\pi n x}{l}$, где l — полу-период. Это, в частности, означает, что разница между соседними частотами

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n = \frac{\pi(n+1)}{l} - \frac{\pi n}{l} = \frac{\pi}{l}$$

с ростом периода $2l$ функции становится всё меньше и что эти частоты всё плотнее заполняют промежуток $[0, \infty)$. Можно доказать, что с ростом l до бесконечности разложение функций в ряд Фурье переходит в равенство, называемое интегралом Фурье

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{\infty} (a(\lambda) \cos \lambda x + b(\lambda) \sin \lambda x) d\lambda, \\ a(\lambda) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \lambda x dx, \\ b(\lambda) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \lambda x dx. \end{aligned} \tag{6.3.1}$$

Тем самым имеет место континуальный аналог разложения периодической функции в ряд Фурье. Точнее, справедлива

Теорема 6.3.1. Пусть функция f и её производная кусочно непрерывны на любом конечном промежутке числовой оси и f абсолютно интегрируема на $(-\infty, \infty)$. Тогда интеграл Фурье этой функции сходится при всех x . При этом:

1) если x — точка непрерывности функции f , то

$$f(x) = \int_0^{\infty} (a(\lambda) \cos \lambda x + b(\lambda) \sin \lambda x) d\lambda,$$

2) если x — точка разрыва функции f , то

$$\frac{1}{2}(f(x-0) + f(x+0)) = \int_0^{\infty} (a(\lambda) \cos \lambda x + b(\lambda) \sin \lambda x) d\lambda.$$

Заметим, что рассуждения относительно чётных и нечётных функций, проведённые ранее для рядов, можно повторить для интегралов Фурье. В результате получаются равенства:

1) если f — чётная функция, то

$$a(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \cos \lambda x dx, \quad b(\lambda) = 0, \quad \lambda \geq 0,$$

2) если функция f — нечётная, то

$$b(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \sin \lambda x dx, \quad a(\lambda) = 0, \quad \lambda \geq 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6.3.1. Часто интеграл Фурье (6.3.1) представляют в ином виде. Для этого в интеграл, записанный в форме (6.3.1), подставим интегральные выражения коэффициентов $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{\infty} (a(\lambda) \cos \lambda x + b(\lambda) \sin \lambda x) d\lambda = \\ &= \int_0^{\infty} \left\{ \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \cos \lambda y dy \right) \cos \lambda x + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \sin \lambda y dy \right) \sin \lambda x \right\} d\lambda. \end{aligned}$$

Вынесем общий множитель — функцию f — за скобку

$$f(x) = \int_0^{\infty} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) (\cos \lambda y \cos \lambda x + \sin \lambda y \sin \lambda x) dy \right\} d\lambda.$$

Сворачивая оставшееся в скобках тригонометрическое выражение по формуле косинуса разности, получим интеграл Фурье в виде

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \cos \lambda(x-y) dy. \quad (6.3.2)$$

Пример интеграла Фурье. Найдём интеграл Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{если } x \geq 0, \\ 0, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

По определению

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-x} \cos \lambda x dx = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+\lambda^2};$$

$$b(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-x} \sin \lambda x dx = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda}{1+\lambda^2}.$$

Отсюда

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{1+\lambda^2} (\cos \lambda x + \lambda \sin \lambda x) d\lambda.$$

6.3.2. Преобразование Фурье

Преобразование Фурье — это комплексная форма коэффициентов Фурье. Точнее, если обозначить

$$\hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \begin{cases} a(\xi) - ib(\xi), & \text{если } \xi \geq 0; \\ a(-\xi) - ib(-\xi), & \text{если } \xi < 0, \end{cases}$$

то, учитывая формулы Эйлера

$$e^{i\xi x} = \cos \xi x + i \sin \xi x,$$

получаем для $\hat{f}$ интегральное представление

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx \quad (6.3.3)$$

Функция $\hat{f}$ называется преобразованием Фурье функции f .

В терминах преобразования Фурье интеграл Фурье переписывается так

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi, \quad (6.3.4)$$

или, в духе формулы (6.3.2),

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{i\xi(x-y)} dy. \quad (6.3.5)$$

Равенство (6.3.4) называется *формулой обращения преобразования Фурье*.

Заметим, что формулы (6.3.3) — преобразования Фурье и (6.3.4) — обращения преобразования Фурье выглядят симметрично. Эта симметрия отражена в хорошо разработанной теории преобразования Фурье, изложение которой выходит за рамки настоящего пособия.

ПРИМЕР 6.3.1. Найдём преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{если } x \geq 0, \\ 0, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

По определению

$$\hat{f} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x} e^{-i\xi x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1+i\xi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1-i\xi}{1+\xi^2}.$$

§ 6.4. Евклидовы пространства бесконечной размерности и обобщённые ряды Фурье

6.4.1. Классические ряды Фурье и язык евклидовых пространств

Рассмотрим снова 2π -периодические функции и обозначим

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} = e_1; \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x = e_2; \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x = e_3;$$
$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x = e_4; \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x = e_5; \quad \dots$$

Тогда соотношения (6.1.2)–(6.1.5) можно переписать в виде

$$\int_{-\pi}^{\pi} |e_n|^2 dx = 1, \quad \int_{-\pi}^{\pi} e_m \cdot e_n dx = 0 \quad \text{при} \quad m \neq n.$$

Если для произвольных 2π -периодических функций f и g определить их *скалярное произведение* (f, g) равенством

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx,$$

то все свойства скалярного произведения, изучаемые в разделах алгебры, будут выполнены:

1. **Симметричность:** $(f, g) = (g, f)$;
2. **Линейность:** $\forall \alpha, \beta \in R \quad (\alpha f + \beta g, h) = \alpha(f, h) + \beta(g, h)$;
3. **Положительная определённость:**

$$(f, f) \geq 0; \quad (f, f) = 0 \iff f = 0.$$

Третье свойство нужно понимать с такой оговоркой. Равенство $f = 0$ здесь и далее до конца тематики разложений Фурье надо понимать в том смысле, что функция $f(x)$ может для каких-то значений x быть отличной от нуля, но общая **мера множества таких значений равна нулю, т.е. это множество можно включить в объединение**

интервалов с общей длиной меньшей, чем любое наперёд заданное положительное число.

В этом случае говорят, что равенство $f(x) = 0$ выполнено почти всюду.

Как и в линейной алгебре, определим «длину» произвольного элемента f линейного пространства функций равенством

$$\|f\|^2 = (f, f).$$

Эта «длина» называется *нормой функции* f (среднеквадратичной нормой, или нормой в смысле среднего квадратичного). Все обычные свойства длины для нормы справедливы:

1. $\|f\| \geq 0$; $\|f\| = 0 \iff f = 0$.
2. $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ (неравенство треугольника).
3. $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|$

*Линейное пространство, в котором определена норма его элементов, удовлетворяющая свойствам 1–3, называется **нормированным**.*

В нормированных пространствах величина $\|f - g\|$ имеет смысл расстояния между элементами f и g .

Построенное таким образом на основе введённого скалярного произведения (f, g) евклидово пространство функций обычно обозначается символом $L_2(-\pi, \pi)$.

Введённой выше системе «векторов» $\{e_1, e_2, e_3, \dots\}$ этого пространства присущи свойства:

- 1) ортонормированность, т.е.

$$\|e_n\| = 1, \quad n \geq 1; \quad m \neq n \implies (e_m, e_n) = 0;$$

- 2) линейная независимость, т.е. из равенства $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n = 0$ почти всюду следует, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$. Натуральное число n — произвольное;

- 3) система $\{e_1, e_2, e_3, \dots\}$ является *базисом* пространства $L_2(-\pi, \pi)$, т.е. для любого элемента $f \in L_2(-\pi, \pi)$ существует единственный набор числовых коэффициентов $c_1, c_2, \dots$, при котором

$$f = c_1 e_1 + c_2 e_2 + \dots + c_n e_n + \dots \quad (6.4.1)$$

Равенство (6.4.1) нужно понимать в том смысле, что если f_n — последовательность частичных сумм ряда в правой части соотношения (6.4.1), то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\| = 0.$$

Определение 6.4.1. Если последовательность функций f_n удовлетворяет условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\| = 0,$$

то говорят, что f_n сходится к f в среднем квадратичном.

Таким образом, рассмотренные выше ряды Фурье функций являются в рассматриваемом подходе разложением этих функций по базису бесконечномерного евклидова пространства $L_2(-\pi, \pi)$.

Такие же рассуждения можно провести с комплекснозначными 2π -периодическими функциями, рассматривая их как элементы линейного комплексного пространства. Известное понятие евклидова пространства нужно адаптировать к новой ситуации.

Определение 6.4.2. Комплексное линейное пространство E называется **эрмитовым**, если для любых его элементов u и v определено комплекснозначное эрмитово произведение (u, v) , удовлетворяющее свойствам:

$$1) (u, v) = \overline{(v, u)};$$

$$2) \text{ для всех } \alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad (\alpha u + \beta v, w) = \alpha(u, w) + \beta(v, w);$$

$$3) (u, u) \geq 0; (u, u) = 0 \iff u = 0$$

(черта—комплексное сопряжение.)

В пространстве комплексных функций $L_2(-\pi, \pi)$ эрмитово произведение и норма элементов определены равенствами

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx; \quad \|f\|^2 = (f, f).$$

В качестве базиса в эрмитовом пространстве $L_2(-\pi, \pi)$ можно взять уже рассмотренную выше тригонометрическую систему функций, но часто более удобной является ортонормированная система

$$\left\{ e_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right\}.$$

Комплексная форма ряда Фурье даёт разложение элементов $f \in L_2(-\pi, \pi)$ по этому базису.

Рассмотрим ещё один пример бесконечномерного эрмитового пространства — это линейное пространство l_2 последовательностей $\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, для которых конечна евклидова норма

$$\|\{c_n\}\| = \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Эрмитово произведение в l_2 определяется, соответственно,

$$\langle \{c_n\}, \{d_n\} \rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \bar{d}_n.$$

Справедлива

Теорема 6.4.1 (Планшереля). *Отображение, ставящее в соответствие каждому элементу $f \in L_2(-\pi, \pi)$ последовательность $\{c_n\}$ его коэффициентов Фурье, является эрмитовым, т.е. сохраняет эрмитово произведение:*

$$\text{если } f \mapsto \{c_n\}, \quad g \mapsto \{d_n\}, \quad \text{то } \langle \{c_n\}, \{d_n\} \rangle = (f, g). \quad (6.4.2)$$

Следствие 6.4.1. *При $g = f$ равенство (6.4.2) превращается в равенство Парсеваля*

$$\|f\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2.$$

Континуальным вариантом теоремы Планшереля служит аналог соотношения (6.4.2) для преобразования Фурье

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi. \quad (6.4.3)$$

6.4.2. Обобщённые ряды Фурье

Схему рассуждений предыдущего раздела можно сохранить, изменив детали. Например, можно ввести в пространстве $L_2(-\pi, \pi)$ другой базис. Можно рассматривать не периодические функции, а функции, определённые на произвольном промежутке и тому подобное. Так, если в евклидовом пространстве $L_2(-1, 1)$ провести ортогонализацию системы функций $\{x^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ относительно скалярного произведения

$$(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx,$$

то получается базис функций в этом пространстве, которые являются многочленами и называются *многочленами Лежандра*. Разложение функции по этому базису называется *обобщённым рядом Фурье этой функции по полиномам Лежандра*. Если вместо обычного эрмитава произведения для функций, определённых на промежутке $[-1, 1]$, использовать произведение

$$(f, g) = \int_{-1}^1 \frac{f(x)\overline{g(x)}}{\sqrt{1-x^2}} dx,$$

то получается новое пространство. Ортогональным базисом этого пространства является система многочленов Чебышева, широко используемая в радиотехнике. Разложение функции по этому базису называется её *обобщённым рядом Фурье по системе многочленов Чебышева*. Ряд примеров можно бесконечно продолжать.

Контрольные работы

Данный раздел предназначен в основном для студентов–заочников. Он содержит задания для выполнения контрольных работ. Однако и студенты дневного отделения могут использовать материалы раздела для подготовки к экзамену.

В каждой контрольной работе перед текстом заданий приведена таблица номеров заданий, входящих в контрольную работу. Выполнять контрольные задания следует по варианту, номер которого совпадает с последней цифрой учебного шифра студента. При этом первая цифра в номере задания совпадает с номером контрольной работы, а последняя — с номером варианта.

Контрольная работа №5

Вар-т	Номера контрольных заданий						
0	510	520	530	540	550	560	570
1	511	521	531	541	551	561	571
2	512	522	532	542	552	562	572
3	513	523	533	543	553	563	573
4	514	524	534	544	554	564	574
5	515	525	535	545	555	565	575
6	516	526	536	546	556	566	576
7	517	527	537	547	557	567	577
8	518	528	538	548	558	568	578
9	519	529	539	549	559	569	579

Контрольные задания

510–519. С помощью двойного интеграла вычислить объем тела (V), ограниченного данными поверхностями.

$$510. x + y = 4, y = \sqrt{2x}, z = 3y, z = 0$$

$$511. x^2 + y^2 = 16, y = \sqrt{6x}, y = 0, z = 0, z = 5x$$

$$512. y = 2\sqrt{5x}, y = 6\sqrt{5x}, z = 0, 4x + 10z = 5$$

$$513. x^2 + y^2 = 18, y = \sqrt{7x}, y = 0, z = 0, z = \frac{x}{2\sqrt{14}}$$

$$514. y = \sqrt{2x}, y = 16\sqrt{2x}, z = 0, x + 8z = 2$$

$$515. y = 3\sqrt{x}, y = 3x, z = 2 + 5\sqrt{x}$$

$$516. x^2 + y^2 = 16, y^2 = \frac{x}{6}, x = 0, z = 0, z = 5y, (y \geq 0)$$

$$517. y = 6\sqrt{6x}, y = 21\sqrt{6x}, y = 0, z = 0, 3x + 16z = 8$$

$$518. x^2 + y^2 = 40, y = \sqrt{6x}, y = 0, z = 0, z = \frac{5}{\sqrt{6}}$$

$$519. y = \frac{3}{2}\sqrt{x}, y = x/2, z = 3 + 5\sqrt{x}$$

520–529. Перейдя к полярным координатам, вычислить площадь фигуры D (варианты 1–5) или массу пластины D с плотностью $\mu(x, y)$ (варианты 6–10).

$$520. x = \sqrt{9 - y^2}, y = 3 - \sqrt{9 - y^2}, y = 0, (y \geq 0)$$

$$521. x^2 + y^2 - 6y = 0, y = -\sqrt{3x}, y = \sqrt{3x}$$

$$522. y = \sqrt{8 - x^2}, y = 2\sqrt{2} - \sqrt{8 - x^2}, x = 0, (x \geq 0)$$

$$523. x^2 + y^2 - 6x = 0, y = -\frac{x}{\sqrt{3}}, y = \frac{x}{\sqrt{3}}$$

$$524. y = \sqrt{144 - x^2}, y = 12 - \sqrt{144 - x^2}, x = 0, (x \geq 0)$$

$$525. \mu(x, y) = -\frac{5x}{x^2 + y^2}, D: x^2 + y^2 = 9, x^2 + y^2 = 16, x = 0, y = 0, (x \leq 0, y \geq 0)$$

$$526. \mu(x, y) = -\frac{2y}{x^2 + y^2}, D: x^2 + y^2 = 4, x^2 + y^2 = 16, x = y = 0, (x \leq 0, y \leq 0)$$

$$527. \mu(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}, D: x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 9, x = y = 0, (x \geq 0, y \leq 0)$$

$$528. \mu(x, y) = -\frac{x}{x^2 + y^2}, D: x^2 + y^2 = 9, x^2 + y^2 = 25, x = y = 0, (x \leq 0, y \geq 0)$$

$$529. \mu(x, y) = \frac{3y}{x^2 + y^2}, D: x^2 + y^2 = 4, x^2 + y^2 = 25, x = y = 0, (x \leq 0, y \geq 0)$$

530–539. С помощью тройного интеграла вычислить массу тела (V), если плотность равна $\mu(x, y, z)$.

$$530. \mu = 2xz, V: z = xy, y = 5x, y = 0, x = 1, z = 0$$

$$531. \mu = 2x + z, V : y = x/2, y = 0, x = 1, z = 0, z = 4(x^2 + y^2)$$

$$532. \mu = 7y\sqrt{z}, V : z = xy, y = \frac{9}{4}x, y = 0, x = \frac{2}{\sqrt{3}}, z = 0$$

$$533. \mu = 2x^2 + 6y^2, V : z = 20x, z = 0, x + 4y - 2 = 0, y = 0$$

$$534. \mu = 5y^2z, V : z = xy, y = x, y = 0, x = 2, z = 0$$

$$535. \mu = 5y + 3z, V : y = 2x, y = 0, x = \frac{3}{2}, z = 0, z = 5x^2 + 5y^2$$

$$536. \mu = \frac{xyz}{2}, V : z = xy, y = 2x, y = 0, x = 2, z = 0$$

$$537. \mu = 6x^2 + 2y^2, V : z = 5x, z = 0, 2\sqrt{3}x + y = 2, y = 0$$

$$538. \mu = 3\sqrt{z}, V : z = xy, y = x/2, y = 0, x = 5, z = 0$$

$$539. \mu = x^2 + 2y^2, V : z = 3x, 3x + 2y - 6 = 0, y = 0, z = 0$$

540–549. Вычислить криволинейный интеграл первого рода по кривой на плоскости.

$$540. \int_{\gamma} \sqrt{x^2 + y^2} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} ds, \gamma: \rho = \sqrt{\cos 2\varphi}, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}.$$

$$541. \int_{\gamma} y ds, \gamma: \rho = 2 - \cos \varphi, \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi.$$

$$542. \int_{\gamma} \sqrt{x^2 - 1} ds, \gamma: y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), 2 \leq x \leq 3.$$

$$543. \int_{\gamma} e^x ds, \gamma: y = \arcsin e^x, -\frac{\ln 2}{2} \leq x \leq -\ln 2.$$

$$544. \int_{\gamma} (x + y) ds, \gamma: \rho^2 = 4 \cos 2\varphi, -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}.$$

$$545. \int_{\gamma} y^{2/3} ds, \gamma: y = \frac{2x\sqrt{x}}{3}, 0 \leq x \leq 3.$$

$$546. \int_{\gamma} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} ds, \gamma: \rho = \frac{3\varphi}{7}, 0 \leq \varphi \leq \sqrt{3}.$$

$$547. \int_{\gamma} \frac{ds}{x^2 + y^2}, \gamma: x + 2y + 1 = 0, \text{ от точки } A \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4} \right) \text{ до } B \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4} \right).$$

$$548. \int_{\gamma} (x^2 + y^2)^{5/2} ds, \gamma: \rho = \sqrt{\sin 2\varphi}, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$549. \int_{\gamma} y ds, \gamma: y = \frac{x}{6} \sqrt{x + 12}, 0 \leq x \leq 3.$$

550–559. Найти $\int_L P dx + Q dy + R dz$, то есть работу, совершаемую силой

$\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ при движении точки по кривой L , заданной параметрически.

550. $\int_L x^2 dx + (x+z) dy + xz dz, L: x = \sin t, y = \sin^2 t, z = \sin^3 t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$

551. $\int_L z dx - xy dy + x dz, L: x = e^t, y = e^{-t}, z = t\sqrt{2}, 0 \leq t \leq 1.$

552. $\int_L x dx + y dy + \frac{xy}{z} dz, L: x = t \cot s, y = t \sin t, z = t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$

553. $\int_L yz dx + z^2 dy + (x-y) dz, L$ — отрезок прямой от $A(1; 0; 2)$ до $B(2; -1; 0).$

554. $\int_L y dx + x dy + y dz, L: x = 2t, y = \ln t, z = t^2, 1 \leq t \leq 2.$

555. $\int_L xy dx + z dy + (x^2 + y^2) dz, L: x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$

556. $\int_L (x^2 + yz + z) dx + z^2 dy + (x + y^2) dz, L$ — отрезок прямой от $A(2; 1; 0)$ до $B(4; 3; 1).$

557. $\int_L y dx - 2z dy + z^2 dz, L: x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, z = 4 \cos \frac{t}{2}, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$

558. $\int_L x^2 dx - z dy + y dz, L: x = \sin^2 t, y = \sin t, z = \cos t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}.$

559. $\int_L (y+z) dx + (x+z) dy + (x+y) dz, L: x = t, y = t^3, z = t^5, 0 \leq t \leq 1.$

560–564. Проверить, что интеграл не зависит от пути интегрирования и вычислить его.

560. $\int_{(0;0)}^{(1;2)} (4xy - 15x^2y) dx + (2x^2 - 5x^3 + 7) dy.$

561. $\int_{(0;0)}^{(2;1)} (4x^3 - 3y^2 + 5y) dx + (5x - 6xy - 4y) dy.$

562. $\int_{(-1;1)}^{(1;-1)} (3x^2y - 4xy^2) dx + (x^3 - 4x^2y + 3y^2) dy.$

$$563. \int_{(0;0)}^{(\pi/4;\pi/4)} (e^{x+y} + \cos(x-y)) dx + (e^{x+y} - \cos(x-y) + 2) dy.$$

$$564. \int_{(1;0)}^{(0;1)} e^{xy} (1 + xy) dx + x^2 e^{xy} dy.$$

565–569. Вычислить интеграл, применяя формулу Грина

565. $\oint_C -x^2 y dx + xy^2 dy$, $C: x^2 + y^2 = 1$, направление обхода — положительное.

566. $\oint_C (xy + x + y) dx + (x^2 + x - y) dy$, $C: x^2 + y^2 = 2x$, направление обхода — положительное.

567. $\oint_C (xy + x + y) dx + (xy + x - y) dy$, $C: x^2 + y^2 = 1$, направление обхода — отрицательное.

568. $\oint_C x^2 y dx - xy^2 dy$, $C: x^2 + y^2 = 4$, направление обхода — положительное.

569. $\oint_C \frac{2x^2 y + xy + 1}{x} dx + \frac{x^2 y + 1}{y} dy$, $C: (x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$, направление обхода — отрицательное.

570–579. Используя формулу Гаусса-Остроградского, найти поток векторного поля $\mathbf{a}$ через внешнюю сторону поверхности тела V , заданного неравенствами.

$$570. \mathbf{a} = \{-xz^2 + y; yz^2 + x; xy + z\}; \\ V: x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1 + \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

$$571. \mathbf{a} = \{x + x^2 y; z - xy^2; x + y + z\}; \\ V: x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$572. \mathbf{a} = \{x + y^2 + z^3; x^3 + y + z^2; x^2 + y^3 + z\}; \\ V: \sqrt{x^2 + y^2} - 1 \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

$$573. \mathbf{a} = \{x + x^2 yz; y + xz^3; 2z - xyz^2\}; \\ V: x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 2 - \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$574. \mathbf{a} = \{x + 2xy + yz; x^2 + y - y^2; x^2 + 3z\}; \\ V: -\sqrt{1 - x^2 - y^2} \leq z \leq 1 + \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

$$575. \mathbf{a} = \{x + 2y^2 + 3z^3; x^3 + 2y + 3z^2; x^2 + 2y^3 + 3z\}; \\ V: 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

576. $\mathbf{a} = \{x^2yz; xy^2z; 7z - 2xyz^2\};$
 $V: x^2 + y^2 \leq 1, z^2 \leq x^2 + y^2.$
577. $\mathbf{a} = \{x + 2z^3z; 3y + x^2z^2; 4z - 3x^2z^2\};$
 $V: 0 \leq z \leq 2 - \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 \geq 1.$
578. $\mathbf{a} = \{3x + 4y^4 + 5z^5; 5x^5 + 3y + 4z^4; 4x^4 + 5y^5 + 3z\};$
 $V: 0 \leq z \leq 2 - \sqrt{x^2 + y^2}, z \leq \sqrt{x^2 + y^2}.$
579. $\mathbf{a} = \{x + x^2y + 2xz; xy^2 + 4y; 5z - 4xyz - z^2\};$
 $V: \sqrt{x^2 + y^2} - 2 \leq z \leq 0, z \leq -\sqrt{1 - x^2 - y^2}.$

Контрольная работа №6

Вар-т	Номера контрольных заданий				
0	610	620	630	640	650
1	611	621	631	641	651
2	612	622	632	642	652
3	613	623	633	643	653
4	614	624	634	644	654
5	615	625	635	645	655
6	616	626	636	646	656
7	617	627	637	647	657
8	618	628	638	648	658
9	619	629	639	649	659

Контрольные задания

610–619. Исследовать абсолютную и условную сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$.

$$610. a_n = \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}.$$

$$615. a_n = \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt[n]{n}}.$$

$$611. a_n = \frac{1}{(2n+1)^2 - 1}.$$

$$616. a_n = \frac{1}{(2n)!}.$$

$$612. a_n = \frac{n^3}{e^n}.$$

$$617. a_n = \frac{1}{(n+1)(\ln(n+1))^2}.$$

$$613. a_n = \frac{2n+1}{\sqrt{n2^n}}.$$

$$618. a_n = \frac{n^2}{(3n)!}.$$

$$614. a_n = \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}.$$

$$619. a_n = \frac{n+3}{n^2+2}.$$

620–629. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$.

$$620. c_n = \frac{n+2}{n(n+1)^{\frac{1}{n}}}.$$

$$625. c_n = \frac{2^n}{n(n+1)^{\frac{1}{n}}}.$$

$$621. c_n = \frac{1}{\ln(n+1)}.$$

$$626. c_n = \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}.$$

$$622. c_n = \frac{n}{3^n \cdot (n+1)^{\frac{1}{n}}}.$$

$$627. c_n = \frac{5^n}{\sqrt[n]{n}}.$$

$$623. c_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{3^n}}.$$

$$628. c_n = \frac{n+1}{2^n \cdot (n+2)}.$$

$$624. c_n = \frac{3^n}{\sqrt{2^n \cdot (3n-1)}}.$$

$$629. c_n = \frac{\ln(n+2)}{n+2}.$$

630–639. Вычислить определённый интеграл $\int_0^b f(x)dx$ с точностью до

0,001 разложив подынтегральную функцию в степенной ряд и, затем, проинтегрировав этот ряд почленно.

$$\begin{array}{ll}
630. f(x) = e^{-\frac{x^3}{3}}, & b = 1. \\
631. f(x) = x \operatorname{arctg} x, & b = 0,5. \\
632. f(x) = x \ln(1+x^2), & b = 0,5. \\
633. f(x) = \operatorname{arctg} x^2, & b = 0,5. \\
634. f(x) = \frac{\sin x^3}{x^2}, & b = 0,5. \\
635. f(x) = \cos \sqrt{x}, & b = 1. \\
636. f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x}, & b = 0,5. \\
637. f(x) = x e^{-x}, & b = 0,5. \\
638. f(x) = \sin x^2, & b = 1. \\
639. f(x) = \sqrt{1+x^2}, & b = 0,5.
\end{array}$$

640–649. Найти три первых, отличных от нуля, члена разложения в степенной ряд решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющего начальному условию $y(0) = y_0$.

$$\begin{array}{ll}
640. y' = \cos x + y^2, y(0) = 1. & 645. y' = e^x + y^2, y(0) = 0. \\
641. y' = y + y^2, y(0) = 3. & 646. y' = 2e^y - xy, y(0) = 0. \\
642. y' = \sin x + y^2, y(0) = 1. & 647. y' = e^x + y, y(0) = 4. \\
643. y' = x^2 + y^2, y(0) = 2. & 648. y' = \sin x + \frac{y^2}{2}, y(0) = 1. \\
644. y' = 2e^y + xy, y(0) = 0. & 649. y' = x + x^2 + y^2, y(0) = 5.
\end{array}$$

650–659. Разложить заданную на промежутке (a, b) функцию $f(x)$ в тригонометрический ряд Фурье так, чтобы его сумма имела наименьший период.

$$\begin{array}{ll}
650. f(x) = x + 1 & \text{в интервале } (-\pi, \pi). \\
651. f(x) = x^2 + 1 & \text{в интервале } (-2, 2). \\
652. f(x) = \frac{\pi - x}{2} & \text{в интервале } (-\pi, \pi). \\
653. f(x) = 1 + |x| & \text{в интервале } (-1, 1). \\
654. f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0, \\ x, & 0 \leq x < \pi \end{cases} & \text{в интервале } (-\pi, \pi). \\
655. f(x) = |1 - x| & \text{в интервале } (-2, 2). \\
656. f(x) = |x| & \text{в интервале } (-\pi, \pi). \\
657. f(x) = x - 1 & \text{в интервале } (-1, 1). \\
658. f(x) = x^2 & \text{в интервале } (0, 2\pi). \\
659. f(x) = \begin{cases} 2, & -\pi < x < 0, \\ 1, & 0 \leq x < \pi \end{cases} & \text{в интервале } (-\pi, \pi).
\end{array}$$

Литература

- [1] Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — М.: Наука, 1974. — 320 с.
- [2] Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые ее применения. — М.: Наука, 1971. — 407 с.
- [3] Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. — М.: Наука, 1971. — 232 с.
- [4] Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. — М.: Наука, 1978. — 296 с.
- [5] Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. — М.: Наука, 1971. — Ч. 1. — 600 с.
- [6] Кудрявцев Л.Д. Математический анализ. — М.: Высшая школа, 1973. — Т.1. — 616 с.
- [7] Кудрявцев Л.Д. Математический анализ. — М.: Высшая школа, 1973. — Т.2. — 472 с.
- [8] Лаптев Г.Ф. Элементы векторного исчисления. — М.: Наука, 1976. — 336 с.
- [9] Мышкис А.Д. Математика. Специальные курсы. — М.: Наука, 1971. — 632 с.
- [10] Никольский С.М. Курс математического анализа. — М.: Наука, 1973. — Т.1. — 432 с.
- [11] Никольский С.М. Курс математического анализа. — М.: Наука, 1973. — Т.2. — 392 с.
- [12] Очан Ю.С. Методы математической физики. — М.: Высшая школа, 1965. — 384 с.
- [13] Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1980. — 352 с.
- [14] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. — М.: Наука, 1966. — Т.1. — 607 с.
- [15] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. — М.: Наука, 1966. — Т.2. — 800 с.
- [16] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. — М.: Наука, 1966. — Т.3. — 656 с.
- [17] Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. — М.: Наука, 1965. — 424 с.