ISBN 978-5-9624-2300-5

СИНТАКСИС И СЕМАНТИКА ЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ

УДК 510.6+512+519.7
ББК 22.12+22.14+22.18
С38

Синтаксис и семантика логических систем : материалы 8-й Всероссийской конференции, посвященной И. К. Шаранхаева. Аршан, Республика Бурятия, 20–24 августа 2024 г. / ФГБОУ ВО «ИГУ», ИМИТ ; редкол.: Н. А. Перязев, С. Ф. Винокуров, В. И. Пантелеев. – Иркутск : Издательство ИГУ, 2024. – 1 электронный оптический диск (CD-ROM). – Заглавие с этикетки диска.

https://doi.org/10.26516/978-5-9624-2177-3.2024.1-108

ISBN 978-5-9624-2300-5

Сборник содержит результаты оригинальных исследований, представленных на конференции.

Для студентов, аспирантов и научных работников, специализирующихся в области математической логики, алгебры и дискретной математики.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Иркутский государственный университет»
664003, г. Иркутск, ул. К. Маркса, 1; тел. +7(3952) 52-19-00
Издательство ИГУ, 664082, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 124; тел. +7(3952) 52-18-53
Подписано к использованию 20.08.2024. Тираж 13 экз. Объем 2,87 Мб.

Тип компьютера, процессор, частота:	32-разрядный процессор, 1 ГГц или выше
Оперативная память (RAM):	256 МБ
Необходимо на винчестере:	320 МБ
Операционные системы:	ОС Microsoft® Windows® XP, 7, 8 или 8.1. ОС Mac OS X
Видеосистема:	Разрешение экрана 1024x768
Акустическая система:	Не требуется
Дополнительное оборудование:	Не требуется
Дополнительные программные средства:	Adobe Reader 6 или выше

ISBN 978-5-9624-2300-5

СИНТАКСИС И СЕМАНТИКА ЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ

ISBN 978-5-9624-2300-5

СИНТАКСИС И СЕМАНТИКА ЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Материалы
8-й Всероссийской конференции,
посвященной памяти
И. К. Шаранхаева

Аршан, Республика Бурятия, 20–24 августа 2024 г.

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Иркутский государственный университет»
Институт математики и информационных технологий

СИНТАКСИС И СЕМАНТИКА ЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ

*Материалы
8-й Всероссийской конференции,
посвященной памяти
И. К. Шаранхаева*

Аршан, Республика Бурятия, 20–24 августа 2024 г.

ИРКУТСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИГУ
2024

УДК 510.6+512+519.7
ББК 22.12+22.14+22.18
С38

С38 **Синтаксис** и семантика логических систем : материалы 8-й Всероссийской конференции, посвященной И. К. Шаранхаева. Аршан, Республика Бурятия, 20–24 августа 2024 г. / ФГБОУ ВО «ИГУ», ИМИТ ; редкол.: Н. А. Перязев, С. Ф. Винокуров, В. И. Пантелеев. – Иркутск : Издательство ИГУ, 2024. – 1 электронный оптический диск (CD-ROM). – Заглавие с этикетки диска.

ISBN 978-5-9624-2300-5

Сборник содержит результаты оригинальных исследований, представленных на конференции.

Для студентов, аспирантов и научных работников, специализирующихся в области математической логики, алгебры и дискретной математики.

УДК 510.6+512+519.7
ББК 22.12+22.14+22.18

ISBN 978-5-9624-2300-5

Содержание

Кортежная семантика в модальной логике Alt1

Башмаков Степан Игоревич, Поляков Александр Алексеевич
Сибирский федеральный университет, e-mail: krauder@mail.ru, sasha.polyakov.03@mail.ru

В современных исследованиях в области модальных логик большое внимание уделяется теории унификации. В рамках теории унификации наибольший интерес представляют следующие задачи: определение типа унификации в логике, установление факта унифицируемости её формул, поиск эффективных алгоритмов построения унификаторов и сопутствующие вопросы. Для разрешения этих вопросов применительно к модальной логике Alt_1 в [1] вводится два типа семантик.

Alt_1 есть минимальная нормальная модальная логика, которая содержит аксиому $\Diamond x \to \Box x$. Данная логика характеризуется классом обратно функциональных шкал Крипке. По утверждению о порождённой подмодели [2], класс характеристических шкал для логики Alt_1 сводится к классу линейных шкал Крипке. В качестве альтернативы, авторами предлагается также нестандартная кортежная семантика, истинность формул в которой определяется через конечные упорядоченные наборы множеств переменных, называемых n-оценками. Доклад посвящён исследованию этого недостаточно формализованного и совсем неизученного подхода для логики Alt_1 и применимости кортежной семантики для других классов логик.

В докладе доказывается финитная аппроксимируемость логики Alt_1, что означает сужение класса характеристических шкал до класса всех конечных линейных шкал Крипке. Вследствие этого становится возможным построить взаимно однозначное соответсвие между n-оценками и моделями, построенными на основе конечных линейных шкал Крипке. Используя данное соответствие, можно показать, что классы всегда истинных формул из Alt_1 в семантике Крипке и кортежной семантике совпадают.

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение 075-02-2024-1429).

Список литературы

1. Balbiani P, Tinchev T. Unification in modal logic Alt1 // Advances in Modal Logic. 2016. Vol. 11. P. 117—134.

2. Одинцов С. П., Сперанский С. О., Дробышевич С. А., Введение в неклассические логики. Новосибирск : РИЦ НГУ, 2014. 133 с.

Реляционная версия многоагентной логики деревьев вычислений $\mathcal{CTLK}$

Башмаков Степан Игоревич[1], **Смелых Кирилл Александрович**[2]
[1] Сибирский федеральный университет, e-mail: krauder@mail.ru
[2] Сибирский федеральный университет, e-mail: lastth@yandex.ru

Комбинация временной логики и логики знаний — это эффективный инструмент для формальной проверки программных систем, которые включают в себя несколько агентов. Такой подход позволяет создавать модели различных сценариев взаимодействия агентов и анализировать свойства системы. Это может значительно улучшить качество и надёжность программного обеспечения, [1].

Различные подходы к анализу внутренних характеристик временных процессов и процессов хранения и передачи информации привели к увеличению объёма исследований, [6], [7].

В статье [4] представлена классификация этих логик, основанная на языке и требованиях к системе, для которой они применяются. Свойства знаний в каждой такой системе тесно связаны с предположениями, которые лежат в основе этих логик.

Особый интерес для исследования представляют широкие возможности применения временных логик знаний, которые обычно определяются с использованием автоматной или реляционной семантики.

Ветвящаяся временная логика BTL и логика деревьев вычислений $\mathcal{CTL}$, описанные в работе [6], являются разновидностями временной логики. Они используются для описания систем, в которых процесс вычислений развивается со временем и может разветвляться на альтернативные пути.

Обычно $\mathcal{CTL}$ описывается с помощью семантики бесконечных недетерминированных автоматов, которые можно представить в виде древовидной структуры. Каждая ветвь в этом дереве представляет собой альтернативный путь вычислений. Фактически дерево вычислений содержит все возможные способы реализации процесса вычислений.

Для каждой задачи, где решение представлено деревом вычислений, существует эквивалентная реляционная модель. Эта модель также включает все возможные альтернативы вычислений и может быть как конечной, так и потенциально бесконечной на каждой ветви.

Логика $\mathcal{CTL}$ позволяет выражать различные свойства системы, такие как корректность, безопасность и логическая эквивалентность. Она применяется для формальной верификации программных систем с целью обеспечения их надежности и безопасности, как описано в работе [5].

Когда в язык логики $\mathcal{CTL}$ включаются операторы знания, возникает логика $\mathcal{CTLK}$. Она, как указано в источнике [4], сохраняет структуру недетерминированных автоматов, характерных для $\mathcal{CTL}$.

В $\mathcal{CTLK}$ вычислительные пути интерпретируются через призму агентов. Когда в процессе вычислений возникает новое ветвление, появляется новый агент. Каждый агент имеет свой собственный вычислительный путь внутри модели — это определённая последовательность вычислений.

Агент знает только о том, что происходит в его временном пути, и не имеет доступа к информации других агентов, кроме общих участков пути. Если заранее неизвестно количество возможных ветвлений в модели, то количество агентов в системе может быть бесконечным.

Мы предложили альтернативную семантику, которая отличается от заданной ранее. Эта новая семантика — реляционная, и она позволяет более точно описать исследуемую логическую систему.

В работе [2] мы описали свойства таких моделей и доказали, что они обладают важными характеристиками, такими как финитная аппроксимируемость.

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение 075-02-2024-1429).

Список литературы

1. Bashmakov S. I., Zvereva T. Yu. Unification and finite model property for linear step-like temporal multi-agent logic with the universal modality // Bulletin of the Section of Logic. T. 51, № 3. C. 345–361.

2. Башмаков С. И., Смелых К. А. Реляционная версия многоагентной логики деревьев вычислений CTLK // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2024. Т. 47. С. 78–92.

3. Clarke E. M., Emerson E. A. Design and synthesis of synchronization skeletons using branching time temporal logic // Workshop on logic of programs. Berlin ; Heidelberg : Springer, 1981. P. 52–71.

4. Dima C. Revisiting satisfiability and model-checking for CTLK with synchrony and perfect recall // International Workshop on Computational Logic in Multi-Agent Systems. Berlin ; Heidelberg : Springer, 2008. P. 117–131.

5. Guelev D. P., Dima C., Enea C. An alternating-time temporal logic with knowledge, perfect recall and past: axiomatisation and model-checking // Journal of Applied Non-Classical Logics. Vol. 21, N 1. P. 93–131.

6. Halpern J. Y., Vardi M. Y. The complexity of reasoning about knowledge and time. I. Lower bounds // Journal of Computer and System Sciences. 1989. Vol. 38, N 1. P. 195-237.

7. Карпов Ю. Г. MODEL CHECKING. Верификация параллельных и распределенных программных систем. СПб. : БХВ-Петербург, 2010. 560 с.

Алгебро-лингвистические структуры в музыке

Благовещенская Екатерина Анатольевна[1], **Попова Виктория Алексеевна**[2]

[1] Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I, e-mail: blagoveschenskaya@pgups.ru, kblag2002@yahoo.com

[2] Иркутский государственный университет, e-mail: victorypopova1@gmail.com

Среди естественных языков, которыми пользуется человечество, язык музыки занимает особое место. Он развивался и усложнялся по мере того, как физически и интеллектуально совершенствовался сам человек, как усложнялись рациональные (практические) и эмоциональные связи в человеческом обществе, начиная с первых стадий его развития. Первые музыкальные инструменты были в основном ударными и передавали не мелодию, а ритм. Сочетания таких инструментов, звучащих на разной высоте, создавали возможность воспроизведения примитивных мелодий. Развитие голосового аппарата привело к появлению речи и возможности растягивания звуков с соблюдением определенной последовательности под аккомпанемент упомянутых простых ударных инструментов. Так возникло соединение голоса со звуками, издаваемыми предметами, что впоследствии привело к появлению музыкальных жанров (песенное творчество, опера и др.), которые характеризуются одновременным звучанием музыкальных инструментов и вокала. При этом эмоциональное воздействие осуществляется в основном в сфере музыки, в то время как смысловая нагрузка лежит на содержании, выраженном словами и предложениями. Поскольку на одну и ту же мелодию можно положить различные стихи, приходится признать, что мелодия являет собой некоторую стабильную независимую структурную характеристику таких произведений. При этом структура речевой составляющей находится в гармоничном союзе с музыкальной линией. Поэтому при попытке проанализировать структуру песен, романсов, оперных арий мы сталкиваемся с необходимостью лингвистического анализа речевой составляющей и структурного анализа музыкального построения. Понятно, что эти две параллельные линии (музыкальная и речевая) связаны общим ритмом (а точнее, возможностью произносить данный текст в ритме, продиктованном мелодией). Таким образом, ритмический рисунок, ассоциированный с определенным упорядочением ударных гласных звуков, будет одинаковым для всех поэтических произведений, подходящих к данной мелодии. Кроме того, поскольку мелодия имеет эмоциональную окраску (грустная, веселая, драматичная и т. д.), поэтические отрывки, гармонично сочетающиеся с ней, являются **эмоционально созвучными**, т. е. не контрастными по настроению. Заметим также, что музыкальные фразы обычно имеют те же временные границы, что и речевые предложения, звучащие внутри этих границ. Будем называть и те, и другие **структурными**

элементами музыкальной и речевой линий, находящимися во взаимно однозначном соответствии. Следуя [1] и рассматривая мысль, выраженную в предложении, как предикат лингвистической алгебры, мы получаем систему предикатов алгебры музыки, отражающую понятие благозвучности (допустимости) в том или ином музыкальном жанре или в определенной музыкальной культуре. При этом последовательное исполнение музыкальных фрагментов создает сложные структуры из элементарных неделимых структур, т. е. звуков, составляющих алфавит языка музыки.

Теперь отвлечемся от речевых характеристик и рассмотрим инструментальные произведения, которые могут создаваться изначально для инструментального исполнения, а могут возникать из вокально-инструментальных произведений исключением голосовой составляющей. Мы ограничимся дискретной ситуацией, к которой относятся клавишные инструменты, не создающие непрерывных переходов от одних звуков к другим, в отличие от струнных и духовых инструментов. Структурирование музыкальных построений для возможности создания различных аранжировок в нашем случае базируется на традиционном понимании сочетания мелодии и аккомпанемента в музыке (отметим, что в некоторых жанрах такое разделение не является четким).

Пусть имеется некоторая мелодия. В соответствии с ее движением создается аккомпанемент, базирующийся на доминирующем аккорде, существующем на определенном временном отрезке, который будем называть **гармонически стабильным временным промежутком**. Смена доминирующего аккорда приводит к смене гармонии и означает переход к другому гармонически стабильному промежутку. Их длительность может быть различной, иногда очень короткой, и некоторое количество таких промежутков в заданной последовательности создает временной отрезок звучания музыкальной фразы.

Пусть $L-$ аддитивная полугруппа всех возможных аккордов с операцией сложения, которая означает одновременное звучание. Доминирующий аккорд на каждом гармонически стабильном промежутке определяет некоторую полугруппу в L, скажем K, состоящую из аккордов (в том числе отдельно звучащих нот), в составлении которых используются ноты доминирующего аккорда. Тогда ноты мелодии, скажем b, можно рассмотреть как элементы фактор-полугруппы L/K в том смысле, что они звучат вместе с элементами K в гармоническом союзе. Так как одновременное звучание рассматривается как сумма соответствующих элементов, мы получаем класс смежности $b+K$, по модулю K. Дополнительная нота w из K не изменит гармонию, что соответствует алгебраическому равенству $b + K = b + w + K$ в L/K , если $w \in K$. Фактор-полугруппа L/K сохраняется до тех пор, пока доминирование не перейдет к другому аккорду, то есть не наступит переход к другому гармонически стабильному промежутку, см. [2].

Теперь рассмотрим предикат $P(x_1, \ldots, x_k) = \xi$, левая часть которого представляет собой аккорд, составленный нотами $x_1, \ldots, x_k$. Будем считать, что $\xi = 1$ (истинно), если все эти ноты принадлежат доминирующему аккорду, и $\xi =$ (ложно) в противном случае. Подобно тому, как в живом языке истинность или ложность высказывания определяется в контексте конкретной ситуации, в музыке мы тоже имеем зависимость от того, в каком гармонически стабильном промежутке звучит аккорд.

Используя комбинаторный подход (выбор нот из всех возможных, отождествляя различные ноты из разных октав), мы создаем различные аккорды и определяем логические операции над ними.

Пусть $P(x_1, \ldots, x_k) + P(y_1, \ldots, y_m) = P(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_m)$ и
$P(x_1, \ldots, x_k) \cdot P(y_1, \ldots, y_m) = P(z_1, \ldots, z_l)$, где
$\{z_1, \ldots, z_l\} = \{x_1, \ldots, x_k\} \cap \{y_1, \ldots, y_m\}$.

Для каждого аккорда $P(x_1, \ldots, x_k)$ введем отрицание $P^-(x_1, \ldots, x_k)$, которое означает одновременное звучание всех нот, не входящих в $\{x_1, \ldots, x_k\}$.

Теорема 1. *Алгебра аккордов с операциями* $(+, \cdot, ^-)$ *является булевой алгеброй.*

Эта алгебра рассматривается как множество всех подмножеств множества всех нот с операциями объединения, пересечения и дополнения.

Более интересной представляется построение булевой алгебры всех аккордов, рассматриваемых как высказывания, на каждом отдельно взятом гармонически стабильном временном промежутке. В этом случае операции $(\wedge, \vee, ^-)$ рассматриваемые как конъюнкция, дизъюнкция и отрицание, имеют следующий смысл соответственно: одновременное звучание аккордов, звучание хотя бы одного из аккордов, звучание всех нот не принадлежащих данному аккорду.

Тождественно истинным высказыванием 0 является пауза, тождественно ложным высказыванием 1 является одновременное звучание всех нот, создающее диссонанс в любой музыкальной культуре (эти обозначения находятся в некотором противоречии с установившимися привычками, но не создают никаких формальных трудностей). В этих определениях для любого аккорда A мы имеем: $A \wedge A^- = 0$ и $A \vee A^- = 1$, $A \wedge 0 = 0$, $A \wedge 1 = A$, $A \vee 1 = 1$, $A \vee 0 = A$.

Теорема 2. *На каждом гармонически стабильном временном промежутке алгебра аккордов, рассматриваемых как высказывания, ложность и истинность которых определяется доминирующим аккордом, с введенными операциями* $(\wedge, \vee, ^-)$ *и выделенными элементами* 0 *и* 1 *(тождественно истинным и тождественно ложным высказываниями соответственно), представляет собой алгебру логики.*

Разумеется, данный формальный подход не включает рассмотрение авторских отклонений от заданной схемы, которые влияют на эмоциональное восприятие произведений, но раскрывает сущность и возможности различных аранжировок. Аналогичная ситуация имеет место и в живых языках, формализация которых допустима только с определенными ограничениями. Благодаря эмоциональной наполненности язык музыки является самым универсальным языком на протяжении всей истории развития человечества, см. [3]. Уместно привести высказывание Х.Е. Хантли: "Синтаксис и грамматика языка музыки не капризны, а продиктованы структурой и организацией глубоких уровней ума, связанных, таким образом, с математикой".

Список литературы

1. О лингвистической алгебре / А. В. Баталин, З .В. Дударь, А. В. Стороженко, Ю. П. Шабанов-Кушнаренко // Радиоэлектроника и информатика. 1998., № 4 С. 101–109.

2. Благовещенская Е. А. Алгебра и музыка // Математика. Исторические очерки, научные обзоры развития математики от возникновения до наших дней. СПб. : Изд-во СПбГПУ, 2012. С. 328–343.

3. Лазутина Т. В. Язык музыки как полифункциональный феномен // Вестник Томского государственного университета 2013. № 369. С. = 60–62.

Ультрапроизведения в теоремах вложения алгебраических систем

Блудов Василий Васильевич

Байкальский государственный университет, e-mail: vasily-bludov@yandex.ru

В докладе рассматривается применение ультрапроизведений в теоремах вложения алгебраических систем на основе конструкции вложения в теореме компактности (локальной теореме) [1–3]. Основной результат — Теорема 1 о вложении декартового произведения алгебраических систем в ультрапроизведение конечных прямых произведений этих систем.

На сигнатуру алгебраических систем не накладывается никаких ограничений. Она может содержать любой набор функциональных символов и предикатов. При этом в произведениях алгебраических систем A_i, $i \in I$ все системы должны иметь одинаковую сигнатуру.

Обозначения

Для произведений систем A_i, $i \in I$ используем обозначения:

$A_I = A_{i_1} \times A_{i_2} \times \cdots \times A_{i_n}$, $I = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ для конечного прямого произведения;

$\sum_{i \in I} A_i$ для прямой суммы (ограниченного прямого произведения) при наличии тривиальных систем в рассматриваемых классах;

$\overline{A}_I = \prod_{i \in I} A_i$ для декартова (полного прямого) произведения.

$\overline{A}_{\mathcal{F}} = \prod_{i \in I} A_i/_{\mathcal{F}}$ для фильтрованного произведения по фильтру $\mathcal{F}$. Фильтрованные произведения по ультрафильтру называются ультрапроизведениями.

Если все системы одинаковы, $A_i = A$, то их произведения называются степенями и обозначаются A^n, A^I, $A^I/_{\mathcal{F}}$ для конечного, декартового и фильтрованного произведения соответственно.

Для конечного множества I произведения A_I и $\overline{A}_I$ совпадают.

Элементы конечных произведений это n-ки $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n})$, элементы бесконечных произведений — последовательности $\{a_i\}_{i \in I}$, а элементы фильтрованных произведений по фильтру $\mathcal{F}$ это классы эквивалентных последовательностей $[\{a_i\}_{i \in I}]_{\mathcal{F}}$, где $\{a_i\}_{i \in I} \cong \{b_i\}_{i \in I} \iff \{i \in I \mid a_i = b_i\} \in \mathcal{F}$.

Для множества I пусть $\mathfrak{I} = \langle \mathfrak{I}, \wedge, \vee \rangle$ — решётка всех конечных подмножеств множества I. Конусом (или правым конусом), порождённым элементом $X \in \mathfrak{I}$ называется подмножество $\mathrm{C}(X) = \{Y \in \mathfrak{I} \mid Y \supseteq X\}$. В следствие того, что $\mathrm{C}(X) \bigcap \mathrm{C}(Y) = \mathrm{C}(X \bigcup Y)$, множество конусов $\mathrm{C}(\mathfrak{I}) = \{\mathrm{C}(X) \mid X \in \mathfrak{I}\}$

является фильтром на $\mathfrak{I}$. Далее через $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathfrak{I})$ обозначаем ультрафильтр, продолжающий фильтр $\mathrm{C}(\mathfrak{I})$.

Если $K \subset I$, то имеются гомоморфизмы (проекции) p_K алгебраических систем A_I, $\overline{A}_I$ на A_K, $\overline{A}_K$ соответсвенно, которые задаются по правилу

$$p_K\colon \{a_i\}_{i\in I} \mapsto \{a_i\}_{i\in K}.$$

Вложения декартовых произведений

Утверждение 1. *Для любых алгебраических систем A_i $(i \in I)$ отображение $\varepsilon\colon \prod_{i\in I} A_i \to \prod_{J\in\mathfrak{I}} A_J/_{\mathcal{D}}$, определённое по правилу*

$$\varepsilon\colon \{a_i\}_{i\in I} \mapsto [\{p_J(\{a_i\}_{i\in I})\}_{J\in\mathfrak{I}}]_{\mathcal{D}}. \tag{1}$$

инъективно.

В теореме компактности бесконечно-порождённая алгебраическая система вкладывается в ультрапроизведение своих конечно-порождённых подсистем. Для этого берётся ультрафильтр, продолжающий фильтр конусов конечных подмножеств. Этот подход и используется в Утверждении 1. При этом Утверждение 1 не является следствием из теоремы компактности, поскольку конечные произведения алгебраических систем (рассматриваемые как подсистемы в декартовом произведении) порождают прямую сумму, но не само декартово произведение.

Из Утверждения 1 получаем

Теорема 1. *Декартово произведение алгебраических систем изоморфно вложимо в ультрапроизведение всех конечных произведений этих систем.*

Если алгебраические системы содержат тривиальный элемент e, то в этом случае определена их прямая сумма $\sum_{i\in I} A_i$ и естественные вложения

$$\eta_J\colon \prod_{i\in J} A_i \to \sum_{i\in I} A_i, \quad J \in \mathfrak{I}$$

конечных прямых произведений в сумму по правилу $\eta_J(\{a_i\}_{i\in J}) = \{b_i\}_{i\in I}$, где $b_i = a_i$ при $i \in J$ и $b_i = e$ при $i \notin J$. Далее вкладываем $\sum_{i\in I} A_i$ в ультрастепень по ультрафильтру $\mathcal{D}$ и получаем

Следствие 1. *Ультрастепень прямой суммы алгебраических систем содержит изоморфную копию их декартова произведения.*

Квазимногообразия

Пусть $f_1, g_1, \dots, f_{s+1}, g_{s+1}$ обозначают термы от переменных $x_1, \dots, x_k$. Формулы вида $\forall x_1, \dots, \forall x_k (f_1 = g_1 \wedge \dots \wedge f_s = g_s \to f_{s+1} = g_{s+1})$ называются *квазитождествами.*

Класс $\mathfrak{K}$ алгебраических систем называется *квазимногообразием*, если существует такая совокупность S квазитождеств, что $\mathfrak{K}$ состоит из тех и только тех систем, в которых истинны все формулы из S.

Теорема. (Мальцев [3]) *Класс алгебраических систем, содержащих тривиальную подсистему, является квазимногообразием тогда и только тогда, когда он замкнут относительно подсистем, декартовых произведений и ультрапроизведений.*

Теорема 2 позволяет заменить в теореме Мальцева условие замкнутости квазимногообразий относительно декартовых произведений на условие замкнутости относительно конечных прямых произведений.

Теорема 2. *Класс алгебраических систем, содержащих тривиальную подсистему, является квазимногообразием тогда и только тогда, когда он замкнут относительно подсистем, конечных прямых произведений и ультрапроизведений.*

Следствие 2. *Класс алгебраических систем является квазимногообразием тогда и только тогда, когда он замкнут относительно подсистем, прямых сумм и ультрапроизведений.*

Вложение групповых алгебр

Элементы групповой алгебры $K(G)$ группы G над телом K это формальные суммы $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i$, $n \in \mathbb{N}$, где $\alpha_i \in K$, $g_i \in G$. Сложение таких элементов покомпонентное. Умножение происходит по дистрибутивности, а для элементов $\alpha_i g_i$ индуцировано умножением в K и G: $\alpha_i g_i \cdot \alpha_j g_j = (\alpha_i \alpha_j)(g_i g_j)$. Необходимые сведения по групповым алгебрам можно найти в [4].

Лемма 1. *Если групповые алгебры групп G_1, G_2 над произвольным телом K вкладываются в делимые алгебры над K, то и групповая алгебра группы $G_1 \times G_2$ над телом K вкладываются в делимую алгебру над K.*

По теореме Лося (см. [1–3]) ультрапроизведение сохраняет формулы УИП и, следовательно класс групп, у которых групповые алгебры над произвольным телом K вкладываются в делимые алгебры над K замкнут относительно ультрапроизведений. Групповые алгебры конечных прямых произведений таких групп вкладываются в делимые алгебры по Лемме 1. Теперь из Теоремы 2 следует

Теорема 3. *Класс групп, у которых групповые алгебры над любым телом K вкладываются в делимые алгебры над K образует квазимногообразие.*

Из результата Ж. Левина [5] и Теоремы 3 получаем

Следствие 3. *Групповые алгебры групп из квазимногообразия, порождённого разрешимыми группами без кручения, вкладываются в делимые алгебры.*

Приложение к упорядоченным группам

Частично упорядоченная группа это алгебраическая система $\langle G, \cdot, \leqslant\rangle$, в которой $\langle G, \cdot\rangle$ — группа, $\langle G, \leqslant\rangle$ — частично упорядоченное множество и отношение $\leqslant$ сохраняется при умножении как слева, так и справа. Известно [6; 7], что решёточно упорядоченные группы образуют многообразие, а линейно упорядоченные группы образуют аксиоматический класс, который не является ни многообразием, ни квазимногообразием. Это связано с тем, что при покоординатном определении на прямых (декартовых) произведениях предиката $\leqslant$ теряется его линейность. В то же время на прямых и декартовых произведениях можно определить лексикографический линейный порядок, который продолжает линейные порядки исходных групп. Однако для этого требуется, чтобы множество индексов было вполне упорядочено. Для несчётных мощностей мы не можем конструктивно вполне упорядочить множество индексов, а для линейного упорядочения таких множеств часто имеются хорошие конструкции, например, дедекиндово пополнение. Утверждение 1 позволяет распространить линейный порядок исходных групп на их декартово произведение при линейно упорядоченном множестве индексов. Приведём эту конструкцию.

Пусть $I = \langle I, \leqslant\rangle$ — линейно упорядоченное множество и $G_i = \langle G_i, \cdot \leqslant_i\rangle$, $i \in I$ — линейно упорядоченные группы. Конечные подмножества $J \in \mathfrak{I}$ снабдим линейным порядком, индуцированным порядком $\leqslant$ множества I. Для $J = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ определим лексикографический порядок $\leqslant_J$ на произведении $G_J = G_{i_1} \times G_{i_2} \times \cdots \times G_{i_n}$, полагая $g <_J h$ для $g = (g_{i_1}, g_{i_2}, \ldots, g_{i_n})$, $h = (h_{i_1}, h_{i_2}, \ldots, h_{i_n})$, если $g \neq h$ и $g_k <_k h_k$, где $k \in J$ наименьший индекс, при котором $g_k \neq h_k$. Вложим $G_J = \langle G_J, \cdot, \leqslant_J\rangle$ в ультрапроизведение $\prod_{J\in\mathfrak{I}} G_J/_{\mathcal{D}}$ по ультрафильтру продолжающему фильтр $\mathrm{C}(\mathfrak{I})$. Линейные порядки $\leqslant_J$ групп G_J определят стандартным образом линейный порядок $\leqslant_{\mathcal{D}}$ на ультрапроизведении. Далее вкладываем $\prod_{i\in I} G_i$ в это ультрапроизведение по формуле (1) и индуцируем порядок $\leqslant_{\mathcal{D}}$ на декартово произведение, который обозначим через $\leqslant_I$.

Утверждение 2. *Линейный порядок $\leqslant_I$ на декартовом произведении групп G_i продолжает линейные порядки $\leqslant_i$ исходных групп и линейные порядки $\leqslant_J$, $J \in \mathfrak{I}$ их конечных прямых произведений.*

Список литературы

1. Handbook of mathematical logic. Part 1. Models theory / ed. Barwise J. Amsterdam ; New York ; Oxford : North-Holland Publ. Com., 1977. (Справочная книга по математической логике Ч. 1. Теория моделей / под ред. Дж. Барвайса. М. : Наука, 1982. 392 с.)

2. Cohn P. M. Universal algebra. N. Y. Evanston ; London : Harper& Row, 1965. (Кон П. М. Универсальная алгебра. М. : Мир, 1968. 351 с.)

3. Мальцев А. И. Алгебраические системы. М. : Наука, 1970.

4. Jacobson N. Structure of Rings. N. Y. : AMS, Coll. Publ. V. XXXVII. 1956.

5. Lewin J. A note on zero divisors in group-rings // Proc. AMS. 1972. Vol. 31. N 2. P. 357–359.

6. Glass A. M. W. Partially Ordered Groups. Series in Algebra. Vol. 7. Singapore : World Scientific, 1999.

7. Fuchs L. Partially ordered algebraic systems. N. Y. : Pergamon Press, 1963. (Фукс Л. Частично упорядоченные алгебраические системы. М. : Мир, 1965. 342 с.)

Обобщенные кооперативные игры и теорема Скарфа

Блудов Михаил Васильевич[1], **Мусин Олег Рустумович**[2]
[1] Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН, e-mail: bludov.mv@phystech.edu
[2] Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН, e-mail: omusin@gmail.com

Основным результатом работы является обобщение понятия кооперативных игр с нетрансферабельной полезностью. Показывается, что любая обобщенная игра задает покрытие замкнутыми множествами евклидова пространства, а равновесие в игре существует если и только если это покрытие гомотопически нетривиально. В частности доказывается аналог теоремы Скарфа для таких обобщенных игр.

Введение.

Вначале дадим стандартные определения и формулировки.

Определение 1 (Кооперативная НТП-игра, [1])**.** *Пусть есть множество игроков $[n] = \{1, \dots, n\}$. Кооперативной игрой с нетрансферабельной полезностью (НТП-игра) назовем пару $([n], V)$, где $V = \{V(S) | S \subset [n],\ S \neq \varnothing\}$ — семейство множеств, т.ч. $V(S) \subset \mathbb{R}^S$. Также на множества $V(S)$ накладывают следующие условия:*

— *$V(S)$ замкнутые, непустые и собственные подмножества $\mathbb{R}^S$.*

— *$V(S)$ «нормально» в том смысле, что $V(S) - - - \mathbb{R}^S_+ \subset V(S)$. Иными словами, если коалиция может позволить себе вектор x, то и меньший вектор $x' \leqslant x$ также лежит в $V(S)$*

— *$V(S)$ ограничены, т. е. существует такое число M, что если $x \in V(S)$, то $x \leqslant M\mathbf{1}_S$, где через $\mathbf{1}_S$ обозначен вектор $\sum_{i\in S} e_i$, $\{e_1, \dots, e_n\}$ — стандартный ортонормированный базис.*

С игрой также свяжем семейство $U = \{U(S) | S \subset [n],\ S \neq \varnothing\}$ — семейство цилиндров, где $U(S) = V(S) \times \mathbb{R}^{[n]\setminus S}$.

Определение 2. *Ядро игры — это такие дележи коалиции из $[n]$ игроков, что они не доминируются никакой меньшей коалицией. Определим это как $V([n]) \setminus \bigcup\limits_{S \subsetneq [n]} int(U(S))$.*

Определение 3. *Пусть семейство $\mathcal{B}$ состоит из подмножеств $\{S_1, ..., S_m\}$ множества $[n]$. Назовем это семейство* сбалансированным, *если найдется* *такой набор неотрицательных весов* $\{\lambda_1, ..., \lambda_m\}$, *что*

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \mathbf{1}_k = (1, ..., 1),$$

Определение 4. *Игра* $([n], V)$ *называется сбалансированной, если для любого сбалансированного семейства* $\mathcal{B}$ *выполнено, что* $\bigcap\limits_{S \in \mathcal{B}} U(S) \subset V([n])$.

Теорема 1 (Скарф [1]). *Если кооперативная НТП игра* $([n], V)$ *сбалансирована, то её ядро* $C(V)$ *непусто.*

Как заметил Данилов в [2], вместо сбалансированности можно рассматривать равновесные точки. Дадим определение этого понятия.

Определение 5. *Пусть есть сбалансированное семейство* $\mathcal{B}$. *Пусть* λ *— балансирующий набор весов. Точку* $x \in \mathbb{R}^{[n]}$ *назовем допустимой, если* $x \in U(S)$ *для* $\lambda_S > 0$. *Точку* x *назовем равновесной, если* x *— допустимая, и при этом* $x \notin int(U(S))$ *ни для какого* $S \subseteq [n]$.

Теорема 2. *В кооперативной НТП игре* $([n], V)$ *всегда существует хотя бы одна равновесная точка.*

Доказательство этой теоремы основано или на применении теоремы Какутани о неподвижной точке, что приводится в работе [2], или на применении леммы KKMS о покрытиях симплекса, как показал Шепли в работе [3].

Обобщенные кооперативные игры

Как показано в работе [4], если у нас есть покрытие сферы S^{n-1} замкнутыми (или открытыми) множествами (число которых равно $m \geqslant 2$) , то с покрытием можно ассоциировать некоторый гомотопический класс из $[S^{n-1}, S^{m-2}]$. В работе [5] приводится значительное обобщение известной KKM леммы. Здесь мы приводим более общую теорему, позволяющую обобщить уже KKMS лемму. Ниже приводится формулировка общей теоремы.

Теорема 3. *Пусть* $V := \{v_1, \ldots, v_m\}$ *— множество точек в* $\mathbb{R}^d$, $c_V \in \mathbb{R}^d$ *— выделенная точка такая, что скалярные произведения* $v_i \cdot c_V > 0$ *для* $i = 1, \ldots, m$, *и существуют такие веса* $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$, *что* $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i v_i = c_V$. *Пусть* $F = \{F_1, \ldots, F_m\}$ *— замкнутое (или открытое) покрытие* n*-мерного шара* D^n. *Обозначим также через* F *покрытие, индуцированное на сферу* $S^{n-1} = \partial D^n$. *Обозначим через* $[F_{(V,c_V)}]$ *элемент из* $[S^{n-1}, S^{d-1}]$, *ассоциированный с покрытием и с множеством точек* (V, c_V). *Если класс* $[F_{(V,c_V)}]$

не равен нулю, то тогда найдется такой сбалансированный набор точек $S \subset V$ что пересечение $\cap_{i \in S} F_i$ не пусто. В данном случае сбалансированность определяется аналогично определению 3.

Определение 6. *Пусть у нас есть $F = \{F_1, \dots, F_m\}$ — покрытие пространства $\mathbb{R}^n$. Пусть также есть $V := \{v_1, \dots, v_m\}$ — множество точек в $\mathbb{R}^d$, $c_V \in \mathbb{R}^d$ — выделенная точка с условиями, как в теореме выше. Покрытие F будем называть гомотопически нетривиальным, если найдется сфера $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ такая, что ассоциированный с индуцированным на сферу покрытием гомотопический класс $[F_{(V, c_V)}]$ будет ненулевым.*

Дальнейшие результаты этой работы существенно опираются на теорему 3.

Определение 7. *Определим обобщенную кооперативную НТП игру как тройку (U, V, r) со следующими условиями:*

- *$U = \{U_1, \dots, U_m\}$, где $U_i \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутые, собственные и нормальные подмножества, т.е. $U_1, \dots, U_m$ не совпадают с $\mathbb{R}^n$ и $U_i - \mathbb{R}^n_+ \subset U_i$ для всех $i = 1, \dots, m$.*
- *$V = \{v_1, \dots, v_m\} \subset \mathbb{R}^d$ — набор фирм, где $v_i = (v^i_1, \dots, v^i_d)$ и $\sum\limits_{j=1}^{d} v^i_j > 0$ для каждого $i = 1, \dots, m$*
- *$r = (r_1, \dots, r_d) \in \mathbb{R}^d$ — набор индивидуальных ресурсов игроков, т.ч. $\sum\limits_{i=1}^{d} r_i > 0$.*

Определение 8. *Набор фирм $S \subset V$ назовем r-сбалансированным, если есть такой набор неотрицательных весов $\{\lambda_i\}_{i \in S}$, что $\sum\limits_{i \in S} \lambda_i v_i = r$.*

Определение 9. *Пусть $S \subset V$ — сбалансированный набор фирм и λ — соответствующий набор весов. Тогда точка $x \in \mathbb{R}^n$ — допустимая, если $x \in U_i$ для $\lambda_i > 0$. Точка x называется равновесной, если $x \notin int(U_i)$ ни для какого $i = 1, \dots, m$.*

Пусть среди фирм V есть такая, что она совпадает с точкой r. Не умаляя общности, пусть это фирма v_m. В этом случае можем дать следующие определения:

Определение 10. *Ядром назовем множество $U_m \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{m-1} int(U_i)$.*

Определение 11. *Игру (U, V, r) будем называть сбалансированной относительно (V, r), если для любого сбалансированного подмножества $S \subset V$ со множеством индексов I выполнено, что $\cap_{i \in I} U_i \subset U_m$.*

Для обобщенных игр верна следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть есть обобщенная кооперативная НТП игра* (U, V, r). *Тогда набор множеств* $U = \{U_1, \ldots, U_m\}$ *задаёт покрытие замкнутыми множествами* $F(U) = \{F(U_1), \ldots, F(U_m)\}$ *пространства* $\mathbb{R}^{n-1}$.

Верно также следующее утверждение:

Утверждение 1. *Пусть есть обобщенная НТП-игра* (U, V, r) *и покрытие* $F(U)$ *пространства* $\mathbb{R}^n$, *задаваемое игрой. Тогда у неё есть равновесная точка тогда и только тогда, когда существует такой сбалансированный набор* $S \subset V$, *что соответствующие множества* $\{F(U_i)\}_{i \in S}$ *из покрытия имеют непустое пересечение* $\bigcap\limits_{i \in S} F(U_i) \neq \varnothing$

Теорема 4. *Обобщенная НТП-игра* (U, V, r) *имеет равновесную точку тогда и только тогда, когда индуцированное покрытие* $F(U)$ *гомотопически нетривиально..*

Можем сформулировать теорему для игр, обладающих условием сбалансированности.

Теорема 5. *Пусть есть обобщенная НТП-игра* (U, V, r) *со множеством фирм* $V = \{v_1, \ldots, v_m\}$, *где* $v_m = r$. *Пусть игра сбалансирована относительно* (V, r). *Тогда ядро* (U, V, r) *непусто тогда и только тогда, когда* (U, V, r) *гомотопически нетривиальна.*

В качестве следствия отсюда можно вывести теорему Скарфа, показав, что стандартные НТП-игры всегда имеют нетривиальное индуцированое покрытие.

Список литературы

1. Scarf H. The core of an N-person game // Econometrica. 1967. Vol. 35. P. 50–69

2. Данилов В. И. О теореме Скарфа // Экономика и математические методы. 1999. Т. 35. С. 137–139.

3. Shapley L. S. On balanced games without side payments // Mathematical Programming. New York : Academic Press, 1973. P. 261–290.

4. Musin O. R. Homotopy invariants of covers and KKM type lemmas // Algebr. Geom. Topol. 2016. Vol. 16. P. 1799–1812.

5. Musin O. R. KKM type theorems with boundary conditions // J. Fixed Point Theory Appl. 2017. Vol. 19. P. 2037–2049.

Эквивалентность унификаторов в суперинтуиционистских логиках

Брылякова Елизавета Валерьевна
Сибирский федеральный университет, e-mail: `lbrylyakovv@bk.ru`

Теория унификации в настоящее время представляет большой интерес для изучения в области неклассических логик. Наиболее актуальные на сегодня задачи: установление факта унифицируемости формул, поиск эффективных алгоритмов построения унификаторов формул и поиск наилучших таких подстановок, определение типа унификации в логике и сопутствующие вопросы.

Определение 1. *Формула $\varphi(p_1, \ldots, p_s)$ унифицируема в $\mathcal{L} \Leftrightarrow \exists \sigma : p_i \mapsto \sigma_i$ (унификатор) для каждой p_i такая, что $\varphi(\sigma_1, \ldots, \sigma_s) \in \mathcal{L}$.*

Определение 2. *Унификатор σ формулы $\varphi(p_1, \ldots, p_s)$ назовем более общим чем σ^1 в $\mathcal{L}$ ($\sigma^1 \preceq \sigma$), если существует подстановка γ такая, что $\forall p_i \in Var(\varphi)$: $\sigma^1(p_i) \equiv \gamma(\sigma(p_i)) \in \mathcal{L}$.*

Известно, что отношение «более общий» задаёт предпорядок на множестве унификаторов для каждой унифицируемой формулы в логике [1].

На данный момент наглядных примеров реализации унификаторов, визуализации и принципов их формирования в литературе практически нет. В 2019 г. С. И. Башмаковым было предложено интерпретировать упорядоченные множества унификаторов формулы в виде деревьев с особыми характеристиками [2]. В продолжение этих исследований мы определили и исследуем свойства диаграмм унификаторов:

Определение 3. *Диаграммой унификаторов унифицируемой формулы φ в логике $\mathcal{L}$ называется пара $\langle AU_\varphi, \preceq \rangle$, где AU_φ — множество всех унификаторов формулы φ в логике $\mathcal{L}$, а $\preceq$ — отношение «более общий» на AU_φ.*

Доказан ряд свойств для максимальных и корневых унификаторов, исследуются их структурные свойства, ветвления, сегменты эквивалентности и зависимость построения диаграммы от формулы или логики. Рассмотрены некоторые известные формулы в предтабличных расширениях Int — LC, L2, L3, и поведение эквивалентных унификаторов для этих формул в указанных логиках.

В литературе эквивалентные унификаторы определяются следующим образом, [3]: *два унификатора σ и σ^1 эквивалентны, если они образуют симметричную пару относительно отношения $\preceq$: $\sigma \preceq \sigma^1 \& \sigma^1 \preceq \sigma$.* Отсюда следует, что эквивалентные унификаторы должны быть *более общими* по отношению к одному и тому же набору *менее общих* унификаторов. Нами приведён класс эквивалентных, в соответствии с введенным выше определением, унификаторов формулы в предтабличной логике $L2$, имеющих при этом различные наборы предшественников в диаграмме, что делает недостаточным условие симметричности для определения понятия эквивалентности на отношении *более общими*. Для решения данной проблемы мы определили понятие так называемой сильной эквивалентности:

Определение 4. *Унификаторы σ_1 и σ_2 называются **сильно эквивалентными** (обозн.: $\sigma_1 \sim' \sigma_2$), если выполняются следующие условия:*
1. $\sigma_1 \sim \sigma_2$: $\sigma \preceq \sigma^1$ & $\sigma^1 \preceq \sigma$;
2. $\forall gu_i \in AU_\varphi : gu_i \preceq \sigma_1 \Leftrightarrow gu_i \preceq \sigma_2$.

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение № 075-02-2024-1429)

Список литературы

1. Ghilardi S. Best solving modal equations // Annals of Pure and Applied Logic. 2000. P. 183–198.

2. Башмаков С. И. Структурные вопросы дерева унификаторов // Мальцевские чтения : тез. докл. Междунар. конф. Новосибирск, 2019. С. 70.

3. Jerabek E. Blending margins: The modal logic K has nullary unification type. 2013. P. 1231–1240.

Об обогащениях плотного дерева встреч и числе счетных моделей

Вербовский Виктор Валериевич[1], **Даулетиярова Айгерим Байсултанкызы**[2]

[1] Институт математики и математического моделирования, e-mail: verbovskiy@math.kz
[2] Университет SDU, e-mail: aigera95@mail.ru

Рассмотрим некоторые возможности расширений T теории T_{dmt} плотного дерева встреч $\langle M, \leqslant\rangle$ [1]. Напомним, что *плотное дерево встреч* $\mathcal{M} = \langle M; \leqslant\rangle$ — это нижняя полурешетка без наименьшего и наибольшего элементов, такая что:

(а) для каждой пары несравнимых элементов их верхняя граница не существует;

(б) для каждой пары различных сравнимых элементов существует элемент между ними;

(в) для каждого элемента a существует бесконечно много попарно несравнимых элементов, больших a, нижняя грань которых равна равна a.

Мы обогащаем теорию T_{dmt} до T_n, так что константы $c_k^{(0)}$, $k \in \omega$ образуют строго возрастающая последовательность, кроме того, имеется n строго убывающих последовательностей c_k^i, чей предел равен пределу последовательности $c_k^{(0)}$, причем элементы из разных убывающих последовательностей несравнимы. Заметим, что теория T_0 была построена Перетятькиным в [1], где он доказал, что она Эренфойхтова, а именно, T_0 имеет ровно три счетные модели. Другое расширение — T_n^P — для каждого $k < \omega$ мы добавляем одноместный предикат P_k, который интерпретируем множеством $\{c_k^1, \ldots, c^n, k\}$.

Описан счетный спектр таких обогащений. Кроме того, рассмотрен класс о-минимальных обогащений T_{dmt}, описаны некоторые его свойства на пути доказательства гипотезы, что счетный спектр о-минимальных обогащений теории T_{dmt} совпадает с объединением счетных спектров теорий вида T_n и T_n^P.

Работа поддержана КН МНВО РК (грант BR20281002 «Фундаментальные исследования в области математики и математического моделирования»).

Список литературы

1. Перетятькин М. Г. О полных теориях с конечным числом счётных моделей // Алгебра и логика. 1973, Т. 12, № 5. С. 550–576.

Сложность алгоритмов построения полиномиальных форм булевых функций

Винокуров Сергей Федорович

Иркутский государственный университет, e-mail: servin38@gmail.com

В работе предложен алгоритм построения операторных полиномиальных форм булевых функций, приведена верхняя граница его сложности и сравнение с другими алгоритмами для частных случаев полиномиальных форм. Булевы функции, зависящие от n аргументов рассматриваются как вектора, образующие линейное векторное пространство B_n размерности 2^n. Алгоритм построен для класса базисов, каждый из которых состоит из функций, являющихся операторными образами некоторых функций. Для конкретного базиса выбирается образы одной функции.

Задача состоит в следующем: для функции $f(x_1, ..., x_n)$ по имеющемуся векторному представлению $f = (\alpha_1, ..., \alpha_{2^n})$ в базисе A найти представление $f = (\beta_1, ..., \beta_{2^n})$ в базисе B. Под сложностью алгоритма перехода между базисами $L_j(n)(L(n))$ будем понимать количество операций умножения и сложения, применяемых к компонентам вектора $(\alpha_1, ..., \alpha_{2^n})$, для получения компоненты β_j(всех компонент вектора $(\beta_1, ..., \beta_{2^n})$).

Для решения этой задачи в линейных пространствах имеется универсальный алгоритм. Вектор функции в базисе B может быть получен умножением матрицы перехода от одного базиса к другому на известный вектор функции в базисе A. В этом случае нахождение β_j требует 2^n операций умножения и $2^n - 1$ операций сложения. Для одной компоненты: $L_j(n) = 2 \cdot 2^n - 1$, для всех компонент: $L(n) = 2 \cdot 4^n - 2^n$.

Такая сложность универсального алгоритма приводит к вопросу о существовании каких-либо подклассов базисов, для которых имеются алгоритмы перехода с меньшей сложностью. Для описания подходящих классов базисов и алгоритмов введем необходимые определения.

Оператор $\mathbf{t} : B_n \to B_n$ представляется в виде последовательности $t_1...t_n$, $t_i \in \{d, e, p\}$. Компонента t_i оператора $\mathbf{t}$ действует на функцию $f(x_1, ..., x_n)$ по переменной x_i следующим образом:

$$t_i f(x_1, ..., x_n) = \begin{cases} f(x_1, ..., x_n), \text{ если } t_i = e, \\ f(x_1, ..., \bar{x}_i, ..., x_n), \text{ если } t_i = p, \\ f'_{x_i}(x_1, ..., x_n), \text{ если } t_i = d. \end{cases}$$

где $f'_{x_i}(x_1, ..., x_n)$ — производная функции $f(\tilde{x})$ по переменой x_i.

Оператор $\mathbf{t}$ действует на функцию так:

$$\mathbf{t}(f(x_1, ..., x_n)) = t_1(t_2...t_n(f(x_1, ..., x_n))).$$

Пучком операторов называется упорядоченная последовательность 2^n операторов. Пучок $\mathbf{T} = \mathbf{t}^0, ..., \mathbf{t}^{2^n-1}$ называется базисным, если существует функция $g(x_1, ..., x_n)$, что $\{\mathbf{t}^0(g(x_1, ..., x_n)), ..., \mathbf{t}^{2^n-1}(g(x_1, ..., x_n))\}$ — базис B_n.

Пучок $\mathbf{T}$ будет называться двупорожденным, если существуют операторы $\mathbf{a} = a_1...a_n$ и $\mathbf{b} = b_1...b_n$, в которых выполняется $a_i \neq b_i$,

1) $\mathbf{t}^0 = \mathbf{a}$,

2) $\mathbf{t}^{2^n-1} = \mathbf{b}$ и

3) $\mathbf{t}^i = t_1...t_n$, где $t_k = a_k$, если в двоичном разложении числа $i = j_1...j_k...j_n$ $j_k = 0$ и $t_k = b_k$, если $j_k = 1$.

В [1] приведено доказательство, что все двупорожденные пучки являются базисными.

Операторной формой функции будет называться разложение по базису, построенному по базисному операторному пучку и базисной функции

$$f(x_1, ..., x_n) = \alpha_0 \cdot \mathbf{t}^0(g(x_1, ..., x_n)) \oplus ... \oplus \alpha_{2^n-1} \cdot \mathbf{t}^{2^n-1}(g(x_1, ..., x_n))$$

Пусть $\mathbf{A} = (\mathbf{a}^{\tilde{0}}, ..., \mathbf{a}^{2^n-1})$ — двупорожденный операторный пучок. Пучок $\mathbf{T} = (\mathbf{t}^{\tilde{0}}, ..., \mathbf{t}^{2^n-1})$ получен из пучка $\mathbf{A}$ по следующему правилу $\mathbf{t}^i = \mathsf{a}^{i \oplus j}$, где $i \oplus j$ — покомпонентное сложение по модулю 2 чисел, представленных векторами в двоичной записи. В [1] доказано, что пучок $\mathbf{T}$ также является двупорожденным. Такие пучки будем называть эквивалентными.

Через $\mathbf{K_t}$ будет обозначаться класс пучков, в которых оператор с индексом 0 совпадает с $\mathbf{t}$. Например, все поляризованные полиномы Жегалкина образуют класс $\mathbf{K}_{d...d}$, если в качестве базисной функции выбрана функция $x_1 \cdot ... \cdot x_n$.

Теорема 1. *Для любого класса $\boldsymbol{K_t}$ сложность алгоритма перехода между двумя базисами в этом классе удовлетворяет равенству*

$$L(n) = \frac{k}{2} 2^n,$$

где k — количество различий в операторах, имеющих индекс $2^n - 1$ в этих базисах, при их покомпонентном сравнении.

Теорема 2. *Для любых двупорожденных пучков $\boldsymbol{T}$ и $\boldsymbol{R}$ существуют индексы i и j, что для операторов $\boldsymbol{t}^i$ и $\boldsymbol{r}^j$ выполняется равенство: $\boldsymbol{t}^i = \boldsymbol{r}^j$.*

Теорема 3. *Для любых двупорожденных пучков $\boldsymbol{T}$ и $\boldsymbol{R}$ существуют эквивалентные $\boldsymbol{T}'$ и $\boldsymbol{R}'$, принадлежащие одному классу $\boldsymbol{K_t}$.*

Теоремы 2 и 3 позволяют перенести результат теоремы 1 на более широкий класс базисов.

Теорема 4. *Для любых базисов по двупорожденным пучкам $\boldsymbol{T}$ и $\boldsymbol{R}$ сложность алгоритма перехода между ними удовлетворяет неравенству*

$$L(n) \leqslant \frac{n}{2} 2^n.$$

Алгоритм, приведенный в [2], перехода от совершенной дизъюнктивной нормальной формы к полиному Жегалкина, имеющий сложность $\frac{n}{2}2^n$ является частным случаем теоремы 4: в качестве базисной функции взято произведение; соответствующие двупорожденные пучки имеют вид $(e...e, ..., p...p)$ и $(d...d, ..., e...e)$. Здесь неявно принято, что коэффициенты функции для записи в совершенной дизъюнктивной нормальной форме совпадают с компонентами вектора функции в базисе совершенной полиномиальной нормальной формы. Можно также заметить, что класс хорошо известных кронекеровых форм [2] также является частным случаем теоремы 4.

Список литературы

1. Избранные вопросы теории булевых функций / под ред. С. Ф. Винокурова, Н. А. Перязева. М. : Физматлит, 2001. 191 с.

2. Шоломов Л. А. Основы теории дискретных логических и вычислительных устройств. СПб. : Лань, 2011. 432 с.

Об интеграции объектных онтологий и логико-вероятностного вывода

Гаврилина Дарья Эдуардовна[1], **Гаврилин Денис Николаевич**[2]
[1] Иркутский государственный университет, e-mail: https://orcid.org/0009-0005-6386-242X
[2] Иркутский государственный университет, e-mail: https://orcid.org/0009-0000-3408-6752

В условиях быстрого развития искусственного интеллекта (ИИ) возникает необходимость в его интеграции в бизнес-приложения. Решение этой задачи сопряжено с серьезными проблемами [1], которые могут быть эффективно решены с помощью логико-вероятностного подхода (ЛВВ) [2]. В нашей работе мы исследуем потенциал интеграции решения ЛВВ с объектными онтологиями платформы bSystem, что потенциально позволяет выполнять полный цикл анализа, синтеза и принятия решений, и делает такой симбиоз перспективным для создания систем общего искусственного интеллекта (AGI).

В работе представлена модель данных для использования ЛВВ на основе реляционных таблиц. Метод, описанный в [2], был адаптирован для обнаружения статистических закономерностей в онтологиях на основе таблиц, где признаки принимают значения истина (1) и ложь (0). Для вероятностно-логического описания неявных знаний, содержащихся в онтологии, язык онтологии обогащается вероятностными продукциями (правилами), которые накапливаются в процессе глубокого логико-вероятностного обучения. Технически для этого используется матрица B, в которой каждая строка соответствует объекту онтологии, а столбцы — качественным признакам объектов, получаемых в процессе интерпретации формул, выраженных на данном языке.

Через обогащение вероятностными правилами языка объектной онтологии [3; 4] было сформировано новое понятие — *вероятностной объектной онтологии*. Представлен метод интерпретации вероятностных правил в контексте вероятностных объектных онтологий, а также введено понятие вероятностных закономерностей в контексте объектных онтологий, согласующихся с ЛВВ.

Список литературы

1. Zhang AIOS: LLM Agent Operating System / K. Mei, Z. Li, S. Xu, R. Ye, Y. Ge, Y. // Arxiv. URL: https://arxiv.org/abs/2403.16971 (дата обращения: 15.07.2024).

2. Демин А. В., Витяев Е. Е. Разработка универсальной системы извлечения знаний «Discovery» и ее применение // Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. 2009. № 1. С. 71–83.

3. Mantsivoda A., Ponomaryov D. A formalization of document models with Semantic Modelling // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. 2019. Т. 27. С. 36–54. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2019.27.36

4. Гаврилина Д. Э., Манцивода А. В. Low-code и объектные электронные таблицы // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. 2022. Т. 40. С. 93–103. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2022.40.93

Минимальное число порождающих сопряженных инволюций, произведение которых равно 1, конечных простых неабелевых групп

Гвоздев Родион Игоревич

Сибирский федеральный университет, e-mail: gvozdev.rodion@bk.ru

В 1999 г. Я. Н. Нужин записал в Коуровскую тетрадь [1] вопрос 14.69:

Для каждой конечной простой неабелевой группы найти минимум числа порождающих инволюций, удовлетворяющих дополнительному условию в каждом из следующих случаев.

(а) произведение порождающих инволюций равно 1;

(б) все порождающие инволюции сопряжены (Малле-Саксл-Вайгель);

(в) выполняются одновременно пп. а) и б) (Малле-Саксл-Вайгель);

(г) все порождающие инволюции сопряжены и две из них перестановочны.

В данной работе исследуется пункт (в) этого вопроса, впервые сформулированный как проблема в статье [2]. Полезны следующие элементарные утверждения.

Лемма 1 [3]. *Пусть $n(G)$ — минимальное число порождающих инволюций группы G, произведение которых равно 1. Тогда*
1) Если $n(G) = 2$, то $|G| = 2$;
2) Если $n(G) = 3$, то G — четверная группа Клейна;
3) Если $n(G) = 4$, то в G найдется неединичная циклическая нормальная подгруппа. В частности, $n(G) \geqslant 5$ для простой группы G;
4) Если $\tilde{G}$ — гомоморфный образ группы G, то $n(\tilde{G}) \leqslant n(G)$.

Минимальное число порождающих сопряженных инволюций, произведение которых равно единице, обозначим через $n_c(G)$. Очевидно, что $n(G) \leqslant n_c(G)$. Следующая лемма впервые отмечена в [3].

Лемма 2. *Эквивалентны следующие утверждения:*
1) Группа G порождается тремя инволюциями α, β, γ, первые две из которых перестановочны (инволюции α, β, γ и $\alpha\beta$ сопряжены);
2) Группа G порождается инволюциями α, β, γ, δ, ϵ, две из которых совпадают и $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon = 1$ (инволюции α, β, γ, δ, ϵ сопряжены).

Значительного прогресса в решении задачи (в) добился Дж. М. Уорд [3]. В действительности Дж. М. Уорд, решая вопрос 14.69 (в), находил такую порождающую тройку сопряженных инволюций α, β, γ, что первые две из них перестановочны и инволюции α, $\alpha\beta$ также сопряжены. Он дал ответ для спорадических, знакопеременных групп и групп $PSL_n(q)$, q нечетно, исключая случай $q = 9$ при $n \geqslant 4$, а при $n = 6$ — также случай $q \equiv 3(mod 4)$. Ограничение $q \neq 9$ сняли И. Ю. Ефимов и Я. Н. Нужин для $n = 4, 5, 7, 8$ [6], а для оставшихся размерностей $n = 6$ и $n \geqslant 9$ — автор данной заметки (Алгебра и логика, в печати). Таким образом, для линейных групп $PSL_n(q)$ ответ неизвестен в случаях $n = 6$, $q \equiv 3(mod 4)$ и $q = 2^m$. Доказана

Теорема 1. *Группа $PSL_n(2^m)$, в случае $n = 4k+1$, порождается тремя инволюциями α, β, γ, первые две из которых перестановочны и все четыре инволюции α, β, γ и $\alpha\beta$ сопряжены.*

Отметим также, что ответ на вопрос (в) известен для групп лиева типа ранга 1, поскольку в этом случае задачи (а) и (в) совпадают (вопрос 14.69 (а) на данный момент уже решен). Поэтому другим направлением в решении вопроса (в) являются группы лиева типа ранга 2. В статье [5] задача решена для групп $PSU_4(q^2)$, q нечетно, $PSU_5(2^{2m})$ и $PSp_4(q)$, $q \equiv 3(mod 4)$. В совместной работе М. А. Всемирнова, Я. Н. Нужина и Р. И. Гвоздева было доказано, что группы $PSU_4(2^{2m})$ и $PSL_4(2^m)$ не порождаются пятью инволюциями, произведение которых равно единице (Доклады АН, в печати). В частности, ответ на вопрос (в) известен и для этих групп (см. [3, лемма 3] и [7]). Совместно с Я. Н. Нужиным, Т. С. Петруть и А. М. Соколовской доказана

Теорема 2. *1. Группа $PSp_4(q)$, $q \equiv 3(mod 4)$, $q \neq 3$ порождается тремя инволюциями α, β, γ, первые две из которых перестановочны и все четыре инволюции α, β, γ и $\alpha\beta$ сопряжены.*

2. Группа $PSp_4(2^m)$, $m > 1$, порождается тремя инволюциями α, β, γ, первые две из которых перестановочны и все четыре инволюции α, β, γ и $\alpha\beta$ сопряжены.

Причем при доказательстве случая (1) теоремы 2 порождающие указаны те же, что и в статье [5]. Для исключительных групп малого порядка в теореме 2 известно следующее. Для группы $G = PSp_4(3)$ число $n(G)$ равно 6 (см. [4]), причем она порождается тройкой сопряженных инволюций. Следовательно $n_c(PSp_4(3)) = 6$. Группа $PSp_4(2)$ не является простой и изоморфна симметрической группе S_6 (см., например, [8], p. 176). Поэтому в данном случае оказалась полезной следующая лемма, дающая достаточное условие «непорождаемости» групп подстановок.

Лемма 3 (R. Ree, [9]). *Пусть подстановки $x_1, ..., x_m$ порождают транзитивную подгруппу симметрической группы S_n на n символах, с условием $x_1...x_m = 1$, и пусть c_i обозначает число орбит $\langle x_i \rangle$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Тогда $c_1 + ... + c_m \leqslant n(m-2) + 2$.*

С помощью данной леммы и отмеченного выше изоморфизма, было получено равенство $n_c(PSp_4(2)) = 10$. Таким образом из теорем 1, 2 получаем

Следствие 1. *1.* $n_c(PSL_n(2^m)) = 5$, *при* $n = 4k + 1$*;*
2. $n_c(PSp_4(q)) = 5$, *при* $q \neq 2, 3$*;*
3. $n_c(PSp_4(3)) = 6$*;*
4. $n_c(PSp_4(2)) = 10$.

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение 075-02-2024-1429).

Список литературы

1. The Kourovka notebook : Unsolved Problems in Group Theory / Sobolev Institute of Mathematics SB RAS ; [eds. V. D. Mazurov, E. I. Khukhro]. Novosibirsk, 2022. N 20.

2. Malle G., Saxl J., Weigel T. Generation of classical groups // Geom. Dedicata. 1994. N 49. P. 85–116.

3. Ward J. M. Generation of simple groups by conjugate involutions // Thesis of Doctor of Philosophy. Queen Mary college, University of London, 2009.

4. Нужин Я. Н. О порождающих множествах инволюций простых конечных групп // Алгебра и логика. 2019. Т. 58, № 3. С. 426–434.

5. Нужин Я. Н. О порождающих тройках инволюций групп Лиева типа ранга 2 над конечными полями // Алгебра и логика. 2019. Т. 58, № 1. С. 84–107.

6. Ефимов И. Ю., Нужин Я. Н. Порождающие множества сопряженных инволюций групп $SL_n(q)$ при $n = 4, 5, 7, 8$ и нечетном q // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2021. Т. 27, № 1. С. 62–69.

7. Pellegrini M. A. and Tamburini M. C. Bellani The simple classical groups of dimension less than 6 are (2,3)-generated, arXiv 1405.3149.

8. Carter R. W. Simple groups of lie type. London ; New York ; Sydney ; Toronto : Wiley and Sons, 1972.

9. Ree R. A theorem on permutations // J. Combinatorial Theory. 1971. Ser. A, N 10. P. 174–175.

Развитие общелогических и формально-логических методов познания в процессе обучения математике в школе

Дулатова Зайнеп Асаналиевна[1], Ковыршина Анна Ивановна[2], Лапшина Елена Сергеевна[3], Штыков Николай Николаевич[4]

[1] Иркутский государственный университет, e-mail: dulatova@yandex.ru
[2] Иркутский государственный университет, e-mail: annkow@mail.ru
[3] Иркутский государственный университет, e-mail: esl7828@gmail.com
[4] Иркутский государственный университет, e-mail: tukubik8@gmail.com

Содержание предметного обучения в школе мы рассматриваем с позиции вклада обучения в развитие общелогических и формально-логических методов познания. К формально-логическим методам относят методы работы с формами мышления: понятиями, суждениями и умозаключениями, к общелогическим методам познания — абстрагирование, анализ, синтез, сравнение, конкретизацию и обобщение. Связь между общелогическими и формально-логическими методами определяется тем, что общелогические действия лежат в основе любого познавательного действия. Часто их определяют как некие врожденные мыслительные действия. В педагогических исследованиях общелогические действия обычно не дифференцируются по компонентам действия: объекту, предмету, цели, способам выполнения, используемым средствам, результатам и способам контроля.

Дж. Брунер в качестве одного из критериев, обуславливающих теорию развития познавательных способностей, указывает объяснение *естественных* приёмов мышления [1]. Процесс обучения в образовательных организациях не способствует развитию формально-логического мышления школьников. В нём не акцентируется внимание на значении формально-логических методов познания для понимания структурных связей изучаемых предметов.

Мы провели анализ решений математических заданий, представленных школьниками 4-11-х классов, студентами, учителями математики. Анализ не имел целью удостоверить низкий уровень чего бы то ни было. Авторов интересовали вопросы понимания логики задачи, языка, стиля изложения мысли. Рассматривались задания, отличные от алгоритмических задач школьного курса математики, но не выходящие за его рамки, имеющие понятную, ясную формулировку. Удивительно, что участники эксперимента из разных возрастных групп демонстрировали в решениях особенности эгоцентрического стиля мышления, выделенные Пиаже при наблюдениях за детьми 5-8 лет [2]. К примеру, отсутствие заботы о понимании своих мыслей собеседником, путанность изложения, лёгкое удовлетворение поверхностным объяснением причин. При этом школьники 4-5-х классов менее скованны привычными формальными требованиями, поэтому в их решениях больше чувствовалось непосредственное изложение своей мысли, во всяком случае так, как его представляли дети. В решениях старших участников непонимание нередко маскируется лаконизмом или, наоборот, многословием. В этом исследовании для нас не представлял интереса случай «понял задачу, но не смог её решить и понял, что не смог».

В проблемах, выявленных нашим анализом (восприятие символьного текста, функциональных и предикатных выражений, понимание доказательства и т. д.), мы видим комплексное проявление недостаточной сформированности общелогических и формально-логических методов познания. Отметим, что даже разовый письменный или устный опрос школьников (студентов), выясняющий ход их мысли в процессе решения задачи, имеет образовательную ценность, но естественно ожидать более значимых результатов при системном акцентировании внимания на общелогическую и формально-логическую составляющую.

Список литературы

1. Брунер Дж. Психология познания. М. : Прогресс, 1977. 412 с.

2. Пиаже Ж. Речь и мышление ребёнка. М. : Римис, 2008. 416 с.

Алгебры бинарных изолирующих формул для теорий гомоморфных произведений симплексов

Емельянов Дмитрий Юрьевич

Новосибирский государственный технический университет, e-mail: dima-pavlyk@mail.ru

Продолжается изучение алгебр бинарных изолирующих формул [1] для произведений графов.

Определение 1. *Гомоморфное произведение графов [2]* $G_1 = (V_1, E_1)$ *и* $G_2 = (V_2, E_2)$ *с гомоморфизмом* $f : V_1 \to V_2$ *- это граф* $H = (V_H, E_H)$*, где: множество вершин* $V_H = \{(v, u) \mid v \in V_1, u \in V_2\}$*;*
множество ребер $E_H = E_1^H \cup E_2^H$*, где* $E_1^H = \{(v_1, u_1), (v_2, u_2)) \mid (v_1, v_2) \in E_1$, $f(v_1) = f(v_2)\}$, $E_2^H = \{(v, u_1), (v, u_2)) \mid v \in V_1, u_1, u_2 \in V_2, f(v) = u_1u_2\}$.

Описаны алгебры бинарных изолирующих формул [2] для теорий гомоморфных произведений симплекса. Рассмотрены умножения для графов правильных многогранников от отрезка до шестиугольника на симплекс. Для них получены таблицы Кэли гомоморфных произведений. В некоторых вариациях произведений исходный граф может содержать симплекс, тогда алгебра будет изоморфна алгебре симплексов [3]. При других умножениях симплекса на графы правильных многоугольниках, как правило, возникает симплекс в получаемом графе, а при гомоморфном произведении при умножении на симплекс возникают вариации которые не содержать симплексы.

Теорема 1. *Если* S *— теория гомоморфного произведения графов,* $\mathfrak{M}$ *— алгебра бинарных изолирующих формул теории* T*,то алгебра* $\mathfrak{M}$ *будет изоморфна алгебре симплексов* $\mathfrak{S}$ *или алгебре* $\mathfrak{H}$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 24-21-00096).

Список литературы

1. Емельянов Д. Ю., Кулпешов Б., Судоплатов С. В. Алгебры бинарных формул : монография. Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2023. 330 с. DOI: 10.17212/978-5-7782-5028-4

2. Roberson D. E., Mancinska L. Graph Homomorphisms for Quantum Players. 2012.

3. Емельянов Д. Ю. Алгебры распределений бинарных изолирующих формул для теорий симплексов // Algebra and Model Theory 11: Collection of papers. Novosibirsk : NSTU Publisher, 2017. P. 66–74.

Аксиоматизируемость класса конгруэнц-перестановочных унаров

Ефремов Евгений Леонидович, Обидова Шахноза Комиловна
Дальневосточный федеральный университет, e-mail: efremov.el@dvfu.ru, obidova.sk@dvfu.ru

Умножение конгруэнций алгебраической структуры в общем случае не является коммутативной операцией. Алгебраические структуры, для которых умножение конгруэнций коммутативно, называются *конгруэнц-перестановочными*. Многие классы алгебр состоят из конгруэнц-перестановочных алгебр, однако класс унаров содержит унары, не являющиеся конгруэнц-перестановочными.

Одним из стандартных вопросов теории моделей алгебраических структур является вопрос аксиоматизируемости класса этих структур. Аксиоматизируемость различных классов полигонов над моноидом рассмотрена Степановой А. А., Ефремовым Е. Л., Птаховым Д. О., Gould V. и др. Среди последних работ в этой теме можно выделить [1; 2]. Строение конгруэнц-перестановочных полигонов над коммутативным моноидом и над группой изучено Степановой А. А. и Чекановым С. Г. в работе [3]. Некоторые алгебраические и теоретико-модельные свойства конгруэнц-перестановочных унаров рассмотрены в работах [4; 5] Шамича Н. И. и Ефремова Е. Л. В настоящей работе приводится критерий аксиоматизируемости класса конгруэнц-перестановочных унаров.

Унаром называется алгебра $\mathcal{A}$ сигнатуры $\Sigma = \{f^{(1)}\}$ с одной одноместной операцией f. Всюду дальше под $\mathcal{A}$ будем понимать унар $\langle A; f^{(1)}\rangle$. Введём обозначения: $f^0a = a$, $f^{n+1}a = ff^na$ для всех $n \in \omega$, $a \in A$. Унар $\mathcal{A}$ называется *связным*, если для любых $a, b \in A$ существуют $n, m \in \omega$ такие что $f^na = f^mb$.

Подунар $\mathcal{C} = \langle C; f^{(1)}\rangle$ унара $\mathcal{A}$ называется *циклом длины* $n \in \mathbb{N}$, если $C = \{c_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$, $fc_i = c_{i+1}$ для всех i, $1 \leqslant i < n$, и $fc_n = c_1$. *Петлёй* называется цикл длины 1.

Хвостом элемента $a_0 \in A$ называется множество $B = \{a_i \mid i \in I\} \subseteq A$, где

— $I = \mathbb{Z}^-$ или $I = \{-1, \dots, -n\}$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$,

— $fa_i = a_{i+1}$ для всех $i \in I$,

— $fa_0 \notin B$,

— $a_i \neq a_j$ для всех различных $i, j \in I$,

— если $I = \{-1, \dots, -n\}$ то b_{-n} без прообразов.

Если $I = \{-1, \dots, -n\}$, то B называется *хвостом длины* n; если $I = \mathbb{Z}^-$ — *бесконечным хвостом*. Элемент a_0 называется *началом* хвоста B.

Утверждение 1. *Связный унар $\mathcal{A}$ конгруэнц-перестановочен тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}$ имеет один из следующих видов:*

— цикл произвольной длины,

— петля с одним хвостом.

Утверждение 2. *Несвязный унар $\mathcal{A}$ конгруэнц-перестановочен тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}$ — объединение двух циклов взаимно простых длин.*

Класс унаров $\mathcal{K}$ называется *аксиоматизируемым*, если существует такое множество предложений Γ сигнатуры $\{f^{(1)}\}$, что для любого унара $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A} \in \mathcal{K} \Longleftrightarrow \mathcal{A} \vDash \Phi \text{ для всех } \Phi \in \Gamma.$$

Утверждение 3. *Если $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — унары и $\mathcal{A}$ конечен, то $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ тогда и толко тогда, когда $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$.*

Все необходимые сведения можно найти, например, в [3; 4; 6].

Теорема. *Пусть $\mathcal{K}$ — класс конгруэнц-перестановочных унаров. Класс $\mathcal{K}$ аксиоматизируем тогда и только тогда, когда $\mathcal{K}$ замкнут относительно изоморфизмов и существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что*

$$\mathcal{A} \in \mathcal{K} \Rightarrow |\mathcal{A}| \leqslant n.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathcal{K}$ — аксиоматизируемый класс конгруэнц перестановочных унаров. Докажем, что мощности всех унаров класса $\mathcal{K}$ ограничены некоторым натуральным числом n.

Лемма 1. *Имеют место следующие факты.*

1. $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$ и $\mathcal{A}$ содержит петлю $\Rightarrow |\mathcal{A}| < \omega$.

2. $\exists\, n_1 \in \mathbb{N}\ \big(\mathcal{A}$ — цикл длины k, $\mathcal{A} \in \mathcal{K} \Rightarrow k \leqslant n_1\big)$.

3. $\exists\, n_2 \in \mathbb{N}\ \big(\mathcal{A}$ — петля с хвостом длины k, $\mathcal{A} \in \mathcal{K} \Rightarrow k \leqslant n_2\big)$.

4. $\exists\, n_3 \in \mathbb{N}\ \big(\mathcal{A}$ — объединение двух циклов длин k и l, $\mathcal{A} \in \mathcal{K} \Rightarrow k, l \leqslant n_3\big)$.

Пусть $n = \max\{n_1, n_2 + 1, 2n_3\}$, $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$. Согласно утверждениям 1 и 2 и лемме 1 (п. 1) для $\mathcal{A}$ имеет место один из следующих случаев.

Случай 1: $\mathcal{A}$ — цикл длины k. Тогда по лемме 1 (п. 2) $k \leqslant n_1$ и

$$|\mathcal{A}| \leqslant n_1 \leqslant n.$$

Случай 2: $\mathcal{A}$ — петля с хвостом длины k. Тогда по лемме 1 (п. 3) $k \leqslant n_2$ и

$$|\mathcal{A}| \leqslant n_2 + 1 \leqslant n.$$

Случай 3: $\mathcal{A}$ — объединение двух циклов длин k и l. Тогда по лемме 1 (п. 4) $k \leqslant n_3$ и $l \leqslant n_3$. Следовательно,

$$|\mathcal{A}| = m + k \leqslant n_3 + n_3 = 2n_3 \leqslant n.$$

Таким образом,

$$\mathcal{A} \in \mathcal{K} \Rightarrow |\mathcal{A}| \leqslant n.$$

Согласно критерию аксиоматизируемости $\mathcal{K}$ замкнут относительно элементарной эквивалентности. Так как все унары класса $\mathcal{K}$ конечны, то согласно утверждению 3 $\mathcal{K}$ замкнут относительно изоморфизмов.

Достаточность. Пусть класс $\mathcal{K}$ конгруэнц-перестановочных унаров замкнут относительно изоморфизмов и количество элементов в каждом унаре класса $\mathcal{K}$ ограничено числом $n \in \mathbb{N}$. Введём следующие обозначения: для $k, m \in \{1, 2, ..., n\}$

$$\varphi_k(x_1, \ldots, x_k) \leftrightharpoons \bigwedge_{\substack{i,j \leqslant k \\ i \neq j}} x_i \neq x_j \wedge \bigwedge_{i<k} f x_i = x_{i+1} \wedge f x_k = x_1,$$

$$\Phi_k \leftrightharpoons \exists x_1 \ldots \exists x_k (\varphi_k(x_1, \ldots, x_k) \wedge \forall y \bigvee_{i \leqslant k} y = x_i),$$

$$\Psi_k \leftrightharpoons \exists x_0 \exists x_1 \ldots \exists x_k (\bigwedge_{\substack{i,j \leqslant k \\ i \neq j}} x_i \neq x_j \wedge \bigwedge_{i<k} f x_{i+1} = x_i \wedge \\ \wedge f x_0 = x_0 \wedge \forall y \bigvee_{i \leqslant k} y = x_i),$$

$$\Theta_{\{m,k\}} \leftrightharpoons \exists x_1 \ldots \exists x_m \exists z_1 \ldots \exists z_k (\bigwedge_{\substack{i \leqslant m \\ j \leqslant k}} x_i \neq z_j \wedge \\ \wedge \varphi_m(x_1, \ldots, x_m) \wedge \varphi_k(z_1, \ldots, z_k) \wedge \forall y (\bigvee_{i \leqslant m} y = x_i \vee \bigvee_{j \leqslant k} y = z_j),$$

Несложно показать, что имеет место следующая

Лемма 2. *Для любого унара $\mathcal{A}$ и для любых $k, m \in \{1, 2, ..., n\}$*

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models \Phi_k &\iff \mathcal{A} - \text{цикл длины } k, \\ \mathcal{A} \models \Psi_k &\iff \mathcal{A} - \text{петля с единственным хвостом длины } k, \\ \mathcal{A} \models \Theta_{\{m,k\}} &\iff \mathcal{A} - \text{объединение двух циклов длин } m \text{ и } k. \end{aligned}$$

Пусть

$$I_1 = \{k \in \mathbb{N} \mid \exists \mathcal{A} \in \mathcal{K} - \text{цикл длины } k\},$$

$$I_2 = \{k \in \mathbb{N} \mid \exists \mathcal{A} \in \mathcal{K} - \text{петля с хвостом длины } k\},$$

$$I_3 = \{\{m, k\} \subseteq \mathbb{N} \mid \exists \mathcal{A} \in \mathcal{K} - \text{объединение двух циклов длин} \\ m \text{ и } k, \text{НОД}(m, k) = 1\},$$

$$\Gamma \leftrightharpoons \bigvee_{k \in I_1} \Phi_k \vee \bigvee_{k \in I_2} \Psi_k \vee \bigvee_{\{m,k\} \in I_3} \Theta_{\{m,k\}}.$$

Тогда в силу замкнутости $\mathcal{K}$ относительно изоморфизмов

$$\mathcal{A} \in \mathcal{K} \Longleftrightarrow \mathcal{A} \models \Gamma.$$

По определению класс $\mathcal{K}$ аксиоматизируем. Теорема доказана. □

Работа выполнена в Дальневосточном центре математических исследований при финансовой поддержке Минобрнауки России, соглашение № 075-02-2024-1440 от 28 февраля 2024 года по реализации программ развития региональных научно-образовательных математических центров.

Список литературы

1. Ефремов Е. Л., Степанова А. А. Аксиоматизируемость класса слабо инъективных полигонов // Сибирский математический журнал. 2017. Т. 58, № 4. С. 785–795.

2. Степанова А. А., Ефремов Е. Л. Аксиоматизируемость класса подпрямо неразложимых полигонов над коммутативным моноидом // Алгебра и логика. 2023. Т. 62, № 2. С. 266–296.

3. Степанова А. А., Чеканов С. Г. Конгруэнц-перестановочные полигоны // Сибирский математический журнал. 2022. Т. 63, № 1. С. 202–208.

4. Шамич Н. И. Решётки конгруэнций конгруэнц-перестановочных унаров // Материалы Региональной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых учёных по естественным наукам. Владивосток, 15 апр. – 10 мая 2023 г. / отв. ред. В. Ю. Ермаченко. Владивосток : Изд-во Дальневост. федер. ун-та, 2023. С. 230–231.

5. Шамич Н. И., Ефремов Е. Л. Об аксиоматизируемости класса конгруэнц-перестановочных унаров // Синтаксис и семантика логических систем : материалы 7-й Междунар. школы-семинара. Владивосток, 1–5 авг. 2022 г. / отв. ред. Е. Л. Ефремов. Владивосток : Изд-во Дальневост. федер. ун-та, 2022. С. 56–57.

6. Ершов Ю. Л., Палютин Е. А. Математическая логика. 6-е изд., испр. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2011. 356 с.

Линейная ступенчатая логика знания $\mathcal{LTK}.sl$: семантика, fmp и унификация формул

Зверева Татьяна Юрьевна

Сибирский федеральный университет, e-mail: 3336259@gmail.com

В работе выполнено семантическое построение линейной многомодальной логики знания нетранзитивного «ступенчатого» времени $\mathcal{LTK}.sl$, доказаны финитная аппроксимируемость и p-морфность конечных фреймов бесконечным, установлена проективность унификации и её тип, получен вид проективного унификатора для унифицируемых формул в логике $\mathcal{LTK}.sl$ [1].

Семантическое описание логики $\mathcal{LTK}.sl$

Алфавит языка $L^{\mathcal{LTK}.sl}$ включает счётное множество пропозициональных переменных $Prop = \{p_1, \dots, p_n, \dots\}$, константы $\{\top, \bot\}$ скобки (,), стандартные булевы операции и следующий набор унарных модальных операторов: $\{N, \Box_1, \dots, \Box_n, \Box_e\}$.

$\mathcal{LTK}.sl$-фреймом назовём набор $F := \langle W_{\mathbb{N}}, \mathbf{Next}, R_e, R_1, \dots, R_n \rangle$, где

— $W_{\mathbb{N}} = \bigcup_{t \in \mathbb{N}} C_t$ не пересекающееся объединение сгустков C_t, пронумерованных натуральными числами: $C_{t_1} \cap C_{t_2} = \varnothing$, если $t_1 \neq t_2$;

— $\mathbf{Next}$ – нерефлексивное нетранзитивное отношение «следующее натуральное число»:

$$\forall a, b \in W : a\mathbf{Next}b \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{N}(a \in C_t \,\&\, b \in C_{t+1});$$

— $R_1, \dots, R_n$ – отношения знаний агентов;

— R_e – отношение эквивалентности на каждом сгустке;

Структура $\mathcal{LTK}.sl$-фреймов выглядит следующим образом:

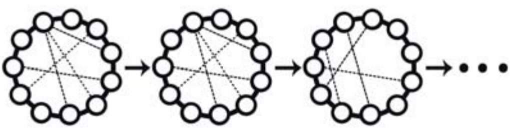


Рис. 1. $\mathcal{LTK}.sl$-фрейм

Моделью на $\mathcal{LTK}.sl$-фрейме F назовём пару $M := \langle F, V \rangle$, где V – означивание: $P \mapsto 2^{W_{\mathbb{N}}}$.

Логику $\mathcal{LTK}.sl$ определим как множество всех формул языка $L^{\mathcal{LTK}.sl}$ выполнимых на всех фреймах F.

Финитная аппроксимируемость в $\mathcal{LTK}.sl$

Логика $\mathcal{L}$ обладает *свойством конечной модели*, если $\mathcal{L}$ полна относительно класса конечных фреймов и позволяет рассматривать конечные варианты моделей вместо моделей неограниченной длины.

Характер временного отношения в совокупности с отношениями знаний на сгустках не позволяют в явном виде ограничиться классическими техниками p-морфизма или фильтрации для доказательства свойства *финитной аппроксимируемости.*

Было определено p-морфное отображение конечной $\mathcal{LTK}.sl$-модели M на конечную по времени и, используя технику фильтрации сгустков, построена модель со сгустками конечной мощности на p-морфном варианте, было доказано, что такая модель сохраняет истинность формул нашей логики.

Определение 1. *Отображение f фрейма $F := \langle W, \mathbf{Next}, R_e, R_1, \ldots, R_n\rangle$ на фрейм $F' := \langle W', R'_e, R'_1, \ldots, R'_n\rangle$ называется p-морфизмом, если выполняются следующие условия $\forall a, b \in W\ \forall R \in \{\mathbf{Next}, R_e, R_1, \ldots, R_n\}$:*

1. $a\,R\,b \Rightarrow f(a)R'f(b)$;

2. $f(a)R'f(b) \Rightarrow \exists c \in W[a\,R\,c \wedge f(c) = f(b)]$.

Ограниченный по времени фрейм F_{fin}, полученный применением техники p-морфизма представлен на рисунке 2.

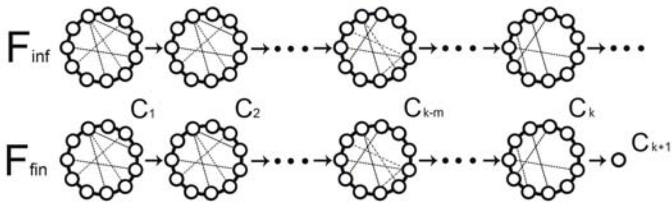


Рис. 2. Бесконечный фрейм F_{inf} и конечный фрейм F_{fin}

Доказано утверждение о p-морфности ограниченных по времени и бесконечных фреймов в логике.

Теорема 1. *Любой F_{fin} является p-морфным образом F_{inf}.*

Также доказано, что любая формула, опровержимая на бесконечной $\mathcal{LTK}.sl$-модели M, опровергается также и на N.

Теорема 2. *Пусть $M = \langle F_{inf}, V\rangle$ не ограниченная по времени $\mathcal{LTK}.sl$-модель, α произвольная формула модальной степени $d(\alpha) = m, m \in \omega$.*

Тогда $\forall x \in \bigcup_{j\in[1,k-m]} C_j \subset F_{inf}$ $(m < k)$ *справедливо:*

$$\langle M, x\rangle \not\models \alpha \Leftrightarrow \langle N, x\rangle \not\models \alpha,$$

где $N = \langle F_{fin}, V'\rangle = \langle \bigcup_{j\in[1,k+1]} C_j, \mathbf{Next}', R'_e, R'_1, \ldots, R'_n, V'\rangle$.

Чтобы завершить построение конечной модели, адекватной нашей логике, была применена техника фильтрации к фрейму F_{fin} и доказано следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть* $N = \langle \bigcup_{j\in[1,k+1]} C_j, \mathbf{Next}', R'_e, R'_1, \ldots, R'_n, V'\rangle$ *это p-морфная модель бесконечной* $\mathcal{LTK}.sl$*-модели* M, $\Phi \subseteq For(L^{\mathcal{LTK}.sl})$ *– замкнутое относительно подформул множество формул, модальная степень которых не превосходит* m $(m \in \omega, k > m)$,

$$N_\Phi = \left\langle \bigcup_{j\in[1,k+1]} C_{j_\Phi}, \mathbf{Next}'_\Phi, R'_{e_\Phi}, R'_{1_\Phi}, \ldots, R'_{n_\Phi}, V'_\Phi \right\rangle$$

– фильтрованный вариант модели N *множеством* Φ.
Тогда $\forall x \in \bigcup_{j\in[1,k-m]} C_j$, $\forall \alpha \in \Phi$*:*

$$\langle N, x\rangle \not\models \alpha \Leftrightarrow \langle N_\Phi, x\rangle \not\models \alpha.$$

Проективная унификация в $\mathcal{LTK}.sl$

Для изучения свойств проективной унификации в $\mathcal{LTK}.sl$ нами было переопределено понятие проективной формулы и, соответственно, проективной подстановки. Это необходимость связана с природой временного отношения в нашей логике, выраженного в семантике оператором N. В классическом определении отношение, соответствующее модальному оператору необходимости, должно быть транзитивным.

Определить проективный унификатор в логике удалось, использовав специальную семантическую конструкцию. Пусть формула φ – формула модальной степени $mod(\varphi) = n \to \exists n$ выполнимых $Next$, следовательно, для её проверки требуется $n + k + 1$ шаг. Модальность «выполняется всюду» $\Box\varphi$ может быть заменена на конструкцию $\bigwedge\limits_{i=0}^{m} N^i \Box_e\varphi$.

Определение 2. *Формула* $\varphi(p_1, \ldots, p_s)$ *называется проективной в* $\mathcal{LTK}.sl$, *если существует унификатор* τ *формулы* φ*, такой, что*

$$\bigwedge_{i=0}^{m} N^i \Box_e \varphi \to [p_i \equiv \tau(p_i)] \in \mathcal{LTK}.sl$$

для всех переменных $p_i \in Var(\varphi)$. *Унификатор* τ *называется проективным унификатором.*

Проективный унификатор определяет наиболее общий унификатор [2] и позволяет установить унитарный тип унификации в логике.

Следующая теорема показывает, что унифицируемость произвольной формулы $\varphi(p_1, \ldots, p_s)$ в $\mathcal{LTK}.sl$ может быть эффективно установлена с помощью корневого унификатора: $\forall p_i \in Var(\varphi)\ \sigma(p_i) \in \{\top, \bot\}$. Доказательство этой теоремы аналогично рассуждениям из [3] для случая предтабличных расширений $\mathcal{S}4$.

Теорема 3. *Если формула φ унифицируема в $\mathcal{LTK}.sl$, то φ имеет корневой унификатор.*

Было доказано утверждение о проективности унифицируемых формул в логике и определён вид проективной подстановки:

$$\sigma(p_i) := (\bigwedge_{i=0}^{k-m} N^i \Box_e \varphi \wedge p_i) \vee (\neg \bigwedge_{i=0}^{k-m} N^i \Box_e \varphi \wedge gu(p_i))$$

Теорема 4. *Любая унифицируемая формула в $\mathcal{LTK}.sl$ проективна.*

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение 075-02-2024-1429).

Список литературы

1. Bashmakov S. I., Zvereva T. Yu. Linear Step-like Logic of Knowledge LTK.sl // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2023. Vol. 20, N 2. P. 1361–1373.

2. Ghilardi S. Unification Through Projectivity // J. Logic Comput. 1997. Vol. 7, N 6.

3. Bashmakov S. I. Unification in pretabular extensions of S4 // Logica Universalis. 2021. N 15. P. 381–397.

Алгоритм поиска финальной вершины на обобщенном функциональном графе

Зубков Олег Владимирович

Иркутский государственный университет, e-mail: oleg.zubkov@mail.ru

Необходимые определения

Будем рассматривать ориентированный граф $G(V, E)$, у каждой вершины которого степень полуисхода равна 2. Эти две исходящих дуги пометим числами 1 и 2. Далее будем называть граф такого вида 2-исходящим. Вершины этого графа будем нумеровать с 1. Пусть число вершин графа G равно n, тогда число его дуг равно $2 * n$. В графе G допускаются петли и кратные дуги.

Выберем в качестве стартовой вершины некоторую произвольную вершину графа G, обозначим её v_{start}. Определим путь из этой вершины следующим образом: пусть мы в данный момент находимся в некоторой текущей вершине v_i. Если мы еще не проходили при построении текущего пути дугу, выходящую из v_i, помеченную 1, то мы переходим из v_i по этой дуге в следующую вершину пути v_{j1}. Если при построении текущего пути по дуге из v_i, помеченной 1, мы уже проходили, то переходим по дуге, помеченной 2 в следующую вершину пути v_{j2}. Если же мы проходили в текущем пути и по дуге 2, то считаем, что текущий путь закончен в данной вершине v_i. Эту вершину будем называть финальной для пути, начинающегося из v_{start} или просто финальной для v_{start}.

Задача заключается в построении эффективного алгоритма, находящего для каждой вершины v_i графа G финальную вершину для пути, начинающегося в v_i. Очевидно, что самым простым методом решения этой задачи является последовательный выбор каждой вершины графа как стартовой и дальнейшее моделирование прохождения пути с нахождением финальной вершины. После прохождения очередного пути и нахождения финальной вершины, все пометки сбрасываются и для следующей вершины мы ищем финальную независимо от предыдущих поисков. Так как в процессе прохождения одного пути каждая дуга будет пройдена не более одного раза, то сложность данного алгоритма для всех вершин можно оценить как $|V| * |E| = 2 * n^2 = O(n^2)$, что дает квадратичное решение задачи. Данная сложность решения нас не устраивает и алгоритм не считается эффективным.

Определение 1. *Циклической (эйлеровой) компонентой ориентированного 2-исходящего графа G будем называть любой его подграф, для которого выполняется следующее свойство: для любой вершины циклической компоненты верно, что она входит в него либо с одной входящей дугой исходного* *графа G и одной исходящей дугой, помеченной 1, либо эта вершина входит в него с двумя входящими дугами исходного графа G и двумя исходящими дугами, помеченными 1 и 2. Если дуга входит в циклическую компоненту, то в неё входят обе вершины, которые она соединяет.*

Утверждение 1. *Если мы стартуем из вершины v_{start}, находящейся в некоторой циклической компоненте 2-исходящего графа G, то при прохождении пути из неё мы пройдем по некоторым дугам этой компоненты и обязательно вернемся в вершину v_{start}. Если v_{start} входит в циклическую компоненту с одной входящей и одной исходящей дугой, то дальнейший путь из неё будет проходить по дуге, помеченной 2, если же v_{start} входит в циклическую компоненту с двумя входящими и исходящими дугами, то в процессе построения пути мы пройдем по обеим исходящим дугам и дважды вернемся в v_{start}, то есть в этом случае вершина v_{start} будет финальной для самой себя.*

Доказательство. При прохождении пути из указанной вершины v_{start} мы для каждой промежуточной вершины, кроме стартовой, будем входить в неё по некоторой дуге из циклической компоненты и обязательно выходить по соответственно помеченной дуге в следующую вершину этой же компоненты. Таким образом, выйти из этой циклической компоненты мы сможем только вернувшись в стартовую вершину v_{start}. □

Эффективный алгоритм поиска финальных вершин

Общее описание алгоритма и его корректность. Выберем произвольную вершину v_{start}, для которой еще не найдена финальная вершина. Пойдем из неё по определенному выше пути, отмечая все посещенные на данный момент вершины как актуальные для текущего пути. Если в какой-то момент мы придем в актуальную вершину v_i (то есть обнаружим цикл), то все вершины этого цикла, кроме v_i (той, из которой мы в этот цикл зашли), удаляем из списка актуальных, все дуги, по которым проходит этот цикл, объявляем принадлежащими циклической компоненте, после чего выходим из v_i по дуге, помеченной 2. Вершина v_i считается принадлежащей и циклической компоненте (по исходящей дуге 1) и множеству актуальных вершин по исходящей дуге 2.

Очевидно, что все вершины, оказавшиеся на цикле и дуги, по которым проходит этот цикл, образуют циклическую (эйлерову) компоненту. Эта компонента может дополняться новыми вершинами и дугами после прохождения и зацикливания в других актуальных вершинах или в этой же вершине v_i при вторичном зацикливании.

Очевидно, что в любой момент цепочка актуальных на данный момент вершин образует простую цепь. Дуги этой цепи будем называть прямыми дугами, а простую цепь из этих дуг будем называть прямым путем из стартовой вершины v_{start}.

Для любой вершины v_i верно ровно одно из трех следующих утверждений:

— если из этой вершины нельзя, следуя по пути из неё вернуться в неё, тогда прямой дугой из неё будет дуга, помеченная 1;

— если в эту вершину можно, следуя по пути из неё вернуться один раз, но второй раз нельзя, тогда прямая дуга из неё будет помечена 2;

— если в эту вершину можно вернуться, следуя по пути из неё два раза, тогда эта вершина будет финальной для себя.

В какой-то момент из текущей актуальной вершины v_{fin} обе исходящих дуги будут уже пройдены и путь в ней закончится. Это означает, что v_{fin} является финальной для v_{start}. Помимо этого, она является финальной для всех актуальных на данный момент вершин (в том числе и для себя), что будет обосновано в следующем абзаце. Для завершения данной попытки, вернемся по текущему прямому пути от финальной вершины до стартовой и для всех вершин прямого пути поставим финальной для них v_{fin}.

Далее до тех пор, пока для каких-то вершин графа G не найдена финальная вершина, выбираем произвольную такую вершину, объявляем её актуальной вершиной v_{start} и стартуем из неё в поисках финальной согласно предыдущему описанию. Ключевым моментом является то, что мы не проходим по уже пройденным ранее в других попытках (или в текущей попытке) дугам. Корректность этого можно обосновать при помощи Утверждения 1. Любой цикл из любой вершины будет пройден независимо от того, проходили ли мы по каким-то дугам этого цикла ранее или нет. Если часть дуг (или все дуги) этого цикла проходились ранее (в текущей или предыдущих попытках), то эти дуги находятся в некоторой циклической компоненте и попадание в вершину этой компоненты автоматически влечет выход из нее в этой же вершине. Это значит, что из любой вершины мы будем в итоге уходить (уже не возвращаясь) по её прямой дуге.

Если мы пришли в ещё не актуальную вершину v_t и из v_t мы еще не проходили по дуге 1, значит эта вершина еще не была ни разу посещена ни в одной попытке, объявляем её актуальной и выходим из неё по дуге 1.

Если мы пришли в ещё не актуальную вершину v_t, для которой еще не известна её финальная вершина и из v_t мы уже проходили по дуге 1, но не проходили из неё по дуге 2, то просто объявляем её актуальной и выходим из неё по дуге 2. Корректность этого следует из утверждения 1.

Если мы пришли в еще не актуальную вершину v_t, для которой уже известна финальная для неё v_{fin}, то эта v_{fin} будет финальной для v_t и для всех актуальных на данный момент вершин. Пройдем по ним и поставим для них финальной v_{fin}, закончим текущую попытку.

Если мы пришли в актуальную вершину v_t, для которой еще не известна финальная, то мы обнаружили очередной цикл, все вершины этого цикла (кроме v_t) удаляем из списка актуальных и добавляем дуги и вершины этого цикла к циклической компоненте. Так как вершина v_t актуальная, значит мы уже выходили из неё. Если пройдена только выходящая из неё дуга 1, а приходили в v_t мы по некоторой дуге e_{k1}, то вершина v_t попадает в циклическую компоненту с входящей дугой e_{k1} и выходящей из неё дугой 1, а так же v_t входит в текущий прямой путь с входящей дугой e_{k2}, по которой мы только что пришли в v_t и выходящей из неё дугой 2. Если же из v_t мы проходили по обеим выходящим дугам, то v_t является финальной для себя и множества всех актуальных на данный момент вершин.

При выполнении данного алгоритма мы пройдем по каждой дуге не более двух раз (в прямом направлении при построении пути и обратном направлении при удалении меток актуальности при переносе вершин из множества актуальных в циклическую компоненту и установке метки финиша для актуальных вершин), по этой причине сложность этого алгоритма равна $O(n)$ суммарно для всех вершин.

О пространственно-временных скрытых вероятностных моделях

Кириченко Константин Дмитриевич

Иркутский государственный университет, e-mail: constkir@gmail.com

Непосредственным стимулом для разработки данного класса моделей стала потребность в предсказании распространения бешенства на основе статистики заболеваемости в Забайкалье и на Дальнем Востоке. Данная задача была озвучена в ходе встречи с сотрудниками кафедры эпидемиологии Иркутского государственного медицинского университета. В связи с этим в качестве примера одной из моделей рассматриваемого класса в настоящей работе будут использованы данные именно для этой задачи.

Бешенство является вирусным заболеванием, которое характеризуется длительным инкубационным периодом и стопроцентной летальностью. В рассматриваемом регионе основными переносчиками данного заболевания в дикой природе являются лисы. В связи с этим модель должна учитывать географические и климатические факторы местности, влияющие на поведение лис, часть из которых изменяется во времени. Наиболее логичным для данной задачи представляется использование вероятностных скрытых моделей. Напомним, что модель называется скрытой, если ее состояние неизвестно наблюдателю, однако он может фиксировать ее выходные результаты, которые также носят вероятностный характер. Наиболее известным видом скрытых моделей являются скрытые Марковские модели [1]

Скрытые состояния модели описываются как набор неизвестных значений $s(x, y, t) \in S$, где x и y — географические координаты некоторой точки, t — время, а S — множество допустимых состояний. В нашем случае в качестве S можно взять количество зараженных животных в географических окрестностях данной точки или их долю, или любую другую величину, влияющую на шанс заразиться бешенством. В любом случае в нашей модели эти значения будут рассматриваться как некоторые случайные величины.

Логичным выглядит предположение, что уровень зараженности в точке (x, y) в момент времени $t + 1$ зависит от уровня зараженности в момент времени t для точек находящихся в некоторой окрестности. Множество таких точек мы обозначим $U(x, y)$. Если используется регулярная сетка точек, то в качестве $U(x, y)$ можно взять, например, четыре точки, смежные по сторонам сетки с (x, y). Если точек будет больше, то потребуется ввести некоторый коэффициент $r(x, y, x', y')$ обратно пропорциональный расстоянию между точками (x, y) и (x', y').

$$s(x,y,t+1) = \sum_{(x',y') \in U(x,y)} r(x,y,x',y') f(s(x',y',t), \lambda_1(x,y,t), \ldots, \lambda_n(x,y,t))$$

Здесь $\lambda_i(x,y,t) \in \Lambda_i$ — некоторый параметр, выбираемый из конечного множества параметров в зависимости от географических характеристик точки или момента времени. В случае с моделью распространения бешенства некоторое множество Λ может содержать несколько параметров в зависимости, например, от вида ландшафта: сельхозугодья, леса, луга. В зависимости от этого в формулу будет подставлен соответствующий параметр. Таким образом, значения для точек, которые являются различными в пространстве или времени, но при этом находятся в одинаковых условиях, будут вычисляться по одним и тем же формулам.

В данной формуле $f(s(x',y',t), \lambda_1(x,y,t), \ldots, \lambda_n(x,y,t))$ — линейная функция относительно $s(x',y',t)$. В том случае, если $s(x,y,t)$ — скаляр, то

$$f(s(x',y',t), \lambda_1(x,y,t), \ldots, \lambda_n(x,y,t)) = (\sum_{i=1}^{n} \lambda_n(x,y,t)) s(x',y',t)$$

Начальным состоянием модели является множество значений $s(x,y,0)$. Здесь мы предполагаем, что все эти значения тем или иным способом заданы.

Таким образом, для получения прогноза нам остается подобрать множество параметров модели $\Lambda = \cup \Lambda_i$. Данная задача может быть решена эмпирически. Для рассматриваемой в качестве примера задачи прогнозирования бешенства программная реализация модели, сбор необходимой информации и подбор параметров были выполнены Холмовским А.В. в рамках выпускной квалификационной работы бакалавра.

Однако представляет большой интерес задача автоматического подбора параметров по статистическим данным, которая может интерпретироваться, как задача машинного обучения. В этом случае придется учитывать скрытый характер модели, поскольку в случае рассматриваемого примера отсутствие статистики по случаям заражения может быть обусловлено слабой заселенностью местности или климатическими факторами.

По аналогии с функцией f определим линейную функцию g

$$g(s(x,y,t), \gamma_1(x,y,t), \ldots, \gamma_k(x,y,t))$$

для вычисления вероятности происхождения изучаемого события в точке (x,y) в момент t. Здесь $\gamma_i(x,y,t)$ — константы, на выбор которых влияет место и время события, например, удаленность от населенных пунктов или время года. Посчитаем с ее помощью искомые вероятности $p(x,y,t)$ в каждой точке в каждый момент времени.

Теперь можно решать задачу подбора параметров модели на основе метода максимального правдоподобия в теории вероятностей. Функцию правдоподобия можно определить стандартным способом

$$F(\Lambda, \Gamma) = \prod_{t=a}^{b} \prod_{(x,y)} p(x,y,t)v(x,y,t) + (1 - p(x,y,t))(1 - v(x,y,t))$$

Здесь $v(x,y,t)$ — константы равные единице, если в заданной точке в заданное время фиксировались случаи заражения, и равные нулю в противном случае.

Процесс обучения модели заключается в подборе параметров, при которых функция правдоподобия достигает максимума.

$$F(\Lambda, \Gamma) \to \max$$

Для решения задачи оптимизации предполагается использовать метод градиентного подъема, что потребует нахождения частных производных от функции правдоподобия по каждому из параметров модели. Для этого предполагается использовать концепцию дифференцируемого программирования. [2]

Список литературы

1. Baum L. E. Petrie T. Statistical Inference for Probabilistic Functions of Finite State Markov Chains. // The Annals of Mathematical Statistics. 1966. Vol. 37, N 6. P. 1554–1563.

2. Differentiable Programming Manifesto / Richard Wei, Dan Zheng, Marc Rasi, Bart Chrzaszcz. Available at: https://github.com/swift-lang/swift/blob/main/docs/DifferentiableProgramming.md (date of access: 15.07.2024)

О псевдо-счетно-категоричных формулах и теориях

Кулпешов Бейбут Шайыкович[1], Павлюк Инесса Ивановна[2], Судоплатов Сергей Владимирович[3]

[1] Институт математики и математического моделирования, Казахстанско-Британский технический университет, e-mail: b.kulpeshov@kbtu.kz
[2] Новосибирский государственный технический университет, e-mail: pavlyuk@corp.nstu.ru
[3] Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирский государственный технический университет, e-mail: sudoplat@math.nsc.ru

В работах [1; 2] введены и исследованы понятия аппроксимации теории и аппроксимирующей формулы соответственно. Эти понятия имеют адаптацию к произвольному семейству теорий данной сигнатуры, в частности, к произвольному семейству теорий конечных структур, которые задают псевдоконечные теории на основе аппроксимаций псевдоконечными формулами [3]. В данной работе изучаются аппроксимации псевдо-счетно-категоричных теорий [4], т. е. теорий, аппроксимируемых счетно категоричными теориями, посредством формул, выполнимых в моделях счетно категоричных теорий. Такие формулы называются *псевдо-счетно-категоричными.* Исследованы синтаксические и семантические возможности данных формул, свойства таких формул, аппроксимации теорий с помощью этих формул, включая псевдо-счетно-категоричные упорядоченные теории, теории абелевых групп и модулей. Получено описание канонических представителей псевдо-счетно-категоричных упорядоченных теорий. Изучены возможности сохранения и нарушения псевдо-счетной категоричности при обогащениях и обеднениях теорий. Описаны счетные спектры псевдо-счетно-категоричных теорий.

Всюду далее мы рассматриваем элементарные полные теории сигнатуры Σ, причем эта сигнатура для семейства теорий $\mathcal{T}$ обозначается через $\Sigma(\mathcal{T})$. Через $\mathcal{T}_\Sigma$ обозначается множество всех полных теорий сигнатуры Σ.

Обозначим через $\mathcal{T}_\Sigma^{\rm cc}$ множество всех счетно категоричных теорий сигнатуры Σ, имеющих счетные модели.

Определение 1. Для семейства $\mathcal{T}_\Sigma^{\rm cc}$ формула $\varphi = \varphi(\overline{x})$ называется *псевдо-$\aleph_0$- категоричной* или *псевдо-счетно-категоричной*, если φ выполняется в модели некоторой предельной точки T семейства $\mathcal{T}_\Sigma^{\rm cc}$, не являющейся счетно категоричной теорией.

При самостоятельном рассмотрении формула φ называется *псевдо-$\aleph_0$-категоричной* или *псевдо-счетно-категоричной*, если она является псевдо-$\aleph_0$-категоричной относительно подходящей сигнатуры $\Sigma \supseteq \Sigma(\varphi)$.

Замечание 1. Нетрудно заметить, что совместные бескванторные формулы имеют бесконечные счетно категоричные модели и при взятии подходящих сигнатур становятся псевдо-счетно-категоричными. Это означает, что любая совместная $\exists$-формула, т. е. совместная формула вида $\exists x_1 \ldots \exists x_k \varphi$, где φ — бескванторная формула, является псевдо-счетно-категоричной относительно некоторой сигнатуры. Для $\forall$-формул, т. е. формул вида $\forall x_1 \ldots \forall x_k \varphi$, где φ — бескванторная формула, это свойство не выполняется, поскольку, например, формула $\forall x \forall y\, x \approx y$ не имеет бесконечных моделей. Эта формула показывает, что некоторые формулы, например, формула $\neg \forall x \forall y\, x \approx y$, не сохраняют свойство псевдо-счетной категоричности при навешивании отрицания. Вместе с тем, как замечено для бескванторных формул, навешивание отрицания для таких формул сохраняет псевдо-счетную категоричность.

Определение 2. [4] Элементарная теория T бесконечной структуры $\mathcal{M}$, не являющейся $\aleph_0$-категоричной, называется *псевдо-$\aleph_0$-категоричной* или *псевдо-счетно- категоричной*, если любое предложение, истинное в $\mathcal{M}$, имеет бесконечную $\aleph_0$-категоричную модель $\mathcal{N}$. При этом модели $\mathcal{N}$ называются *аппроксимациями* модели $\mathcal{M}$, а сама модель $\mathcal{M}$ называется *псевдо-$\aleph_0$-категоричной.*

Обозначим через Σ^1 произвольную сигнатуру, состоящую из константных символов c_i, $i \in I$, а также нульместных и одноместных предикатных символов P_j, $j \in J$.

Теорема 1. *Любая теория T сигнатуры Σ^1 является псевдо-$\aleph_0$-категоричной тогда и только тогда, когда T не имеет конечных моделей и не является $\aleph_0$-категоричной.*

Рассмотрим класс $\mathcal{T}_{\rm pcc}$ псевдо-$\aleph_0$-категоричных теорий и его дополнение $\overline{\mathcal{T}}_{\rm pcc}$ в классе всех теорий, не являющихся счетно-категоричными и не имеющими конечных моделей.

Теорема 2. *Для любой сигнатуры Σ имеет место $\overline{\mathcal{T}}_{\rm pcc} \cap \mathcal{T}_\Sigma \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда Σ содержит хотя бы один функциональный символ местности $\geqslant 1$ или хотя бы один предикатный символ местности $\geqslant 2$.*

Теорема 3. 1. *Если теория T принадлежит классу $\mathcal{T}_{\rm pcc}$, то любое ее обогащение T' либо принадлежит классу $\mathcal{T}_{\rm pcc}$, либо принадлежит классу $\overline{\mathcal{T}}_{\rm pcc}$, в зависимости от того, отсутствует или присутствует в T' формула, нарушающая псевдо-счетную категоричность.*

2. *Если теория T принадлежит классу $\overline{\mathcal{T}}_{\rm pcc}$, то любое ее обогащение T' также принадлежит этому классу, а ее обеднения T'' могут оставаться в классе $\overline{\mathcal{T}}_{\rm pcc}$, попадать в класс $\mathcal{T}_{\rm pcc}$ или являться счетно категоричными, в зависимости от того, сохраняются ли в T'' формулы, нарушающие псевдо-счетную категоричность, и сохраняются ли в T'' формулы, нарушающие счетную категоричность.*

Теорема 4. *Для любой счетно категоричной теории T любое ее константное обогащение T' либо счетно категорично, если добавляется лишь конечное число попарно различных констант, либо псевдо-счетно-категорично, т. е. принадлежит классу $\mathcal{T}_{\mathrm{pcc}}$, если добавляется бесконечное число попарно различных констант.*

Вспомним понятие *слабой о-минимальности*, первоначально исследованное в [5]. *Слабо о-минимальной структурой* называется линейно упорядоченная структура $\mathcal{M} = \langle M, <, \ldots \rangle$ такая, что любое определимое (с параметрами) подмножество структуры $\mathcal{M}$ является объединением конечного числа выпуклых множеств в $\mathcal{M}$. Напомним, что такая структура $\mathcal{M}$ называется *о-минимальной* [6], если любое определимое (с параметрами) подмножество структуры $\mathcal{M}$ является объединением конечного числа интервалов и точек в $\mathcal{M}$. Теория T называется *о-минимальной* (*слабо о-минимальной*), если каждая модель теории T является о-минимальной (слабо о-минимальной). Таким образом, слабая о-минимальность обобщает понятие о-минимальности. Вещественно замкнутые поля с собственным выпуклым кольцом нормирования обеспечивают важный пример слабо о-минимальных (не о-минимальных) структур [7].

Теорема 5. *Пусть $\mathcal{M} = \langle M, < \rangle$ — слабо о-минимальный, счетный, не $\aleph_0$-категоричный линейный порядок. Тогда теория* $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ *псевдо-$\aleph_0$-категорична тогда и только тогда, когда $\mathcal{M}$ есть конкатенация n_1 порядков $\mathbb{Q}$, n_2 порядков $\omega + \omega^*$ и n_3 конечных порядков для некоторых $1 \leqslant n_1 < \omega$, $1 \leqslant n_2 < \omega$, $0 \leqslant n_3 < \omega$.*

Следствие 1. *Любой псевдо-$\aleph_0$-категоричный слабо о-минимальный линейный порядок является о-минимальным.*

Теорема 6. *Пусть $\mathcal{M} = \langle M, < \rangle$ — псевдо-$\aleph_0$-категоричный слабо о-минимальный линейный порядок, $\mathcal{M}'$ — обогащение структуры $\mathcal{M}$ конечным или счетным числом одноместных предикатов. Тогда если теория* $\mathrm{Th}(\mathcal{M}')$ *слабо о-минимальна, то эта теория псевдо-$\aleph_0$-категорична.*

Теорема 7. *Не существует вполне упорядоченного множества $\langle M, < \rangle$, элементарная теория которой является псевдо-$\aleph_0$-категоричной.*

Имеется конструктивное описание класса псевдо-$\aleph_0$-категоричных линейных порядков, являющихся моделями всевозможных псевдо-$\aleph_0$-категоричных теорий линейных порядков. Это множество теорий обозначается через PCCLO.

Теорема 8. *Любая элементарная теория T бесконечного не счетно-категоричного линейного порядка псевдо-$\aleph_0$-категорична тогда и только тогда, когда T принадлежит множеству* PCCLO.

На основе теорем Розенштейна и Баура [8; 9] устанавливаются следующие две теоремы:

Теорема 9. *Для любой полной теории T абелевых групп следующие условия эквивалентны:*

(1) *теория T псевдо-счетно-категорична;*

(2) *теория T имеет бесконечное число положительных значений шмелевских инвариантов $\alpha_{p,n}$, и при этом все положительные значения шмелевских инвариантов β_p и γ_p влекут $|\{n \mid \alpha_{p,n} \neq 0\}| = \omega$ и $\beta_p = \gamma_p = \omega$, а равенство $\varepsilon = 1$ влечет $|\{\langle p, n\rangle \mid \alpha_{p,n} \neq 0\}| = \omega$.*

Теорема 10. *Для любого счетного кольца R и счетного R-модуля A следующие условия эквивалентны:*

(i) *A является псевдо-$\aleph_0$-категоричным;*

(ii) *существуют конечные или псевдоконечные R-модули B_i, $i < \omega$, и кардиналы $\kappa_i \leqslant \omega$ такие, что $A = \bigoplus\limits_{i<\omega} B_i^{(\kappa_i)}$ и $\max\{\kappa_i \mid i < \omega\} = \omega$; при этом если количество нетривиальных слагаемых конечно, то некоторый R-модуль B_i является псевдоконечным.*

Напомним, что число попарно неизоморфных моделей теории T, имеющих мощность λ, обозначается через $I(T, \lambda)$, а функция $I(T, \cdot)$ называется *функцией спектра* теории T.

Теорема 11. *Для любого кардинала $\lambda \in (\omega \setminus \{0, 1, 2\}) \cup \{\omega, 2^\omega\}$ существует псевдо-счетно-категоричная теория T, у которой $I(T, \omega) = \lambda$.*

Данное исследование поддержано Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (Грант AP19674850), а также выполнено в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, проект № FWNF-2022-0012.

Список литературы

1. Sudoplatov S. V. Approximations of theories // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2020. Vol. 17. P. 715–725.

2. Sudoplatov S. V. Approximating formulae // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2024. Vol. 21, N 1. P. 463–480.

3. Markhabatov N. D., Sudoplatov S. V. Pseudofinite formulae // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. Vol. 43, N 12. P. 3583–3590.

4. Kulpeshov B. Sh., Pavlyuk In. I., Sudoplatov S. V. Ranks and approximations for families of ordered theories // Mathematical Notes (accepted).

5. Macpherson H. D., Marker D., Steinhorn C. Weakly o-minimal structures and real closed fields // Transactions of The American Mathematical Society. 2000. Vol. 352, N 12. P. 5435–5483.

6. Pillay A., Steinhorn C. Definable sets in ordered structures I // Transactions of the American Mathematical Society. 1986. Vol. 295, N 2. P. 565–592.

7. Dickmann M. Elimination of quantifiers for ordered valuation rings // The Journal of Symbolic Logic. 1987. Vol. 52. P. 116–128.

8. Rosenstein J. G. $\aleph_0$-categoricity of Groups // Journal of Algebra. 1973. Vol. 25. P. 435–467.

9. Baur W. $\aleph_0$-categorical modules // The Journal of Symbolic Logic. 1975. Vol. 40, N 2. P. 213–220.

О вариациях жесткости для линейных порядков

Кулпешов Бейбут Шайыкович[1], **Судоплатов Сергей Владимирович**[2]

[1] Институт математики и математического моделирования, Казахстанско-Британский технический университет, e-mail: b.kulpeshov@kbtu.kz
[2] Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирский государственный технический университет, e-mail: sudoplat@math.nsc.ru

Степени жесткости структур были введены в работе [1]. Структура $\mathcal{M}$ называется *семантически A-жесткой*, где $A \subseteq M$, если любой A-автоморфизм $f \in \mathrm{Aut}(\mathcal{M})$ является тождественным. Структура $\mathcal{M}$ называется *синтаксически A-жесткой*, если $M = \mathrm{dcl}(A)$.

Очевидно, что если $\mathcal{M}$ — произвольная структура, то $\mathcal{M}$ является как семантически M-жесткой, так и синтаксически M-жесткой. Кроме того, $\mathcal{M}$ является синтаксически A-жесткой для любого $A \subseteq M$ с условием

$$M \setminus \mathrm{dcl}(\varnothing) \subseteq A.$$

Если $\mathcal{M}$ — произвольная бесконечная линейно упорядоченная структура, то $\mathcal{M}$ является семантически A-жесткой для любого коконечного множества $A \subseteq M$.

Структура $\mathcal{M}$ называется *$\forall$-семантически / $\forall$-синтаксически n-жесткой* (соответственно *$\exists$-семантически / $\exists$-синтаксически n-жесткой*), для $n \in \omega$, если $\mathcal{M}$ является семантически/синтаксически A-жесткой для любого (некоторого) $A \subseteq M$ с условием $|A| = n$. Наименьшее n такое, что $\mathcal{M}$ является Q-семантически / Q-синтаксически n-жесткой, где $Q \in \{\forall, \exists\}$, называется *$Q$-семантической / Q-синтаксической степенью жесткости*. Оно обозначается через $\deg^{Q\text{-sem}}_{\mathrm{rig}}(\mathcal{M})$ и $\deg^{Q\text{-synt}}_{\mathrm{rig}}(\mathcal{M})$ соответственно. При этом, если множество A задает значение Q-семантической / Q-синтаксической степени, то мы говорим, что A *свидетельствует* об этой степени. Если такого n не существует, полагаем $\deg^{Q\text{-sem}}_{\mathrm{rig}}(\mathcal{M}) = \infty$ и $\deg^{Q\text{-synt}}_{\mathrm{rig}}(\mathcal{M}) = \infty$ соответственно.

Следуя [1], для структуры $\mathcal{M}$, через $\deg_4(\mathcal{M})$ обозначим четверку

$$\left(\deg^{\exists\text{-sem}}_{\mathrm{rig}}(\mathcal{M}), \deg^{\exists\text{-synt}}_{\mathrm{rig}}(\mathcal{M}), \deg^{\forall\text{-sem}}_{\mathrm{rig}}(\mathcal{M}), \deg^{\forall\text{-synt}}_{\mathrm{rig}}(\mathcal{M})\right).$$

Теорема 1. [1]. *Пусть $\mathcal{M}$ — произвольная структура. Тогда:*

1. $\deg^{\exists\text{-sem}}_{\mathrm{rig}}(\mathcal{M}) \leqslant \deg^{\forall\text{-sem}}_{\mathrm{rig}}(\mathcal{M})$.
2. $\deg^{\exists\text{-synt}}_{\mathrm{rig}}(\mathcal{M}) \leqslant \deg^{\forall\text{-synt}}_{\mathrm{rig}}(\mathcal{M})$.
3. $\deg^{\exists\text{-sem}}_{\mathrm{rig}}(\mathcal{M}) \leqslant \deg^{\exists\text{-synt}}_{\mathrm{rig}}(\mathcal{M})$.
4. $\deg^{\forall\text{-sem}}_{\mathrm{rig}}(\mathcal{M}) \leqslant \deg^{\forall\text{-synt}}_{\mathrm{rig}}(\mathcal{M})$.
5. $\deg^{\forall\text{-sem}}_{\mathrm{rig}}(\mathcal{M}) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $\deg^{\exists\text{-sem}}_{\mathrm{rig}}(\mathcal{M}) = 0$.

6. $\deg_{\rm rig}^{\forall\text{-synt}}(\mathcal{M}) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $\deg_{\rm rig}^{\exists\text{-synt}}(\mathcal{M}) = 0$.

Следующая теорема описывает возможные значения степеней жесткости для вполне упорядоченных множеств:

Теорема 2. *Пусть* $\mathcal{M} = \langle M, < \rangle$ — *вполне упорядоченное множество. Тогда* $\deg_4(\mathcal{M}) = (0, 0, 0, 0)$, *если* $\mathcal{M}$ *не более чем счетно, и* $\deg_4(\mathcal{M}) = (0, \infty, 0, \infty)$ *в противном случае.*

Следующая теорема описывает возможные значения степеней жесткости для счетных линейных порядков:

Теорема 3. *Пусть* $\mathcal{M} = \langle M, < \rangle$ — *бесконечный счетный линейный порядок. Тогда возможны только следующие значения для* $\deg_4(\mathcal{M})$*:*

(1) $(0, 0, 0, 0)$;
(2) $(1, 1, m, m)$, *где* $m \in \omega \setminus \{0\}$;
(3) (m, m, ∞, ∞), *где* $m \in \omega \setminus \{0\}$;
(4) $(\infty, \infty, \infty, \infty)$.

Данное исследование поддержано Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (Грант AP19674850), а также выполнено в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, проект № FWNF-2022-0012.

Список литературы

1. Sudoplatov S. V. Variations of rigidity // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2024. Т. 47. С. 119–136.

Об алгебраических свойствах негативных функций

Морозов Андрей Сергеевич

Институт математики СО РАН, e-mail: morozov@math.nsc.ru

Изучаются свойства функций на натуральных числах с коперечислимыми графиками.

Изучению алгебраических свойств функций, вычислимых в том или ином обобщённом смысле, посвящено очень большое количество работ. Наиболее интересным направлением здесь является изучение вычислимых перестановок. Мы отметим лишь некоторые работы в этом направлении, нисколько не претендуя на полноту охвата. Изучению групп перестановок, вычислимых в некоторых тьюринговых идеалах, посвящены работы [1–4]. Свойствам примитивно рекурсивных перестановок посвящены работы [5–8]. Обзор результатов по группам вычислимых автоморфизмов вычислимых структур можно найти в работе [9].

В теории вычислимости хорошо известна классическая теорема о графике, утверждающая, что функция на натуральных числах частично рекурсивна тогда и только тогда, когда её график вычислимо перечислим. Здесь нас будут интересовать функции с коперечислимыми графиками, т. е. функции, графики которых имеют вычислимо перечислимые дополнения. Мы будем называть такие функции *негативными.*

Справедлива общая теорема о разложении $\mathbf{0}'$-вычислимых функций:

Теорема 1. *Для любой частичной $\mathbf{0}'$-вычислимой функции h существуют частичные негативные функции f_0 и f_1 такие, что*

1. *f_0 инъективна*
2. *$dom\, f_0 = dom\, h$*
3. *$range\, f_0 = dom\, f_1$, и это множество в.п.*
4. *f_0^{-1} и f_1 являются ограничениями всюду определённых вычислимых функций на свои области определения (но они не обязательно частично рекурсивны!).*
5. *$h = f_1 f_0$*

Теорема 2. *Инверсная полугруппа S всех частичных биекций из ω в ω, вычислимых относительно $\mathbf{0}'$, порождается своими негативными элементами. Более того, каждый элемент из S является произведением двух своих негативных элементов.*

Пока что не удаётся в полной мере перенести этот результат на перестановки на натуральных числах, но, тем не менее, справедливы следующие утверждения о разложении:

Теорема 3. *Пусть* h *— перестановка на* ω, $f \leqslant_T \mathbf{0}'$, *и существует бесконечная частично рекурсивная функция* h_0 *со свойством* $h_0 \subseteq f$. *Тогда* h *разлагается в произведение двух негативных перестановок.*

В частности, это выполнено для всех перестановок, тождественных на некотором бесконечном вычислимо перечислимом множестве.

Теорема 4. *Предположим, что*

1. *функция* $g(n,t)$ *вычислима*
2. *перестановка* f *удовлетворяет свойству* $f(n) = \lim_{t\to\infty} g(n,t)$
3. *существует* $m < \omega$ *такое, что для всех* x *выполнено*

$$|\{t \mid g(x,t+1) \neq g(x,t)\}| \leqslant m.$$

Тогда f *разлагается в произведение двух негативных перестановок.*

Теорема 5. *Множество всех негативных перестановок не образует группу по композиции.*

Теорема 6. *Существуют негативные не вычислимые перестановки.*

Теорема 7. *Группа* $G_{\mathbf{0}'}$ *всех* $\mathbf{0}'$*-вычислимых перестановок порождается негативными перестановками. Более того, каждая* $\mathbf{0}'$*-вычислимая перестановка является произведением не более, чем 8 негативных перестановок.*

Остаётся открытым вопрос о том, каково минимальное количество негативных перестановок в таких разложениях.

Работа выполнена в рамках базового проекта Минобрнауки РФ No. FWNF 2022–0012

Список литературы

1. Kent C. F. Constructive analogues of the group of permutations of the natural numbers // Trans. Amer. Math. Soc. 1962. Vol. 104, N 2. P. 347–362.

2. Файзрахманов М. Х. Морозов А. С., Пузаренко В. Г. Семейства перестановок и идеалы тьюринговых степеней // Алгебра и логика. 2022. Т. 6, № 6.

3. Морозов А. С. Перестановки и неявная определимость // Алгебра и логика. 1988. Т. 27, № 1. С. 19–36.

4. Морозов А. С. Тьюрингова сводимость как алгебраическая вложимость // Сибирский математический журнал. 1977. Т. 38, № 2. С. 362–364.

5. Kalimullin I. Sh. On Primitive Recursive Permutations // Computability and Models. The University Series in Mathematics. Boston, MA : Springer, 2003. P. 249–258.

6. Зайнетдинов Д. Х., Калимуллин И. Ш. О некоторых групповых свойствах примитивно рекурсивных перестановок // Труды Математического центра имени Н. И. Лобачевского. 2013. Т. 47.

7. Козьминых В. В. О представлении частично рекурсивных функций в виде суперпозиций // Алгебра и логика. 1972. Т. 11, № 3. С. 270–294.

8. Кузнецов А. В. О примитивно рекурсивных функциях большого размаха // Доклады Академии наук СССР. 1950. Т. 71, № 2. С. 233–236.

9. Morozov A. S. Groups of Computable Automorphisms // Handbook of Recursive Mathematics, Vol. 1 (Recursive Model Theory). Ser. Studies in Logic and Foundations of Mathematics. Amsterdam ; Lausanne; New York ; Oxford ; Shannon ; Singapore ; Tokyo : Elsevier, 1998. Vol. 1, Chapter 8. P. 311–345.

Порождающие множества инволюций групп лиева типа

Нужин Яков Нифантьевич

Сибирский федеральный университет, e-mail: nuzhin2008@rambler.ru

Группы лиева типа определяются как над полями, так и над коммутативными кольцами. Всего их 16 бесконечных серий, включая специальные, симплектические, ортогональные и унитарные группы. Вместе со знакопеременными группами подстановок и 26 спорадическими группами группы лиева типа над конечными полями исчерпывают все конечные простые неабелевы группы. В 1999 г. автор статьи записал в «Коуровской тетради» четыре следующие задачи [1, вопрос 14.69].

Для каждой конечной простой неабелевой группы найти минимум числа порождающих инволюций, удовлетворяющих дополнительному условию, в каждом из следующих случаев.

а) Произведение порождающих инволюций равно 1.

б) (Малле – Саксл – Вайгель). Порождающие инволюции сопряжены.

в) (Малле – Саксл – Вайгель). Выполнены свойства а) и б).

г) Инволюции сопряжены и две из них перестановочны.

Задачи б) и в) были впервые выделены как проблемы в работе Г. Малле, Я. Саксла, Т. Вайгеля [2]. В статьях автора (см., например, [3]) дается ответ для знакопеременных групп и групп лиева типа на следующий вопрос В. Д. Мазурова [1, вопрос 7.30]. *Какие конечные простые неабелевы группы порождаются тремя инволюциями, две из которых перестановочны?* Для спорадических групп окончательную точку поставил сам автор вопроса, предложив общий метод решения данной задачи, используя только таблицы характеров и известную информацию о максимальных подгруппах спорадических групп [4]. Далее группу, порожденную тремя инволюциями, две из которых перестановочны, будем называть $(2 \times 2, 2)$-порожденной.

На самом деле, задачи а)–г) и вопрос 7.30 тесно связаны (для задачи г) это видно невооруженным взглядом). Действительно, Дж. М. Уорд [5], решая задачу 14.69 в) для знакопеременных и спорадических групп, а также и для групп $PSL_n(q)$ при нечетном q и при определенных дополнительных ограничениях на n и q, использовал эквивалентность следующих двух утверждений, установленную им же. 1) Группа G порождается тремя инволюциями α, β, γ, первые две из которых перестановочны, и инволюции $\alpha, \beta, \gamma, \alpha\beta$ сопряжены. 2) Группа G порождается сопряженными инволюциями $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta$, две из которых совпадают, и $\alpha\beta\gamma\delta\theta = 1$.

С другой стороны, из того, что простая группа G является $(2 \times 2, 2)$-порожденной, легко следует, что минимальное число $n(G)$ порождающих инволюций, произведение которых равно 1, совпадает с 5. Поэтому в силу результатов автора о $(2 \times 2, 2)$-порожденности конечных простых групп лиева типа и указанных выше результатов Дж. М. Уорда следует, что задачу 14.69 а) оставалось решить только для некоторых классических групп размерности 3, 4 и 5. Это было сделано в работах [6; 7]. Таким образом, ответ на вопрос 14.69 а) известен и он следующий.

Теорема 1. *Пусть G — конечная простая неабелева группа. Тогда:*

1) $n(G) = 7$, если G есть $PSU_3(3^2)$;

2) $n(G) = 6$, если G есть A_7, A_8, M_{11}, M_{22}, M_{23}, McL, $PSU_3(5^2)$, $PSU_4(3^2)$, $PSU_5(2^2)$, $PSL_3(q)$ при $q-1$ не делящемся на 3, $PSU_3(q^2)$ при $q+1$ не делящемся на 3 и $q \neq 3$, $PSL_4(2^m)$ или $PSU_4(2^{2m})$;

3) $n(G) = 5$, если G отлична от групп из пунктов 1) и 2).

Конечно, ответ на вопрос 14.69 б) для простой группы G будет равен 3, если она порождается двумя элементами порядка 2 и 3. Такие группы обычно называются $(2, 3)$-порожденными. Известно, что всякая исключительная простая группа лиева типа над конечным полем, отличная от групп Судзуки, является $(2, 3)$-порожденной [8], а среди классических простых групп над конечными полями, отличных от $PSp_4(q)$, имеется лишь конечное число групп, которые не являются $(2, 3)$-порожденными [9]. К настоящему времени задача 14.69 б) решена [10] по модулю одной гипотезы М. А. Всемирнова. Установлено, что среди конечных простых неабелевых групп только знакопеременная группа степени 8 и трехмерная специальная унитарная группа над полем из 9 элементов не порождаются тройкой сопряженных инволюций.

К настоящему времени задача 14.69 в) полностью решена только для знакопеременных и спорадических групп. Ответ на вопрос 14.69 г) известен для групп с одним классом сопряженных инволюций и для $(2, 3)$-порожденных групп, которые не являются $(2 \times 2, 2)$-порожденными. В последнем случае он равен 4.

Конечные $(2 \times 2, 2)$-порожденные группы нашли различные приложения в теории графов и в геометрии. Они применяются в доказательстве существования гамильтоновых циклов в графах Кэли [11]. Также они возникают в качестве групп автоморфизмов регулярных карт [12]. М. Кондер и Д. Оливерос установили, что если конечная группа G является $(2 \times 2, 2)$-порожденной и не имеет циклических нормальных подгрупп, то G является группой автоморфизмов регулярного 3-политопа [13]. Поэтому актуальным является следующий вопрос. *Какие конечные почти простые группы являются $(2 \times 2, 2)$-порожденными?* Группа, лежащая между простой неабелевой группой и группой её автоморфизмов, называется почти простой группой. Список почти простых групп, для которых уже доказано, что они являются группами автоморфизмов регулярных n-политопов, можно найти в детальном обзоре Д. Лиманса [14]. Там же приведен ряд проблем и гипотез по этой тематике. Можно сформулировать общую проблему. *Какие конечные почти простые группы являются группами автоморфизмов регулярных n-политопов?* Данная проблема сведена к установлению так называемой C-струнности данной группы. Группа G называется C-группой, если она порождается множеством инволюций $I = \{\rho_1, \dots \rho_n\}$ и для любых подмножеств J и K из I справедливо равенство $\langle \rho_i \mid i \in J\rangle \cap \langle \rho_i \mid i \in K\rangle = \langle \rho_i \mid i \in J \cap K\rangle$. В свою очередь, C-группа называется C-струнной, если $(\rho_i\rho_j)^2 = 1$ при $|i-j| \geqslant 2$. Другими словами, если граф Кокстера C-группы является струной (цепью).

В 2002 г. автор данной заметки записал в «Коуровской тетради» вопрос 15.67. *Какие присоединенные группы Шевалле (нормального типа) над кольцом целых чисел порождаются тремя инволюциями, две из которых перестановочны?* Трудность этого вопроса заключается в том, что класс $(2\times 2, 2)$-порожденных групп замкнут относительно гомоморфных образов, если по определению единичную группу считаем таковой и не исключаем совпадения двух или всех трех инволюций. Поэтому, если мы нашли явно тройку порождающих инволюций группы Шевалле $G(\mathbb{Z})$ над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$ или доказали её существование, то её гомоморфные образы будут порождать группы Шевалле $G(\mathbb{Z}_p)$ над всеми кольцами вычетов $\mathbb{Z}_p$. Но инволюции в группах $G(\mathbb{Z}_p)$ при $p = 2$ и нечетном p имеют разную природу. В первом случае они унипотентные, во втором — полупростые. Стало быть, должны существовать универсальные порождающие. К настоящему времени ответ на вопрос 15.67 известен для групп Шевалле типа A_n, E_n и G_2. Можно рассматривать аналоги вопроса 15.67 над другими однопорожденными кольцами, в частности, над кольцом целых гауссовых чисел $\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$, которое порождается элементом i, где $i^2 = -1$. Так, в статье [15] завершено решение задачи о $(2 \times 2, 2)$-порожденности групп $SL_n(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$ и $PSL_n(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$.

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение 075-02-2024-1429).

Список литературы

1. The Kourovka notebook: Unsolved Problems in Group Theory / Sobolev Institute of Mathematics SB RAS ; [eds. V. D. Mazurov, E. I. Khukhro.] Novosibirsk, 2022. N 20.

2. Malle G., Saxl J., Weigel W. Generation of classical groups // Geom. Dedicata. 1994. Vol. 49. P. 85–116.

3. Нужин Я. Н. О порождающих множествах инволюций простых конечных групп // Алгебра и логика. 2019. Т. 58, № 3. С. 426–434.

4. Мазуров В. Д. О порождении спорадических простых групп тремя инволюциями, две из которых перестановочны // Алгебра и логика. 2003. Т. 44, № 1. С. 193–198.

5. Ward J. M. Generation of simple groups by conjugate involutions. Thesis of Doctor of Philosophi. Queen Mary college, University of London, 2009.

6. Гвоздев Р. И., Нужин Я. Н. Минимальное число порождающих инволюций, произведение которых равно 1 групп $PSL_3(2^m)$ и $PSU_3(q^2)$ // Сибирский математический журнал. 2023. Т. 64, № 6. С. 1160–1117.

7. Всемирнов М. А., Гвоздев Р. И., Нужин Я. Н. Минимальное число порождающих инволюций, произведение которых равно 1, конечных простых неабелевых групп // Доклады РАН (представлена).

8. Lubeck F., Malle G. (2, 3)-generation of exceptional groups // J. London Math. Soc. 1999. Vol. 59. P. 109–122.

9. Liebeck M. W., Shalev A. Classical groups, probabilistic methods, and the (2,3)-generation problem // Ann. Math. 1996. Vol. 144. P. 77–125.

10. Всемирнов М. А., Нужин Я. Н. Порождающие тройки сопряженных инволюций конечных простых групп // Алгебра и логика (принята к публикации).

11. Pak I., Radoicic R. Hamiltonian paths in Cayley graphs // Discrete Math. 2009. Vol. 309. P. 5501–5508.

12. Jones G. A. Finite simple automorphism groups of edge-transitive maps // J. of Algebra. 2022. Vol. 607. P. 454–472.

13. Conder M., Oliveros D. The intersection condition for regular polytopes // J. Combin. Theory Ser. A. 2013. Vol. 120, N 6. P. 1291–1304.

14. Leemans D. String C-group representations of almost simple groups: A survey // Contemporary Mathematics. 2021. Vol. 764. P. 157–178.

15. О порождении групп $SL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ и $PSL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ тремя инволюциями, две их которых перестановочны / М. А. Всемирнов, Р. И. Гвоздев, Я. Н. Нужин, Т. Б. Шаипова// II. Математические заметки. 2024. Т. 115, № 3. С. 317–329.

Мультиоперации: базовые понятия

Пантелеев Владимир Иннокентьевич[1], **Перязев Николай Алексеевич**[2]

[1] Бурятский государственный университет им. Доржи Банзарова, e-mail: vl.panteleyev@gmail.com
[2] Иркутский государственный университет, e-mail: nikolai.baikal@gmail.com

В работе будет дан обзор некоторых базовых понятий и обозначений в теории мультиопераций.

Операции и их обобщения

Пусть A — непустое множество и n — натуральное число.
Отображение $f : A^n \to A$ называется n-местной операцией на A.
Понятие операции допускает следующие обобщения [1]:
Пусть $\mathcal{B}(A)$ – множество всех подмножеств A.
Отображение $f : A^n \to \mathcal{B}(A)$ называется n-местной мультиоперацией на A.

Если при этом для любых $a_1, ..., a_n$ из A:
$|f(a_1, ..., a_n)| \geqslant 1 \rightleftharpoons f$ — n-местная гипероперация на A;
$|f(a_1, ..., a_n)| \leqslant 1 \rightleftharpoons f$ — n-местная квазиоперация на A;
$|f(a_1, ..., a_n)| = 1 \rightleftharpoons f$ — n-местная операция на A.

Будем использовать следующие обозначения для множеств мультиопераций на A размерности n:
$\mathcal{M}_A^{(n)}$ — множество мультиопераций;
$\mathcal{H}_A^{(n)}$ — множество гиперопераций;
$\mathcal{P}_A^{(n)}$ — множество квазиопераций;
$\mathcal{O}_A^{(n)}$ — множество операций.

$$\mathcal{R}_A = \bigcup_{n \in N} \mathcal{R}_A^{(n)},$$

где $\mathcal{R} \in \{\mathcal{M}, \mathcal{P}, \mathcal{H}, \mathcal{O}\}$.

Метаоперации на множестве мультиопераций

Квазиоперация размерности n на множестве $F \subseteq \mathcal{M}_A$ называется n-местной метаоперацией на F. Множество всех метаопераций на F обозначаем как Θ_F.
Приведем два примера метаопераций:

— пусть $f_0 \in \mathcal{M}_A^{(n)}$ и $f_1, ..., f_n \in \mathcal{M}_A^{(m)}$, тогда $(n+1)$-местная метаоперация суперпозиции:

$$s(f_0, f_1, ..., f_n)(a_1, ..., a_m) = \bigcup_{b_i \in f_i(a_1,...,a_m)} f_0(b_1, ..., b_n);$$

— пусть $f \in \mathcal{M}_A^{(n)}$, тогда унарная метаоперация разрешимости по i-тому аргументу, $i \in \{1, ..., n\}$:

$$\mu_i(f)(a_1, ..., a_n) = \{a \mid a_i \in f(a_1, .., a_{i-1}, a, a_{i+1}, .., a_n)\};$$

— пусть и $f, g \in \mathcal{M}_A^{(n)}$, тогда бинарная метаоперация пересечения:

$$\cap(f, g)(a_1, ..., a_n) = g(a_1, ..., a_n) \cap f(a_1, ..., a_n).$$

Алгебры и их обобщения

Пусть A — непустое множество.
$\langle\, A; F \,\rangle$ — алгебра над A, при $F \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{A}}$;
$\langle\, A; F \,\rangle$ — квазиалгебра над A, при $F \subseteq \mathcal{P}_{\mathcal{A}}$;
$\langle\, A; F \,\rangle$ — гипералгебра над A, при $F \subseteq \mathcal{H}_{\mathcal{A}}$;
$\langle\, A; F \,\rangle$ — мультиалгебра над A, при $F \subseteq \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$.

Пусть F — непустое подмножество $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$.
$\langle\, F; \Omega \,\rangle$ — метаалгебра над A, при $\Omega \subseteq \varTheta_F$.

Термы над мультиоперациями по метаоперациям

Терм над множеством мультиопераций $F \subseteq \mathcal{M}_A$ по множеству метаопераций $\Omega \subseteq \varTheta_F$ определяется индуктивно:

— если символом $\hat{f}$, обозначается мультиоперация $f \in F$, то $\hat{f}$ есть терм;

— если символом $\hat{q}$, обозначается n-местная метаоперация $q \in \varTheta_F$ и $t_1, ..., t_n$ есть термы, то $\hat{q}(t_1, ..., t_n)$ есть терм.

Каждый терм t определяет мультиоперацию $\check{t}$:

— если $t = \hat{f}$, то $\check{t} = f$;

— если $t = \hat{q}(t_1, ..., t_n)$, то $\check{t} = q(\check{t}_1, ..., \check{t}_n)$.

Оператор замыкания на множестве

Оператором замыкания на множестве A называется отображение C из $\mathcal{B}(A)$ в себя, для которого выполняются следующие условия:
1) $R \subseteq C(R)$;
2) если $R \subseteq Q$ то $C(R) \subseteq C(Q)$;
3) $C(C(R)) = C(R)$.

Множество $C(R)$ называется C-замыканием множества R.
Если $R = C(R)$, то говорят, что R является C-замкнутым.

Операторы замыкания на множестве мультиопераций

Пусть $F \subseteq \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ и $\Omega \subseteq \Theta_{\mathcal{M}_{\mathcal{A}}}$.

Алгебраическое замыкание F в метаалгебре $\langle\, \mathcal{M}_{\mathcal{A}}; \Omega\,\rangle$

$$\mathfrak{A}(F,\Omega) = \bigcap_{F\subseteq D} \{D \mid \langle\, D;\Omega\,\rangle \trianglelefteq \langle\, \mathcal{M}_{\mathcal{A}};\Omega\,\rangle\}$$

где $\trianglelefteq$ означает подметаалгебра.

Функциональное замыкание F по множеству метаопераций Ω

$\mathfrak{B}_0(F,\Omega) = F$

$\mathfrak{B}_i(F,\Omega) = \mathfrak{B}_{i-1}(F,\Omega) \bigcup \{q^n(f_1,...,f_n) | q^n \in \Omega, f_j \in \mathfrak{B}_{i-1}(F,\Omega)\}$

$$\mathfrak{B}(F,\Omega) = \bigcup_i \mathfrak{B}_i(F,\Omega)$$

Термальное замыкание F по множеству метаопераций Ω

$$\mathfrak{C}(F,\Omega) = \{\check{t}\ | t \text{ терм над } F \text{ по } \Omega\}$$

Несложно доказывается следующее утверждение:

Теорема 1. *Пусть* $F \subseteq \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ *и* $\Omega \subseteq \Theta_{\mathcal{M}_{\mathcal{A}}}$.
Тогда $\mathfrak{A}(F,\Omega) = \mathfrak{B}(F,\Omega) = \mathfrak{C}(F,\Omega)$.

Мультиоперации на конечных множествах

$f \in \mathcal{M}_A^{(n)}$, где $A = \{a_0, ..., a_{k-1}\}$ можно рассматривать как отображение

$$f : B^n \to C,$$

где $B = \{2^0, 2^1, ..., 2^{k-1}\}$ $C = \{0, 1, ..., 2^k - 1\}$, которое получаемое из f при кодировке

$$a_i \to 2^i;\ \ \varnothing \to 0;\ \ \{a_{i_1}, ..., a_{i_s}\} \to 2^{i_1} + ... + 2^{i_s}.$$

Говорим, что f мультиоперация размерности n, ранга k, где $k \geqslant 2$.

Обозначения: $\mathcal{M}_k^{(n)}$, $\mathcal{P}_k^{(n)}$, $\mathcal{H}_k^{(n)}$, $\mathcal{O}_k^{(n)}$ и $\mathcal{M}_k$, $\mathcal{P}_k$, $\mathcal{H}_k$, $\mathcal{O}_k$.

Для задания конкретной мультиоперации удобно пользоваться векторной формой. Если $f \in \mathcal{M}_k^{(n)}$, то $f = (\alpha_1, ..., \alpha_{k^n})$ векторная форма, где $\alpha_i = f(2^{i_1}, ..., 2^{i_n})$, и $(i_1, ..., i_n)$ есть представление $i-1$ n-разрядным числом в системе исчисления по основанию k.

Алгебры мультиопераций размерности n, ранга k

Предполагаем $n \geqslant 2$ и $k \geqslant 2$.

Алгеброй операций размерности n, ранга k называется любое $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}_k^{(n)}$, содержащее все n-местные проекции и замкнутое относительно метаоперации суперпозиции.

Алгеброй мультиопераций размерности n, ранга k называется любое $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}_k^{(n)}$, содержащее все n-местные проекции, пустую мультиоперацию и замкнутое относительно метаопераций суперпозиции и разрешимости.

Клоном (квазиалгеброй операций) ранга k называется любое $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}_k$, содержащее все проекции и замкнутое относительно метаоперации суперпозиции.

Мультиклоном (квазиалгеброй мультиопераций) ранга k называется любое $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}_k$, содержащее все проекции, пустую мультиоперацию и замкнутое относительно метаоперации суперпозиции.

Суперклоном ранга k называется любое $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}_k$, содержащее все проекции, пустую мультиоперацию и замкнутое относительно метаопераций суперпозиции и разрешимости по первому аргументу [2].

Операторы замыкания по суперпозиции и разрешимости на мультиоперациях конечного ранга

Замыкание множества $F \subseteq \mathcal{M}_k$, содержащих проекции и пустую мультиоперацию, по метаоперациям $s(f_0, f_1, ..., f_n)$ и $\mu_i(f)$ назовем алгебраическим замыканием.

Для операций выполняется тождественное равенство суперассоциативности:

$$s(s(f, g_1, \ldots, g_n), h_1, \ldots, h_m) = s(f, s(g_1, h_1, \ldots, h_m), \ldots, s(g_n, h_1, \ldots, h_m)).$$

Для мультиопераций выполняется только тождественное включение суперассоциативности [3]:

$$s(s(f, g_1, \ldots, g_n), h_1, \ldots, h_m) \subseteq s(f, s(g_1, h_1, \ldots, h_m), \ldots, s(g_n, h_1, \ldots, h_m)).$$

В силу этого тождества алгебраическое замыкание множества мультиопераций $\mathcal{R}$ можно ослабить (назовем логическим замыканием и обозначим $\lfloor \mathcal{R} \rfloor$), если допускать суперпозиции только следующих видов:
$s(f, f_1, ..., f_n)$ и $s(\mu_i(f), f_1, ..., f_n)$, где $f \in \mathcal{R}$ и $f_1, ..., f_n \in \lfloor \mathcal{R} \rfloor$.

Алгебраическое и логическое замыкания в множества мультиопераций $F_k^{(n)}$ в общем случае не совпадают [4]. Например, при $k = 3, n = 2$ для множества мультиопераций $\{(135\ 320\ 504),\ (100\ 020\ 003)\}$,в логическом замыкании получается 80 мультиопераций, а при алгебраическом 83 мультиопераций.

При этом совпадение при ранге 2 остается открытым вопросом.

Исследование первого автора выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00011, https://rscf.ru/project/24-21-00011

Список литературы

1. Pouzet M., Rosenberg I. G. Small clones and the projection property // Algebra universalis. 2010. Vol. 63.1. P. 37-44.

2. Перязев Н. А. Клоны, ко-клоны, гиперклоны и суперклоны // Ученые записки Казанского государственного университета. Серия: Физико-математические науки. 2009. Т. 151, № 2. С. 120–125.

3. Перязев Н. А., Шаранхаев И. К. Теория Галуа для клонов и суперклонов // Дискретная математика. 2015. Т. 27 вып. 4. С. 79–93.

4. Тодиков С. И. Сравнение выразительных возможностей различных языков мультиопераций // Информационные технологии, их приложения и информационное образование : материалы 2-й Междунар. конф. Улан-Удэ, 2021. С. 235–242.

Программный комплекс для статической проверки типов конфигураций «1С:Предприятия»

Попова Виктория Алексеевна

Иркутский государственный университет, e-mail: victorypopova1@gmail.com

Динамически типизированные языки программирования широко применяются в разработке программного обеспечения различной степени сложности. Одной из причин выбора таких языков заключается в отсутствии объявления типов переменных, что экономит время, исключая необходимость изучения правил преобразования конструкций. Однако, в отличие от статически типизированных языков, динамическая типизация может уменьшить надежность и качество программного обеспечения. Поэтому в процессе разработки необходимо применять методы и инструменты, направленные на минимизацию ошибок, связанных с несоответствием типов данных. Для распространенных языков программирования с динамической типизацией, таких как Haskell, OCaml, Standard ML, JavaScript и Python, уже имеются инструменты, предназначенные для проверки соответствия типов. Но на текущий момент для языка программирования «1С:Предприятие» не предоставляется механизма, который бы обеспечивал эффективное выявление ошибок несоответствия типов с учетом специфичных аспектов системы типизации этого языка.

Так, в данной работе описывается процесс создания механизма статической проверки типов для языка программирования «1С:Предприятие». Процесс обусловливается выполнением следующих **задач**:

1) проанализировать предметную область и рассмотреть существующие методы статической проверки типов;
2) определить виды типов в конфигурациях, разработанных на языке программирования «1С:Предприятие»;
3) разработать формат для представления всех типов, использующихся в конфигурациях «1С:Предприятия»;
4) реализовать синтаксический анализ кода модулей конфигураций 1С;
5) протестировать разработанный механизм статической проверки типов.

Результаты выполненной работы по теме были представлены в следующих работах. В [1] представлены результаты анализа системы типов «1С:Предприятия». В ходе разработки механизма статического анализа был разработан формат, получивший название «Дерево типов конфигурации» (ДТК), который предназначен для описания объектов конфигурации и типов платформы. Такое название обосновано тем, что каждый объект конфигурации наследует функциональность от одного или нескольких типов, определённых в платформе «1С:Предприятие». Важно отметить, что файл формата ДТК может быть сформирован для любой конфигурации «1С:Предприятия».

Далее для успешной реализации статической проверки соответствия типов необходимо было создать представление программного кода конфигурации в виде AST [2]. После этого выполнялась разработка правил для анализа соответствия типов конструкциям языка, используя информацию, содержащуюся в документе формата ДТК.

На основе информации о типах «1С:Предприятия» и спроектированной структуры программного комплекса, представленного в [3] в виде диаграммы классов, осуществлялась разработка правил для выявления несоответствия типов в программном коде конфигураций «1С:Предприятия».

В [4] определены правила проверки типов для выражений, в которых применяются бинарные операции. Далее осуществлялась разработка правил для проверки присвоения типов переменным, определение конструкторов объектов, корректность обращения к свойству объекта и т. д. Порядок проверки каждой такой структуры данных языка программирования «1С:Предприятия» представлен в [3; 5].

Для полноценного применения механизма статической проверки типов в процессе разработки конфигураций «1С:Предприятия» ведётся работа по созданию плагина для среды разработки Eclipse. На текущий момент удалось создать тестовую версию плагина, которая позволяет проверять часть конструкций языка таких, как условные операторы и бинарные операции.

К сентябрю 2024 г. планируется доработать плагин, что позволит перейти к апробации результатов работы.

Ожидаемым результатом работы является оценка эффективности и надёжности разработанных методов статической проверки типов в условиях промышленной разработки программ «1С:Предприятие». Эта оценка позволит оценить производительность и точность методов статической проверки типов в реальных сценариях, а также идентифицировать потенциальные области для улучшения. Также результатом работы является апробация результатов, что предоставит ценные выводы об эффективности статической проверки типов в процессе улучшения качества программного обеспечения и сокращении времени разработки программ на платформе «1С:Предприятие».

Список литературы

1. Балюк А. С., Попова В .А. Разработка программного комплекса для конвертации конфигурации платформы «1С:Предприятие» в UML-модель // Сложные системы модели, анализ и управление. 2021. № 4 С. 137–145.

2. Balyuk A. S., Popova V .A. Static type-checking for programs developed on the platform 1C:Enterprise // CEUR Workshop Proceedings: Irkutsk, 14 September 2021. Irkutsk, 2021. P. 101-111.

3. Попова В .А. Проектирование механизма статического анализа для выявления ошибок несоответствия типов в программах на динамических языках программирования // Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения (DYSC 2022) : материалы 4-й Междунар. конф. Иркутск, 19–22 сент. 2022 г. Иркутск : Изд-во ИГУ. С. 142–145.

4. Попова В .А. Проверка соответствия типов конструкций динамического языка программирования на основании построения AST // Материалы конференции «Ляпуновские чтения». Иркутск, 5–9 дек. 2022 г. Иркутск : ИДСТУ СО РАН, 2022. С. 114–115.

5. Попова В .А. Разработка правил для выявления ошибок несоответствия типов выражений в языке программирования «1С: Предприятие» // Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения (DYSC 2023) : материалы 5-й Междунар. конф. Иркутск, 18–23 сент. 2023 г. Иркутск : Изд-во ИГУ, 2023. С. 169-172.

О семантических и синтаксических степенях жесткости унаров

Сахаров Игорь Александрович

Дальневосточный федеральный университет, e-mail: sakharov.ial@dvfu.ru

Степени семантической и синтаксической жесткости, т. е. жесткости по отношению к группе автоморфизмов и по отношению к определимому замыканию, являются важными характеристиками для любой структуры. В работах [1; 2] были исследованы вариации жесткости и их степеней как в общем случае, так и для специальных сигнатур. В данной работе изучаются вопросы, связанные с понятием жесткости для таких структур, как унары.

Пусть A-множество в структуре $\mathcal{M}$. Структура $\mathcal{M}$ называется семантически A-жесткой, если любой A-автоморфизм $f \in Aut\,(\mathcal{M})$ является тождественным. Структура $\mathcal{M}$ называется синтаксически A-жесткой, если $\mathcal{M} = dcl\,(A)$. Структура $\mathcal{M}$ называется $\exists$-семантически n-жесткой, $n \in \omega$, если $\mathcal{M}$ является семантически A-жесткой структурой для некоторого своего подмножества A мощности n. Наименьшее n такое, что $\mathcal{M}$ является $\exists$-семантически n-жесткой структурой, называется $\exists$-семантической степенью жесткости структуры $\mathcal{M}$ и обозначается $deg_{rig}^{\exists-sem}\,(\mathcal{M})$. Если такого n не существует, то полагаем $deg_{rig}^{\exists-sem}\,(\mathcal{M}) = \infty$. Аналогичным образом определяются понятия $\exists$-синтаксически n-жесткой структуры и $\exists$-синтаксической степени жесткости $(deg_{rig}^{\exists-synt}\,(\mathcal{M}))$.

Введём обозначение $deg_2^{\exists}(\mathcal{M}) = \left(deg_{rig}^{\exists-sem}(\mathcal{M}), deg_{rig}^{\exists-synt}(\mathcal{M})\right)$.

Структура $\mathcal{A} = (A; f)$, где f — унарная операция на A, называется унаром [3].

Теорема 1. *Для каждой пары* $(u, v) \in (\omega \cup \{\infty\})^2, u \leqslant v$, *существует унар* $\mathcal{A}$ *такой, что* $deg_2^{\exists}(\mathcal{A}) = (u, v)$.

Работа выполнена в Дальневосточном центре математических исследований при финансовой поддержке Минобрнауки России, соглашение № 075-02-2024-1440 от 28 февраля 2024 года по реализации программ развития региональных научно-образовательных математических центров.

Список литературы

1. Sudoplatov S. V. Variations of Rigidity // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2024. Т. 47. С. 119—136. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.47.119

2. Kulpeshov B. Sh., Sudoplatov S. V.Variations of rigidity for ordered theories // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2023. Е. 39. С. 1—17. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2023.39.1

3. Скорняков Л. А. Элементы общей алгебры. М. : Наука, 1983. 272 с.

Иконография Эйлера как расходящийся процесс

Синкевич Галина Ивановна

Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, e-mail: galina.sinkevich@gmail.com

Нередко, глядя на портреты Эйлера, мы удивляемся их несхожести. Какое изображение достоверно? Существует восемь прижизненных портретов Эйлера: пять живописных, одна гравюра и два барельефа (медальона). Все последующие его портреты являются копиями, вторичными копиями и интерпретациями. Мы попробуем систематизировать его иконографию и расскажем о новых находках.

Леонард Эйлер родился в швейцарском городе Базеле в 1707 г., с 1727 г. жил и работал в Санкт-Петербурге, с 1741 по 1766 г. — в Берлине, после чего вернулся в Санкт-Петербург, где жил и работал до своей кончины в 1783 г.

К прижизненным портретам, сделанным с натуры, относятся: три портрета работы Э. Хандмана (Handmann) (погрудный (1753), поясной (1756), поколенный(1756)), два портрета работы Ж. Дарбеса (Darbès, 1778), профильные барельефы (медальоны) работы М. И. Павлова (1777) и Ж.-Д. Рашетта (Rachette, 1781), изображение гипсовой маски Эйлера, сделанной Рашеттом при подготовке к изготовлению медальона. Также можно считать достоверными те изображения, которые сделаны мастерами, лично знавшими Эйлера, — это гравюра В. Соколова (1766) по утраченному портрету Бруккера (Brucker, 1737) и посмертный мраморный бюст работы хорошо знавшего его Рашетта (1784). Личность Эйлера проявлена на этих портретах, чего нельзя сказать о большинстве остальных изображений, преимущественно гравюр, являющихся копиями с названных оригиналов, либо копиями с копий и вольными интерпретациями. В XVIII в. репродуцирование с помощью гравирования было единственным способом тиражирования живописных изображений и их воспроизведения в книгах. Эту работу далеко не всегда выполняли крупные мастера. Рассмотрим последовательно основные известные работы.

Самым ранним из известных портретов Эйлера был несохранившийся поясной портрет 1737 г., работы И.-Г. Бруккера (Брукер, Johann Georg Brucker). Сейчас этот портрет известен по гравюре Василия Петровича Соколова, ок. 1766 г. Меццо-тинто. 380×252; 330×212 мм. Отпечатки с этой гравюры имеются в ГМИИ, ГРМ, РНБ. Этот портрет высоко ценил В. Я. Буняковский.

На погрудном живописном портрете 1753 г. работы Я. Э. Хандмана (Jakob Emanuel Handmann) 46-летний Эйлер изображен в домашней одежде, принятой для мужчин в то время в северной Европе — шелковом халате-баньяне голубого цвета с черными полосами, с цельнокроеными рукавами, на пуговицах, белой рубашке и в домашней шапке (Mütze), которую носили дома, чтобы прикрыть бритую под парик голову. Хандман передал живые черты лица Эйлера, деликатно скрыв в тени ослепший правый глаз и сосредоточив внимание зрителя на освещенной левой стороне лица, озорном и энергичном взгляде ясного голубого глаза, задорной полуулыбке, упрямой верхней губе, легким морщинкам. Пастель на бумаге, 57×44 см. Базельский художественный музей («Открытое художественное собрание», Kunstmuseum Basel).

Два других портрета Эйлера, написанных Хандманом в 1756 г., композиционно продолжают мотивы портрета 1753 г.

Поясной портрет 1756 г. изображает Эйлера в парике, темном халате, белой рубашке с легкими манжетами. Он сидит за столом с раскрытой тетрадью (возможно, со своей записной книжкой, — это были тетради крупного формата, где Эйлер в течение всей жизни делал математические заметки). Почерк самого Эйлера. Музыкальные пальцы (Эйлер играл на клавесине) правой руки придерживают страницу. Г. Тирш сообщает, что на старой раме этого портрета имелась надпись Leonh. Euler, Em Handmann pinx. Berol. 1756. Ex dono amplissimi Senatus Basil. 1785 («Леонард Эйлер. Писал Эмануэль Хандман. Берлин. 1756. Из дара высокочтимого Сената Базеля. 1785»). Холст, масло, 60×87. Портрет хранится в Базельском университете.

Одним из самых известных произведений Хандмана считается большой поколенный портрет Эйлера, исполненный по двум предыдущим работам. Холст, масло, 138×104 см. Мюнхенский национальный музей. Расположение фигуры сохранено, но гораздо богаче прописан фон картины. Эйлер в темнозеленом халате-баньян сидит за столом с пером в руке над раскрытой рукописью. Под халатом с темно-синими отворотами и обшлагами белая рубашка с жабо и кружевными манжетами. За его правым плечом видна полка с книгами, под которой едва виден фрагмент глобуса, слева окно за оливковой занавесью. Проработка лица по выразительности уступает портрету 1753 г.

Последний живописный прижизненный портрет Эйлера кисти Дарбеса (Жозеф-Франсуа Дарбес, Joseph Friedrich August Darbès) написан в 1778 г., когда Эйлеру был 71 год, существует в женевском и московском вариантах. Портрет погрудный, в овале. Холст, масло, 62×45,5. Женевский музей искусства и истории (Musée d'Art et d'Histoire de Genève). Эйлер в светлокоричневом теплом шлафроке с меховым воротником. На шее фуляровый платок, на голове теплая домашняя шапка, из-под которой видны седые волосы. Правый глаз скрыт в тени, левый, слабо видящий, обращен к зрителю. На лбу крупные вены, губы сжаты, на лице и шее глубокие складки. По этому портрету Кютнер (Самуил-Готтлиб Кютнер, Kütner) в 1780 г. вырезал гравюру в Митаве, и Николай Фусс, многолетний секретарь Эйлера и муж его внучки, находил, что этот портрет «из всех наиболее сходный». Портрет не подписан автором, но на задней стороне полотна имеется надпись; «Портрет великого Эйлера, написанный в Петербурге Дарбесом». Нами восстановлена часть истории этого портрета.

В Третьяковской галерее в Москве хранится портрет «Неизвестного старика» («Слепой») работы Дарбеса, датированный 1778 г. Овал в прямоугольнике. Холст, масло, 61,3×47,3. Этот портрет был идентифицирован в 1980-е гг. в ходе подготовки материала для нового каталога музейного собрания сотрудниками Третьяковской галереи Г. Б. Андреевой и экспертом-рентгенологом произведений искусства М. П. Виктуриной как прижизненное изображение Леонарда Эйлера. Авторы описывают изображенного: «В светло-коричневом домашнем халате с меховым воротником, в бархатном берете приглушенных зеленоватых тонов с фуляром на шее. Высокий лоб, крупные черты лица, глубокие складки на переносице и на подбородке вокруг плотно сжатых, кажется чуть тронутых улыбкой губ, пристально смотрящий на незримого собеседника левый глаз (больной правый деликатно скрыт художником в тени). Этот портрет имеет и дату, и авторскую подпись. На полотне из женевского музея она отсутствует. Были проведены технологические исследования портрета с использованием стереоскопического микроскопа, фактурных фотографий и рентгенограмм. Под слоем старого загрязненного лака была обнаружена подпись Дарбеса. Ответ на вопрос, является ли этот портрет репликой Дарбеса с удавшегося женевского оригинала, либо сам представляет собой авторский оригинал, пока открыт. Для этого необходимо сличение женевского и московского портретов.

Из прижизненных скульптурных профильных барельефов, сделанных с натуры, можно назвать медальон М. И. Павлова 1777 г. и аутентичный барельеф Доминика Рашетта, выполненный в Петербурге в 1781 г. Отлитый в гипсе, он был передан в дар Парижской академии, где и находится сейчас. Этот овальный барельеф, размером 50×40 см., сделанный за два года до смерти Эйлера, передает его старческие черты; левый глав полуприкрыт. Оплечный бюст Эйлера повернут в профиль, вправо. С большой мягкостью вылеплены Рашеттом складки на лице и шее. Тонко вырезаны легкие завитки волос. Для его изготовления Рашетт снимал гипсовую маску, гравюра с которой также сохранилась. Близкое знакомство Рашетта с Эйлером позволяет предположить, что этот профиль Эйлера наиболее идентичен. Рашетт использовал свои наработки при изготовлении посмертного бюста Эйлера.

Далее в докладе будут рассмотрены более 30 изображений Эйлера, сделанных посмертно как копии с названных изображений, так и являющиеся результатом свободной фантазии художников. Напомним, что гравирование было единственным способом тиражировать изображение, гравюры изготавливались как для титульных страниц и фронтисписов изданий трудов Эйлера, так и для свободной продажи. Наглядно показан процесс искажения оригинала.

Новая находка. В 2021 г. вместе с доцентом СПбГУ Дмитрием Михайловичем Столяровым мы изучали в СПбФ АРАН рукописи Л. Эйлера, его записные книжки: 12 больших тетрадей, в которых он всю жизнь делал наброски будущих работ. В книжках практически нет бытовой информации. Записные книжки № 1 и 2 соответствуют базельскому и начальному петербургскому периоду, 1725–1727 гг. Во второй книжке есть путевые записи, сделанные по дороге в Санкт-Петербург, среди которых — план освоения различных наук: физиологии, физики, математики, механики и географии, а также музыки и русского языка.

Эйлер прибыл в Санкт-Петербург 24 мая 1727 г., незадолго до этого (15 апреля) ему исполнилось 20 лет, и поселился в квартире Даниила Бернулли. В записной книжке есть первые записи по прибытии в Петербург и карандашный профильный портрет молодого человека в шапке, с радостно-удивленным лицом. Дмитрий Михайлович Столяров предположил, что это автопортрет.

Внимательное рассмотрение этой страницы, анализ изображенных деталей, а также наложение рисунка на достоверное профильное изображение Эйлера работы Д. Рашетта подтвердило (по терминологии криминалистов) совпадение устойчивых точек. Таким образом, сейчас мы располагаем автопортретом 20-летнего Леонарда Эйлера.

Теоретико-категорные и геометрические аспекты теории топосов Гротендика

Скурихин Евгений Евгеньевич

Институт прикладной математики ДВО РАН; Дальневосточный федеральный университет, e-mail: eeskur@gmail.com

Объекты топоса Гротендика можно рассматривать, как предпучки множеств на некоторой категории. В силу, как писал Д. Мамфорд, гениальной идеи А. Гротендика о характеристике объекта категории классом входящих в него морфизмов, каждому объекту произвольной категории сопоставляется представляющий его предпучок множеств, так что каждая категория вкладывается, как полная подкатегория, в категорию предпучков множеств, то есть в некоторый топос Гротендика. На предпучки множеств переносятся многие теоретико-множественные структуры.

С другой стороны, подпучки пучка множеств образуют полную брауэрову решётку и значит задают бесточечную топологическую структуру на представляемом им объекте категории. Таким образом на предпучки множеств, следовательно, на произвольные объекты категории, переносятся стандартные структуры, допускающие изучение соответствующим образом модифицированными методами гомологической топологии. Особую роль играют при этом топологии Гротендика на категориях и соответствующие когомологии.

Предполагается затронуть следующие темы:

1. Равномерные структуры и структуры близости.

2. Предпучки множеств и сложность последовательности по Арнольду.

Сформулируем несколько результатов, относящихся к отношениям близости и нормальности и равномерным структурам. Близость является классической геометрической структурой, её свойства и приложения содержатся, например, в книге [2]. Общие свойства равномерностей и близостей на множестве описаны в книге [3]. Нормальные структуры и их приложения к пучковым когомологиям равномерных пространств и пространств близости рассмотрены в работе [1]. Здесь мы формулируем общие результаты, относящиеся к частично упорядоченным множествам и допускающие приложения к объектам топосов Гротендика, их когомологиям и размерностям. Сложность по Арнольду, которую предполагается затронуть в докладе, также допускает характеристику в терминах когомологий Гротендика.

Пусть K частично упорядоченное множество (ЧУМ), K^o дуальное ЧУМ. Для $a \in K$ через $a' \in K^o$ будем обозначать образ a при каноническом антиизоморфизме $K \to K^o$. Пусть K - $\wedge$-полурешётка с нулём, $\alpha = \{x_i \in K \mid i \in I\}$, $\beta = \{y_j \in K \mid j \in J\}$, $a \in K$. Будем обозначать $\alpha(a) = \vee\{x_i \mid x_i \wedge a \neq 0\}$; $\alpha^{\star\star} = \{\alpha(x_i) \mid i \in I\}$; $\beta \prec \alpha \Leftrightarrow$ имеется $p : J \to I$: $y_j \leqslant x_{p(j)}$.

Определение 1. *Пусть* $\overset{\delta}{\supset}$ *подмножество множества* $K \times K^o$. *Тот факт, что* (a, b') *элемент* $\overset{\delta}{\supset}$ *будем записывать в виде* $a \overset{\delta}{\supset} b'$ *или* $b' \overset{\delta}{\subset} a$.

Множество $\overset{\delta}{\supset}$ *называется нормальностью на* K, *если выполняются следующие условия:*

(Nδ1) $a \overset{\delta}{\supset} b' \Rightarrow b \overset{\delta}{\supset} a'$

(Nδ2) $a_i \overset{\delta}{\supset} b'_1$, $(i = 1, 2) \Leftrightarrow a_1 \wedge a_2 \overset{\delta}{\supset} b'_1$.

(Nδ3) Если $a \overset{\delta}{\supset} b'$, *то* $\exists c, d \in K : a \overset{\delta}{\supset} c'$, $d \overset{\delta}{\supset} b'$, $c \wedge d = 0$.

.

Определение 2. *Пусть* K *нижняя полурешётка с* 0. *Бинарное отношение* δ *на дуальной решётке* K^o *называется близостью на* K, *если выполняются следующие условия*

(Pδ1) $a'\delta b' \Rightarrow b'\delta a'$.

(Pδ2) $a'\delta(b' \vee c') \Leftrightarrow (a'\delta b')$ *или* $(a'\delta c')$.

(Pδ3) $a'\bar{\delta}b' \Rightarrow \exists c', d' : a'\bar{\delta}c', b'\bar{\delta}d', c \wedge d = 0$. *Здесь* $\bar{\delta}$ *- отношение, противоположное* δ.

Теорема 1. *Пусть* K *нижняя полурешётка с* 0, K^o *дуальное ЧУМ. Сопоставим каждому бинарному отношению* δ *на* K^o *подмножество* $\overset{\delta}{\supset}$ *множества* $K \times K^o$, *полагая* $a \overset{\delta}{\supset} b' \Leftrightarrow a'\bar{\delta}b'$. *Утверждается, что этим устанавливается биекция между всеми бинарными отношениями на* K^o *и всеми подмножествами множества* $K \times K^o$. *При этом,* $\overset{\delta}{\supset}$ *является нормальностью на* $K \Leftrightarrow \delta$ *является близостью на* K.

Будем использовать следующие обозначения.

$\alpha(a') = \vee\{x_i \mid i \in I_{a'}\} \equiv \vee\{x_i \mid x_i \wedge a' \neq 0\} \equiv \vee\{x_i \mid x_i \not\leq a\}$;

$\alpha^{\star\star} = \{\alpha(x_i) \mid i \in I\}$.

Определение 3. *Класс* $\mathcal{U}$ *семейств элементов решётки* K *называется равномерной структурой или равномерностью на* K, *если выполняются условия*

($\mathcal{U}$1) $\forall\alpha \in \mathcal{U}$ $\exists\gamma \in \mathcal{U}$: $\gamma^{**} \prec \alpha$;

($\mathcal{U}$2) $\forall\alpha, \gamma \in \mathcal{U}$, $\exists\varepsilon \in \mathcal{U}$: $\varepsilon \prec \alpha$ *и* $\varepsilon \prec \gamma$;

($\mathcal{U}$3) *Если* α, γ *- семейства элементов* K, $\alpha \prec \gamma$ *и* $\alpha \in \mathcal{U}$, *то* $\gamma \in \mathcal{U}$.

Равномерность называется конечной, если в каждое $\alpha \in \mathcal{U}$ *вписывается конечное* $\beta \in \mathcal{U}$.

Теорема 2. *Пусть* $\mathcal{U}$ *равномерная структура на* K. *Определим множество* $\overset{\delta_\mathcal{U}}{\supset}$, *полагая* $a \overset{\delta_\mathcal{U}}{\supset} b' \Leftrightarrow$ *имеется* $\alpha \in \mathcal{U} : \alpha \prec \{a, b\}$. *Тогда* $\overset{\delta_\mathcal{U}}{\supset}$ *является нормальностью на* K, *и значит* $\delta_\mathcal{U}$ *– близостью на* K.

Определение 4. *Пусть* $\overset{\delta}{\supset}$ *нормальность на дистрибутивной решётке* K *с* 0. *Назовём семейство*

$\alpha = \{x_i \in K \mid i \in I\}$ *δ-оснащённым, если имеется его δ-оснащение, то есть пара* (γ, p), *где* $\gamma = \{c_j \in K \mid j \in J\}$, $p : J \to I$, *что* $x_{p(j)} \overset{\delta}{\supset} c'_j$, $\wedge\{c_j \mid j \in J = 0\}$ *и* J *конечное множество.*

Теорема 3. *Пусть* $\overset{\delta}{\supset}$ *нормальность на дистрибутивной решётке* K *с* 0. *Класс* $\mathcal{U}_\delta$ *всех δ-оснащённых семейств является конечной равномерностью на* K.

Пусть K дистрибутивная решётка с 0. Описанные выше соотношения между нормальностями, близостями и конечными равномерностями является биективным и продолжается до изоморфизма соответствующих категорий.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России, соглашение № 075-02- 2024-1440 от 28.02.2024 года по реализации программ развития региональных научно-образовательных математических центров.

Список литературы

1. Скурихин Е. Е. Категорная топология нормальных структур на множествах // Сибирские электронные математические известия. 2018. Т. 15. С. 1719–1734.

2. Ефремович В. А. Топтыго А. К. Геометрия близости. М. : Наука, 1991. 240 с.

3. Энгелькинг Р. Общая топология. М. : Мир, 1986. 751 с.

О неявной полноте некоторых классов монотонных функций, сохраняющих разбиение

Старостин Михаил Васильевич

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, e-mail: murmol@bk.ru

Одним из важных направлений исследований в теории функциональных систем является изучение операторов, являющихся усилением оператора суперпозиции. Одним из таких операторов является оператор неявной выразимости, предложенный А. В. Кузнецовым в 1970-х гг. [1]

Функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k$ называется *неявно выразимой* над множеством функций $\Sigma \subseteq P_k$, если найдутся такие $A_i, B_i \in [\Sigma \cup \{x\}]$, что система уравнений

$$\begin{cases} A_1(x_1, \ldots, x_n, z) = B_1(x_1, \ldots, x_n, z), \\ \ldots \\ A_m(x_1, \ldots, x_n, z) = B_m(x_1, \ldots, x_n, z) \end{cases}$$

эквивалентна уравнению $z = f(x_1, \ldots, x_n)$.

Множество функций, неявно выразимых над $\Sigma \subseteq P_k$ называется *неявным расширением* Σ и обозначается $I(\Sigma)$. Система Σ называется *неявно полной*, если $I(\Sigma) = P_k$.

Изучению неявной полноты посвящены работы [2–5].

Пусть $\mathfrak{B}$ — разбиение на множестве E_k и β — соответствующее ему отношение эквивалентности. Говорят, что *функция* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *сохраняет разбиение* $\mathfrak{B}$, если на эквивалентных (относительно β) наборах она принимает эквивалентные значения. Множество всех функций, сохраняющих разбиение $\mathfrak{B}$, будем обозначать $U_{\mathfrak{B}}$.

Пусть ρ — отношение порядка на множестве E_k. Говорят, что функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ *монотонна* относительно порядка ρ, если для любых $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in E_k^n$ из $\tilde{\alpha} \leqslant_\rho \tilde{\beta}$ следует $f(\tilde{\alpha}) \leqslant_\rho f(\tilde{\beta})$. Множество всех функций, монотонных относительно порядка ρ, будем обозначать M_ρ.

Зафиксируем некоторое разбиение $\mathfrak{B}$ и отношение порядка ρ и обозначим $F = U_{\mathfrak{B}} \cap M_\rho$. Будем говорить, что $\mathfrak{B}$ и ρ *согласованы*, если из того, что $a \leqslant b$ и $a' \sim a$, $b' \sim b$ следует, что $a' \leqslant b'$.

Теорема 1. *Если существуют такие $a, b \in E_k$, что $a \sim b$ и $a \leqslant b$, то класс F неявно полон.*

Теорема 2. *Пусть не выполнены условия теоремы 1 и разбиение $\mathfrak{B}$ согласовано с порядком ρ. Тогда класс F неявно полон тогда и только тогда, когда существуют попарно различные $a_1, a_2, b, c \in E_k$, что $b \leqslant a_1 \leqslant c$, $b \leqslant a_2 \leqslant c$, $a_1 \sim a_2$ и все остальные элементы этой четверки попарно не эквивалентны друг другу.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

Список литературы

1. Кузнецов А. В. О средствах для обнаружения невыводимости или невыразимости // Логический вывод. М. : Наука, 1979. С. 5–33.

2. Касим-Заде О. М. О неявной выразимости в двузначной логике и криптоизоморфизмах двухэлементных алгебр // Доклады РАН. 1996. Т. 348, № 3. С. 299–301.

3. Орехова Е. А. Об одном критерии неявной полноты в трехзначной логике // Математические вопросы кибернетики. Вып. 12. М. : Физматлит, 2003. С. 27–74.

4. Касим-Заде О. М. О неявной полноте в k-значной логике // Вестник Московского университета. Серия 1, Математика, механика. 2007. № 3. С. 9–13.

5. Старостин М. В. Неявно предполные классы и критерий неявной полноты в трехзначной логике // Вестник Московского университета. Серия 1, Математика, механика. 2018. № 2. С. 56–59.

О сферически упорядочиваемых группах

Судоплатов Сергей Владимирович

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирский государственный технический университет, e-mail: sudoplat@math.nsc.ru

Широко известные линейно упорядоченные группы и циклически упорядоченные группы глубоко исследованы и описаны [1; 2], и допускают различные обобщения и модификации для частичных, левых и правых упорядочений [1; 3], групп посредничества и отделимости [4–6], а также полугрупп [7].

Мы продолжаем изучать n-сферические порядки [8; 9], вводим и исследуем понятия n-сферически упорядоченной и n-сферически упорядочиваемой группы, дающее обобщения понятий линейно и циклически упорядоченных и упорядочиваемых групп, с $n = 2$ и $n = 3$ соответственно.

Определение [8; 9]. Следующее обобщение линейных и циклических порядков задает отношение *n-шарового*, *n-сферического* или *n-циклического* порядка, для $n \geqslant 2$, которое представляется в виде n-арного отношения K_n, удовлетворяющего следующим условиям:
(nso1) для любой четной подстановки σ на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$,

$$\forall x_1, \ldots, x_n \left(K_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to K_n\left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)} \ldots, x_{\sigma(n)}\right)\right);$$

(nso2) $$\forall x_1, \ldots, x_n \Bigg((K_n(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n) \wedge$$

$$\wedge K_n(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n)) \leftrightarrow \bigvee_{1 \leqslant k < l \leqslant n} x_k \approx x_l \Bigg)$$

для любого $1 \leqslant i < j \leqslant n$;

(nso3) $$\forall x_1, \ldots, x_n \Bigg(K_n(x_1, \ldots, x_n) \to$$

$$\to \forall t \left(\bigvee_{i=1}^{n} K_n(x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots, x_n) \right) \Bigg);$$

(nso4) $$\forall x_1, \ldots, x_n (K_n(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n) \vee$$

$$\vee K_n(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n)), \ 1 \leqslant i < j \leqslant n.$$

Структура $\mathcal{M}$, снабженная n-сферическим порядком, называется *n-сферически упорядоченной.*

Указанные аксиомы задают всевозможные линейные порядки K_2 и циклические порядки K_3.

Определение. Группа G называется *n-сферически упорядоченной* или *n-s-упорядоченной*, если G снабжена n-сферическим порядком K_n таким, что для любого $(x_1, \ldots, x_n) \in K_n$ и любого $y \in G$ кортежи $(x_1 y, \ldots, x_n y)$ и $(y x_1, \ldots, y x_n)$ принадлежат K_n.

Группа G называется *n-сферически упорядочиваемой* или *n-s-упорядочиваемой*, если G имеет n-сферически упорядоченное обогащение. Группа G называется *сферически упорядочиваемой*, если она n-сферически упорядочиваема для некоторого n.

Для группы G определим следующим образом ее *спектр* $\mathrm{Sp}_{\mathrm{so}}$ *сферической упорядочиваемости*, или *сферический спектр*:

$$\mathrm{Sp}_{\mathrm{so}}(G) = \{n \in \omega \setminus \{0,1\} \mid G \text{ является } n\text{-сферически упорядочиваемой}\}.$$

Группа G называется *тотально сферически упорядочиваемой* или *тотально s-упорядочиваемой*, если G имеет максимальный спектр сферической упорядочиваемости, т. е. $\mathrm{Sp}_{\mathrm{so}}(G) = \omega \setminus \{0,1\}$.

Группа G называется *почти тотально сферически упорядочиваемой* или *почти тотально s-упорядочиваемой*, если $\mathrm{Sp}_{\mathrm{so}}(G)$ — коконечное подмножество в ω.

Группа G называется (*почти*) *никак не s-упорядочиваемой*, если множество $\mathrm{Sp}_{\mathrm{so}}(G)$ пусто (соответственно, конечно).

По определению группа G линейно упорядочена тогда и только тогда, когда G является 2-сферически упорядоченной, и группа G циклически упорядочена тогда и только тогда, когда G является 3-сферически упорядоченной. В этом случае имеет место $2 \in \mathrm{Sp}_{\mathrm{so}}(G)$ и $3 \in \mathrm{Sp}_{\mathrm{so}}(G)$ соответственно.

Снова по определению группа G сферически упорядочиваема тогда и только тогда, когда $\mathrm{Sp}_{\mathrm{so}}(G) \neq \varnothing$.

Имеет место следующее свойство монотонности для сферического спектра:

Теорема 1. *Для любых групп G_1, G_2 если $G_1 \leqslant G_2$, то $\mathrm{Sp}_{\mathrm{so}}(G_1) \supseteq \mathrm{Sp}_{\mathrm{so}}(G_2)$.*

Следствие 1. *Если G — (почти) тотально s-упорядочиваемая группа, то любая ее подгруппа также (почти) тотально s-упорядочиваема.*

Следствие 2. *Если группа G (почти) никак не s-упорядочиваема, то любая ее надгруппа также (почти) никак не s-упорядочиваема.*

Теорема 2. *Группа G является n-сферически упорядоченной n-сферическим порядком K_n тогда и только тогда, когда для любой n-ки $(a_1, \ldots, a_n) \in K_n$ с попарно различными координатами и любого элемента $b \in G$ кортежи $(a_1 b, \ldots, a_n b)$ и $(b a_1, \ldots, b a_n)$ являются четными, т.е. не являются нечетными перестановками некоторых кортежей из K_n.*

Следствие 3. *Группа G линейно упорядочена некоторым 2-сферическим порядком K_2 тогда и только тогда, когда для любой пары $(a_1, a_2) \in K_2$ с условием $a_1 \neq a_2$ и любого $b \in G$ пары $(a_1 b, a_2 b)$ и $(b a_1, b a_2)$ не являются транспозициями пар из K_2.*

Следствие 4. *Для любой абелевой группы G, $3 \in \mathrm{Sp}_{\mathrm{so}}(G)$.*

Теорема 3. *Существует группа G, для которой $\mathrm{Sp}_{\mathrm{so}}(G) = \varnothing$.*

Теорема 4. *Если группа G имеет мощность $|G| = m \in \omega$, то*

$$\mathrm{Sp}_{\mathrm{so}}(G) \supseteq \{n \in \omega \mid n > m\},$$

в частности, группа G является почти тотально s-упорядочиваемой.

Известное фольклорное утверждение о бесконечности неединичных линейно упорядоченных групп имеет следующую переформулировку в терминах сферической упорядочиваемости:

Теорема 5. *Конечная группа G является 2-сферически упорядочиваемой тогда и только тогда, когда $|G| = 1$.*

Следствие 5. *Любая 2-сферически упорядочиваемая группа G является группой без кручения, т. е. если G содержит элемент конечного положительного порядка, то $2 \notin \mathrm{Sp}_{\mathrm{so}}(G)$.*

Теорема 6. *Для любого $m \in \omega \setminus \{0, 1\}$ спектр сферической упорядочиваемости группы $\mathbb{Z}_m$ имеет следующий вид:*

$$\mathrm{Sp}_{\mathrm{so}}(\mathbb{Z}_m) = \omega \setminus (\{0, 1, 2\} \cup \{n \mid n|m \text{ и } n \text{ четно}\}).$$

Теорема 7. *Любая абелева группа без кручения является тотально s-упорядочиваемой.*

Изложенные выше понятия о сферической упорядоченности и ее спектрах естественно распространяются на произвольные структуры. Кроме того, сферическая упорядочиваемость допускает варианты упорядочиваемости, как и для линейной (би-)упорядочиваемости, такие как левая и правая упорядочиваемость [3; 10]. Возникает естественная **проблема** описания сферических спектров различных групп и других структур относительно левой, правой сферической упорядочиваемости и сферической би-упорядочиваемости.

Данное исследование выполнено в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, проект № FWNF-2022-0012.

Список литературы

1. Фукс Л. Частично упорядоченные алгебраические системы. М. : Мир, 1965. 343 с.

2. Кокорин А. И., Копытов В. М. Линейно упорядоченные группы. М. : Наука, 1972. 200 с.

3. Копытов В. М., Медведев Н. Я. Правоупорядоченные группы. Новосибирск : Научная книга, 1996. 256 с.

4. Shepperd J. A. H. Separation and the definition of betweenness and separation groups // Journal of the London Mathematical Society. 1956. s1-31. N. 2. P. 240–248.

5. Shepperd J. A. H. Betweenness groups // Journal of the London Mathematical Society. 1957. Vol. 32. P. 277–285.

6. Shepperd J. A. H. Separation groups // Proceedings of the London Mathematical Society. 1957. s3-7. N 1. P. 518–548.

7. Gilder J. Betweenness and order in semigroups // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1965. Vol. 61, N 1. P. 13–28.

8. Sudoplatov S. V. Arities and aritizabilities of first-order theories // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2022. Vol. 19. P. 889–901.

9. Kulpeshov B. Sh., Sudoplatov S. V. Spherical orders, properties and countable spectra of their theories // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2023. Vol. 20, N 2. P. 588–599.

10. Muliarchyk K. Free products of bi-orderable groups // arXiv:2403.14779 [math.GR], 2024. 15 p.

О возможности применения теории мультиопераций

Тодиков Сергей Игоревич

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина), e-mail: sergeytodikov@gmail.com

Пусть 2^A — множество всех подмножеств A. Отображением из A^n в 2^A называется n-местной мультиоперацией на A [1]. Под рангом мультиоперации понимается мощность множества A. Множество всех n-местных мультиопераций на A обозначаем M_A^n, при $|A| = k$ используем обозначение M_k^n.

Следуя [2], n-местную мультиоперацию f на множества $A = \{1, 2, 4\}$ можно представить как отображение:

$$f : \{1, 2, 4\}^n \to \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

использую следующую кодировку:

$$\{\varnothing\} \to 0; \quad \{1\} \to 1; \quad \{2\} \to 2; \quad \{1, 2\} \to 3; \quad \{4\} \to 4;$$

$$\{1, 4\} \to 5; \quad \{2, 4\} \to 6; \quad \{1, 2, 4\} \to 7$$

Также n-местную мультиоперацию f можно представить в виде вектора всех ее значений $\left(a_1, ..., a_{k^n}\right)$, где $a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ и $a_i = f\left(2^{i_1}, ..., 2^{i_n}\right)$, а $(i_1, ..., i_n)$ есть представление $i - 1$ в системе счисления по основанию k n-разрядным числом.

Определим метаоперацию суперпозиции:

$$s(f_0, f_1, ..., f_n)(a_1, ..., a_m) = \bigcap_{b_i \in f_i(a_1, ..., a_m)} f_0(b_1, ...b_n)$$

Определим терм с множеством неизвестных X и множеством констант K над множеством мультиопераций $F \subseteq M_k^n$ следующим образом:

1. если $y \in K \cup X$, то $t \equiv y$ — это терм и $U(t) = \{y\}$;
2. если $f \in F$ и $t_1, ..., t_n$ являются термами, то $t \equiv f(t_1, ..., t_n)$ — это терм и $U(t) = U(t_1) \cup ... \cup U(t_n)$;
3. если t_0 — терм, $U(t_0) = \{y_1, ..., y_n\}$ и $t_1, ..., t_n$ являются термами, то $t \equiv t_0(t_1, ..., t_n)$ — это терм и $U(t) = U(t_1) \cup ... \cup U(t_n)$.

Общая формула системы включений с известными в теории мультиопераций имеет следующий вид [3]:

$$\begin{cases} t_1(\tilde{c}, \tilde{z}) \subseteq q_1(\tilde{c}, \tilde{z}) \\ \dots \; \dots \; \dots \\ t_m(\tilde{c}, \tilde{z}) \subseteq q_m(\tilde{c}, \tilde{z}) \end{cases}$$

где t_i, q_i термы с неизвестными $\tilde{z}$ и константами $\tilde{c}$ в $F \subseteq M_k^n$. Решением системы включений является набор мультиопераций $f_1, ..., f_s$ таких, что все i выполняют включение при стандартном определении значения термов с помощью введенного оператора суперпозиции:

$$t_i\big(\tilde{c}, f_1(\tilde{c}), ..., f_s(\tilde{c})\big) \subseteq q_i\big(\tilde{c}, f_1(\tilde{c}), ..., f_s(\tilde{c})\big).$$

На основе разработанного программного комплекса для решения систем включений в теории мультиопераций [4] была разработана методика для построения систем объяснимого ИИ с различными формами неопределенности во входных данных на основе теории мультиопераций. [5] Для того чтобы правильно интерпретировать входные и выходные данные, были разработаны две модели представления знаний на основе теории мультиопераций: модель симптомов и модель болезней.

Модель симптомов:

- 0 - $\{\varnothing\}$ — эксперт не является квалифицированным для данного симптома;
- 1 - $\{1\}$ — симптома нет;
- 2 - $\{2\}$ — симптом есть;
- 3 - $\{1, 2\}$ — неопределенно (противоречие эксперта и аппарата);
- 4 - $\{4\}$ — аппарат дал невалидное значение;
- 5 - $\{1, 4\}$ — аппарат дал невалидное значение, эксперт на основе опыта делает предположение о том, что симптома нет;
- 6 - $\{2, 4\}$ — аппарат дал невалидное значение, эксперт на основе опыта делает предположение о том, что симптом есть;
- 7 - $\{1, 2, 4\}$ — нужны уточнение.

Под аппаратом понимается некое устройства для снятия данных о физиологическом параметре, например, градусник, тонометр и т.д.

Модель областей:

- 0 - $\{\varnothing\}$ - эксперт не является квалифицированным по данной области;
- 1 - $\{1\}$ — область не подходит;
- 2 - $\{2\}$ — область подходит;
- 3 - $\{1, 2\}$ — из-за противоречия эксперта и аппарата невозможно определить точное состояние области;
- 4 - $\{4\}$ — невозможно определить состояние области, так как не о всех симптомах имеется информация;
- 5 - $\{1, 4\}$ — на основе опыта эксперта делается вывод о том, что область не подходит;
- 6 - $\{2, 4\}$ – на основе опыта эксперта делается вывод о том, что область подходит;

- 7 - $\{1, 2, 4\}$ — нужны уточнения.

Для того чтобы задавать системы включений, были определены следующие мультиоперации:

- Логическое И (&) = (111124144);
- Логическое ИЛИ ($\vee$) = (124222424);
- Логическое отрицание ($\neg$) = (214).

Все вышеописанные мультиоперации образуют базис, на котором определяется система включений.

Работа системы ИИ основана на трех множествах: физиологические параметры пациента, симптом заболевания и области заболевания. На основе физиологических параметров пациента определяются симптомы пациента, а на основе симптомов определяется к какой области относится заболевание.

Первоначально эксперт формирует модель системы ИИ, которая основана на системах включений в теории мультиопераций. При формировании модели система ИИ анализирует новую модель путем поиска общего решения системы включений и дальнейшего анализа полученного решения. Если система ИИ не находит неточностей и решение проходит все условия анализа, то система принимает новую модель, иначе система формирует объяснение того, в чем именно она видит проблему, чтобы эксперт мог её решить.

После того как модель принята системой ИИ, начинается работа с пациентом. Эксперт вносит физиологические данные пациента. После введения всех данных система находит частное решение согласно модели и дает развернутый ответ по каждой области заболевания.

Далее возможны следующие случаи:

1. Эксперт согласен с решением системы.
2. Эксперт не согласен с решением системы. В этом случае необходимо проанализировать решение системы и саму модель. Возможно, понадобятся изменения в самой модели: изменение в наборе физиологических параметров, в наборе симптомов и наборе областей и/или изменение модели.
3. Эксперт не является квалифицированным по некоторым симптомам или физиологическим параметрам. В этом случае необходим новый эксперт, который будет квалифицированным специалистом по этим симптомам. Также в этом случае новый эксперт может добавить новую информацию для модели.
4. Не все симптомы имеют валидное значение в источнике данных. Этот случай означает, что эксперт или узконаправленные ИИ допустили ошибку.

Для успешного решения необходимо выйти на случай 1. Если же был получен другой случай, то необходимо произвести модификацию системы ИИ с помощью эксперта. Если эксперты закончились, то данных, которые заложены в систему, недостаточно, чтобы определить область для пациента.

С помощью разработанной методики на текущий момент идет разработка интеллектуальной системы. С первичными результатами можно ознакомится в [6].

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации Соглашением № 075-15-2022-291 о предоставлении гранта в виде субсидии из федерального бюджета на реализацию государственной поддержки создание и развитие научного центра мирового уровня «Павловский центр «Интегративная физиология для медицины, высокотехнологичного здравоохранения и технологий стрессоустойчивости».

Список литературы

1. Перязев Н. А. Алгебры n-местных операций и мультиопераций // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения : материалы XV Междунар. конф. Тула : ТПГУ им Л. Н. Толстого, 2018. С. 113–116.

2. Перязев Н. А. Клоны, ко-клоны, гиперклоны и суперклоны // Ученые записки Казанского государственного университета. Серия: Физико-математические науки. 2009. Т. 151, кн. 2. С. 120–125.

3. Peryazev N. A. Systems of Inclusions with Unknowns in Multioperations // Известия Иркутского государственного университета. 2022. Т. 38. С. 112–123.

4. Тодиков С. И. Автоматизация процесса решения систем включений с неизвестными в теории мультиопераций // Синтаксис и семантика логических систем : материалы 7-й Междунар. конф. Владивосток, 2022. С. 53.

5. Todikov S. I. The Possibility of Applying the Theory of Multioperations to Build Self-learning Artificial Intelligence Systems with the Explainability Property // IV Internatioal Conference on Neural Newtworks and Neurotechnologies. 2023. P. 56–59.

6. Тодиков С. И., Показацкая А. В. Web-приложение для тестированиий интеллектуальной системы на основе теории мультиопераций // Компьютерные инструменты в образовании. 2024. № x. С. 58–70.

ES_U^*-замкнутые множества мультиопераций ранга 2

Федоров Андрей Витальевич, Пантелеев Владимир Иннокентьевич

Иркутский государственный университет, e-mail: and0f@mail.ru, vl.panteleyev@gmail.com

Рассматривается ES_U^*-замыкание на множестве мультиопераций, заданных на множестве из двух элементов. Находится система разделяющих множеств и доказывается точная оценка числа замкнутых множеств.

Пусть $E_2 = \{0, 1\}$, $\mathcal{B}(E_2)$ — множество всех подмножеств E_2. Множество всех мультиопераций на двухэлементном множестве обозначается M_2 и определяется как:

$$M_2^n = \{f | f : E_2^n \to \mathcal{B}(E_2)\}, M_2 = \bigcup_n M_2^n$$

Множество $\{0, 1\}$ обозначим «$-$», пустое множество обозначим «$*$». Если множество состоит из одного элемента, то его будем обозначать этим элементом.

Суперпозиция мультиопераций $s(f, f_1, ..., f_n)(x_1, ..., x_m)$ определяет некоторую мультиоперацию $g(x_1, ..., x_m)$ следующим образом:

$$g(x_1, ..., x_n) = \begin{cases} *, \text{ если } f_i(\alpha_1, ..., \alpha_m) = *, \text{ для некоторого } i \\ \ \text{или } f(\beta_1, ..., \beta_n) = * \text{ для некоторого набора} (\beta_1, ..., \beta_n), \\ \ \text{где } \beta_i \in f_i(\alpha_1, ..., \alpha_m); \\ \bigcup_{\beta_i \in f_i(\alpha_1,...,\alpha_m)} f(\beta_i, ..., \beta_n) \text{ иначе.} \end{cases}$$

Такую суперпозицию будем называть su^*-суперпозиция. В работе [2] доказано, что решётка замкнутых множеств квазиопераций имеет мощность континуум, а значит то же верно и для мультиопераций. Поэтому для получения конечного числа замкнутых множеств введём Е-операцию [3].

Будем говорить, что мультиоперация $g(x_1, ..., x_n)$ получается из мультиопераций f_1 и f_2 с помощью операции разветвления по предикату равенства (Е-операции), если для некоторых $i, j \in \{1, ..., n\}$ выполняется соотношение:

$$g(x_1, ..., x_n) = \begin{cases} f_1(x_1, ..., x_n), \text{ если } x_i = x_j, \\ f_2(x_1, ..., x_n) \text{ иначе.} \end{cases}$$

Определим ES_U^*-замыкание множества $Q \subseteq M_2$ как множество всех мультиопераций из M_2, которые можно получить из множества Q с помощью операций введения фиктивных переменных, отождествления переменных, su^*-суперпозиции и операции разветвления по предикату равенства. Обозначим ES_U^*-замыкание множества $Q \subseteq M_2$ как $[Q]_{ES_U^*}$. Множество мультиопераций, которое совпадает со своим ES_U^*-замыканием, называется ES_U^*-замкнутым множеством.

Верхняя оценка в 988 замкнутых множеств была получена в работе [1] с помощью так называемых ExS_U^*-замкнутых множеств.

ExS_U^*-замыкание множества $Q \subseteq M_2^2$ определяется как множество всех мультиопераций из M_2^2 (мультиопераций ранга 2, зависящих от двух переменных), которые можно получить из множества Q с помощью операции ограниченной su^*-суперпозиции и операции обобщённого разветвления по предикату равенства.

Мультиоперация f получается из мультиопераций $g_1, g_2, h_1, h_2 \in M_2^2$ с помощью операции обобщенного разветвления по предикату равенства (Ex-операции), если для всех двоичных наборов (α_1, α_2) выполняются следующие условия:

1. Если $h_1(\alpha_1, \alpha_2), h_2(\alpha_1, \alpha_2) \in E_2$, то

$$f(\alpha_1, \alpha_2) = \begin{cases} g_1(\alpha_1, \alpha_2), & h_1(\alpha_1, \alpha_2) = h_2(\alpha_1, \alpha_2), \\ g_2(\alpha_1, \alpha_2), & \text{иначе;} \end{cases}$$

2. Если $h_1(\alpha_1, \alpha_2) = *$ или $h_2(\alpha_1, \alpha_2) = *$, то $f(\alpha_1, \alpha_2) = *$;
3. Если $h_1(\alpha_1, \alpha_2) = -$ или $h_2(\alpha_1, \alpha_2) = -$, то

$$f(\alpha_1, \alpha_2) = \begin{cases} *, g_1(\alpha_1, \alpha_2) = * \text{ или } g_2(\alpha_1, \alpha_2) = *, \\ g_1(\alpha_1, \alpha_2) \cup g_2(\alpha_1, \alpha_2), \text{иначе.} \end{cases}$$

В качестве мультиопераций h_1, h_2 допускается использование селекторных операций. Для любого множества Q справедливо $[Q]_{ExS_U^*} \subseteq [Q]_{ES_U^*}$ [1].

Чтобы доказать, что эта оценка является точной, необходимо показать, что различные ExS_U^*-замкнутые множества порождают различные ES_U^*-замкнутые множества. Для этого введём понятие разделяющих множеств.

Теорема 1. *Пусть K_1, K_2 — два различных множества мультиопераций. Если найдутся различные ExS_U^*-замкнутые множества A и B такие, что $K_1 \subseteq A, K_1 \nsubseteq B, K_2 \subseteq B$, то $[K_1]_{ExS_U^*} \neq [K_2]_{ExS_U^*}$.*

Теорема 2. *Пусть K_1, K_2 — два различных множества мультиопераций. Если найдутся различные ES_U^*-замкнутые множества A и B такие, что $K_1 \subseteq A, K_1 \nsubseteq B, K_2 \subseteq B$, то $[K_1]_{ES_U^*} \neq [K_2]_{ES_U^*}$.*

Множества A и B называются разделяющими множествами для множеств K_1 и K_2. Необходимо найти наименьшую систему ExS_U^*-разделяющих множеств для всех 988 ExS_U^*-замкнутых множеств и доказать ES_U^*-замкнутость всех множеств, входящих в систему.

Для нахождения разделяющих множеств был использован жадный алгоритм решения задачи о покрытии множества, как в работе [4]. В результате были получены 27 ExS_U^*-разделяющих множеств L_1-L_{27}. Для удобства разобьём их на три группы:

Первая группа. Множества операций, задаваемых своими значениями на противоположных наборах — $L_1, L_2, L_5, L_7, L_{17}, L_{18}, L_{19}, L_{20}, L_{21}, L_{22}, L_{25}$:

$$L_1 = P_2^* = \{f|(f(\tilde{\alpha}), f(\bar{\tilde{\alpha}})) \in \{(0,0),(0,1),(0,*),(1,0),(1,1),(1,*),(*,0),(*,1),(*,*)\}\}; L_2 = H_2 = \{f|(f(\tilde{\alpha}), f(\bar{\tilde{\alpha}})) \in \{(0,0),(0,1),(0,-),(1,0),(1,1),(1,-),(-,0),(-,1),(-,-)\}\}; L_5 = \{f|(f(\tilde{\alpha}), f(\bar{\tilde{\alpha}})) \in \{(0,1),(0,*),(0,-),(1,0),(1,*),(1,-),(*,0),(*,1),(*,*),(*,-),(-,0),(-,1),(-,*),(-,-)\}\}; L_7 = \{f|(f(\tilde{\alpha}), f(\bar{\tilde{\alpha}})) \in \{(0,0),(0,*),(0,-),(*,0),(*,*),(*,-),(-,0),(-,*),(-,-)\}\}; L_{17} = \{f|(f(\tilde{\alpha}), f(\bar{\tilde{\alpha}})) \in \{(0,1),(0,*),(1,0),(1,*),(*,0),(*,1),(*,*),(*,-),(-,*),(-,-)\}\}; L_{18} = \{f|(f(\tilde{\alpha}), f(\bar{\tilde{\alpha}})) \in \{(0,*),(0,-),(1,*),(1,-),(*,0),(*,1),(*,*),(*,-),(-,0),(-,1),(-,*),(-,-)\}\};$$
$$L_{19} = \{f|(f(\tilde{\alpha}), f(\bar{\tilde{\alpha}})) \in \{(0,1),(0,*),(1,0),(1,*),(*,0),(*,1),(*,*),(*,-),(-,*)\}\}; L_{20} = \{f|(f(\tilde{\alpha}), f(\bar{\tilde{\alpha}})) \in \{(0,1),(1,0),(*,*),(-,-)\}\};$$
$$L_{21} = \{f|(f(\tilde{\alpha}), f(\bar{\tilde{\alpha}})) \in \{(0,*),(0,-),(1,*),(*,0),(*,1),(*,*),(*,-),(-,0),(-,*),(-,-)\}\}; L_{22} = \{f|(f(\tilde{\alpha}), f(\bar{\tilde{\alpha}})) \in \{(0,*),(1,*),(1,-),(*,0),(*,1),(*,*),(*,-),(-,1),(-,*),(-,-)\}\}; L_{25} = \{f|(f(\tilde{\alpha}), f(\bar{\tilde{\alpha}})) \in \{(1,1),(1,*),(1,-),(*,1),(*,*),(*,-),(-,1),(-,*),(-,-)\}\};$$

Вторая группа. Множества операций, задаваемых своими значениями на наборах $\tilde{0}$ и $\tilde{1}$ – $L_4, L_{11}, L_{12}, L_{13}, L_{14}, L_{15}, L_{16}, L_{27}$:

$$L_4 = \{f|(f(\tilde{0}), f(\tilde{1})) \in \{(0,1),(0,*),(0,-),(1,*),(*,0),(*,1),(*,*),(*,-),(-,1),(-,*),(-,-)\}\}; L_{11} = \{f|(f(\tilde{0}), f(\tilde{1})) \in \{(0,1),(0,*),(1,*),(*,0),(*,1),(*,*),(*,-),(-,1),(-,*)\}\}; L_{12} = \{f|(f(\tilde{0}), f(\tilde{1})) \in \{(0,1),(0,*),(0,-),(1,*),(*,0),(*,1),(*,*),(*,-),(-,*)\}\}; L_{13} = \{f|(f(\tilde{0}), f(\tilde{1})) \in \{(0,*),(0,-),(1,*),(*,0),(*,1),(*,*),(*,-),(-,1),(-,*),(-,-)\}\};$$
$$L_{14} = \{f|(f(\tilde{0}), f(\tilde{1})) \in \{(0,1),(*,0),(*,1),(*,*),(*,-),(-,1)\}\};$$
$$L_{15} = \{f|(f(\tilde{0}), f(\tilde{1})) \in \{(0,*),(1,*),(*,0),(*,1),(*,*),(*,-),(-,1),(-,*),(-,-)\}\}; L_{16} = \{f|(f(\tilde{0}), f(\tilde{1})) \in \{(0,*),(0,-),(1,*),(*,0),(*,1),(*,*),(*,-),(-,*),(-,-)\}\};$$
$$L_{27} = \{f|(f(\tilde{0}), f(\tilde{1})) \in \{(0,1),(0,*),(0,-),(1,*),(*,*),(-,*)\}\};$$

Третья группа. Множества операций, задаваемых своими значениями на наборах $\tilde{0}$ или $\tilde{1}$ – $L_3, L_6, L_8, L_9, L_{10}, L_{23}, L_{24}, L_{26}$:

$$L_3 = \{f|f(\tilde{0}) \in \{0,*,-\}\}; L_8 = \{f|f(\tilde{0}) \in \{0,*\}\}; L_9 = \{f|f(\tilde{0}) \in \{*,-\}\};$$
$$L_{10} = \{f|f(\tilde{0}) \in \{0\}\}; L_6 = \{f|f(\tilde{1}) \in \{1,*,-\}\}; L_{23} = \{f|f(\tilde{1}) \in \{1\}\};$$
$$L_{24} = \{f|f(\tilde{1}) \in \{1,*\}\}; L_{26} = \{f|f(\tilde{1}) \in \{*,-\}\};$$

Лемма 1. *Множества* $L_1, L_2, L_5, L_7, L_{17}, L_{18}, L_{19}, L_{20}, L_{21}, L_{22}, L_{25}$ *являются* ES^*_U*-замкнутыми множествами.*

Лемма 2. *Множества* $L_4, L_{11}, L_{12}, L_{13}, L_{14}, L_{15}, L_{16}, L_{27}$ *являются* ES^*_U*-замкнутыми множествами.*

Лемма 3. *Множества* $L_3, L_6, L_8, L_9, L_{10}, L_{23}, L_{24}, L_{26}$ *являются* ES^*_U*-замкнутыми множествами.*

Теорема 3. *Решётка* ES^*_U*-замкнутых множеств мультиопераций ранга 2 содержит 988 элементов.*

Доказательство. Справедливость теоремы следует из утверждения о верхней оценке в работе [1], теорем 1, 2 и лемм 1, 2, 3. □

Список литературы

1. Демаков А. В. ES^*_U-замыкание мультифункций ранга 2 : ВКР : 02.03.02 / науч. рук. В. И. Пантелеев. Иркутск, 2022. С. 32.

2. Алексеев В. Б., Вороненко Л. Л. О некоторых замкнутых классах в частичной двузначной логике // Дискретная математика. 1994. Т. 6, вып. 4. С. 58–79.

3. Марченков С. С. Операторы замыкания с разветвлением по предикату // Вестник Московского университета. Серия 1, Математика, механика. 2003. № 6. С. 37–39.

4. Ильин Б. П., Пантелеев В. И. Решетка E-замкнутых классов мультифункций ранга 2 // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2024. Т. 48. С. 111–128. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.48.111

Интервал решетки мультиклонов ранга 2, содержащий множество S^-

Фомина Ирина Владимировна

Бурятский государственный университет им. Доржи Банзарова,, e-mail: fomina-irina0104@yandex.ru

В последнее время в области дискретных функций интенсивно изучаются мультифункции — функции, определенные на конечном множестве E и принимающие в качестве своих значений подмножества множества E.

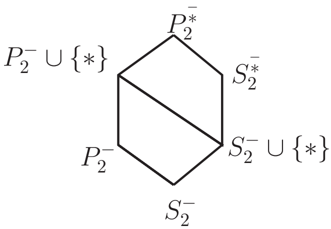
Пусть $E = \{0,1\}$, $F = \{\{0\},\{1\},\{0,1\}\}$ и $G = \{\{0\},\{1\},\{0,1\},\{\varnothing\}\}$. Определим следующие множества функций:

$$M_{2,n} = \{f | f : E^n \to G\}, M_2 = \bigcup_n M_{2,n}, H_{2,n} = \{f | f : E^n \to F\}, H_2 = \bigcup_n H_{2,n}$$

Функции из M_2 и H_2 называются соответственно мультифункциями и гиперфункциями на E. Заметим, что $H_2 \subset M_2$.

Очевидно, что стандартная суперпозиция, которая рассматривается для функций k-значной логики, для работы с данными функциями не подходит. Для мультифункций обычно используется два способа определения суперпозиции. Суперпозиция 2-го вида приведена, например, в [1]. Множество мультифункций, замкнутое относительно суперпозиции 2-го вида и содержащее все проекции, называется частичным ультраклоном.

В [4] показано, что интервал $\zeta\left(S_2^-, P_2^{\bar{*}}\right)$ в решетке частичных ультраклонов содержит ровно 6 различных клонов.



В данной работе рассматривается следующая суперпозиция. Для того чтобы суперпозиция $f(f_1(x_1,...,x_m),...,f_n(x_1,...,x_m))$ задавала некоторую мультифункцию $g(x_1,...,x_m)$ определим значения мультифункции g на наборах из элементов множества E.

Если $(a_1, ..., a_m) \in E^m$, то по определению

$$
g(a_1, ..., a_m) = \begin{cases} \varnothing, \text{если } \exists i : f_i(a_1, \ldots, a_m) = \varnothing; \\ \bigcap\limits_{b_i \in f_i(a_1,...,a_m)} f(b_1, ..., b_n), \text{если} \bigcap f(b_1, \ldots, b_n) \neq \varnothing \text{ и } \forall (b_1, \ldots, b_n) : \\ f(b_1, \ldots, b_n) \neq \varnothing; \\ \varnothing, \text{если} \bigcap f(b_1, \ldots, b_n) = \varnothing \text{ и } \exists (b_1, \ldots, b_n) : \\ f(b_1, \ldots, b_n) = \varnothing; \\ \bigcup\limits_{b_i \in f_i(a_1,...,a_m)} f(b_1, ..., b_n), \text{иначе.} \end{cases}
$$

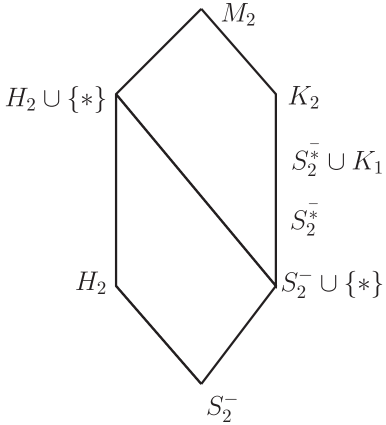
Это определение позволяет вычислить значение мультифункции на любом наборе $(a_1, ..., a_m) \in E^m$.

Для исследования был выбран интервал, содержащий клон S^-.

Все необходимые определения и обозначения можно посмотреть в [1]–[3].

Основной результат сформулирован в виде теоремы.

Теорема. *Интервал $\zeta\,(S^-, M_2)$ содержит ровно 8 различных клонов, а именно, клоны, представленные на рисунке:*



где S_2^- – класс гиперфункций, сохраняющих предикат $\begin{pmatrix} 0 & 1 & - \\ 1 & 0 & - \end{pmatrix}$;

$S_2^{\bar{*}}$–класс мультифункций, сохраняющих предикат $\begin{pmatrix} 0 & 1 & - & * \\ 1 & 0 & - & * \end{pmatrix}$;

K_1 — множество, состоящее из всех мультифункций f таких, что на любом двоичном наборе $\widetilde{\alpha}$ выполняется:$f(\widetilde{\alpha}) = \varnothing$ или $f(\overline{\widetilde{\alpha}}) = \varnothing$.

K_2 — класс мультифункций, значения которых на всех наборах $\widetilde{\alpha}$ и $\overline{\widetilde{\alpha}}$ принадлежат множеству

$$
\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - \\ - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * \\ - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - \\ * \end{pmatrix} \right\}.
$$

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00011, https://rscf.ru/project/24-21-00011

Список литературы

1. Бадмаев С. А. Критерий полноты множества мультифункций в полном частичном ультраклоне ранга 2 // Сибирские электронные математические известия. 2018. Т. 15. С. 450–474.

2. О некоторых интервалах в решетке ультраклонов ранга 2 / С. А. Бадмаев, А. Е. Дугаров, И. В. Фомина, И. К. Шаранхаев // Сибирские электронные математические известия. 2021, т. 18, вып. 2. С. 1210–1218.

3. Пантелеев В. И. Критерий полноты для доопределяемых булевых функций // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2009. Т. 68, № 2. С. 60–79.

4. Fomina I. V. On one interval in the lattice of partial ultraclones of rank 2. // International Conference Maltsev Meeting. 14–19 november 2022. Collection of Abstracts P. 172.

О некоторых разбиениях натурального числа

Ширяева Тамара Алексеевна[1], **Шлепкин Алексей Анатольевич**[2], **Шлепкин Анатолий Константинович**[3]

[1] Сибирский аэрокосмический университет им. М. Ф. Решетнева, e-mail: tas_sfu@mail.ru
[2] Сибирский федеральный университет, e-mail: ps.petrov@yandex.ru
[3] Сибирский аэрокосмический университет им. М. Ф. Решетнева, e-mail: ss_dl@mail.ru

В работе рассматривается взаимосвязь между разбиениями натурального числа n и группами порядка n. В качестве основного инструмента обеспечивающего исследования данной взаимосвязи выступает функция плотности группы.

Определение 1. Пусть $G = \langle g_1, ..., g_n \rangle$ группа с множеством образующих $\mathfrak{N} = \{g_1, ..., g_n\}$. Через $F_{(G,\mathfrak{N}}(l)$, где l целое неотрицательное число, будем обозначать функцию роста группы G в множестве образующих $\mathfrak{N}$. Если $l > 0$, то $F_{(G,\mathfrak{N})}(l)$ дает число элементов группы G, представимых в виде несократимого произведения не более, чем l элементов множества $\mathfrak{N}$ Если $l = 0$,то $F_{(G,\mathfrak{N})}(0) = 1$ (считается, что единица группы представима в виде несократимого произведения длины 0).

Определение 2. Функцию $P_{(G,\mathfrak{N})}(l) = F_{(G,\mathfrak{N})}(l) - F_{(G,\mathfrak{N})}(l - 1)$ для $l > 0$, и $P_{(G,\mathfrak{N})}(0) = 1$ для $l = 0$, будем называть функцией плотности группы G в множестве $\mathfrak{N}$. Функция $P_{(G,\mathfrak{N})}(l)$ для каждого целого неотрицательного l дает число α_l элементов группы G, представимых в виде несократимого произведения l элементов множества $\mathfrak{N}$ [1].

Определение 3. Пусть G — группа и $\mathfrak{N} = \{g_1, ..., g_n\}$ — множество ее образующих. Если $G \neq \langle \mathfrak{N} \setminus \{g_i\} \rangle$, то множество $\mathfrak{N}$ называется минимальным.

В данной заметке мы отождествим функцию плотности с некоторым разбиением некоторого натурального числа n являющегося порядком группы

$$P_{(G,\mathfrak{N})}(l) = (\alpha_1 ... \alpha_l ... \alpha_k,$$

где

$$\alpha_1 + ... + \alpha_l + ... + \alpha_k = n$$

существует такое натуральное m, что для любого $l \leqslant m$ всегда $l - 1 \leqslant l$ и для $l \geqslant m$ всегда $l \geqslant l + 1$

$$\alpha_l \geqslant \alpha_{l+1}$$

Теорема 1. *Группа A_5 имеет 12 различных функций плотности $F_{(A_5,\mathfrak{N})}(l)$ для минимальных множеств образующих состоящих из 2 элементов —*

$$F_{(G,\mathfrak{N}^{(1)})}(l) = (1234577777631),$$

$$F_{(G,\mathfrak{N}^{(2)})}(l) = (123588109653),$$

$$F_{(G,\mathfrak{N}^{(3)})}(l) = (1235811141051),$$

$$F_{(G,\mathfrak{N}^{(4)})}(l) = (12468888861),$$
$$F_{(G,\mathfrak{N}^{(5)})}(l) = (124610151651),$$
$$F_{(G,\mathfrak{N}^{(6)})}(l) = (124710121491),$$
$$F_{(G,\mathfrak{N}^{(7)})}(l) = (124711131381),$$
$$F_{(G,\mathfrak{N}^{(8)})}(l) = (124712121282),$$
$$F_{(G,\mathfrak{N}^{(9)})}(l) = (124712141163),$$
$$F_{(G,\mathfrak{N}^{(10)})}(l) = (12481217151),$$
$$F_{(G,\mathfrak{N}^{(11)})}(l) = (1248141912),$$
$$F_{(G,\mathfrak{N}^{(12)})}(l) = (1248161982),$$

где

$$\mathfrak{N}^{(1)} = \{g_1^{(1)}, g_2^{(1)}\},$$
$$\mathfrak{N}^{(2)} = \{g_1^{(2)}, g_2^{(2)}\},$$
$$\mathfrak{N}^{(3)} = \{g_1^{(3)}, g_2^{(3)}\},$$
$$\mathfrak{N}^{(4)} = \{g_1^{(4)}, g_2^{(4)}\},$$
$$\mathfrak{N}^{(5)} = \{g_1^{51)}, g_2^{(5)}\},$$
$$\mathfrak{N}^{(6)} = \{g_1^{(6)}, g_2^{(6)}\},$$
$$\mathfrak{N}^{(7)} = \{g_1^{(7)}, g_2^{(7)}\},$$
$$\mathfrak{N}^{(8)} = \{g_1^{(8)}, g_2^{(8)}\},$$
$$\mathfrak{N}^{(9)} = \{g_1^{(9)}, g_2^{(9)}\},$$
$$\mathfrak{N}^{(10)} = \{g_1^{(10)}, g_2^{(10)}\},$$
$$\mathfrak{N}^{(11)} = \{g_1^{(11)}, g_2^{(11)}\},$$
$$\mathfrak{N}^{(12)} = \{g_1^{(12)}, g_2^{(12)}\}.$$

Теорема 2. *Пусть G группа, $\mathfrak{N} = \{g_1, g_2\}$ – минимальное множество образующих группы G, состоящее из двух элементов. $F_{(G,\mathfrak{N})}(l)$ – функция плотности группы G совпадающая с одной из перечисленных в теореме 1. Тогда G изоморфна группе A_5. В противном случае (если $F_{(G,\mathfrak{N})}(l)$ – не совпадает ни с одной функцией плотности из теоремы* 1*) группа G не изоморфна группе A_5.*

Теорема 3. *Группа A_5 однозначно определяется своей функцией плотности на минимальном множестве образующих из двух элементов.*

Работа второго автора выполнена при поддержке РНФ (проект 24-71-10004).

Список литературы

1. Шлепкин А. А. Регулярные подстановки и вычисление функции плотности группы // Современные проблемы математики и её приложений : тез. Междунар. (54-й всерос.) молодёж. шк.-конф. Екатеринбург, 2023. С. 33.

Векторное исчисление в работах академика О. И. Сомова

Юлина Анна Олеговна

Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, e-mail: parfenova19761976@mail.ru

XIX век ознаменовался бурным развитием как теоретической, так и прикладной механики: появилось много работ по механике движения и соответствующего математического инструментария. Это было обусловлено промышленным переворотом и новыми военными запросами в начале XVIII в. Круг гениальных идей и новых проблем, с которыми столкнулся О. И. Сомов, был невероятно большим. Центральной заслугой Сомова было ведение в механику векторного исчисления. Сомов глубоко проработал труды Гамильтона и взял из них самое необходимое и полезное для изложения механики на принципиально новом уровне. Он проделал огромную работу по систематизации теоретической механики как в методическом, так и научном плане. Сомов обобщил работы Г. Ламе по координатам, Резаля по геометрическим производным, Кориолиса по ускорениям высших порядков, включив их в свою логически обоснованную, аналитически полностью завершенную и снабженную новейшим математическим аппаратом «Рациональную механику», к анализу которой перейдем далее.

О. И. Сомов оставил богатое научное наследие в математике и механике. В теоретической механике он является одним из основателей общего аналитического метода постановки и решения фундаментальных задач кинематики и динамики. Эти задачи он великолепно выполняет, используя интегральное и дифференциальное исчисление, аппарат теории эллиптических функций, векторный анализ. Все вопросы механики Сомов рассматривает в тесной взаимосвязи с математикой. В его фундаментальных работах блестяще показано, как математический анализ помогает раскрывать законы движения и действия сил природы, с одной стороны, а с другой — как механика помогает развитию аналитических и геометрических методов исследования. Однако же работы академика Сомова незаслуженно забыты. Постараемся восполнить этот пробел в данном докладе.

В динамике Сомов первый представил законченное аналитическое решение задачи о вращении твердого тела около неподвижной точки с помощью аппарата эллиптических функций [10; 11].

Изложение кинематики с помощью векторного анализа также является заслугой О. И. Сомова. Большая часть его статей в этом направлении научной работы вошла в его учебник «Рациональная механика» («Прямой способ для выражения дифференциальных параметров первого или второго порядка в криволинейных координатах» [1]; «Об ускорении различных порядков в относительном движении» [2]; "Construct. des axes d'un ellipse"[3], «Преобразование прямолинейных координат в эллиптические» [4]; "Attract. d'un couche mince sur un point de sa surface"[5]; «О решении одного вопроса механики, предложенного Абелем» [6]; «Доказательство Коши для уравнения равновесия» [7]; «Спрямление кривых линий» [8]; «Алгебраическое доказательство Гамильтонова начала» [9]) Поэтому далее подробно мы проанализируем его фундаментальный труд «Рациональная механика» [12]. Читая курс механики в Санкт-Петербургском университете, Сомов разрабатывал изложение своих лекций рациональной механики, стараясь разъяснить теоретические основы, а также упростить доказательства многих предложений и приемов решения. Учебник Сомова предназначен студентам, изучающим физико-математические науки в университетах. Преподавание теоретической механики в классических (академических) школах, по мнению Сомова, должно быть направлено не только на ознакомление обучающихся с основными истинами, на которые опирается вся наука, но также и «изощрение учащихся в математическом анализе и геометрии» [12]. Математический анализ помогает раскрывать основные законы движения, а механика помогает развитию аналитических и геометрических методов исследования. История дифференциального и интегрального исчисления показывает, что механика была постоянно источником вопросов, для решения которых придумывали новые способы интегрирования функций и уравнений. Два внушительных тома Механики Эйлера фактически представляют сборники задач интегрального исчисления. В аналитической механике Лагранжа четко виден общий метод, следуя которому из одной формулы выводятся решения всех вопросов одного рода. Лекции по динамике Карла Якоби посвящены примерам, объясняющим способы интегрирования дифференциальных уравнений канонического вида и уравнений в частных производных первого порядка. Физико-математические исследования о гравитационных потенциалах, электричестве и магнетизме, теплоте, упругости, звуке, свете представляют собой учение о свойствах функций, их различных разложений в ряды и об интегрировании линейных уравнений в частных производных. Сомов глубоко чувствовал внутренние связи между анализом, геометрией, механикой и математической физикой, которые он убедительно продемонстрировал в своей «Рациональной механике».

Обобщая опыт предшествующих изложений об ускорениях высших порядков, Сомов выходит на более высокий уровень абстракций, дает формулу для дифференцирования геометрического произведения, аналогичную с формулой Лейбница для дифференцирования алгебраического произведения и показывает, как она применяется для определения проекций скоростей и ускорений на данных, неподвижных или подвижных осях. Среди прорывных достижений Сомова в «Рациональной механике» назовем распространение правила умножения двух алгебраических сумм на геометрические суммы, способы выражения геометрическими производными какой-либо переменной прямолинейной длины при помощи скорости и ускорения крайних точек, геометрическое дифференцирование по разным переменным и некоторые предложения, относящиеся к геометрическим вариациям. Из всех обобщений и аналогий Сомов составил принципиально новый метод для кинематических исследований, заменяющий прежние синтетические приемы и облегчающий значительно приложения анализа к кинематике. Огромным значением этого новаторского метода было то, что он позволял избегать длинных выкладок, обусловленных, нередко без необходимости, использованием прямолинейных координат.

Поворотным моментом в истории изложения механики явилось введение понятия градиента, или, как его сначала называли, дифференциального параметра. Впервые его рассмотрел Г. Ламе в своем курсе [13] как

$$p = \sqrt{(\frac{dF}{dx'})^2 + (\frac{dF}{dy'})^2 + (\frac{dF}{dz'})^2} = \sqrt{(\frac{dF}{dx})^2 + (\frac{dF}{dy})^2 + (\frac{dF}{dz})^2}$$

«...общие выражения дифференциальных параметров. Стоит отметить, что эти параметры сохраняют тот же характер и ту же независимость, когда функции точки выражаются в криволинейных координатах.» («...Expressions générales des paramétres différentiels. Il s'agit de constater que ces paramétres conservent le même caractére et la même indépendance, quand les fonctions-de-point sont exprimées en coordonnées curvilignes»)

Сомов гениально обобщил понятие дифференциального параметра Ламе, придав ему роль универсальной характеристики.

Исключительно Сомову принадлежат формирование и изложение в анализе (теория поля) и механике таких понятий как линия уровня, поверхность уровня, потенциал.

Важным введением Сомова в приложении анализа к кинематике является прямой способ для определения дифференциальных параметров первого порядка от функции точки. Г. Ламе рассматривал дифференциальный параметр первого порядка функции точки как аналитическое выражение, в декартовых координатах [13]. Сомов представил дифференциальный параметр как отрезок, отложенный на нормали к поверхности уровня (касательной). Приняв такой геометрический образ параметра и, определив его независимо от системы координат как производную функции точки относительно перемещения нормального к поверхности уровня, Сомов показал прямой способ для выражения дифференциальных параметров первого и второго порядка и кривизны поверхности в каких либо координатных системах ортогональных или косоугольных. Этот способ составления дифференциальных параметров первого порядка охватывает все графические и аналитические способы для построения нормалей к поверхностям и кривым линиям. Сомов изложил его в 7-й главе своей Кинематики с новым развитием (после Ламе) и с приложением к определению координатных параметров наиболее типичных систем координат. Таким образом, Сомов придал дифференциальному параметру векторный смысл, что стало революционным поворотом в изложении механики.

В статье об ускорениях высших порядков [2], Сомов дает общие формулы для проекции скорости и ускорений различных порядков на три координатные параметры и на три другие, сопряженные с ними оси, которые называет осями координат, потом применяет эти формулы к выводу общих выражений движения в криволинейных координатах, определяющих кривые первого и второго порядка кривизны. В 10-й и 9-й главе выводы всех этих формул значительно упрощаются при помощи формул для проекций на направления этих параметров геометрических производных координатных параметров, как прямых, так и обратных. В 12-й главе Сомов приводит способы нахождения геометрических производных дифференциального параметра произвольной точки с помощью тех же выражений. Все вместе это составляет основание общей теории криволинейных координат, применение которых стало получать в геометрии и математической физике широкое распространение. В главах 12-й и 13-й Сомов показывает, как с помощью ускорений и геометрических производных дифференциальных параметров, составляются общие выражения для производных по времени от функции точки и функции системы точек, и как на основании этих выражений определяется общий вид условий, которым должны удовлетворять скорости и ускорения точек, когда они несвободны.

В кинематике неизменяемой системы Сомов сначала излагает свойства возможных скоростей свободной системы, основываясь на условиях для скоростей, вытекающих из неизменяемости расстояний между точками. После этого выводит те же свойства из формул, данных Эйлером для проекции возможной скорости на трех осях, неизменно связанных с телом, показывает связь между системой возможных скоростей и системой прямых, перпендикулярных к скоростям. Далее на основании формул Эйлера для определения проекций геометрической производной какой-либо длины на прямоугольных подвижных осях он обосновывает исследование об ускорениях высших порядков при движении неизменяемой системы.

Свойства возможных скоростей несвободной неизменяемой системы были исследованы В. Маннгеймом. Маннгейм рассматривал только тот случай возможных скоростей, когда тело опирается на неподвижную поверхность только в одной точке. Однако существует более общее условие, представляющие собой линейное уравнение, связывающие проекции поступательной скорости и вращательной скорости на три перпендикулярные оси, и такая зависимость практически реализуется. Сомов дает этой связи вид, независимый от системы координат, и показывает, как по данным условиям, число которых может быть больше 5, можно исследовать аналитически возможные скорости несвободной неизменяемой системы точек, определяя сопряженные оси вращения для всякой возможной системы скоростей, или сопряженные полюсы линейных комплексов.

Наконец в 17-й главе об относительном движении, с помощью геометрического дифференцирования, он выводит соотношения между скоростями и ускорениями различных порядков в абсолютном, переносном и относительном движении. Впервые в механике вводит векторное произведение, получая ускорение Кориолиса, которое называет поворотным.

Первая часть «Рациональной механики» (кинематика) Сомова была издана в 1872 г., в 1874 г. была выпущена и неоконченная вторая часть (статика, динамика). После смерти автора эти два тома были переведены на немецкий язык в 1878 г. После Курса Сомова в механике прочно закрепился векторный анализ, впоследствии это привело к созданию теории поля.

Список литературы

1. Сомов О. И. Прямой способ для выражения дифференциальных параметров первого или второго порядка в криволинейных координатах // Записки Императорской академии наук. Санкт-Петербург : тип. Императорской Академии наук, 1865. Т. 8, кн. 1.

2. Сомов О. И. Об ускорении различных порядков в относительном движении // Записки Императорской Академии наук. Санкт-Петербург : тип. Императорской Академии наук, 1865. Т. 9, кн. 1.

3. Сомов О. И. Construct. des axes d'un ellipse // Записки Императорской Академии наук. Санкт-Петербург : тип. Императорской Академии наук, 1870. Т. 18, кн. 1.

4. Сомов О. И. Преобразование прямолинейных координат в эллиптические // Записки Императорской Академии наук. Санкт-Петербург : тип. Императорской Академии наук, 1860. Т. 10, кн. 2.

5. Сомов О. И. Attract. d'un couche mince sur un point de sa surface // Записки Императорской Академии наук. Санкт-Петербург : тип. Императорской Академии наук, 1971. Т. 19, кн. 1.

6. Сомов О. И. О решении одного вопроса механики, предложенного Абелем // Записки Императорской Академии наук. Санкт-Петербург : тип. Императорской Академии наук, 1866. Т. 9, кн. 1.

7. Сомов О. И. Доказательство Коши для уравнения равновесия // Записки Императорской Академии наук. Санкт-Петербург : тип. Императорской Академии наук, 1869. Т. 13, кн. 1.

8. Сомов О. И. Спрямление кривых линий // Записки Императорской Академии наук. Санкт-Петербург : тип. Императорской Академии наук, 1869. Т. 15, кн. 1.

9. Сомов О. И. Алгебраическое доказательство Гамильтонова начала//Записки Императорской Академии наук. Санкт-Петербург : тип. Императорской Академии наук, 1870. Т. 17, кн. 1.

10. Юлина А. О. К истории задачи о вращении твердого тела около неподвижной точки в случае первоначального удара // История науки и техники. 2021. № 12. С. 3–8.

11. Юлина А. О. История развития теории эллиптических функций в работах Абеля, Якоби, Вейерштрасса, Сомова. // Таврический вестник информатики и математики. 2021. № 3. С. 79–92.

12. Сомов О. И. Рациональная механика. Кинематика. Санкт-Петербург : тип. Императорской Академии наук, 1872. 491 с.

13. Lame G. Lecons sur les coordonnees curvilignes. Paris, 1859. 410 p.

Указатель авторов

Научное издание

СИНТАКСИС И СЕМАНТИКА ЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Материалы
8-й Всероссийской конференции,
посвященной памяти И. К. Шаранхаева

Аршан, Республика Бурятия, 20–24 августа 2024 г.

Материалы публикуются в авторской редакции

Темплан 2024. Поз. 82
Уч.-изд. л. 5,2

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИГУ
664082, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 124