Министерство образования и науки Российской Федерации
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Н.С. АРКАШОВ В.М. БОРОДИХИН А.П. КОВАЛЕВСКИЙ

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Том 4.2: Теория вероятностей и
математическая статистика

Учебное пособие для студентов
нематематических специальностей
высших учебных заведений

Издание 2-е,
переработанное и дополненное

Новосибирск
2008

УДК

Рецензенты: *В. Г. Чередниченко,* д-р физ.-мат. наук,
проф. СибУПК,
А. Г. Пинус., д-р физ.-мат. наук, проф.

Работа подготовлена на кафедре высшей математики
для студентов-заочников II курса всех факультетов

Аркашов Н. С., Бородихин В. М., Ковалевский А. П.
Высшая математика: Учеб. пособие. — Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2008. — Т. 4.2: Теория вероятностей и математическая статистика. — 144 с.
ISBN

Настоящее учебное пособие подготовлено для студентов II курса очного и заочного отделений всех направлений и специальностей, изучающих такие разделы высшей математики, как теория вероятностей и математическая статистика, в объеме четвертого семестра.

Пособие содержит контрольную работу и примеры экзаменационных вопросов. В приложениях даны таблицы вероятностных распределений и случайных чисел.

Все замечания по содержанию пособия просим передавать на кафедру высшей математики. Они будут с благодарностью приняты и учтены в следующих изданиях.

УДК

ISBN

Оглавление

[

Введение]Введение

Никто не станет отрицать тот факт, что жизнь человека зачастую протекает в условиях неопределенности. Выходя утром из дому, мы не уверены на сто процентов в том, что днем не будет дождя. Очень трудно предвидеть уровень цен, исход спортивных состязаний, не говоря уже о сфере азартных игр (карты, рулетка, лотерея и т.п.), где результат решающим образом зависит от случая. Неопределенность или случайность сопутствуют и более серьезным занятиям: производя физические измерения, мы редко получаем одинаковые результаты, несмотря на неизменность условий измерения; срок службы однотипных приборов неодинаков, более того, его невозможно предсказать заранее; еще в большей степени это относится к сроку жизни отдельного человека. Если проанализировать с этой точки зрения процессы, происходящие в природе или в жизни человека, то мало найдется областей, где все происходит предсказуемо, неслучайно, или, как говорят, детерминированно. Неопределенность в той или иной степени присуща любому реальному явлению. В этих условиях человеку, принимающему решение, приходится оценивать эту степень неопределенности: если она незначительна, то он действует, пренебрегая ею; когда же степень неопределенности велика, выбор тактики поведения становится далеко не простым делом. Заметим при этом, что человек, оценивая степень неопределенности того или иного события, зачастую делает это интуитивно, на основе предыдущего опыта («с утра небо чистое, следовательно, дождь маловероятен»). К оценке степени неопределенности в более сложных случаях и имеет отношение наука, называемая теорией вероятности.

Во многих руководствах и учебниках теория вероятностей определяется как *математическая наука, изучающая закономерности случайных явлений.* Это правильно, однако всякий здравомыслящий читатель сразу же подметит некоторое противоречие, содержащееся в этой формулировке. В самом деле, случайным обыкновенно называют такое явление, которое происходит неожиданно, непредсказуемо, вопреки всяким правилам. Следовательно, по определению не должно существовать никаких закономерностей, присущих случайным явлениям. Чтобы разъяснить возникшее противоречие, нужно уточнить объект изучения, или, как говорят, предмет теории вероятностей.

Теория вероятностей изучает случайные явления, связанные с так называемыми *случайными экспериментами.* Выражаясь точнее, она изучает *математические модели случайных экспериментов.* Под случайным подразумевается такой эксперимент, исходы которого неоднозначно определяются начальными условиями. Простейший пример такого эксперимента — игра в «орел» и «решку», которая состоит в подбрасывании монеты. В этом эксперименте возможны лишь два исхода: выпадение «орла» («герба») или «решки» («решетки»), – при этом точно предсказать результат до проведения эксперимента невозможно. Примеры неслучайных (детерминированных) экспериментов можно привести из области естественных наук: химические реакции, физические эксперименты, движение космических тел и т.п. В этих экспериментах процесс определяется управляющим законом (уравнением) и начальными условиями, знание которых, как правило, позволяет предсказать результат эксперимента до его проведения.

Понятие случайного эксперимента является, однако, чересчур общим. Теория вероятностей изучает не всякие случайные эксперименты, а лишь такие, которые обладают двумя свойствами: а) имеют массовый характер, т.е. могут быть воспроизведены в неизменных условиях какое угодно число раз; б) подчиняются закону статистической устойчивости. Поясним подробнее последнее свойство.

Проведем случайный эксперимент n раз. Рассмотрим какой-либо его исход A и обозначим $\nu_n(A)$ число появлений исхода A в n проведенных экспериментах. Отношение $\dfrac{\nu_n(A)}{n} = \mu_n(A)$ называют *частотой* , или *относительной частотой события* A в n испытаниях. Говорят, что случайный эксперимент обладает *свойством статистической устойчивости*, если для любого его исхода A частота $\mu_n(A)$ имеет тенденцию стабилизироваться, неограниченно приближаясь к некоторому числу $P(A)$, когда число n проведенных испытаний неограниченно возрастает.

Подводя итог, можно сказать, что теория вероятностей изучает математические модели случайных экспериментов, имеющих массовый характер и обладающих свойством статистической устойчивости.

При этом закономерности случайных явлений проявляются не в результатах отдельных единичных экспериментов, а лишь при большом числе их повторений. Было замечено, что, несмотря на непредсказуемость результатов отдельных подбрасываний монеты, частота выпадения «герба» при увеличении количества подбрасываний приближается к числу 1/2. Так, К. Пирсон бросал монету 24 000 раз, при этом «герб» выпал в 12 012 случаях. Частота выпадения «герба» равна $\mu_n(\Gamma) = 12012/24000 = 0,5005$, что очень близко к 1/2. Природа описанного результата связана с симметричностью монеты, ни одна из сторон которой не имеет преимущества перед другой, поэтому доли появлений «герба» и «решетки» одинаковы и близки к 50 %. Однако подобная симметрия не обязательно присутствует в случайных экспериментах с двумя исходами. Например, при кажущейся равновозможности появления мальчика или девочки при рождении ребенка частоты этих событий неодинаковы: из демографических наблюдений известно, что частота рождения мальчика приближенно равна 0,511, а девочки — соответственно 0,489. Тем не менее устойчивость частот присутствует и в этом «случайном эксперименте».

Все сказанное выше о предмете теории вероятностей автоматически ставит вопрос о рамках применимости ее результатов. Ответ на этот вопрос связан с проверкой свойства статистической устойчивости того или иного случайного эксперимента. К сожалению, исчерпывающего научного подхода для обоснования статистической устойчивости или ее отсутствия не существует. Ведь даже эксперимент, предпринятый К. Пирсоном, строго говоря, ничего не доказывает, поскольку основан на результатах *конечного числа проведенных испытаний*, а осуществить бесконечную последовательность испытаний физически невозможно. Вопрос о применимости результатов теории вероятности остается за ее пределами и решается в конкретных областях применения путем экспериментальной проверки теоретических результатов. Важную роль в разработке методов экспериментальной проверки играет математическая статистика – наука, родственная теории вероятностей. Речь о ней пойдет в последующих главах этой книги.

Глава 1

Случайный эксперимент, события

§ 1.1. События, операции над событиями

Теория вероятностей изучает математические модели случайных экспериментов. Под случайным подразумевается такой эксперимент, исходы которого неоднозначно определяются начальными условиями. Простейшим примером такого эксперимента является подбрасывание монеты. В этом эксперименте возможны лишь два исхода: выпадение "герба"или "решетки", – при этом точно предсказать результат до проведения эксперимента невозможно.

Со всяким случайным экспериментом можно связать множество $\Omega = \{\omega\}$ всех его взаимоисключающих исходов. Это множество называют **пространством элементарных исходов**, а его элементы – **элементарными исходами**. Результатом проведения случайного эксперимента является некоторый элементарный исход $\omega \in \Omega$. **Событиями** называют подмножества пространства элементарных исходов Ω. Выражение "произошло событие A"означает $\omega \in A$, где ω – элементарный исход, явившийся результатом эксперимента. Любое "событие"в обычном понимании, то есть любой исход случайного эксперимента, может быть представлено некоторым подмножеством $A \subseteq \Omega$ при подходящем выборе пространства элементарных исходов. В дальнейшем не будем различать "события"в обычном понимании и события - подмножества Ω.

Событие называется **достоверным**, если в результате эксперимента оно непременно происходит; событие называется **невозможным**, если в результате эксперимента оно не может произойти; событие называется **случайным**, если в результате эксперимента оно может произойти, а может не произойти. Так как для любого элементарного исхода ω соотношение $\omega \in \Omega$ имеет место всегда, то все пространство Ω соответствует достоверному событию, пустое множество $\emptyset$ – невозможному событию, собственные подмножества $A \subset \Omega$ представляют случайные события.

Пусть А и В какие-нибудь события (подмножества Ω).

Объединением или **суммой** этих событий называется объединение $A \cup B$ множеств А,В. **Пересечением** или **произведением** событий называется их теоретико-множественное пересечение . Аналогично, **разностью** событий А,В называется разность $A \setminus B$ соответствующих множеств. **Противоположным** к событию А называется дополнение $\overline{A} = \Omega \backslash A$ множества А.

Появление события $A \cup B$ в результате эксперимента означает, что элементарный исход $\omega \in A \cup B$, а это имеет место, если $\omega \in A$ или $\omega \in B$. Поэтому можно сказать, что *объединение (сумма) событий происходит тогда и только тогда, когда происходит хотя бы одно из этих событий.*

Аналогично, *пересечение (произведение) событий происходит тогда и только тогда, когда эти события происходят совместно.*

Разность $A \setminus B$ событий происходит тогда и только тогда, когда происходит A, но не происходит B.

Противоположное событие $\overline{A}$ происходит тогда и только тогда, когда само A не происходит.

Говорят, что **событие А влечет событие В** или **А содержится в В**, если А является подмножеством В: $A \subseteq B$. События называются **равными** или **эквивалентными**, если они совпадают как множества: $A = B$. Очевидно, что $A = B$ *тогда и только тогда, когда каждое из этих событий влечет другое.*

Объединение и пересечение более чем двух событий определяются аналогично, т.е. как объединение и пересечение соответствующих подмножеств. Например,

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k \qquad \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$$

означают соответственно объединение конечного и пересечение бесконечного (счетного) множества событий.

События называют **непересекающимися** или **несовместными**, если их пересечение есть невозможное событие. События из некоторой совокупности $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ называют **попарно несовместными**, если любые два из них несовместны, т.е. $A_i \cap A_j = \emptyset \;\; i \neq j$.

Поскольку введенные операции над событиями тождественны соответствующим операциям над множествами, то они подчиняются всем аксиомам булевой алгебры:

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A \quad \text{(коммутативность);}$$

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C), \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C) \quad$ (ассоциативность);

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \; A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (дистрибутивность);

$$\overline{\bigcup_n A_n} = \bigcap_n \overline{A_n}, \quad \overline{\bigcap_n A_n} = \bigcup_n \overline{A_n} \quad \text{(двойственность);}$$

$$\overline{(\overline{A})} = A \quad \text{(отрицание отрицания).}$$

Заметим в заключение, что для обозначения введенных операций объединения (суммы), пересечения (произведения), разности событий используются также традиционные алгебраические символы: "$+$", "$\cdot$", "$-$":

$$A \cup B = A + B, \quad A \cap B = A \cdot B, \quad A \setminus B = A - B, \quad \bigcup_{k=1}^{n} A_k = \sum_{k=1}^{n} A_k.$$

§ 1.2. Решение типовых примеров

Пример 1.1. *Случайный эксперимент состоит в однократном подбрасывании игральной кости – правильного кубика с нанесенными на гранях числами от 1 до 6. Обозначим* ω_k *исход, состоящий в появлении на верхней грани числа* k. *Тогда в качестве пространства элементарных исходов можно взять множество* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$.

Пример 1.2. *Рассмотрим случайный эксперимент из предыдущего примера. Введем следующие "события":* $A = \{$ *выпадение четного числа*$\}$, $B = \{$*выпадение числа, меньшего 3*$\}$, $C = \{$*выпадение дробного числа*$\}$. *Выбирая пространство элементарных исходов из Примера 1.1, указанные "события"очевидным образом представляются множествами:* $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}, \; B = \{\omega_1, \omega_2\}, \; C = \emptyset$.

Пример 1.3. *Случайный эксперимент – двукратное подбрасывание игральной кости. Построить подходящее пространство элементарных исходов* Ω *для описания следующих событий:* $A = \{$*оба раза выпало число очков, кратное трем*$\}$, $B = \{$*сумма выпавших чисел не больше* $12\}$, $C = \{$*выпали одинаковые числа*$\}$, $D = \{$*произведение выпавших чисел делится на* $14\}$. *Найти подмножества* Ω, *образующие эти события, указать достоверные, невозможные и случайные события.*

Решение.Поскольку результатом эксперимента является пара чисел, выпавших на верхней грани при первом и втором подбрасывании игральной кости, то в качестве пространства элементарных исходов естественно выбрать множество всех упорядоченных наборов из двух чисел, каждое из которых может принимать любое из натуральных значений от 1 до 6, т.е. $\Omega = \{(i, j) : i = \overline{1, 6},\ j = \overline{1, 6}\}$. Тогда указанные события совпадают со следующими подмножествами Ω :

$$A = \{(3, 3), (3, 6), (6, 3), (6, 6)\};\ B = \Omega;$$

$$C = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\};\ D = \emptyset.$$

Событие B достоверно, так как оно происходит при любом элементарном исходе $(i, j) \in \Omega$, событие D невозможно (если бы оно могло произойти, то какое-нибудь из двух выпавших чисел должно делиться на 7), события A и C случайны. $\bigtriangledown$ [1]

§ 1.3. Задачи для самостоятельного решения

1.1 Что означают события $A \cup A$ и $A \cap A$?
1.2 Когда возможно равенство $A \cap B = A$?
1.3 События: A — хотя бы один из трех проверяемых приборов бракованный, B — все приборы доброкачественные. Что означают события: а) $A \cup B$; б) $A \cap B$?
1.4 Среди студентов, собравшихся на лекцию по теории вероятностей, наудачу выбирают одного. Пусть событие A заключается в том, что выбранный студент окажется юношей; событие B в том, что он не курит, а событие C - в том, что он живет в общежитии. Описать событие $AB\overline{C}$. Когда справедливы:
а) равенство $AB\overline{C} = A$; в) равенство $\overline{A} = B$;
б) включение $\overline{C} \subset B$; г) равенство $\overline{B} = B$?
1.5 Рабочий изготовил n деталей. Пусть событие A_i состоит в том, что i-я изготовленная им деталь имеет дефект. Записать событие, заключающееся в том, что:
а) ни одна из деталей не имеет дефектов;
б) хотя бы одна деталь имеет дефект;
в) ровно одна деталь имеет дефект;
г) не более двух деталей имеют дефекты;
д) по крайней мере две детали не имеют дефектов;

[1] Конец решения или доказательства.

е) точно две детали дефектны.

1.6 Преподаватель проводит занятия с группой из трех студентов. Событие A - первый студент потребует внимание преподавателя в течение часа; B - второй студент потребует внимание преподавателя в течение часа; C - третий студент потребует внимание преподавателя в течение часа. Что означают события: а) ABC; б) $A+B+C$; в) $A\overline{B}\ \overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\ \overline{B}C$; г) $AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC$; д) $\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}$; е) $A+B+C-ABC$?

1.7 Событие — хотя бы одно из четырех имеющихся изделий бракованное, событие B — бракованных изделий среди них не менее двух. Что означают противоположные события $\overline{A}$ и $\overline{B}$?

1.8 Совместны ли события A и $\overline{A\cup B}$

1.8 Доказать тождества:

а) $(\overline{A}\ +BC)(\overline{B}+AC)(\ \overline{C}+AB)=ABC+\ \overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}$.

в) $(A-B)+(A-C)=A-BC$.

1.9 Доказать, что следующие события достоверны: а) $(A+\overline{B})(\overline{A}+B)+(A+B)(\overline{A}+\overline{B})$.

б) $(A+B)(\overline{A}+B)+(A+\overline{B})(\overline{A}+\overline{B})$.

1.10 Доказать, что событие $(A+B)(\overline{A}+B)(A+\overline{B})(\overline{A}+\overline{B})$ невозможно.

1.11 Установить какие из следующих соотношений правильны:

а) $(A+B)\setminus C=A+(B\setminus C)$;	д) $ABC=AB(B+C)$;
б) $(\overline{A+B})C=\overline{AB}C$;	е) $(\overline{A+B})C=\overline{A}C+\overline{B}C$;
в) $\overline{A+B+C}=\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}$;	ж) $A\overline{B}C\subset A+B$;
г) $(\overline{A+B})C=C\setminus C(A+B)$;	з) $(AB+BC+CA)\subset(A+B+C)$.

1.12 Из таблицы случайных чисел наудачу выбрано одно число. Событие A — выбранное число делится на 5; событие B — данное число оканчивается нулем. Что означают события $A\backslash B$ и $A\cap\overline{B}$?

Глава 2

Классическое вероятностное пространство

§ 2.1. Вероятностное пространство, классическое определение вероятности

Пусть пространство элементарных исходов конечно, то есть $\Omega =$ $= \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_N\}$. При этом вероятность любого события A вычисляется по формуле:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{N(A)}{N}, \tag{2.1}$$

где $N(A)$ - число элементарных исходов, образующих событие A, $N = N(\Omega)$ - число всех элементарных исходов. Равенство (2.1) называют **классическим определением вероятности.**

§ 2.2. Решение типовых примеров

Пример 2.1. *Бросаются две игральные кости. Какова вероятность, что сумма выпавших очков делится на 6 ?*

Решение. Пространство элементарных исходов есть множество $\Omega = \{(i,j) : i = \overline{1,6},\ j = \overline{1,6}\}$ всех упорядоченных пар чисел (i,j), где i и j принимают независимо друг от друга целые значения от 1 до 6. Стало быть число всех таких пар $N = N(\Omega) = 6^2 = 36$. Естественно предположить, что обе игральные кости идентичны и симметричны, поэтому все элементарные исходы равновозможны, а значит применимо классическое определение вероятности (2.1). Обозначив A = {Сумма выпавших очков делится на 6} интересующее нас событие, легко перечислить все элементарные исходы (i, j), образующие A:

$$A = \{(1,5);\ (2,4);\ (3,3);\ (4,2);\ (5,1);\ (6,6)\}.$$

Таким образом, $N(A) = 6$, и значит

$$\mathbf{P}(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}. \qquad \triangledown$$

Пример 2.2. *Колода игральных карт (52 листа, 4 масти по 13 карт в каждой) тщательно перетасована. Наудачу берут 6 карт (без возвращения) Описать пространство элементарных исходов, а также найти вероятность того, что среди этих карт:*
а) окажется король пик;
б) будет ровно 5 карт одной масти.

Решение. Элементарный исход случайного эксперимента - выборка без возвращения объема 6 из генеральной совокупности объема 52. Так как в описании интересующих событий порядок элементов выборки, то есть порядок расположения шести выбранных карт, роли не играет, а важен лишь состав выбранных карт, то можно считать, что пространство элементарных исходов Ω составляют всевозможные сочетания из 52 по 6. Поскольку колода была тщательно перетасована, то можно считать все элементарные исходы равновозможными. Их общее число $N = N(\Omega) = C_{52}^6$.
а) Обозначив A={среди выбранных карт окажется король пик}

$$\mathbf{P}(A) = \frac{C_1^1 \cdot C_{51}^5}{C_{52}^6} = \frac{1 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 6!}{5! \cdot 52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47} = \frac{3}{26}.$$

б) Обозначая B={среди выбранных карт окажется 5 одной масти}, представим это событие в виде суммы попарно несовместных событий: $B = B_1 + B_2 + B_3 + B_4$, - где B_1={среди выбранных карт окажется 5 пик}, B_2={среди выбранных карт окажется 5 треф}, и т.д. Тогда

$$N(B) = N(B_1) + N(B_2) + N(B_3) + N(B_4) = 4N(B_1)$$

и

$$\mathbf{P}(B) = \frac{N(B)}{N} = 4\frac{N(B_1)}{N} = 4\mathbf{P}(B_1).$$

Для нахождения $\mathbf{P}(B_1)$ опять используем урновую схему, где роль черных шаров будут играть карты пиковой масти, тогда

$$\mathbf{P}(B_1) = \frac{C_{13}^5 \cdot C_{39}^1}{C_{52}^6} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 39 \cdot 6!}{5! \cdot 1! \cdot 52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47},$$

$$\mathbf{P}(B) = 4\frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 39 \cdot 6!}{5! \cdot 1! \cdot 52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47} \approx 0,0099.$$

$\triangledown$

§ 2.3. Задачи для самостоятельного решения

2.1 В корзине пять красных и четыре зеленых яблока. Некто берет наугад три яблока. Найти вероятность: а) того, что среди вынутых трех яблок будет ровно два зеленых; б) не более двух красных; в) по крайней мере одно зеленое; г) не менее трех красных.

2.2 Куб, все грани которого окрашены, распилен на 1000 кубиков одного размера. Определить вероятность того, что наудачу извлеченный кубик будет иметь ровно две окрашенные грани.

2.3 В лотерее разыгрывается 1000 билетов. Среди них два выигрыша по 50 руб., 5 по 20 руб., десять - по 10 руб. и 25 - по 5 руб. Некто покупает один билет. Найти вероятность: а) выигрыша не менее 20 руб.; б) какого-либо выигрыша.

2.4 На шести карточках написаны буквы В, Д, З, О, У, Х. После перетасовки вынимают наугад одну карточку за другой и:

а) раскладывают их в том порядке, в каком они были вынуты;

б) каждая из букв на вынутой карточке записывается, а сама карточка возвращается в колоду.

Найти вероятность того, что получится слово "воздух".

2.5 Ребенок играет с 10 буквами разрезной азбуки: А, А, А, Е, И, К, М, М, Т, Т. Какова вероятность того, что при случайном расположении букв в ряд он получит слово МАТЕМАТИКА?

2.6 В лифт 9-этажного дома на первом этаже вошли 5 человек. Известно, что каждый из них с равной вероятностью может выйти на любом из этажей, начиная со второго. Найти вероятность того, что:

а) все пятеро выйдут на пятом этаже;

б) все пятеро выйдут одновременно (на одном и том же этаже);

в) все пятеро выйдут на разных этажах;

г) на первых трех этажах не выйдет ни один человек;

д) все пассажиры выйдут на первых шести этажах;

е) на одном этаже выйдут три пассажира, а на другом два?
2.7 Какова вероятность того, что в четырехзначном номере случайно выбраного в большом городе автомобиля:
а) все цифры разные;
б) две пары одинаковых цифр;
в) только две одинаковые цифры;
г) только три одинаковые цифры;
д) все цифры одинаковые;
е) сумма двух первых цифр равна сумме двух последних цифр?
2.8 В ящике 10 красных и 6 синих пуговиц. Какова вероятность того, что две наудачу вынутые пуговицы будут одноцветными?
2.9 Из колоды карт (52 листа) наудачу вынимаются три карты. Найти вероятность того, что:
а) среди них окажется ровно один туз;
б) среди них окажется хотя бы один туз;
в) это будут тройка, семерка и туз (в любом порядке).
2.10 Участник лотереи "спортлото"из 49 наименований видов спорта называет шесть. Выигрыш определяется тем, сколько наименований он угадал из шести других наименований, которые определяются в момент розыгрыша лотереи с помощью специального устройства, реализующего случайный выбор. С какой вероятностью участник угадает все шесть наименований? Пять наименований и т.д.?
2.11 Из колоды карт (52 листа) наудачу извлекаются три карты. Найти вероятность того, что это будут тройка, семерка, туз.
2.12 Из 28 костей домино случайно выбирают две. Найти вероятность того, что из них можно составить "цепочку"согласно правилам игры.
2.13 Имеется пять отрезков, длины которых равны соответственно 1, 3, 5, 7 и 9 единицам. Определить вероятность того, что с помощью взятых наудачу трех отрезков из данных пяти можно построить треугольник.
2.14 Из десяти билетов выигрышными являются два. Определить вероятность того, что среди взятых наудачу пяти билетов: а) ровно один выигрышный; б) ровно два выигрышных; в) хотя бы один выигрышный.
2.15 На полке в случайном порядке расставлено n книг, среди которых находится двухтомник Д.Лондона. Предполагая, что различные расположения книг равновероятны, найти вероятность того, что оба тома расположены рядом.
2.16 Бросается 6 игральных костей. Найти вероятности следующих событий: $A =$\{выпадут 3 единицы, две тройки и одна шестерка\}, $B =$\{выпадут разные цифры\}, $C =$\{выпадут три одинаковые цифры\}.
2.17 52 карты раздаются четырем игрокам (каждому по 13 карт). Найти

вероятности следующих событий: A ={каждый игрок получит туза}, B ={один из игроков получит все 13 карт одной масти}, C ={все тузы попадут к одному из игроков}.

2.18 Один школьник, желая подшутить над своими товарищами, собрал в гардеробе все пальто, а потом развесил их в случайном порядке. Какова вероятность p_n того, что хотя бы одно пальто попало на прежнее место, если всего в гардеробе n крючков и на них висело n пальто. Найти предел p_n при $n \to \infty$.

2.19 В купейный вагон (9 купе по 4 места) семи пассажирам продано семь билетов. Найти вероятность того,что оказались занятыми:

а) ровно два купе; б) ровно три купе?

2.20 8 студентов, дополнительно зачисленных в университет, случайным образом распределяются по четырем группам. Найти вероятность того, что:

а) в каждую группу попадут по 2 студента;

б) все окажутся в одной группе;

в) по 4 студента попадут в две группы.

Глава 3

Геометрическая вероятность

Пространство элементарных исходов есть некоторое подмножество $\Omega \subset R^d$ d-мерного Евклидова пространства R^d, имеющее конечный объем $\mu(\Omega)$ (в частности, при d=1 это подмножество действительной прямой, имеющее конечную длину; при d=2 это подмножество плоскости, имеющее конечную площадь; при d=3 это подмножество трехмерного пространства, имеющее конечный объем).

Предположим, что вероятность попадания в любое подмножество $A \subset \Omega$, пропорциональна мере этого подмножества $\mu(A)$ (т.е. длине, площади или объему) и не зависит от вида и расположения A. Тогда вероятность события A (вероятность попадания в множество A) определяется формулой:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}. \qquad (3.1)$$

§ 3.1. Решение типовых примеров

Пример 3.1. *На плоскости начерчены параллельные прямые, находящиеся друг от друга на расстоянии 2a. На плоскость наудачу брошена монета радиуса $r < a$. Какова вероятность того, что монета пересечет одну из прямых.*

Решение. Интересующее нас событие однозначно описывается положением монеты относительно ближайшей из прямых. Поэтому в качестве элементарного исхода данного эксперимента можно взять значение величины x - расстояние от центра монеты до ближайшей прямой. Тогда пространство элементарных исходов Ω представляется множеством $\Omega = \{x : 0 \leq x \leq a\}$, то есть отрезком $[0, a]$ на числовой оси. Событие A ={монета пересечет одну из прямых} происходит тогда и только тогда, когда $x \le r$. Следовательно, оно представляется множеством $A = \{x : 0 \le x \le r\}$, то есть отрезком $[0, r] \subset \Omega$. Вероятность события А находим по формуле (3.1):

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{\mu([0,r]}{\mu([0,a])} = \frac{r}{a}. \qquad \triangledown$$

Пример 3.2. *(Задача о встрече). Два лица А и В условились встретится в определенном месте между двумя и тремя часами дня. Лицо А ждет другого в течении 10 минут, после чего уходит; лицо В ждет другого в течении 15 минут. Предполагая, что каждый из них может прийти в любое время в течение указанного часа, найти вероятности следующих событий: $C =${встреча состоится}, $D =${встреча состоится, но во второй половине часа}.*

Решение. Не ограничивая общности, можно считать, что встреча назначена на промежуток времени между 0 и 1. Обозначим (x,y) моменты прихода А и В соответственно. Пространством элементарных исходов является множество $\Omega = \{(x, y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$, то есть единичный квадрат на плоскости. Событие С можно представить в виде $C = C_1 \cup C_2$, где $C_1 =${встреча состоится, причем первым придет А}, $C_2 =${встреча состоится, причем первым придет В}. Оно соответствует множеству $C = C_1 \cup C_2$, где $C_1 = \{(x, y) \in \Omega : x \le y \le x + \frac{1}{6}\}$, $C_2 = \{(x, y) \in \Omega : y \le x \le y + \frac{1}{4}\} = \{(x, y) \in \Omega : x - \frac{1}{4} \le y \le x\}$. Изображаем эти множества на Рис. 3.1. При этом множество C_1 есть множество точек квадрата Ω, заключенных между прямыми: $y = x$ и $y = x + \frac{1}{6}$; множество C_2 - это часть Ω, заключенная между прямыми $y = x$ и $y = x - \frac{1}{4}$; объединение их C заштриховано параллельно диагонали квадрата. Равновозможность прихода обоих лиц в течение часа позволяет использовать геометрическое определение вероятности (3.1), согласно которому

$$\mathbf{P}(C) = \frac{\mu(C)}{\mu(\Omega)} = \frac{1 - \frac{1}{2}(\frac{5}{6})^2 - \frac{1}{2}(\frac{3}{4})^2}{1} = \frac{107}{288}.$$

Событие D можно представить в виде пересечения $D = C \cap E$, где $E =${хотя бы одно из двух лиц придет во второй половине часа}. Соответствующее множество $E = \{(x, y) \in \Omega : y > \frac{1}{2} \;\; x > \frac{1}{2}\}$ выделено на Рис.3.1 горизонтальной штриховкой, а $D = C \cap E$ - множество с двойной штриховкой. Находя площадь этого множества (площадь единичного квадрата минус площадь квадрата со стороной $1/2$ минус площади двух трапеций)

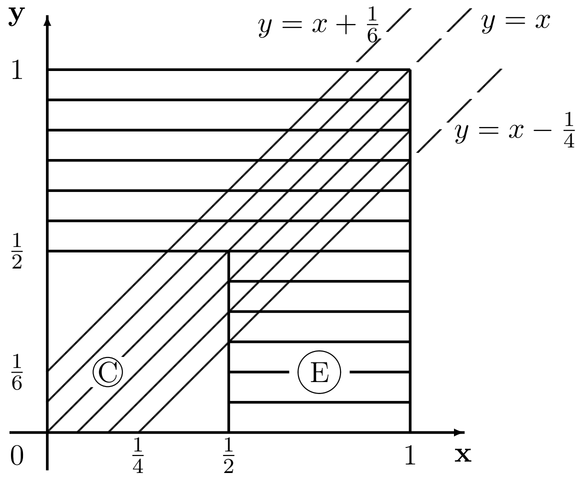


Рис. 3.1:

и применяя снова геометрическое определение вероятности, получим:

$$\mathbf{P}(D) = \frac{\mu(D)}{\mu(\Omega)} = \frac{1 - (\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2}(\frac{1}{3} + \frac{5}{6})\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\frac{1}{4} + \frac{3}{4})\frac{1}{2}}{1} = \frac{5}{24}. \qquad \triangledown$$

§ 3.2. Задачи для самостоятельного решения

3.1 В квадрат с вершинами (0,0), (0,1), (1,0), (1,1) наудачу брошена точка. Пусть (X, Y) будут ее координаты. Найти:

а) $\mathbf{P}\{|2X - Y| < 1/4\}$; г) $\mathbf{P}\{XY < 3/4\}$;
б) $\mathbf{P}\{\min(X, Y) < 3/4\}$; д) $\mathbf{P}\{\max(X, Y) < 1/5\}$;
в) $\mathbf{P}\{(X + Y)/2 < 1/3\}$; е) $\mathbf{P}\{X + 4Y < 1/2\}$.

3.2 На бесконечную шахматную доску со стороной квадрата a бросается наудачу монета диаметра $2r < a$. Найти вероятность того, что:
а) монета попадет целиком внутрь квадрата;
б) монета пересечет не более одной стороны квадрата.

3.3 В интервале времени [0,T] в случайный момент u появляется сигнал длительности Δ. Приемник включается в случайный момент $v \in [0, T]$ на время t. Предположив, что точка (u,v) равномерно распределена на квадрате$[0, T] \times [0, T]$, найти вероятность обнаружения сигнала.

3.4 В квадрат с вершинами (0,0), (0,1), (1,0), (1,1) наудачу брошена точка.

Пусть (X, Y) будут ее координаты. Доказать, что для любых $0 \leq x, y \leq 1$
$\mathbf{P}\{X < x, Y < y\} = \mathbf{P}\{X < x\}\mathbf{P}\{Y < y\} = xy.$
Для $0 < z < 1$ найти:

а) $\mathbf{P}\{|X - Y| < z\}$;
б) $\mathbf{P}\{\min(X, Y) < z\}$;
в) $\mathbf{P}\{(X + Y)/2 < z\}$;
г) $\mathbf{P}\{XY < z\}$;
д) $\mathbf{P}\{\max(X, Y) < z\}$;
е) $\mathbf{P}\{X + 2Y < z\}$.

3.5 Стержень длины l разломан в двух наудачу выбранных точках. С какой вероятностью из полученных отрезков можно составить: а) треугольник; б) остроугольный треугольник?

3.6 На окружности наудачу выбраны три точки A, B, C. Найти вероятность того, что треугольник ABC будет:

а)остроугольным;
б)тупоугольным;
в)прямоугольным;
г)правильным;
д)равнобедренным.

3.7 На перекрестке установлен автоматический светофор, в котором одну минуту горит зеленый свет и полминуты красный, затем снова одну минуту - зеленый и полминуты - красный и т.д. В случайный момент времени к перекрестку подъезжает легковой автомобиль. Какова вероятность того,что он проедет перекресток без остановки?

3.8 Точка взята наудачу внутри круга радиусом R. Найдите вероятность того, что эта точка окажется от центра на расстоянии, меньшем r.

3.9 Наудачу выбирают два числа из промежутка $[0,\ 1]$. Какова вероятность того, что их сумма больше или равна 1, а их разность меньше либо равна 0?

3.10 Двое студентов условились встретиться в определенном месте и в определенный день между 12 и 13 часами. Пришедший первым ждет второго в течение 10 мин, после чего уходит. Найти вероятность встречи студентов, если приход каждого из них независим и равновозможен в любой промежуток времени.

Глава 4

Условные вероятности

§ 4.1. Определения и примеры

Для любых событий A, B, где $\mathbf{P}(B) > 0$, **условной вероятностью события** A **при условии** B называется число

$$\mathbf{P}(A/B) = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)}. \qquad (4.1)$$

Условная вероятность возникает в ситуации, когда имеется частичная информация о результатах случайного эксперимента ("произошло событие B"), и в этих условиях требуется найти вероятность события A.

§ 4.2. Решение типовых примеров

Пример 4.1. *Брошены три игральные кости. Чему равна вероятность того, что на одной из них выпала единица, если на всех трех костях выпали разные числа?*

Решение. Первый способ. Обозначим события: $A = \{$На одной из костей выпала единица$\}$, $B = \{$На всех костях выпали разные числа$\}$. Пространство элементарных исходов Ω есть множество всех упорядоченных наборов чисел (i, j, k), выпавших соответственно на 1-й, 2-й и 3-й костях. Поскольку каждое из этих чисел может принимать любое из значений от 1 до 6, то Ω есть множество всех выборок с возвращением объема 3 из шести. Общее число всех элементарных исходов равно

$N(\Omega) = B_6^3 = 6^3$. Событие B образовано всеми выборками без возвращения, их число $N(B) = A_6^3 = 6^{[3]}$, вероятность события B равна $\mathbf{P}(B) = \frac{6^{[3]}}{6^3} = \frac{6\cdot5\cdot4}{6^3} = \frac{5}{9}$. Событие AB образовано такими выборками без возвращения (i, j, k), у которых на одной из трех позиций стоит "1", а на остальных - различные числа от 2 до 6. Число таких выборок равно $N(AB) = 3 \cdot 5 \cdot 4$, а вероятность $\mathbf{P}(AB) = \frac{3\cdot5\cdot4}{6^3} = \frac{5}{18}$. Тогда условную вероятность находим по формуле (4.1):

$$\mathbf{P}(A/B) = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\frac{5}{18}}{\frac{5}{9}} = \frac{1}{2}.$$

Второй способ. Поскольку известно, что на всех костях выпали разные числа, то есть произошло событие B, то пространством элементарных исходов можно считать множество B. В этом случае появление события A равносильно появлению пересечения AB. Тогда условная вероятность события A вычисляется по классическому определению:

$$\mathbf{P}(A/B) = \frac{N(AB)}{N(B)} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 4}{6^{[3]}} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 4}{6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{1}{2}. \qquad \triangledown$$

§ 4.3. Задачи для самостоятельного решения

4.1 Брошены две игральные кости. Чему равна вероятность того, что сумма выпавших на них очков равна 8, если известно, что эта сумма есть четное число?

4.2 Брошены две игральные кости. Какова вероятность того, что на первой кости выпало 4 очка, если известно, что на второй кости выпало больше очков, чем на первой?

4.3 Известно, что при бросании 10 игральных костей выпала по крайней мере одна единица. Какова при этом вероятность того, что выпали две или более единицы?

4.4 В ящике лежат 12 красных, 8 зеленых и 10 синих шаров. Наудачу вынимают два шара. Какова вероятность того, что вынуты шары разного цвета, если известно, что среди них нет синего?

4.5 Игральная кость бросается до тех пор пока не выпадет единица. Известно, что для этого потребовалось четное число бросаний. Найти вероятность того, что единица выпадет при втором бросании.

4.6 Пусть $\mathbf{P}(A_1/A_2) = \mathbf{P}(A_1)$. Показать справедливость следующих равенств:

а) $\mathbf{P}(A_1/\overline{A}_2) = \mathbf{P}(A_1)$; б) $\mathbf{P}(\overline{A}_1/A_2) = \mathbf{P}(\overline{A}_1)$.

4.7 Двое играют в игру, поочередно вынимая шар из урны, содержащей

3 белых и 5 черных шаров. Выигравшим считается тот, кто первым вынет белый шар. Чему равна вероятность выигрыша для начавшего игру, если после каждого неудачного эксперимента шар возвращается в урну?

Глава 5

Независимость

Два события A, B называются **независимыми**, если для них выполняется соотношение:

$$\mathbf{P}(A \cdot B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B). \tag{5.1}$$

Если $\mathbf{P}(B) > 0,$ то независимость событий A, B равносильна выполнению равенства

$$\mathbf{P}(A/B) = \mathbf{P}(A),$$

которое означает, что вероятность события A не зависит от появления B.

События $A_1, A_2, ..., A_n$ называются **независимыми в совокупности**, если для любого конечного набора из этих событий выполняется соотношение:

$$\mathbf{P}(A_{i_1} \cdot A_{i_2} \cdots A_{i_k}) = \mathbf{P}(A_{i_1}) \cdot \mathbf{P}(A_{i_2}) \cdots \mathbf{P}(A_{i_k}). \tag{5.2}$$

События $A_1, A_2, ..., A_n$ называются **попарно независимыми** , если любые два из них независимы.

§ 5.1. Решение типовых примеров

Пример 5.1. *Точка* $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ *выбрана наудачу в квадрате* $[0,1]^2$. *Пусть* $A = \{\xi_1 \le 1/2\}, B = \{\xi_2 \le 1/2\}$ $C = \{(\xi_1 - 1/2)(\xi_2 - 1/2) > 0\}$. *Выяснить, независимы ли эти события:*
а) в совокупности; *б) попарно.*

Решение. Пространство элементарных исходов - единичный квадрат $\Omega = [0,1]^2$. Событие A - левая его половина, событие B - нижняя, событие C представляет объединение двух квадратов

$$AB = \{\xi_1 \le 1/2,\ \xi_2 \le 1/2\} \quad \overline{A}\,\overline{B} = \{\xi_1 \ge 1/2,\ \xi_2 \ge 1/2\},$$

заштрихованных на Рис.5.1. Вероятности этих событий найдем с помощью

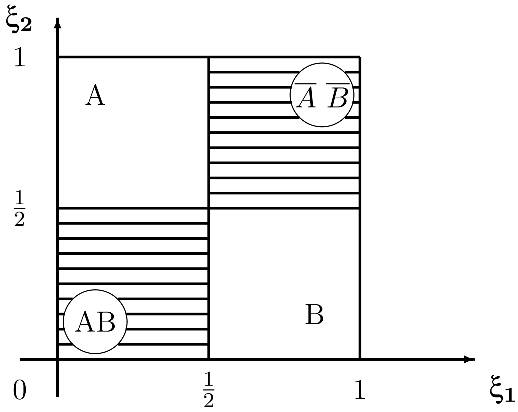


Рис. 5.1:

геометрического определения:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{1}{2}, \quad \mathbf{P}(B) = \frac{1}{2}, \quad \mathbf{P}(C) = \frac{1}{2}.$$

Вероятности попарных пересечений равны:

$$\mathbf{P}(AB) = \frac{1}{4} = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B),\ \mathbf{P}(AC) = \frac{1}{4} = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(C),$$

$$\mathbf{P}(BC) = \frac{1}{4} = \mathbf{P}(B) \cdot \mathbf{P}(C).$$

Таким образом, данные события попарно независимы. Так как $ABC = AC = BC = AB$, то

$$\mathbf{P}(ABC) = \frac{1}{4} \neq \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B) \cdot \mathbf{P}(C),$$

а значит события A, B, C не являются независимыми в совокупности. $\bigtriangledown$

§ 5.2. Задачи для самостоятельного решения

5.1 Доказать, что если события A и B несовместны, $\mathbf{P}(A) > 0$ и $\mathbf{P}(B) > 0$, то события A и B зависимы.
5.2 Доказать, что если события A и B независимы, то также независимы

события: а) A и $\overline{B}$; в) $\overline{A}$ и $\overline{B}$.
б) $\overline{A}$ и B;

5.3 Рассмотрим все возможные перестановки четырех букв a, b, c и d. Определить, зависимы или нет события $A = \{a$ предшествует $b\}$ и $B = \{c$ предшествует $d\}$.

5.4 Брошены две игральные кости. Рассмотрим три события: A — на первой кости выпало нечетное число, B — на второй кости выпало нечетное число, C — сумма чисел на обеих костях нечетна. Проверить, зависимы или нет события A, B, C:
а) в совокупности; б) попарно.

5.5 Пусть событие A таково, что оно не зависит от самого себя. Доказать, что тогда $\mathbf{P}(A) = 0$ или $\mathbf{P}(A) = 1$.

5.6 Брошены последовательно три монеты. Определить, зависимы или нет события $A = \{\text{выпал герб на первой монете}\}$ и $B = \{\text{выпала хотя бы одна решка}\}$.

5.7 На Рис.5.2 приведена схема соединения элементов, образующих электрическую цепь. Предполагается, что отказы элементов являются независимыми в совокупности событиями. Считается известной надежность p_k k-го элемента, то есть вероятность его безотказной работы (соответственно $q_k = 1 - p_k$ - вероятность его отказа). Вычислить надежность p всей цепи.

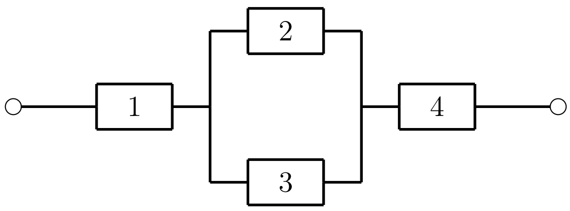


Рис. 5.2:

5.8 Бросаются три правильные монеты. Пусть событие A состоит в том, что выпало по-крайней мере две решки, а событие B — в том, что хотя бы на одной монете выпал герб. Описать событие A. Определить, зависимы или нет события A и B.

5.9 Бросаются две игральные кости. Пусть событие A состоит в том, что выпавшая сумма очков нечетна, а событие B — в том, что хотя бы на одной из костей выпала единица. Описать событие AB. Определить зависимы или нет события A и B.

5.10 Пусть $0 < \mathbf{P}(A) < \mathbf{P}(B) < 1$. Следует ли отсюда независимость событий A и B?

5.11 Чтобы найти нужную книгу, студент решил обойти 3 библиотеки. Для каждой библиотеки одинаково вероятно, есть в фондах эта книга или нет, и если книга есть в фондах, то с вероятностью 0.5 она не занята другим читателем. Какова вероятность того, что студент найдет книгу, если известно, что библиотеки комплектуются независимо одна от другой?

Глава 6

Независимые испытания

§ 6.1. Формулы Бернулли

Рассмотрим случайный эксперимент, состоящий из последовательности (конечной или бесконечной) отдельных однотипных экспериментов $I_1, I_2, ..., I_n, ...,$ которые будем называть **испытаниями**. Будем предполагать, что в каждом испытании возможны лишь два исхода: появление некоторого события А, либо противоположного события $\overline{A}$, при этом появление А будем называть "Успехом", а появление $\overline{A}$ - "Неудачей". Обозначим $A_i =${появление А (или "Успех") в i- ом испытании}. Будем предполагать, что вероятность "Успеха"в каждом испытании одна и та же, т.е. $\mathbf{P}(A_i) = p,\ \mathbf{P}(\overline{A_i}) = 1 - p = q$ при всех i.

Обозначим ν_n число "Успехов"в n независимых испытаниях. Очевидно, ν_n может принимать любые целые значения от 0 до n. Введем события $B_k = \{\nu_n = k\}, k = 0, 1, ..., n$. Вероятности событий B_k вычисляются по следующим **формулам Бернулли**:

$$\mathbf{P}(B_k) = \mathbf{P}(\nu_n = k) = C_n^k p^k q^{n-k},\ k = 0, 1, ..., n. \tag{6.1}$$

Полиномиальная схема.
Пусть имеется n независимых испытаний, но в каждом испытании может наступить один из k возможных исходов: $A_1, A_2, ..., A_k$, где для каждого из n испытаний вероятности исходов одни и те же: $\mathbf{P}(A_j) = p_j,\ \ j = 1, 2, ..., k$, так что $p_1 + p_2 + ... + p_k = 1$. Соответствующее вероятностное пространство, в отличие от схемы Бернулли, называется **полиномиальной схемой.** Обозначим ν_n^j число исходов A_j в n независимых испытаний. Следующая теорема обобщает формулы Бернулли на случай полиномиальной схемы.

Теорема 6.1. *Для любых натуральных* $n_1, n_2, ..., n_k$ *таких, что* $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$,

$$\mathbf{P}(\nu_n^1 = n_1, \nu_n^2 = n_2, ..., \nu_n^k = n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_k!}\, p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}. \qquad (6.2)$$

§ 6.2. Решение типовых примеров

Пример 6.1. *При передаче сообщения вероятность искажения одного знака равна 1/10. Какова вероятность того, что сообщение из 10 знаков: а) не будет искажено, б) содержит ровно 3 искажения, в) содержит не более трех искажений?*

Решение. Передачу n=10 знаков можно рассматривать как n независимых испытаний, искажение знака будем считать успехом, вероятность успеха $\mathbf{P}(\text{успеха}) = p = 1/10$. Искомые вероятности находим по формулам Бернулли:
а) $\mathbf{P}(\nu_n = 0) = C_n^0 p^0 q^n = q^n = (\frac{9}{10})^{10}$;
б) $\mathbf{P}(\nu_n = 3) = C_n^3 p^3 q^{n-3} = C_{10}^3 (\frac{1}{10})^3 (\frac{9}{10})^7$;
в) $\mathbf{P}(\nu_n \le 3) = \mathbf{P}\{\bigcup\limits_{k=0}^{3} (\nu_n = k)\} = \sum\limits_{k=0}^{3} C_n^k p^k q^{n-k} = (\frac{9}{10})^{10} + C_{10}^1 \frac{1}{10} (\frac{9}{10})^9 + C_{10}^2 (\frac{1}{10})^2 (\frac{9}{10})^8 + C_{10}^3 (\frac{1}{10})^3 (\frac{9}{10})^7$. $\bigtriangledown$

Пример 6.2. *В одном учебном заведении обучаются 730 студентов. День рождения наудачу выбранного студента приходится на определенный день года с вероятностью* $1/365$ *для каждого из 365 дней. Найти вероятность того, что найдутся три студента, имеющие один и тот же день рождения.*

Решение. Найдем вероятность дополнительного события, то есть найдем вероятность, того что ровно два студента родились в каждый из месяцев года. Для этого воспользуемся полиномиальной схемой. В нашем случае, очевидно, $n = 730$, причем вероятность рождения наудачу выбранного студента в определенный день одинакова и равна $p_i = 1/365$, $i = 1...365$. Под событием A_i, $i = 1...365$ понимается рождение выбранного студента в i-ый месяц. Тогда нам собственно нужно найти вероятность, что в 730 испытаниях произойдет ровно 2 исхода типа A_1, ровно два исхода типа A_2 ... ровно два исхода типа A_{365} или, что тоже самое, $\nu_{730}^j = 2$, $j = 1...365$.

В таком случае вероятность дополнительного события равна:

$$\frac{730!}{(2!)^{365}}(1/365)^{730}.$$

Искомая же вероятность равна $1-\frac{730!}{(2!)^{365}}(1/365)^{730}$ ∇.

§ 6.3. Задачи для самостоятельного решения

6.1 Испытание заключается в бросании трех игральных костей. Найти вероятность того, что в пяти независимых испытаниях ровно два раза выпадет по три единицы.

6.2 Наблюдениями установлено, что в некоторой местности в сентябре в среднем бывает 12 дождливых дней. Какова вероятность того, что из восьми случайно взятых в этом месяце дней три дня окажутся дождливыми?

6.3 Пусть вероятность попадания в цель равна $1/5$. Производится 10 независимых выстрелов. Какова вероятность попадания в цель по меньшей мере дважды?

6.4 Вероятность получения удачного результата при проведении сложного химического опыта равна $2/3$. Найти наивероятнейшее число удачных опытов, если их общее число равно 7.

6.5 Вероятность попадания в цель при каждом выстреле из орудия равна $4/5$. Сколько нужно произвести выстрелов, чтобы наивероятнейшее число попаданий было равно 20?

6.6 Каждую секунду с вероятностью p независимо от других моментов времени по дороге проезжает автомашина. Пешеходу для перехода дороги необходимо 3 с. Какова вероятность того, что подошедший к дороге пешеход будет ожидать возможности перехода: а) 3 с; б) 4 с; в) 5с?

6.7 Двое по очереди бросают монету. Выигрывает тот, кто первым получит "герб". Найти вероятность событий:
а) игра закончится до 4 бросания;
б) выиграет начавший игру (первый игрок);
в) выиграет второй игрок.

6.8 В схеме Бернулли p - вероятность исхода 1 и q = 1 - p - вероятность исхода 0. Найти вероятность того, что цепочка 00 (два нуля подряд) появится раньше цепочки 10. В частности, вычислить эту вероятность при p = $1/2$.

6.9 Технический контроль проверяет изделия, каждое из которых независимо от других изделий может с вероятностью p оказаться дефектным.

а) Какова вероятность того, что из 10 проверенных изделий только одно оказалось дефектным?
б) Найти вероятность того, что первым дефектным оказалось k-е проверенное изделие.
в) Найти вероятность того, что последующие 10 изделий окажутся годными при условии, что предыдущие l = 5 изделий были также годными. Зависит ли эта вероятность от l?
г) Найти вероятность того, что число обнаруженных при проверке годных изделий между двумя последовательными дефектными равно k.

6.10 В некоторой группе людей дальтоники составляют 1%. Найти вероятность того, что среди 100 человек:
а) нет дальтоников; б) дальтоников два или больше.

6.11 Отрезок [0,10] точками 1, 2, 3, 4, 7 разделен на 4 отрезка длины 1 и 2 отрезка длины 3. Пусть $A_1, ..., A_8$ - независимые случайные точки, имеющие равномерное распределение на отрезке [0,10]. Какова вероятность того, что из этих точек в два каких-либо отрезка длиной 1 попадет по 2 точки, а в каждый из оставшихся отрезков - по одной точке?

6.12 На отрезок AB длины a брошены наудачу, независимо одна от другой, шесть точек. Найти вероятность того, что:
а) две точки будут находится от точки A на расстоянии, меньшем b, а четыре - на расстоянии большем b;
б) две точки будут находится от точки A на расстоянии, меньшем c, одна - на расстоянии, не меньшем c и не большем b, а три точки - на расстоянии большем b.

6.13 Какова вероятность получить каждую грань дважды при бросании двенадцати игральных костей?

Глава 7

Формулы полной вероятности и Байеса

Предположим, что для А можно найти конечную или бесконечную последовательность событий $\{H_k\}$, которые удовлетворяют следующим условиям:
H1. События $\{H_k\}$ попарно несовместны, т.е. $H_i \cap H_j = \emptyset, i \neq j$.
H2. Событие А происходит, лишь когда происходит одно из событий H_k, т.е.

$$A \subseteq \bigcup_k H_k.$$

H3. $\mathbf{P}(H_k) > 0$ при всех k.
События, удовлетворяющие этим условиям, называют **гипотезами.** Условия H1-H2 равносильны тому, что **вместе с событием** A **выполняется одна из гипотез** $\{H_k\}$, **причем только одна.** Если событие A и последовательность гипотез $\{H_k\}$ удовлетворяют условиям H1-H3, то вероятность $\mathbf{P}(A)$ может быть вычислена по следующей **формуле полной вероятности:**

$$\mathbf{P}(A) = \sum_k \mathbf{P}(A/H_k)\mathbf{P}(H_k). \tag{7.1}$$

В тех же условиях, если произошло событие A положительной вероятности, то с учетом этого события новые, т. е. условные вероятности гипотез H_j вычисляются по *формуле Байеса*

$$\mathbf{P}(H_j/A) = \frac{\mathbf{P}(A/H_j)\mathbf{P}(H_j)}{\sum_k \mathbf{P}(A/H_k)\mathbf{P}(H_k)}.$$

Эти вероятности называются *апостериорными* (т. е. вычисляемыми после осуществления события A).

§ 7.1. Решение типовых примеров

Пример 7.1. *Из урны, содержащей 3 белых и 2 черных шара, вынимаются наудачу два шара и перекладываются во вторую урну, содержащую 4 белых и 4 черных шара.* а) *Найти вероятность вынуть после этого из второй урны белый шар.* б) *Пусть из второй урны был вынут белый шар. Какова вероятность, что при перекладывании из первой урны во вторую были положены два белых шара?*

Решение. Пусть A ={из второй урны вынут белый шар}. В качестве гипотез, связанных с этим событием, можно рассмотреть все возможные исходы первой фазы эксперимента, т.е. перекладывания двух шаров из первой урны во вторую. Обозначим, например, $H_{\text{ЧЧ}}$ ={из первой урны вынуты два черных шара} , $H_{\text{ЧБ}}$ ={из первой урны вынуты один черный и один белый шары}, $H_{\text{ББ}}$ ={из первой урны вынуты два белых шара}. Очевидно, что эти события попарно несовместны, и всегда происходит одно из них, следовательно, они образуют полную группу гипотез. Для вычисления вероятности события А применим формулу полной вероятности:

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A/H_{\text{ЧЧ}})\mathbf{P}(H_{\text{ЧЧ}}) + \mathbf{P}(A/H_{\text{ЧБ}})\mathbf{P}(H_{\text{ЧБ}}) + \mathbf{P}(A/H_{\text{ББ}})\mathbf{P}(H_{\text{ББ}}). \quad (7.2)$$

Найдем вероятности гипотез:

$$\mathbf{P}(H_{\text{ЧЧ}}) = \frac{C_3^0 C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{10}, \quad \mathbf{P}(H_{\text{ЧБ}}) = \frac{C_3^1 C_2^1}{C_5^2} = \frac{6}{10},$$

$$\mathbf{P}(H_{\text{ББ}}) = \frac{C_3^1 C_2^0}{C_5^2} = \frac{3}{10}.$$

Условные вероятности находим, исходя из известного состава второй урны при осуществлении той или иной гипотезы:

$$\mathbf{P}(A/H_{\text{ЧЧ}}) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}, \quad \mathbf{P}(A/H_{\text{ЧБ}}) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}, \quad \mathbf{P}(A/H_{\text{ББ}}) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

Подставляя в (7.2) найденные вероятности, получим:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{1}{10}\cdot\frac{2}{5} + \frac{6}{10}\cdot\frac{1}{2} + \frac{3}{10}\cdot\frac{3}{5} = \frac{13}{25}.$$

Ответим на второй вопрос задачи. Искомую вероятность $\mathbf{P}(H_{\text{ББ}}/A)$ находим по формуле Байеса:

$$\mathbf{P}(H_{\text{ББ}}/A) = \frac{\mathbf{P}(A/H_{\text{ББ}})\mathbf{P}(H_{\text{ББ}})}{\mathbf{P}(A/H_{\text{ЧЧ}})\mathbf{P}(H_{\text{ЧЧ}}) + \mathbf{P}(A/H_{\text{ЧБ}})\mathbf{P}(H_{\text{ЧБ}}) + \mathbf{P}(A/H_{\text{ББ}})\mathbf{P}(H_{\text{ББ}})}$$

$$= \frac{\mathbf{P}(A/H_{\text{ББ}})\mathbf{P}(H_{\text{ББ}})}{\mathbf{P}(A)} = \frac{\frac{3}{10}\cdot\frac{3}{5}}{\frac{13}{25}} = \frac{9}{26}. \qquad \triangledown$$

Пример 7.2. *По каналу связи может быть передана одна из трех последовательностей букв: AAAA, BBBB, CCCC, причем априорные вероятности каждой из последовательностей есть соответственно 3/10, 2/5, и 3/10. Известно, что под действием шумов вероятность правильного приема каждой из переданных букв равна 3/5, а вероятности перевода каждой буквы в любую другую одинаковы и равны 1/5. Предполагается, что буквы искажаются независимо друг от друга. Найти вероятность того, что была передана последовательность AAAA, если на приемном устройстве получена последовательность ABCA.*

Решение. Обозначим D={ на приемном устройстве получена последовательность ABCA }, а в качестве гипотез выберем события: $H_A =$ { передана последовательность AAAA }, $H_B =$ { передана последовательность BBBB }, $H_C =$ { передана последовательность CCCC}. Из условия задачи очевидно, что события H_A, H_B, H_C образуют полную группу гипотез, а их вероятности равны:

$$\mathbf{P}(H_A) = \frac{3}{10},\ \mathbf{P}(H_B) = \frac{2}{5},\ \mathbf{P}(H_C) = \frac{3}{10}.$$

Требуется найти условную вероятность $\mathbf{P}(H_A/D)$, которую вычислим по формуле Байеса:

$$\mathbf{P}(H_A/D) = \frac{\mathbf{P}(D/H_A)\mathbf{P}(H_A)}{\mathbf{P}(D/H_A)\mathbf{P}(H_A) + \mathbf{P}(D/H_B)\mathbf{P}(H_B) + \mathbf{P}(D/H_C)\mathbf{P}(H_C)}. \tag{7.3}$$

Найдем условные вероятности, входящие в правую часть (7.3). Имеем: $\mathbf{P}(D/H_A) = \mathbf{P}(ABCA/H_A)$, последняя вероятность есть вероятность приема последовательности букв "ABCA"вместо переданной последовательности "AAAA", то есть вероятность правильного приема первой и четвертой букв A и перевода второй буквы A в B и третьей - в C. Так как правильный прием или искажения каждой из передаваемых букв являются независимыми событиями, то вероятность указанного пересечения событий равна произведению вероятностей:

$$\mathbf{P}(D/H_A) = \mathbf{P}(ABCA/H_A) = \mathbf{P}(A/H_A)\cdot\mathbf{P}(B/H_A)\cdot\mathbf{P}(C/H_A)\cdot\mathbf{P}(A/H_A) =$$

$$= \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{5} = \frac{9}{625}.$$

Аналогично находим условные вероятности:

$$\mathbf{P}(D/H_B) = \mathbf{P}(ABCA/H_B) = \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{625},$$

$$\mathbf{P}(D/H_C) = \mathbf{P}(ABCA/H_C) == \frac{3}{625}.$$

Подставляя в (7.3) все найденные вероятности, получим:

$$\mathbf{P}(H_A/D) = \frac{\frac{9}{625} \cdot \frac{3}{10}}{\frac{9}{625} \cdot \frac{3}{10} + \frac{3}{625} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{625} \cdot \frac{3}{10}} = \frac{9}{16}. \qquad \triangledown$$

Пример 7.3. *Три стрелка производят по одному выстрелу в одну и ту же мишень. Вероятности попадания в мишень при одном выстреле для каждого из стрелков соответственно равны* p_1, p_2, p_3. *Какова вероятность того, что второй стрелок промахнулся, если после выстрелов в мишени оказалось две пробоины?*

Решение. Обозначим $A =$\{после выстрелов в мишени оказалось две пробоины\}, $H_i =$\{из трех стрелков промахнулся i-й, два других попали\}, $i = 1, 2, 3$. Требуется найти условную вероятность $\mathbf{P}(H_2/A)$, которую мы найдем по формуле Байеса. Для этого найдем вероятности гипотез:

$$\mathbf{P}(H_1) = \mathbf{P}(\overline{B_1}B_2B_3) = \mathbf{P}(\overline{B_1}) \cdot \mathbf{P}(B_1) \cdot \mathbf{P}(B_3) = (1 - p_1)p_2p_3.$$

Здесь использованы обозначения B_i=\{попадание i- го стрелка\}, $\overline{B_i}$= =\{промах i- го стрелка\} и предположение, что результаты стрельбы отдельных стрелков являются независимыми событиями. Аналогично находим:

$$\mathbf{P}(H_2) = \mathbf{P}(B_1\overline{B_2}B_3) = p_1(1 - p_2)p_3, \quad \mathbf{P}(H_3) = \mathbf{P}(B_1B_2\overline{B_3}) = p_1p_2(1 - p_3).$$

Заметим, что все условные вероятности равны 1: $\mathbf{P}(A/H_1) = \mathbf{P}(A/H_2) = \mathbf{P}(A/H_3) = 1$. Тогда подставляя все эти вероятности в формулу Байеса, получим:

$$\mathbf{P}(H_2/A) = \frac{p_1(1 - p_2)p_3}{(1 - p_1)p_2p_3 + p_1(1 - p_2)p_3 + p_1p_2(1 - p_3)}. \qquad \triangledown$$

§ 7.2. Задачи для самостоятельного решения

7.1 В первой урне находятся 1 белый и 9 черных шаров, во второй - 1 черный и 5 белых. Из каждой урны удалили по одному шару, выбранному наугад, а оставшиеся шары ссыпали в третью урну.

а) Найти вероятность того, что шар, вынутый наугад из третьей урны, окажется белым.

б) Если шар, вынутый из третьей урны, оказался белым, то какова вероятность того, что из первых двух урн были удалены черные шары?

7.2 В первой урне находятся 1 белый шар и 4 красных, во второй - 1 белый и 7 красных. В первую урну добавили два шара, выбранных наугад из второй урны.

а) Найти вероятность того, что шар, вынутый наугад из пополненной первой урны, окажется белым.

б) Поставить вопрос, ответ на который можно найти с помощью формулы Байеса (и ответить на него).

7.3 Имеется 5 урн следующего состава: в первой и второй урнах по 2 белых и 3 черных шара в каждой; в третьей и четвертой урнах - по 1 белому и 4 черных шара; в пятой урне - 4 белых и 1 черный шар. Из одной наудачу выбранной урны взят шар. Он оказался белым. Чему равна при этом вероятность того, что он вынут из пятой урны?

7.4 В трех урнах содержатся белые и черные шары: в первой урне - 2 белых и 3 черных шара, во второй - 2 белых и 2 черных шара, в третьей -3 белых и 1 черный шар. Из первой урны вынут наудачу шар и переложен во вторую. Далее из второй урны вынут наудачу шар и переложен в третью. Наконец из третьей урны шар переложен в первую.

а) Какой состав шаров в первой урне наиболее вероятен?

б) С какой вероятностью состав шаров во всех урнах не изменится?

7.5 Из урны, в которой было $m \geq 3$ белых и n черных, потеряли один шар неизвестного цвета. Для того чтобы определить состав шаров в урне, из нее наудачу были вынуты два шара. Найти вероятность того, что был потерян белый шар, если известно, что вынутые шары оказались белыми.

7.6 В урне лежат 12 шаров, из них 8 черных и 4 белых. Три игрока A, B и C поочередно вынимают шары. Выигрывает тот, кто первым вынет белый шар. Оценить шансы на успех каждого игрока.

7.7 При некоторых условиях стрельбы стрелок А поражает мишень с вероятностью $p_1 = 3/5$, стрелок В - с вероятностью $p_2 = 1/2$, стрелок С - с вероятностью $p_3 = 2/5$. Стрелки дали залп по мишени, и две пули попали в цель. Что вероятнее: попал С в мишень или нет?

7.8 Изделия некоторого производства удовлетворяют стандарту с вероятностью 0,96. Предлагается упрощенная система испытаний, дающая положительный результат с вероятностью 0,98 для изделий, удовлетворяющих стандарту, а для изделий, которые не удовлетворяют стандарту, с вероятностью 0,05. Какова вероятность того, что:

а) изделие будет забраковано;

б) изделие, выдержавшее испытание, удовлетворяет стандарту?

7.9 Некоторое изделие выпускается двумя заводами, причем объем продукции второго завода в k раз превосходит объем продукции первого. Доля брака у первого завода p_1, у второго - p_2. Изделия, выпущенные заводами за одинаковый промежуток времени, перемешали и пустили в продажу. Какова вероятность того, что вы приобрели изделие со второго завода, если оно оказалось бракованным?

7.10 В семи урнах содержится по 3 белых и 2 черных шара, а в трех урнах по 7 белых и 3 черных шара. Какова вероятность, что из урны, взятой наудачу, будет извлечен белый шар? Найти вероятность, что шар извлечен из урны с 7 белыми и 3 черными шарами, если он оказался белым.

Глава 8

Распределения случайных величин

§ 8.1. Случайная величина и функция распределения

Случайной величиной (с.в.) называется всякая функция $\xi : \Omega \to R$, сопоставляющая каждому элементарному исходу $\omega \in \Omega$ действительное число $\xi(\omega)$.

Функцией распределения (ф.р.) случайной величины X называется функция $F_X : R \to R$, задаваемая соотношением:

$$F_X(x) = \mathbf{P}(X < x) = \mathbf{P}\{\omega : X(\omega) < x\}, \quad x \in R. \tag{8.1}$$

Функция распределения обладает свойствами:

$F1.$ $0 \le F_X(x) \le 1 \quad \forall\, x \in R.$

$F2.$ $F_X \nearrow$ (монотонно неубывающая функция).

$F3.$ $F_X(-\infty) = \lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0 \quad F_X(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$.

$F4.$ $F_X(x) \qquad \forall\, x \in R:$

$$\lim_{y\to x-0} F_X(y) = F_X(x); \quad \lim_{y\to x+0} F_X(y) = F_X(x+0).$$

F5. Для любых $a < b$ вероятность попадания с.в. X в интервал [a,b) равна:

$$\mathbf{P}\{a \le X < b\} = F_X(b) - F_X(a) .$$

F6. Для любого $a \in R$ вероятность попадания с.в. X в точку a равна скачку ф.р. в точке a:

$$\mathbf{P}\{X = a\} = F_X(a+0) - F_X(a) .$$

§ 8.2. Дискретное и абсолютно непрерывное распределения

Множество G называется **счетным**, если оно бесконечно, но все элементы его можно занумеровать числами натурального ряда: $G = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$. Множество называют **не более чем счетным**, если оно конечно или счетно. Говорят, что с.в. X имеет **дискретное распределение**, если с вероятностью 1 она может принимать не более чем счетное множество значений. Иначе говоря, с.в. X имеет дискретное распределение, если существует не более чем счетное множество $G = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$, такое, что

$$p_i = \mathbf{P}(X = x_i) > 0, i = 1, 2, ... \qquad \sum_i p_i = 1. \tag{8.2}$$

Упрощая терминологию, будем говорить в этом случае, что **случайная величина** X **дискретна**. Если с.в. X дискретна, то для нее можно указать две последовательности: последовательность $x_1, x_2, ...$ возможных значений X и последовательность $p_1, p_2, ...$ вероятностей этих значений. Таблица, составленная из этих последовательностей, называется **рядом распределения** или **таблицей распределения** X:

X	x_1	x_2	...	x_i	...
$\mathbf{P}(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_i	...

(8.3)

Если с.в. X имеет дискретное распределение (8.3), то вероятность ее попадания в множество $A \subseteq R$ вычисляется по формуле:

$$\mathbf{P}(X \in A) = \sum_{i: x_i \in A} p_i, \tag{8.4}$$

В частности, функция распределения X выражается через ряд распределения формулой:

$$F_X(x) = \sum_{i: x_i < x} p_i. \tag{8.5}$$

Если предположить, что все значения X упорядочены по возрастанию:

$$x_1 < x_2 < ... < x_n < ...,$$

то функция распределения X является **ступенчатой**:

то есть она сохраняет постоянные значения в интервалах (x_{i-1}, x_i) , а в точках x_i имеет разрыв первого рода (скачок), равный вероятности

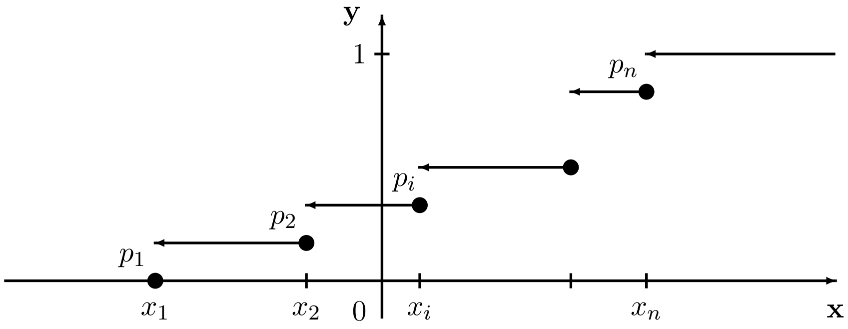


Рис. 8.1: График функции распределения $y = F_X(x)$

$p_i = \mathbf{P}(X = x_i)$. Говорят, что с.в. ξ имеет **абсолютно непрерывное распределение**, если ее функция распределения $F_\xi(x)$ может быть представлена в виде:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt, \tag{8.6}$$

где $f_X(x)$ - неотрицательная, интегрируемая на всей числовой оси функция, которая называется **плотностью распределения** X. Если распределение с.в. X абсолютно непрерывно, то ее плотность распределения обладает свойствами:

f1. $f_X(x) \geq 0 \quad \forall x \in R$;

f2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$;

f3.

$$\mathbf{P}(X \in A) = \int\limits_A f_X(x)dx$$

для любого множества $A \subseteq R$, для которого интеграл в правой части определен.

f4. Функция распределения $F_X(x)$ непрерывна $\forall x \in R$, а в точках непрерывности плотности $f_X(x)$ ф.р. $F_X(x)$ дифференцируема, причем

$$F'_X(x) = f_X(x).$$

f5. $\mathbf{P}(X = a) = 0 \ \forall a \in R$.

f6. Для любых $a < b$

$$\mathbf{P}(a \leq X < b) = \mathbf{P}(a \leq X \leq b) = \mathbf{P}(a < X \leq b) = \mathbf{P}(a < X < b) = \int_a^b f_X(x)dx.$$

Вероятности попадания в промежуток, фигурирующие в последнем свойстве, вычисляются как площадь криволинейной трапеции, заштрихованной на Рис. 8.2:

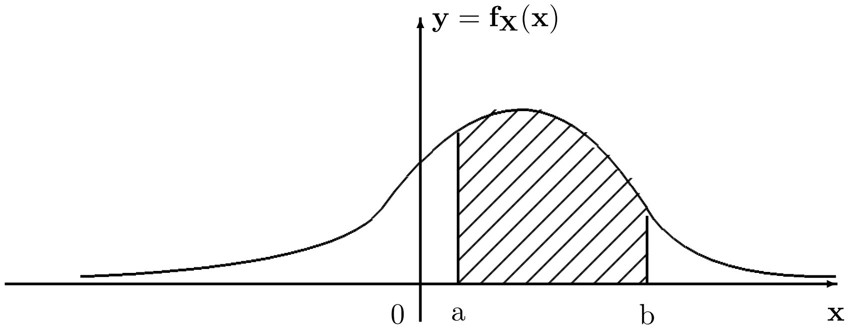


Рис. 8.2: Плотность распределения $y = f_X(x)$

§ 8.3. Решение типовых примеров

Пример 8.1. *Точка* $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ *выбирается наудачу в треугольнике с вершинами в точках* (0,0), (2,1) *и* (2,0). *Найти функцию распределения случайной величины* X*, если:*
а) $X(\omega) = \omega_1$*;* *б)* $X(\omega) = \omega_2$

Решение. а) Согласно определению (8.1), функция распределения $F_X(x)$ есть вероятность того, что случайная величина примет значение, меньшее x. Так как точка $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ выбирается в пределах треугольника Ω (см. Рис.8.3), то с.в. $X(\omega) = \omega_1$ может принимать свои значения лишь в пределах отрезка $[0, 2]$. Поэтому при $x \le 0$ $F_X(x) = \mathbf{P}(X < x) = 0$, а при $x > 2$ $F_X(x) = \mathbf{P}(X < x) = 1$. Пусть теперь $0 < x \le 2$. Тогда событие $\{X < x\} = \{\omega_1 < x\}$ означает, что точка $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ окажется левее прямой $\omega_1 = x$, то есть окажется в области A_x, заштрихованной на Рис.8.3 Вероятность попадания в эту область находим согласно геометрическому определению

$$F_X(x) = \mathbf{P}(X < x) = \mathbf{P}(\omega \in A_x) = \frac{\mu(A_x)}{\mu(\Omega)} = \frac{x^2}{4}.$$

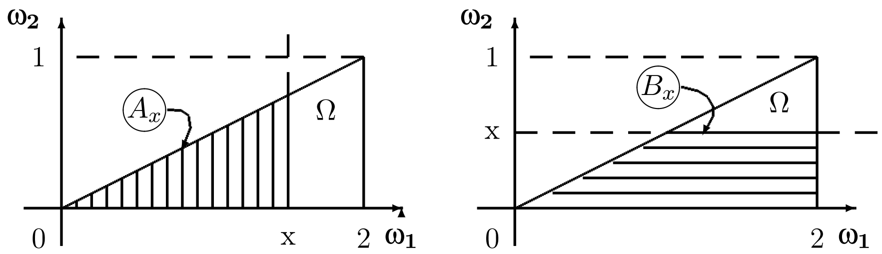


Рис. 8.3:

Таким образом, искомая функция распределения с.в. X равна

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} x \le 0, \\ \frac{x^2}{4}, & \text{если} 0 < x \le 2, \\ 1, & \text{если} x > 2. \end{cases}$$

б) Аналогично предыдущему, находим: $F_X(x) = \mathbf{P}(X < x) = \mathbf{P}(\omega_2 < x) = 0$, при $x \le 0$; $F_X(x) = \mathbf{P}(X < x) = \mathbf{P}(\omega_2 < x) = 1$ при $x > 1$. Пусть $0 < x \le 1$. Тогда имеем (см. Рис.8.3):

$$F_X(x) = \mathbf{P}(X < x) = \mathbf{P}(\omega_2 < x) = \mathbf{P}(\omega \in B_x) = \frac{\mu(B_x)}{\mu(\Omega)} = \frac{1-(1-x)^2}{1} = 2x - x^2.$$

Полное выражение для ф.р. X имеет вид:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} x \le 0, \\ 2x - x^2, & \text{если} 0 < x \le 1, \\ 1, & \text{если} x > 1. \end{cases} \qquad \bigtriangledown$$

Пример 8.2. *Монету бросают $n = 3$ раза. Найти ряд распределения и функцию распределения: а) числа выпадений герба; б) разности чисел выпадения герба и решетки.*

Решение. а) Обозначая X - число выпадений герба, заметим, что с.в. X может принимать лишь конечное множество значений: 0, 1, 2, 3. Следовательно, распределение X дискретно, а ряд распределения определяется формулами Бернулли (6.1):

$$p_k = \mathbf{P}(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \ k = 0, 1, ..., n.$$

Подставляя в эти формулы значения $p = q = \frac{1}{2}$, $n = 3$, находим:

$$p_0 = C_3^0 \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}, \quad p_1 = C_3^1 \frac{1}{2^3} = \frac{3}{8}, \quad p_2 = \frac{3}{8}, \quad p_3 = \frac{1}{8}.$$

Найденный ряд распределения можно представить таблицей:

i	0	1	2	3
$\mathbf{P}(X = i)$	1/8	3/8	3/8	1/8

Функцию распределения проще всего представить графически подобно Рис. 8.1:

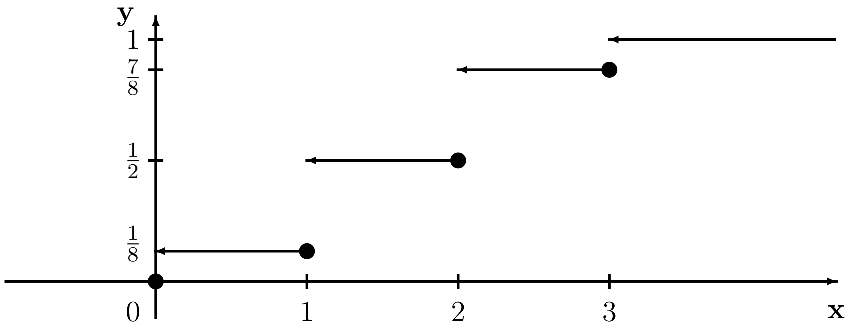


Рис. 8.4: График функции распределения $y = F_X(x)$

Аналитически функцию распределения $y = F_X(x)$ можно задать формулой:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} x \le 0, \\ 1/8, & \text{если} 0 < x \le 1, \\ 1/2, & \text{если} 1 < x \le 2, \\ 7/8, & \text{если} 2 < x \le 3, \\ 1, & \text{если} x > 3. \end{cases}$$

б) Обозначая Y - разность чисел выпадения герба и решетки, заметим, что $Y = X-(3-X) = 2X-3$. Значит Y может принимать конечное множество значений: $-3, -1, 1, 3$. Следовательно, распределение Y дискретно, а ее ряд распределения определяется из соотношений:

$$p_i = \mathbf{P}(X = i) = \mathbf{P}(2X - 3 = 2i - 3) = \mathbf{P}(Y = 2i - 3), \quad i = 0, 1, 2, 3.$$

Подставляя значения p_i из таблицы распределения X, получим ряд распределения Y:

k	-3	-1	1	3
$\mathbf{P}(Y=k)$	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$

Функцию распределения $F_Y(x)$ строим так же, как в пункте а), с помощью ряда распределения Y. $\bigtriangledown$

Пример 8.3. *Говорят, что случайная величина X имеет* **равномерное распределение на отрезке [a,b]** *(обозначение: $X \in U[a,b]$), если ее распределение абсолютно непрерывно с плотностью:*

$$f_X(x) = \begin{cases} C = const, & \text{если } x \in (a,b), \\ 0, & \text{если } x \notin [a,b]. \end{cases} \tag{8.7}$$

а) Найти постоянную C и функцию распределения X.
б) Считая, что $X \in U[0,1]$, найти плотности распределения случайных величин: $Y = 2X+1$; $Z = X^2$.

Решение. а) Постоянную C найдем, воспользовавшись свойством плотности f2:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = \int_a^b Cdx = C(b-a),$$

откуда $C = \frac{1}{b-a}$, и плотность равномерного распределения $U[a,b]$ имеет вид:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{если } x \in (a,b), \\ 0, & \text{если } x \notin [a,b]. \end{cases} \tag{8.8}$$

Функцию распределения вычисляем по формуле (8.6), при этом учитываем, что подынтегральная функция - плотность распределения (8.8) - равна нулю всюду вне отрезка $[a,b]$:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int\limits_{(-\infty,x)\cap[a,b]} f_X(t)dt + \int\limits_{(-\infty,x)\cap(R\setminus[a,b])} f_X(t)dt =$$

$$= \int\limits_{(-\infty,x)\cap[a,b]} f_X(t)dt = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le a, \\ \int\limits_a^x f_X(t)dt, & \text{если } a < x \le b, \\ 1, & \text{если } x > b. \end{cases}$$

Интеграл в средней части последней формулы $(a < x \leq b)$ равен :

$$\int\limits_a^x f_X(t)dt = \int\limits_a^x \frac{1}{b-a}dt = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^x dt = \frac{x-a}{b-a}.$$

Окончательное выражение для функции распределения с.в. $X \in U[a,b]$ имеет вид:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{если } x \in (a,b], \\ 1, & \text{если } x > b. \end{cases} \tag{8.9}$$

Графики плотности и функции распределения $X \in U[a,b]$ представлены на Рис.8.5.

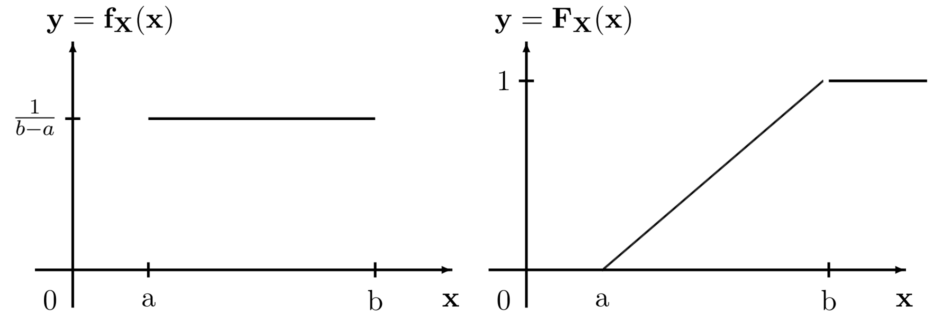


Рис. 8.5: Плотность и функция распределения $X \in U[a,b]$

б) Из вида плотности распределения с.в. $X \in U[a,b]$ (см. Рис.8.5) вытекает, что $\mathbf{P}(a \leq X \leq b) = 1$. Так как $Y = 2X + 1$, то все значения Y с вероятностью 1 принадлежат отрезку $[2a+1, 2b+1]$. Подставляя $a = 0$, $b = 1$, находим: $\mathbf{P}(1 \leq Y \leq 3) = 1$. Следовательно,

$$F_Y(x) = \mathbf{P}(Y < x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 1, \\ \mathbf{P}(2X+1 < x), & \text{если } 1 < x \leq 3, \\ 1, & \text{если } x > 3. \end{cases} \tag{8.10}$$

Вычислим вероятность в средней строке последней формулы, пользуясь функцией распределения $X \in U[0,1]$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0, \\ x, & \text{если } 0 < x \le 1, \\ 1, & \text{если } x > 1, \end{cases} \tag{8.11}$$

найденной из (8.9) :

$$\mathbf{P}(2X + 1 < x) = \mathbf{P}\left(X < \frac{x-1}{2}\right) = F_X\left(\frac{x-1}{2}\right) = \frac{x-1}{2},$$

так как $1 < x \le 3$, а значит и $0 < \frac{x-1}{2} \le 1$. Подставляя результат этого вычисления в (8.10), получаем окончательно:

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 1, \\ \frac{x-1}{2}, & \text{если } 1 < x \le 3, \\ 1, & \text{если } x > 3. \end{cases}$$

Плотность распределения с.в. Y находим в соответствии со свойством f4 дифференцированием ф.р. $F_Y(x)$:

$$f_Y(x) = F'_Y(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin [1,3], \\ \frac{1}{2}, & \text{если } 1 < x < 3. \end{cases}$$

Функцию распределения с.в. $Z = X^2$ находим аналогично предыдущему, причем с самого начала заметим, что $\mathbf{P}(Z \in [0,1]) = 1$, а следовательно

$$F_Z(x) = \mathbf{P}(Z < x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0, \\ \mathbf{P}(Z < x), & \text{если } 0 < x \le 1, \\ 1, & \text{если } x > 1. \end{cases} \tag{8.12}$$

Пусть $0 < x \le 1$. Тогда

$$F_Z(x) = \mathbf{P}(Z < x) = \mathbf{P}(X^2 < x) = \mathbf{P}(|X| < \sqrt{x}) = \mathbf{P}(X < \sqrt{x}),$$

так как $\mathbf{P}(X \in [0,1]) = 1$. Вероятность $\mathbf{P}(X < \sqrt{x})$ вычисляем, пользуясь известным выражением (8.11) для ф.р. $X \in U[0,1]$ и учитывая, что $0 < \sqrt{x} \le 1$:

$$\mathbf{P}(X < \sqrt{x}) = \sqrt{x}.$$

Подставляя результаты проделанных вычислений в (8.12), получим:

$$F_Z(x) = \mathbf{P}(Z < x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0, \\ \sqrt{x}, & \text{если } 0 < x \le 1, \\ 1, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

Наконец, плотность $f_Z(x)$ находим дифференцированием функции распределения $F_Z(x)$:

$$f_Z(x) = F'_Z(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin [0,1], \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}, & \text{если } 0 < x < 1. \end{cases} \qquad \triangledown$$

§ 8.4. Задачи для самостоятельного решения

8.1 Вероятность попадания баскетбольного мяча в кольцо при бросании начинающим спортсменом равна 1/4. Мяч бросают до первого попадания, но дают не более 2 попыток. Найти ряд распределения, математическое ожидание и дисперсию числа промахов. Построить график функции распределения.

8.2 По мишени одновременно стреляют 2 стрелка, вероятности попаданий которых равны соответственно 0,3 и 0,6. Найти ряд распределения, математическое ожидание и дисперсию числа попаданий в мишень. Построить график функции распределения.

8.3 Вероятность попадания в мишень равна 0,6 при каждом выстреле. Стрельба ведется одиночными выстрелами до первого попадания, пока не будет израсходован боезапас. Найти ряд распределения, математическое ожидание и дисперсию числа произведенных выстрелов, если боезапас составляет 2 единицы. Построить график функции распределения.

8.4 Игральную кость бросают $n = 6$ раз. Найти ряд распределения и функцию распределения: а) числа выпадений шестерки; б) разности чисел выпадения шестерки и тройки.

8.5 Вероятность отказа сервера при каждом из независимых подключений с помощью модема равна 0,3. Попытки подключения производятся до установления связи. Найти ряд распределения, математическое ожидание и дисперсию числа произведенных попыток подключения, если число попыток ограничено двумя. Построить график функции распределения.

8.6 Игральную кость бросают до первого появления шестерки. Найти ряд распределения и функцию распределения числа проведенных бросаний.

8.7 Монету бросают до появления двух гербов. Найти ряд распределения и функцию распределения числа проведенных бросаний.

8.8 Дискретная случайная величина X имеет ряд распределения

x_i	-1	0	1
$\mathbf{P}(X = x_i)$	$1/3$	$1/3$	$1/3$

Построить ряды распределения следующих случайных величин:

а) $2X + 5$; г) 2^X;
б) $X^2 + 1$; д) $\min(X, 1)$;
в) $|X|$; е) $1/(3 - X)$.

8.5 Решить задачу **8.4**, если дискретная случайная величина X имеет ряд распределения

x_i	-2	-1	0	1	2
$\mathbf{P}(X = x_i)$	$1/10$	$1/5$	$3/10$	$3/10$	$1/10$

8.9 Скорость пешехода на дистанции в 1 км является случайной величиной, равномерно распределенной на отрезке от 2 км/ч до 6 км/ч. Найти математическое ожидание и стандартное отклонение времени, затраченного на преодоление дистанции. Найти вероятность того, что это время превысит 24 минуты.

8.10 Закон Рэлея с плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} Axe^{-x^2/2} & \text{при } x \geq 0; \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

в ряде случаев описывает распределение срока службы электронной аппаратуры. Найти коэффициент A, математическое ожидание и дисперсию.

8.11 Случайная величина X задана своей плотностью

$$f(x) = \begin{cases} A\cos 4x & \text{при } x \in [0; \pi/8]; \\ 0 & \text{при } x \notin [0; \pi/8] \end{cases}$$

Найти коэффициент A, математическое ожидание и дисперсию.

8.12 Функция распределения непрерывной случайной величины X задана выражением

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0; \\ Ax^3 & \text{при } 0 < x \leq 2; \\ 1 & \text{при } x > 0 \end{cases}$$

Найти коэффициент A, математическое ожидание, дисперсию, плотность, а также $\mathbf{P}(0 < X < 1)$.

8.13 На окружность радиуса R с центром в начале координат наудачу

брошена точка. Найти функцию и плотность распределения:
а) абсциссы точки попадания;
б) длины хорды, соединяющей точку попадания с точкой (-R,0).

8.14 Равнобедренный треугольник образован единичным вектором в направлении оси абцисс и единичным вектором в случайном направлении в R^2. Найти функцию распределения длины третьей стороны.

8.15 Из точки (0,a) проведена прямая под углом φ к оси ординат. Найти функцию распределения точки пересечения этой прямой с осью абцисс, если угол φ равномерно распределен в промежутке:
а) $(0, \pi/2)$; б) $(-\pi/2, \pi/2)$.

8.16 На отрезок оси ординат между точками (0,0) и (0,R) наудачу брошена точка. Через точку попадания проведена хорда окружности $x^2 + y^2 = R^2$, перпендикулярная оси ординат. Найти распределение длины этой хорды.

8.17 Говорят, что случайная величина X имеет показательное распределение с параметром $\alpha > 0$ $(X \Subset E(\alpha))$, если ее распределение абсолютно непрерывно с плотностью:

$$f_X(x) = \begin{cases} ce^{-\alpha x}, & \text{если} x > 0, \\ 0, & \text{если} x \leq 0. \end{cases}$$

Найти значение входящей в определение $f_X(x)$ постоянной с и функцию распределения $F_X(x)$.

8.18 Можно ли подобрать постоянную с так, чтобы функция cx^{-4} была плотностью распределения на множестве:
а) $[1, \infty]$; в) [-2,-1];
б) $[0, \infty]$; г) [-3,0].

8.19 Пусть случайная величина X распределена равномерно на отрезке [0,1] $(X \in U[0, 1])$. Найти плотности распределения следующих случайных величин:
а) $-\ln X$; в) $-\ln(1 - X)$;
б) $X - 1/X$; г) e^{X-1}.

8.20 Пусть случайная величина X имеет показательное распределение с параметром α $(X \in E(\alpha)$, см. задачу **8.10**), то есть абсолютно непрерывное с плотностью:

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, & \text{если} x > 0, \\ 0, & \text{если} x \leq 0. \end{cases}$$

Найти плотности распределения следующих случайных величин:
а) $\sqrt{X}$; г) $\ln(\alpha X)$;
б) X^2; д) $e^{-\alpha X}$;
в) $2X$; е) $\min(X, X^2)$.

8.21 Пусть случайная величина X имеет плотность распределения р. Найти плотности распределения следующих величин:

а) $aX + b$, $a, b \in R$, $a \neq 0$; г) X^3;

б) X^{-1}; д) e^X;

в) X^2; е) $|X - 1|$.

Глава 9

Математическое ожидание.

§ 9.1. Определение и свойства математического ожидания.

Пусть $X = X(\omega)$ - случайная величина, заданная на вероятностном пространстве Ω.

Математическим ожиданием с.в. X называется число, обозначаемое $\mathbf{E}X$ или $\mathbf{M}X$, которое определяется следующим образом.
Если X имеет дискретное распределение: $p_n = \mathbf{P}(X = x_n), n = 1, 2, ...,$ то

$$\mathbf{E}X = \sum_{n=1}^{\infty} x_n p_n. \tag{9.1}$$

Если X имеет абсолютно непрерывное распределение с плотностью $f_X(x)$, то

$$\mathbf{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx. \tag{9.2}$$

Говорят, что **математическое ожидание существует (конечно),** если ряд в правой части (9.1) или интегралы в (9.2) **абсолютно сходятся.** Математическое ожидание (м.о.) $\mathbf{E}X$ можно рассматривать как **среднее значение** случайной величины. Математическое ожидание обладает следующими свойствами:
E1. М.о. постоянной равно этой постоянной: $\mathbf{E}C = C$.
E2. М.о. линейно, то есть для любых постоянных C_1, C_2 и любых с.в. X_1, X_2:

$$\mathbf{E}(C_1X_1 + C_2X_2) = C_1\mathbf{E}X_1 + C_2\mathbf{E}X_2$$

при условии, что математические ожидания в правой части существуют. В частности **постоянный множитель можно выносить из под знака математического ожидания**:

$$\mathbf{E}CX = C\mathbf{E}X, \tag{9.3}$$

а **математическое ожидание суммы равно сумме математических ожиданий**:

$$\mathbf{E}(X_1 + X_2 + ... + X_n) = \mathbf{E}X_1 + \mathbf{E}X_2 + ... + \mathbf{E}X_n \tag{9.4}$$

E3. Если с.в. $X \geq 0$ с вероятностью 1, то $\mathbf{E}X \geq 0$. При этом $\mathbf{E}X = 0$ равносильно $\mathbf{P}\{X = 0\} = 1$.
E4. Если с.в. X_1, X_2 независимы, то математическое ожидание их произведения равно произведению математических ожиданий:

$$\mathbf{E}(X_1 \cdot X_2) = \mathbf{E}X_1 \cdot \mathbf{E}X_2 \tag{9.5}$$

при условии существования м.о. в правой части. Это свойство распространяется на любое число с.в.:

$$\mathbf{E}(X_1 \cdot X_2 \cdots X_n) = \mathbf{E}X_1 \cdot \mathbf{E}X_2 \cdots \mathbf{E}X_n, \tag{9.6}$$

если с.в. X_1, X_2, ..., X_n независимы.

Случайные величины, удовлетворяющие условию (9.5) , называются **некоррелированными.** Таким образом, свойство E4 утверждает, что если с.в. независимы, то они некоррелированы.

§ 9.2. Моменты случайных величин, дисперсия

Пусть $k > 0$. **Моментом порядка k** случайной величины X или **начальным моментом порядка k** называется число

$$\alpha_k = \mathbf{E}X^k,$$

если соответствующее математическое ожидание существует. Аналогично определяются: **абсолютный момент порядка k**

$$\beta_k = \mathbf{E}|X|^k,$$

центральный момент порядка k

$$\mu_k = \mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^k,$$

абсолютный центральный момент порядка k

$$\nu_k = \mathbf{E}|X - \mathbf{E}X|^k.$$

Вычисляются моменты с помощью формул

$$\mathbf{E}X^k = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^k p_n, \quad \mathbf{E}X^k = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k f_X(x)dx$$

для дискретного и абсолютно непрерывного распределений соответственно.

Дисперсией случайной величины X называют центральный момент второго порядка и обозначают ее $\mathbf{D}X$ либо $\mathbf{Var}X$:

$$\mathbf{D}X = \mathbf{Var}X = \mu_2 = \mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^2.$$

При вычислении дисперсии удобно пользоваться следующим ее представлением:

$$\mathbf{D}X = \mathbf{E}X^2 - (\mathbf{E}X)^2, \tag{9.7}$$

легко вытекающим из определения. В случае абсолютно непрерывного распределения дисперсия вычисляется также по такой формуле

$$\mathbf{D}X = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbf{E}X)^2 f_X(x)dx.$$

И аналогично в случае дискретного распределения

$$\mathbf{D}X = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n - \mathbf{E}X)^2 p_n.$$

В то время, как математическое ожидание представляет некое среднее значение случайной величины, дисперсия характеризует среднее отклонение (точнее - квадрат отклонения) случайной величины от ее математического ожидания. Дисперсия имеет следующие свойства.
D1. Дисперсия неотрицательна: $\mathbf{D}X \geq 0$, - и обращается в нуль тогда и только тогда, когда с.в. не случайна, т. е. $\mathbf{P}(X = C = const) = 1$.

D2. Постоянный множитель выносится из-под знака дисперсии с квадратом:

$$\mathbf{D}(CX) = C^2\mathbf{D}X.$$

D3. Прибавление к с.в. константы не изменяет дисперсии:

$$\mathbf{D}(X + C) = \mathbf{D}X.$$

D4. Если случайные величины $X_1, X_2, ..., X_n$ попарно некоррелированы, тем более, **если они независимы, то дисперсия их суммы равна сумме дисперсий:**

$$\mathbf{D}(X_1 + X_2 + ... + X_n) = \mathbf{D}X_1 + \mathbf{D}X_2 + ... + \mathbf{D}X_n. \tag{9.8}$$

§ 9.3. Числовые характеристики случайных векторов

Ковариацией случайных величин X_1, X_2 называется число:

$$\mathbf{cov}(X_1, X_2) = \mathbf{E}(X_1 - \mathbf{E}X_1)(X_2 - \mathbf{E}X_2). \tag{9.9}$$

Для вычисления ковариации можно использовать следующую формулу:

$$\mathbf{cov}(X_1, X_2) = \mathbf{E}(X_1X_2) - \mathbf{E}X_1 \cdot \mathbf{E}X_2, \tag{9.10}$$

Ковариация для дискретных случайных величин обычно считается по следующей формуле

$$\mathbf{cov}(X_1, X_2) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_k \mathbf{P}(X_1 = x_n, X_2 = y_k) - \mathbf{E}X_1\mathbf{E}X_2.$$

Заметим, что **если с.в.** X_1, X_2 **независимы, то ковариация их равна нулю**: $\mathbf{cov}(X_1, X_2) = 0$. В общем же случае (т.е. когда с.в. не обязательно независимы), справедлива следующая формула, связывающая ковариацию с дисперсиями с.в. $X_1, X_2, X_1 + X_2$:

$$\mathbf{D}(X_1 + X_2) = \mathbf{D}X_1 + 2\mathbf{cov}(X_1, X_2) + \mathbf{D}X_2. \tag{9.11}$$

Последнее соотношение допускает обобщение на случай n случайных слагаемых:

$$\mathbf{D}(X_1 + X_2 + ... + X_n) = \mathbf{D}X_1 + +\mathbf{D}X_2 + ... + \mathbf{D}X_n + 2\sum_{1\le i<j\le n}\mathbf{cov}(X_i, X_j). \tag{9.12}$$

Коэффициентом корреляции случайных величин X_1, X_2 называется величина $\rho = \rho(X_1, X_2)$, равная отношению:

$$\rho(X_1, X_2) = \frac{\mathbf{cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{\mathbf{D}X_1}\sqrt{\mathbf{D}X_2}} = \frac{\mathbf{E}(X_1 X_2) - \mathbf{E}X_1 \cdot \mathbf{E}X_2}{\sqrt{\mathbf{D}X_1}\sqrt{\mathbf{D}X_2}}. \tag{9.13}$$

Коэффициент корреляции $\rho = \rho(X_1, X_2)$ широко используется как **мера зависимости между с.в.** X_1, X_2, ввиду следующих своих свойств:
ρ1. $|\rho| \leq 1$;
ρ2. Если с.в. X_1, X_2 независимы, то $\rho = \rho(X_1, X_2) = 0$;
ρ3. $|\rho| = 1$ тогда и только тогда, когда X_1, X_2 связаны линейной зависимостью: $X_1 = aX_2 + b$, при этом

$$(\rho = 1) \;\Leftrightarrow\; (a > 0); \qquad (\rho = -1) \;\Leftrightarrow\; (a < 0).$$

§ 9.4. Решение типовых примеров

Пример 9.1. *Стрельба по цели ведется до первого попадания, но дается не более двух попыток. Каково математическое ожидание и дисперсия числа выстрелов, которые будут сделаны, если вероятность попадания в каждом выстреле равна* $0,2$*?*

Решение. Число сделанных выстрелов — это случайная величина X, которая может принимать лишь два значения 1 или 2, с вероятностями $0,2$ (это означает, что сразу произошло попадание и стрельба закончилась) или $0,8$ соответственно. Причем $\mathbf{P}(X = 2) = 0,8 \cdot 0,2 + 0,8 \cdot 0,8 = 0,8$, т. е. две попытки могут произойти в двух случаях: либо в первый раз не попали, но во второй раз попали, либо и в первый и во второй раз не попали. Тогда математическое ожидание легко находится по формуле (9.1):

$$\mathbf{E}X = x_1 p_1 + x_2 p_2 = 1 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,8 = 1,8.$$

Дисперсия считается по формуле:

$$\mathbf{D}X = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 - (\mathbf{E}X)^2 = 1^2 \cdot 0,2 + 2^2 \cdot 0,8 - 1,8^2 = 0,16. \qquad \triangledown$$

Пример 9.2. *Двумерный случайный вектор* (X, Y) *имеет распределение, заданное таблицей:*

Y \ X	0	1
-1	0,10	0,15
0	0,15	0,25
1	0,20	0,15

а) Найти математические ожидания, дисперсии и коэффициент корреляции с. в. X, Y.
б) Найти коэффициент корреляции $\rho(X+Y, X-2Y)$.

Решение. а) Чтобы вычислить математические ожидания и дисперсии, найдем частные распределения с.в. X, Y, записывая их в дополнительные строку и столбец данной таблицы совместного распределения:

X / Y	0	1	$\mathbf{P}(Y=k)$
-1	0,10	0,15	0,25
0	0,15	0,25	0,40
1	0,20	0,15	0,35
$\mathbf{P}(X=n)$	0,45	0,55	

Используя найденные ряды распределения с.в. X, Y, вычисляем их м.о. и дисперсии:

$$\mathbf{E}X = 0\cdot 0,45 + 1\cdot 0,55 = 0,55; \mathbf{E}Y = -1\cdot 0,25 + 0\cdot 0,40 + 1\cdot 0,35 = 0,10;$$

$$\mathbf{E}X^2 = 0^2\cdot 0,45 + 1^2\cdot 0,55 = 0,55; \mathbf{D}X = \mathbf{E}X^2 - (\mathbf{E}X)^2 = 0,55 - 0,55^2 = 0,2475;$$

$$\mathbf{E}Y^2 = (-1)^2\cdot 0,25 + 0 + 1^2\cdot 0,35 = 0,6; \mathbf{D}Y = \mathbf{E}Y^2 - (\mathbf{E}Y)^2 = 0,6 - 0,1^2 = 0,59.$$

Чтобы найти коэффициент корреляции, найдем сначала ковариацию, используя соотношение (9.10) и таблицу распределения X, Y:

$$\mathbf{E}(XY) = \sum_{n,k}(n\cdot k)\mathbf{P}(X=n, Y=k) = 0\cdot(-1)\cdot 0,10 + 0\cdot 0\cdot 0,15 + 0\cdot 1\cdot 0,20 +$$

$$+1\cdot(-1)\cdot 0,15 + 1\cdot 0\cdot 0,25 + 1\cdot 1\cdot 0,15 = 0;$$

$$\mathbf{cov}(X,Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}X\cdot\mathbf{E}Y = 0 - 0,55\cdot 0,1 = -0,055;$$

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathbf{cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathbf{D}X}\sqrt{\mathbf{D}Y}} = \frac{-0,055}{\sqrt{0,2475}\sqrt{0,59}} = -0,144.$$

Величина коэффициента корреляции близка к нулю, поэтому можно считать, что с.в. X, Y слабо зависимы.
б) Используя определение ковариации получаем

$$\mathbf{cov}(X+Y, X-2Y) = \mathbf{cov}(X,X) - 2\mathbf{cov}(X,Y) + \mathbf{cov}(Y,X) - 2\mathbf{cov}(Y,Y) =$$

$$= \mathbf{D}X - \mathbf{cov}(X,Y) - 2\mathbf{D}Y = 0,2475 - 0,055 - 2\cdot 0,59 = -0,9875.$$

Дисперсии с.в. $X+Y,\ X-2Y$ найдем, пользуясь соотношением (9.11):

$$\mathbf{D}(X+Y) = \mathbf{D}X + \mathbf{D}Y + 2\mathbf{cov}(X,Y) = 0,2475 - 2\cdot 0,055 + 0,59 = 0,7275;$$

$$\mathbf{D}(X-2Y) = \mathbf{D}X + 4\mathbf{D}Y - 4\mathbf{cov}(X,Y) = 0,2475 - 4\cdot 0,055 + 4\cdot 0,59 = 2,3875.$$

Остается вычислить коэффициент корреляции:

$$\rho(X+Y, X-2Y) = \frac{\mathbf{cov}(X+Y, X-2Y)}{\sqrt{\mathbf{D}(X+Y)\mathbf{D}(X-2Y)}} = \frac{-0,9875}{\sqrt{0,7275\cdot 2,3875}} = -0,749. \quad \triangledown$$

§ 9.5. Задачи для самостоятельного решения

9.1 Дискретная случайная величина X имеет ряд распределения

x_i	-1	0	1	2
$\mathbf{P}(X=x_i)$	1/5	1/10	3/10	2/5

.

Найти математические ожидания и дисперсии случайных величин:

а) X; в) X^2;

б) $|X|$; г) 2^X.

9.2 Пусть случайная величина X принимает значения -2, -1, 0, 1 и 2 с вероятностью 1/5 каждое. Найти математические ожидания и дисперсии случайных величин:

а) X; в) $|X|$;

б) $-X$; г) X^2.

9.3 Имеется шесть ключей, из которых только один подходит к замку. Составить ряд распределения числа попыток при открывании замка, если испробованный ключ в последующих опробованиях не участвует. Чему равны математическое ожидание и дисперсия этой случайной величины?

9.4 Из урны, содержащей пять белых и три черных шара, последовательно вынимают шары, причем операция извлечения продолжается до появления белого шара. Составить ряд распределения числа извлеченных черных шаров и вычислить математическое ожидание и дисперсию, если

известно, что: а) вынутые шары в урну не возвращаются; б) вынутые шары возвращаются в урну.
Найти математическое ожидание и дисперсию соответствующих случайных величин в задачах 8.1 — 8.7.
9.5 Игрок бросает в автомат жетон стоимостью 10 рублей. В случае выигрыша игрок получает 50 рублей. Вероятность выигрыша составляет 0,16. Найти математическое ожидание и дисперсию выигрыша игрока в такой игре.
9.6 Диаметр круга измерен приближенно. Считая, что его величина равномерно распределена на отрезке [a,b], найти среднее значение и дисперсию площади круга.
9.7 Случайные величины X Y независимы, причем X имеет нормальное распределение с параметрами 2 и $1/2$, а Y - равномерное распределение на отрезке $[0/4]$. Найти:

а) $\mathbf{E}(X+Y)$; г) $\mathbf{E}(X-Y^2)$;
б) $\mathbf{E}XY$; д) $\mathbf{D}(X+Y)$;
в) $\mathbf{E}X^2$; е) $\mathbf{D}(X-Y)$.

9.8 Бросается n игральных костей. Найти математическое ожидание и дисперсию суммы очков на всех костях.
9.9 Двумерное распределение пары целочисленных случайных величин X и Y задается с помощью таблицы

	$X=-2$	$X=0$	$X=1$
$Y=-1$	1/6	1/6	1/6
$Y=2$	1/6	1/6	1/6

где в пересечении столбца $X = i$ $Y = j$ находится вероятность $\mathbf{P}\{X=i,\ Y=j\}$. Найти:

а) $\mathbf{E}X,\ \mathbf{D}X$; в) $\mathbf{Cov}(X,Y)$;
б) $\mathbf{E}Y,\ \mathbf{D}Y$; г) $\mathbf{E}(X-2Y),\ \mathbf{D}(X-2Y)$.

9.10 Двумерный случайный вектор (X,Y) имеет распределение, заданное таблицей:

X / Y	-1	0	1
-2	1/8	1/12	7/24
0	1/12	1/12	1/16
1	3/24	1/12	1/16

Найти математические ожидания, дисперсии и коэффициент корреляции с. в. X, Y, а также математическое ожидание и дисперсию с.в. $X - 3Y + 1$.

9.11 Изменения цен акций $X,\ Y$ имеют следующее совместное распределение.

X \ Y	-1	1	2
-1	0,0	0,0	0,7
1	0,1	0,0	0,0
2	0,0	0,2	0,0

а) Найти математические ожидания и стандартные отклонения изменений цен акций. Сделать вывод о том, какая из акций является более доходной; более рисковой.

б) Найти математические ожидания и стандартные отклонения случайных величин $X - Y,\ \max(X,\ Y),\ \min(X,\ Y)$. Дать экономическую интерпретацию.

в) Найти коэффициент корреляции случайных величин X и Y. Сделать вывод о направлении связи изменений цен акций.

9.12 Изменения цен акций $X,\ Y$ имеют следующее совместное распределение.

X \ Y	-1	1	2
-1	0,4	0,0	0,0
1	0,0	0,0	0,4
2	0,0	0,2	0,0

а) Найти математические ожидания и стандартные отклонения изменений цен акций. Сделать вывод о том, какая из акций является более доходной; более рисковой.

б) Найти математические ожидания и стандартные отклонения случайных величин $X + Y,\ \max(X,\ Y),\ \min(X,\ Y)$. Дать экономическую интерпретацию.

в) Найти коэффициент корреляции случайных величин X и Y. Сделать вывод о направлении связи изменений цен акций.

9.13 Найти коэффициент корреляции $\rho(X,\ X+Y)$, где X и Y независимы, одинаково распределены и имеют конечный второй момент, применить полученную формулу для случая, когда X и Y имеют стандартное нормальное распределение.

9.14 Пусть с.в. X имеет равномерное на отрезке $[-1, 1]$ распределение. Найти коэффициент корреляции $\rho(X,\ X^2)$.

9.15 Случайная величина Z имеет равномерное распределение на отрезке $[0,\ 1]$. Найти коэффициент корреляции случайных величин $Y_1,\ Y_2$, если:

а) $Y_1 = aZ,\ \ Y_2 = bZ\ (a, b > 0);$

б) $Y_1 = aZ$, $Y_2 = bZ$ ($a < 0 < b$);

в) $Y_1 = Z$, $Y_2 = Z^2$.

9.16 Найти коэффициент корреляции между числом единиц и числом шестерок при трех бросаниях правильной игральной кости.

Глава 10

Предельные теоремы

Еще во введении, говоря о закономерностях случайных явлений, мы уточнили, что эти закономерности проявляются в результате проведения большого числа случайных экспериментов. Пример такой закономерности — устойчивость частоты события — можно наблюдать, проведя достаточно большое число реальных экспериментов, или воспользовавшись статистическими данными наблюдений того или иного случайного явления (демографические данные, метеорологические наблюдения и т.д.). Наиболее яркие результаты теории вероятностей, присущие именно этой науке, связаны с открытием фактов, наблюдаемых *только* при проведении большого числа случайных экспериментов. Такого рода результаты называют *предельными теоремами* теории вероятностей. Наиболее важными и известными предельными теоремами являются *закон больших чисел* (ЗБЧ) и *центральная предельная теорема* (ЦПТ).

§ 10.1. Закон больших чисел

В простейшем случае закон больших чисел заключается в следующем: *среднее арифметическое большого числа независимых, одинаково распределенных случайных величин ведет себя как величина неслучайная, равная математическому ожиданию.* Это означает, что среднее арифметическое $\dfrac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}{n}$ при $n\to\infty$ ведет себя весьма устойчиво, в то время как отдельные слагаемые $\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\xi_n$ могут испытывать значительные случайные отклонения. Иначе говоря, при $n\to\infty$ имеет место сходимость:

$$\frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}{n} \quad\to\quad a=\mathbf{E}\xi_1,$$

где смысл сходимости и дополнительные условия уточняются ниже в точных формулировках. Здесь же отметим, что ЗБЧ проявляется во многих реальных «случайных экспериментах»: среднее количество осадков, выпадающих в данной местности за год, вычисляемое по результатам многолетних наблюдений, оказывается величиной весьма стабильной; результат измерения физических величин вычисляется обыкновенно как среднее арифметическое достаточно большого числа реальных измерений, чтобы уменьшить влияние случайных ошибок, возникающих при отдельных измерениях, и др.

Пусть заданы последовательность случайных величин $Y_1,\ Y_2,\ \ldots$ и случайная величина Y.

Определение 10.1. Будем говорить, что последовательность случайных величин $Y_1,\ Y_2,\ \ldots$ *сходится с вероятностью 1* (или *сходится почти наверное*) к случайной величине Y, если $Y_n(\omega) \to Y(\omega)$ при $n \to \infty$ для всех $\omega \in \Omega$ за исключением, быть может, ω из множества нулевой вероятности.

Будем использовать обозначение для сходимости почти наверное:

$$Y_n \to Y \quad \text{п. н.}$$

Из определения следует, что $Y_n \to Y$ п. н. тогда и только тогда, когда $Y_n - Y \to 0$ п. н., что в свою очередь равносильно сходимости $|Y_n - Y| \to 0$ п. н.

Отметим, что если плотность распределения случайной величины X_1 положительна почти всюду на (конечном или бесконечном) интервале $(a;\ b)$, и $(X_1,\ \ldots,\ X_n)$ — выборка, то $\min\{X_i\} \to a$ п. н., и $\max\{X_i\} \to b$ п. н.

Важным свойством сходимости почти наверное является свойство сходимости функций от случайных величин.

Теорема 10.1. *Пусть $Y_n \to Y$ п. н., $g(x)$ — непрерывная функция. Тогда $g(Y_n) \to g(Y)$ п. н.*

Доказательство. По определению непрерывной функции, событие $Y_n \to Y$ влечет событие $g(Y_n) \to g(Y)$. Следовательно,

$$\mathbf{P}(g(Y_n) \to g(Y)) \geq \mathbf{P}(Y_n \to Y) = 1.$$

То же свойство имеет место и для функции произвольного числа переменных. Докажем его для случая двух переменных.

Теорема 10.2. *Пусть $Y_n \to Y$ п. н., $Z_n \to Z$ п. н., $g(x, y)$ — непрерывная функция двух переменных. Тогда $g(Y_n, Z_n) \to g(Y, Z)$ п. н.*

Доказательство. По определению непрерывной функции, пересечение событий $Y_n \to Y$, $Z_n \to Z$ влечет событие $g(Y_n, Z_n) \to g(Y, Z)$. Следовательно, $\mathbf{P}(g(Y_n, Z_n) \to g(Y, Z)) \geq \mathbf{P}(Y_n \to Y, Z_n \to Z)$. Так как $\mathbf{P}(Y_n \to Y) = 1$, $\mathbf{P}(Z_n \to Z) = 1$, то объединение этих множеств также имеет вероятность 1. Отсюда по формуле вероятности объединения получаем, что вероятность пересечения также равна 1. Следовательно, $\mathbf{P}(g(Y_n, Z_n) \to g(Y, Z)) = 1$.

Следующая важная теорема носит название *закона больших чисел Колмогорова.*

Теорема 10.3. *Пусть X_1, X_2, … — независимые одинаково распределенные случайные величины с конечным математическим ожиданием $\mathbf{E}X_1$. Обозначим $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Тогда $S_n/n \to \mathbf{E}X_1$ п. н.*

Доказательство этой теоремы можно найти, например, в [1].

§ 10.2. Центральная предельная теорема

Рассмотрим несколько результатов, которые объединяются под названием центральной предельной теоремы и занимают особое место в теории вероятностей. Упрощенно говоря, центральная предельная теорема (ЦПТ) формулируется так: *сумма большого числа малых независимых случайных величин приближенно имеет нормальное распределение.* Благодаря ЦПТ нормальное распределение имеет, пожалуй, наибольшее распространение в различных прикладных областях. Так, например, общепринято считать результат любого физического измерения нормально распределенной случайной величиной, поскольку в результат измерения неизбежно входит некоторая ошибка, которая состоит из большого числа мелких независимых ошибок, вызываемых различными факторами: неточность инструмента, меняющиеся параметры среды, условия измерения и т.д.

Сходимость центрированных и нормированных сумм случайных величин в центральной предельной теореме имеет место в некотором специальном смысле, более слабом, чем сходимость почти наверное.

Дадим определение сходимости по распределению. Последовательность случайных величин Y_1, Y_2, … называется *сходящейся по распределению* к случайной величине Y с непрерывной функцией распределения

$F_Y(t)$, если последовательность функций распределения сходится к предельной функции распределения в каждой точке: для любого действительного t выполнено
$$F_{Y_n}(t) \to F_Y(t)$$
при $n \to \infty$.

Рассмотрим последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ и обозначим через $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ последовательность частичных сумм, составленных из первых n случайных величин X_k. Относительно распределений случайных величин X_k будем предполагать, что они имеют два конечных момента: $\mathbf{E}X_k = a$, $\mathbf{D}X_k = \sigma^2 > 0$, $k = 1, 2, \ldots$. Тогда и суммы S_n имеют конечные математическое ожидание и дисперсию:
$$\mathbf{E}S_n = na, \qquad \mathbf{D}S_n = n\sigma^2.$$
Перейдем к последовательности центрированных и нормированных сумм:
$$\widetilde{S_n} = \frac{S_n - \mathbf{E}S_n}{\sqrt{\mathbf{D}S_n}} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k - na}{\sigma\sqrt{n}}.$$

Очевидно, $\mathbf{E}\widetilde{S_n} = 0$, $\mathbf{D}\widetilde{S_n} = 1$. Обозначим также через $\widetilde{F_n}(x) = \mathbf{P}(\widetilde{S_n} < x)$ функции распределения центрированных и нормированных сумм $\widetilde{S_n}$, а через $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du$ — функцию распределения стандартного нормального закона $N(0, 1)$.

Теорема 10.4. (*ЦПТ для одинаково распределенных слагаемых.*) *Пусть $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность независимых и одинаково распределенных случайных величин, имеющих конечные математическое ожидание $\mathbf{E}X_n = a$ и дисперсию $\mathbf{D}X_n = \sigma^2 > 0$. Тогда для этой последовательности центральная предельная теорема выполняется в следующем виде: для всех $x \in \mathbf{R}$ выполнено*
$$\widetilde{F_n}(x) = \mathbf{P}\left(\frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) \ \to \ \Phi(x), \quad n \to \infty, \tag{10.1}$$
или для всех $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ $(x_1 < x_2)$ *выполнено*
$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(x_1 \leq \frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}} < x_2\right) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \quad n \to \infty, \tag{10.2}$$

то есть центрированные и нормированные суммы случайных величин сходятся по распределению к случайной величине, имеющей стандартное нормальное распределение.

Важным следствием теоремы 10.4 является следующая

Теорема 10.5. *(Муавра — Лапласа). Пусть* ν *— число «успехов» в* n *независимых испытаниях схемы Бернулли, и* p *— вероятность «успеха» в каждом испытании. Тогда справедливы следующие равносильные предельные соотношения:*

$$\mathbf{P}\left(\frac{\nu - np}{\sqrt{npq}} < x\right) \to \Phi(x), \quad n \to \infty, \tag{10.3}$$

$$\mathbf{P}\left(x_1 \le \frac{\nu - np}{\sqrt{npq}} < x_2\right) \to \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \quad n \to \infty, \tag{10.4}$$

где

$$q = 1 - p\,; \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Доказательство. Поскольку случайная величина ν есть число «успехов» в n независимых испытаниях Бернулли, то ее можно представить в виде суммы независимых случайных величин:

$$\nu = S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n,$$

где случайная величина X_k равна числу «успехов» в одном k-м испытании Бернулли ($k = 1, 2, \ldots, n$), т. е. она принимает значения 1 или 0 в зависимости от того, был ли «успех» в k-м испытании. Ясно, что все X_k имеют одно и то же распределение Бернулли $B(p)$. Если вспомнить, что их математическое ожидание и дисперсия равны $\mathbf{E}X_k = a = p$ и $\mathbf{D}X_k = \sigma^2 = pq$ соответственно, то все условия теоремы 10.4 выполнены, а доказываемые соотношения (10.3)–(10.4) получаются подстановкой новых обозначений в соотношения (10.1)–(10.2) из теоремы 10.4.

В заключение сформулируем без доказательства центральную предельную теорему для случайных величин, не обязательно имеющих одинаковое распределение ([13]).

Теорема 10.6. *(ЦПТ Ляпунова для разнораспределенных слагаемых). Пусть* $X_1, X_2, ..., X_n$ *— независимые случайнык величины, которые имеют конечные моменты третьего порядка. Обозначим*

$$\mathbf{E}X_k = a_k, \quad \mathbf{D}X_k = \sigma_k^2, \quad B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2, \quad \mathbf{E}|X_k - a_k|^3 = c_k^3, \quad C_n^3 = \sum_{k=1}^{n} c_k^3.$$

Пусть выполнено следующее условие Ляпунова:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{C_n^3}{B_n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{C_n}{B_n}=0. \tag{10.5}$$

Тогда выполняется центральная предельная теорема в виде соотношений (??)-(??).

§ 10.3. Теорема Пуассона

Теорема Пуассона дает другое приближение в схеме Бернулли. Напомним, что *распределением Пуассона* с параметром $\lambda > 0$ называется дискретное распределение вида

$$\mathbf{P}\{X=k\}=\pi_k=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!};\quad k=0,1,\dots\ .$$

Условия сближения биномиального распределения с распределением Пуассона, упрощенно говоря, состоят в том, что число n испытаний велико, а вероятность p «успеха» в каждом испытании мала. Более точная формулировка содержится в следующей теореме.

Теорема 10.7. *(Пуассон). Пусть n — число испытаний в схеме Бернулли — неограниченно возрастает, а вероятность «успеха» — одна и та же для всех испытаний — зависит от n : $p=p(n)$; причем $p=p(n)\to 0$ таким образом, что $np\to\lambda>0$ при $n\to\infty$. Тогда для любого фиксированного целого $k\geq 0$ выполняется предельное соотношение:*

$$P_{n,p}\left(k\right)\to\pi_k,\quad n\to\infty, \tag{10.6}$$

где

$$P_{n,p}\left(k\right)=C_n^kp^kq^{n-k};\quad \pi_k=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Доказательство. Будем использовать следующее стандартное для математического анализа обозначение эквивалентных переменных:

$$\alpha_n\sim\beta_n\quad\Leftrightarrow\quad\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{\beta_n}=1\quad\Leftrightarrow\alpha_n=\beta_n+o(\beta_n).$$

Из условий доказываемой теоремы следует, что $p\sim\dfrac{\lambda}{n}$, $q=1-p\ \to\ 1$ при $n\to\infty$. Докажем соотношение (10.6) сначала для $k=0$:

$$\lim_{n\to\infty}P_{n,p}\left(0\right)=\lim_{n\to\infty}C_n^0p^0q^n=\lim_{n\to\infty}q^n=\lim_{n\to\infty}(1-p)^n=\lim_{n\to\infty}[(1-p)^{\frac{1}{p}}]^{pn}=$$

$$= \lim_{n\to\infty} [(1-p)^{\frac{1}{p}}]^{(\frac{\lambda}{n}+o(\frac{\lambda}{n}))\cdot n} = e^{-\lambda}.$$

Последнее равенство следует из того, что основание степени $(1 - p)^{1/p} \to e^{-1}$, а показатель $(\frac{\lambda}{n} + o(\frac{\lambda}{n})) \cdot n = \lambda + o(\frac{\lambda}{n}) \cdot n \to \lambda$. Таким образом,

$$P_{n,p}(0) \to e^{-\lambda} = \pi_0, \quad n \to \infty. \tag{10.7}$$

Найдем теперь предел отношения

$$\frac{P_{n,p}(k)}{P_{n,p}(k-1)} = \frac{p \cdot (n-k+1)}{k \cdot q},$$

используя его представление, полученное при доказательстве теоремы **??**. При этом, поскольку $n \to \infty$, а $k \geq 1$ фиксировано, можно считать, что $k \leq n$. Будем также использовать тот факт, что предел не меняется, если любой сомножитель в «допредельном» выражении заменить на эквивалентный.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_{n,p}(k)}{P_{n,p}(k-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{p \cdot (n-k+1)}{k \cdot q} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\lambda}{n} \cdot (n-k+1)}{k \cdot 1} = \frac{\lambda}{k}.$$

Таким образом,

$$\frac{P_{n,p}(k)}{P_{n,p}(k-1)} \to \frac{\lambda}{k}, \quad n \to \infty. \tag{10.8}$$

Наконец, для любого целого $k \geq 1$ представим вероятность $P_{n,p}(k)$ в виде

$$P_{n,p}(k) = P_{n,p}(0) \cdot \frac{P_{n,p}(1)}{P_{n,p}(0)} \cdot \frac{P_{n,p}(2)}{P_{n,p}(1)} \cdots \frac{P_{n,p}(k)}{P_{n,p}(k-1)}.$$

Заменяя в правой части этого представления каждый сомножитель его пределом из (10.7) и (10.8), найдем предел произведения

$$\lim_{n\to\infty} P_{n,p}(k) = \lim_{n\to\infty} P_{n,p}(0) \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{P_{n,p}(1)}{P_{n,p}(0)} \cdots \lim_{n\to\infty} \frac{P_{n,p}(k)}{P_{n,p}(k-1)} =$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda}{1} \cdot \frac{\lambda}{2} \cdot \cdots \cdot \frac{\lambda}{k} = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = \pi_k.$$

Пример 10.1. *Известно, что левши составляют в среднем 1% всего населения. Оценить вероятность того, что по меньшей мере трое левшей окажется среди 200 человек.*

Решение. Естественно использовать схему Бернулли с параметрами $n = 200$; $p = 0,01$. Обозначим через ν число левшей, оказавшихся в данной группе (число «успехов» в n независимых испытаниях). Тогда точное значение искомой вероятности выражается с помощью формул Бернулли:

$$\mathbf{P}(\nu \geq 3) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=3}^{200}(\nu = k)\right) = \sum_{k=3}^{200}\mathbf{P}(\nu = k) = \sum_{k=3}^{200} C_{200}^{k} p^k q^{200-k}.$$

При подстановке значений $p = 0,01$; $q = 0,99$ получим выражение, весьма трудоемкое для вычислений. Впрочем, перейдя к противоположному событию, мы значительно уменьшим число слагаемых в сумме. Кроме того, заменив вероятности биномиального распределения $C_n^k p^k q^{n-k} = P_{n,p}(k)$ вероятностями $e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = \pi_k$ распределения Пуассона, мы получим более простое приближенное значение искомой вероятности:

$$\mathbf{P}(\nu \geq 3) = 1 - \mathbf{P}(\nu < 3) = 1 - \sum_{k=0}^{2}\mathbf{P}(\nu = k) \approx 1 - \pi_0 - \pi_1 - \pi_2.$$

Значения вероятностей $\pi_k = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$ при $\lambda = np = 2$ найдем по таблицам распределения Пуассона (см. приложение, табл. 1 или табл. 2). Тогда

$$\mathbf{P}(\nu \geq 3) \approx 1 - 0,68 = 0,32.$$

Замечание 10.1. *В теореме 10.7 устанавливается лишь сам факт приближенного равенства $P_{n,p}(k) \approx \pi_k$ при больших значениях n. Однако для практического использования этого приближения необходимо знать оценку допускаемой погрешности. Если, применяя указанное приближенное равенство, мы допускаем ошибку, сравнимую с результатом вычисления, то использование приближенного равенства теряет смысл. Мы увидим позже, что в предыдущем примере ошибка приближения Пуассона не превышает 0,02.*

В формулируемой ниже теореме устанавливается не только возможность замены биномиального распределения распределением Пуассона, но и дается оценка погрешности, возникающей при такой замене. Доказательство этой теоремы выходит за рамки элементарного курса теории вероятностей, поэтому мы ограничимся только ее формулировкой.

Теорема 10.8. *Пусть ν — число «успехов» в n независимых испытаниях схемы Бернулли, а p — вероятность «успеха» в каждом испытании.*

Тогда для любого числового множества $A \subseteq R$ справедливо неравенство

$$|\mathbf{P}(\nu \in A) - \sum_{k \in A} \pi_k| = |\sum_{k \in A} P_{n,p}(k) - \sum_{k \in A} \pi_k| \leq \min(p;\ np^2), \tag{10.9}$$

где

$$\lambda = np\,; \quad P_{n,p}\,(k) = C_n^k p^k q^{n-k}\,; \quad \pi_k = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Возвращаясь к примеру 10.2, полученный при его решении ответ можно представить в виде

$$\mathbf{P}(\nu \geq 3) = 0,32 + \Delta,$$

где погрешность Δ оценивается с помощью теоремы 10.8:

$$|\Delta| \leq \min(p,\ np^2) = \min(0,01,\ 0,02) = 0,01.$$

Если в условиях примера 10.2 положить $p = 0,5$, то для погрешности Δ можно гарантировать лишь следующую границу:

$$|\Delta| \leq \min(p,\ np^2) = \min(0,5,\ 50) = 0,5.$$

Таким образом, использование приближения Пуассона при $p = 0,5$ недопустимо.

Пример 10.2. *Проектируется телефонная станция на 300 номеров. Предполагается, что каждый из пользователей, независимо от других, пользуется телефонной связью в среднем одну минуту в час. Каким должно быть минимальное число каналов связи, чтобы с вероятностью, не меньшей 90 %, любой вызов не получил бы отказа.*

Решение. Будем рассматривать действия каждого из $n = 300$ абонентов в течение некоторого короткого промежутка времени как независимые испытания, а «успехом» будем считать то, что абонент воспользовался телефонной связью. Вероятность «успеха» по условию равна $p = 1/60$. Обозначим через ν число абонентов, воспользовавшихся телефонной связью за рассматриваемый промежуток времени, т. е. ν — число «успехов» в n независимых испытаниях схемы Бернулли. Тогда вопрос задачи сводится к нахождению минимального натурального числа n_0, удовлетворяющего неравенству:

$$\mathbf{P}(\nu \leq n_0) \geq 0,9. \tag{10.10}$$

Чтобы найти такое n_0, выразим левую часть этого неравенства через n_0 и исходные данные задачи, используя приближение Пуассона:

$$\mathbf{P}(\nu \le n_0) = \sum_{k=0}^{n_0} P_{n,p}(k) = \sum_{k=0}^{n_0} \pi_k + \Delta. \tag{10.11}$$

В нашем случае $\lambda = np = 300 \cdot \dfrac{1}{60} = 5$, а погрешность используемого приближения Пуассона оценивается неравенством: $|\Delta| \le \min(2p,\ np^2) = \min(1/30,\ 1/12) = 0,033$. Для выполнения неравенства (10.10) необходимо потребовать, чтобы сумма в правой части (10.11) удовлетворяла неравенству

$$\sum_{k=0}^{n_0} \pi_k \ge 0,933,$$

страхуясь от возможной ошибки Δ. Обратившись к табл. 2 приложения, при $\lambda = 5$ видим, что сумма

$$\sum_{k=0}^{n_0} \pi_k \ = \ \sum_{k=0}^{n_0} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

впервые превышает значение 0,933 при $n_0 = 9$. Стало быть, искомое минимальное число каналов связи равно $n_0 = 9$.

§ 10.4. Решение типовых примеров

Пример 10.3. *Театр, вмещающий 1000 человек, имеет два разных входа. Около каждого входа имеется свой гардероб. Сколько мест должно быть в каждом гардеробе для того, чтобы в среднем в 99 случаях из 100 все зрители могли раздеться в гардеробе того входа, через который они вошли. Предполагается, что зрители приходят: а) парами независимо одна пара от другой; б) поодиночке независимо друг от друга.*

Доказательство. Приведем решение в условиях б), оставив пункт а) читателю в качестве упражнения. Предположим, что оба входа равноправны в том смысле, что всякий зритель выбирает любой из них с вероятностью 0,5. Выберем какой-нибудь один вход, для которого подсчитаем требуемое число мест в гардеробе. Будем считать «успехом» то, что очередной пришедший зритель выбрал данный вход. Тогда, если ν есть число «успехов» в $n = 1000$ независимых испытаниях, то ν означает число зрителей, пришедших в театр через данный вход. Вопрос задачи к тому, чтобы найти наименьшее натуральное число K, удовлетворяющее неравенству:

$$\mathbf{P}(\nu \leq K) \geq 0,99 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{P}(\nu > K) \leq 0,01.$$

Поскольку с.в. ν принимает лишь целочисленные значения, то $\mathbf{P}(\nu \leq K) = \mathbf{P}(\nu < K+1)$. Применим к последней вероятности теорему Муавра — Лапласа:

$$\mathbf{P}(\nu < K+1) = \mathbf{P}\left(\frac{\nu - np}{\sqrt{npq}} < \frac{K+1-np}{\sqrt{npq}}\right) \to \Phi(x),$$

где

$$x = \frac{K+1-np}{\sqrt{npq}} = \frac{K+1-1000 \cdot 0,5}{\sqrt{1000 \cdot 0,5 \cdot 0,5}} = \frac{K-499}{5\sqrt{10}}.$$

По таблицам функции нормального распределения $\Phi(x)$ находим такое x, для которого $\Phi(x) = 0,99$, и по этому значению x найдем соответствующее K:

$$x = 2,33 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{K-499}{5\sqrt{10}} = 2,33 \quad \Leftrightarrow \quad K = 499 + 5\sqrt{10} \cdot 2,33 \approx 535,84.$$

Поскольку K целое число, то следует взять $K = 536$.

Замечание 10.2. *В приведенном решении мы воспользовались тем, что с.в. ν, согласно теореме Муавра — Лапласа, имеет приближенно нормальное распределение. Однако биномиальное распределение $B(n,p)$, которое имеет с.в. ν, может быть приближено распределением Пуассона $\Pi(\lambda)$, где $\lambda = np$, причем возможная ошибка при этом приближении не превосходит величины $\Delta = \min(np^2,\ p)$, которая в условиях нашего примера равна*

$$\Delta = \min(1000 \cdot 0,5^2,\ 0,5) = \min(250;\ 0,5) = 0,5.$$

Ясно, что вычислять вероятность с такой ошибкой не имеет смысла, поэтому приближение Пуассона в данном случае неприменимо.

Хотелось бы также иметь возможность оценивать ошибку, возникающую при использовании нормального приближения биномиального распределения. В некоторой степени эту возможность предоставляет следующий результат, который мы приводим из [13] без доказательства.

Теорема 10.9. *(Берри — Ессен). Пусть* $X_1, X_2, ..., X_n$ *— независимые случайные величины, имеющие одинаковое распределение. Пусть также* $\mathbf{E}X_1 = 0,\ \mathbf{E}X_1^2 = o^2 > 0,\ \mathbf{E}|X_1|^3 < \infty,\ \rho = \dfrac{\mathbf{E}|X_1|^3}{\sigma^3}$*. Тогда выполняется следующее* неравенство Берри — Ессена*:*

$$\sup_x \left| \mathbf{P}\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} X_k < x \right) - \Phi(x) \right| \leq A \frac{\rho}{\sqrt{n}}, \qquad (10.12)$$

где $\Phi(x)$ *— функция распределения стандартного нормального закона.*

Следствие 10.1. *Ошибка, возникающая при использовании теоремы Муавра — Лапласа, оценивается следующим неравенством:*

$$\Delta = \sup_x \left| \mathbf{P}\left(\frac{\nu - np}{\sqrt{npq}} < x \right) - \Phi(x) \right| \leq A \frac{p^2 + q^2}{\sqrt{npq}}. \qquad (10.13)$$

Известно, что в качестве константы A можно взять 0,4. Итак, при применении предельных теорем к схеме Бернулли будем действлвать следующим образом: вычислим максимально возможные погрешности в теоремах Муавра—Лапласа и Пуассона и сравним их. Если

$$0,4 \frac{p^2 + q^2}{\sqrt{np(1-p)}} \geq \min(np^2,\ p),$$

то будем использовать теорему Пуассона. В противном случае будем использовать теорему Муавра—Лапласа.

Возвращаясь к примеру 10.3, вычислим оценку возможной ошибки при использовании нормального приближения (теоремы Муавра — Лапласа):

$$\Delta \leq 0,4 \frac{p^2 + q^2}{\sqrt{npq}} = 0,4 \frac{0,5^2 + 0,5^2}{\sqrt{1000 \cdot 0,5^2}} = \frac{0,4}{10\sqrt{10}} \approx 0,013.$$

Как видим, возможная ошибка приемлема для использования данного приближения. Однако, если уж быть совсем скрупулезными, следует заметить, что полученный при решении примера ответ $K = 536$ обеспечивает оговоренное в примере условие (чтобы все зрители могли раздеться в гардеробе того входа, через который они вошли) не с вероятностью 0,99, а лишь с вероятностью $0,99 - \Delta = 0,977$.

Пример 10.4. *Урожайность куста картофеля равна 0 кг с вероятностью 0,1; 1 кг с вероятностью 0,2; 1,5 кг с вероятностью 0,2; 2 кг с*

вероятностью 0,3; 2,5 кг с вероятностью 0,2. На участке посажено 900 кустов.
а) В каких пределах с вероятностью 0,95 будет находиться урожай?
б) Какое наименьшее количество кустов надо посадить, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,975 , урожай был не менее тонны?

Решение. Обозначим ξ_k - урожайность k-го куста. Тогда $S_n = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n$ - урожай, полученный с n кустов. Используя данное в условии задачи распределение с.в. ξ_k , найдем ее моменты:

$$\mathbf{E}\xi_k = 0 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,2 + 1,5 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,3 + 2,5 \cdot 0,2 = 1,6;$$

$$\mathbf{D}\xi_k = \mathbf{E}\xi_k^2 - (\mathbf{E}\xi_k)^2 = 1 \cdot 0,2 + 1,5^2 \cdot 0,2 + 2^2 \cdot 0,3 + 2,5^2 \cdot 0,2 - 1,6^2 = 0,54.$$

а) Нужно найти $x_1 < x_2$, такие,что $\mathbf{P}(x_1 \le S_n \le x_2) = 0,95$ при $n = 900$. Такая задача, однако, не решается однозначно (два неизвестных при одном уравнении). Поэтому, в качестве границ, между которыми окажется значение S_n, обычно выбирают границы промежутка, симметричного относительно математического ожидания $\mathbf{E}S_n$. Таким образом, нужно найти такое $l > 0$, для которого

$$\mathbf{P}(\mathbf{E}S_n - l \le S_n \le \mathbf{E}S_n + l) = 0,95.$$

Преобразуем левую часть этого уравнения к виду, удобному для применения теоремы **??**.

$$\mathbf{P}(\mathbf{E}S_n - l \le S_n \le \mathbf{E}S_n + l) = \mathbf{P}\left(-l \le S_n - na \le l\right) =$$

$$= \mathbf{P}\left(-\frac{l}{\sigma\sqrt{n}} \le \frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}} \le \frac{l}{\sigma\sqrt{n}}\right) \approx \Phi\left(\frac{l}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(-\frac{l}{\sigma\sqrt{n}}\right), \qquad (10.14)$$

где $a = \mathbf{E}\xi_k = 1,6$; $\sigma = \sqrt{\mathbf{D}\xi_k} = \sqrt{0,54}$. В силу (10.14), будем искать такое $x = \frac{l}{\sigma\sqrt{n}}$, для которого (см. (10.14))

$$\Phi(x) - \Phi(-x) = 2\Phi(x) - 1 = 0,95 \iff \Phi(x) = 0,975,$$

а затем найдем l. Для этого воспользуемся таблицей значений функции распределения стандартного нормального закона $\Phi(x)$ (Таблица 3, с.158-159), откуда найдем $x = 1,96$, при котором $\Phi(x) = 0,975$. Тогда

$$l = x\sigma\sqrt{n} = 1,96 \cdot \sqrt{0,54 \cdot 900} \approx 43,2.$$

Учитывая значение $\mathbf{E}S_n = na = 900 \cdot 1,6 = 1440$, из (10.14) окончательно получаем:

$$\mathbf{P}(1440 - 43 \le S_n \le 1440 + 43) = \mathbf{P}(1397 \le S_n \le 1483) \approx 0,95.$$

б) В данном случае неизвестно n, и его нужно найти из условия:

$$\mathbf{P}(S_n \geq 1000) \geq 0,975.$$

Эквивалентными преобразованиями приведем левую часть этого неравенства к виду, удобному для применения Теоремы **??** (см. (**??**)):

$$\mathbf{P}(S_n \geq 1000) = \mathbf{P}\left(\frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}} \geq \frac{1000 - na}{\sigma\sqrt{n}}\right) =$$

$$= 1 - \mathbf{P}\left(\frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}} < \frac{1000 - na}{\sigma\sqrt{n}}\right) \approx 1 - \Phi(x), \quad x = \frac{1000 - na}{\sigma\sqrt{n}}.$$

Будем искать x, при котором $1 - \Phi(x) \geq 0,975$ или (см. (**??**)) $\Phi(-x) \geq 0,975$. Обратившись к таблице значений $\Phi(x)$, находим, что

$$\Phi(-x) \geq 0,975 \iff -x \geq 1,96 \iff -\frac{1000 - na}{\sigma\sqrt{n}} \geq 1,96 \iff$$

$$\iff na - 1000 \geq 1,96\sigma\sqrt{n} \iff na - 1,96\sigma\sqrt{n} - 1000 \geq 0.$$

Учитывая, что $a > 0$, решаем последнее квадратное неравенство относительно $\sqrt{n} > 0$:

$$\sqrt{n} \geq \frac{1,96\,\sigma + \sqrt{1,96^2\sigma^2 + 4000a}}{2a} \iff n \geq \left(\frac{1,96\,\sigma + \sqrt{1,96^2\sigma^2 + 4000a}}{2a}\right)^2.$$

Подставляя в последнее неравенство значения $a = 1,6$ и $\sigma = \sqrt{0,54}$, находим окончательно $n \geq 648$. $\triangledown$

§ 10.5. Задачи для самостоятельного решения

10.1 Математическое ожидание количества выпадающих осадков в течение года в данной местности составляет 60 см. Оценить вероятность того, что количество осадков в предстоящем году будет не больше 120 см, если известно стандартное отклонение — 20см.

Оценить вероятность того, что выпадет не менее 180 см осадков в условиях, описанных выше.

10.2 Среднесуточное потребление электроэнергии в населенном пункте равно 20000 кВт-ч. Какого потребления электроэнергии в этом населенном пункте можно ожидать в ближайшие сутки с вероятностью, не меньшей 0,96, если известно среднеквадратическое отклонение суточного потребления энергии, равное 200 кВт-ч?

10.3 Для лица, дожившего до 20-летнего возраста, вероятность смерти на 21-м году жизни равна 0,006. Застрахована группа в 10000 человек 20-летнего возраста, причем каждый застрахованный внес 120 рублей страховых взносов за год. В случае смерти застрахованного страховое учреждение выплачивает наследникам 10000 рублей. Каковы вероятности, что:
а) к концу года страховое учреждение окажется в убытке;
б) его доход превысит 600000 рублей; 400000 рублей?

Какой минимальный страховой взнос следует учредить, чтобы в тех же условиях с вероятностью 0.95 доход был не менее 4000000 рублей?

10.4 Студент получает на экзамене 5 с вероятностью 0,2; 4 с вероятностью 0,4; 3 с вероятностью 0,3 и 2 с вероятностью 0,1. За время обучения он сдает 40 экзаменов. Найти пределы, в которых с вероятностью 0,95 лежит средний балл студента.

10.5 Известно, что вероятность рождения мальчика приблизительно равна 0.515. Какова вероятность того, что среди 10 тыс. новорожденных окажется мальчиков не больше, чем девочек?

10.6 Известно, что вероятность выпуска сверла повышенной хрупкости (брак) равна 0.02. Сверла укладываются в коробки по 100 шт. Чему равна вероятность того, что в коробке не окажется бракованных сверл? Какое наименьшее количество сверл нужно класть в коробку для того, чтобы с вероятностью, не меньшей 0.9, в ней было не менее 100 исправных?

10.7 Вероятность выхода из строя за время T одного конденсатора равна 0.05. Определить вероятность того, что за время T из 100 конденсаторов выйдут из строя а) не менее 5 конденсаторов; б) менее 13 конденсаторов.

10.8 Вероятность угадывания 6 номеров в спортлото (6 из 49) равна $7,2 \cdot 10^{-8}$. При подсчете оказались заполненными 5 млн. карточек. Какова вероятность, что никто не угадал все 6 номеров? Какое наименьшее количество карточек нужно заполнить, чтобы с вероятностью не менее 0,9 хотя бы один угадал 6 номеров?

10.9 1000 раз бросается игральная кость. Найти пределы, в которых с вероятностью, большей 0.95, будет лежать сумма выпавших очков.

10.10 Некоторая машина состоит из 10 тыс. деталей. Каждая деталь независимо от других деталей может оказаться неисправной с вероятностью p_i, причем для $n_1 = 1000$ деталей $p_1 = 0.0003$, для $n_2 = 2000$ деталей $p_2 = 0.0002$, и для $n_3 = 7000$ деталей $p_3 = 0.0001$. Машина не работает, если в ней неисправны хотя бы две детали. Найти вероятность того, что машина не будет работать.

10.11 Игральная кость подбрасывается до тех пор, пока общая сумма очков не превысит 700. Оценить вероятность того, что для этого потребуется более 210 бросаний.

Глава 11

Выборка. Оценивание параметров

§ 11.1. Выборка и вариационный ряд

В математической статистике рассматривается ситуация, когда распределение наблюдаемой в случайном эксперименте величины X неизвестно (хотя бы частично), зато исследователь располагает результатами эксперимента (статистическими данными), по которым он должен сделать выводы о неизвестном распределении случайной величины X. К этому стоит добавить, что задачей математической статистики является использовать результаты эксперимента по возможности оптимальным образом.

Основным объектом исследования в математической статистике является **выборка** $\vec{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$, то есть набор значений случайной величины X, полученных в результате n независимых воспроизведений эксперимента. Иначе говоря, выборка представляет собой случайный вектор, координаты которого — **элементы выборки** $X_1, X_2, ..., X_n$ — независимые случайные величины, имеющие общее распределение с функцией распределения $F(t)$. Будем говорить в этом случае, что имеется **случайная выборка** $\vec{X}$ из распределения F, и обозначать сокращенно: $\vec{X} \Subset F$. Число n называется **объемом выборки**. Конкретный набор числовых значений случайных величин $X_1, X_2, ..., X_n$, полученный в результате эксперимента, будем называть **реализацией** выборки и обозначать $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Если элементы выборки $X_1, \ldots, X_n$ упорядочить по возрастанию, то получится новый набор случайных величин, называемый **вариационным рядом**:

$$X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \ldots \leq X_{(n-1)} \leq X_{(n)}.$$

Случайная величина $X_{(k)},\ k = 1, \ldots, n$ называется **k-м членом вариационного ряда**, или **k-й порядковой статистикой**. В частности, $X_{(1)} = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$, $X_{(n)} = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$.

§ 11.2. Эмпирическая функция распределения, гистограмма

Эмпирической функцией распределения $F_n^*(t)$ называется частота элементов выброрки, меньших заданного t. Эмпирическая функция распределения, соответствующая выборке $\vec{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$, может быть построена по этой выборке с помощью любой из следующих формул:

$$F_n^*(t) = \frac{\{\text{количество } X_i : X_i < t\}}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{I}(X_i < t), \qquad (11.1)$$

где функция

$$\mathbf{I}(X_i < t) = \begin{cases} 1, & \text{если } X_i < t, \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

— индикатор события $\{X_i < t\}$.

Заметим, что эмпирическая функция распределения, соответствующая случайной выборке $\vec{X}$, сама является случайной, поскольку определяется через элементы выборки $X_1, X_2, ..., X_n$, являющиеся случайными величинами. В то же время любая реализация $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ выборки $\vec{X}$ порождает соответствующую реализацию эмпирической функции распределения (по той же формуле (11.1)), которая является обычной (а не случайной) функцией распределения.

С помощью вариационного ряда (или его реализации) эмпирическая функция распределения может быть построена графически (см. Часть 1, Занятие 8) :

Эмпирическая функция распределения $F_n^*(t)$ является выборочным аналогом неизвестной теоретической функции распределения $F(t)$, ее называют также **оценкой** для $F(x)$. Выборочным аналогом для теоретической плотности распределения $f(t)$ является **гистограмма**, или **эмпирическая плотность распределения**, которая строится по выборке $\vec{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$ следующим образом.

Пусть $h > 0$ — произвольное число. Разобьем область значений изучаемой случайной величины (например, всю числовую ось) на промежутки $\Delta_k = [z_{k-1}, z_k)$ длины h и построим ступенчатую функцию $f_n^*(t)$, которая

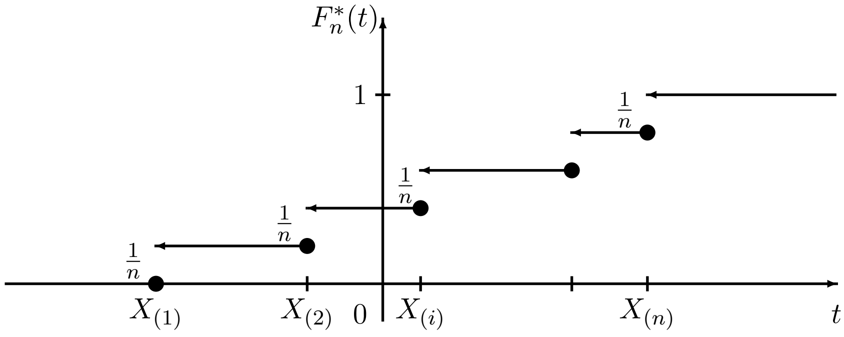


Рис. 11.1: Эмпирическая функция распределения $F_n^*(t)$

на каждом промежутке Δ_k принимает постоянное значение, вычисляемое по любой из формул:

$$f_n^*(t) = \frac{\{\text{количество } X_i : X_i \in \Delta_k\}}{nh} = \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{I}(X_i \in \Delta_k) = \frac{\nu_k}{nh},\ t \in \Delta_k, \tag{11.2}$$

где ν_k - число элементов выборки, попавших в промежуток Δ_k. Так построенная функция называется гистограммой с шагом h и имеет следующий график (см. рис. 11.2):

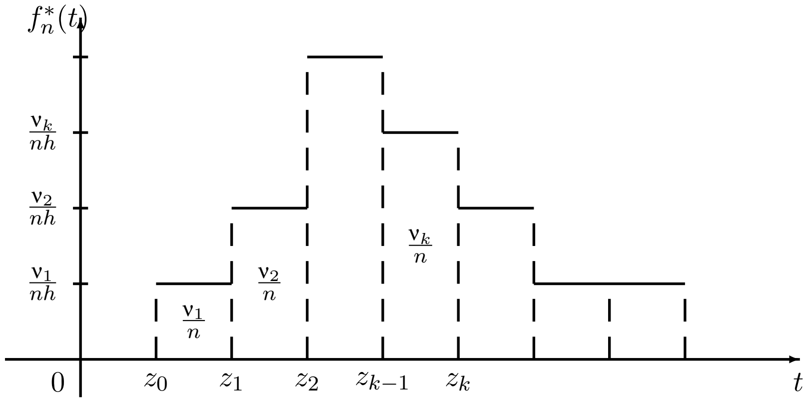


Рис. 11.2: Гистограмма $f_n^*(t)$

Заметим, что площадь каждого прямоугольника гистограммы равна $\frac{\nu_k}{n}$, то есть частоте попадания в соответствующий интервал Δ_k.

Иногда шаг гистограммы h выбирают следующим образом. Сначала расчитывают число интервалов K по *формуле Стеджеса*

$$K = [\log_2 n] + 1. \tag{11.3}$$

Здесь n — объем выборки, $[\cdot]$ — целая часть числа. Потом длина интервала расчитывается по формуле

$$h = \frac{X_{(n)} - X_{(1)}}{K}.$$

При построении гистограммы последний промежуток выбирается замкнутым: $\Delta_K = [z_{K-1};\ z_K]$. Величину $X_{(n)} - X_{(1)} = \max\{X_i\} - \min\{X_i\}$ называют размахом выборки.

В некоторых случаях более точной оценкой для плотности, то есть оценкой, более точно аппроксимирующей неизвестную плотность распределения, является **полигон частот**. Это кусочно-линейная ломаная, которая строится из гистограммы путем последовательного соединения отрезками прямых середин верхних оснований прямоугольников, составляющих гистограмму (см. рис. 11.5).

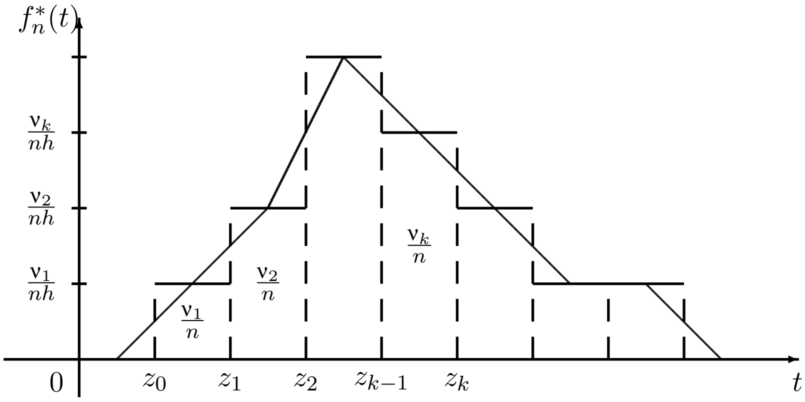


Рис. 11.3: Гистограмма и полигон частот.

§ 11.3. Выборочные моменты

По выборке $\vec{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$ можно построить эмпирические (выборочные) аналоги числовых характеристик распределения. Наиболее употребительными являются выборочное математическое ожидание, или **выборочное среднее**, $\overline{X}$, и **выборочная дисперсия** S^2:

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2. \tag{11.4}$$

Подобно выборочным среднему и дисперсии определяются выборочные моменты порядка k

$$\overline{X^k} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k,$$

которые являются эмпирическими аналогами моментов $\alpha_k = \mathbf{E}X_i^k$.

Пример 11.1. *Предполагая известными соответствующие теоретические моменты, доказать, что* $\mathbf{E}\overline{X^k} = \alpha_k$.

Приведенное соотношение означает, что математические ожидания эмпирических моментов совпадают с соответствующими теоретическими моментами. Это свойство называется **несмещенностью**: говорят, что эмпирические моменты являются **несмещенными оценками** для соответствующих теоретических.

Решение. сразу следует из свойств математического ожидания:

$$\mathbf{E}\overline{X^k} = \mathbf{E}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}X_i^k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_k = \frac{1}{n}\cdot n\alpha_k = \alpha_k.$$

В то же время центральные эмпирические моменты являются смещенными оценками для своих теоретических аналогов.

Отметим, что выборочная дисперсия вычисляется аналогично дисперсии:

Следствие 11.1. $S^2 = \overline{X^2} - (\overline{X})^2$.

Доказательство.
Раскроем скобки в определении S^2:

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {X_i}^2 - 2\frac{\overline{X}}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\overline{X})^2 = \overline{X^2} - 2(\overline{X})^2 + (\overline{X})^2 = \overline{X^2} - (\overline{X})^2.$$

Вычислим математическое ожидание статистики S^2:

$$\mathbf{E}S^2 = \mathbf{E}\overline{X^2} - \mathbf{E}\overline{X}^2 = \mathbf{E}\overline{X^2} - (\mathbf{E}\overline{X})^2 - \mathbf{D}\overline{X} = \frac{n-1}{n}\mathbf{D}X_1.$$

Итак, эта оценка является асимптотически несмещенной.

Для того, чтобы получить несмещенную оценку дисперсии, делят S^2 на $\frac{n-1}{n}$.

Несмещенная выборочная дисперсия — статистика ${S_0}^2 = \frac{n}{n-1}S^2$. Для нее выполнено свойство $\mathbf{E}{S_0}^2 = \mathbf{D}X_1$.

§ 11.4. Статистики и оценки

Задача оценивания параметров возникает в ситуации, когда распределение F не является полностью неизвестным, а известен его математический вид $F = F(t, \theta)$, содержащий неизвестный параметр θ (или несколько, тогда θ - многомерный параметр). Задача состоит в том, чтобы по выборке $\vec{X}$ вычислить приближенное значение $\theta^*(\vec{X})$ для неизвестного параметра, причем сделать это в том или ином смысле оптимальным образом. Это задача **точечного оценивания**. Другой подход состоит в построении по выборке $\mathbf{X}$ интервала $(\theta_-(\vec{X});\ \theta_+(\vec{X}))$, который накрывает неизвестное значение параметра θ с заданной (высокой) вероятностью. Этот подход называется **интервальным оцениванием**, а $(\theta_-(\vec{X});\ \theta_+(\vec{X}))$ называется **доверительным интервалом**.

Пусть $\vec{X} \Subset F(t, \theta)$, причем параметр θ может принимать значения из множества Θ, которое называется **параметрическим множеством**. Будем называть **статистикой** любую случайную величину вида $T(\vec{X})$, которая является функцией **только от элементов выборки**. **Оценкой параметра** θ называется статистика $\tilde{\theta} = \tilde{\theta}(\vec{X})$, которая принимает значения из параметрического множества Θ.

Оценка $\tilde{\theta}$ называется **несмещенной** оценкой параметра θ, если для любого $\theta \in \Theta$ выполнено

$$\mathbf{E}\tilde{\theta} = \theta. \tag{11.5}$$

Договоримся указывать в обозначении статистики объем выборки, если это необходимо подчеркнуть: $\tilde{\theta} = \tilde{\theta}_n$.

Оценка $\tilde{\theta}_n$ называется **(сильно) состоятельной оценкой параметра** θ, если для любого $\theta \in \Theta$ при $n \to \infty$ имеет место сходимость

$$\tilde{\theta}_n \xrightarrow{\text{п. н.}} \theta, \tag{11.6}$$

то есть $\mathbf{P}\{\tilde{\theta}_n \to \theta\} = 1$.

К следующему примеру мы будем часто возвращаться в дальнейшем.

Пример 11.2. *(Задача о расписании автобусов). Придя на остановку, пассажир пытается оценить длительность интервалов между автобусами выбранного им маршрута. Он анкетирует других пассажиров, ожидающих этот автобус, и у каждого из* n *пассажиров выясняет время, проведенное им на остановке, получая таким образом выборку* $X_1, \ldots, X_n$*. Предполагается, что* $X_1, \ldots, X_n$ *образуют выборку из равномерного распределения* $U_{[0;\ \theta]}$*, где* $\theta > 0$ *— неизвестный параметр — интервал времени между автобусами.*

Первый пассажир предлагает для оценки параметра θ *использовать выборочное среднее, т. е. получить оценку в виде* $\widetilde{\theta}_1 = c_1\overline{X}$*.*

Второй пассажир предлагает использовать самое большое время ожидания, т. е. получить оценку в виде $\widetilde{\theta}_2 = c_2 X_{(n)}$*.*

Третий пассажир предлагает сложить самое большое и самое маленькое время ожидания: $\widetilde{\theta}_3 = X_{(n)} + X_{(1)}$*.*

Вычислить константы c_1*,* c_2*, обеспечивающие несмещенность оценок* $\widetilde{\theta}_1$*,* $\widetilde{\theta}_2$*. Проверить несмещенность оценки* $\widetilde{\theta}_3$*. Исследовать сильную состоятельность всех полученных оценок.*

Решение. Вычислим математическое ожидание статистики $\widetilde{\theta}_1$:

$$\mathbf{E}\widetilde{\theta}_1 = c_1\mathbf{E}\overline{X} = c_1\mathbf{E}X_1 = c_1\theta/2.$$

Условие несмещенности выполнено, если

$$\mathbf{E}\widetilde{\theta}_1 = c_1\theta/2 = \theta.$$

Отсюда с необходимостью $c_1 = 2$. Итак, мы получили первую несмещенную оценку: $\widetilde{\theta}_1 = 2\overline{X}$. Ее сильная состоятельность следует из усиленного закона больших чисел: так как $\overline{X} \to \mathbf{E}X_1 = \theta/2$ п. н., то $\widetilde{\theta}_1 = 2\overline{X} \to \theta$ п. н. в силу непрерывности функции $y(t) = 2t$.

Исследование оценки $\widetilde{\theta}_2$ значительно более трудоемко. Найдем распределение статистики $X_{(n)}$. Ее функция распределения равна

$$F_{X_{(n)}}(y) = \mathbf{P}\{X_{(n)} < y\} = \mathbf{P}\{\max(X_1, \ldots, X_n) < y\} =$$

$$= \mathbf{P}\{\bigcap_{i=1}^{n}(X_i < y)\} = \prod_{i=1}^{n}\mathbf{P}(X_i < y) = F^n(y),$$

где

$$F(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y \le 0 \\ \frac{y}{\theta}, & \text{если } 0 < y \le \theta, \\ 1, & \text{если } y > \theta. \end{cases}$$

— функция распределения закона $U_{[0;\ \theta]}$. Дифференцируя $F_{X_{(n)}}(y)$, найдем плотность распределения случайной величины $X_{(n)}$:

$$f_{X_{(n)}}(y) = nF^{n-1}(y)F'(y) = nF^{n-1}(y)f(y).$$

Подставляя в последнее равенство функцию распределения закона $U_{[0;\ \theta]}$ и его плотность

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & \text{если } y \in (0, \theta), \\ 0, & \text{если } y \notin [0, \theta], \end{cases}$$

находим плотность распределения $X_{(n)}$:

$$f_{X_{(n)}}(y) = \begin{cases} \frac{ny^{n-1}}{\theta^n}, & \text{если } y \in (0, \theta), \\ 0, & \text{если } y \notin [0, \theta]. \end{cases} \tag{11.7}$$

Для проверки несмещенности найдем математическое ожидание оценки:

$$\mathbf{E}_\theta\widetilde{\theta} = \mathbf{E}_\theta X_{(n)} = \int_0^\theta y\frac{ny^{n-1}}{\theta^n}dy = \frac{n}{n+1}\left.\frac{y^{n+1}}{\theta^n}\right|_0^\theta = \frac{n}{n+1}\theta.$$

Отсюда следует, что оценка $\widetilde{\theta}_2 = c_2\widetilde{\theta} = c_2 X_{(n)}$ является несмещенной для параметра θ при условии $c_2 n\theta/(n+1) = \theta$. Отсюда находим $c_2 = (n+1)/n$. Мы получили вторую несмещенную оценку: $\widetilde{\theta}_2 = (n+1)X_{(n)}/n$.

Проверим сильную состоятельность $\widetilde{\theta}_2$. Так как последовательность случайных величин $\{X_{(n)}\}$ монотонно возрастает по n, то ее сходимость п. н. к θ равносильна сходимости по вероятности к θ, то есть наличия для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ сходимости

$$\mathbf{P}\{|X_{(n)} - \theta| > \varepsilon\} \to 0$$

при $n \to \infty$. Отметим, что так как $X_{(n)} \le \theta$, то модуль раскрывается с отрицательным знаком, и, подставляя функцию распределения выборочного максимума $F_{X_{(n)}}$, получаем

$$\mathbf{P}\{|X_{(n)} - \theta| > \varepsilon\} \to 0\} = \mathbf{P}\{X_{(n)} < \theta - \varepsilon\} =$$

$$= F_{X_{(n)}}(\theta - \varepsilon) = \left(\frac{\theta - \varepsilon}{\theta}\right)^n \to 0.$$

Так как $(n+1)/n \to 1$, а функция $g(x, y) = xy$ непрерывна, то из сильной состоятельности оценки $X_{(n)}$ следует сильная состоятельность оценки $\widetilde{\theta}_2 = (n+1)X_{(n)}/n$.

Для доказательства несмещенности третьей оценки заметим, что минимум выборки $X_{(1)}$ распределен симметрично максимуму $X_{(n)}$ относительно середины отрезка $\theta/2$, т. е. для всех t выполнено

$$\mathbf{P}\{X_{(1)} < t\} = \mathbf{P}\{\theta - X_{(n)} < t\}.$$

Отсюда

$$\mathbf{E}X_{(1)} = \theta - \mathbf{E}X_{(n)} = \theta/(n+1),$$

$\mathbf{E}_\theta\widetilde{\theta}_3 = \theta$ — оценка несмещенная.

В силу той же симметрии получаем, что $X_{(1)} \to 0$ п. н., и в силу непрерывности функции $g(x, y) = x + y$ имеет место сходимость $\widetilde{\theta}_3 \to \theta$ п. н.

§ 11.5. Оценки методом моментов

Наиболее распространенными методами нахождения оценок являются *метод моментов* и *метод максимального правдоподобия.*

Метод моментов (одномерный случай)

Пусть $\theta \in \Theta$ - одномерный параметр, и $g : R \longrightarrow R$ некоторая числовая функция. Тогда по данной выборке $\vec{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$ можно построить выборку $g(\vec{X}) = (g(X_1), g(X_2), ..., g(X_n))$. Обозначим

$$\overline{g(X)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_i)$$

выборочное среднее этой выборки. С другой стороны, можно найти теоретическое среднее выборки $g(\vec{X})$:

$$m_g(\theta) = \mathbf{E}g(X_i).$$

Определение 11.1. *Оценкой метода моментов* (ОММ) называется такое значение $\theta^*_g = \theta^*_g(X)$, при котором теоретическое среднее выборки $\mathbf{g(X)}$ совпадает с выборочным средним:

$$m_g(\theta^*_g) = \overline{g(X)}, \tag{11.8}$$

то есть ОММ является решением уравнения (11.9) относительно неизвестного θ^*_g.

Если при этом оказывается, что функция $m_g(\theta)$ непрерывна и строго монотонна, то для нее существует обратная m_g^{-1}, и ОММ имеет вид:

$$\theta^*_g(X) = m_g^{-1}(\overline{g(X)}).$$

В качестве функции g чаще всего выбирают степенные функции: $g(x) = x^k$, где $k = 1, 2, ...$. В этом случае теоретическое среднее выборки $g(\vec{X})$ совпадает с теоретическим моментом соответствующего порядка, например, если $g(X) = x$, то $m_g(\theta) = \mathbf{E}X_i = \alpha_1(\theta)$; если $g(X) = x^2$, то $m_g(\theta) = \mathbf{E}X_i^2 = \alpha_2(\theta)$, и т.д. При этом уравнение (11.9) для нахождения ОММ приобретает вид:

$$\alpha_k(\theta^*) = \overline{X^k}. \tag{11.9}$$

Оценка по методу моментов в этом случае называется *оценкой по k-тому моменту* и обозначается θ^*_k

Отметим, что если функция $m_g(\theta) = \mathbf{E}g(X_1)$ непрерывна и строго монотонна, то оценка по методу моментов $\theta^*_g(X) = m_g^{-1}(\overline{g(X)})$ сильно состоятельна.

Метод моментов (многомерный случай)

Пусть $\vec{X} \Subset \mathbf{F}_\theta$, где параметр $\theta \in \Theta$, подлежащий оцениванию, — многомерный. Рассмотрим для простоты двумерный случай, то есть $\theta = (\theta_1, \theta_2)$. Тогда для однозначного нахождения двух неизвестных θ_1, θ_2 одного уравнения (11.9) (или (11.10)) недостаточно. Оценкой метода моментов в этом случае называется решение (θ_1^*, θ_2^*) системы уравнений вида:

$$\begin{cases} m_{g_1}(\theta_1, \theta_2) = \overline{g_1(X)}, \\ m_{g_2}(\theta_1, \theta_2) = \overline{g_2(X)}. \end{cases} \tag{11.10}$$

В качестве функций g_1, g_2 можно выбрать, как и раньше, степенные функции $g_i(x) = x^k$, где $k = 1, 2, \ldots$. Тогда уравнения системы (11.11) получаются как результат приравнивания эмпирических моментов выборки $\vec{X}$ соответствующим теоретическим. Например, приравнивая первые два момента, получим систему:

$$\begin{cases} \alpha_1(\theta_1, \theta_2) = \overline{X}, \\ \alpha_2(\theta_1, \theta_2) = \overline{X^2}. \end{cases} \tag{11.11}$$

Как и раньше, вместо вторых моментов можно приравнивать дисперсии.

§ 11.6. Решение типовых примеров

Пример 11.3. *По данной реализации выборки* $\vec{x} = (3, 8, 6, 4, 6, 1, 5, 4, 9, 4)$ *построить реализацию вариационного ряда, графики реализаций эмпирической функции распределения и гистограммы. Число интервалов для построения гистограммы выбрать по формуле Стеджеса.*

Решение. Реализацию вариационного ряда образуем из элементов данной реализации выборки, расположив их в порядке возрастания:

$$1,\ 3,\ 4,\ 4,\ 4,\ 5,\ 6,\ 6,\ 8,\ 9. \tag{11.12}$$

Объем выборки $n = 10$. График реализации эмпирической функции распределения строим с помощью полученной реализации вариационного ряда: это ступенчатая функция со скачками в точках вариационного ряда, принимающая значение 0 в промежутке $(-\infty, 1]$ и имеющая скачки в точках $x_{(i)}$, равные частоте элемента $x_{(i)}$. Например, скачок в точке $x_{(1)} = 1$ равен $\frac{1}{10}$, скачок в точке $x_{(2)} = 3$ равен $\frac{1}{10}$ и т.д. График реализации эмпирической функции распределения изображен на рис.11.3

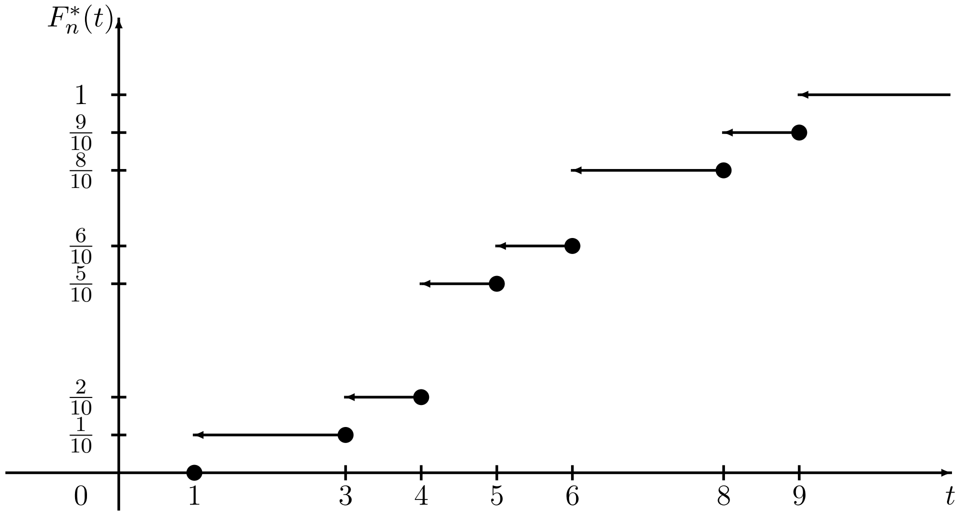


Рис. 11.4: Эмпирическая функция распределения $F_n^*(t)$

Расчитаем число промежутков по формуле Стеджеса: $K = [\log_2 10] + 1 = 3 + 1 = 4$. Размах выборки равен $9 - 1 = 8$, шаг гистограммы $h = 8/4 = 2$. Разобьем отрезок $[1;\ 9]$ на промежутки длины $h = 2$:

$$\Delta_1 = [1;\ 3);\ \Delta_2 = [3;\ 5);\ \Delta_3 = [5;\ 7);\ \Delta_4 = [7;\ 9].$$

Число элементов выборки, попавших в интервал Δ_1, равно $\nu_1 = 1$. Аналогично находим:

$$\nu_2 = 4;\ \ \nu_3 = 3;\ \ \nu_4 = 2.$$

Вычисляя значения функции $f_n^*(t) = \frac{\nu_k}{nh}, t \in \Delta_k$ на каждом из интервалов Δ_k, строим гистограмму (рис.11.4):

Пример 11.4. *Пусть* $\vec{X} \Subset \Pi_\lambda$, *где* $\lambda > 0$ *— неизвестный параметр. Найти оценки параметра* λ *по а) первому и б) второму моментам.*

Решение. а) Так как для распределения Пуассона $\mathbf{E}X_i = \lambda$, то λ_1^* получается сразу из равенств (11.9) или (11.10): заменяя λ на λ_1^*, а $\mathbf{E}X_i$ на $\overline{X}$, получаем $\lambda_1^* = \overline{X}$.

б) В этом случае вычисляем второй момент распределения Пуассона:

$$\mathbf{E}X_i^2 = (\mathbf{E}X_i)^2 + \mathbf{D}X_i = \lambda + \lambda^2.$$

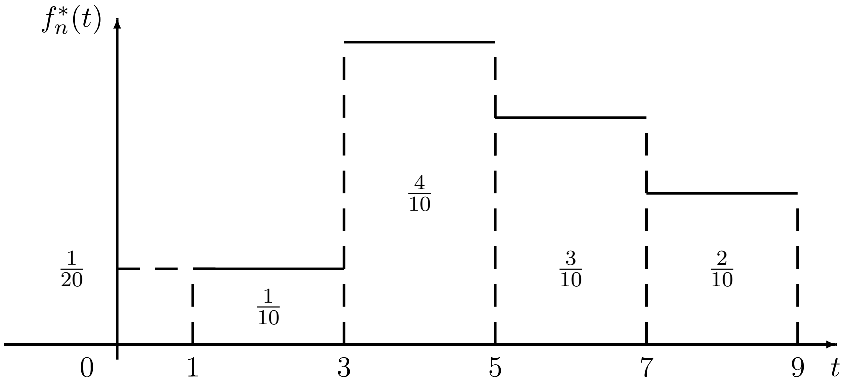


Рис. 11.5: Гистограмма $f_n^*(t)$.

Приравнивая эту функцию второму выборочному моменту и заменяя λ на λ_2^*, получим уравнение:

$$\lambda_2^* + (\lambda_2^*)^2 = \overline{X^2},$$

из которого находим λ_2^* :

$$\lambda_2^* = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \overline{X^2}}.$$

Так как $\lambda_2^* > 0$, то из двух решений выбираем одно — положительное, и ОММ имеет вид:

$$\lambda_2^*(X) = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \overline{X^2}}.$$

Замечание 11.1. *Из двух найденных оценок* λ_1^* *представляется предпочтительней. Во-первых, она несмещенная, так как*

$$\mathbf{E}_\lambda \lambda_1^* = \mathbf{E}_\lambda \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}_\lambda X_i = \frac{1}{n} n\lambda = \lambda;$$

во-вторых, она состоятельная в силу усиленного закона больших чисел (УЗБЧ).

В то же время, оценка λ_2^* *менее удобна для исследования, хотя она является состоятельной (проверьте, используя УЗБЧ). Например, исследовать для нее свойство несмещенности — технически трудная задача.*

Пример 11.5. *Пусть* $\vec{X} \Subset U_{[\theta_1;\ \theta_2]}$, *где* $-\infty < \theta_1 < \theta_2 < \infty$ — *неизвестные параметры. Найти ОММ.*

Решение. Вычислим моменты первых двух порядков равномерного распределения

$$\alpha_1(\theta_1, \theta_2) = \mathbf{E}X_i = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2},$$

$$\mathbf{D}X_i = \frac{(\theta_2 - \theta_1)^2}{12}.$$

Составим систему уравнений, приравнивая теоретические и эмпирические математическое ожидание и дисперсию:

$$\begin{cases} \mathbf{E}X_1 = \overline{X}, \\ \mathbf{D}X_1 = S^2, \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{\theta_1+\theta_2}{2} = \overline{X}, \\ \frac{(\theta_2-\theta_1)^2}{12} = S^2, \end{cases} \iff \begin{cases} \theta_1 + \theta_2 = 2\overline{X}, \\ \theta_2 - \theta_1 = \sqrt{12}S. \end{cases}$$

Решая последнюю систему относительно неизвестных θ_1, θ_2 (вычитая и складывая уравнения системы), получим оценки ММ:

$$\theta_1^* = \overline{X} - \sqrt{3}S, \quad \theta_2^* = \overline{X} + \sqrt{3}S.$$

§ 11.7. Задачи для самостоятельного решения

11.1 По данной реализации выборки $\mathbf{x} = (0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$:

а) построить графики эмпирической функции распределения и гистограммы;

б) вычислить выборочные среднее и дисперсию.

11.2 Проводились опыты с бросанием одновременно 12 игральных костей. Наблюдаемую случайную величину X считали равной числу костей, на которых выпало не больше трех очков. Пусть ν_i - число опытов, в которых наблюдалось значение $X = i$; $i = 0, 1, ..., 12$. Данные для $n = 4096$ опытов приведены в следующей таблице:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ν_i	0	7	60	198	430	731	948	847	536	257	71	11	0

а) Построить гистограмму и сравнить ее с графиком функции $y = ce^{-\frac{x^2}{6}}$.

б) Вычислить выборочные среднее и дисперсию.

11.4 Измерен рост (в см) студентов одной учебной группы. Результаты измерений дали выборку (171; 186; 164; 190; 158; 181; 176; 180; 174; 157; 176; 169; 164; 186).

а) Построить реализацию гистограммы.

б) Вычислить реализации выборочного среднего, выборочной дисперсии и выборочного стандартного отклонения S. На одном графике с гистограммой построить график плотности нормального закона с параметрами $\overline{X},\ S^2$.

11.5 Пассажир маршрутного такси измерил 8 раз время ожидания такси и получил следующие результаты (в минутах): 8; 4; 5; 4; 2; 15; 1; 6. У него есть две гипотезы относительно графика движения такси: либо график движения соблюдается, и время ожидания имеет равномерное распределение на отрезке $[0;\ \theta]$, либо график движения не соблюдается, и время ожидания имеет показательное распределение с параметром λ.

а) Вычислить реализации оценок параметров θ и λ, использовав оценки $\widetilde{\theta}_2 = (n+1)X_{(n)}/n$ и $\widetilde{\lambda}_2 = \frac{n-1}{n\overline{X}}$.

б) Построить на одном графике реализацию эмпирической функции распределения и теоретические функции распределения равномерного и показательного законов, в которые вместо неизвестных параметров подставлены реализации их оценок.

в) Построить на одном графике реализацию гистограммы и теоретические плотности распределения равномерного и показательного законов, в которые вместо неизвестных параметров подставлены реализации их оценок.

г) На основании проведенного исследования сделать вывод о том, какая из гипотез выглядит более соответствующей экспериментальным данным.

11.6 Пусть $\vec{X} \Subset N(a, \sigma^2)$. Вычислить $\mathbf{E}\overline{X}$, $\mathbf{D}\overline{X}$. Какое распределение имеет случайная величина $\overline{X}$?

11.7 Дана выборка $\mathbf{X} \Subset \Pi(\lambda)$, $\lambda > 0$ — неизвестный параметр. Проверить, что статистики

$$T_1 = \overline{X}, \quad T_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(X_i = k), \quad T_3 = \frac{X_1 + X_n}{2}$$

являются несмещенными оценками соответственно для λ, $\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ и λ. Являются ли эти оценки состоятельными?

11.8 По выборке $(X_1,\ \ldots,\ X_n)$ из бернуллиевского распределения B_p с неизвестным параметром $p \in (0;\ 1)$ построить оценки параметра p:

а) по первому моменту;

б) по второму моменту;

в) по произвольному k-му моменту.

Можно ли отдать предпочтение какой-либо из построенных оценок? Исследовать их состоятельность и несмещенность.

11.9 По выборке $(X_1,\ \ldots,\ X_n)$ из биномиального распределения $B_{m,p}$ построить оценки методом моментов:

а) параметра p по первому и по второму моменту при известном $m > 0$;

б) параметров p и m.

Исследовать состоятельность построенных оценок.

11.10 При каких значениях параметра $\theta > 0$ распределения Парето с плотностью

$$f_\theta(t) = \begin{cases} \frac{\theta}{t^{\theta+1}}, & t \geq 1, \\ 0, & t < 1 \end{cases}$$

существует оценка параметра по первому моменту? Можно ли построить состоятельную оценку методом моментов в случае, когда оценки по первому моменту не существует?

11.11 По выборке $(X_1,\ \ldots,\ X_n)$ из распределения Лапласа с плотностью $f_\lambda(t) = \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|t|}, \quad t \in \mathbf{R}$, построить оценку параметра $\lambda > 0$ методом моментов.

11.11 Пусть дана выборка из нормального распределения с параметрами α и σ^2. Используя метод моментов, построить оценки

а) неизвестного математического ожидания α;

б) неизвестной дисперсии σ^2, если α известно;

в) неизвестной дисперсии σ^2, если α неизвестно.

Исследовать полученные оценки на несмещенность и состоятельность.

11.12 Используя метод моментов, оценить параметр θ равномерного распределения на отрезке

а) $[-\theta;\ \theta]$, $\theta > 0$; б) $[\theta;\ \theta+1]$.

Исследовать полученные оценки на несмещенность и состоятельность.

11.13 С помощью метода моментов найти оценки параметров a и b равномерного распределения на отрезке $[a, b]$. Будут ли они состоятельными?

11.14 Используя метод моментов, построить бесконечную последовательность различных оценок параметра θ равномерного распределения на отрезке $[0;\ \theta]$. Будут ли полученные оценки состоятельными?

11.15 С помощью метода моментов построить оценку параметра $\theta > 0$, если распределение выборки имеет плотность

а) $\theta t^{\theta-1}$ при $t \in [0;\ 1]$; б) $2t/\theta^2$ при $t \in [0;\ \theta]$.

Исследовать полученные оценки на состоятельность.

11.16 Дана выборка из распределения с плотностью

$$f_\theta(t) = \begin{cases} 3t^2\theta^{-3}, & t \in [0;\ 1], \\ 0, & t \notin [0;\ 1]. \end{cases}$$

Найти оценку параметра $\theta > 0$ методом моментов, исследовать ее на несмещенность и состоятельность.

11.17 Методом моментов найти оценку параметра $\alpha > 0$ по выборке из показательного распределения с плотностью $f_\alpha(t) = \alpha e^{-\alpha t}, \ \ t > 0$. Будет ли оценка несмещенной и состоятельной?

11.18 По выборке $(X_1, \ldots, X_n)$ методом моментов найти две различные оценки параметра $p \in (0, 1)$, если известно, что

$P\{X_1 = 1\} = p/2, \ P\{X_1 = 2\} = p/2, \ P\{X_1 = 3\} = 1 - p.$

Будут ли полученные оценки несмещенными и состоятельными?

Глава 12

Оценки максимального правдоподобия. Сравнение оценок

§ 12.1. Метод максимального правдоподобия

Пусть $\vec{X} \Subset F(t, \theta)$, $\theta \in \Theta$. Предположим, что теоретическое распределение либо абсолютно непрерывно с плотностью $f(t, \theta) = f_{X_i}(t)$, либо дискретно, при этом для ряда распределения будем использовать то же обозначение: $f(t, \theta) = \mathbf{P}(X_i = t)$. **Функцией правдоподобия, соответствующей выборке** $\vec{X}$, называется функция

$$\Pi(\theta) = \Pi(\vec{X},\ \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(X_i,\ \theta). \tag{12.1}$$

Оценкой максимального правдоподобия (ОМП) называется такое значение параметра $\theta = \hat{\theta}(\vec{X})$, при котором функция правдоподобия принимает наибольшее значение, то есть

$$\Pi(\vec{X},\ \hat{\theta}) = \max_{\theta \in \Theta} \Pi(\vec{X},\ \theta). \tag{12.2}$$

Если функция правдоподобия дифференцируема при всех $\theta \in \Theta$, то значение $\theta = \hat{\theta}$ должно быть решением уравнения

$$\Pi'(\theta) = 0, \tag{12.3}$$

которое называется уравнением правдоподобия, или эквивалентного уравнения

$$\frac{d}{d\theta}\ln \Pi(\theta) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{d\theta}\ln f(X_i, \theta) = 0. \tag{12.4}$$

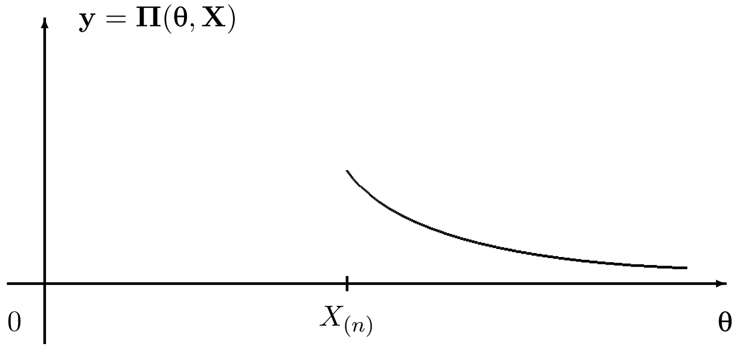


Рис. 12.1: Функция правдоподобия для $\vec{X} \Subset U_{([0,\theta]}$

Рассмотрим теперь случай многомерного параметра, предположив опять для простоты, что $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ - двумерный параметр. Тогда для нахождения ОМП нужно найти точку $\hat{\theta} = (\hat{\theta_1}, \hat{\theta_2})$ наибольшего значения функции двух переменных $\Pi(\theta_1, \theta_2)$. В частности, если функция правдоподобия дифференцируема, то для решения этой задачи, вместо уравнения правдоподобия (12.3) или (12.4), нужно найти решение следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi(\theta)}{\partial \theta_1} = 0, \\ \frac{\partial \Pi(\theta)}{\partial \theta_2} = 0. \end{cases} \tag{12.5}$$

§ 12.2. Сравнение оценок: среднеквадратический подход

Пусть $\vec{X} \Subset F(t, \theta)$, $\theta \in \Theta$, и $\widetilde{\theta} = \widetilde{\theta}_n(\vec{X})$ — какая-нибудь оценка параметра θ. Так как оценка является случайной величиной, то даже свойство несмещенности не гарантирует близость ее конкретной реализации $\widetilde{\theta}_n(\vec{x})$ к оцениваемому параметру. Если оценка является состоятельной, то такая близость гарантируется с заданной вероятностью, но только при достаточно больших n. При фиксированном объеме выборки наиболее распространенной "мерой близости"оценки к оцениваемому параметру является **квадратическая характеристика**, или среднее значение квадрата отклонения $\mathbf{E}(\widetilde{\theta} - \theta)^2$.

Из двух оценок $\widetilde{\theta}_1$ считается **лучше**, чем $\widetilde{\theta}_2$, если при всех $\theta \in \Theta$ выполняется неравенство

$$\mathbf{E}(\widetilde{\theta}_1 - \theta)^2 \leq \mathbf{E}(\widetilde{\theta}_2 - \theta)^2, \tag{12.6}$$

а хотя бы для одного θ неравенство в (12.8) оказывается строгим.

Заметим, что квадратическая характеристика оценки не меньше ее дисперсии, и равенство достигается для несмещенных оценок:

$$\mathbf{E}(\widetilde{\theta} - \theta)^2 = \Big(\mathbf{E}(\widetilde{\theta} - \theta)\Big)^2 + \mathbf{D}(\widetilde{\theta} - \theta) = \Big(\mathbf{E}\widetilde{\theta} - \theta\Big)^2 + \mathbf{D}\widetilde{\theta} \geq \mathbf{D}\widetilde{\theta}.$$

Если $\widetilde{\theta}$ — несмещенная оценка параметра θ, то есть $\mathbf{E}\widetilde{\theta} = \theta$, то для нее

$$\mathbf{E}(\widetilde{\theta} - \theta)^2 = \Big(\mathbf{E}\widetilde{\theta} - \theta\Big)^2 + \mathbf{D}\widetilde{\theta} = \mathbf{D}\widetilde{\theta}.$$

Отметим, что при среднеквадратическом подходе к сравнению оценок нельзя найти наилучшую в классе всех оценок (в частности, существуют несравнимые оценки).

Теорема 12.1. *В невырожденной статистической задаче (то есть в ситуации, когда по выборке нельзя однозначно определить неизвестный параметр) не существует наилучшей в классе всех оценок.*

Доказательство. Предположим, что существует наилучшая в классе всех оценок параметра θ оценка $\check{\theta}$. Рассмотрим следующую дурацкую оценку $\tilde{\theta}_d = \theta_0$. Эта оценка равняется константе θ_0 для любых выборочных значений, то есть никак не использует информацию, представленную выборкой. Однако если θ_0 — возможное значение параметра θ, то нельзя исключить ситуации, когда $\theta = \theta_0$ (дурацкая оценка может оказаться наиболее верной, если правильно угадывает значение неизвестного параметра). В этом случае квадратичная характеристика этой оценки равна 0:

$$\mathbf{E}(\tilde{\theta}_d - \theta)^2 = \mathbf{E}(\theta_0 - \theta_0)^2 = 0.$$

Но если оценка $\check{\theta}$ не хуже, чем $\tilde{\theta}_d$, то ее квадратичная характеристика всегда не больше, чем квадратичная характеристика оценки $\widetilde{\theta}_d$ для любого θ. В частности, при $\theta = \theta_0$ получаем:

$$\mathbf{E}(\check{\theta} - \theta_0)^2 \leq \mathbf{E}(\theta_0 - \theta_0)^2 = 0.$$

Отсюда $\mathbf{E}(\check\theta-\theta_0)^2=0$, то есть $\check\theta=\theta_0$ с вероятностью 1. Это противоречит невырожденности статистической задачи — предполагалось, что по выборке нельзя однозначно определить неизвестный параметр. Итак, не может существовать наилучшей в классе всех оценок. Теорема доказана.

Для того, чтобы избежать необходимости сравнивать получаемые оценки с вырожденными оценками (рассмотренными в доказательстве теоремы), нужно ограничить класс рассматриваемых оценок. Как правило, сравнивают только несмещенные оценки. Среди несмещенных оценок наилучшая оценка параметра для заданного параметрического семейства может существовать. Ее называют *эффективной* оценкой. Эффективная оценка имеет наименьшую дисперсию из всех несмещенных оценок.

К сожалению, такое определение эффективной оценки непригодно для практического использования, так как для проверки оптимальности одной оценки требуется сравнивать дисперсии всех оценок всех несмещенных оценок. Поэтому желательно иметь критерий, позволяющий проверять оптимальность оценки на основании характеристик распределения только этой оценки. Один из таких критериев основан на неравенстве Рао-Крамера, которое сформулировано ниже в теореме **??**.

Для формулировки точного результата введем дополнительное условие. Пусть функция распределения $F(t,\theta)$ рассматриваемой модели имеет плотность или ряд распределения, которые мы, как и прежде, обозначаем одинаково: $f(t,\theta)$). Будем предполагать, что функция $f(t,\theta)$ удовлетворяет некоторым аналитическим условиям, которые будем называть **условиями регулярности** (условия (R)), и суть которых заключается в возможности менять порядок дифференцирования по θ и интегрирования по $\vec{x}$ функции правдоподобия $\Pi(\vec{x},\ \theta)$, соответствующей $f(t,\theta)$. Точная формулировка этих условий довольно сложна, приведем в качестве примера условие из [1], достаточное для (R): функция $\sqrt{f(t,\ \theta)}$ дифференцируема по $\theta\in\Theta$, и функция $\mathbf{i}(\theta)$, называемая информацией по Фишеру и определяемая равенством

$$\mathbf{i}(\theta)=\mathbf{E}\left(\frac{\partial\ln f(X_i,\theta)}{\partial\theta}\right)^2, \tag{12.7}$$

существует, строго положительна и непрерывна по θ для всех $\theta\in\Theta$.

Примером модели, для которой не выполнены условия регулярности, является модель $\vec{X}\Subset U_{[0;\ \theta]}$, $\theta>0$.

Теорема 12.2. (неравенство Рао-Крамера) *Пусть* $\vec{X}\Subset F(t,\theta)$, $\theta\in\Theta$, *выполнены условия регулярности. Тогда для любой несмещенной оценки* $\tilde\theta$ *параметра* θ *выполняется* *неравенство:*

$$\mathbf{D}\tilde{\theta} \geq \frac{1}{n\mathbf{i}(\theta)}. \tag{12.8}$$

Если для некоторой несмещенной оценки $\check{\theta}$ окажется, что ее дисперсия совпадает с правой частью неравенства Рао-Крамера (говорят, что для этой оценки в неравенстве Рао-Крамера достигается равенство), то оценка $\check{\theta}$ является эффективной, так как для любой другой несмещенной оценки $\tilde{\theta}$ неравенство (12.12) продолжает выполняться и, следовательно, $\mathbf{D}\tilde{\theta} \geq \mathbf{D}\check{\theta}$ для всех $\theta \in \Theta$.

§ 12.3. Решение типовых примеров

Пример 12.1. *В условиях примера 11.4 найти ОМП неизвестного параметра* λ.

Решение. Для распределения Пуассона Π_λ ряд распределения имеет вид:

$$f(t,\lambda) = \mathbf{P}(X_i = t) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^t}{t!}.$$

Искомая оценка должна быть решением уравнения правдоподобия (12.3) или (12.4). Для решения этого уравнения вычислим последовательно:

$$f(X_i,\lambda) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^{X_i}}{X_i!}, \quad \ln f(X_i,\lambda) = -\lambda + X_i \ln\lambda - \ln(X_i!),$$

$$\frac{d}{d\lambda}\ln f(X_i,\lambda) = -1 + \frac{1}{\lambda}X_i,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{d\lambda}\ln f(X_i,\lambda) = -n + \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}X_i = -n + \frac{1}{\lambda}n\overline{X}.$$

Тогда уравнение (12.4) и его решение имеют вид:

$$-n + \frac{1}{\lambda}n\overline{X} = 0 \iff \lambda = \overline{X}.$$

Заметим, что вторая производная логарифмической функции правдоподобия

$$\frac{d^2}{d\lambda^2}\ln\Pi(\lambda) = -\frac{1}{\lambda^2}n\overline{X} < 0$$

при всех λ, так как при нашем предположении $\vec{X} \Subset \Pi_\lambda$ все элементы выборки $X_1, X_2, ..., X_n$, а значит, и выборочное среднее $\overline{X}$, с вероятностью единица неотрицательны. Значит, найденное решение $\lambda = \overline{X}$ уравнения правдоподобия является единственной точкой максимума функций $\Pi(\lambda)$ и $\ln \Pi(\lambda)$, а следовательно, статистика $\hat{\lambda} = \overline{X}$ является ОМП параметра λ.

Пример 12.2. *Пусть $\vec{X} \Subset U_{[0,\theta]}$, где $\theta > 0$. Найти ОМП для параметра θ.*

Решение. Найдем функцию правдоподобия, соответствующую выборке $\vec{X}$ из равномерного распределения $U_{[0,\theta]}$. Плотность распределения закона $U_{[0,\theta]}$ при $t = X_i$ равна:

$$f(X_i, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & \text{если } X_i \in [0, \theta], \\ 0, & \text{если } X_i \notin [0, \theta] \end{cases} \tag{12.9}$$

Тогда функция правдоподобия вычисляется следующим образом:

$$\Pi(\theta) = \Pi(\vec{X},\ \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(X_i, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^n}, & \text{если } X_i \in [0, \theta] \text{ для всех } i = 1, 2, ..., n; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Это соотношение можно переписать в следующих равносильных формах:

$$\Pi(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^n}, & \text{если } \max\limits_{1 \le i \le n} X_i \le \theta; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \iff \Pi(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^n}, & \text{если } \theta > X_{(n)}; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Последнее задание функции $\Pi(\theta) = \Pi(\vec{X},\ \theta)$ позволяет легко изобразить ее график (см. рис.12.1). Из графика видно, что своего наибольшего значения функция $\Pi(\theta)$ достигает при $\theta = X_{(n)}$. Следовательно, оценка максимального правдоподобия имеет вид: $\hat{\theta}(\vec{X}) = X_{(n)}$.

Пример 12.3. *В условиях примера 11.5 найти ОМП неизвестного параметра* $\theta = (\theta_1, \theta_2)$.

Решение. Найдем функцию правдоподобия, соответствующую выборке $\vec{X}$ из равномерного распределения $U_{[\theta_1, \theta_2]}$. Так как плотность распределения закона $U_{[\theta_1, \theta_2]}$ при $t = X_i$ равна

$$f(X_i, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta_2 - \theta_1}, & \text{если } X_i \in (\theta_1, \theta_2), \\ 0, & \text{если } X_i \notin [\theta_1, \theta_2], \end{cases}$$

то функция правдоподобия представляется в виде

$$\Pi(\theta_1, \theta_2) = \prod_{i=1}^{n} p(X_i, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{(\theta_2 - \theta_1)^n}, & \text{если все} X_i \in [\theta_1, \theta_2]; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Или по-другому:

$$\Pi(\theta_1, \theta_2) = \begin{cases} \frac{1}{(\theta_2 - \theta_1)^n}, & \text{если } \theta_2 \geq X_{(n)},\ \theta_1 \leq X_{(1)}; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{12.10}$$

Из последнего равенства видно, что функция правдоподобия отлична от нуля (более того, строго положительна) лишь при значениях (θ_1, θ_2), удовлетворяющих неравенствам:

$$\theta_1 \leq X_{(1)} \leq X_{(n)} \leq \theta_2.$$

Значит, своего наибольшего значения функция $\Pi(\theta_1, \theta_2)$ достигает лишь при таких (θ_1, θ_2). Однако при таких значениях (θ_1, θ_2) разность $(\theta_2 - \theta_1)$ принимает свое наименьшее значение $(X_{(n)} - X_{(1)})$ при $\theta_2 = X_{(n)}$, $\theta_1 = X_{(1)}$. А значит, в силу (12.7), функция $\Pi(\theta_1, \theta_2)$ принимает свое наибольшее значение при тех же значениях (θ_1, θ_2), то есть искомая ОМП имеет вид: $\hat{\theta_2} = X_{(n)}$, $\hat{\theta_1} = X_{(1)}$.

Пример 12.4. *Пусть* $\vec{X} \Subset U_{[0;\ \theta]}$, $\theta > 0$. *Сравнить с помощью среднеквадратического подхода оценки параметра* θ : $\theta_1^* = 2\overline{X}$ *и* $\hat{\theta} = X_{(n)}$.

Решение. Проверим сначала свойство несмещенности обеих оценок. Вычисляем математические ожидания, используя результаты предыдущего параграфа (см. решение примера 11.3):

$$\mathbf{E}\theta_1^* = \mathbf{E}(2\overline{X}) = 2\mathbf{E}\overline{X} = 2\frac{\theta}{2} = \theta, \quad \mathbf{E}\hat{\theta} = \mathbf{E}X_{(n)} = \frac{n}{n+1}\theta.$$

Видим, что из двух оценок $\theta_1^* = 2\overline{X}$ является несмещенной, а $\hat{\theta} = X_{(n)}$ — смещенной. Чтобы выяснить, какая из оценок лучше, вычислим для каждой квадратичную характеристику. Для несмещенной оценки она совпадает с дисперсией:

$$\mathbf{E}(\theta_1^* - \theta)^2 = \mathbf{D}\theta_1^* = \mathbf{D}(2\overline{X}) = 4\mathbf{D}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = 4\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{D}_\theta X_i =$$

$$= 4\frac{1}{n^2} n\mathbf{D}_\theta X_1 = \frac{4}{n}\frac{\theta^2}{12} = \frac{\theta^2}{3n}. \tag{12.11}$$

При вычислении квадратичной характеристики оценки $\hat{\theta}_n = X_{(n)}$ мы будем использовать плотность ее распределения, найденную при решении примера 11.3.

$$\mathbf{E}(X_{(n)} - \theta)^2 = \mathbf{E}X_{(n)}^2 - 2\theta\mathbf{E}X_{(n)} + \theta^2 = \int_0^\theta y^2 \frac{ny^{n-1}}{\theta^n} dy - 2\theta \frac{n\theta}{n+1} + \theta^2 =$$

$$= \frac{n}{n+2}\theta^2 - \frac{2n}{n+1}\theta^2 + \theta^2 = \frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)}. \qquad (12.12)$$

Сравнивая квадратичные характеристики, вычисленные в (12.9) и (12.10), видим, что

$$\frac{\theta^2}{3n} \geq \frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)}$$

для всех $\theta > 0$ и для всех $n \geq 1$.

Следовательно, ОМП $\hat{\theta} = X_{(n)}$ лучше в среднеквадратичном, чем ОММ $\theta_1^* = 2\overline{X}$.

Пример 12.5. *Исследовать с помощью неравенства Рао-Крамера оптимальность оценки* $\overline{X}$ *в моделях:*

а) $\vec{X} \Subset E_{\frac{1}{\theta}}, \quad \theta > 0$;

б) $\vec{X} \Subset \Pi_\lambda, \quad \lambda > 0$.

Решение. а) Вычислим дисперсию оценки, применяя свойства дисперсии и учитывая, что $\mathbf{D}X_i = \theta^2$:

$$\mathbf{D}\theta^* = \mathbf{D}\overline{X} = \mathbf{D}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \mathbf{D}X_i = \frac{1}{n^2} n\mathbf{D}X_1 = \frac{\theta^2}{n}. \qquad (12.13)$$

Найдем правую часть неравенства Рао-Крамера для рассматриваемой модели, для этого вычислим последовательно:

$$f(X_i, \theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{X_i}{\theta}}; \quad \ln f(X_i, \theta) = -\ln\theta - \frac{X_i}{\theta}; \quad \frac{\partial \ln f(X_i, \theta)}{\partial\theta} = -\frac{1}{\theta} + \frac{X_i}{\theta^2};$$

$$\mathbf{i}(\theta) = \mathbf{E}\left(\frac{\partial \ln f(X_i, \theta)}{\partial\theta}\right)^2 = \mathbf{E}\left(-\frac{1}{\theta} + \frac{X_i}{\theta^2}\right)^2 = \mathbf{E}\left(\frac{X_i - \theta}{\theta^2}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{\theta^4}\mathbf{E}(X_i - \theta)^2 = \frac{\mathbf{D}X_i}{\theta^4} = \frac{\theta^2}{\theta^4} = \frac{1}{\theta^2};$$

$$\frac{1}{n\mathbf{i}(\theta)} = \frac{\theta^2}{n}. \qquad (12.14)$$

Сравнивая (12.13) и (12.14), видим, что для оценки $\theta^* = \overline{X}$ в неравенстве Рао-Крамера достигается равенство, следовательно, она эффективна.

б) Прежде всего вспомним, что для распределения Пуассона Π_λ математическое ожидание и дисперсия равны $\mathbf{E}X_i = \lambda$, $\mathbf{D}X_i = \lambda$. Тогда дисперсия нашей оценки равна:

$$\mathbf{D}\lambda^* = \mathbf{D}\overline{X} = \mathbf{D}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{D}X_i = \frac{1}{n^2}n\mathbf{D}X_1 = \frac{\lambda}{n}. \qquad (12.15)$$

Аналогично пункту а), вычисляем правую часть неравенства Рао-Крамера:

$$f(X_i,\lambda) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^{X_i}}{X_i!};\ \ln f(X_i,\lambda) = -\lambda + X_i\ln\lambda - \ln(X_i!);\ \frac{\partial \ln f(X_i,\lambda)}{\partial\lambda} = -1 + \frac{X_i}{\lambda};$$

$$\mathbf{i}(\lambda) = \mathbf{E}\left(\frac{\partial \ln f(X_i,\lambda)}{\partial\lambda}\right)^2 = \mathbf{E}\left(\frac{X_i}{\lambda} - 1\right)^2 = \mathbf{E}\left(\frac{X_i - \lambda}{\lambda}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{\lambda^2}\mathbf{E}(X_i - \lambda)^2 = \frac{1}{\lambda^2}\mathbf{D}X_i = \frac{1}{\lambda};$$

$$\frac{1}{n\mathbf{i}(\lambda)} = \frac{\lambda}{n}. \qquad (12.16)$$

Сравнивая (12.15) и (12.16), видим, что для оценки $\lambda^* = \overline{X}$ в неравенстве Рао-Крамера достигается равенство, следовательно, она эффективна.

§ 12.4. Задачи для самостоятельного решения

12.1 По выборке $(X_1,\ \ldots,\ X_n)$ из бернуллиевского распределения B_p с неизвестным параметром $p \in (0;\ 1)$ построить оценку параметра p методом максимального правдоподобия. (Указание: показать, что вероятность попадания в точку t для элементов выборки равна $f(t,\ p) = p^t(1-p)^{1-t}$, где t может принимать только два значения: 0 и 1). Исследовать состоятельность и несмещенность полученной оценки.

12.2 По выборке $(X_1,\ \ldots,\ X_n)$ из биномиального распределения $B_{m,p}$ построить оценку максимального правдоподобия параметра p при известном $m > 0$. Исследовать состоятельность и несмещенность оценки.

12.3 По выборке из показательного распределения E_α построить оценку максимального правдоподобия параметра $\alpha > 0$. Исследовать состоятельность оценки.

12.4 Построить оценку максимального правдоподобия по выборке из распределения Парето с плотностью

$$f_\theta(t) = \begin{cases} \frac{\theta}{t^{\theta+1}}, & t \geq 1, \\ 0, & t < 1 \end{cases}.$$

Доказать состоятельность полученной оценки.

12.5 По выборке $(X_1, \ \ldots, \ X_n)$ из распределения Лапласа с плотностью $f_\lambda(t) = \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|t|}, \quad t \in \mathbf{R}$, построить оценку параметра $\lambda > 0$ методом максимального правдоподобия.

12.6 Пусть дана выборка из нормального распределения с параметрами α и σ^2. Используя метод максимального правдоподобия, построить оценки

а) неизвестного математического ожидания α;

б) неизвестной дисперсии σ^2, если α известно;

в) неизвестной дисперсии σ^2, если α неизвестно.

Исследовать полученные оценки на несмещенность и состоятельность.

12.7 Используя метод максимального правдоподобия, оценить параметр θ равномерного распределения на отрезке

а) $[-\theta; \ \theta]$, $\theta > 0$; б) $[\theta; \ \theta + 1]$.

Исследовать полученные оценки на несмещенность и состоятельность.

12.8 С помощью метода максимального правдоподобия построить оценку параметра $\theta > 0$, если распределение выборки имеет плотность

а) $\theta t^{\theta-1}$ при $t \in [0; \ 1]$; б) $2t/\theta^2$ при $t \in [0; \ \theta]$.

Исследовать полученные оценки на состоятельность.

12.9 Дана выборка из распределения с плотностью

$$f_\theta(t) = \begin{cases} 3t^2\theta^{-3}, & t \in [0; \ 1], \\ 0, & t \notin [0; \ 1]. \end{cases}$$

Найти оценку параметра $\theta > 0$ методом максимального првдоподобия, исследовать ее на несмещенность и состоятельность.

12.10 По выборке $(X_1, \ldots, X_n)$ методом максимального правдоподобия найти оценку параметра $p \in (0, 1)$, если известно, что

$P\{X_1 = 1\} = p/2, \ P\{X_1 = 2\} = p/2, \ P\{X_1 = 3\} = 1 - p.$

Будет ли полученная оценка несмещенной и состоятельной?

12.11 По реализации $\vec{x} = (4; \ 5; \ 2)$ выборки из равномерного распределения на отрезке $[0; \ \theta]$ найти реализации оценок параметра θ, предложенных в примере **??**, и оценки максимального правдоподобия из примера **??**.

12.12 По реализации $\vec{x} = (0;\ 2;\ 0;\ 3)$ выборки из распределения Пуассона с параметром $\lambda > 0$ найти реализации оценок параметра λ методом моментов, полученных в примере 11.4, и оценки максимального правдоподобия из примера **??**.

12.13 По реализации $\vec{x} = (-2;\ 3;\ 4;\ -2;\ 1)$ выборки из равномерного распределения на отрезке $[\theta_1;\ \theta_2]$ найти реализации оценок параметров, предложенных в примере 11.5, и оценки максимального правдоподобия из примера 12.4.

12.14 Дана выборка $\vec{X} \Subset \mathrm{U}_{[0,\theta]}$, $\theta > 0$ — неизвестный параметр. Сравнить, какая из оценок для параметра θ лучше в среднеквадратичном: $\theta_1^* = 2\overline{X}$, $\theta_2^* = \frac{n+1}{n} X_{(n)}$.

12.15 Пусть $\vec{X} \Subset F(t, \theta)$, где $\theta = \mathbf{E}_\theta X_1$, $\mathbf{D} X_1 < \infty$. Показать, что оценка $\theta_1^* = \overline{X}$ является наилучшей в среднеквадратичном среди всех несмещенных оценок вида

$$\theta^* = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \cdots + C_n X_n, \quad C_1 + C_2 + \cdots + C_n = 1.$$

12.16 Исследовать с помощью неравенства Рао-Крамера оптимальность ОМП для неизвестного параметра в моделях

а) $\vec{X} \Subset \mathrm{B}_p$, $0 < p < 1$;

б) $\vec{X} \Subset \mathrm{B}_{m,p}$, $0 < p < 1$, m — известно.

в) $\vec{X} \Subset \mathrm{N}_{\theta,1}$, $-\infty < \theta < \infty$.

г) $\vec{X} \Subset \mathrm{N}_{0,\theta}$, $0 < \theta < \infty$.

д) $\vec{X} \Subset \mathrm{G}_{1/\theta}$, $\theta > 1$.

12.17 Дана выборка из распределения с плотностью

$$f_\theta(t) = \begin{cases} e^{\theta - t}, & t \geq \theta, \\ 0, & t < \theta. \end{cases}$$

Найти оценку для θ а) методом моментов; б) методом максимального правдоподобия. Будут ли полученные оценки несмещенными и состоятельными?

12.18 Вычислить смещения оценок в задаче **12.17** и получить исправленные несмещенные оценки.

Глава 13

Статистическая обработка в пакете Excel

Программные приложения Microsoft Excel для ОС Windows и Open Excel для ОС Linux не являются специализированными пакетами статистического анализа, но широко распространены и снабжены набором функций, достаточным для решения большинства статистических задач.

§ 13.1. Пример статистической обработки

Рассмотрим процедуры статистического анализа на примере искусственно сгенерированной выборки.

Пример 13.1. *Сгенерировать реализацию выборки объема* $n = 30$ *по формуле* $x_i = 1 - 100 \ln u_i$, *где* u_i *— случайные числа — образуют реализацию выборки из равномерного распределения на* $[0;\ 1]$. *Построить реализацию вариационного ряда и гистограммы, выбрав число промежутков по формуле Стеджеса. Выдвинуть две двухпараметрических гипотезы о распределении выборочных значений. Оценить параметры распределений методом моментов (по первому и второму моментам) и методом максимального правдоподобия. На основании полученных реализаций оценок построить реализации оценок функций распределения. Сделать вывод о наиболее адекватной модели.*

Решение. Получим реализацию выборки в столбике `A` электронной таблицы. Для этого в ячейку `A1` введем формулу

=1-LN(СЛЧИС())*100

(здесь `СЛЧИС()` — *математическая* функция, реализующая независимые случайные числа, равномерно распределенные на отрезке от 0 до 1).

Скопируем содержимое ячейки в ячейки `A2-A30`. Скопируем *значения* столбика `A` в тот же столбик (для этого щелкнем правой кнопкой мыши по букве `A` и в выпадающем меню выберем *специальная вставка* $\Rightarrow$ *значения*.

Копирование значений фиксирует реализацию выборки, сохраняя значения от последующего пересчета.

Вычислим количество промежутков по формуле Стеджеса: в ячейку `B1` введем формулу

=ЦЕЛОЕ(LOG(30;2))+1

В ячейках `B2, B3, B4, B5` найдем последовательно наибольшее и наименьшее значения, размах реализации выборки и длину промежутка:

ячейка	формула
B2	=МАКС(A:A)
B3	=МИН(A:A)
B4	=B2-B3
B5	=B4/B1

Последовательно прибавляя длину промежутка к минимальному значению, хранящемуся в ячейке `A1`, получаем в столбике `C` правые границы промежутков: 61,5; 117; 173; 229; 284 (округленно). Отметим, что здесь надо специально позаботиться о том, чтобы все элементы попали левее самой правой границы промежутка, для этого прибавим к самой правой границе 1, получив 285 вместо 284.

Подсчитаем количества элементов, попавших в каждый из промежутков. Для этого воспользуемся функцией `ЧАСТОТА`. Введем в ячейку `D1` формулу

=ЧАСТОТА(A1:A30;C1:C5)

Затем выделим ячейки `D1:D5`, нажмем клавишу F2 и введем формулу как формулу массива, нажав клавиши `CTRL+SHIFT+ENTER`.

В столбике `F` получим значения гистограммы, разделив значения столбика `D` на $n = 30$ и на длину промежутка, хранящуюся в ячейке `B5`. Построим гистограмму по столбику `F` с помощью функции *диаграмма* (см. рис. 13.7).

По виду гистограммы нам предстоит решить, какие гипотезы о распределении выборки следует выдвинуть. Вспомним, как выглядят графики плотности распределения изученных нами двухпараметрических семейств распределений: равномерного, сдвинутого показательного, Эрланга (гамма-распределения с целым параметром формы), Парето, нормального.

Заметим, что только сдвинутое показательное распределение и распределение Парето имеют плотности, похожие на полученную гистограмму (рис. 13.8). На рисунке слева изображен график плотности сдвинутого показательного распределения, справа — распределения Парето. Напомним, что формулы для плотностей распределений имеют следующий вид.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	5,82	5	61,5	12		0,0072	82,89	**30,58**
2	10,6	284	117	5		0,003	113,5	**0,012**
3	12,6	5,82	173	5		0,003		
4	14,4	279	229	5		0,003		
5	16,4	55,7	285	3		0,0018		
6	29,7							
7	34,6							
8	35,1							
9	39,7							
10	48,8							
11	52							
12	55,7							
13	84,6							
14	89,5							
15	108							
16	112							
17	115							
18	117							
19	154							
20	163							
21	163							
22	168							

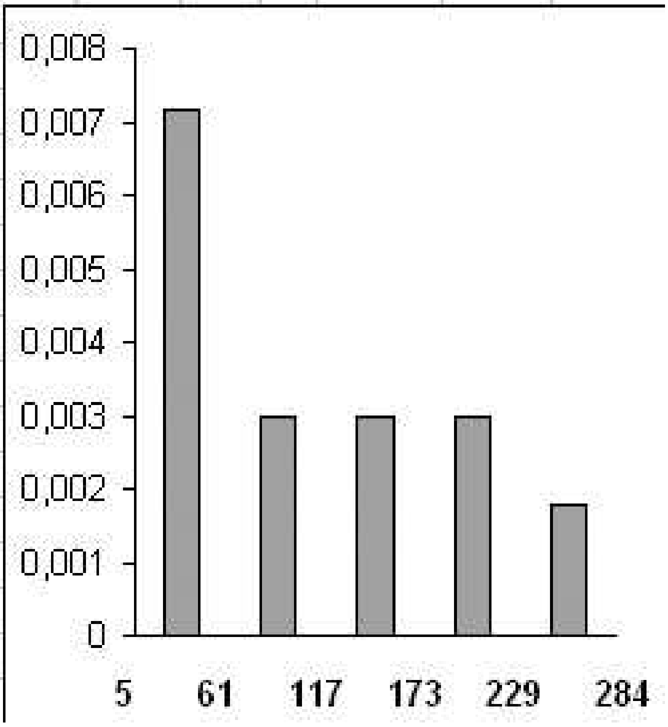


Рис. 13.7

$$f_{\alpha,\theta}(t) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha(t-\theta)}, & \text{если } t \geq \theta; \\ 0 & \text{иначе}; \end{cases} \qquad f_{\gamma,h}(t) = \begin{cases} \gamma h^{\gamma} t^{-(\gamma+1)}, & \text{если } t \geq h; \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

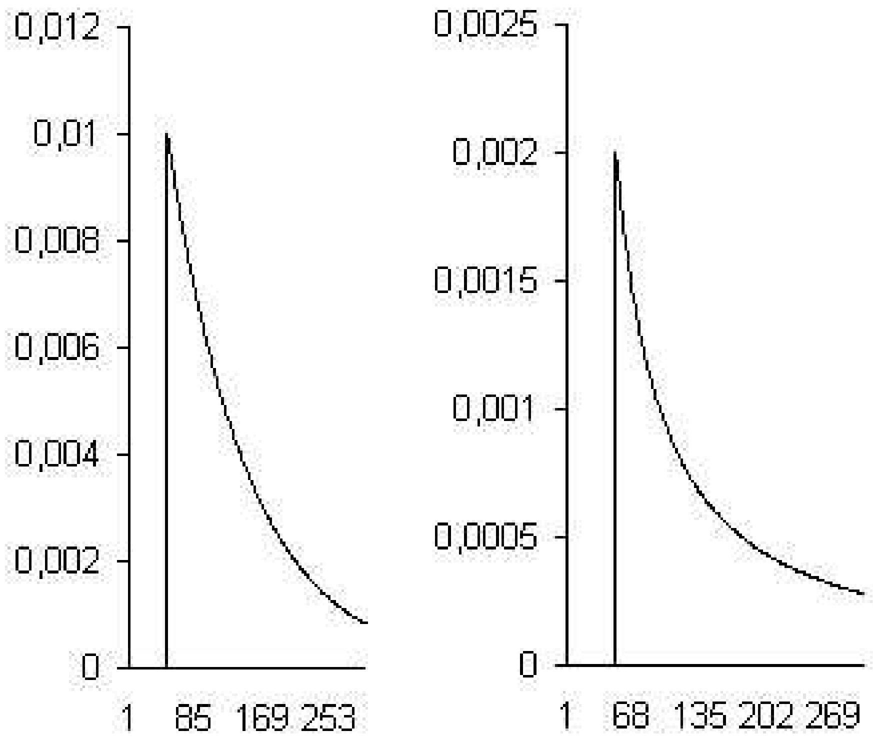


Рис. 13.8

У сдвинутого показательного распределения параметр α положительный, а параметр θ — любое действительное число. У распределения Парето оба параметра γ и h положительны. Соответствующие функции распределения имеют вид

$$F_{\alpha,\theta}(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha(t-\theta)}, & \text{если } t \geq \theta; \\ 0 & \text{иначе;} \end{cases} \qquad F_{\gamma,h}(t) = \begin{cases} 1 - h^{\gamma} t^{-\gamma}, & \text{если } t \geq h; \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Построим оценки параметров по первому и второму моментам. Для сдвинутого показательного распределения элементы выборки X_i равны $X_i = \theta + Y_i$, где Y_i образуют выборку из показательного распределения с параметром α, а θ — параметр сдвига. Как известно, $\mathbf{E}Y_i = 1/\alpha$, $\mathbf{D}Y_i = 1/\alpha^2$. Пользуясь свойствами математического ожидания и дисперсии, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \mathbf{E}X_i = \theta + 1/\alpha, \\ \mathbf{D}X_i = 1/\alpha^2. \end{cases}$$

Выразим параметры:

$$\begin{cases} \alpha = (\mathbf{D}X_i)^{-1/2}, \\ \theta = \mathbf{E}X_i - (\mathbf{D}X_i)^{1/2}. \end{cases}$$

Заменим математическое ожидание и дисперсию на выборочное среднее $\overline{X}$ и выборочную дисперсию S^2, а параметры α и θ на их оценки α^* и θ^*. Получим оценки параметров:

$$\begin{cases} \alpha^* = S^{-1}, \\ \theta^* = \overline{X} - S. \end{cases}$$

Найдем реализации этих оценок. Выборочное стандартное отклонение S — это функция `СТАНДОТКЛОНП`, а выборочное среднее — функция `СРЗНАЧ`. Вычислим их значения в ячейках `G1` и `G2`, введя туда функции `=СТАНДОТКЛОНП(A:A)` и `=СРЗНАЧ(A:A)`. В ячейках `H1` и `H2` получим реализации оценок θ^* и α^*. Для того, чтобы понять, насколько хороши оценки методом моментов, построим графики реализаций параметрической оценки функции распределения $F(t, \alpha^*, \theta^*)$ и эмпирической функции распределения $F_n^*(t)$. Получим формулу для интервала дискретизации dt переменной t, исходя из того, чтобы dt было целой степенью числа 10, и множество выборочных значений делилось не менее чем на 100 интервалов. Обозначив через $R = X_{(n)} - X_{(1)}$ размах выборки, получаем:

$$R/100 \geq dt, \qquad dt = 10^k, \qquad dt \ \leq 10^{\lg R - 2}.$$

Выбирая в качестве dt наибольшее из таких чисел, приходим к формуле

$$dt = 10^{[\lg R] - 2},$$

где $[\cdot]$ — целая часть числа.

Поскольку в нашем примере размах выборки равен 279, получаем $[\lg 279] = 2$, и $dt = 1$. Найдем значения оценки функции распределения по формуле

=ЕСЛИ(СТРОКА()<H$1;0;1-EXP(-H$2*(СТРОКА()-H$1)))

и скопируем эту формулу в ячейки `I1:I285`.

Получим значения эмпирической функции распределения в тех же точках. Для этого создадим вспомогательный столбик `M`, содержащий границы промежутков дискретизации, скопировав функцию `=СТРОКА()` в ячейки `M1:M285`. Потом подсчитаем, сколько элементов выборки попало в каждый из промежутков. Для этого воспользуемся функцией `ЧАСТОТА`. Введем в ячейку `P1` формулу

=ЧАСТОТА(A1:A30;M1:M285)

Затем выделим ячейки `P1:P285`, нажмем клавишу F2 и введем формулу как формулу массива, нажав клавиши `CTRL+SHIFT+ENTER`. Теперь получим значения эмпирической функции распределения в столбике `J`, введя в первую ячейку формулу

=СУММ(P$1:P1)/30

и скопировав ее в остальные ячейки. Здесь $30 = n$ — объем выборки.

Построим диаграмму по столбикам `I` и `J` (рис. 13.9).

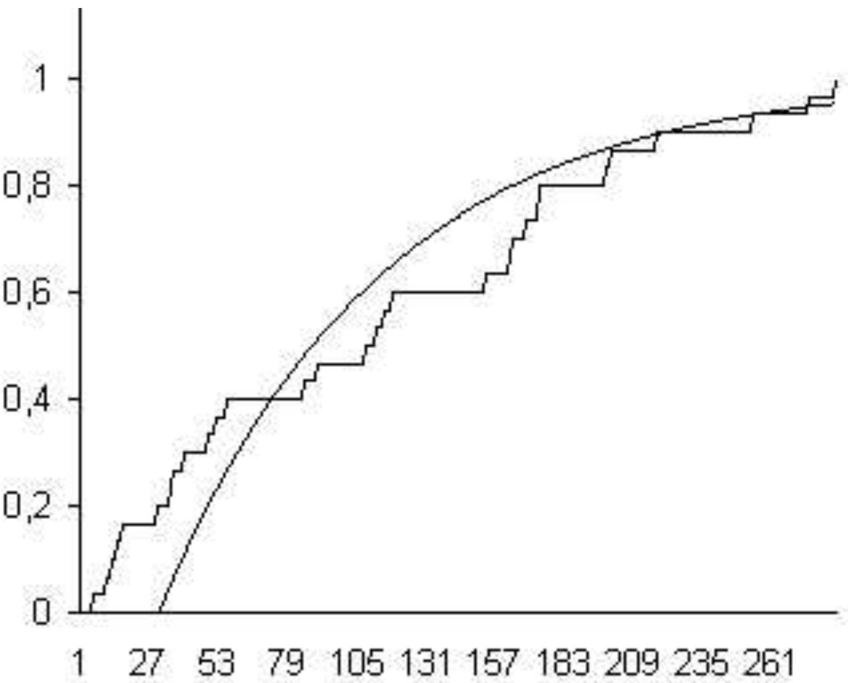


Рис. 13.9

Теперь получим оценки максимального правдоподобия для параметров α и θ сдвинутого показательного распределения. Заметим, что плотность распределения

$$f_{\alpha,\theta}(t) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha(t-\theta)}, & \text{если } t \geq \theta; \\ 0 & \text{иначе;} \end{cases}$$

непрерывна по параметру $\alpha > 0$ и разрывна по параметру θ. Сначала найдем оценку параметра θ непосредственно отысканием точки максимума функции правдопобобия. Функция правдоподобия равна

$$\Pi(\vec{X}, \alpha, \theta) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n}(\alpha e^{-\alpha(X_i-\theta)}), & \text{если все } X_i \geq \theta; \\ 0 & \text{иначе;} \end{cases}$$

или

$$\Pi(\vec{X},\alpha,\theta) = \begin{cases} \alpha^n e^{-\alpha(\sum_{i=1}^n X_i - n\theta)}, & \text{если } \theta \le \min\{X_i\}; \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Зависимость функции правдоподобия от параметра θ изображена на рис 13.10. Ее максимум достигается в точке $\widehat{\theta} = \min\{X_i\}$, которая является оценкой максимального правдоподобия параметра θ.

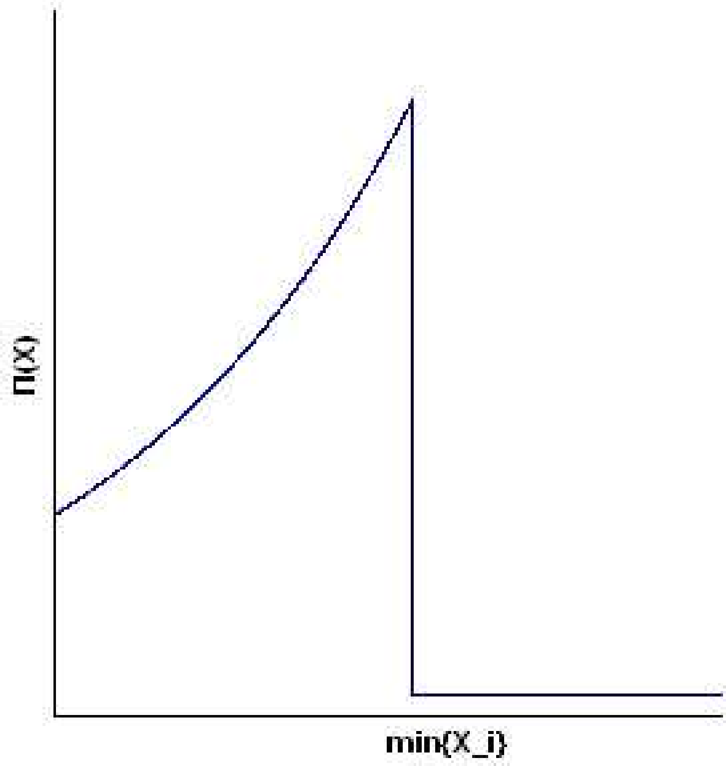


Рис. 13.10

Найдем оценку максимального правдоподобия параметра α. Для этого последовательно вычислим

$$\ln f(t, \alpha, \theta) = \ln \alpha - \alpha(t - \theta)$$

при $t \geq \theta$;

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \ln f(t, \alpha, \theta) = \frac{1}{\alpha} - (t - \theta)$$

при $t \geq \theta$;

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \ln \Pi(\vec{X}, \alpha, \theta) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \alpha} \ln f(X_i, \alpha, \theta) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\alpha} - (X_i - \theta) \right),$$

если все $X_i \geq \theta$. Приравнивая производную логарифма функции правдоподобия к нулю, получаем уравнение для определения оценки параметра α:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\alpha} - (X_i - \theta) \right) = 0,$$

решением которого является

$$\alpha = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\theta} = \frac{1}{\overline{X} - \theta}.$$

Поскольку параметр θ неизвестен, заменим его на оценку максимального правдоподобия $\widehat{\theta} = \min\{X_i\}$ и получим

$$\widehat{\alpha} = \frac{1}{\overline{X} - \min\{X_i\}}.$$

Условие $X_i \geq \widehat{\theta}$ оказывается выполненным автоматически.

Найдем реализации оценок максимального правдоподобия и построим графики реализаций параметрической оценки функции распределения $F(t, \widehat{\alpha}, \widehat{\theta})$ (как для оценок методом моментов) и эмпирической функции распределения $F_n^*(t)$. График приведен на рис. 13.11.

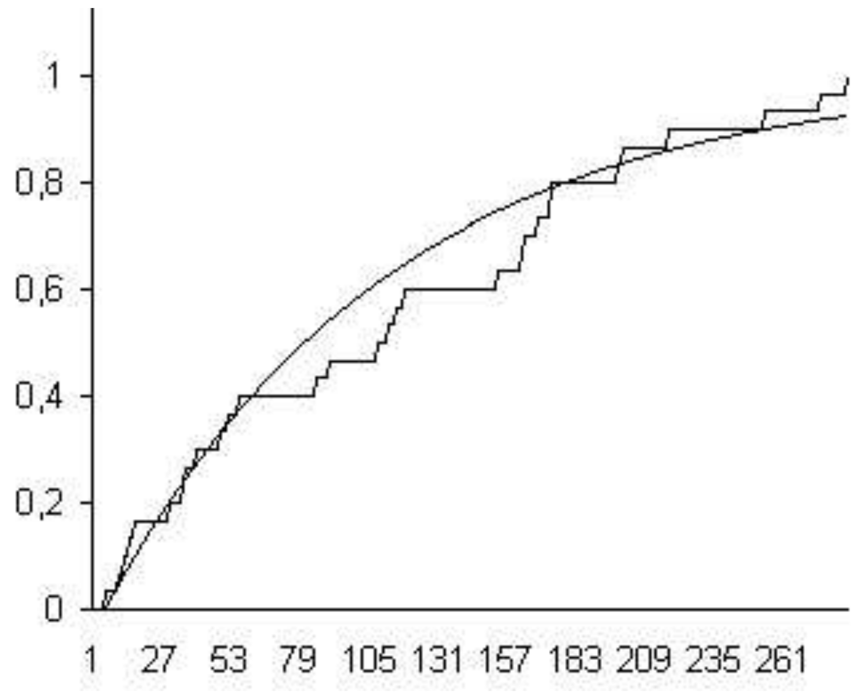


Рис. 13.11

Сравнивая результат с рис. 13.9, видим, что использование оценок максимального правдоподобия позволяет более точно приблизить эмпирическую функцию распределения.

Построим оценки параметров распределения Парето по первому и второму моментам. Вспомним, что плотность распределения задается формулой

$$f_{\gamma,h}(t) = \begin{cases} \gamma h^{\gamma} t^{-(\gamma+1)}, & \text{если } t \geq h; \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Вычислим $\mathbf{E}X_i$ и $\mathbf{E}X_i^2$:

$$\mathbf{E}X_i = \int_{-\infty}^{\infty} t f_{\gamma,h}(t)dt = \int_{h}^{\infty} t\gamma h^{\gamma} t^{-(\gamma+1)}dt =$$

$$= \gamma h^\gamma \int_h^\infty t^{-\gamma} dt = \gamma h^\gamma \frac{t^{-\gamma+1}}{-\gamma+1}|_h^\infty = \frac{\gamma h^\gamma h^{-\gamma+1}}{\gamma-1} = \frac{\gamma h}{\gamma-1},$$

если $\gamma > 1$ (в противном случае математическое ожидание не существует). Аналогично

$$\mathbf{E}X_i^2 = \int_{-\infty}^\infty t^2 f_{\gamma,h}(t)dt = \int_h^\infty t^2 \gamma h^\gamma t^{-(\gamma+1)} dt =$$

$$= \gamma h^\gamma \int_h^\infty t^{-\gamma+1} dt = \gamma h^\gamma \frac{t^{-\gamma+2}}{-\gamma+2}|_h^\infty = \frac{\gamma h^\gamma h^{-\gamma+2}}{\gamma-2} = \frac{\gamma h^2}{\gamma-2},$$

если $\gamma > 2$ (в противном случае второй момент не существует).

Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \mathbf{E}X_i = \frac{\gamma h^2}{\gamma-2}, \\ \mathbf{E}X_i^2 = \frac{\gamma h^2}{\gamma-2}. \end{cases}$$

Выразим параметры:

$$h = \frac{\gamma-1}{\gamma}\mathbf{E}X_i,$$

$$\frac{\gamma(\gamma-1)^2}{\gamma^2(\gamma-2)}(\mathbf{E}X_i)^2 = \mathbf{E}X_i^2,$$

$$(\gamma-1)^2(\mathbf{E}X_i)^2 = \gamma(\gamma-2)\mathbf{E}X_i^2.$$

Получаем квадратное уравнение:

$$\mathbf{D}X_i\gamma^2 - 2\mathbf{D}X_i\gamma - (\mathbf{E}X_i)^2 = 0.$$

Решая его и выбирая положительный корень, получаем:

$$\gamma = 1 + \sqrt{1 + \frac{(\mathbf{E}X_i)^2}{\mathbf{D}X_i}}.$$

Заменим математическое ожидание и дисперсию на выборочное среднее $\overline{X}$ и выборочную дисперсию S^2, а параметры h и γ на их оценки h^* и γ^*. Получим оценки параметров:

$$\begin{cases} \gamma^* = 1 + \sqrt{1 + \frac{(\overline{X})^2}{S^2}}, \\ h = \frac{\gamma^*-1}{\gamma^*}\overline{X}. \end{cases}$$

Отметим, что оценка параметра γ всегда не меньше числа 2, что соответствует требованию к параметру, обеспечивающему конечность второго момента. Найдем реализации оценок по выборке и построим графики реализаций параметрической оценки функции распределения $F(t, h^*, \gamma^*)$ по формуле

$$=\text{ЕСЛИ}(\text{СТРОКА}() < R\$1; 0; 1 - (\text{СТРОКА}()/R\$1)\hat{}(-R\$2))$$

и эмпирической функции распределения $F_n^*(t)$. График приведен на рис. 13.12.

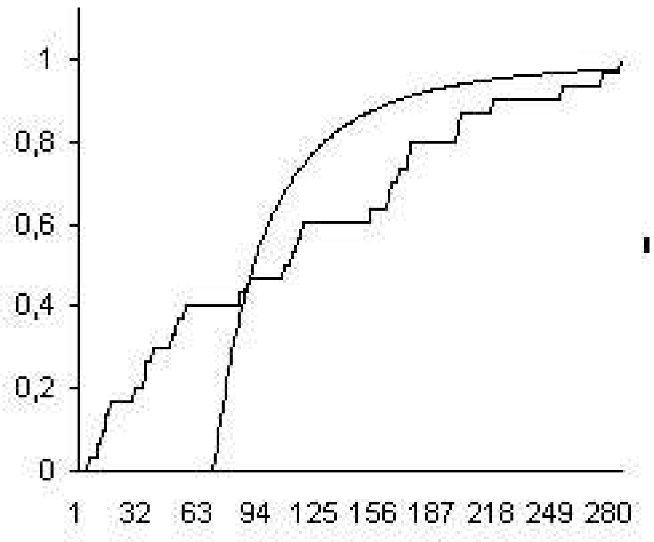


Рис. 13.12

Из рисунка видно, что приближение в этом случае оказывается очень неудачным.

Получим оценки параметров распределения Парето методом максимального правдоподобия.

Сначала найдем оценку параметра h непосредственно отысканием точки максимума функции правдопобобия. Для этого запишем функцию правдоподобия

$$\Pi(\vec{X}, h, \gamma) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n} (\gamma h^{\gamma} X_i^{-(\gamma+1)}), & \text{если все } X_i \geq \theta; \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Зависимость функции правдоподобия от параметра h имеет тот же характер, что и в случае сдвинутого показательного распределения зависимость от параметра θ. Она изображена схематично на рис. 13.10. Ее максимум достигается в точке $\widehat{h} = \min\{X_i\}$, которая является оценкой максимального правдоподобия параметра h.

Найдем оценку максимального правдоподобия параметра γ. Для этого последовательно вычислим

$$\ln f(t, h, \gamma) = \ln \gamma + \gamma \ln h - (\gamma + 1) \ln t$$

при $t \geq h$;

$$\frac{\partial}{\partial \gamma} \ln f(t, h, \gamma) = \frac{1}{\gamma} + \ln h - \ln t$$

при $t \geq h$. Приравнивая производную логарифма функции правдоподобия к нулю, получаем уравнение для определения оценки параметра γ:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\gamma} + \ln h - \ln X_i \right) = 0,$$

решением которого является

$$\gamma = \frac{1}{\overline{\ln X} - \ln h}.$$

Поскольку параметр h неизвестен, заменим его на оценку максимального правдоподобия $\widehat{h} = \min\{X_i\}$ (так же мы поступали при нахождении оценок для сдвинутого показательного распределения) и получим

$$\widehat{\gamma} = \frac{1}{\overline{\ln X} - \ln(\min\{X_i\})}.$$

Условие $X_i \geq \widehat{h}$ оказывается выполненным автоматически.

Найдем реализации оценок максимального правдоподобия. Отметим, что для нахождения выборочного усреднения логарифма $\overline{\ln X}$ нужно предварительно в отдельном столбике вычислить логарифмы всех выборочных значений, скопировав функцию `=LN(A1)`, и затем вычислить среднее из 30 значений логарифмов.

Построим графики реализаций параметрической оценки функции распределения $F(t, \widehat{h}, \widehat{\gamma})$ (как для оценок методом моментов) и эмпирической функции распределения $F_n^*(t)$.

График приведен на рис. 13.13.

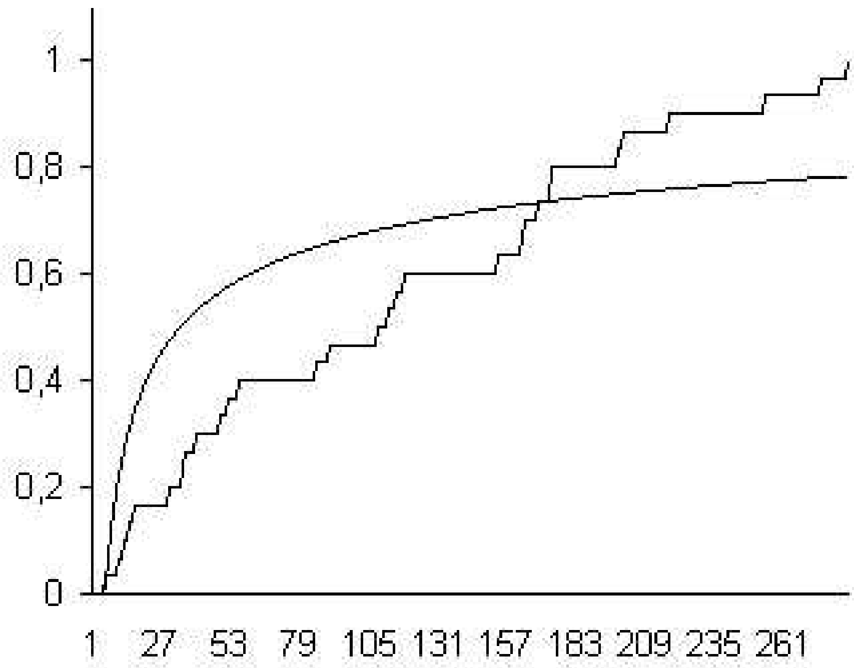


Рис. 13.13

Анализируя график, видим, что для распределения Парето и оценки максимального правдоподобия не дают хорошего приближения эмпирической функции распределения. На основании проведенного исследования можно заключить, что более адекватной моделью является модель сдвинутого показательного распределения, и лучший метод оценивания ее параметров — метод максимального правдоподобия. Оценки максимального правдоподобия здесь получаются смещенными, однако мы не будем обсуждать, как можно уменьшить смещение.

§ 13.2. Задачи для самостоятельного решения

В тексте задания через № обозначен номер студента по списку группы.

Задача 13.1

1. Для выборки $X_1, \ldots, X_n$ из равномерного распределения на $[0;\ \theta]$ получить оценки параметра θ методом моментов на основании первого, второго, №+2-го момента. Вычислить $E(X_1 + \text{№})e^{X_1/\text{№}}$ и на этом основании получить оценку параметра θ через усреднение соответствующей функции по выборке.
2. Для той же выборки найти оценку максимального правдоподобия параметра θ, вычислить ее математическое ожидание и исправить ее, получив несмещенную оценку.
3. Генерировать реализацию выборки объема $n = 100+\text{№}$ из равномерного распределения на $[0;\ \theta]$, приняв $\theta = \text{№}$. Построить гистограмму, выбрав число промежутков группирования по формуле Стеджеса.
4. По реализации выборки вычислить реализации всех полученных оценок. Подсчитать абсолютные погрешности оценивания и ранжировать оценки по абсолютной погрешности.

Глава 14

Интервальное оценивание

§ 14.1. Определение доверительного интервала

Пусть имеется выборка объема n из распределения, известного с точностью до параметра: $\vec{X} \Subset F(t, \theta)$, $\theta \in \Theta$. *Доверительным интервалом с уровнем доверия* γ (γ-доверительным интервалом) для неизвестного параметра θ называют случайный интервал $(\theta_-;\ \theta_+) \subset \Theta$, построенный по выборке, который накрывает неизвестное значение параметра с вероятностью, равной γ, или по крайней мере стремящейся к γ с ростом объема выборки, то есть

$$\mathbf{P}\{\theta \in (\theta_-;\ \theta_+)\} \to \gamma \tag{14.1}$$

при $n \to \infty$.

В случае, когда вместо сходимости выполняется точное равенство, доверительный интервал называется *точным*.

θ_-, θ_+ — это оценки параметра θ, называемые *нижней и верхней доверительными границами*. Число $\gamma \in (0;\ 1)$ — уровень доверия, или доверительная вероятность, — выбирается заранее и отражает, как сказано в [7], "степень готовности мириться с возможностью ошибки": чем менее мы готовы мириться с возможной ошибкой, тем большее значение γ должны устанавливать.

§ 14.2. Распределения, связанные с нормальным

При построении доверительных интервалов для параметров нормального распределения мы будем использовать два специальных распределения, связанных с нормальным: распределение хи-квадрат и распределение Стьюдента. Название «распределение Стьюдента» связано с именем английского статистика К. Госсета, который подписывал свои работы псевдонимом «Стьюдент».

Случайная величина Z_n имеет *распределение хи-квадрат с n степенями свободы*, если

$$Z_n = {X_1}^2 + \ldots + {X_n}^2,$$

где $X_1, \ \ldots, \ X_n$ — независимые случайные величины со стандартным нормальным распределением. Отметим, что «число степеней свободы» — это просто традиционное название для параметра n распределения хи-квадрат. Параметр n — положительное целое число. В частности, при $n = 1$ получаем квадрат одной случайной величины со стандартным нормальным распределением: $Z_1 = X^2$, где $X \Subset N_{0,\,1}$.

Будем использовать следующее обозначение: $Z_n \Subset \chi^2_n$.

Отметим следующие свойства распределения хи-квадрат.

Следствие 14.1. *Пусть $Z_n \Subset \chi^2_n$. Тогда*
1) $\mathbf{E}Z_n = n$;
2) $Z_n/n \to 1$ почти наверное при $n \to \infty$.

Доказательство.
Во-первых,

$$\mathbf{E}Z_1 = \mathbf{E}X^2 = \mathbf{D}X + (\mathbf{E}X)^2,$$

где X имеет стандартное нормальное распределение, и потому $\mathbf{E}X = 0$, $\mathbf{D}X = 1$. Следовательно,

$$\mathbf{E}Z_1 = 1 + 0^2 = 1.$$

1) По определению распределения хи-квадрат,

$$\mathbf{E}Z_n = \mathbf{E}({X_1}^2 + \ldots + {X_n}^2) = \mathbf{E}{X_1}^2 + \ldots + \mathbf{E}{X_n}^2 = n\mathbf{E}{X_1}^2 = n \cdot 1 = n.$$

2) Так как Z_n — сумма независимых одинаково распределенных случайных величин, то справедлив закон больших чисел Колмогорова:

$$Z_n/n = \frac{{X_1}^2 + \ldots + {X_n}^2}{n} \to \mathbf{E}{X_1}^2 = 1$$

почти наверное при $n \to \infty$. Доказательство завершено.

Случайная величина Y_n имеет *распределение Стьюдента с n степенями свободы*, если

$$Y_n = \frac{X}{\sqrt{Z_n/n}},$$

где случайные величины X и Z_n независимы, причем X имеет стандартное нормальное распределение, а Z_n имеет распределение хи-квадрат с n степенями свободы. Здесь, как и у распределения хи-квадрат, n — это просто положительный целый параметр.

Будем использовать следующее обозначение: $Y_n \Subset T_n$.

Отметим следующие свойства распределения Стьюдента.

Следствие 14.2. *Пусть $Y_n \Subset T_n$. Тогда*

1) для любого t выполнено $\mathbf{P}\{Y_n < -t\} = \mathbf{P}\{Y_n > t\}$, то есть распределение Стьюдента симметрично;

2) $Y_n \to X$ почти наверное при $n \to \infty$, где X имеет стандартное нормальное распределение.

Доказательство.

1) Симметрия следует из симметрии стандартного нормального распределения:

$$\mathbf{P}\{Y_n < -t\} = \mathbf{P}\{X < -t\sqrt{Z_n/n}\} = \mathbf{P}\{X > t\sqrt{Z_n/n}\} = \mathbf{P}\{Y_n > t\}.$$

2) Сходимость следует из свойства сходимости почти наверное, непрерывности функции $x/\sqrt{y}$ и из свойства распределения хи-квадрат. Доказательство завершено.

§ 14.3. Точные доверительные интервалы

Наиболее распространенной ситуацией, когда возможно построение точных доверительных интервалов, является случай нормального распределения: $\vec{X} \Subset \mathrm{N}_{a,\sigma^2}$, — когда хотя бы один из его параметров неизвестен. В этом случае известно совместное распределение наиболее употребительных оценок $\overline{X}$ и S^2 параметров a и σ^2, с помощью которого и строятся соответствующие доверительные интервалы. Основные результаты содержатся в следующей теореме, которую примем без доказательства.

Теорема 14.1. (Теорема Фишера) *Пусть* $\vec{X} \Subset \mathrm{N}_{a,\sigma^2}$. *Тогда верны следующие 4 факта:*

1) $\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-a)}{\sigma} \Subset \mathrm{N}_{0,1}$.

2) $\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-a)^2}{\sigma^2} \Subset \chi^2_n$.

3) $\frac{nS^2}{\sigma^2} \Subset \chi^2_{n-1}$.

4) $\frac{\sqrt{n-1}\left(\overline{X}-a\right)}{S} \Subset T_{n-1}$.

Отметим, что первое утверждение теоремы следует сразу же из свойств нормального распределения, второе — из определения распределения хи-квадрат с учетом того факта, что $\frac{X_i-a}{\sigma}$ имеет стандартное нормльное распределение. Третье утверждение — нетривиальный факт, прокомментировать который можно следующим образом. Вспомним, что

$$nS^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2.$$

Если выборка состоит из одного элемента X_1, то есть $n = 1$, то

$$\frac{nS^2}{\sigma^2} = \frac{(X_1 - X_1)^2}{\sigma^2} = 0,$$

— случайная величина имеет распределение, вырожденное в точке ноль, которое можно по определению считать распределением хи-квадрат с нулевым числом степеней свободы.

Если выборка состоит из двух элементов $(X_1;\ X_2)$, то есть $n = 2$, то

$$\frac{nS^2}{\sigma^2} = \frac{(X_1 - (X_1 - X_2)/2)^2 + (X_2 - (X_1 - X_2)/2)^2}{\sigma^2} = \frac{(X_1 - X_2)^2}{2\sigma^2}.$$

Отметим, что $\mathbf{E}(X_1 - X_2) = 0$. Так как X_1 и X_2 независимы, то $\mathbf{D}(X_1 - X_2) = \mathbf{D}X_1 + \mathbf{D}X_2 = 2\sigma^2$. Согласно свойствам нормального распределения, $X_1 - X_2 \Subset \mathrm{N}_{0,2\sigma^2}$, то есть $X_1 - X_2 = \sqrt{2}\sigma X$, где X имеет стандартное нормальное распределение. Поэтому

$$\frac{nS^2}{\sigma^2} = \frac{2\sigma^2 X^2}{2\sigma^2} = X^2 \Subset \chi^2_1.$$

Доказательство для $n \geq 2$ оказывается существенно более сложным, и приводить его здесь мы не будем.

Четвертое утверждение следует из третьего и определения распределения Стьюдента.

Пример 14.1. *Пусть* $\vec{X} \Subset \mathrm{N}_{\theta,\sigma^2}$, $\theta \in R$. *Построить доверительный интервал для параметра* θ, *считая* σ^2 *известным. Вычислить реализацию доверительного интервала с уровнем доверия* $\gamma = 0,95$, *располагая данными:* $n = 10$, $\overline{X} = 2,7$, $\sigma^2 = 4$.

Решение. Для построения доверительного интервала используем оценку $\overline{X}$, распределение которой известно. Для заданной доверительной вероятности γ найдем такое $A > 0$, что

$$\gamma = \mathbf{P}\left\{\left|\sqrt{n}\frac{\overline{X}-\theta}{\sigma}\right| < A\right\} = \mathbf{P}\left\{-\frac{\sigma A}{\sqrt{n}} < \overline{X}-\theta < \frac{\sigma A}{\sqrt{n}}\right\}. \tag{14.2}$$

Таким образом, нужно искать $\varepsilon_1 = -\frac{\sigma A}{\sqrt{n}}$, $\varepsilon_2 = \frac{\sigma A}{\sqrt{n}}$ такие, что выполняется равенство:

$$\mathbf{P}\left\{\varepsilon_1 < \overline{X}-\theta < \varepsilon_2\right\} = \gamma.$$

Для этого вернемся к (14.2). В силу следствия **??**, случайная величина, стоящая под знаком модуля, имеет стандартное нормальное распределение, поэтому вероятность в правой части можно выразить через функцию распределения $\Phi(t)$ закона $N_{0,1}$, и тогда уравнение (14.2) приобретает вид:

$$2\Phi(A) - 1 = \gamma \iff \Phi(A) = \frac{1+\gamma}{2}, \tag{14.3}$$

где $\Phi(t)$ - функция, значения которой представлены в таблице 3. Заметим, что значение $A = A_{\frac{1+\gamma}{2}}$, удовлетворяющее (14.3), представляет квантиль уровня $\frac{1+\gamma}{2}$ распределения $N_{0,1}$. Найдя его по таблице 3 и подставив в (14.2), получим равенство:

$$\gamma = \mathbf{P}\left\{\left|\sqrt{n}\frac{\overline{X}-\theta}{\sigma}\right| < A_{\frac{1+\gamma}{2}}\right\} = \mathbf{P}\left\{-A_{\frac{1+\gamma}{2}} < \sqrt{n}\frac{\theta-\overline{X}}{\sigma} < A_{\frac{1+\gamma}{2}}\right\} \iff$$

$$\iff \gamma = \mathbf{P}\left\{\overline{X} - \sigma\frac{A_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}} < \theta < \overline{X} + \sigma\frac{A_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}\right\}, \tag{14.4}$$

откуда искомый γ-доверительный интервал:

$$(\theta_-;\ \theta_+) = \left(\overline{X} - \sigma\frac{A_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}},\ \overline{X} + \sigma\frac{A_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}\right).$$

Подставляя сюда конкретные данные из условия, вычисляем реализацию доверительного интервала:

$$(\theta_-;\ \theta_+) \approx \left(2,7 - 2\frac{1,96}{\sqrt{10}},\ 2,7 - 2\frac{1,96}{\sqrt{10}}\right) \approx (1,46; 3,94) \iff$$

$$\Longleftrightarrow \quad \mathbf{P}(1,46 < \theta < 3,94) = 0,95.$$

Замечание 14.1. *Построенный доверительный интервал оказался симметричным относительно выборочного среднего* $\overline{X}$ *и имеет длину* $2A\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, *пропорциональную значению* A, *которое было найдено из условия* (14.2).

Пример 14.2. *Пусть* $\vec{X} \Subset \mathrm{N}(\theta_1, \theta_2)$, $\theta_1 \in R$, $\theta_2 > 0$, *где оба параметра неизвестны. Построить доверительный интервал для параметра* θ_2. *Вычислить реализацию доверительного интервала с уровнем доверия* $\gamma = 0,9$, *располагая данными:* $n = 10$, $S^2 = 4$.

Решение. Используя лемму Фишера, проще всего построить так называемый односторонний доверительный интервал. Для этого по заданной доверительной вероятности $\gamma = 0,9$ найдем такое $B > 0$, что

$$\gamma = \mathbf{P}\left\{\frac{nS^2}{\theta_2} > B\right\} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{P}\left\{\frac{nS^2}{\theta_2} \le B\right\} = 1 - \gamma. \qquad (14.5)$$

Учитывая, что случайная величина $\frac{nS^2}{\theta_2}$ имеет распределение χ^2_{n-1}, нетрудно видеть, что искомое B есть не что иное, как квантиль $\chi^2_{1-\gamma,n-1}$ этого распределения. Подставляя его в (14.5) и разрешая неравенство под знаком вероятности относительно θ_2, находим доверительный интервал:

$$\gamma = \mathbf{P}\left\{\frac{nS^2}{\theta_2} > \chi^2_{1-\gamma,n-1}\right\} \quad \Longleftrightarrow \quad \gamma = \mathbf{P}\left\{\frac{nS^2}{\chi^2_{1-\gamma}, n-1} > \theta_2\right\} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (\theta_-;\ \theta_+) = \left(0, \frac{nS^2}{\chi^2_{1-\gamma,n-1}}\right).$$

Подставляя конкретные данные, находим реализацию доверительного интервала:

$$\chi^2_{0.1,9} = 4,17; \quad (\theta_-;\ \theta_+) = (0;\ 8,63).$$

Чтобы построить двусторонний доверительный интервал, вместо (14.5) используем следующее уравнение:

$$\gamma = \mathbf{P}_\theta\left\{x_1 < \frac{nS^2}{\theta_2} < x_2\right\} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{P}_\theta\left\{\frac{nS^2}{x_2} < \theta_2 < \frac{nS^2}{x_1}\right\} = \gamma, \qquad (14.6)$$

где $0 < x_1 < x_2$, удовлетворяющие (14.6), находим по известному распределению χ^2_{n-1} случайной величины $\frac{nS^2}{\theta_2}$. В общем случае эта задача не имеет единственного решения. Если обратиться к графику плотности распределения χ^2_{n-1}, представленному на Рис.14.1, то $x_1 < x_2$ следует выбирать таким образом, чтобы сумма вероятностей, представленных площадями заштрихованных областей под графиком плотности, равнялась $1-\gamma$. Ясно, что это можно сделать многими способами.

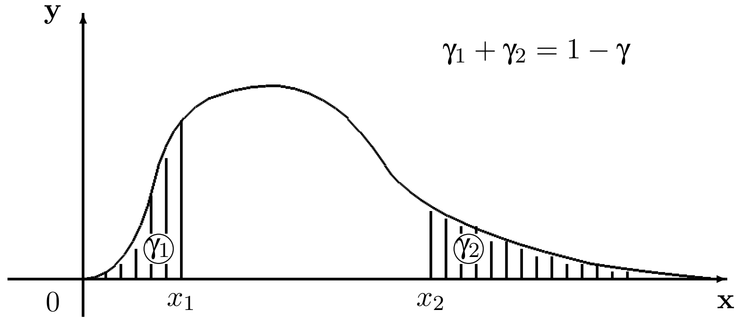


Рис. 14.1: Плотность распределения χ^2_{n-1}

Чтобы сделать решение однозначным, выберем $x_1 < x_2$ так, чтобы каждая из заштрихованных площадей равнялась $\frac{1-\gamma}{2}$, тогда нетрудно видеть, что x_1, x_2 выражаются через квантили распределения χ^2_{n-1}:

$$x_1 = \chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}, n-1}, \quad x_2 = \chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}, n-1}.$$

Подставляя это в (14.6), находим искомый двусторонний доверительный интервал:

$$\mathbf{P}_\theta \left\{ \frac{nS^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}, n-1}} < \theta_2 < \frac{nS^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}, n-1}} \right\} = \gamma \iff I^*(\vec{X}) = \left(\frac{nS^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}, n-1}}, \ \frac{nS^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}, n-1}} \right).$$

Находя по таблице 5 $\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}, n-1}$, $\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}, n-1}$ — квантили распределения χ^2_{n-1} для конкретных значений $\gamma = 0.9$, $n = 10$ — и подставляя другие данные в условии численные значения, находим :

$$\chi^2_{\frac{1+0,9}{2}, 9} = 16,9; \ \chi^2_{\frac{1-0,9}{2}, 9} \approx 3,325;$$

$$(\sigma^2_-, \ \sigma^2_+) = (2,37; 12,03).$$

§ 14.4. Асимптотические доверительные интервалы

Для построения асимптотических доверительных интервалов будем исходить, как и в предыдущем разделе, из некоторой оценки $T^* = T_n^*(\vec{X})$ параметрической функции $\tau(\theta)$ и неравенства:

$$\mathbf{P}_\theta\{\varepsilon_1 < T^* - \tau(\theta) < \varepsilon_2\} \geq \gamma \quad \forall\theta \in \Theta. \tag{14.7}$$

Только, в отличие от предыдущего, для нахождения значений $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, удовлетворяющих (14.7) при заданном уровне γ, вероятность в левой части (14.7) находится приближенно.

Пример 14.3. *Пусть* $\vec{X} \Subset \mathrm{E}(\alpha)$, $\alpha > 0$. *Построить асимптотический доверительный интервал для параметра* α *на базе асимптотически нормальной оценки* $\alpha_n^* = \frac{1}{\overline{X}}$.

Решение. Из примера **??** следует, что оценка $\alpha_n^* = \frac{1}{\overline{X}}$ является асимптотически нормальной оценкой для параметра α с асимптотической дисперсией $\sigma^2(\alpha) = \alpha^2$. Следовательно, при больших значениях n можно считать, что распределение статистики $\sqrt{n}(\alpha_n^* - \alpha)$ - нормальное $N(0, \sigma^2(\alpha))$, и действовать так, как при решении примера 14.1. В этом случае, как следует из результата примера **??**, оптимальным является центральный доверительный интервал. Применительно к нашей ситуации, центральный доверительный интервал будет **асимптотически оптимальным**. Чтобы его построить, для заданной доверительной вероятности γ найдем, как при решении примера 14.1, положительное число $x = x_{\frac{1+\gamma}{2}}$ такое, что

$$\gamma \approx \mathbf{P}_\alpha\left\{\left|\sqrt{n}\frac{\alpha_n^* - \alpha}{\sigma(\alpha)}\right| < x\right\} = \mathbf{P}_\alpha\left\{\left|\sqrt{n}\frac{\frac{1}{\overline{X}} - \alpha}{\alpha}\right| < x\right\}.$$

Как и прежде, разрешая неравенство под знаком вероятности относительно параметра α, получим:

$$\mathbf{P}_\alpha\left\{\left|\sqrt{n}\frac{\frac{1}{\overline{X}} - \alpha}{\alpha}\right| < x\right\} = \mathbf{P}_\alpha\left\{-\alpha\frac{x}{\sqrt{n}} < \alpha - \frac{1}{\overline{X}} < \alpha\frac{x}{\sqrt{n}}\right\} =$$

$$= \mathbf{P}_\alpha\left\{\frac{1}{\overline{X}(1 + x/\sqrt{n})} < \alpha < \frac{1}{\overline{X}(1 - x/\sqrt{n})}\right\}.$$

Подставляя сюда значение квантиля нормального распределения $x = x_{\frac{1+\gamma}{2}}$ и учитывая предыдущие равенства, получим:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_\alpha \left\{ \frac{1}{\overline{X}(1+x/\sqrt{n})} < \alpha < \frac{1}{\overline{X}(1-x/\sqrt{n})} \right\} = \gamma.$$

Следовательно, асимптотический γ-доверительный интервал имеет вид:

$$I_n^*(\vec{X}) = \left(\frac{1}{\overline{X}(1+x/\sqrt{n})}, \quad \frac{1}{\overline{X}(1-x/\sqrt{n})} \right).$$

Замечание 14.2. *Интересно сравнить доверительные интервалы* $I^*(\vec{X})$
и $I_n^*(\vec{X})$, *построенные в примерах 14.2 и 14.3. Их длины равны соответственно:*

$$|I^*| = \frac{1}{\overline{X}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n(1-\gamma)}} \right) - \frac{1}{\overline{X}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n(1-\gamma)}} \right) = \frac{2}{\overline{X}\sqrt{n}\sqrt{1-\gamma}},$$

$$|I_n^*| = \frac{1}{\overline{X}(1-x/\sqrt{n})} - \frac{1}{\overline{X}(1+x/\sqrt{n})} = \frac{2x_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\overline{X}\sqrt{n}(1-x^2_{\frac{1+\gamma}{2}}/n)}.$$

Сравнивая эти выражения, можно видеть, что доверительный интервал $I_n^*(\vec{X})$ *лучше, чем* $I^*(\vec{X})$, *при больших* n *и близких к 1 значениях* γ. *Например, при* $n = 100$ *и* $\gamma = 0,99$ *длины интервалов равны:* $|I^*| = 2\frac{1}{\overline{X}}$, $|I_n^*| = 0,56\frac{1}{\overline{X}}$.

§ 14.5. Задачи для самостоятельного решения

14.1 Пусть $\vec{X} \Subset N(\theta_1, \theta_2)$, $\theta_1 \in R$, $\theta_2 > 0$. Построить центральный доверительный интервал для параметра θ_1. Вычислить реализацию доверительного интервала с уровнем $\gamma = 0,95$, располагая данными: n=10, $\overline{X} = 2,7$; $S^2 = 4$. Сравнить с результатом примера 14.1.

14.2 Пусть $\vec{X} \Subset N(a, \theta)$, $\theta > 0$, a- известно. Построить точные доверительные интервалы (односторонний и центральный двухсторонний) на основе статистики $S_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - a)^2$. Вычислить реализации построенных интервалов с уровнем $\gamma = 0,9$, располагая данными: n=10,

$S_1^2 = 4$. Сравнить с результатами примера 14.2.

14.3 Пусть $\vec{X} \Subset K(\theta)$, $\theta \in R$. Построить оптимальный точный доверительный интервал для параметра θ по одному наблюдению (n=1).

14.4 $\vec{X} \Subset B(p)$, $0 < p < 1$. Построить приближенные доверительные интервалы для параметра p на основе оценки $\theta^* = \overline{X}$:
а) при помощи неравенства Чебышева;
б) используя асимптотическую нормальность оценки.

14.5 $\vec{X} \Subset (\lambda)$, $\lambda > 0$. Построить асимптотический доверительный интервал для параметра λ с помощью оценки $\lambda^* = \overline{X}$.

14.6 Пусть $\vec{X} \Subset U(0,\theta)$, где $\theta > 0$. С помощью статистик $\overline{X}$ $\overline{X^2}$ построить асимптотические доверительные интервалы (соответственно (θ_1^-, θ_1^+) и (θ_2^-, θ_2^+)) уровня $1 - \varepsilon$ и показать, что случайный интервал (θ_2^-, θ_2^+) короче соответствующего (θ_1^-, θ_1^+).

Глава 15

Проверка статистических гипотез

§ 15.1. Статистические гипотезы

Пусть $\vec{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$ — выборка, $\vec{X} \Subset \mathbf{F}$, где $\mathbf{F}$ - полностью или частично неизвестное распределение отдельного наблюдения X_i.

Определение 15.1. *Статистической гипотезой* будем называть всякое утверждение о виде или свойствах неизвестного распределения $\mathbf{F}$.

Пример 15.1. *Пусть* $\mathbf{F}$ *— полностью неизвестное распределение. Примерами гипотез являются*

$\mathrm{H}: \mathbf{F} = \mathbf{F}_0$, *где* $\mathbf{F}_0$ *— полностью определенное распределение;*

$\mathrm{H}: \mathbf{F} \in \widehat{\mathbf{F}}_0$, *где* $\widehat{\mathbf{F}}_0$ *— множество распределений (например,* $\widehat{\mathbf{F}}_0 = N_{a,\sigma^2}$ *или* $\widehat{\mathbf{F}}_0 = B_p$*).*

В этих примерах наблюдения имеют распределения из некоторого одно- или двухпараметрического семейства. Но могут быть непараметрические множества, например, $\mathbf{F}_0 \in \{\mathbf{F}: \mathbf{E}X_i > 0\}$ *— класс распределений с положительными математическими ожиданиями.*

Пример 15.2. *Пусть* $\mathbf{F}$ *— частично известное распределение. Например,* $\mathbf{F} \in U_{[a;\ b]}$ *(наблюдения имеют равномерное распределение). В этом случае примеры гипотез:*

$\mathrm{H}: a = 0,\ b = 1$ *(распределение равномерное на* $[0;\ 1]$*);*

$\mathrm{H}: a = 0$ *(распределение равномерное на* $[0;\ b]$*);*

H : $a < b - 1$ *(распределение равномерное на отрезке длины более 1).*

Гипотеза называется *простой*, если она однозначно определяет распределение $\mathbf{F}$, в противном случае гипотеза называется *сложной.* В приведенных выше примерах простыми являются гипотезы:

H : $\mathbf{F} = \mathbf{F}_0$ и H : $a = 0,\ b = 1$ (последняя в случае, когда известно, что распределение равномерное на $[a;\ b]$).

Остальные гипотезы являются сложными.

Мы будем рассматривать ситуацию, когда гипотез всего две. Одну из них называют *основной*, а другую — *альтернативной*, обозначая соответственно H_0 и H_1.

§ 15.2. Статистические критерии

Определение 15.2. *Статистическим критерием* называют всякое правило, позволяющее на основании наблюдаемого выборочного вектора $\vec{X}$ принять одну из гипотез: основную или альтернативную.

При применении статистического критерия могут возникнуть ошибки двух родов. Ошибка нулевого рода состоит в том, что отвергается верная нулевая гипотеза. Ошибка первого рода — отвергается верная первая гипотеза. Вообще ошибка i-го рода состоит в том, что статистический критерий отвергает верную i-ю гипотезу.

принимаемая гипотеза	верна гипотеза H_0	верна гипотеза H_1
H_0	нет ошибки	ошибка 1-го рода
H_1	ошибка 0-го рода	нет ошибки

Критерий характеризуется вероятностями ошибок:

$$\alpha_0 = \mathbf{P}_{H_0}(H_0 \text{ отвергается}), \qquad \alpha_1 = \mathbf{P}_{H_1}(H_1 \text{ отвергается}).$$

Здесь нижний индекс у символа вероятности указывает, при выполнении какой гипотезы подсчитывается вероятность. Из всевозможных критериев надо выбирать такие, у которых вероятности ошибок по возможности малы. К сожалению, в невырожденной статистической задаче не существует критерия, для которого обе вероятности ошибок равны нулю. Как правило, чем меньше вероятность ошибки нулевого рода, тем больше вероятность ошибки первого рода.

Рассмотрим введенные понятия на следующем примере.

Пример 15.3. *Студенты группы А считают, что они играют в шахматы вдвое лучше, чем студенты группы В. В свою очередь, студенты группы В считают, что они играют в шахматы втрое лучше, чем студенты группы А. Для решения спора назначается шахматный матч между группами А и В. С каждой стороны участвуют 3 студента, выбираемые по жребию. Решено считать справедливым мнение группы, выигрывшей матч, то есть набравшей не менее 2 очков в 3 партиях. Предполагается, что ничьих нет. Найти, в чем состоят ошибки нулевого и первого рода. Вычислить вероятности этих ошибок.*

Решение. Предполагаем, что нулевая гипотеза (соответствующая мнению студентов группы А) состоит в том, что вероятность выигрыша каждого студента группы А у студента группы В вдвое больше вероятности проигрыша, то есть вероятность выигрыша равна $2/3$. Согласно первой гипотезе (мнению студентов группы В), вероятность выигрыша каждого студента группы А втрое меньше вероятности проигрыша, то есть равняется $1/4$.

Итак, проводятся три испытания схемы Бернулли с вероятностью успеха p, гипотеза $H_0 : \ p = 2/3$; гипотеза $H_1 : \ p = 1/4$.

Критерий (исход матча) предписывает принять гипотезу H_0, если число успехов в схеме Бернулли равняется двум или трем, а в противном случае принять гипотезу H_1.

Ошибка нулевого рода состоит в том, что критерий предписывает считать вероятность выигрыша студента первой группы равной $1/4$ в то время, как она равняется $2/3$. Ошибка первого рода описывает противоположную ситуацию: вероятность выигрыша студента первой группы равняется $1/4$, а критерий предписывает считать ее равной $2/3$.

Вычислим вероятности ошибок.

Вероятность ошибки нулевого рода α_0 — это вероятность отвергнуть верную нулевую гипотезу, то есть получить ноль или один успех в схеме Бернулли, которая предполагает 3 испытания с $p = 2/3$ в каждом. Вычислим эту вероятность на основании формулы Бернулли:

$$\alpha_0 = \mathbf{P}_{H_0}(H_0 \text{ отвергается}) =$$

$$= C_3^0 (2/3)^0 (1/3)^3 + C_3^1 (2/3)^1 (1/3)^2 = 1/27 + 2/9 \approx 0,25.$$

Вероятность ошибки первого рода α_1 — это вероятность получить два или три успеха в схеме Бернулли, которая предполагает 3 испытания с $p = 1/4$ в каждом.

$$\alpha_1 = \mathbf{P}_{H_1}(H_1 \text{ отвергается}) =$$

$$= C_3^2(1/4)^2(3/4)^1 + C_3^3(1/4)^3(3/4)^0 = 9/64 + 1/64 \approx 0,15.$$

§ 15.3. Критерии согласия

Удобно представлять статистический критерий как функцию $\delta(\vec{X})$ от выборочного вектора, принимающую два значения: H_0 и H_1. Наиболее общий подход для построения статистических критериев состоит в следующем.

Пусть $T = T(\vec{X})$ - некоторая статистика, характеризующая отклонение эмпирических данных, представленных выборкой, от теоретических, соответствующих проверяемой гипотезе H_0. Если распределение статистики $T(\vec{X})$ известно (точно или хотя бы приближенно), то для любого $\alpha > 0$ можно найти такое множество T_α значений T, для которого будет выполнено неравенство:

$$\mathbf{P}(T \in \mathrm{T}_\alpha / \mathrm{H}_0) \leq \alpha. \tag{15.1}$$

Пусть $\alpha > 0$ настолько мало, что событие, имеющее вероятность, не превосходящую α, может считаться практически невозможным. Тогда статистический критерий можно задать следующим образом:

$$\delta(\vec{X}) = \begin{cases} \mathrm{H}_1, & \text{если } T(\vec{X}) \in \mathrm{T}_\alpha, \\ \mathrm{H}_0, & \text{если } T(\vec{X}) \notin \mathrm{T}_\alpha. \end{cases} \tag{15.2}$$

Это правило основано на здравом смысле: оно предписывает отвергнуть гипотезу H_0 (то есть принять H_1), если происходит событие $\{T(\vec{X}) \in \mathrm{T}_\alpha\}$, которое не должно произойти, будь гипотеза H_0 справедлива. Число $\alpha > 0$, которое фигурирует в (15.1) - (15.2), называется *уровнем критерия*, или *уровнем значимости*, статистика $T(\vec{X})$ называется *статистикой критерия*, а множество T_α - *критическим множеством*.

§ 15.4. Достигаемый уровень значимости

От статистики $T = T(\vec{X})$ требуют следующих свойств:

1) при выполнении гипотезы H_0 статистика T имеет известное распределение или, по крайней мере, сходится по распределению к некоторой случайной величине J с известным распределением;

2) при выполнении гипотезы H_1 статистика T сходится почти наверное к бесконечности с ростом объема выборки.

Для того, чтобы получить критерий уровня α, задают критическое множество в виде

$$\mathrm{T}_\alpha = \{T \geq C\},$$

где C — константа, определяемая условием

$$\mathbf{P}\{J \geq C\} = \alpha,$$

то есть $F_J(C) = 1-\alpha$. Ясно, что при таком выборе константы C вероятность ошибки нулевого рода α_0 либо равна уровню критерия α (в случае, когда статистика T при верной нулевой гипотезе распределена в точности как J), либо, по крайней мере, сходится к α с ростом объема выборки.

Сходимость статистики T почти наверное к бесконечности при выполненной первой гипотезе гарантирует *состоятельность* критерия, то есть сходимость вероятности ошибки первого рода α_1 к нулю с ростом объема выборки.

Для каждой конкретной выборки $\vec{X}$ можно найти предельное значение уровня $\alpha^* = \alpha^*(\vec{X})$, при котором гипотеза H_0 еще может быть принята. Такое значение называется *(реально) достигаемым уровнем значимости*. Как сказано в [10], α^* «имеет смысл вероятности получить худшее согласие с проверяемой гипотезой, чем реально полученное, если гипотеза H_0 верна». Поэтому чем меньше α^*, тем более это говорит против гипотезы H_0.

Достигаемый уровень значимости вычисляется с помощью распределения статистики J:

$$\alpha^* = \mathbf{P}\{J \geq T(\vec{X})\} = 1 - F_J(T(\vec{X})).$$

В терминах достигаемого уровня значимости критическая область имеет вид

$$\mathrm{T}_\alpha = \{\alpha^* \leq \alpha\},$$

то есть нулевая гипотеза отвергается на уровне α в случае, когда $\alpha^* \leq \alpha$.

Каждый критерий согласия использует свою статистику, предназначенную для различения нулевой гипотезы и альтернативы и обладающую нужными свойствами: сходимостью к фиксированному распределению при выполнении нулевой гипотезы и сходимостью почти наверное к бесконечности при ее невыполнении.

В качестве важных примеров критериев согласия рассмотрим критерии Колмогорова и хи-квадрат Пирсона.

§ 15.5. Критерии согласия Колмогорова и χ^2 Пирсона

Рассмотрим выборку $\vec{X} \Subset \mathrm{F}$ объема n с неизвестной функцией распределения F и простую гипотезу $\mathrm{H}_0 : \mathrm{F} = \mathrm{F}_0$. Альтернативной для H_0 является сложная гипотеза $\mathrm{H}_1 : \mathrm{F} \neq \mathrm{F}_0$.

Критерий Колмогорова применяется в случае, когда функция распределения $\mathrm{F}_0(t)$ непрерывна. Рассматривается следующее расстояние между эмпирической и теоретической функциями распределения:

$$D_n = D(F_n^*, F_0) = \sup_{-\infty<t<\infty} |F_n^*(t) - F_0(t)| = \max_{-\infty<t<\infty} |F_n^*(t) - F_0(t)|.$$

В качестве статистики критерия Колмогорова выбирается это расстояние, умноженное на $\sqrt{n}$, где n — объем выборки:

$$T_n = \sqrt{n} D_n = \sqrt{n} \max_{-\infty<t<\infty} |F_n^*(t) - F_0(t)|.$$

А. Н. Колмогоров доказал следующие свойства статистики T_n:

1) если гипотеза H_0 верна, то T_n с ростом n сходится к случайной величине J с функцией распределения, называемой функцией распределения Колмогорова:

$$F_J(t) = 1 - 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} e^{-2k^2t^2};$$

2) если гипотеза H_0 неверна, то T_n сходится почти наверное к $+\infty$ при $n \to \infty$.

Таким образом, достигаемый уровень значимости критерия Колмогорова равен

$$\alpha^* = 1 - F_J(T_n) = 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} e^{-2k^2T_n^2} = 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} e^{-2k^2 n D_n^2}. \qquad (15.3)$$

Отметим, что для расчетов по этой формуле нужно брать не всю бесконечную сумму, а только несколько слагаемых, при этом ошибка вычислений не превосходит последнего отброшенного слагаемого. Критерий Колмогорова отвергает гипотезу H_0 на уровне α, если $\alpha^* \leq \alpha$.

Для практического вычисления статистики $D_n = D_n(\vec{X})$ можно использовать следующую формулу:

$$D_n(\vec{X}) = \max_{1 \leq i \leq n} \max \left(\left| F(X_{(i)}) - \frac{i}{n} \right|, \left| F(X_{(i)}) - \frac{i-1}{n} \right| \right). \tag{15.4}$$

Здесь $X_{(i)}$ — это элементы *вариационного ряда*, то есть для этих вычислений выборку следует предварительно *упорядочить по возрастанию.*

Если гипотетическая функция распределения $\mathrm{F}_0(x)$ не является непрерывной, то критерий Колмогорова неприменим. В этом случае можно воспользоваться χ^2-*критерием Пирсона.* Статистика критерия Пирсона строится после предварительного «группирования» выборочных данных. Для этого все множество S возможных значений случайных величин X_i разбивается на конечное число непересекающихся частей:

$$S = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_r, \quad S_i \cap S_j = \emptyset, i \neq j.$$

Обозначим ν_j — число элементов выборки $\vec{X}$, попавших в множество S_j, а p_j — вероятность попадания случайной величины X_i в множество S_j, вычисленная с помощью гипотетической функции распределения $\mathrm{F} = \mathrm{F}_0$. Тогда в качестве статистики критерия χ^2 рассматривают следующую предложенную Пирсоном меру отклонения эмпирического распределения от предполагаемого теоретического:

$$\chi^2(\vec{X}) = \sum_{j=1}^{r} \frac{(\nu_j - np_j)^2}{np_j}. \tag{15.5}$$

Справедлива следующая теорема, позволяющая находить распределение статистики χ^2 при больших значениях n, а стало быть, и строить статистический критерий.

Теорема 15.1. *Если гипотеза* H_0 *однозначно фиксирует вероятности* $p_1, p_2, \ldots, p_r$, *где* $p_j = \mathbf{P}(X_i \in S_j)$, *то при выполнении этой гипотезы статистика* $\chi^2(\vec{X})$ *слабо сходится к распределению* χ^2_{r-1}*:*

$$\chi^2 \Longrightarrow \chi^2_{r-1}, \quad n \to \infty.$$

При невыполнении нулевой гипотезы статистика $\chi^2(\vec{X})$ *сходится почти наверное к* $+\infty$.

Для построения критерия, основанного на статистике χ^2, используем распределение χ^2_{r-1}, и по найденному значению $\chi^2(\vec{X})$ отыскиваем достигаемый уровень значимости

$$\alpha^* = 1 - F_{\chi^2_{r-1}}(\chi^2(\vec{X}))$$

по таблице 5 распределения хи-квадрат или с помощью математических пакетов. В пакете Microsoft Excel достигаемый уровень значимости вычисляется формулой

```
=ХИ2РАСП(ячейка;r-1)
```
(15.6)

(в качестве ячейки надо подставить адрес ячейки, в которой вычислена статистика хи-квадрат, а $r-1$ — число степеней свободы).

Тогда критерий Пирсона имеет следующий вид:

$$\mathrm{H}_0 \Leftrightarrow \alpha^* > \alpha. \tag{15.7}$$

Заметим, что для практического применения рекомендуется разбиение производить таким образом, чтобы выполнялось условие $np_j \geq 10$. При нарушении этого условия нужно объединить соседние множества S_j. Вероятности p_j надо выбирать по возможности равными.

Критерий хи-квадрат часто используют для проверки сложных гипотез о принадлежности распределения к некоторому параметрическому семейству (например, к нормальному). При этом вместо известных вероятностей p_j подставляют их оценки p_j^*, полученные путем оценивания неизвестных парметров распределения. Важно понимать, что в этом случае предельное распределение статистики $\chi^2(\vec{X})$ уже не будет распределением χ^2_{r-1}, а будет близко к распределению χ^2_{r-1-s}, где s — число оцениваемых параметров ($s = 2$ для нормального распределения). Более точно, предельная функция распределения заключена между функциями распределения χ^2_{r-1-s} и χ^2_{r-1}.

Достигаемый уровень значимости α^* заключен между $1 - F_{\chi^2_{r-1}}(\chi^2(\vec{X}))$ и $1 - F_{\chi^2_{r-1-s}}(\chi^2(\vec{X}))$, где s — число оцениваемых параметров.

Для того, чтобы получить в точности распределение хи-квадрат с $r-1-s$ степенями свободы, следует оценивать неизвестные параметры методом максимального правдоподобия по *группированной* выборке, но это приводит, как правило, к сложным вычислительным процедурам.

§ 15.6. Решение типовых примеров

Пример 15.4. *Вариационный ряд выборки имеет вид* (1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10). *Проверить гипотезу о равномерности распределения элементов выборки на отрезке от 0 до 10 с помощью критерия Колмогорова: найти реализацию достигаемого уровня значимости и сделать вывод о принятии гипотезы на уровнях 0,1 и 0,01.*

Решение. Построим на одном графике эмпирическую $F_n^*(t)$ и теоретическую $F_0(t)$ функции распределения.

Эмпирическая функция распределения — это ступенчатая функция, высота ступеньки равна $1/10$ в точках $1; \ \ldots; \ 10$.

Теоретическая функция распределения равномерного закона на отрезке от 0 до 10 равна

$$\mathrm{F}_0(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \leq 0, \\ t/10, & \text{если } 0 < t \leq 10, \\ 1, & \text{если } t > 10. \end{cases} \tag{15.8}$$

Так как функция распределения $\mathrm{F}_0(t)$ непрерывна, то можно применять критерий Колмогорова. Найдем по графику значение D_n — наибольшую по модулю разность между эмпирической и теоретической функциями распределения. Эта разность достигается в точках разрыва эмпирической функции распределения и равна $1/10$. Вычислим реализацию достигаемого уровня значимости, вспоминая, что $n = 10$: согласно (15.3),

$$\alpha^* = 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}e^{-2k^2nD_n^2} \approx$$

$$\approx 2e^{-0,2} - 2e^{-4\cdot 0,2} + 2e^{-9\cdot 0,2} - 2e^{-16\cdot 0,2} + 2e^{-25\cdot 0,2} - 2e^{-36\cdot 0,2} + 2e^{-49\cdot 0,2} \approx 0,99997.$$

Достигаемый уровень значимости оказался близким к 1; это означает, что нет оснований отвергать гипотезу о равномерности выборочных значений. Эту гипотезу следовало бы отвергнуть только в случае, когда достигаемый уровень значимости оказался бы близким к нулю.

В частности, в нашем случае выполнено неравенство $\alpha^* > 0,1$. Следовательно, гипотеза о равномерности принимается на уровне 0,1. Тем более она будет приниматься на уровне 0,01.

Пример 15.5. *Решить пример 15.4 для реализации выборки* (10; 0; 0; 10; 10; 10; 0; 0; 0; 10).

Решение. Упорядочив реализацию выборки по неубыванию, получим реализацию вариационого ряда: (0; 0; 0; 0; 0; 10; 10; 10; 10; 10). Как и в предыдущем примере, построим на одном графике эмпирическую $F_n^*(t)$ и теоретическую $F_0(t)$ функции распределения. В отличие от предыдущего примера, эмпирическая функция распределения здесь имеет всего две ступеньки в точках 0 и 10, высотой по $5/10 = 0,5$. Теоретическая функция распределения остается той же самой и определяется формулой (15.8). Значение D_n достигается в точках разрыва эмпирической функции распределения и равняется $0,5$. Вычислим реализацию достигаемого уровня значимости:

$$\alpha^* = 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}e^{-2k^2nD_n^2} \approx 2e^{-2\cdot 10\cdot 0,5^2} = 2e^{-5} \approx 0,0135.$$

Здесь мы взяли только одно слагаемое суммы, так как остальные слагаемые гораздо меньше.

В этом примере достигаемый уровень значимости оказался близким к 0, что говорит против гипотезы H_0. В частности, $\alpha^* < 0,1$, то есть гипотеза однородности отвергается на уровне 0,1. Однако она принимается на более низком уровне 0,01, так как $\alpha^* > 0,01$.

Пример 15.6. *Проверить гипотезу о равномерности на отрезке от 0 до 10 для выборок из двух предыдущих примеров с помощью критерия хи-квадрат Пирсона: найти реализации достигаемых уровней значимости и сделать выводы о принятии гипотезы на уровнях 0,1 и 0,01. Число промежутков группирования выбрать по формуле Стеджеса.*

Решение.

Согласно формуле Стеджеса (11.3), вычисляем целую часть логарифма по основанию 2 от объема выборки и прибавляем единицу:

$$r = [\log_2 n] + 1 = [\log_2 10] + 1 = 3 + 1 = 4,$$

так как $2^3 = 8 < 10 < 2^4 = 16$.

Итак, множество допустимых выборочных значений — отрезок $[0;\ 10]$ — следует разбить на 4 промежутка равной длины:

$$S_1 = [0;\ 2,5),\quad S_2 = [2,5;\ 5),\quad S_3 = [5;\ 7,5),\quad S_4 = [7,5;\ 10].$$

Согласно нулевой гипотезе, распределение равномерное на отрезке от 0 до 10. Следовательно, равны вероятности попадания элемента выборки в отрезки равной длины:

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 1/4 = 0,25.$$

Значения статистики хи-квадрат Пирсона различны для примеров 15.4 и 15.5:

1) В примере 15.4 количества элементов, попавших в каждый из промежутков, равны соответственно

$$\nu_1 = 2, \quad \nu_2 = 2, \quad \nu_3 = 3, \quad \nu_4 = 3.$$

Вычислим статистику хи-квадрат согласно формуле (15.5):

$$\chi^2(\vec{X}) = \sum_{j=1}^{r} \frac{(\nu_j - np_j)^2}{np_j} =$$

$$= \frac{(2 - 10 \cdot 0,25)^2}{10 \cdot 0,25} + \frac{(2 - 10 \cdot 0,25)^2}{10 \cdot 0,25} + \frac{(3 - 10 \cdot 0,25)^2}{10 \cdot 0,25} + \frac{(3 - 10 \cdot 0,25)^2}{10 \cdot 0,25} = 0,4.$$

Найдем достигнутый уровень значимости по формуле (15.6), используя функцию ХИ2РАСП и подставляя значение 0,4 и число степеней свободы, равное $r - 1 = 4 - 1 = 3$:

$$\texttt{ХИ2РАСП(0,4;3)} \approx 0,94.$$

Итак, здесь достигнут уровень значимости 0,94, что не дает оснований отвергать гипотезу о равномерности ни на уровне $0,1 < 0,94$, ни тем более на уровне 0,01.

2) В примере 15.5 количества элементов, попавших в каждый из промежутков, принимают значения

$$\nu_1 = 5, \quad \nu_2 = 0, \quad \nu_3 = 0, \quad \nu_4 = 5.$$

Как и в пункте (1), вычислим статистику хи-квадрат и найдем достигнутый уровень значимости:

$$\chi^2(\vec{X}) = \sum_{j=1}^{r} \frac{(\nu_j - np_j)^2}{np_j} =$$

$$= \frac{(5 - 10 \cdot 0,25)^2}{10 \cdot 0,25} + \frac{(0 - 10 \cdot 0,25)^2}{10 \cdot 0,25} + \frac{(5 - 10 \cdot 0,25)^2}{10 \cdot 0,25} + \frac{(0 - 10 \cdot 0,25)^2}{10 \cdot 0,25} = 10;$$

$$\texttt{ХИ2РАСП(10;3)} \approx 0,0186.$$

В этом примере достигнут низкий уровень значимости 0,0186, что дает основания отвергать гипотезу о равномерности на уровне $0,1 > 0,0186$, но не на уровне 0,01.

Отметим, что для рассмотренных примеров критерии Колмогорова и хи-квадрат Пирсона дают похожие результаты — достигнутые уровни значимости для обоих критериев оказались довольно близкими. В случае, когда основная гипотеза предполагает дискретное распределение, критерий Колмогорова неприменим, и мы будем пользоваться только критерием хи-квадрат Пирсона.

Пример 15.7. *При* 4040 *бросаниях монеты Бюффон получил* $\nu_1 = 2048$ *выпадений герба и* $\nu_2 = n - \nu_1 = 1992$ *выпадений решетки. Согласуется ли это с гипотезой о том, что монета правильная, при уровне значимости* $\alpha = 0,1$*? С каким предельным уровнем значимости может быть принята эта гипотеза?*

Решение. Можно считать, что мы имеем дело со статистической моделью $\vec{X} \Subset \mathrm{B}_p$, где неизвестен параметр p - вероятность выпадения герба. Проверяемая гипотеза $\mathrm{H}_0 : \ p = 0,5$. Поскольку выборочные данные уже сгруппированы ($\nu_1 = 2048$ — число значений $X_i = 1$, ν_2 — число значений $X_i = 0$), то можем вычислить наблюдаемое значение статистики χ^2:

$$p_1 = \mathbf{P}_{H_0}(X_i = 1) = 0,5; \quad p_2 = \mathbf{P}_{H_0}(X_i = 0) = 0,5;$$

$$\frac{(\nu_1 - np_1)^2}{np_1} = \frac{(2048 - 2020)^2}{2020} = 0,285;$$

$$\frac{(\nu_2 - np_2)^2}{np_2} = \frac{(1992 - 2020)^2}{2020} = 0,388; \qquad \chi^2 = 0,285 + 0,388 = 0,673.$$

Число множеств разбиения $r = 2$, поэтому достигнутый уровень значимости

$$\texttt{ХИ2РАСП(0,673;1)} \approx 0,412.$$

Достигнутый уровень значимости довольно высок. В частности, $0,412 > 0,1$, то есть гипотеза о симметричности монеты принимается на уровне 0,1.

§ 15.7. Задачи для самостоятельного решения

15.1 Согласуются ли данные примера **??** при уровне значимости 0,1 с гипотезой H_0 о том, что показания часов равномерно распределены на отрезке [0; 12]? При каком предельном значении уровня значимости гипотеза H_0 принимается?

15.2 При n=4000 независимых испытаний события $A1,\ A2,\ A3$, составляющие полную группу, осуществились соответственно 1905, 1015 и 1080 раз. Проверить, согласуются ли эти данные при уровне значимости 0,05 с гипотезой H_0: $p_1 = 1/2,\ p_2 = p_3 = 1/4$, где $p_j = \mathbf{P}(A_j)$.

15.3 В экспериментах с селекцией гороха Мендель наблюдал частоты различных видов семян, полученных при скрещивании растений с круглыми желтыми семенами и растений с морщинистыми зелеными семенами. Эти данные и значения теоретических вероятностей по теории наследственности приведены в следующей таблице:

Семена	Частота	Вероятность
Круглые и желтые	315	9/16
Морщинистые и желтые	101	3/16
Круглые и зеленые	108	3/16
Морщинистые и зеленые	32	1/16
Σ	n=556	1

Следует проверить гипотезу H_0 о согласовании частотных данных с теоретическими вероятностями (на уровне значимости 0,1).

15.4 В таблице приведены числа m_i участков равной площади 0,25 км^2 южной части Лондона, на каждый из которых приходилось по i попаданий самолетов-снарядов во время второй мировой войны. Проверить согласие опытных данных с законом распределения Пуассона, приняв за уровень значимости $\alpha = 0,05$:

i	0	1	2	3	4	5 и более	Итого
m_i	229	211	93	35	7	1	$\Sigma m_i = 576$

15.5 Крупная партия товаров может содержать долю дефектных изделий. Поставщик полагает, что эта доля составляет 3%, а покупатель — 10%. Условия поставки: если при проверке 20 случайным образом отобранных товаров обнаружено не более одного дефектного, то партия принимается на условиях поставщика, в противном случае — на условиях покупателя. Требуется определить: 1) каковы статистические гипотезы, статистика критерия, область ее значений, критическая область; 2) какое распределение имеет статистика критерия, в чем состоят ошибки первого и второго рода и каковы их вероятности.

15.6 Имеется выборка объема 1 из нормального распределения $\mathrm{N}_{a,1}$. Проверяются простые гипотезы $H_0:\ a = 0,\ \ H_1:\ a = 1$. Используется следующий критерий (при заданной постоянной c):

$$H_0 \Leftrightarrow X_1 \leq c.$$

Вычислить мощность критерия, в зависимости от c, и вероятности ошибок первого и второго рода.

15.7 Построить критерий, обладающий нулевыми вероятностями ошибок, для проверки гипотез $\mathrm{H}_0 : \vec{X} \Subset \mathrm{N}_{0,1}$ против $\mathrm{H}_1 : \vec{X} \Subset \Pi_{\boldsymbol{\lambda}}$.

15.8 Пусть$\vec{X} \Subset \mathrm{N}_{a,1}$. Для проверки гипотез $\mathrm{H}_0 : a = 0$ против $\mathrm{H}_1 : a = 1$ используется следующий критерий: H_0 принимается, если $X_{(n)} < 3$, и отвергается в противном случае. Найти вероятности ошибок.

15.9 Используя конструкции доверительного интервала, построить критерий уровня ε для проверки гипотезы $\mathrm{H} : \boldsymbol{\theta} = 1$, если а) $\vec{X} \Subset \mathrm{N}_{\boldsymbol{\theta},1}$; б) $\vec{X} \Subset \mathrm{N}_{1,\boldsymbol{\theta}}$; в) $\vec{X} \Subset \mathrm{E}_{\boldsymbol{\theta}}$; г) $\vec{X} \Subset \mathrm{B}_{\boldsymbol{\theta}/2}$; д) $\vec{X} \Subset \Pi_{\boldsymbol{\theta}}$.

Глава 16

Подготовка к экзамену

В этой главе содержатся программа экзамена для студентов — заочников и примеры теоретических вопросов.

§ 16.1. Программа экзамена

1. Понятие вероятности. Классическое и геометрическое определения вероятности. Свойства вероятности: дополнения, включения, объединения.

2. Условная вероятность. Полная группа событий. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

3. Независимые события. Независимые испытания. Схема Бернулли. Формула Бернулли. Теорема Пуассона.

4. Дискретные случайные величины. Ряд распределения. Вырожденное, бернуллиевское, биномиальное, пуассоновское распределения. Формула подсчета вероятностей.

5. Абсолютно непрерывные распределения. Плотность распределения. Нормальное, равномерное, показательное распределение.

6. Функция распределения. Вероятности попадания в интервал и в точку. Свойства функции распределения и ее график. Независимые случайные величины, их свойства.

7. Математическое ожидание, его свойства, формулы для его подсчета. Моменты, теорема о существовании моментов. Дисперсия и ее свойства.

8. Сходимость по вероятности. Неравенства Маркова и Чебышева. Закон больших чисел Чебышева и его следствия. Сходимость почти наверное, ее свойства. Усиленный закон больших чисел Колмогорова.

9. Центральная предельная теорема. Теорема Муавра — Лапласа.

10. Понятие выборки. Вариационный ряд. Эмпирическая функция распределения. Гистограмма. Выборочные моменты и их свойства.

11. Задача оценивания неизвестных параметров. Несмещенность, состоятельность, сильная состоятельность. Метод моментов. Теорема о сильной состоятельности оценок методом моментов. Метод максимального правдоподобия.

12. Проверка гипотез, основные понятия. Критерии согласия Колмогорова, хи-квадрат.

§ 16.2. Примеры экзаменационных вопросов

Каждый экзаменационный билет содержит четыре вопроса по четырем темам курса: элементарная теория, случайные величины, предельные теоремы, математическая статистика. Билет включает два теоретических вопроса и две задачи. Для ответа на каждый из теоретических вопросов, как правило, требуется знание нескольких параграфов курса. Экзаменационные задачи подобны задачам контрольной работы.

Ниже приведены примеры теоретических вопросов.

1. Классическое определение вероятности. Определить вероятность каждой из перестановок N чисел.

2. Формула полной вероятности и формула Байеса для полной группы, состоящей из события B и его отрицания.

3. Случайная величина с биномиальным распределением, подсчет ее математического ожидания и дисперсии.

4. Равномерное распределение. Вычислить моменты случайной величины, распределенной равномерно на отрезке $[0;\ \theta]$.

5. Свойства сходимости почти наверное. Усиленный закон больших чисел, его графическая интерпретация: поведение среднего из n независимых случайных величин с ростом n.

6. Центральная предельная теорема, ее графическая интерпретация: приближение функции распределения нормированной суммы независимых случайных величин к функции Лапласа.

7. Несмещенность, состоятельность, сильная состоятельность оценок. Доказать, что выборочное среднее из распределения Бернулли — сильно состоятельная оценка для параметра распределения.

8. Метод моментов, примеры. Теорема о состоятельности оценок методом моментов. Найти оценку параметра $\theta < 1/2$ по выборке случайных величин, пинимающих значения 1 и -1 с вероятностями, равными θ, и значение 0 с вероятностью $1 - 2\theta$.

Глава 17

Контрольная работа

В этой главе приведены задания контрольной работы по теории вероятностей и математической статистике. Выполнять контрольные задания следует в соответствии с вариантом, номер которого соответствует последним двум цифрам учебного шифра студента.

Вариант	Последние две цифры	Вариант	Последние две цифры
1	01 31 61 91	16	16 46 76
2	02 32 62 92	17	17 47 77
3	03 33 63 93	18	18 48 78
4	04 34 64 94	19	19 49 79
5	05 35 65 95	20	20 50 80
6	06 36 66 96	21	21 51 81
7	07 37 67 97	22	22 52 82
8	08 38 68 98	23	23 53 83
9	09 39 69 99	24	24 54 84
10	10 40 70 00	25	25 55 85
11	11 41 71	26	26 56 86
12	12 42 72	27	27 57 87
13	13 43 73	28	28 58 88
14	14 44 74	29	29 59 89
15	15 45 75	30	30 60 90

Контрольные задания

Вариант 1

1. Из таблицы случайных чисел наугад выбраны два числа. События A и B соответственно означают, что выбрано хотя бы одно простое число и хотя бы одно четное число. Что означают события AB и $A \cup B$?

2. Из корзины с пятью красными красными яблоками и четырьмя зелеными берутся (без возвращения) наудачу три яблока. а) С какой вероятностью среди этих трех яблок ровно два зеленых, б) хотя бы одно красное.

3. Молодой человек договорился встретиться с девушкой между 9 и 10 часами и обещал ждать её до 10 часов. Девушка обещала ждать его 10 минут, если придет раньше. Найти вероятность того, что они встретятся. Предполагается, что моменты их прихода равновероятны в течение часа.

4. При передаче текста в среднем 5 % букв искажается и принимается неверно. Передано слово из 6 букв. Какова вероятность того, что все буквы слова будут приняты правильно? Предполагается, что буквы искажаются независимо друг от друга.

5. В тире имеется 6 одинаковых на вид ружей. Вероятность попадания в мишень для двух из них по 0,9, для трех по 0,8 и для одного 0,3. Какова вероятность того, что стрелок попадет в мишень, если он выбирает ружье наудачу? Какова вероятность того, что было выбрано ружье, для которого вероятность попадания 0,3, при условии, что стрелок попал в мишень?

6. Вероятность попадания в мишень равна 0,6 при каждом выстреле. Стрельба ведется одиночными выстрелами до первого попадания, пока не будет израсходован боезапас. Найти ряд распределения, математическое ожидание и дисперсию числа произведенных выстрелов, если боезапас составляет 3 единицы. Построить график функции распределения.

7. Случайная величина ξ имеет треугольное распределение. Плотность распределения равна

$$f(x) = \begin{cases} Ax & \text{при } 0 \leq x \leq \theta; \\ 0 & \text{при } x \notin [0;\ \theta]. \end{cases}$$

Найти коэффициент A, математическое ожидание и стандартное отклонение. Найти вероятность того, что $\xi > \theta/2$. Начертить графики плотности распределения и функции распределения.

8. Составить таблицу совместного распределения числа выпавших единиц и числа выпавших шестерок при одном подбрасывании игральной кости. Найти коэффициент корреляции между ними.

9. Участник лотереи бросает игральную кость 10 раз. Участник получает ценный приз, если сумма очков больше 50. Оценить вероятность получения ценного приза.

10. Для выборки $(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)$ из распределения с плотностью распределения $f(x)$ найти оценки параметра $\theta > 2$ по первому моменту и методом максимального правдоподобия. Проверить состоятельность полученных оценок. Плотность распределения равна

$$f(x) = \begin{cases} \theta x^{-(\theta+1)} & \text{при } x > 1; \\ 0 & \text{при } x \le 1. \end{cases}$$

11. Дана выборка из нормального распределения с неизвестными параметрами. Найти оценки параметров распределения. Подставляя вместо неизвестных параметров их точечные оценки, записать выражение для оценки плотности распределения. Построить на одном графике гистограмму с шагом, равным среднеквадратическому (стандартному) отклонению, и график оценки плотности распределения.

0,78	1,26	1,58	2,11	0,01	1,35	2,05	0,76	1,65	1,61	0,12	2,03	1,07	1,10
3,06	0,38	0,64	1,63	0,54	2,65	0,82	1,21	0,73	1,99	2,44	0,93	0,47	0,88

12. По критерию Колмогорова проверить гипотезу о том, что выборка имеет равномерное распределение на отрезке $[0;\ 2]$. Сделать вывод о том, принимается ли эта гипотеза на уровне доверия 0,1; на уровне доверия 0,01; на уровне доверия 0,001.

0,46	0,68	0,59	1,97	1,03	0,62	0,89	1,93	0,88
1,66	1,34	1,99	0,59	0,00	0,46	1,48	1,35	1,74

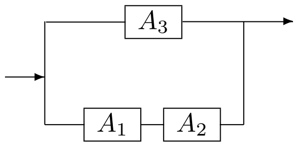
Вариант 2

1. Из таблицы случайных чисел наудачу взято одно число. Событие A — выбранное число делится на 5; событие B — данное число оканчивается нулем. Что означают события $A \setminus B$ и $A\overline{B}$?

2. 1. В квадрат с вершинами $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$ наудачу брошена точка. Пусть (X,Y) — ее координаты. Найти: $\mathbf{P}(\max\{X+3Y, Y\} \le 1/2)$.

3. Бросают 3 игральные кости. Какова вероятность того, что на них выпадет разное число очков?

4. Электрическая цепь состоит из элементов A_k, соединенных по следующей схеме:



Вероятность выхода из строя каждого элемента A_k равна 0,02. Предполагается, что элементы выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность того, что цепь будет пропускать ток.

5. Одинаковые детали поступают на сборку с трех автоматов. Первый автомат дает 20 %, второй 30 %, третий 50 % всех деталей, необходимых для сборки. Брак в продукции первого автомата составляет 2,5 %, второго — 2 %, третьего — 2,5 %. Найти вероятность поступления на сборку бракованной детали. Найти вероятность того, что оказавшаяся бракованной деталь изготовлена на первом автомате.

6. По мишени одновременно стреляют три стрелка, вероятности попаданий которых равны соответственно 0,55, 0,6 и 0,65. Найти ряд распределения, математическое ожидание и дисперсию числа попаданий в мишень. Построить график функции распределения.

7. Распределение Парето приближенно описывает распределение доходов физических лиц. Плотность распределения равна

$$f(x) = \begin{cases} \frac{A}{x^\alpha} & \text{при } x \geq \theta; \\ 0 & \text{при } x < \theta. \end{cases}$$

Здесь $\alpha > 2$, $\theta > 0$ — параметры распределения, A — нормирующая константа. Найти константу A. Вычислить значение параметра α, при котором математическое ожидание превосходит значение параметра θ в 3 раза.

8. Подбрасываются три симметричных монеты. Составить таблицу совместного распределения количеств выпавших гербов на трех монетах и на первых двух монетах. Найти коэффициент корреляции между ними.

9. Время ожидания поезда метро за одну поездку имеет равномерное распределение на отрезке от 0 до 5 минут. Оценить вероятность того, что суммарное время ожидания за 30 поездок окажется меньше 1,5 часов.

10. Для выборки $(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)$ из распределения с плотностью распределения $f(x)$ найти оценки параметра $\theta > 0$ по второму моменту и

методом максимального правдоподобия. Проверить состоятельность полученных оценок. Плотность распределения равна

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta} e^{-x^2/\theta} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \le 0. \end{cases}$$

11. Дана выборка из нормального распределения с неизвестными параметрами. Найти оценки параметров распределения. Подставляя вместо неизвестных параметров их точечные оценки, записать выражение для оценки плотности распределения. Построить на одном графике гистограмму с шагом, равным среднеквадратическому (стандартному) отклонению, и график оценки плотности распределения.

2,05 0,80 0,32 3,31 1,12 3,29 3,87 2,65 2,01 2,65 1,19 -0,85 4,07 1,23
3,38 5,17 1,51 2,20 5,41 1,22 1,89 2,02 3,17 -1,02 2,73 1,10 3,87

12. По критерию Колмогорова проверить гипотезу о том, что выборка имеет равномерное распределение на отрезке [0; 2]. Сделать вывод о том, принимается ли эта гипотеза на уровне доверия 0,1; на уровне доверия 0,01; на уровне доверия 0,001.

0,24 1,25 0,87 0,54 0,48 1,20 1,79 0,62 0,75 0,55
0,46 1,02 1,71 1,91 0,83 0,99 1,46 1,09 0,94

Вариант 3

1. Событие A — хотя бы одно из имеющихся четырех изделий бракованное, событие B — бракованных изделий среди них не менее двух. Что означают противоположные события $\overline{A}$ и $\overline{B}$?

2. В квадрат с вершинами $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$ наудачу брошена точка. Пусть (X,Y) — ее координаты. Найти: $\mathbf{P}(\max\{2X,Y\} < 1/3)$?

3. В студенческой группе 15 юношей и 10 девушек. На университетский праздничный бал группа получила только 2 пригласительных билета, которые разыгрываются по жребию. Какова вероятность того, что на бал попадет разнополая пара?

4. Рабочий обслуживает 4 станка, работающих независимо друг от друга. Вероятность того, что в течение часа станок не потребует внимания рабочего, равна для первого станка 0,6, для второго — 0,8, для третьего

— 0,9, для четвертого — 0,7. Найти вероятность того, что хотя бы один из станков в течение часа не потребует внимания рабочего.

5. Станок обрабатывает 2 вида деталей A и B, причем время работы распределяется между ними в соотношении 1:4. При обработке детали вида A он работает с максимальной для него нагрузкой в течение 70 % времени, при обработке детали вида B — 50 % времени. В случайный момент времени станок работал с максимальной нагрузкой. Определить вероятность того, что в это время он обрабатывал деталь вида A; вида B.

6. Вероятность попадания баскетбольного мяча в кольцо при бросании начинающим спортсменом равна $1/4$. Мяч бросают до первого попадания, но дают не более 4 попыток. Найти ряд распределения, математическое ожидание и дисперсию числа промахов. Построить график функции распределения.

7. Скорость пешехода на дистанции в 1 км является случайной величиной, равномерно распределенной на отрезке от 2 км/ч до 4 км/ч. Найти математическое ожидание и стандартное отклонение времени, затраченного на преодоление дистанции. Найти вероятность того, что это время превысит 24 минуты.

8. В группе из 25 студентов только двое изучали в школе модальную логику, и именно они получили оценку «5» на экзамене. Из остальных студентов 10 человек получили оценку «4», 10 человек — оценку «3», и 3 студента получили «двойки». Составить таблицу совместного распределения оценки на экзамене и индикатора изучения модальной логики для выбранного наудачу студента. Найти коэффициент корреляции между ними.

9. Число опечаток на странице книги имеет распределение Пуассона с параметром 2. Найти пределы, в которых с вероятностью 0,9 лежит число опечаток в книге из 400 страниц.

10. Для выборки $(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)$ из распределения с плотностью распределения $f(x)$ найти оценки параметра $\theta > 0$ по третьему моменту и методом максимального правдоподобия. Проверить состоятельность полученных оценок. Плотность распределения равна

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2}{\theta} e^{-x^3/\theta} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \le 0. \end{cases}$$

11. Дана выборка из нормального распределения с неизвестными параметрами. Найти оценки параметров распределения. Подставляя вместо неизвестных параметров их точечные оценки, записать выражение для

оценки плотности распределения. Построить на одном графике гистограмму с шагом, равным среднеквадратическому (стандартному) отклонению, и график оценки плотности распределения.

7,61 3,33 7,35 3,05 2,54 1,91 1,77 2,92 5,95 2,31 0,27 5,12 6,60 -1,58
5,42 5,67 6,28 -0,09 2,74 2,45 1,11 6,97 -1,59 -1,41 2,69 4,99 7,24 1,75
4,76

12. По критерию Колмогорова проверить гипотезу о том, что выборка имеет равномерное распределение на отрезке [0; 2]. Сделать вывод о том, принимается ли эта гипотеза на уровне доверия 0,1; на уровне доверия 0,01; на уровне доверия 0,001.

0,49 1,42 0,61 2,00 0,59 0,58 1,18 1,58 1,01 0,57
0,05 0,25 0,17 1,30 0,52 0,91 0,84 1,66 1,24

Вариант 4

1. Монета подбрасывается три раза подряд. Построить пространство элементарных исходов Ω. Описать событие A, состоящее в том, что выпало не менее двух гербов.

2. В компании из трех человек решили сделать друг другу подарки, для чего каждый принес подарок. Все подарки сложили вместе, перемешали и случайно распределили среди участников. Найти вероятность, что хотя бы один подарок вернется к своему владельцу.

3. На линейке длиной 20 см случайно сделаны две насечки. Какова вероятность того, что первая окажется дальше от начала не менее, чем на 5 см по сравнению со второй?

4. Детали проходят три операции обработки. На каждой из операций может возникнуть брак независимо от остальных операций с вероятностями 0,02, 0,03 и 0,035 соответственно. Найти вероятность получения небракованной детали.

5. Вероятность того, что изделие удовлетворяет стандарту, равна 0,95. На заводе принята система из трех независимых испытаний, каждое из которых изделие, удовлетворяющее стандарту, проходит с вероятностью 0,8, а неудовлетворяющее — с вероятностью 0,3. Какова вероятность того, что наудачу взятое изделие выдержит испытания? Какова вероятность того, что изделие, выдержавшее испытания, удовлетворяет стандарту?

6. Вероятность изготовления нестандартного изделия при налаженном технологическом процессе постоянна и равна $1/5$. Для проверки изделий отдел технического контроля берет из партии изделия одно за другим, но не более 3 изделий. При обнаружении нестандартного изделия вся партия задерживается. Найти ряд распределения, математическое ожидание и дисперсию числа изделий, проверяемых в каждой партии. Построить график функции распределения.

7. Мощность W, выделяемая на сопротивлении R, вычисляется по закону $W = RI^2$, где I — сила тока. Предполагается, что сила тока распределена равномерно на отрезке от 1 до 2 ампер. Найти плотность распределения и математическое ожидание мощности, выделяемой на сопротивлении в 1000 Ом. Найти вероятность того, что мощность превысит 2 кВт.

8. В научном отделе 3 лаборатории. В первой лаборатории 4 сотрудника и 2 исследовательских проекта, во второй 6 сотрудников и 1 проект, в третьей — 3 сотрудника и 2 проекта. Найти совместное распределение числа сотрудников и числа проектов в выбранной наудачу лаборатории. Найти коэффициент корреляции между ними.

9. Маршрут разбит на 900 участков. Погрешность измерений длины каждого из них распределена по нормальному закону с нулевым средним и стандартным отклонением 5 метров. Найти, в каких пределах лежит суммарная погрешность с вероятностью 0,95.

10. Для выборки $(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)$ из распределения с плотностью распределения $f(x)$ найти оценки параметра $\theta > 0$ по первому моменту и методом максимального правдоподобия. Проверить состоятельность полученных оценок. Плотность распределения равна

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\theta\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}/\theta} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \le 0. \end{cases}$$

11. Дана выборка из нормального распределения с неизвестными параметрами. Найти оценки параметров распределения. Подставляя вместо неизвестных параметров их точечные оценки, записать выражение для оценки плотности распределения. Построить на одном графике гистограмму с шагом, равным среднеквадратическому (стандартному) отклонению, и график оценки плотности распределения.

-1,70 -0,72 -4,46 -3,24 2,42 -1,70 -1,24 -0,07 6,20 2,67 1,80 0,26 9,61 2,51 1,44 -3,65 5,50 4,17 -2,06 7,48 2,60 7,61 2,54 9,77 9,67 7,36 7,86 11,22 3,38

12. По критерию Колмогорова проверить гипотезу о том, что выборка имеет равномерное распределение на отрезке [0; 2]. Сделать вывод о том, принимается ли эта гипотеза на уровне доверия 0,1; на уровне доверия 0,01; на уровне доверия 0,001.

1,60 1,44 0,70 1,33 0,74 0,61 1,03 1,25 0,85
0,81 1,04 0,76 0,80 1,55 1,61 0,82 1,70 1,63

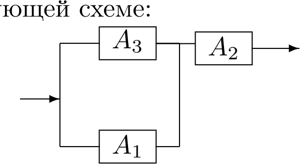
Вариант 5

1. Игральная кость подбрасывается два раза подряд. Описать пространство элементарных исходов Ω. Описать событие A, состоящее в том, что хотя бы один раз выпала единица, событие B, состоящее в том, что сумма очков при первом и втором подбрасывании нечетна.

2. В шахматном турнире участвуют 10 человек, которые разбиваются на пары по жребию. Какова вероятность того, что два самых сильных шахматиста попадут в одну пару?

3. В круг единичного радиуса наудачу брошены пять точек. С какой вероятностью расстояние от границы круга до ближайшей точки окажется не меньше 1/3?

4. Электрическая цепь состоит из элементов A_k, соединенных по следующей схеме:



Вероятность выхода из строя элемента A_k равна 0,1. Предполагается, что элементы выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность того, что цепь не будет пропускать ток.

5. На сборку поступают детали с двух автоматов. Первый автомат дает 80 %, а второй 20 % всех деталей, необходимых для сборки. Брак в продукции первого автомата составляет 1 %, а второго — 4 %. Деталь, изготовленная автоматом, оказалась бракованной. Какова вероятность того, что она изготовлена на первом автомате?

6. Вероятность отказа сервера при каждом из независимых подключений с помощью модема равна 0,3. Попытки подключения производятся до установления связи. Найти ряд распределения, математическое ожидание

и дисперсию числа произведенных попыток подключения, если число попыток ограничено четырьмя. Построить график функции распределения.

7. Закон Рэлея с плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} Axe^{-x^2/(2\sigma^2)} & \text{при } x \geq 0; \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

в ряде случаев описывает распределение срока службы электронной аппаратуры. Найти коэффициент A, математическое ожидание и дисперсию. (Рекомендуется использовать таблицы определенных интегралов).

8. На 4 карточках написаны цифры от 1 до 4. Найти совместное распределение числа, написанного на выбранной наудачу карточке, и индикатора того, что это число четное. Найти коэффициент корреляции между ними.

9. Количество воды, расходуемое жителями одной квартиры в сутки, имеет показательное распределение со средним значением 100 литров. Найти, какого количества воды достаточно с вероятностью 0,98 для удовлетворения потребностей жильцов 250000 квартир.

10. Для выборки $(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)$ из распределения с плотностью распределения $f(x)$ найти оценки параметра $\theta > 0$ по первому моменту и методом максимального правдоподобия. Проверить состоятельность полученных оценок. Плотность распределения равна

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}e^{-x/\theta} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \leq 0. \end{cases}$$

11. Дана выборка из нормального распределения с неизвестными параметрами. Найти оценки параметров распределения. Подставляя вместо неизвестных параметров их точечные оценки, записать выражение для оценки плотности распределения. Построить на одном графике гистограмму с шагом, равным среднеквадратическому (стандартному) отклонению, и график оценки плотности распределения.

4,83 -1,10 13,11 10,84 9,45 8,56 7,87 7,34 -4,06 3,48 4,70 7,13 -1,08
4,53 13,56 2,66 7,29 9,41 11,86 9,54 10,86 2,50 -2,84 11,21 8,93

12. По критерию Колмогорова проверить гипотезу о том, что выборка имеет равномерное распределение на отрезке [0; 2]. Сделать вывод о том, принимается ли эта гипотеза на уровне доверия 0,1; на уровне доверия 0,01; на уровне доверия 0,001.

0,32 0,49 1,12 1,98 0,25 1,52 0,52 0,03 1,10
1,59 0,27 1,30 1,79 1,93 0,23 1,84 1,04

Вариант 6

1. Пусть A, B, C — произвольные события. найти выражения для событий, состоящих в том, что из A, B и C произошло хотя бы два события.

2. Шесть книг на полке расставлены случайным образом. Найти вероятность того, что две определенные книги окажутся рядом (в любом порядке).

3. Два лица A и B имеют одинаковую вероятность прийти к указанному месту в любой момент времени между 12 и 13 часами. Лицо A ждет другого в течение 10 минут после чего уходит; лицо B ждет другого в течение 15 минут. Найти вероятность того, что A и B встретятся.

4. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,7. По мишени стреляют одиночными выстрелами до первого попадания, после чего стрельбу прекращают. Найти вероятность того, что будет сделано не более трех выстрелов.

5. Студент выучил к экзамену только 20 вопросов из 30. Для сдачи экзамена достаточно ответить на два из трех разных вопросов. Какова вероятность того, что экзамен будет сдан? Какова вероятность того, что студент ответил на все три вопроса, если известно, что он сдал экзамен?

6. Пользователь компьютера забыл пароль и перебирает наудачу 4 возможных. После трех неудачных попыток компьютер блокируется. Найти ряд распределения, математическое ожидание и дисперсию числа попыток. Построить график функции распределения.

7. Скорость V молекул газа имеет плотность распределения

$$f(v) = \begin{cases} \frac{v^2}{\sigma^3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-v^2/(2\sigma^2)} & \text{при } v \geq 0; \\ 0 & \text{при } v < 0 \end{cases}$$

(распределение Максвелла). Определить математическое ожидание V. (Можно использовать таблицы определенных интегралов).

8. В двух из четырех комнат температура 20 градусов, а влажность 80 процентов. В третьей комнате температура 25 градусов, а влажность 90 процентов. В четвертой комнате температура 20 градусов, а влажность 90 процентов. Найти совместное распределение температуры и влажности в выбранной наудачу комнате. Найти коэффициент корреляции между температурой и влажностью.

9. Участник лотереи бросает 6 шаров, каждый из которых может попасть в лузы с номерами от 1 до 6. Участник получает ценный приз, если сумма очков меньше 12. Оценить вероятность получения ценного приза.

10. Для выборки $(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)$ из распределения с плотностью распределения $f(x)$ найти оценки параметра $\theta > 0$ по третьему моменту и методом максимального правдоподобия. Проверить состоятельность полученных оценок. Плотность распределения равна

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3\sqrt{x}}{2\theta} e^{-x\sqrt{x}/\theta} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \leq 0. \end{cases}$$

11. Дана выборка из нормального распределения с неизвестными параметрами. Найти оценки параметров распределения. Подставляя вместо неизвестных параметров их точечные оценки, записать выражение для оценки плотности распределения. Построить на одном графике гистограмму с шагом, равным среднеквадратическому (стандартному) отклонению, и график оценки плотности распределения.
5,16 6,70 2,88 9,09 -2,06 6,25 6,46 4,25 16,16 7,07 1,35 13,58 7,96 14,64 -2,14 10,81 2,50 2,24 -1,04 5,31 11,93 16,20 7,49 -5,21 5,90 5,63 7,26

12. По критерию Колмогорова проверить гипотезу о том, что выборка имеет равномерное распределение на отрезке [0; 2]. Сделать вывод о том, принимается ли эта гипотеза на уровне доверия 0,1; на уровне доверия 0,01; на уровне доверия 0,001.

0,46 0,79 0,64 1,06 0,42 0,69 1,65 0,45 0,43
1,48 0,44 0,97 1,49 0,46 1,29 0,37 0,45

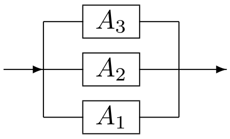
Вариант 7

1. Рабочий изготовил три детали. Пусть событие A_i состоит в том, что i-ая изготовленная им деталь имеет дефект. Записать событие, заключающееся в том, что ровно одна деталь имеет дефект.

2. Один школьник, желая подшутить над своими товарищами, собрал в гардеробе все пальто, а потом развесил их в случайном порядке. Какова вероятность, что каждое пальто снова попало на прежнее место, если в гардеробе шесть крючков и на них висело шесть пальто.

3. На отрезке AB наудачу выбираются две точки M и N. Какова вероятность того, что точка M окажется ближе к точке N, чем к точке A?

4. Электрическая цепь состоит из элементов A_k, соединенных по следующей схеме:



Вероятность выхода из строя элемента A_1 равна 0,1, остальных элементов A_k — по 0,04. Предполагается, что элементы выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность того, что цепь будет пропускать ток.

5. Прибор состоит из двух независимо работающих блоков, вероятности отказа которых за смену равны соответственно 0,05 и 0,08. Вероятность выхода из строя прибора при отказе одного из блоков равна 0,8; при отказе обоих блоков — 1. Определить вероятность выхода прибора из строя за смену. Найти вероятность того, что отказали оба блока, если известно, что прибор вышел из строя.

6. При игре с автоматом в случае выигрыша игрок получает 10 рублей. Вероятность выигрыша составляет 0,3. Найти сумму x рублей, которую игрок бросает в автомат и теряет в случае проигрыша, если математическое ожидание выигрыша равно минус 2 рублям. (В случае проигрыша сумма выигрыша считается отрицательным числом, равным сумме проигрыша, взятой со знаком «минус».) Найти ряд распределения и дисперсию суммы выигрыша. Построить график функции распределения.

7. Плотность распределения вероятностей случайной величины ξ имеет вид $f(x) = Ae^{-2|x|}$ (распределение Лапласа). Найти коэффициент A, вычислить математическое ожидание и стандартное отклонение. Найти вероятность того, что случайная величина ξ примет значение, большее 1.

8. В трех из четырех аудиторий по 20 студентов и уровень шума 80 децибелл, а в четвертой аудитории нет студентов и уровень шума 20 децибелл. Найти совместное распределение числа студентов и уровня шума в выбранной наудачу аудитории. Найти коэффициент корреляции между числом студентов и уровнем шума.

9. Количество 10-копеечных монет, необходимое для выдачи каждой сдачи в кассе, принимает значения от 0 до 4 с равными вероятностями. Найти, сколько должно быть 10-копеечных монет в кассе, чтобы с вероятностью 0,9 их хватило на 2500 выдач сдачи.

10. Для выборки $(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)$ из распределения с плотностью распределения $f(x)$ найти оценки параметра $0 < \theta < 1$ по первому моменту и методом максимального правдоподобия. Проверить состоятельность

полученных оценок. Плотность распределения равна

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} x^{-(\theta+1)/\theta} & \text{при } x > 1; \\ 0 & \text{при } x \le 1. \end{cases}$$

11. Дана выборка из нормального распределения с неизвестными параметрами. Найти оценки параметров распределения. Подставляя вместо неизвестных параметров их точечные оценки, записать выражение для оценки плотности распределения. Построить на одном графике гистограмму с шагом, равным среднеквадратическому (стандартному) отклонению, и график оценки плотности распределения.
1,29 12,70 10,80 -10,19 4,32 12,02 13,68 3,75 -0,90 2,94 15,07 2,08 16,22 13,42 1,55 -6,05 15,70 12,35 13,94 -0,56 24,10 7,45 3,60 -0,24 16,84 6,13 -5,28 3,00 10,04

12. По критерию Колмогорова проверить гипотезу о том, что выборка имеет равномерное распределение на отрезке [0; 2]. Сделать вывод о том, принимается ли эта гипотеза на уровне доверия 0,1; на уровне доверия 0,01; на уровне доверия 0,001.

0,28 1,13 1,78 0,65 0,55 1,02 0,88 0,76 0,57
1,71 0,62 1,69 0,15 0,23 1,99 1,53 1,91 1,57

Вариант 8

1. Наудачу брошены три монеты. Описать события: A — хотя бы на одной выпала решка, B — хотя бы на двух выпал орел, а также событие AB.

2. Номер лотерейного билета состоит из 3 цифр. Какова вероятность того, что все цифры взятого наудачу билета окажутся различными?

3. На отрезке единичной длины наудачу поставлены две точки, в результате чего этот отрезок оказывается разделенным на три части. Определить вероятность того, что длина хотя бы одной из первых двух получившихся частей не превосходит 2/3.

4. По мишени по одному разу стреляют 3 стрелка. Вероятность попадания для первого равна 0,5, для второго — 0,6, для третьего — 0,7. Найти вероятность ровно двух попаданий.

5. В семи урнах содержится по 2 белых и 2 черных шара, а в трех урнах по 7 белых и 3 черных шара. Какова вероятность, что из урны, взятой

наудачу, будет извлечен белый шар? Найти вероятность, что шар извлечен из урны с 7 белыми и 3 черными шарами, если он оказался белым.

6. Прибор состоит из трех малонадежных элементов. Отказы элементов за некоторый период времени независимы, а их вероятности равны соответственно 0,1; 0,2; 0,3. Найти ряд распределения, математическое ожидание и дисперсию числа отказавших элементов. Построить график функции распределения.

7. Точка M движется по оси Ox по закону $x = at^2$. В случайный момент времени, равномерно распределенный на отрезке $[0;\ 1]$, наблюдается положение ξ точки M. Найти плотность распределения, математическое ожидание и стандартное отклонение случайной величины ξ.

8. Четыре поезда метро, уходящие с интервалом в 4 минуты, увезли по 200 пассажиров. Четыре поезда, уходящие с интервалом в 6 минут, увезли по 100 пассажиров. Два поезда, уходящие с интервалом в 8 минут, увезли по 50 пассажиров. Найти совместное распределение числа пассажиров и интервала движения для выбранного наудачу поезда. Найти коэффициент корреляции.

9. Количество бракованных изделий в коробке имеет распределение Пуассона с параметром 3. Найти вероятность того, что в 25 коробках менее 100 бракованных изделий.

10. Для выборки $(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)$ из распределения с плотностью распределения $f(x)$ найти оценки параметра $\theta > 3$ по второму моменту и методом максимального правдоподобия. Проверить состоятельность полученных оценок. Плотность распределения равна

$$f(x) = \begin{cases} (\theta - 1)x^{-\theta} & \text{при } x > 1; \\ 0 & \text{при } x \le 1. \end{cases}$$

11. Дана выборка из нормального распределения с неизвестными параметрами. Найти оценки параметров распределения. Подставляя вместо неизвестных параметров их точечные оценки, записать выражение для оценки плотности распределения. Построить на одном графике гистограмму с шагом, равным среднеквадратическому (стандартному) отклонению, и график оценки плотности распределения.

14,92 7,48 2,82 22,84 7,49 8,98 13,84 14,17 7,07 9,69 -8,35 12,77 14,93 5,81 8,62 11,22 3,85 2,86 9,52 15,93 9,43 19,48 19,19 12,20 19,40 12,09 8,47 6,79

12. По критерию Колмогорова проверить гипотезу о том, что выборка имеет равномерное распределение на отрезке $[0;\ 2]$. Сделать вывод о том,

принимается ли эта гипотеза на уровне доверия 0,1; на уровне доверия 0,01; на уровне доверия 0,001.

1,91 0,91 0,30 1,34 0,61 1,12 1,00 0,53 1,58 0,62
0,41 0,89 1,20 1,51 0,78 1,44 0,46 0,69 1,33

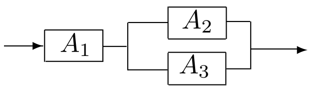
Вариант 9

1. Из колоды карт в 52 листа наудачу вынимаются три карты (без возвращения). Описать пространство элементарных исходов, а также событие, состоящее в том, что среди этих трех карт окажется ровно один туз.

2. В бригаде 3 рабочих. Какова вероятность того, что по крайней мере двое из них родились в один и тот же день недели? Считать, что вероятности родиться в каждый из дней одинаковы.

3. На отрезке единичной длины наудачу поставлены две точки, в результате чего этот отрезок оказывается разделенным на три части. Определить вероятность того, что длина каждой из трех получившихся частей не превосходит 3/4.

4. Электрическая цепь состоит из элементов A_k, соединенных по следующей схеме:



Вероятность выхода из строя элемента A_2 равна 0,01, остальных элементов A_k — по 0,1. Предполагается, что элементы выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность того, что цепь будет пропускать ток.

5. Телеграфное сообщение состоит из сигналов «точка» и «тире». Известно, что среди передаваемых сигналов «точка» и «тире» встречаются в отношении 3:2. Из-за помех искажается в среднем 25 % сигналов «точка» и 20 % сигналов «тире», причем «точка» искажается в «тире», а «тире» в «точку». Найти вероятность искажения сигнала. Определить вероятность того, что передавали «тире», если известно, что приняли «точку».

6. Два игрока играют в шахматы на деньги. Известно, что в среднем из 4 партий одну выигрывает первый игрок, одна заканчивается вничью, и две выигрывает второй игрок. В случае проигрыша первый игрок платит второму 5 рублей. Сколько он должен получать в случае выигрыша,

чтобы математическое ожидание его выигрыша равнялось нулю? Найти ряд распределения и дисперсию суммы выигрыша (отрицательная сумма выигрыша — это сумма проигрыша, взятая со знаком «минус»). Построить график функции распределения.

7. Случайная величина ξ имеет плотность распределения

$$f(x) = \begin{cases} \frac{A}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)} & \text{при } x \in [a;\ \infty); \\ 0 & \text{при} x < a \end{cases}$$

Найти нормирующую константу A, вычислить математическое ожидание. Построить график плотности распределения при $a = \sigma = 1$.

8. В подъезде 15 однокомнатных квартир площадью по 50 кв. м., 10 двухкомнатных квартир по 70 кв. м. и 5 трехкомнатных квартир по 80 кв. м. Для выбранной наудачу квартиры найти совместное распределение числа комнат и площади. Найти коэффициент корреляции между ними.

9. Суммарное время работы машины складывается из 10 000 интервалов времени, каждый из которых измеряется со стандартным отклонением в 1 минуту. Найти вероятность того, что фактическое время работы отличается от измеренного больше, чем на 1 час.

10. Для выборки $(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)$ из распределения с плотностью распределения $f(x)$ найти оценки параметра $\theta > 0$ по первому моменту и методом максимального правдоподобия. Проверить состоятельность полученных оценок. Плотность распределения равна

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\theta^2} e^{-x/\theta} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \le 0. \end{cases}$$

11. Дана выборка из нормального распределения с неизвестными параметрами. Найти оценки параметров распределения. Подставляя вместо неизвестных параметров их точечные оценки, записать выражение для оценки плотности распределения. Построить на одном графике гистограмму с шагом, равным среднеквадратическому (стандартному) отклонению, и график оценки плотности распределения.
22,59 -2,61 11,87 1,37 5,92 -5,10 5,38 14,71 7,55 3,91 1,23 8,50 -5,58 -1,97 17,93 9,42 11,99 9,39 4,78 5,43 9,40 8,68 2,20 7,15 14,78 14,77 -15,16

12. По критерию Колмогорова проверить гипотезу о том, что выборка имеет равномерное распределение на отрезке [0; 2]. Сделать вывод о том, принимается ли эта гипотеза на уровне доверия 0,1; на уровне доверия 0,01; на уровне доверия 0,001.

1,49 1,96 0,64 0,76 0,01 0,82 0,23 0,82 1,96
1,28 1,49 1,07 1,92 0,17 1,68 1,01 0,48

Вариант 10

1. Брошены две игральные кости. Пусть событие A состоит в том, что выпавшая сумма очков нечетна, а событие B — в том, что хотя бы на одной из костей выпала тройка. Описать события $\overline{AB}$ и $A\overline{B}$.

2. Из полного набора костей домино наудачу берутся пять костей. Найти вероятность того, что среди них будет хотя бы одна с шестеркой.

3. На линейке наудачу поставлены 2 точки. Какова вероятность того, что расстояние между ними окажется больше половины длины линейки?

4. Два стрелка поочередно стреляют по одной и той же мишени. У каждого стрелка 2 патрона. При первом попадании стрельба прекращается. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка 0,3, для второго — 0,4. Найти вероятность того, что оба стрелка израсходуют весь свой боезапас.

5. Первое орудие 2-орудийной батареи пристреляно так, что вероятность попадания для него равна $3/11$. Для второго орудия она равна $1/5$. Батарея дала залп по цели. Найти вероятность того, что цель поражена. Найти вероятность того, что первое орудие попало в цель, если известно, что цель была поражена. Для поражения цели достаточно одного попадания.

6. Вероятность приема отдельного сигнала равна 0,15. Радиосигнал передается 4 раза. Найти ряд распределения, математическое ожидание и дисперсию числа принятых сигналов. Построить график функции распределения. Найти вероятность того, что принятых сигналов будет не меньше 2, но не больше 3.

7. Радиус круга является случайной величиной, равномерно распределенной на отрезке [0;1]. Найти плотность распределения, функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию площади круга. Найти вероятность того, что площадь превосходит $\pi/16$. Начертить графики плотности распределения и функции распределения.

8. В отделе работает один сотрудник с двумя высшими образованиями, автор 6 изобретений, четыре сотрудника с высшим образованием, каждый из которых является автором одного изобретения, и четыре сотрудника без

высшего образовани, на счету которых изобретений нет. Для выбранного наудачу сотрудника найти совместное распределение количества изобретений и высших образований. Вычислить коэффициент корреляции между ними.

9. Время ожидания автобуса пассажиром имеет показательное распределение со средним значением 10 минут. Найти пределы, в которых с вероятностью 0,8 лежит суммарное время, затраченное на ожидание автобуса за 48 поездок.

10. Для выборки $(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)$ из распределения с плотностью распределения $f(x)$ найти оценки параметра $\theta > 0$ по первому моменту и методом максимального правдоподобия. Проверить состоятельность полученных оценок. Плотность распределения равна

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2\theta^3} e^{-x/\theta} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \le 0. \end{cases}$$

11. Дана выборка из нормального распределения с неизвестными параметрами. Найти оценки параметров распределения. Подставляя вместо неизвестных параметров их точечные оценки, записать выражение для оценки плотности распределения. Построить на одном графике гистограмму с шагом, равным среднеквадратическому (стандартному) отклонению, и график оценки плотности распределения.

9,36 19,48 3,89 4,45 15,11 15,90 24,94 1,72 3,25 -3,77 12,17 10,08 14,36
9,39 1,27 7,89 8,68 1,59 10,57 3,21 -6,11 15,61 10,82 1,68 5,63 6,79
20,27 -2,15

12. По критерию Колмогорова проверить гипотезу о том, что выборка имеет равномерное распределение на отрезке [0; 2]. Сделать вывод о том, принимается ли эта гипотеза на уровне доверия 0,1; на уровне доверия 0,01; на уровне доверия 0,001.

0,46 1,43 0,40 1,23 1,40 0,76 1,09 1,65 1,32
1,24 1,39 0,81 0,39 0,76 1,14 1,24 1,69 1,58

12. Оценить параметры нормальной регрессии Y на X по двумерной выборке. Изобразить на чертеже точки двумерной выборки и прямую линейной регрессии.

Вариант 11

1. События: A — хотя бы один из трех проверяемых приборов бракованный, B — все приборы доброкачественные. Что означают события: $A \cup B$ и AB?

2. В ящике лежат 3 черных и 3 белых шара. Найти вероятность того, что при последовательном случайном извлечении шаров из ящика сначала вынут все белые шары.

3. На отрезке единичной длины наудачу поставлены две точки, в результате чего этот отрезок оказывается разделенным на три части. Определить вероятность того, что длина каждой из трех получившихся частей не меньше 2/3.

4. Вероятность изготовления некачественной детали равна 0,2. Найти вероятность того, что из 4 деталей найдется хотя бы одна качественная.

5. Запрос абонента автоматически с равными вероятностями направляется на один из двух серверов. Вероятность возниконовения сбоя в работе первого сервера равна 0,1, второго — 0,01. Какова вероятность того, что запрос будет обслужен без сбоя? Какова вероятность того, что абонент обслуживался на первом сервере, если известно, что он был обслужен без сбоя?

6. Вероятность попадания в мишень равна 0,8 при каждом выстреле. Стрельба ведется одиночными выстрелами до первого попадания, пока не будет израсходован боезапас. Найти ряд распределения, математическое ожидание и дисперсию числа произведенных выстрелов, если боезапас составляет 4 единицы. Построить график функции распределения.

7. Точку бросают наудачу в шар радиуса R. Случайная величина ξ — расстояние от точки до центра шара. Найти функцию распределения, плотность распределения, математическое ожидание и стандартное отклонение случайной величины ξ. Найти вероятность того, что ξ примет значение, большее половины радиуса шара. Начертить графики плотности распределения и функции распределения.

8. Составить таблицу совместного распределения числа выпавших двоек и числа выпавших четных чисел при одном подбрасывании игральной кости. Найти коэффициент корреляции между ними.

9. Участник лотереи бросает игральную кость 20 раз. Участник получает ценный приз, если сумма очков больше 90. Оценить вероятность получения ценного приза.

10. Для выборки $(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)$ из распределения с плотностью распределения $f(x)$ найти оценки параметра $\theta > 3$ по первому моменту и

методом максимального правдоподобия. Проверить состоятельность полученных оценок. Плотность распределения равна

$$f(x) = \begin{cases} (\theta - 1)x^{-\theta} & \text{при } x > 1; \\ 0 & \text{при } x \le 1. \end{cases}$$

11. Дана выборка из нормального распределения с неизвестными параметрами. Найти оценки параметров распределения. Подставляя вместо неизвестных параметров их точечные оценки, записать выражение для оценки плотности распределения. Построить на одном графике гистограмму с шагом, равным среднеквадратическому (стандартному) отклонению, и график оценки плотности распределения.

1,87 1,26 1,58 2,11 0,01 1,35 2,05 0,76 1,65 1,61 0,12 2,03 1,07 1,10
3,06 0,38 0,64 1,63 0,54 2,65 0,82 1,21 0,73 1,99 2,44 0,93 0,47 0,88

12. По критерию Колмогорова проверить гипотезу о том, что выборка имеет равномерное распределение на отрезке [0; 2]. Сделать вывод о том, принимается ли эта гипотеза на уровне доверия 0,1; на уровне доверия 0,01; на уровне доверия 0,001.

0,46 0,68 0,59 1,97 1,03 0,62 0,89 1,93 0,88
1,66 1,34 1,99 0,59 0,00 0,46 1,48 1,35 1,74

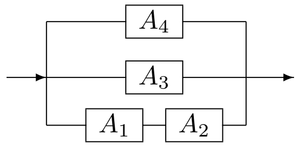
Вариант 12

1. Две игральные кости бросаются n раз, $n \ge 6$. Пусть событие A означает, что каждая из шести комбинаций $(1, 1)$,..., $(6, 6)$ появится по меньшей мере один раз. Описать отрицание события A, используя операции над событиями.

2. Бросают 4 игральные кости. Какова вероятность того, что на них выпадут только «5» и «6»?

3. На отрезке единичной длины наудачу поставлены две точки, в результате чего этот отрезок оказывается разделенным на три части. Определить вероятность того, что длина максимальной части из трех получившихся частей не превосходит 4/5.

4. Электрическая цепь состоит из элементов A_k, соединенных по следующей схеме:



Вероятность выхода из строя каждого элемента A_k равна 0,02. Предполагается, что элементы выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность того, что цепь будет пропускать ток.

5. Одинаковые детали поступают на сборку с трех заводов. Первый завод дает 10 %, второй 40 %, третий 50 % всех деталей, необходимых для сборки. Брак в продукции первого завода составляет 2 %, второго — 3 %, третьего — 4 %. Найти вероятность поступления на сборку бракованной детали. Найти вероятность того, что оказавшаяся бракованной деталь изготовлена на первом заводе.

6. Для трех саженцев вероятности успешно вынести пересадку равны 0,7, 0,8 и 0,85. Найти ряд распределения, математическое ожидание и дисперсию числа вынесших пересадку саженцев. Построить график функции распределения.

7. Распределение Парето приближенно описывает распределение доходов физических лиц. Плотность распределения равна

$$f(x) = \begin{cases} \frac{A}{x^{\alpha+1}} & \text{при } x \geq \theta; \\ 0 & \text{при } x < \theta. \end{cases}$$

Здесь $\alpha > 1$, $\theta > 0$ — параметры распределения, A — нормирующая константа. Найти константу A. Вычислить значение параметра α, при котором математическое ожидание превосходит значение параметра θ в 10 раз.

8. Подбрасываются три симметричных монеты. Составить таблицу совместного распределения количеств выпавших гербов на первых двух монетах и на последних двух монетах. Найти коэффициент корреляции между ними.

9. Время ожидания троллейбуса за одну поездку имеет равномерное распределение на отрезке от 0 до 15 минут. Оценить вероятность того, что суммарное время ожидания за 10 поездок окажется меньше 1,5 часов.

10. Для выборки $(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)$ из распределения с плотностью распределения $f(x)$ найти оценки параметра $\theta > 0$ по второму моменту и методом максимального правдоподобия. Проверить состоятельность полученных оценок. Плотность распределения равна

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta^2} e^{-x^2/\theta^2} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \leq 0. \end{cases}$$

11. Дана выборка из нормального распределения с неизвестными параметрами. Найти оценки параметров распределения. Подставляя вместо неизвестных параметров их точечные оценки, записать выражение для оценки плотности распределения. Построить на одном графике гистограмму с шагом, равным среднеквадратическому (стандартному) отклонению, и график оценки плотности распределения.

3,50 0,80 0,32 3,31 1,12 3,29 3,87 2,65 2,01 2,65 1,19 -0,85 4,07 1,23
3,38 5,17 1,51 2,20 5,41 1,22 1,89 2,02 3,17 -1,02 2,73 1,10 3,87

12. По критерию Колмогорова проверить гипотезу о том, что выборка имеет равномерное распределение на отрезке [0; 2]. Сделать вывод о том, принимается ли эта гипотеза на уровне доверия 0,1; на уровне доверия 0,01; на уровне доверия 0,001.

1,42 1,25 0,87 0,54 0,48 1,20 1,79 0,62 0,75 0,55
0,46 1,02 1,71 1,91 0,83 0,99 1,46 1,09 0,94

Вариант 13

1. Найти случайное событие X из равенства

$$\overline{X + A} + \overline{X + \overline{A}} = B.$$

2. В студенческой группе 10 юношей и 15 девушек. На университетский праздничный бал группа получила только 3 пригласительных билета, которые разыгрываются по жребию. Какова вероятность того, что на бал попадут три девушки?

3. На отрезке единичной длины наудачу поставлены две точки, в результате чего этот отрезок оказывается разделенным на три части. Определить вероятность того, что длина минимальной части из трех получившихся частей не превосходит 4/5.

4. Системный администратор обслуживает 4 сервера, работающих независимо друг от друга. Вероятность того, что в течение рабочего дня сервер не потребует внимания администратора, равна для первого и второго сервера 0,8, для третьего и четвертого — 0,10. Найти вероятность того, что хотя бы один из серверов не потребует внимания администратора.

5. Фирма распространяет 2 вида рекламных листовок A и B, причем количества листовок двух видов находятся в соотношении 2:3. На листовку вида A положительно реагируют 20 % получателей, на листовку вида B —

10 % получателей. Найти вероятность положительной реакции получателя листовки. Найти вероятность того, что получена листовка вида A, если известно, что реакция была положительной.

6. Вероятность попадания баскетбольного мяча в кольцо при бросании начинающим спортсменом равна $1/5$. Мяч бросают до первого попадания, но дают не более 5 попыток. Найти ряд распределения, математическое ожидание и дисперсию числа промахов. Построить график функции распределения.

7. Скорость автомобиля на дистанции в 100 км является случайной величиной, равномерно распределенной на отрезке от 40 км/ч до 80 км/ч. Найти математическое ожидание и стандартное отклонение времени, затраченного на преодоление дистанции. Найти вероятность того, что это время превысит 2 часа.

8. В группе из 20 студентов только двое пропустили более половины занятий, и именно они получили оценку «2» на экзамене. Из остальных студентов 5 человек получили оценку «5», 10 человек — оценку «4», и 3 студента получили «тройки». Составить таблицу совместного распределения оценки на экзамене и индикатора пропуска более половины занятий для выбранного наудачу студента. Найти коэффициент корреляции.

9. Число сериалов, просматриваемых за день выбранным наудачу студентом, имеет распределение Пуассона с параметром 0,5. Найти пределы, в которых с вероятностью 0,8 лежит число просмотров сериалов за день студентами группы из 20 человек.

10. Для выборки $(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)$ из распределения с плотностью распределения $f(x)$ найти оценки параметра $\theta > 0$ по третьему моменту и методом максимального правдоподобия. Проверить состоятельность полученных оценок. Плотность распределения равна

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2}{\theta^2} e^{-x^3/\theta^2} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \leq 0. \end{cases}$$

11. Дана выборка из нормального распределения с неизвестными параметрами. Найти оценки параметров распределения. Подставляя вместо неизвестных параметров их точечные оценки, записать выражение для оценки плотности распределения. Построить на одном графике гистограмму с шагом, равным среднеквадратическому (стандартному) отклонению, и график оценки плотности распределения.

8,16 3,33 7,35 3,05 2,54 1,91 1,77 2,92 5,95 2,31 0,27 5,12 6,60 -1,58
5,42 5,67 6,28 -0,09 2,74 2,45 1,11 6,97 -1,59 -1,41 2,69 4,99 7,24 1,75
4,76

12. По критерию Колмогорова проверить гипотезу о том, что выборка имеет равномерное распределение на отрезке [0; 2]. Сделать вывод о том, принимается ли эта гипотеза на уровне доверия 0,1; на уровне доверия 0,01; на уровне доверия 0,001.

1,94 1,42 0,61 2,00 0,59 0,58 1,18 1,58 1,01 0,57
0,05 0,25 0,17 1,30 0,52 0,91 0,84 1,66 1,24

Вариант 14

1. Пусть A, B и C — события. Каков смысл равенств: $ABC = A$ и $A \cup B \cup C = A$. Привести примеры.

2. Случайно выбранная кость домино оказалась не дублем. Найти вероятность того, что вторую также взятую наудачу кость можно приставить к первой.

3. Встречные поезда приходят на станцию в случайные моменты времени в течение суток. Один поезд стоит на станции 30 минут, другой 40 минут. Найти вероятность встречи поездов на станции.

4. Предназначенный к печати текст проверяется сначала автором, затем корректором. Автор находит в среднем 80 % допущенных в тексте опечаток, корректор — 90 %. Найти вероятность того, что будут исправлены все 4 содержащиеся в первоначальном тексте опечатки.

5. Вероятность того, что изделие удовлетворяет стандарту, равна 0,8. На заводе принята система из трех независимых испытаний, каждое из которых изделие, удовлетворяющее стандарту, проходит с вероятностью 0,9, а неудовлетворяющее — с вероятностью 0,3. Какова вероятность того, что наудачу взятое изделие выдержит испытания? Какова вероятность того, что изделие, выдержавшее испытания, удовлетворяет стандарту?

6. Вероятность успешного соединения компьютера с сервером равна 0,6. Попытки соединения производятся до установления соединения, но не более 6 попыток. Найти ряд распределения, математическое ожидание и дисперсию числа попыток соединения. Построить график функции распределения.

7. Мощность W, выделяемая на сопротивлении R, вычисляется по закону $W = U^2/R$, где U — напряжение в сети. Предполагается, что напряжение — случайная величина, распределенная равномерно на отрезке от

200 до 250 вольт. Найти плотность распределения и математическое ожидание мощности, выделяемой на сопротивлении в 100 Ом. Найти вероятность того, что мощность превысит 500 Вт.

8. В офисе 4 комнаты. В первой комнате 2 сотрудника, а компьютеров нет, во второй 4 компьютера и 1 сотрудник, в остальных двух по 2 компьютера и по 2 сотрудника. Найти совместное распределение числа сотрудников и числа компьютеров в выбранной наудачу комнате. Найти коэффициент корреляции между ними.

9. Взвешивают груз, находящийся в 200 мешках. Погрешность измерений веса каждого из них распределена по нормальному закону с нулевым средним и стандартным отклонением 100 грамм. Найти вероятность того, что суммарная погрешность по абсолютной величине меньше 1 кг.

10. Для выборки $(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)$ из распределения с плотностью распределения $f(x)$ найти оценки параметра $\theta > 0$ по первому моменту и методом максимального правдоподобия. Проверить состоятельность полученных оценок. Плотность распределения равна

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\theta^2\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}/\theta^2} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \leq 0. \end{cases}$$

11. Дана выборка из нормального распределения с неизвестными параметрами. Найти оценки параметров распределения. Подставляя вместо неизвестных параметров их точечные оценки, записать выражение для оценки плотности распределения. Построить на одном графике гистограмму с шагом, равным среднеквадратическому (стандартному) отклонению, и график оценки плотности распределения.
1,07 -0,72 -4,46 -3,24 2,42 -1,70 -1,24 -0,07 6,20 2,67 1,80 0,26 9,61 2,51 1,44 -3,65 5,50 4,17 -2,06 7,48 2,60 7,61 2,54 9,77 9,67 7,36 7,86 11,22 3,38

12. По критерию Колмогорова проверить гипотезу о том, что выборка имеет равномерное распределение на отрезке [0; 2]. Сделать вывод о том, принимается ли эта гипотеза на уровне доверия 0,1; на уровне доверия 0,01; на уровне доверия 0,001.

0,06 1,44 0,70 1,33 0,74 0,61 1,03 1,25 0,85
0,81 1,04 0,76 0,80 1,55 1,61 0,82 1,70 1,63

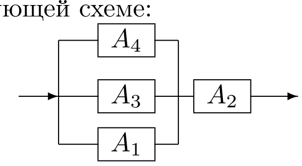
Вариант 15

1. Брошены три монеты. Описать события A = {выпало не больше двух гербов и по крайней мере одна решка} и B = {выпал по крайней мере один герб и хотя бы одна решка}. Описать также события AB, $A\overline{B}$.

2. В шахматном турнире участвуют 16 человек, которые разбиваются на пары по жребию и играют по олимпийской системе (проигравший выбывает из игры, ничьих нет). Какова вероятность того, что второй по силе шахматист не попадет в финал?

3. На отрезке единичной длины наудачу поставлены две точки, в результате чего этот отрезок оказывается разделенным на три части. Определить вероятность того, что сумма длин первых двух частей не превосходит длины последней части.

4. Электрическая цепь состоит из элементов A_k, соединенных по следующей схеме:



Вероятность выхода из строя элемента A_k равна 0,1. Предполагается, что элементы выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность того, что цепь не будет пропускать ток.

5. На сборку поступают детали с трех автоматов. Первый автомат дает 50 %, а второй 30 % всех деталей, необходимых для сборки. Брак в продукции первого автомата составляет 1 %, второго — 2 %, а третьего — 4 %. Деталь, изготовленная автоматом, оказалась бракованной. Какова вероятность того, что она изготовлена на первом автомате?

6. Вероятность отказа сервера при каждом из независимых подключений с помощью модема равна 0,2. Попытки подключения производятся до установления связи. Найти ряд распределения, математическое ожидание и дисперсию числа произведенных попыток подключения, если число попыток ограничено пятью. Построить график функции распределения.

7. Закон Эрланга с плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} Ax^2e^{-\alpha x} & \text{при } x \geq 0; \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

описывает распределение времени прибытия двух вызовов в пуассоновском потоке. Найти коэффициент A, математическое ожидание и дисперсию.

(Рекомендуется использовать таблицы определенных интегралов). Построить график плотности распределения.

На 5 карточках написаны цифры от 1 до 5. Найти совместное распределение числа, написанного на выбранной наудачу карточке, и индикатора того, что это число нечетное. Найти коэффициент корреляции между ними.

9. Количество воды, расходуемое жителями одной квартиры в сутки, имеет показательное распределение со средним значением 200 литров. Найти, с какой вероятностью для удовлетворения потребностей жильцов 500 квартир будет достаточно 12 000 литров воды.

10. Для выборки $(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)$ из распределения с плотностью распределения $f(x)$ найти оценки параметра $\theta > 0$ по первому моменту и методом максимального правдоподобия. Проверить состоятельность полученных оценок. Плотность распределения равна

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^2} e^{-x/\theta^2} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \le 0. \end{cases}$$

11. Дана выборка из нормального распределения с неизвестными параметрами. Найти оценки параметров распределения. Подставляя вместо неизвестных параметров их точечные оценки, записать выражение для оценки плотности распределения. Построить на одном графике гистограмму с шагом, равным среднеквадратическому (стандартному) отклонению, и график оценки плотности распределения.

5,38 -1,10 13,11 10,84 9,45 8,56 7,87 7,34 -4,06 3,48 4,70 7,13 -1,08
4,53 13,56 2,66 7,29 9,41 11,86 9,54 10,86 2,50 -2,84 11,21 8,93

12. По критерию Колмогорова проверить гипотезу о том, что выборка имеет равномерное распределение на отрезке $[0;\ 2]$. Сделать вывод о том, принимается ли эта гипотеза на уровне доверия 0,1; на уровне доверия 0,01; на уровне доверия 0,001.

1,23 0,49 1,12 1,98 0,25 1,52 0,52 0,03 1,10
1,59 0,27 1,30 1,79 1,93 0,23 1,84 1,04

Вариант 16

1. Случайная точка A наудачу выбирается в прямоугольнике со сторонами 1 и 2. Описать событие, означающее, что расстояние от A до

каждой стороны прямоугольника не превосходит 1/2.

2. На полке в случайном порядке расставлены 8 книг, в том числе двухтомник Мандельштама. Найти вероятность того, что один из томов Мандельштама окажется у правого края полки, а другой — у левого.

3. На отрезке единичной длины наудачу поставлены две точки, в результате чего этот отрезок оказывается разделенным на три части. Определить вероятность того, что сумма длин последних двух частей не превосходит длины первой части.

4. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,9. По мишени стреляют одиночными выстрелами до первого попадания, после чего стрельбу прекращают. Найти вероятность того, что будет сделано более трех выстрелов.

5. Студент выучил к экзамену только 30 вопросов из 40. Для сдачи экзамена достаточно ответить на два из четырех разных вопросов. Какова вероятность того, что экзамен будет сдан? Какова вероятность того, что студент ответил на все четыре вопроса, если известно, что он сдал экзамен?

6. Пользователь компьютера забыл пароль и перебирает наудачу 6 возможных. После трех неудачных попыток компьютер блокируется. Найти ряд распределения, математическое ожидание и дисперсию числа попыток. Построить график функции распределения.

7. Время достижения стандартным броуновским движением уровня a имеет плотность распределения

$$f(t) = \begin{cases} At^{-3/2}e^{-a^2/(2t)} & \text{при } t \geq 0; \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

Найти нормирующую константу A. Доказать, что математическое ожидание времени достижения не существует. (Сделать замену $a/\sqrt{t} = y$. Можно использовать таблицы определенных интегралов).

8. В течение трех дней недели температура была 30 градусов, а влажность 60 процентов. В течение других трех дней температура 20 градусов, а влажность 90 процентов, а в последний день 10 градусов и 100 процентов. Найти совместное распределение температуры и влажности в выбранный наудачу день. Найти коэффициент корреляции между температурой и влажностью.

9. Участник лотереи бросает 5 шаров, каждый из которых может попасть в лузы с номерами от 1 до 6. Участник получает ценный приз, если сумма очков больше 23. Оценить вероятность получения ценного приза.

10. Для выборки $(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)$ из распределения с плотностью распределения $f(x)$ найти оценки параметра $\theta > 0$ по третьему моменту и методом максимального правдоподобия. Проверить состоятельность полученных оценок. Плотность распределения равна

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3\sqrt{x}}{2\theta^2} e^{-x\sqrt{x}/\theta^2} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \le 0. \end{cases}$$

11. Дана выборка из нормального распределения с неизвестными параметрами. Найти оценки параметров распределения. Подставляя вместо неизвестных параметров их точечные оценки, записать выражение для оценки плотности распределения. Построить на одном графике гистограмму с шагом, равным среднеквадратическому (стандартному) отклонению, и график оценки плотности распределения.

4,61 6,70 2,88 9,09 -2,06 6,25 6,46 4,25 16,16 7,07 1,35 13,58 7,96 14,64
-2,14 10,81 2,50 2,24 -1,04 5,31 11,93 16,20 7,49 -5,21 5,90 5,63 7,26

12. По критерию Колмогорова проверить гипотезу о том, что выборка имеет равномерное распределение на отрезке [0; 2]. Сделать вывод о том, принимается ли эта гипотеза на уровне доверия 0,1; на уровне доверия 0,01; на уровне доверия 0,001.

1,64 0,79 0,64 1,06 0,42 0,69 1,65 0,45 0,43
1,48 0,44 0,97 1,49 0,46 1,29 0,37 0,45

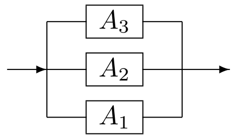
Вариант 17

1. Случайная точка A наудачу выбирается в прямоугольнике со сторонами 1 и 2. Описать событие, означающее, что расстояние от A до ближайшей стороны прямоугольника не превосходит 1/2.

2. Из колоды карт в 36 листов вынимаются три карты. Найти вероятность того, что среди них окажутся хотя бы две красные карты.

3. На отрезке AB наудачу выбираются две точки M и N. Какова вероятность того, что точка M окажется по крайней мере втрое ближе к точке N, чем к точке A?

4. Электрическая цепь состоит из элементов A_k, соединенных по следующей схеме:



Вероятность выхода из строя элемента A_1 равна 0,1, остальных элементов A_k — по 0,04. Предполагается, что элементы выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность того, что цепь будет пропускать ток.

5. Прибор состоит из трех независимо работающих блоков, вероятности отказа которых за смену равны соответственно 0,01, 0,05 и 0,08. Вероятность выхода из строя прибора при отказе одного из блоков равна 0,5; при отказе двух блоков — 0,8, при отказе всех трех блоков — 1. Определить вероятность выхода прибора из строя за смену. Найти вероятность того, что отказали все три блока, если известно, что прибор вышел из строя.

6. При игре с автоматом игрок получает 50 рублей с вероятностью 0,1, 10 рублей с вероятностью 0,3. Найти сумму x рублей, которую игрок бросает в автомат и теряет в случае проигрыша, если математическое ожидание выигрыша равно минус 2 рублям. (В случае проигрыша сумма выигрыша считается отрицательным числом, равным сумме проигрыша, взятой со знаком «минус».) Найти ряд распределения и дисперсию суммы выигрыша. Построить график функции распределения.

7. Плотность распределения вероятностей случайной величины ξ имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{A}{1+\left(\dfrac{x}{\theta}\right)^2} & \text{при } |x| \le \theta; \\ \qquad 0 & \text{при } |x| > \theta \end{cases}$$

(усеченное распределение Коши). Найти коэффициент A, вычислить математическое ожидание и стандартное отклонение. Найти вероятность того, что случайная величина ξ примет значение, большее $\theta/\sqrt{3}$.

8. В двух из четырех аудиторий по 20 студентов и уровень шума 60 децибелл, в третьей 10 студентов и уровень шума 50 децибелл, а в четвертой аудитории нет студентов и уровень шума 20 децибелл. Найти совместное распределение числа студентов и уровня шума в выбранной наудачу аудитории. Найти коэффициент корреляции между числом студентов и уровнем шума.

9. Количество 10-копеечных монет, необходимое для выдачи каждой сдачи в кассе, принимает значения от 0 до 4 с равными вероятностями. Найти, с какой вероятностью на 100 выдач сдачи будет достаточно 220

10-копеечных монет .

10. Для выборки $(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)$ из распределения с плотностью распределения $f(x)$ найти оценки параметра $1 < \theta < 2$ по первому моменту и методом максимального правдоподобия. Проверить состоятельность полученных оценок. Плотность распределения равна

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta-1} x^{-\theta/(\theta-1)} & \text{при } x > 1; \\ 0 & \text{при } x \leq 1. \end{cases}$$

11. Дана выборка из нормального распределения с неизвестными параметрами. Найти оценки параметров распределения. Подставляя вместо неизвестных параметров их точечные оценки, записать выражение для оценки плотности распределения. Построить на одном графике гистограмму с шагом, равным среднеквадратическому (стандартному) отклонению, и график оценки плотности распределения.

2,92 12,70 10,80 -10,19 4,32 12,02 13,68 3,75 -0,90 2,94 15,07 2,08 16,22 13,42 1,55 -6,05 15,70 12,35 13,94 -0,56 24,10 7,45 3,60 -0,24 16,84 6,13 -5,28 3,00 10,04

12. По критерию Колмогорова проверить гипотезу о том, что выборка имеет равномерное распределение на отрезке [0; 2]. Сделать вывод о том, принимается ли эта гипотеза на уровне доверия 0,1; на уровне доверия 0,01; на уровне доверия 0,001.

1,82 1,13 1,78 0,65 0,55 1,02 0,88 0,76 0,57
1,71 0,62 1,69 0,15 0,23 1,99 1,53 1,91 1,57

Вариант 18

1. Брошены три игральные кости. Описать событие означающее, что хотя бы на одной кости появилась единица и не более чем на двух выпали двойки.

2. Номер лотерейного билета состоит из 6 цифр. Какова вероятность того, что хотя бы две цифры взятого наудачу билета совпадают?

3. Стержень единичной длины AB разломан в двух наудачу выбранных точках X и Y. С какой вероятностью расстояние между этими точками не превзойдет максимального из двух отрезков AX или AY.

4. По мишени по одному разу стреляют 4 стрелка. Вероятность попадания для первого равна 0,5, для второго — 0,6, для третьего — 0,7, для четвертого — 0,9. Найти вероятность ровно двух попаданий.

5. В семи урнах содержится по 3 белых и 2 черных шара, а в трех урнах по 7 белых и 3 черных шара. Какова вероятность, что из урны, взятой наудачу, будет извлечен белый шар? Найти вероятность, что шар извлечен из урны с 7 белыми и 3 черными шарами, если он оказался белым.

6. Прибор состоит из трех малонадежных элементов. Отказы элементов за некоторый период времени независимы, а их вероятности равны соответственно 0,2; 0,3; 0,4. Найти ряд распределения, математическое ожидание и дисперсию числа отказавших элементов. Построить график функции распределения.

7. Точка M движется по оси Ox по закону $x = vt - at^2$. В случайный момент времени, равномерно распределенный на отрезке $[0;\ T]$, наблюдается координата ξ точки M. Найти математическое ожидание и стандартное отклонение случайной величины ξ. При $v = 10$ м/с, $a = 10$ м/с^2, $T = 3$ с найти вероятность того, что $\xi > 0$.

8. Четыре автобуса, уходящие с интервалом в 5 минут, увезли по 20 пассажиров. Два автобуса, уходящие с интервалом в 10 минут, увезли по 30 пассажиров. Два автобуса, уходящие с интервалом в 15 минут, увезли по 35 пассажиров. Найти совместное распределение числа пассажиров и интервала движения для выбранного наудачу автобуса. Найти коэффициент корреляции.

9. Количество бракованных изделий в коробке имеет распределение Пуассона с параметром 2. Найти вероятность того, что в 16 коробках более 40 бракованных изделий.

10. Для выборки $(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)$ из распределения с плотностью распределения $f(x)$ найти оценки параметра $\theta > 2$ по второму моменту и методом максимального правдоподобия. Проверить состоятельность полученных оценок. Плотность распределения равна

$$f(x) = \begin{cases} \theta x^{-(\theta+1)} & \text{при } x > 1; \\ 0 & \text{при } x \leq 1. \end{cases}$$

11. Дана выборка из нормального распределения с неизвестными параметрами. Найти оценки параметров распределения. Подставляя вместо неизвестных параметров их точечные оценки, записать выражение для оценки плотности распределения. Построить на одном графике гистограмму с шагом, равным среднеквадратическому (стандартному) отклонению, и график оценки плотности распределения.

13,29 7,48 2,82 22,84 7,49 8,98 13,84 14,17 7,07 9,69 -8,35 12,77 14,93
5,81 8,62 11,22 3,85 2,86 9,52 15,93 9,43 19,48 19,19 12,20 19,40 12,09
8,47 6,79

12. По критерию Колмогорова проверить гипотезу о том, что выборка имеет равномерное распределение на отрезке [0; 2]. Сделать вывод о том, принимается ли эта гипотеза на уровне доверия 0,1; на уровне доверия 0,01; на уровне доверия 0,001.

0,19 0,91 0,30 1,34 0,61 1,12 1,00 0,53 1,58 0,62
0,41 0,89 1,20 1,51 0,78 1,44 0,46 0,69 1,33

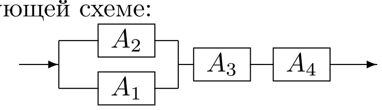
Вариант 19

1. Некто написал n адресатам письма, в каждый конверт вложил по одному письму и затем наудачу написал на каждом конверте один из n адресов. Пусть событие A_i состоит в том, что i-е письмо попало в свой конверт. Описать событие, заключающееся в том, что ровно одно письмо попало в свой конверт.

2. В бригаде 4 рабочих. Какова вероятность того, что по крайней мере трое из них родились в один и тот же день недели? Считать, что вероятности родиться в каждый из дней одинаковы.

3. Стержень единичной длины AB разломан в двух наудачу выбранных точках X и Y. С какой вероятностью расстояние между этими точками не превзойдет длины отрезка AX.

4. Электрическая цепь состоит из элементов A_k, соединенных по следующей схеме:



Вероятность выхода из строя элемента A_2 равна 0,01, остальных элементов A_k — по 0,1. Предполагается, что элементы выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность того, что цепь будет пропускать ток.

5. Телеграфное сообщение состоит из сигналов «точка» и «тире». Известно, что среди передаваемых сигналов «точка» и «тире» встречаются в отношении 7:3. Из-за помех искажается в среднем 25 % сигналов «точка» и 20 % сигналов «тире», причем «точка» искажается в «тире», а «тире» в

«точку». Найти вероятность искажения сигнала. Определить вероятность того, что передавали «точку», если известно, что приняли «тире».

6. Два игрока играют в шахматы на деньги. Известно, что в среднем из 5 партий одну выигрывает первый игрок, две заканчиваются вничью, и две выигрывает второй игрок. В случае проигрыша первый игрок платит второму 50 рублей. Сколько он должен получать в случае выигрыша, чтобы математическое ожидание его выигрыша равнялось нулю? Найти ряд распределения и дисперсию суммы выигрыша (отрицательная сумма выигрыша — это сумма проигрыша, взятая со знаком «минус»). Построить график функции распределения.

7. Случайная величина ξ имеет плотность распределения

$$f(x) = \begin{cases} \frac{A}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)} & \text{при } |x-a| \leq 2\sigma; \\ 0 & mbox\ |x-a| > 2\sigma. \end{cases}$$

Найти нормирующую константу A, вычислить математическое ожидание. Построить график плотности распределения при $a = \sigma = 1$.

8. В подъезде 5 однокомнатных квартир площадью по 40 кв. м., 10 двухкомнатных квартир по 60 кв. м., 10 трехкомнатных квартир по 70 кв. м. и 5 четырехкомнатных по 90 кв. м. Для выбранной наудачу квартиры найти совместное распределение числа комнат и площади. Найти коэффициент корреляции между ними.

9. Суммарное время работы машины складывается из 1000 интервалов времени, каждый из которых измеряется со стандартным отклонением в 10 минут. Найти вероятность того, что фактическое время работы отличается от измеренного больше, чем на 10 часов.

10. Для выборки $(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)$ из распределения с плотностью распределения $f(x)$ найти оценки параметра $\theta > 0$ по первому моменту и методом максимального правдоподобия. Проверить состоятельность полученных оценок. Плотность распределения равна

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\theta^4} e^{-x/\theta^2} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \leq 0. \end{cases}$$

11. Дана выборка из нормального распределения с неизвестными параметрами. Найти оценки параметров распределения. Подставляя вместо неизвестных параметров их точечные оценки, записать выражение для оценки плотности распределения. Построить на одном графике гистограмму с шагом, равным среднеквадратическому (стандартному) отклонению, и график оценки плотности распределения.

23,95 -2,61 11,87 1,37 5,92 -5,10 5,38 14,71 7,55 3,91 1,23 8,50 -5,58 -1,97 17,93 9,42 11,99 9,39 4,78 5,43 9,40 8,68 2,20 7,15 14,78 14,77 -15,16

12. По критерию Колмогорова проверить гипотезу о том, что выборка имеет равномерное распределение на отрезке [0; 2]. Сделать вывод о том, принимается ли эта гипотеза на уровне доверия 0,1; на уровне доверия 0,01; на уровне доверия 0,001.

2,94 1,96 0,64 0,76 0,01 0,82 0,23 0,82 1,96
1,28 1,49 1,07 1,92 0,17 1,68 1,01 0,48

Вариант 20

1. Некто написал n адресатам письма, в каждый конверт вложил по одному письму и затем наудачу написал на каждом конверте один из n адресов. Пусть событие A_i состоит в том, что i-е письмо попало в свой конверт. Описать событие, заключающееся в том, что ровно два письма попало в свой конверт.

2. Некто написал трем адресатам письма, в каждый конверт вложил по одному письму и затем наудачу написал на каждом конверте один из трех адресов. Найти вероятность, что хотя бы одно письмо попало по назначению.

3. На линейке наудачу поставлены 2 точки. Какова вероятность того, что расстояние между ними окажется больше четверти длины линейки?

4. Три стрелка поочередно стреляют по одной и той же мишени. У каждого стрелка 2 патрона. При первом попадании стрельба прекращается. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка 0,3, для второго — 0,4, для третьего — 0,6. Найти вероятность того, что все стрелки израсходуют весь свой боезапас.

5. Первое орудие 3-орудийной батареи пристреляно так, что вероятность попадания для него равна 3/11. Для второго и третьего орудия она равна 1/5. Батарея дала залп по цели. Найти вероятность того, что цель поражена. Найти вероятность того, что первое орудие попало в цель, если известно, что цель была поражена. Для поражения цели достаточно одного попадания.

6. Вероятность приема отдельного сигнала равна 0,05. Радиосигнал передается 5 раз. Найти ряд распределения, математическое ожидание и дисперсию числа принятых сигналов. Построить график функции распределения. Найти вероятность того, что принятых сигналов будет не меньше 2, но не больше 3.

7. Катет равнобедренного прямоугольного треугольника является случайной величиной, равномерно распределенной на отрезке [0;1]. Найти плотность распределения, функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию площади треугольника. Найти вероятность того, что площадь превосходит $1/8$. Начертить графики плотности распределения и функции распределения.

8. В отделе работает один сотрудник с двумя высшими образованиями возрастом 30 лет, два сотрудника с высшим образованием возрастом по 50 лет и два сотрудника без высшего образования возрастом по 20 лет. Для выбранного наудачу сотрудника найти совместное распределение возраста и количества высших образований. Вычислить коэффициент корреляции между ними.

9. Время ожидания автобуса пассажиром имеет показательное распределение со средним значением 8 минут. Найти количество поездок, за которое суммарное время, затраченное на ожидание автобуса, не превысит 5 часов с вероятностью 0,9.

10. Для выборки $(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)$ из распределения с плотностью распределения $f(x)$ найти оценки параметра $\theta > 0$ по первому моменту и методом максимального правдоподобия. Проверить состоятельность полученных оценок. Плотность распределения равна

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2\theta^6} e^{-x/\theta^2} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \leq 0. \end{cases}$$

11. Дана выборка из нормального распределения с неизвестными параметрами. Найти оценки параметров распределения. Подставляя вместо неизвестных параметров их точечные оценки, записать выражение для оценки плотности распределения. Построить на одном графике гистограмму с шагом, равным среднеквадратическому (стандартному) отклонению, и график оценки плотности распределения.

10,63 19,48 3,89 4,45 15,11 15,90 24,94 1,72 3,25 -3,77 12,17 10,08 14,36 9,39 1,27 7,89 8,68 1,59 10,57 3,21 -6,11 15,61 10,82 1,68 5,63 6,79 20,27 -2,15

12. По критерию Колмогорова проверить гипотезу о том, что выборка имеет равномерное распределение на отрезке [0; 2]. Сделать вывод о том, принимается ли эта гипотеза на уровне доверия 0,1; на уровне доверия 0,01; на уровне доверия 0,001.

1,64	1,43	0,40	1,23	1,40	0,76	1,09	1,65	1,32
1,24	1,39	0,81	0,39	0,76	1,14	1,24	1,69	1,58

Вариант 21

1. Бросаются две игральные кости. Пусть событие A состоит в том, что выпавшая сумма очков нечетна, а событие B — в том, что хотя бы на одной из костей выпала тройка. Описать события AB и $A\overline{B}$.

2. В ящике 5 красных и 4 синих пуговиц. Какова вероятность того, что из четырех наудачу вынутых пуговиц хотя бы две будут одноцветными.

3. Молодой человек договорился встретиться с девушкой между 9 и 10 часами и обещал ждать её до 10 часов. Девушка обещала ждать его 10 минут, если придет раньше. Найти вероятность того, что они встретятся. Предполагается, что моменты их прихода равновероятны в течение часа.

4. При передаче сообщений в среднем 20 % писем не доходят до получателя. Найти вероятность того, что из 6 писем более половины на будет получено адресатами.

5. В пункте проката имеется 6 одинаковых на вид велосипедов. Вероятность поломки для двух из них по 0,1, для трех по 0,2 и для одного 0,7. Какова вероятность того, что велосипед сломается, если его выбирают наудачу? Какова вероятность того, что был выбран велосипед, для которого вероятность поломки 0,7, при условии, что он сломался?

6. Вероятность попадания в мишень равна 0,4 при каждом выстреле. Стрельба ведется одиночными выстрелами до первого попадания, пока не будет израсходован боезапас. Найти ряд распределения, математическое ожидание и дисперсию числа произведенных выстрелов, если боезапас составляет 5 единиц. Построить график функции распределения.

7. Случайная величина ξ — координата точки, совершающей колебательные движения по закону $x = a\sin(\omega t)$, и наблюдаемой в случайный момент времени T, равномерно распределенный на периоде колеба-

ний $[0;\ 2\pi/\omega]$. Найти математическое ожидание и стандартное отклонение случайной величины ξ. Найти вероятность того, что $\xi > a/2$.

8. Составить таблицу совместного распределения числа выпавших четных и нечетных чисел при одном подбрасывании игральной кости. Найти коэффициент корреляции между ними.

9. Оценить, сколько раз нужно бросить игральную кость, чтобы сумма выпавших очков превысила 300 с вероятностью не менее 0,92.

9 Для выборки $(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)$ из распределения с плотностью распределения $f(x)$ найти оценки параметра $\theta > 4$ по первому моменту и методом максимального правдоподобия. Проверить состоятельность полученных оценок. Плотность распределения равна

$$f(x) = \begin{cases} (\theta - 2)x^{-\theta+1} & \text{при } x > 1; \\ 0 & \text{при } x \le 1. \end{cases}$$

11. Дана выборка из нормального распределения с неизвестными параметрами. Найти оценки параметров распределения. Подставляя вместо неизвестных параметров их точечные оценки, записать выражение для оценки плотности распределения. Построить на одном графике гистограмму с шагом, равным среднеквадратическому (стандартному) отклонению, и график оценки плотности распределения.

0,87	1,26	1,58	2,11	0,01	1,35	2,05	0,76	1,65	1,61	0,12	2,03	1,07	1,10
3,06	0,38	0,64	1,63	0,54	2,65	0,82	1,21	0,73	1,99	2,44	0,93	0,47	0,88

12. По критерию Колмогорова проверить гипотезу о том, что выборка имеет равномерное распределение на отрезке $[0;\ 2]$. Сделать вывод о том, принимается ли эта гипотеза на уровне доверия 0,1; на уровне доверия 0,01; на уровне доверия 0,001.

1,46	0,68	0,59	1,97	1,03	0,62	0,89	1,93	0,88
1,66	1,34	1,99	0,59	0,00	0,46	1,48	1,35	1,74

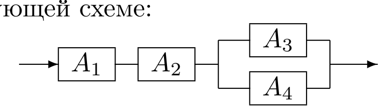
Вариант 22

1. Прибор состоит из двух блоков первого типа и трех блоков второго типа. События: $A_k, k = 1, 2$ — исправен k-й блок первого типа, $B_j, j = 1, 2, 3$ — исправен j-й блок второго типа. Прибор исправен, если исправны хотя бы один блок первого типа и не менее двух блоков второго типа. Выразить C, означающее исправность прибора, через A_k и B_j.

2. Бросают 4 игральные кости. Какова вероятность того, что хотя бы на двух из них выпадет одинаковое число очков?

3. Стержень единичной длины AB разломан в двух наудачу выбранных точках X и Y. С какой вероятностью расстояние между этими точками не превзойдет длины отрезка BY.

4. Электрическая цепь состоит из элементов A_k, соединенных по следующей схеме:



Вероятность выхода из строя каждого элемента A_k равна 0,02. Предполагается, что элементы выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность того, что цепь будет пропускать ток.

5. Одинаковые детали поступают на сборку с трех автоматов. Первый автомат дает 25 %, второй 30 %, третий 45 % всех деталей, необходимых для сборки. Брак в продукции первого автомата составляет 2,5 %, второго — 2 %, третьего — 3 %. Найти вероятность поступления на сборку небракованной детали. Найти вероятность того, что оказавшаяся небракованной деталь изготовлена на первом автомате.

6. По мишени одновременно стреляют три стрелка, вероятности попаданий которых равны соответственно 0,4, 0,7 и 0,9. Найти ряд распределения, математическое ожидание и дисперсию числа попаданий в мишень. Построить график функции распределения.

7. Максимальный нуль стандартного броуновского движения на $[0;\ 1]$ имеет координату ξ с функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} A\arcsin\sqrt{x} & \text{при } x \in [0;\ 1]; \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Найти константу A. Построить графики функции распределения и плотности распределения случайной величины ξ.

8. Подбрасываются три симметричных монеты. Составить таблицу совместного распределения количеств выпавших гербов на первой монете и на трех монетах. Найти коэффициент корреляции между ними.

9. Время ожидания поезда метро за одну поездку имеет равномерное распределение на отрезке от 0 до 5 минут. Оценить число поездок, в течение которых суммарное время ожидания окажется меньше 1 часа с вероятностью 0,96.

10. Для выборки $(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)$ из распределения с плотностью распределения $f(x)$ найти оценки параметра $\theta > 0$ по второму моменту и

методом максимального правдоподобия. Проверить состоятельность полученных оценок. Плотность распределения равна

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta^3} e^{-x^2/\theta^3} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \le 0. \end{cases}$$

11. Дана выборка из нормального распределения с неизвестными параметрами. Найти оценки параметров распределения. Подставляя вместо неизвестных параметров их точечные оценки, записать выражение для оценки плотности распределения. Построить на одном графике гистограмму с шагом, равным среднеквадратическому (стандартному) отклонению, и график оценки плотности распределения.

2,50 0,80 0,32 3,31 1,12 3,29 3,87 2,65 2,01 2,65 1,19 -0,85 4,07 1,23
3,38 5,17 1,51 2,20 5,41 1,22 1,89 2,02 3,17 -1,02 2,73 1,10 3,87

12. По критерию Колмогорова проверить гипотезу о том, что выборка имеет равномерное распределение на отрезке [0; 2]. Сделать вывод о том, принимается ли эта гипотеза на уровне доверия 0,1; на уровне доверия 0,01; на уровне доверия 0,001.

0,42 1,25 0,87 0,54 0,48 1,20 1,79 0,62 0,75 0,55
0,46 1,02 1,71 1,91 0,83 0,99 1,46 1,09 0,94

Вариант 23

1. Судно имеет одно рулевое устройство, четыре котла и две турбины. Событие A означает исправность рулевого устройства, $B_k, k = 1, 2, 3, 4$ — исправность k-го котла, а $C_j, j = 1, 2$ — исправность j-й турбины. Событие D — судно управляемое, что будет в том и только в том случае, когда исправны рулевое устройство, хотя бы один котел и хотя бы одна турбина. Выразить D через A, B_k и C_j.

2. В студенческой группе 10 юношей и 15 девушек. На университетский праздничный бал группа получила 5 пригласительных билетов, которые разыгрываются по жребию. Какова вероятность того, что на бал попадет хотя бы одна девушка?

3. На отрезке единичной длины наудачу поставлены две точки, в результате чего этот отрезок оказывается разделенным на три части. Определить вероятность того, что длина хотя бы одной из трех получившихся частей не превосходит 2/3.

4. На трех телеканалах часть времени занята рекламой: на первом — 60 % времени, на втором — 40 %, на местном — 30 %. Найти вероятность того, что в случайный момент времени нет рекламы хотя бы на одном из каналов.

5. Станок обрабатывает 2 вида деталей A и B, причем время работы распределяется между ними в соотношении 2:3. При обработке детали вида A он работает с максимальной для него нагрузкой в течение 60 % времени, при обработке детали вида B — 90 % времени. В случайный момент времени станок работал с максимальной нагрузкой. Определить вероятность того, что в это время он обрабатывал деталь вида A; вида B.

6. Вероятность попадания баскетбольного мяча в кольцо при бросании начинающим спортсменом равна $1/9$. Мяч бросают до первого попадания, но дают не более 6 попыток. Найти ряд распределения, математическое ожидание и дисперсию числа промахов. Построить график функции распределения.

7. Сила, действующая на электрон в электрическом поле, вычисляется по формуле $F = k/r^2$, где r — расстояние от анода — случайная величина, распределенная равномерно на $[R;\ 2R]$. Найти математическое ожидание и стандартное отклонение силы F. Найти вероятность того, что эта сила превысит $k/(2R^2)$.

8. В группе из 20 студентов только двое изучали в школе французский язык, и именно они получили оценку «4» на экзамене. Из остальных студентов 10 человек получили оценку «3», 5 человек — оценку «3», и 3 студента получили «двойки». Составить таблицу совместного распределения оценки на экзамене и индикатора изучения французского языка для выбранного наудачу студента. Найти коэффициент корреляции между ними.

9. Число опечаток на странице книги имеет распределение Пуассона с параметром 0,5. Найти, сколько должно быть страниц в книге, чтобы число опечаток в ней не превысило 200 с вероятностью 0,75.

10. Для выборки $(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)$ из распределения с плотностью распределения $f(x)$ найти оценки параметра $\theta > 0$ по третьему моменту и методом максимального правдоподобия. Проверить состоятельность полученных оценок. Плотность распределения равна

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2}{\theta^3} e^{-x^3/\theta^3} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \le 0. \end{cases}$$

11. Дана выборка из нормального распределения с неизвестными параметрами. Найти оценки параметров распределения. Подставляя вместо

неизвестных параметров их точечные оценки, записать выражение для оценки плотности распределения. Построить на одном графике гистограмму с шагом, равным среднеквадратическому (стандартному) отклонению, и график оценки плотности распределения.

7,16 3,33 7,35 3,05 2,54 1,91 1,77 2,92 5,95 2,31 0,27 5,12 6,60 -1,58
5,42 5,67 6,28 -0,09 2,74 2,45 1,11 6,97 -1,59 -1,41 2,69 4,99 7,24 1,75
4,76

12. По критерию Колмогорова проверить гипотезу о том, что выборка имеет равномерное распределение на отрезке [0; 2]. Сделать вывод о том, принимается ли эта гипотеза на уровне доверия 0,1; на уровне доверия 0,01; на уровне доверия 0,001.

0,94 1,42 0,61 2,00 0,59 0,58 1,18 1,58 1,01 0,57
0,05 0,25 0,17 1,30 0,52 0,91 0,84 1,66 1,24

Вариант 24

1. Машинно-котельная установка состоит из двух котлов и одной машины. Событие A — исправна машина, событие $B_k, k = 1, 2$ — исправен k-й котел. Событие C означает работоспособность машинно-котельной установки, что будет в том и только в том случае, если исправна машина и хотя бы один котел. Выразить события C и $\overline{C}$ через A и B_k.

2. В компании из десяти человек решили сделать друг другу подарки, для чего каждый принес подарок. Все подарки сложили вместе, перемешали и случайно распределили среди участников. Найти вероятность того, что три конкретных человека получат свой собственный подарок.

3. На линейке длиной 20 см случайно сделаны две насечки. Какова вероятность того, что растояние от первой насечки до начала линейки превосходит расстояние от второй насечки до начала линейки более, чем на 15 см?

4. Радиосигнал передается последовательно через 3 ретранслятора. На каждом ретрансляторе может возникнуть помеха независимо от остальных ретрансляторов с вероятностями 0,02, 0,03 и 0,04 соответственно. Найти вероятность получения радиосигнала без помехи.

5. Вероятность того, что изделие удовлетворяет стандарту, равна 0,95. На заводе принята система из четырех независимых испытаний, каждое из которых изделие, удовлетворяющее стандарту, проходит с вероятностью

0,9, а неудовлетворяющее — с вероятностью 0,4. Какова вероятность того, что наудачу взятое изделие выдержит испытания? Какова вероятность того, что изделие, выдержавшее испытания, удовлетворяет стандарту?

6. Вероятность изготовления нестандартного изделия при налаженном технологическом процессе постоянна и равна $1/9$. Для проверки изделий отдел технического контроля берет из партии изделия одно за другим, но не более 5 изделий. При обнаружении нестандартного изделия вся партия задерживается. Найти ряд распределения, математическое ожидание и дисперсию числа изделий, проверяемых в каждой партии. Построить график функции распределения.

7. Высота H, которой достигает брошенный вверх мяч, определяется по формуле $H = v^2/(2g)$, где v — скорость, с которой брошен мяч, g — ускорение свободного падения, которое примем равным 10 м/с^2. Предполагается, что v — случайная величина, распределенная равномерно на отрезке от 10 до 20 м/с. Найти плотность распределения и математическое ожидание высоты, достигнутой мячом. Найти вероятность того, что высота превысит 15 м.

8. В научном отделе 3 лаборатории. В первой лаборатории 6 сотрудников и 2 исследовательских проекта, во второй 8 сотрудников и 1 проект, в третьей — 4 сотрудника и 2 проекта. Найти совместное распределение числа сотрудников и числа проектов в выбранной наудачу лаборатории. Найти коэффициент корреляции между ними.

9. Погрешность измерений длины каждого из участков маршрута распределена по нормальному закону с нулевым средним и стандартным отклонением 5 метров. Найти, на сколько участков можно разбить маршрут, чтобы суммарная погрешность не превосходила по модулю 100 метров с вероятностью 0,95.

10. Для выборки $(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)$ из распределения с плотностью распределения $f(x)$ найти оценки параметра $\theta > 0$ по первому моменту и методом максимального правдоподобия. Проверить состоятельность полученных оценок. Плотность распределения равна

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\theta^3\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}/\theta^3} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \leq 0. \end{cases}$$

11. Дана выборка из нормального распределения с неизвестными параметрами. Найти оценки параметров распределения. Подставляя вместо неизвестных параметров их точечные оценки, записать выражение для оценки плотности распределения. Построить на одном графике гистограм-

му с шагом, равным среднеквадратическому (стандартному) отклонению, и график оценки плотности распределения.

-1,07 -0,72 -4,46 -3,24 2,42 -1,70 -1,24 -0,07 6,20 2,67 1,80 0,26 9,61 2,51 1,44 -3,65 5,50 4,17 -2,06 7,48 2,60 7,61 2,54 9,77 9,67 7,36 7,86 11,22 3,38

12. По критерию Колмогорова проверить гипотезу о том, что выборка имеет равномерное распределение на отрезке [0; 2]. Сделать вывод о том, принимается ли эта гипотеза на уровне доверия 0,1; на уровне доверия 0,01; на уровне доверия 0,001.

1,06 1,44 0,70 1,33 0,74 0,61 1,03 1,25 0,85
0,81 1,04 0,76 0,80 1,55 1,61 0,82 1,70 1,63

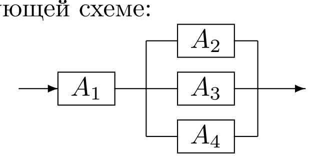
Вариант 25

1. Брошены четыре монеты. Пусть событие A состоит в том, что по крайней мере на двух монетах выпал герб, а событие B — в том, что хотя бы на двух монетах выпала решка. Описать события AB, $\overline{A}B$, $\overline{AB}$.

2. В шахматном матче участвуют 4 пары шахматистов. Вероятность ничьей в каждой партии равна 1/4. Найти вероятность того, что в матче будет хотя бы одна ничья.

3. На отрезке единичной длины наудачу поставлены две точки, в результате чего этот отрезок оказывается разделенным на три части. Определить вероятность того, что длина первых двух частей не превосходит 3/5, длина же последней части больше 1/2.

4. Электрическая цепь состоит из элементов A_k, соединенных по следующей схеме:



Вероятность выхода из строя элемента A_k равна 0,1. Предполагается, что элементы выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность того, что цепь не будет пропускать ток.

5. На сборку поступают детали с четырех автоматов. Первый и второй автоматы дают по 40 %, а третий и четвертый по 10 % всех деталей,

необходимых для сборки. Брак в продукции первого и второго автомата составляет 1 %, а третьего и четвертого — 4 %. Деталь, изготовленная автоматом, оказалась бракованной. Какова вероятность того, что она изготовлена на первом автомате?

6. Вероятность отказа сервера при каждом из независимых подключений с помощью модема равна 0,2. Попытки подключения производятся до установления связи. Найти ряд распределения, математическое ожидание и дисперсию числа произведенных попыток подключения, если число попыток ограничено шестью. Построить график функции распределения.

7. Закон Эрланга с плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} Ax^2 e^{-\alpha x} & \text{при } x \geq 0; \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

описывает время ожидания прихода трех вызовов в пуассоновском потоке. Найти коэффициент A, математическое ожидание и дисперсию. (Рекомендуется использовать таблицы определенных интегралов).

8. На 8 карточках написаны цифры от 1 до 9. Найти совместное распределение числа, написанного на выбранной наудачу карточке, и индикатора того, что это число больше трех. Найти коэффициент корреляции между ними.

9. Количество воды, расходуемое жителями одной квартиры в сутки,8 имеет показательное распределение со средним значением 100 литров. Найти, для какого количества квартир достаточно 100 000 литров воды с вероятностью 0,94.

10. Для выборки $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ из распределения с плотностью распределения $f(x)$ найти оценки параметра $\theta > 0$ по первому моменту и методом максимального правдоподобия. Проверить состоятельность полученных оценок. Плотность распределения равна

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^3} e^{-x/\theta^3} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \leq 0. \end{cases}$$

11. Дана выборка из нормального распределения с неизвестными параметрами. Найти оценки параметров распределения. Подставляя вместо неизвестных параметров их точечные оценки, записать выражение для оценки плотности распределения. Построить на одном графике гистограмму с шагом, равным среднеквадратическому (стандартному) отклонению, и график оценки плотности распределения.

4,38 -1,10 13,11 10,84 9,45 8,56 7,87 7,34 -4,06 3,48 4,70 7,13 -1,08
4,53 13,56 2,66 7,29 9,41 11,86 9,54 10,86 2,50 -2,84 11,21 8,93

12. По критерию Колмогорова проверить гипотезу о том, что выборка имеет равномерное распределение на отрезке [0; 2]. Сделать вывод о том, принимается ли эта гипотеза на уровне доверия 0,1; на уровне доверия 0,01; на уровне доверия 0,001.

0,23 0,49 1,12 1,98 0,25 1,52 0,52 0,03 1,10
1,59 0,27 1,30 1,79 1,93 0,23 1,84 1,04

Вариант 26

1. На отрезке $[0, 1]$ наудачу ставятся две точки. Построить подходящее пространство элементарных исходов Ω и описать событие A, означающее, что вторая точка ближе к правому концу отрезка $[0, 1]$, чем к левому и событие B, означающее, что расстояние между двумя точками меньше половины длины отрезка, а также событие AB.

2. Трое женщин и трое мужчин садятся случайным образом за круглый стол. Найти вероятность того, что мужчины и женщины за столом будут чередоваться.

3. Случайная точка A наудачу выбирается в прямоугольнике со сторонами 1 и 2. найти вероятность того, что расстояние от А до ближайшей стороны прямоугольника не превосходит $1/3$.

4. Вероятность установления соединения с сервером при каждой попытке равна 0,9. Найти вероятность того, что соединение будет установлено не раньше четвертой попытки.

5. Студент выучил к зачету только 10 вопросов из 30. Для получения зачета достаточно ответить на два из четырех разных вопросов. Какова вероятность того, что зачет будет получен? Какова вероятность того, что студент ответил не менее чем на три вопроса, если известно, что он получил зачет?

6. Пользователь компьютера забыл пароль и перебирает наудачу 5 возможных. После четырех неудачных попыток компьютер блокируется. Найти ряд распределения, математическое ожидание и дисперсию числа попыток. Построить график функции распределения.

7. Случайная величина ξ имеет стандартное логарифмически нормальное распределение, если $\xi = e^{\eta}$, где η имеет стандартное нормальное рас-

пределение. Найти плотность распределения и математическое ожидание случайной величины ξ. Найти вероятность того, что $\xi > 1$.

8. В двух из четырех комнат температура 25 градусов, а влажность 80 процентов. В третьей комнате температура 20 градусов, а влажность 90 процентов. В четвертой комнате температура 25 градусов, а влажность 90 процентов. Найти совместное распределение температуры и влажности в выбранной наудачу комнате. Найти коэффициент корреляции между температурой и влажностью.

9. Участник лотереи бросает несколько шаров, каждый из которых может попасть в лузы с номерами от 1 до 6. Участник получает ценный приз, если сумма очков меньше 12. Найти, при каком числе шаров вероятность получения ценного приза будет меньше 0,01.

10. Для выборки $(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)$ из распределения с плотностью распределения $f(x)$ найти оценки параметра $\theta > 0$ по третьему моменту и методом максимального правдоподобия. Проверить состоятельность полученных оценок. Плотность распределения равна

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3\sqrt{x}}{2\theta^3} e^{-x\sqrt{x}/\theta^3} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \le 0. \end{cases}$$

11. Дана выборка из нормального распределения с неизвестными параметрами. Найти оценки параметров распределения. Подставляя вместо неизвестных параметров их точечные оценки, записать выражение для оценки плотности распределения. Построить на одном графике гистограмму с шагом, равным среднеквадратическому (стандартному) отклонению, и график оценки плотности распределения.

5,61 6,70 2,88 9,09 -2,06 6,25 6,46 4,25 16,16 7,07 1,35 13,58 7,96 14,64
-2,14 10,81 2,50 2,24 -1,04 5,31 11,93 16,20 7,49 -5,21 5,90 5,63 7,26

12. По критерию Колмогорова проверить гипотезу о том, что выборка имеет равномерное распределение на отрезке [0; 2]. Сделать вывод о том, принимается ли эта гипотеза на уровне доверия 0,1; на уровне доверия 0,01; на уровне доверия 0,001.

0,64 0,79 0,64 1,06 0,42 0,69 1,65 0,45 0,43
1,48 0,44 0,97 1,49 0,46 1,29 0,37 0,45

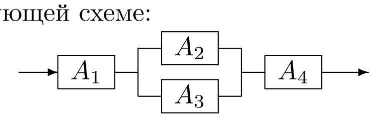
Вариант 27

1. Из множества супружеских пар выбирается одна пара. Событие $A = \{$Мужу больше 25 лет$\}$, событие $B = \{$Муж старше жены$\}$, событие $C = \{$Жене больше 25 лет$\}$.
Выяснить смысл событий: ABC, $A\backslash AB$, $A\overline{B}C$.

2. На отрезке AB наудачу выбираются две точки M и N. Какова вероятность того, что точка M окажется по крайней мере вдвое ближе к точке A, чем к точке N?

3. Собрались вместе три незнакомых человека. Найти вероятность, что хотя бы у двух из них совпадают дни рождения.

4. Электрическая цепь состоит из элементов A_k, соединенных по следующей схеме:



Вероятность выхода из строя элемента A_1 равна 0,1, остальных элементов A_k — по 0,04. Предполагается, что элементы выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность того, что цепь будет пропускать ток.

5. Прибор состоит из четырех независимо работающих блоков, вероятности отказа которых за смену равны соответственно 0,01, 0,02, 0,03 и 0,04. Вероятность выхода из строя прибора при отказе одного из блоков равна 0,8; при отказе более чем одного блока — 1. Определить вероятность выхода прибора из строя за смену. Найти вероятность того, что отказал один блок, если известно, что прибор вышел из строя.

6. При игре с автоматом в случае выигрыша игрок получает 10 рублей. Для участия в игре игрок бросает в автомат 5 рублей. Найти вероятность выигрыша, если математическое ожидание выигрыша равно минус 2 рублям. (В случае проигрыша сумма выигрыша считается отрицательным числом, равным сумме проигрыша, взятой со знаком «минус».) Найти ряд распределения и дисперсию суммы выигрыша. Построить график функции распределения.

7. Плотность распределения вероятностей случайной величины ξ имеет вид $f(x) = Ae^{-|x-a|}$ (распределение Лапласа). Найти коэффициент A, вычислить математическое ожидание и стандартное отклонение. Найти вероятность того, что случайная величина ξ примет значение, большее $2a$.

8. В трех из четырех аудиторий по 20 студентов и уровень шума 60 децибелл, а в четвертой аудитории нет студентов и уровень шума 20 де-

цибелл. Найти совместное распределение числа студентов и уровня шума в выбранной наудачу аудитории. Найти коэффициент корреляции между числом студентов и уровнем шума.

9. Количество 10-копеечных монет, необходимое для выдачи каждой сдачи в кассе, принимает значения от 0 до 4 с равными вероятностями. В кассе в начале рабочего дня находится 2500 10-копеечных монет. Найти, для какого количества покупателей получение сдачи гарантировано с вероятностью 0,8.

10. Для выборки $(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)$ из распределения с9 плотностью распределения $f(x)$ найти оценки параметра $2 < \theta < 3$ по первому моменту и методом максимального правдоподобия. Проверить состоятельность полученных оценок. Плотность распределения равна

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta-2}x^{-(\theta-1)/(\theta-2)} & \text{при } x > 1; \\ 0 & \text{при } x \le 1. \end{cases}$$

11. Дана выборка из нормального распределения с неизвестными параметрами. Найти оценки параметров распределения. Подставляя вместо неизвестных параметров их точечные оценки, записать выражение для оценки плотности распределения. Построить на одном графике гистограмму с шагом, равным среднеквадратическому (стандартному) отклонению, и график оценки плотности распределения.
1,92 12,70 10,80 -10,19 4,32 12,02 13,68 3,75 -0,90 2,94 15,07 2,08 16,22 13,42 1,55 -6,05 15,70 12,35 13,94 -0,56 24,10 7,45 3,60 -0,24 16,84 6,13 -5,28 3,00 10,04

12. По критерию Колмогорова проверить гипотезу о том, что выборка имеет равномерное распределение на отрезке [0; 2]. Сделать вывод о том, принимается ли эта гипотеза на уровне доверия 0,1; на уровне доверия 0,01; на уровне доверия 0,001.

0,82 1,13 1,78 0,65 0,55 1,02 0,88 0,76 0,57
1,71 0,62 1,69 0,15 0,23 1,99 1,53 1,91 1,57

Вариант 28

1. Брошены три игральные кости. Пусть событие A состоит в том, что выпавшая сумма очков нечетна, событие B — в том, что хотя бы на одной из костей выпала единица, событие C — в том, что хотя бы на одной кости

выпала двойка. Описать события: ABC, $A\overline{B}C$, $\overline{A}BC$.

2. Номер лотерейного билета состоит из 8 цифр. Какова вероятность того, что первые четыре цифры четные, а последние четыре — нечетные?

3. Случайная точка A наудачу выбирается в прямоугольнике со сторонами 1 и 2. найти вероятность того, что расстояние от А до каждой диагонали прямоугольника не превосходит 1/3.

4. Интервал движения между автобусами маршрута А — 5 минут, маршрута Б — 6 минут, маршрута В — 10 минут. Пассажир приходит на остановку в случайный момент времени. Какова вероятность того, что хотя бы один автобус придет в течение 2 минут после прихода пассажира?

5. В девяти урнах содержится по 4 белых и 2 черных шара, а в одной урне 9 белых и 1 черный шар. Какова вероятность, что из урны, взятой наудачу, будет извлечен черный шар? Найти вероятность, что шар извлечен из урны с 9 белыми и 1 черным шаром, если он оказался черным.

6. Прибор состоит из четырех малонадежных элементов. Отказы элементов за некоторый период времени независимы, а их вероятности равны соответственно 0,1; 0,1; 0,2; 0,2. Найти ряд распределения, математическое ожидание и дисперсию числа отказавших элементов. Построить график функции распределения.

7. Точка M движется по оси Ox по закону $x = ae^t$. В случайный момент времени, равномерно распределенный на отрезке $[0;\ T]$, наблюдается положение ξ точки M. Найти плотность распределения, математическое ожидание и стандартное отклонение случайной величины ξ.

8. Четыре поезда метро, уходящие с интервалом в 4 минуты, увезли по 200 пассажиров. Четыре поезда, уходящие с интервалом в 6 минут, увезли по 300 пассажиров. Два поезда, уходящие с интервалом в 8 минут, увезли по 100 пассажиров. Найти совместное распределение числа пассажиров и интервала движения для выбранного наудачу поезда. Найти коэффициент корреляции.

9. Количество бракованных изделий в коробке имеет распределение Пуассона с параметром 4. Найти максимальное число коробок такое, чтобы вероятность найти в них более 200 бракованных изделий была меньше 0,04.

10. Для выборки $(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)$ из распределения с плотностью распределения $f(x)$ найти оценки параметра $\theta > 4$ по второму моменту и методом максимального правдоподобия. Проверить состоятельность полу-

ченных оценок. Плотность распределения равна

$$f(x) = \begin{cases} (\theta - 2)x^{-\theta+1} & \text{при } x > 1; \\ 0 & \text{при } x \le 1. \end{cases}$$

11. Дана выборка из нормального распределения с неизвестными параметрами. Найти оценки параметров распределения. Подставляя вместо неизвестных параметров их точечные оценки, записать выражение для оценки плотности распределения. Построить на одном графике гистограмму с шагом, равным среднеквадратическому (стандартному) отклонению, и график оценки плотности распределения.

14,29 7,48 2,82 22,84 7,49 8,98 13,84 14,17 7,07 9,69 -8,35 12,77 14,93
5,81 8,62 11,22 3,85 2,86 9,52 15,93 9,43 19,48 19,19 12,20 19,40 12,09
8,47 6,79

12. По критерию Колмогорова проверить гипотезу о том, что выборка имеет равномерное распределение на отрезке [0; 2]. Сделать вывод о том, принимается ли эта гипотеза на уровне доверия 0,1; на уровне доверия 0,01; на уровне доверия 0,001.

1,19 0,91 0,30 1,34 0,61 1,12 1,00 0,53 1,58 0,62
0,41 0,89 1,20 1,51 0,78 1,44 0,46 0,69 1,33

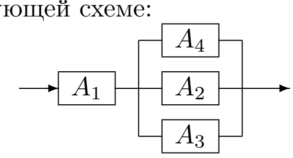
Вариант 29

1. Может ли сумма двух событий A и B совпадать с их произведением? Привести соответствующие примеры.

2. В бригаде 4 рабочих. Какова вероятность того, что по крайней мере двое из них родились в один и тот же месяц? Считать, что вероятности родиться в каждый месяц одинаковы.

3. Случайная точка A наудачу выбирается в прямоугольном треугольнике с катетами 1 и 2. Найти вероятность того, что расстояние от A до ближайшей стороны треугольника не превосходит 1/3.

4. Электрическая цепь состоит из элементов A_k, соединенных по следующей схеме:



Вероятность выхода из строя элемента A_2 равна 0,01, остальных элементов A_k — по 0,1. Предполагается, что элементы выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность того, что цепь будет пропускать ток.

5. Телеграфное сообщение состоит из сигналов «точка» и «тире». Известно, что среди передаваемых сигналов «точка» и «тире» встречаются в отношении 11:10. Из-за помех искажается в среднем 30 % сигналов «точка» и 20 % сигналов «тире», причем «точка» искажается в «тире», а «тире» в «точку». Найти вероятность искажения сигнала. Определить вероятность того, что сигнал не был искажен, если известно, что приняли «точку».

6. Два игрока играют в шахматы на деньги. Известно, что в среднем из 10 партий три выигрывает первый игрок, три заканчиваются вничью, и четыре выигрывает второй игрок. В случае проигрыша первый игрок платит второму 30 рублей. Сколько он должен получать в случае выигрыша, чтобы математическое ожидание его выигрыша равнялось нулю? Найти ряд распределения и дисперсию суммы выигрыша (отрицательная сумма выигрыша — это сумма проигрыша, взятая со знаком «минус»). Построить график функции распределения.

7. Случайная величина ξ имеет плотность распределения

$$f(x) = \begin{cases} \frac{A}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)} & \text{при } |x-a| > 2\sigma; \\ 0 & \text{при} |x-a| \leq 2\sigma. \end{cases}$$

Найти нормирующую константу A, вычислить математическое ожидание. Построить график плотности распределения при $a = \sigma = 1$.

8. В подъезде 5 однокомнатных квартир площадью по 40 кв. м., 10 двухкомнатных квартир по 60 кв. м. и 5 трехкомнатных квартир по 70 кв. м. Для выбранной наудачу квартиры найти совместное распределение числа комнат и площади. Найти коэффициент корреляции между ними.

9. Суммарное время работы машины складывается из интервалов времени, каждый из которых измеряется со стандартным отклонением в 1 минуту. Найти максимальное число интервалов времени такое, чтобы фактическое время работы отличалось от измеренного не больше, чем на 2 часа, с вероятностью 0,95.

10. Для выборки $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ из распределения с плотностью распределения $f(x)$ найти оценки параметра $\theta > 0$ по первому моменту и методом максимального правдоподобия. Проверить состоятельность полу-

ченных оценок. Плотность распределения равна

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\theta^6} e^{-x/\theta^3} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \le 0. \end{cases}$$

11. Дана выборка из нормального распределения с неизвестными параметрами. Найти оценки параметров распределения. Подставляя вместо неизвестных параметров их точечные оценки, записать выражение для оценки плотности распределения. Построить на одном графике гистограмму с шагом, равным среднеквадратическому (стандартному) отклонению, и график оценки плотности распределения.

22,95 -2,61 11,87 1,37 5,92 -5,10 5,38 14,71 7,55 3,91 1,23 8,50 -5,58 -1,97 17,93 9,42 11,99 9,39 4,78 5,43 9,40 8,68 2,20 7,15 14,78 14,77 -15,16

12. По критерию Колмогорова проверить гипотезу о том, что выборка имеет равномерное распределение на отрезке [0; 2]. Сделать вывод о том, принимается ли эта гипотеза на уровне доверия 0,1; на уровне доверия 0,01; на уровне доверия 0,001.

1,94 1,96 0,64 0,76 0,01 0,82 0,23 0,82 1,96
1,28 1,49 1,07 1,92 0,17 1,68 1,01 0,48

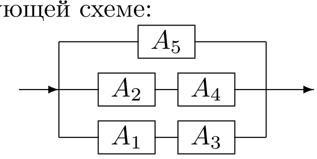
Вариант 30

1. Может ли разность двух событий совпадать с их произведением? Привести примеры.

2. В чулане лежит три пары ботинок. Случайно выбираются три ботинка. Чему равна вероятность того, что среди них не будет ни одной пары?

3. На линейке наудачу поставлены 2 точки. Какова вероятность того, что расстояние между ними окажется меньше трети длины линейки?

4. Электрическая цепь состоит из элементов A_k, соединенных по следующей схеме:



Вероятность выхода из строя элемента A_2 равна 0,01, остальных элементов A_k — по 0,1. Предполагается, что элементы выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность того, что цепь будет пропускать ток.

5. Первое орудие 4-орудийной батареи пристреляно так, что вероятность попадания для него равна $1/2$. Для остальных орудий она равна $2/5$. Батарея дала залп по цели. Найти вероятность того, что цель поражена. Найти вероятность того, что первое орудие попало в цель, если известно, что цель была поражена. Для поражения цели достаточно одного попадания.

6. Вероятность приема отдельного сигнала равна 0,3. Радиосигнал передается 6 раз. Найти ряд распределения, математическое ожидание и дисперсию числа принятых сигналов. Построить график функции распределения. Найти вероятность того, что принятых сигналов будет не меньше 2, но не больше 4.

7. Диаметр круга является случайной величиной, равномерно распределенной на отрезке [0; d]. Найти плотность распределения, функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию площади круга. Найти вероятность того, что площадь превосходит $\pi d^2/32$. Начертить графики плотности распределения и функции распределения.

8. В отделе работает один сотрудник с двумя высшими образованиями по 13-му разряду, два сотрудника с высшим образованием по 12-му разряду, и шесть сотрудников без высшего образования по 10-му разряду. Для выбранного наудачу сотрудника найти совместное распределение разряда и количества высших образований. Вычислить коэффициент корреляции между ними.

9. Время ожидания автобуса пассажиром имеет показательное распределение со средним значением 9 минут. Найти число поездок, для которого суммарное время ожидания автобуса превысит 3 часа с вероятностью не более 0,2.

10. Для выборки $(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)$ из распределения с плотностью распределения $f(x)$ найти оценки параметра $\theta > 0$ по первому моменту и методом максимального правдоподобия. Проверить состоятельность полученных оценок. Плотность распределения равна

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2\theta^9} e^{-x/\theta^3} & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \leq 0. \end{cases}$$

11. Дана выборка из нормального распределения с неизвестными параметрами. Найти оценки параметров распределения. Подставляя вместо неизвестных параметров их точечные оценки, записать выражение для оценки плотности распределения. Построить на одном графике гистограмму с шагом, равным среднеквадратическому (стандартному) отклонению, и график оценки плотности распределения.

9,63 19,48 3,89 4,45 15,11 15,90 24,94 1,72 3,25 -3,77 12,17 10,08 14,36 9,39 1,27 7,89 8,68 1,59 10,57 3,21 -6,11 15,61 10,82 1,68 5,63 6,79 20,27 -2,15

12. По критерию Колмогорова проверить гипотезу о том, что выборка имеет равномерное распределение на отрезке [0; 2]. Сделать вывод о том, принимается ли эта гипотеза на уровне доверия 0,1; на уровне доверия 0,01; на уровне доверия 0,001.

0,64 1,43 0,40 1,23 1,40 0,76 1,09 1,65 1,32
1,24 1,39 0,81 0,39 0,76 1,14 1,24 1,69 1,58

Приложение. Таблицы

Распределение Пуассона

Т а б л и ц а 1. Значения функции $p_k(\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

k \ λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0	0,90484	0,81873	0,74082	0,67032	0,60653
1	0,09048	0,16375	0,22225	0,26813	0,30327
2	0,00452	0,01638	0,03334	0,05363	0,07582
3	0,00015	0,00109	0,00333	0,00715	0,01264
4		0,00006	0,00025	0,00072	0,00158
5			0,00002	0,00006	0,00016
6					0,00001

k \ λ	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,54881	0,49659	0,44933	0,40657
1	0,32929	0,34761	0,35946	0,36591
2	0,09879	0,12161	0,14379	0,16466
3	0,01976	0,02839	0,03834	0,04940
4	0,00296	0,00497	0,00767	0,01112
5	0,00036	0,00070	0,00123	0,00200
6	0,00004	0,00008	0,00016	0,00030
7		0,00001	0,00002	0,00004

Т а б л и ц а 1 (продолжение).

k \ λ	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
0	0,36788	0,13534	0,04979	0,01832	0,00674
1	0,36788	0,27067	0,14936	0,07326	0,03369
2	0,18394	0,27067	0,22404	0,14653	0,08422
3	0,06131	0,18045	0,22404	0,19537	0,14037
4	0,01533	0,09022	0,16803	0,19537	0,17547
5	0,00307	0,03609	0,10082	0,15629	0,17547
6	0,00051	0,01203	0,05041	0,10419	0,14622
7	0,00007	0,00344	0,02160	0,05954	0,10445
8	0,00001	0,00086	0,00810	0,02977	0,06528
9		0,00019	0,00270	0,01323	0,03627
10		0,00004	0,00081	0,00529	0,0813
11		0,00001	0,00022	0,00193	0,00824
12			0,00006	0,00064	0,00343
13			0,00001	0,00020	0,00132
14				0,00006	0,00047
15				0,00002	0,00016
16					0,00005
17					0,00001

Т а б л и ц а 2. Значения функции $\sum\limits_{m=0}^{k} \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$

k \ λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	06
0	0,90484	0,81873	0,74081	0,67032	0,60653	0,54881
1	0,99532	0,98248	0,96306	0,93845	0,90980	0,80781
2	0,99984	0,99885	0,99640	0,99207	0,98561	0,97688
3	1,00000	0,99994	0,99973	0,99922	0,99825	0,99664
4		1,00000	0,99998	0,99994	0,99982	0,99960
5			1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
k \ λ	0,7	0,8	0,9	1,0	2,0	3,0
0	0,49658	0,44933	0,40657	0,36790	0,23534	0,04979
1	0,84420	0,80880	0,77248	0,73576	0,40601	0,19915
2	0,96586	0,95258	0,93714	0,91970	0,67668	0,42319
3	0,99425	0,99092	0,98654	0,98101	0,85712	0,64723
4	0,99921	0,99859	0,99766	0,99634	0,94735	0,81526
5	0,99991	0,99982	0,99966	0,99941	0,98344	0,91600
6	0,99999	0,99998	0,99996	0,99992	0,99547	0,96649
7	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	0,99890	0,98810
8					0,99976	0,99620
9					0,99995	0,99890
10					0,99999	0,99971
11						0,99993
12						0,99998
13						1,00000

Т а б л и ц а 2 (продолжение).

k \ λ	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
0	0,01832	0,00674	0,00248	0,00091	0,00034	0,00012
1	0,09158	0,04042	0,01735	0,00730	0,00302	0,00123
2	0,23810	0,12465	0,06197	0,02964	0,01375	0,00623
3	0,43347	0,26503	0,15120	0,08176	0,04238	0,02123
4	0,62883	0,44049	0,28506	0,17299	0,09963	0,05496
5	0,78513	0,61596	0,44568	0,30071	0,19124	0,11569
6	0,88933	0,76218	0,60630	0,44971	0,31337	0,20678
7	0,94887	0,86662	0,74398	0,59871	0,45296	0,32390
8	0,97864	0,93181	0,84724	0,72909	0,59255	0,45565
9	0,99187	0,96817	0,91608	0,83050	0,71662	0,58741
10	0,99716	0,98630	0,95738	0,90148	0,81589	0,70599
11	0,99908	0,99455	0,97991	0,94665	0,88808	0,80301
12	0,99973	0,99798	0,99117	0,97300	0,93620	0,87577
13	0,99992	0,99920	0,99637	0,98719	0,96582	0,92615
14	0,99998	0,99977	0,99860	0,99428	0,98274	0,95853
15	0,99999	0,99993	0,99949	0,99759	0,99177	0,97796
16	1,00000	0,99998	0,99982	0,99904	0,99628	0,98889
17		0,99999	0,99994	0,99964	0,99841	0,99468
18		1,00000	0,99998	0,99987	0,99935	0,99757
19			0,99999	0,99995	0,99974	0,99894
20			1,00000	0,99998	0,99991	0,99956
21				1,00000	0,99997	0,99982
22					0,99999	0,99993
23					1,00000	0,99997
24						0,99999
25						1,00000

Нормальное распределение

Т а б л и ц а 3. Значения функции $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$. [1]

[1]Функция распределения закона $N(0,1)$ вычисляется по формуле $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = 0,5 + \Phi_0(x)$.

x	сотые доли				
	0	1	2	3	4
0,0	0,0000	0.0040	0,0080	0,0120	0,0160
0,1	0,0398	0.0438	0,0478	0,0517	0,0557
0,2	0,0793	0.0832	0,0871	0,0910	0,0948
0,3	0,1179	0.1217	0,1255	0,1293	0,1331
0,4	0,1554	0.1591	0,1628	0,1664	0,1700
0,5	0,1915	0.1950	0,1985	0,2019	0,2054
0,6	0,2257	0.2291	0,2324	0,2357	0,2389
0,7	0,2580	0.2611	0,2642	0,2673	0,2703
0,8	0,2881	0.2910	0,2939	0,2967	0,2995
0,9	0,3159	0.3186	0,3212	0,3238	0,3264
1,0	0,3413	0.3437	0,3461	0,3485	0,3508
1,1	0,3643	0.3665	0,3686	0,3708	0,3729
1,2	0,3849	0.3869	0,3888	0,3907	0,3925
1,3	0,4032	0.4049	0,4066	0,4082	0,4099
1,4	0,4192	0.4207	0,4222	0,4236	0,4251
1,5	0,4332	0.4463	0,4474	0,4484	0,4495
1,6	0,4452	0.4463	0,4474	0,4484	0,4495
1,7	0,4554	0.4564	0,4573	0,4582	0,4591
1,8	0,4641	0.4649	0,4656	0,4664	0,4671
1,9	0,4713	0.4719	0,4726	0,4732	0,4738
2,0	0,4772	0.4778	0,4783	0,4788	0,4793
2,1	0,4821	0.4826	0,4830	0,4834	0,4838
2,2	0,4861	0.4864	0,4868	0,4871	0,4875
2,3	0,4893	0.4896	0,4898	0,4901	0,4904
2,4	0,4918	0.4778	0,4783	0,4788	0,4793
2,5	0,4938	0.4940	0,4941	0,4943	0,4945
2,6	0,4953	0.4955	0,4956	0,4957	0,4959
2,7	0,4965	0.4966	0,4967	0,4968	0,4969
2,8	0,4974	0.4975	0,4976	0,4977	0,4977
2,9	0,4981	0.4982	0,4982	0,4983	0,4984
3,0	0,4987	0.4987	0,4988	0,4988	0,4988

сотые доли					x
5	6	7	8	9	
0,0200	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359	0,0
0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753	0,1
0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141	0,2
0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517	0,3
0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879	0,4
0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224	0,5
0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549	0,6
0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852	0,7
0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133	0,8
0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389	0,9
0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621	1,0
0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830	1,1
0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015	1,2
0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177	1,3
0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319	1,4
0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441	1,5
0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545	1,6
0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633	1,7
0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706	1,8
0,4744	0,4750	0,4756	0,4764	0,4767	1,9
0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817	2,0
0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857	2,1
0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890	2,2
0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916	2,3
0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936	2,4
0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952	2,5
0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964	2,6
0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974	2,7
0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981	2,8
0,4984	0,4985	0,4985	0,4985	0,4986	2,9
0,4988	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990	3,0

Т а б л и ц а 4. Равномерно распределенные на [0,1] случайные числа

0,5916	3406	6079	4101	5314	6562	7463	8203	1643	5825
3127	1413	9711	6253	4135	0690	0120	3993	3136	3821
3617	6700	5940	9629	1094	7128	6396	6787	3147	2625
6635	5477	9121	4513	6213	9162	3901	7480	6319	2645
9313	5889	0399	2226	7919	8216	8851	4184	0471	9664
9470	2099	1992	0836	5050	3361	6387	3374	4963	1255
5303	5501	4237	5307	8954	1039	9430	6838	4188	2383
9031	4215	1197	8764	8382	9481	4474	8315	1752	8546
8922	6145	5759	5489	1479	5725	6542	2141	7449	1653
4398	7198	5643	3687	2311	3652	5889	8865	2378	2198
9612	0448	9632	3741	4776	6836	0101	8861	2786	5132
4601	8247	6883	2196	6570	9154	7397	3584	2139	1019
2212	8036	6484	9953	8382	7158	2036	5270	7441	4387
9192	9019	7880	4728	0115	3072	2267	6512	5673	2943
2380	4955	7803	1907	5803	3290	8562	2558	5986	1904
4448	1790	1932	0833	7005	7042	4161	9279	4049	1693
5978	5412	2154	9202	7586	7147	7403	5033	8549	6005
3617	6700	5940	9629	1094	4386	9362	6122	0193	1987
2210	9405	5860	9709	3433	5072	5682	4829	4052	4201
1374	6700	7818	4754	0610	3676	6679	5190	3647	6493

Т а б л и ц а 5. Распределение $\chi^2(n)$. Квантили распределения:

$$p = \int_0^{\chi^2_{p,n}} k_n(x)dx = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} \cdot \int_0^{\chi^2_{p,n}} x^{n/2-1}e^{-x/2}dx$$

n \ p	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	0,95	0.999	0,9999
1	0,016	0,148	0,455	1,07	2,71	3,84	6,63	10,8
2	0,211	0,713	1,39	2,41	4,61	5,99	9,21	13,8
3	0,584	1,42	2,37	3,67	6,25	7,82	11,3	16,3
4	1,06	2,20	3,36	4,88	7,78	9,49	13,3	18,5
5	1,61	3,00	4,35	6,06	9,24	11,1	15,1	20,5
6	2,20	3,83	5,35	7,23	10,6	12,6	16,8	22,5
7	2,83	4,67	6,35	8,38	12,0	14,1	18,5	24,3
8	3,49	5,53	7,34	9,52	13,4	15,5	20,1	26,1
9	4,17	6,39	8,34	10,7	14,7	16,9	21,7	27,9
10	4,87	7,27	9,34	11,8	16,0	18,3	23,2	29,6
11	5,58	8,15	10,3	12,9	17,3	19,7	24,7	31,3
12	6,30	9,03	11,3	14,0	18,5	21,0	26,2	32,9
13	7,04	9,93	12,3	15,52	13,4	15,5	20,1	26,1
14	7,79	10,08	13,3	16,2	21,1	23,7	29,1	36,1
15	8,55	11,7	14,3	17,3	22,3	25,0	30,6	37,7
16	9,31	12,6	15,3	18,4	23,5	26,3	32,0	39,3
17	10,09	13,5	16,3	19,5	24,8	27,6	33,4	40,8
18	10,9	14,4	17,3	20,6	26,0	28,9	34,8	42,3
19	11,7	15,4	18,3	21,7	27,2	30,1	36,2	43,8
20	12,4	16,3	19,3	22,8	28,4	31,4	37,6	45,3
21	13,2	17,2	20,3	23,9	29,6	32,7	38,9	46,8
22	14,0	18,1	21,3	24,9	30,8	33,9	40,3	48,3
23	14,8	19,0	22,3	26,0	32,0	35,2	41,6	49,7
24	15,7	19,9	23,3	27,1	33,2	36,4	43,0	51,2
25	16,5	20,9	24,3	28,2	34,3	37,7	44,3	52,6
26	17,3	21,8	25,3	29,2	35,6	38,9	45,6	54,1
27	18,1	22,7	26,3	30,3	36,7	40,1	47,0	55,5
28	18,9	23,6	27,3	31,4	37,9	41,3	48,3	56,9
29	19,8	24,6	28,3	32,5	39,1	42,6	49,6	58,3
30	20,6	25,5	29,3	33,5	40,3	43,8	50,9	59,7

Т а б л и ц а 6. Распределение Стьюдента S(n)
Значения функции $t_{\gamma,n}$

$$\frac{1+\gamma}{2} = \int\limits_{-\infty}^{t_{\gamma,n}} s_n(x)dx = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\sqrt{\pi n}} \cdot \int\limits_{-\infty}^{t_{\gamma,n}} (1+\frac{x^2}{n})^{-(n+1)/2}dx$$

n \ γ	0,9	0,95	0,98	0,99
1	6,314	12,706	31,821	63,657
2	2,920	4,303	6,965	9,925
3	2,353	3,182	4,541	5,841
4	2,132	2,776	3,747	4,604
5	2,015	2,571	3,365	4,032
6	1,943	2,447	3,143	3,707
7	1,895	2,365	2,998	3,499
8	1,860	2,306	2,896	3,355
9	1,833	2,262	2,821	3,250
10	1,812	2,228	2,764	3,169
12	1,782	2,179	2,681	3,055
14	1,761	2,145	2,625	2,977
16	1,746	2,120	2,584	2,921
18	1,734	2,101	2,552	2,878
20	1,725	2,086	2,528	2,845
22	1,717	2,074	2,508	2,819
24	1,711	2,064	2,492	2,797
26	1,706	2,056	2,479	2,779
28	1,701	2,048	2,467	2,763
30	1,697	2,042	2,457	2,750
∞	1,645	1,960	2,326	2,576

Т а б л и ц а 7. Критерий Колмогорова

Значения функции $\boldsymbol{\lambda}_p : p = \mathbf{P}(D_n = \sup_x |F_n(x) - F(x)| > \boldsymbol{\lambda}_p)$

$n \diagdown p$	0,10	0,05	0,01		$n \diagdown p$	0,10	0,05	0,01
1	0,950	0,975	0,995		19	0,271	0,301	0,361
2	0,776	0,842	0,929		20	0,265	0,294	0,352
3	0,636	0,708	0,829		25	0,238	0,264	0,317
4	0,565	0,624	0,734		30	0,218	0,242	0,290
5	0,509	0,563	0,669		35	0,202	0,224	0,269
6	0,468	0,519	0,617		40	0,189	0,210	0,252
7	0,436	0,483	0,576		45	0,179	0,198	0,238
8	0,410	0,454	0,542		50	0,170	0,188	0,226
9	0,387	0,430	0,513		55	0,162	0,180	0,216
10	0,369	0,409	0,489		60	0,155	0,172	0,207
11	0,352	0,391	0,468		65	0,149	0,166	0,199
12	0,338	0,375	0,449		70	0,144	0,160	0,192
13	0,325	0,361	0,432		75	0,139	0,154	0,185
14	0,314	0,349	0,418		80	0,135	0,150	0,179
15	0,304	0,338	0,404		85	0,131	0,145	0,174
16	0,295	0,327	0,392		90	0,127	0,141	0,169
17	0,286	0,318	0,381		95	0,124	0,137	0,165
18	0,279	0,309	0,371		100	0,121	0,134	0,161

Список литературы

[1] Боровков А.А. Теория вероятностей. М.: Наука, 1986. 432с.

[2] Бородин А.Н. Элементарный курс теории вероятностей и математической статистики. Санкт-Петербург, 1999. 223с.

[3] Бородихин В.М., Джафаров К.А., Путинцева А.П. Теория вероятностей и математическая статистика. Новосибирск, 1999. 153с.

[4] Гнеденко .Б.В. Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1969. 400с.

[5] Гурский Е.И. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике. Минск, 1975.

[6] Емельянов Г.В., Скитович В.П. Задачник по теории вероятностей и математической статистике. Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1967. 332с.

[7] Зубков А.М., Севастьянов Б.А., Чистяков В.П. Сборник задач по теории вероятностей. М.: Наука, 1989. 320с.

[8] Коршунов Д.А. Фосс С.Г. Сборник задач и упражнений по теории вероятностей. Новосибирск, 1997. 113с.

[9] Мешалкин Л.Д. Сборник задач по теории вероятностей. М.: Изд-во Московского ун-та, 1963. 156с.

[10] Свешников А.А. и др. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций. М., 1970. 656с.

[11] Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1987. 240с.

[12] Ивченко Г.И., Медведев Ю.И., Чистяков В.П. Сборник задач по математической статистике. М.: Высшая школа, 1989. 256с.