Математические заметки

Том 117 выпуск 3 март 2025

УДК 510.67

Псевдо-счетно-категоричные формулы и теории

Б. Ш. Кулпешов, Ин. И. Павлюк, С. В. Судоплатов

Введено понятие псевдо-счетно-категоричной формулы, исследованы синтаксические и семантические возможности таких формул. Изучены аппроксимации теорий с помощью таких формул, включая псевдо-счетно-категоричные упорядоченные теории, теории абелевых групп и модулей, эренфойхтовы теории. Получено описание канонических представителей псевдо-счетно-категоричных упорядоченных теорий. Изучены возможности сохранения и нарушения псевдо-счетной категоричности при обогащениях и обеднениях теорий. Описаны счетные спектры псевдо-счетно-категоричных теорий.

Библиография: 22 названия.

Ключевые слова: псевдо-счетно-категоричная формула, псевдо-счетно-категоричная теория, упорядоченная теория, абелева группа, модуль, эренфойхтова теория.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm14382

1. Введение, постановка задачи и предварительные сведения. В работах [1], [2] введены и исследованы понятия аппроксимации теории и аппроксимирующей формулы соответственно. Эти понятия имеют адаптацию к произвольному семейству теорий данной сигнатуры, в частности, к произвольному семейству теорий конечных структур, которые задают псевдоконечные теории на основе аппроксимаций псевдоконечными формулами [3]. В настоящей работе изучаются аппроксимации псевдо-счетно категоричных теорий [4], т.е. теорий, аппроксимируемых счетно категоричными теориями посредством формул, выполнимых в моделях счетно категоричных теорий. Такие формулы называются *псевдо-счетно-категоричными.* Исследованы синтаксические и семантические возможности данных формул, свойства таких формул, аппроксимации теорий с помощью этих формул, включая псевдо-счетно-категоричные упорядоченные теории, теории абелевых групп и модулей, эренфойхтовы теории. Получено описание канонических представителей псевдо-счетно-категоричных упорядоченных теорий. Изучены возможности сохранения и нарушения псевдо-счетной категоричности при обогащениях и обеднениях теорий. Описаны счетные спектры псевдо-счетно-категоричных теорий.

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан, грант № AP19674850, а также в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева, проект № FWNF-2022-0012.

Всюду далее мы рассматриваем полные теории первого порядка в сигнатуре Σ, причем эта сигнатура для семейства теорий $\mathcal{T}$ обозначается $\Sigma(\mathcal{T})$. Через $\mathcal{T}_\Sigma$ обозначается множество всех теорий сигнатуры Σ.

Как обычно, через $F(\Sigma)$ мы обозначаем множество всех формул сигнатуры Σ, а через $\mathrm{Sent}(\Sigma)$ – множество всех предложений сигнатуры Σ.

Определение 1 [2]. Для семейства $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_\Sigma$ формула $\varphi = \varphi(\overline{x})$ называется *$\mathcal{T}$-аппроксимирующей*, если φ выполняется в модели некоторой точки накопления семейства $\mathcal{T}$. Формула φ называется *аппроксимирующей*, если она является $\mathcal{T}_\Sigma$-аппроксимирующей, где $\Sigma \supseteq \Sigma(\varphi)$.

Замечание 1 [2]. Аппроксимируемость формулы φ зависит от сигнатуры Σ. Действительно, формула $\varphi = \forall\, x \forall\, y(x \approx y)$ не является аппроксимирующей в пустой сигнатуре Σ_0, тогда как, добавляя бесконечное число унарных предикатов P_i, можно написать, что эти предикаты независимо пусты/непусты и получим бесконечное семейство $\mathcal{T}$ теорий, модели которых являются одноэлементными и удовлетворяют φ.

Таким образом, важно, какая сигнатура $\Sigma \supseteq \Sigma(\varphi)$ используется для подтверждения того, что φ является аппроксимирующей формулой.

Замечание 2 [2]. По определению формула φ является $\mathcal{T}$-аппроксимирующей тогда и только тогда, когда φ выполняется в моделях бесконечного числа теорий из $\mathcal{T}$ некоторыми кортежами, т.е. предложение $\exists\, \overline{x}\varphi$ принадлежит бесконечному числу теорий из $\mathcal{T}$.

В силу замечания 2 аппроксимирующие формулы сводятся к аппроксимирующим предложениям, и ниже мы будем рассматривать преимущественно аппроксимирующие предложения $\varphi \in \mathrm{Sent}(\Sigma)$.

Следуя [2], обозначим через $\mathrm{AF}(\mathcal{T})$ множество всех $\mathcal{T}$-аппроксимирующих формул, и через $\mathrm{AF}(\Sigma)$ – множество всех аппроксимирующих формул сигнатуры Σ. Ограничения множеств $\mathrm{AF}(\mathcal{T})$ и $\mathrm{AF}(\Sigma)$ до множества $\mathrm{Sent}(\Sigma)$, где $\Sigma \supseteq \Sigma(\mathcal{T})$ обозначаются через $\mathrm{AS}(\mathcal{T})$ и $\mathrm{AS}(\Sigma)$ соответственно.

Определение 2 [1]. Пусть $\mathcal{T}$ – семейство теорий и T – произвольная теория, не принадлежащая $\mathcal{T}$. Теория T называется *$\mathcal{T}$-аппроксимируемой*, или *аппроксимированной* семейством $\mathcal{T}$, или *псевдо-$\mathcal{T}$-теорией*, если для любой формулы $\varphi \in T$ существует $T' \in \mathcal{T}$, для которой $\varphi \in T'$.

Если теория T является $\mathcal{T}$-аппроксимируемой, то $\mathcal{T}$ называется *аппроксимирующим семейством* для T, а теории $T' \in \mathcal{T}$ – *аппроксимациями* для T.

Следуя [2], обозначим через $\mathrm{CF}(\Sigma)$ множество всех совместных формул сигнатуры Σ, а через $\mathrm{CS}(\Sigma)$ – множество всех совместных предложений сигнатуры Σ

По определению каждая $\mathcal{T}$-аппроксимируемая теория состоит из попарно совместных $\mathcal{T}$-аппроксимирующих предложений, входящих в $\mathrm{CS}(\Sigma(\mathcal{T}))$.

Частным случаем аппроксимирующих формул являются псевдоконечные формулы [3], составляющие псевдоконечные теории.

Определение 3 [6]–[9]. Бесконечная структура $\mathcal{M}$ называется *псевдоконечной*, если любое предложение, истинное в $\mathcal{M}$, имеет конечную модель. Если $T = \mathrm{Th}(\mathcal{M})$ для псевдоконечной структуры $\mathcal{M}$, то теория T также называется *псевдоконечной*.

Определение 4 [3]. Формула φ, истинная в некоторой бесконечной модели, называется *псевдоконечной*, если она истинна также и в некоторой конечной модели.

Множество всех псевдоконечных формул (соответственно, предложений) сигнатуры Σ обозначается через $\mathrm{PFF}(\Sigma)$ ($\mathrm{PFS}(\Sigma)$).

По определению имеем $\mathrm{PFF}(\Sigma) \subset \mathrm{AF}(\Sigma) \subset \mathrm{CF}(\Sigma)$ и $\mathrm{PFS}(\Sigma) \subset \mathrm{AS}(\Sigma) \subset \mathrm{CS}(\Sigma)$. Рассматриваемые включения являются строгими, поскольку некоторые аппроксимирующие формулы не имеют конечных моделей и существуют совместные формулы, выполнимые лишь в конечных моделях.

2. Псевдо-счетно-категоричные формулы и их свойства. В этом разделе мы определим понятие псевдо-счетно-категоричной формулы, как аппроксимирующей формулы специального вида и рассмотрим некоторые свойства таких формул.

Обозначим через $\mathcal{T}_\Sigma^{\mathrm{cc}}$ множество всех счетно категоричных теорий сигнатуры Σ, имеющих счетные модели.

Определение 5. Для семейства $\mathcal{T}_\Sigma^{\mathrm{cc}}$ формула $\varphi = \varphi(\overline{x})$ называется *псевдо-$\aleph_0$-категоричной* или *псевдо-счетно-категоричной*, если φ выполняется в модели некоторой точки накопления T семейства $\mathcal{T}_\Sigma^{\mathrm{cc}}$, не являющейся счетно категоричной теорией.

Как и для аппроксимирующих формул при самостоятельном рассмотрении формула φ называется *псевдо-$\aleph_0$-категоричной* или *псевдо-счетно-категоричной*, если она является псевдо-$\aleph_0$-категоричной относительно подходящей сигнатуры $\Sigma \supseteq \Sigma(\varphi)$.

Множество псевдо-счетно-категоричных формул сигнатуры Σ обозначается через $\mathrm{PCCF}(\Sigma)$, а множество $\mathrm{PCCF}(\Sigma) \cap \mathrm{Sent}(\Sigma)$ псевдо-счетно-категоричных предложений сигнатуры Σ – через $\mathrm{PCCS}(\Sigma)$.

Замечание 3. По определению любая псевдо-счетно-категоричная формула относится как к счетно категоричным теориям, причем в силу аппроксимирования имеется бесконечно много таких теорий, так и к теориям, не являющихся счетно категоричными, но не отделимых от счетно категоричных теорий никакими предложениями.

В сигнатуре $\Sigma = \{<\}$ предложение φ_{dlo}, описывающее плотные линейные порядки, принадлежит множеству $\mathrm{Sent}(\Sigma) \setminus \mathrm{PCCS}(\Sigma)$, а после добавления к сигнатуре Σ бесконечного множества одноместных предикатов P_i для обогащенной сигнатуры Σ' имеет место $\varphi_{\mathrm{dlo}} \in \mathrm{PCCS}(\Sigma')$. Тем самым, как и для аппроксимирующих формул в общем виде, здесь имеется зависимость псевдо-счетной категоричности от выбранной сигнатуры.

Так как совместная формула произвольной теории из семейства $\mathcal{T}_\Sigma^{\mathrm{cc}}$ имеет бесконечную модель, заведомо не принадлежат множеству $\mathrm{PCCF}(\Sigma)$ формулы, выполнимые лишь в конечных моделях.

Наконец, имеется ряд формул φ, не являющихся псевдо-счетно категоричными относительно сигнатуры $\Sigma(\varphi)$ в силу того, что они задают бесконечное число

n-типов, начиная с некоторого натурального числа n_0. К таким формулам относится, например, следующее предложение ψ сигнатуры $\{Q^{(2)}\}$:

$$\forall\, x\neg Q(x,x) \wedge \forall x, y\big(Q(x,y) \to Q(y,x)\big) \\ \wedge \forall\, x\big(\exists^{=1} yQ(x,y) \vee \exists^{=2} yQ(x,y)\big) \wedge \exists^{=1} x\exists^{=2} yQ(x,y).$$

Любая модель этой формулы состоит из одной висячей вершины, связанной бесконечной цепью с вершинами валентности 2, а также некоторым, пустым, конечным или бесконечным числом циклов и/или цепей, состоящих из вершин валентности 2. Наличие хотя бы одной такой цепи влечет бесконечное число n-типов, начиная с $n_0 = 2$, и исключает принадлежность предложения ψ множеству PCCS($\{Q\}$).

Еще одним примером формулы, не имеющей счетно категоричных моделей, является формула $\forall\, y\, \exists^{\geqslant 2} x\, f(x) \approx y$, поскольку любой унар $\langle M; f\rangle$, удовлетворяющий этой формуле, имеет график бесконечного диаметра.

Замечание 4. По определению, для любой сигнатуры Σ, множества PCCF(Σ) и PCCS(Σ) замкнуты относительно $\vdash$-выводимости, а также относительно предложений ψ, сохраняющих или расширяющих непустые окрестности $(\mathcal{T}_\Sigma^{\rm cc})_\varphi = \{T \in \mathcal{T}_\Sigma^{\rm cc} \mid \varphi \in T\}$ после замены φ на ψ. Таким образом, псевдо-счетно категоричные предложения образуют классы эквивалентности по отношению равенства окрестностей, которые в свою очередь разбиваются на классы эквивалентности относительно взаимной выводимости.

В силу замечания 4 множества PCCF(Σ) и PCCS(Σ) снабжены операциями дизъюнкции $\vee$ и при этом выполняется следующее:

Предложение 1. *Системы* $\langle$PCCF$(\Sigma); \vee\rangle$ *и* $\langle$PCCS$(\Sigma); \vee\rangle$ *являются верхними полурешетками.*

Замечание 5. Каждая из полурешеток в предложении 1 допускает операцию конъюнкции $\wedge$ лишь при ограничении на множество формул фиксированной теории, являющейся предельной точкой для класса счетно категоричных теорий, и при этом такие ограничения образуют дистрибутивные решетки.

Таким образом псевдо-счетно категоричные формулы замкнуты относительно взятия дизъюнкций и некоторых конъюнкций.

Замечание 6. Нетрудно заметить, что совместные бескванторные формулы имеют бесконечные счетно категоричные модели и при взятии подходящих сигнатур, как в замечании 3, становятся псевдо-счетно-категоричными. Это означает, что любая совместная $\exists$-формула, т.е. совместная формула вида $\exists\, x_1 \ldots \exists\, x_k \varphi$, где φ – бескванторная формула, является псевдо-счетно-категоричной относительно некоторой сигнатуры. Для $\forall$-формул, т.е. формул вида $\forall\, x_1 \ldots \forall\, x_k \varphi$, где φ – бескванторная формула, это свойство не выполняется, поскольку, например, формула $\forall\, x\, \forall\, y\, x \approx y$ не имеет бесконечных счетно категоричных моделей. Эта формула показывает, что некоторые формулы, например, формула $\neg\forall\, x\, \forall\, y\, x \approx y$, не сохраняют свойство псевдо-счетной категоричности при навешивании отрицания. Вместе с тем, как замечено для бескванторных формул, навешивание отрицания для таких формул сохраняет псевдо-счетную категоричность.

3. Псевдо-счетно-категоричные теории, их обогащения и обеднения.

Определение 6 [4]. Элементарная теория T бесконечной структуры $\mathcal{M}$, не являющейся $\aleph_0$-категоричной, называется *псевдо-$\aleph_0$-категоричной* или *псевдо-счетно-категоричной*, если любое предложение, истинное в $\mathcal{M}$, имеет бесконечную $\aleph_0$-категоричную модель $\mathcal{N}$. При этом модели $\mathcal{N}$ называются *аппроксимациями* модели $\mathcal{M}$, а сама модель $\mathcal{M}$ называется *псевдо-$\aleph_0$-категоричной*.

Отметим, что по определению любая псевдо-$\aleph_0$-категоричная теория T сигнатуры Σ состоит из псевдо-$\aleph_0$-категоричных предложений, входящих в теории из $\mathcal{T}_\Sigma^{\rm cc}$.

Обозначим через Σ^1 произвольную сигнатуру, состоящую из константных символов c_i, $i \in I$, а также нульместных и одноместных предикатных символов P_j, $j \in J$.

Покажем, что каждая теория T сигнатуры Σ^1 либо имеет лишь конечные модели, либо счетно категорична, либо псевдо-$\aleph_0$-категорична.

Действительно, известно [5], что формулы сигнатуры Σ^1 представляются булевыми комбинациями формул, описывающих число элементов в пересечениях литер P^δ одноместных предикатов P, попадание констант в эти пересечения, совпадение или несовпадение констант, а также выполнимость или невыполнимость нульместных предикатов. При этом структура, имеющая сигнатуру Σ^1, конечна тогда и только тогда, когда все литеры конечны. Опираясь на теорему Рыль-Нардзевского, замечаем, что для любой сигнатуры Σ^1 счетная категоричность теории T, имеющей бесконечную счетную модель, равносильна конечности или, что то же самое, изолированности семейства 1-типов $S^1(\varnothing)$, т.е. сводимости пересечений литер P^δ к конечным пересечениям, каждое из которых включает лишь конечное число сигнатурных констант. При этом наличие лишь конечного числа различных одноместных предикатов и конечного числа различных констант равносильно единственности счетной модели теории T с точностью до изоморфизма.

Осталось рассмотреть случай, когда теория T не имеет конечных моделей и не является счетно категоричной. Поскольку определимые связи между элементами моделей теории T сводятся к связям относительно описанных булевых комбинаций формул, т.е. попаданию элементов в одни и те же литеры, равенству и неравенству элементов между собой и относительно констант, а сигнатура каждой формулы конечна, модель произвольной совместной формулы φ теории T можно построить как конечную, с учетом мощностных границ пересечений литер P^δ и числа различных констант, так и бесконечную, заменяя некоторое конечное пересечение литер P^δ на счетное, с учетом того, что по некоторому такому пересечению нет верхней оценки для ее мощности. Наличие такого пересечения вытекает из характеризации конечности модели. Полученная модель формулы φ является счетно категоричной. Тем самым, теория является псевдо-$\aleph_0$-категоричной и имеет место следующая:

Теорема 1. *Любая теория T сигнатуры Σ^1 является псевдо-$\aleph_0$-категоричной тогда и только тогда, когда T не имеет конечных моделей и не является $\aleph_0$-категоричной.*

Конструкция, обосновывающая теорему 1, дает представление как моделей теории T, так и моделей совместных формул теории T. При этом наличие бесконечной модели теории T, сводящейся к конечной модели, удовлетворяющей произвольной заданной формуле $\varphi \in T$, помимо счетной категоричности и псевдо-$\aleph_0$-категоричности, дает псевдоконечность теории T.

Таким образом, для теорий сигнатур Σ^1 имеет место трихотомия, согласно которой каждая такая теория либо принадлежит классу теорий с конечными моделями либо принадлежит классу счетно категоричных теорий, либо принадлежит классу псевдо-$\aleph_0$-категоричных теорий. Последние два случая объединяются классом псевдоконечных теорий.

Рассмотрим теперь класс $\mathcal{T}_{\rm pcc}$ псевдо-$\aleph_0$-категоричных теорий и его дополнение $\overline{\mathcal{T}}_{\rm pcc}$ в классе всех теорий, не являющихся счетно категоричными и не имеющими конечных моделей, а также взаимосвязь этих классов при обогащениях и обеднениях.

Согласно теореме 1 класс $\overline{\mathcal{T}}_{\rm pcc}$ не содержит теорий сигнатуры Σ^1. Покажем, что в класс $\overline{\mathcal{T}}_{\rm pcc}$ попадают некоторые теории любой более богатой сигнатуры, т.е. сигнатуры, содержащей хотя бы один функциональный символ местности $\geqslant 1$ и любой предикатный символ местности $\geqslant 2$. С этой целью заметим, что для одноместного функционального символа f формула $\forall\, y\, \exists^{\geqslant 2} x f(x) \approx y$ не имеет счетно категоричной модели, поскольку эта формула задает бесконечное число 2-типов. При рассмотрении n-местного функционального символа g_n $n \geqslant 2$, можно написать формулу $\forall\, y\, \exists^{\geqslant 2} x g_n(x, x, \dots, x) \approx y$, а при рассмотрении n-местного предикатного символа P_n – написать формулу

$$\forall\, x_1, \dots, x_{n-1} \exists^{=1} y P_n(x_1, \dots, x_{n-1}, y) \wedge \forall\, y\, \exists^{\geqslant 2} x P_n(x, \dots, x, y),$$

для которой P_n является графиком функции f при $n = 2$ и графиком функции g_{n-1} при $n \geqslant 3$.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Для любой сигнатуры Σ имеет место $\overline{\mathcal{T}}_{\rm pcc} \cap \mathcal{T}_\Sigma \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда Σ содержит хотя бы один функциональный символ местности $\geqslant 1$ или хотя бы один предикатный символ местности $\geqslant 2$.*

Замечание 7. В ряде случаев для некоторых классов теорий $\mathcal{T}$, сигнатуры которых не исчерпывается сигнатурами вида Σ^1, имеет место $\overline{\mathcal{T}}_{\rm pcc} \cap \mathcal{T} = \varnothing$. Например, любая теория T сигнатуры $\Sigma_E = \{E\}$, с бесконечными моделями, для которой E является отношением эквивалентности, задается функцией $f_T \colon \omega \cup \{\infty\} \to \omega \cup \{\infty\}$, устанавливающей число λ-элементных E-классов в насыщенных моделях, для каждого $\lambda \in \omega \cup \{\infty\}$. Поскольку каждое предложение $\varphi \in T$ позволяет описать лишь конечные нижние оценки для числа и мощности E-классов, имеется счетно категоричная модель предложения φ. При этом счетная категоричность теории T равносильна конечности множества $\mathrm{Supp}(f_T) = \{n \in \omega \mid f_T(n) \neq 0\}$, а попадание теории T в класс $\overline{\mathcal{T}}_{\rm pcc}$ означает, что множество $\mathrm{Supp}(f_T)$ бесконечно.

Подобная дихотомия выполняется и для теорий T вложенных отношений эквивалентности, для которых в качестве функций инвариантов f_T выступают количества и мощности E_i-классов, из которых состоят E_j-классы. Тем самым, для таких теорий также устанавливается отсутствие теорий бесконечных моделей, не являющихся ни счетно категоричными, ни псевдо-счетно-категоричными.

Предложение 2. 1. *Если теория T принадлежит классу $\mathcal{T}_{\mathrm{pcc}}$, то любое ее обогащение T' либо принадлежит классу $\mathcal{T}_{\mathrm{pcc}}$, либо принадлежит классу $\overline{\mathcal{T}}_{\mathrm{pcc}}$, в зависимости от того, отсутствует или присутствует в T' формула, нарушающая псевдо-счетную категоричность.*

2. *Если теория T принадлежит классу $\overline{\mathcal{T}}_{\mathrm{pcc}}$, то любое ее обогащение T' также принадлежит этому классу, а ее обеднения T'' могут оставаться в классе $\overline{\mathcal{T}}_{\mathrm{pcc}}$, попадать в класс $\mathcal{T}_{\mathrm{pcc}}$ или являться счетно категоричными, в зависимости от того, сохраняются ли в T'' формулы, нарушающие псевдо-счетную категоричность, и сохраняются ли в T'' формулы, нарушающие счетную категоричность.*

Доказательство очевидно по определению классов $\mathcal{T}_{\mathrm{pcc}}$ и $\overline{\mathcal{T}}_{\mathrm{pcc}}$.

Замечание 8. На основании теоремы 1, предложения 2 и структурного описания любая теория T сигнатуры Σ^1, не имеющая конечных моделей, при обогащении T' либо сохраняет счетную категоричность, если добавляется конечное число новых различных одноместных предикатов и конечное число новых различных констант, либо становится почти-счетно-категоричной, если таких добавляемых одноместных предикатов или констант берется бесконечно много. При обеднении T'' теории T либо сохраняется счетная категоричность, если у T имеется конечное число различных одноместных предикатов и конечное число различных констант, либо сохраняется почти-счетная категоричность, если у T имеется бесконечное число различных одноместных предикатов или бесконечное число различных констант, либо почти-счетно-категоричная теория T превращается в счетно категоричную теорию T'', если в T'' остается лишь конечное число различных одноместных предикатов и конечное число различных констант.

4. Псевдо-счетно-категоричные порядки. В этом разделе будут рассматриваться теории линейных порядков $<$. Введем следующее обозначение:

$$\begin{aligned} S_0(x,y) := \forall\, z_1, z_2 \neg(z_1 < z_2 \wedge z_2 < z_1) \wedge \forall\, z_1, z_2, z_3(z_1 < z_2 \wedge z_2 < z_3 \to z_1 < z_3) \\ \wedge\, x < y \wedge \neg\exists\, z(x < z \wedge z < y). \end{aligned}$$

Следующий пример показывает, что существуют теории линейных порядков, принадлежащие классу $\overline{\mathcal{T}}_{\mathrm{pcc}}$.

Пример 1 [4]. Рассмотрим структуру

$$\mathcal{M} := \langle 1 + \mathbb{Q} + 2 + \mathbb{Q} + \dots + n + \mathbb{Q} + \cdots, < \rangle.$$

Очевидно, что данная структура не является $\aleph_0$-категоричной, поскольку имеет бесконечно много 1-типов. Она также не является псевдо-$\aleph_0$-категоричной, так как следующее предложение

$$\begin{aligned} \exists\, x_1 \theta(x_1) \wedge \forall\, x(\theta(x) \to \exists\, y \exists\, z[x < y < z \wedge \neg\theta(y) \wedge \theta(z) \\ \wedge (\neg\exists\, t_1 S_0(x, t_1) \to \forall\, u_1[x < u_1 \leqslant y \to \neg\theta(u_1)]) \\ \wedge (\neg\exists\, t_2 S_0(t_2, z) \to \forall\, u_2[y \leqslant u_2 < z \to \neg\theta(u_2)])]) \end{aligned}$$

не имеет бесконечной $\aleph_0$-категоричной модели. Здесь формула $\theta(x)$ означает, что x имеет непосредственного последователя или непосредственного предшественника, а $S_0(x,y)$ означает, что x есть непосредственный предшественник для y.

В следующем примере устанавливается существование счетно категоричного линейного порядка, некоторое обогащение которого одноместным предикатом не является псевдо-$\aleph_0$-категоричным.

Пример 2. Пусть $\mathcal{M} := \langle \mathbb{Q}, <, P^1 \rangle$ – линейно упорядоченная структура, где $\mathbb{Q}$ – множество рациональных чисел, $P(\mathcal{M}) = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, т.е. $P(\mathcal{M})$ выделяет множество неотрицательных целых чисел в $\mathcal{M}$. Рассмотрим следующие формулы:

$$S_P(x, y) := P(x) \wedge P(y) \wedge x < y \wedge \forall\, z\big(x \leqslant z \leqslant y \wedge P(z) \to z = x \vee z = y\big),$$
$$\Phi := \exists\, z P(z) \wedge \forall x\big[P(x) \to \exists\, y S_P(x, y)\big].$$

Предложение Φ не имеет бесконечной $\aleph_0$-категоричной модели, поскольку задает бесконечное число 2-типов, откуда получаем, что теория $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ не является псевдо-$\aleph_0$-категоричной, в то время как теория линейного порядка $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ счетно категорична.

Таким образом, существует счетно категоричная теория T линейного порядка, обогащение которой одним одноместным предикатом принадлежит классу $\overline{\mathcal{T}}_{\mathrm{pcc}}$.

Замечание 9. Отметим, что эффект, аналогичный добавлению одноместного предиката к счетно категоричному порядку, как в примере 2, нельзя получить из счетно категоричной теории T обогащением конечным числом констант, поскольку любое такое обогащение сохраняет счетную категоричность. Так как в построении каждой формулы может участвовать лишь конечное число константных символов, то же самое можно утверждать для произвольного константного обогащения теории T.

На основании замечания 9 имеет место следующая дихотомия для константных обогащений счетно категоричных теорий.

Теорема 3. *Для любой счетно категоричной теории T любое ее константное обогащение T' либо счетно категорично, если в моделях теории T' имеется лишь конечное число различных сигнатурных констант, либо T принадлежит классу $\mathcal{T}_{\mathrm{pcc}}$, если в моделях теории T' имеется бесконечное число различных сигнатурных констант.*

Напомним следующую характеризацию для псевдоконечных линейных порядков.

Теорема 4 [7], [4]. *Пусть T – полная теория бесконечного линейного порядка. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *теория T псевдоконечна;*

(2) $T = \mathrm{Th}(\langle \omega + \omega^*, < \rangle)$;

(3) $T = \mathrm{Th}(\langle \omega + \sum_{i \in I} (\omega^* + \omega)_i + \omega^*, < \rangle)$ *для некоторого множества индексов I, где $(\omega^* + \omega)_i$ – копии порядка $\omega^* + \omega$.*

Напомним, что счетно категоричные линейные порядки были классифицированы Ж. Розенштейном в [13], где он конструировал их из конечных линейных порядков, используя две операции: конкатенацию и $\mathbb{Q}$-перемешивание.

Рассмотрим линейно упорядоченную структуру $\mathbb{Q}_n := \langle \mathbb{Q}_n, <_{\mathbb{Q}_n}, C_1^1, \dots, C_n^1 \rangle$, являющуюся счетным плотным линейным порядком с взаимно плотными n цветами, т.е. для любых $a, b \in \mathbb{Q}_n$ с условием $a < b$ существуют $c_1, \ldots, c_n$ такие, что $a < c_i < b \wedge C_i(c_i)$ для каждого $1 \leqslant i \leqslant n$. Такая структура называется *Фраиссе генерическим n-цветным линейным порядком.*

Пусть $\langle M_1, <_1\rangle, \ldots, \langle M_n, <_n\rangle$ – линейные порядки. Для каждого $q \in \mathbb{Q}_n$ обозначаем через $M(q)$ копию линейного порядка $\langle M_i, <_i\rangle$, если $\mathbb{Q}_n \models C_i(q)$. *$\mathbb{Q}_n$-перемешиванием* (или просто *$\mathbb{Q}$-перемешиванием*) порядков $\langle M_1, <_1\rangle, \ldots, \langle M_n, <_n\rangle$, обозначаемую через $\mathbb{Q}_n(M_1, \ldots, M_n)$, является линейный порядок $\langle \bigcup_{q\in\mathbb{Q}_n} M(q), <\rangle$, где

$$a < b \Leftrightarrow \big[a, b \in M(q), M(q) \simeq M_i \text{ для некоторого } 1 \leqslant i \leqslant n \text{ и } a <_i b\big]$$
$$\text{или } \big[a \in M(q), b \in M(p) \wedge q <_{\mathbb{Q}_n} p\big].$$

Например, $\mathbb{Q}_1(1)$ – это копия множества всех рациональных чисел $\mathbb{Q}$; $\mathbb{Q}_1(2)$ – это множество дуплетов, упорядоченное по типу $\mathbb{Q}$; $\mathbb{Q}_2(2, 3)$ – это взаимно плотно упорядоченное множество дуплетов и троек.

Теорема 5 [13]. *$\mathcal{M}$ – счетно категоричный линейный порядок тогда и только тогда, когда $\mathcal{M}$ может быть построен из синглетонов (изолированных точек) с помощью конечного числа конкатенаций и $\mathbb{Q}$-перемешиваний.*

Предложение 3 [7], [4]. *Пусть $\mathcal{M}$ – конкатенация конечного числа псевдоконечных и бесконечных $\aleph_0$-категоричных линейных порядков. Тогда $\mathcal{M}$ – псевдо-$\aleph_0$-категоричный не $\aleph_0$-категоричный линейный порядок $\Leftrightarrow$ хотя бы одно из слагаемых является псевдоконечным линейным порядком и хотя бы одно из слагаемых является бесконечным $\aleph_0$-категоричным линейным порядком.*

Пример 3. Пусть

$$\mathcal{M}_\omega := \langle \mathbb{Q}_1(\omega), <\rangle, \qquad \mathcal{M}_{\omega^*} := \langle \mathbb{Q}_1(\omega^*), <\rangle,$$
$$\mathcal{M}_{\mathbb{Z}} := \langle \mathbb{Q}_1(\mathbb{Z}), <\rangle, \qquad \mathcal{M}_{\omega+\omega^*} := \langle \mathbb{Q}_1(\omega+\omega^*), <\rangle$$

– линейно упорядоченные структуры. Очевидно, что теории данных структур не являются счетно категоричными. Рассмотрим следующие предложения:

$$S := \forall\, x\, \exists\, y S_0(x, y), \qquad P := \forall\, x\, \exists\, y S_0(y, x).$$

Каждое из предложений S и P не имеет бесконечной $\aleph_0$-категоричной модели, поскольку задают бесконечные дискретные порядки, откуда теории структур $\mathcal{M}_\omega$, $\mathcal{M}_{\omega^*}$ и $\mathcal{M}_{\mathbb{Z}}$ не являются псевдо-$\aleph_0$-категоричными. В то же время теория структуры $\mathcal{M}_{\omega+\omega^*}$ аппроксимируется счетно категоричными линейными порядками $\langle \mathbb{Q}_1(n), <\rangle$, $n \geqslant 1$. Утверждаем, что теория структуры $\mathcal{M}_{\omega+\omega^*}$ является псевдо-$\aleph_0$-категоричной, поскольку любое предложение, истинное в данной структуре, имеет бесконечную $\aleph_0$-категоричную модель.

Открытым интервалом в линейно упорядоченной структуре M является параметрически определимое подмножество структуры M вида

$$I = \{c \in M \colon M \models a < c < b\}$$

для некоторых $a, b \in M \cup \{-\infty, \infty\}$ таких, что $a < b$. Аналогично мы можем определить *замкнутые*, *полуоткрытые-полузамкнутые* и т.п. *интервалы* в M. Произвольная точка $a \in M$ может быть также представлена в виде интервала $[a, a]$. Таким образом, под *интервалом* в M мы будем подразумевать любой из вышеприведенных интервалов в M. Подмножество A линейно упорядоченной структуры M называется *выпуклым*, если для любых $a, b \in A$ и $c \in M$ всякий раз когда $a < c < b$ мы имеем $c \in A$.

Вспомним понятие *слабой о-минимальности*, первоначально исследованное в [10]. *Слабо о-минимальной структурой* называется линейно упорядоченная структура $\mathcal{M} = \langle M, <, \dots \rangle$ такая, что любое определимое (с параметрами) подмножество структуры $\mathcal{M}$ является объединением конечного числа выпуклых множеств в $\mathcal{M}$. Напомним, что такая структура $\mathcal{M}$ называется *о-минимальной* [11], если любое определимое (с параметрами) подмножество структуры $\mathcal{M}$ является объединением конечного числа интервалов и точек в $\mathcal{M}$. Теория T называется *о-минимальной* (*слабо о-минимальной*), если каждая модель теории T является о-минимальной (слабо о-минимальной). Таким образом, слабая о-минимальность обобщает понятие о-минимальности. Вещественно замкнутые поля с собственным выпуклым кольцом нормирования обеспечивают важный пример слабо о-минимальных (не о-минимальных) структур [12].

Теорема 6. *Пусть* $\mathcal{M} = \langle M, < \rangle$ *– слабо о-минимальный не* $\aleph_0$*-категоричный линейный порядок. Тогда теория* $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ *псевдо-*$\aleph_0$*-категорична тогда и только тогда, когда* $\mathcal{M}$ *есть конкатенация* n_1 *порядков* $\mathbb{Q}$, n_2 *порядков* $\omega+\omega^*$ *и* n_3 *конечных порядков для некоторых* $1 \leqslant n_1 < \omega$, $1 \leqslant n_2 < \omega$, $0 \leqslant n_3 < \omega$.

Доказательство. В силу слабой о-минимальности $\mathcal{M}$ состоит из конечного числа выпуклых дискретно упорядоченных частей и выпуклых плотно упорядоченных частей. Если каждая выпуклая дискретно упорядоченная часть конечна, то $\mathcal{M}$ счетно категорична, что противоречит условиям теоремы. Следовательно, хотя бы одна выпуклая дискретно упорядоченная часть бесконечна. Для нее имеются следующие варианты:

$$\omega, \quad \omega^*, \quad \omega^* + \omega, \quad \omega + \omega^*,$$
$$\omega + n, \quad n + \omega^*, \quad n + \omega^* + \omega, \quad \omega^* + \omega + n, \quad \omega + n + \omega^*, \qquad \text{где} \quad n \geqslant 2.$$

Пусть формула $\theta(x)$ означает, что x имеет непосредственного предшественника или непосредственного последователя. Поскольку имеется лишь конечное число выпуклых дискретно упорядоченных частей, то каждая такая часть является $\varnothing$-определимой. Следовательно, $\theta(\mathcal{M}) = \bigcup_{i=1}^{k} D_i(\mathcal{M})$ для некоторого натурального числа $k \geqslant 1$, $D_i(x)$ определяет i-тую выпуклую дискретно упорядоченную часть.

Поймем, что каждое $D_i(\mathcal{M})$ элементарно эквивалентно $\omega + \omega^*$. Действительно, если $D_i(\mathcal{M}) \equiv \omega$ для некоторого $1 \leqslant i \leqslant k$, то рассмотрим следующее предложение:

$$S_{D_i} := \forall\, x\big[D_i(x) \to \exists\, y(D_i(y) \wedge S_0(x, y))\big].$$

Очевидно, что S_{D_i} не имеет бесконечной $\aleph_0$-категоричной модели.

Предположим, что $D_i(\mathcal{M}) \equiv \omega + n$ для некоторого $1 \leqslant i \leqslant k$. Очевидно, что наименьший элемент конечного порядка n является $\varnothing$-определимым некоторой

L-формулой $\phi(x)$. Рассмотрим следующее предложение:

$$S_{D_i,\phi} := \exists\, t\big(\phi(t) \wedge \forall\, x[D_i(x) \wedge x < t \to \exists\, y(y < t \wedge D_i(y) \wedge S_0(x,y))]\big).$$

Нетрудно установить, что $S_{D_i,\phi}$ также не имеет бесконечной $\aleph_0$-категоричной модели.

Случаи, когда $D_i(\mathcal{M}) \equiv \omega^*$ или $D_i(\mathcal{M}) \equiv n + \omega^*$, рассматриваются аналогично заменой предложений S_{D_i} и $S_{D_i,\phi}$ на следующие:

$$P_{D_i} := \forall\, x\big[D_i(x) \to \exists\, y(D_i(y) \wedge S_0(y,x))\big],$$
$$P_{D_i,\phi} := \exists\, t\big(\phi(t) \wedge \forall\, x[D_i(x) \wedge x > t \to \exists\, y(y > t \wedge D_i(y) \wedge S_0(y,x))]\big).$$

Если $D_i(\mathcal{M}) \equiv \omega^* + \omega$ для некоторого $1 \leqslant i \leqslant k$, то оба предложения S_{D_i} и P_{D_i} не имеют бесконечной $\aleph_0$-категоричной модели. Если $D_i(\mathcal{M}) \equiv n + \omega^* + \omega$ для некоторого $1 \leqslant i \leqslant k$, то предложение $P_{D_i,\phi}$ не имеет бесконечной $\aleph_0$-категоричной модели. Если $D_i(\mathcal{M}) \equiv \omega^* + \omega + n$ для некоторого $1 \leqslant i \leqslant k$, то предложение $S_{D_i,\phi}$ не имеет бесконечной $\aleph_0$-категоричной модели. Если $D_i(\mathcal{M}) \equiv \omega + n + \omega^*$ для некоторого $1 \leqslant i \leqslant k$, то предложение $S_{D_i,\phi}$ также не имеет бесконечной $\aleph_0$-категоричной модели.

Таким образом, остается случай, когда $D_i(\mathcal{M}) \equiv \omega + \omega^*$ для каждого $1 \leqslant i \leqslant k$. В этом случае в силу предложения 3 теория $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ является псевдо-$\aleph_0$-категоричной.

Непосредственно из теоремы 6 вытекает следующее.

Следствие 1. *Любой псевдо-$\aleph_0$-категоричный слабо о-минимальный линейный порядок является о-минимальным.*

Теорема 7. *Пусть $\mathcal{M} = \langle M, < \rangle$ – псевдо-$\aleph_0$-категоричный слабо о-минимальный линейный порядок, $\mathcal{M}'$ – обогащение структуры $\mathcal{M}$ конечным или счетным числом одноместных предикатов. Тогда если теория $\mathrm{Th}(\mathcal{M}')$ слабо о-минимальна, то эта теория псевдо-$\aleph_0$-категорична.*

Доказательство. Пусть I – индексирующее множество для одноместных предикатов. Предположим, что теория $\mathrm{Th}(\mathcal{M}')$ слабо о-минимальна. Тогда для любого $i \in I$ множество $P_i(\mathcal{M}')$ есть объединение конечного числа выпуклых множеств в M, а именно состоит в точности из k_i выпуклых множеств для некоторого $1 \leqslant k_i < \omega$. Очевидно, что любое предложение в языке $\{<, P_i\}_{i\in I}$ содержит лишь конечное число одноместных предикатов. Откуда заключаем, что любое предложение в языке $\{<, P_i\}_{i\in I}$, истинное в $\mathcal{M}'$, имеет бесконечную $\aleph_0$-категоричную модель.

Обратное, вообще говоря, неверно. Действительно, пусть

$$\mathcal{M} := \langle \omega + \omega^* + \mathbb{Q}, < \rangle, \qquad \mathcal{M}' := \langle \omega + \omega^* + \mathbb{Q}, <, P^1 \rangle,$$

где предикат P выделяет в $\mathbb{Q}$ бесконечное подмножество, так что для любых $a, b \in \mathbb{Q}$ с условием $a < b$ существуют $c \in P(\mathcal{M}'), d \in \neg P(\mathcal{M}')$ такие, что $a < c < b$ и $a < d < b$. Тогда теория $\mathrm{Th}(\mathcal{M}')$ псевдо-$\aleph_0$-категорична, но не является слабо о-минимальной.

Рассмотрим теперь конкатенации счетного числа бесконечных $\aleph_0$-категоричных линейных порядков.

Пример 4 [4]. Пусть

$$\mathcal{M} := \langle 2 + \mathbb{Q} + 2 + \mathbb{Q} + \cdots, < \rangle,$$

и пусть формула $\phi_2^l(x)$ определяет элемент x структуры $\mathcal{M}$, являющийся левой концевой точкой дуплета. Рассмотрим следующее предложение:

$$\Phi_2 := \forall x \big[\phi_2^l(x) \to \exists y (x < y \wedge \phi_2^l(y) \wedge \forall t [x \leqslant t \leqslant y \wedge \phi_2^l(t) \to x = t \vee t = y])\big].$$

Очевидно, что Φ_2 не имеет бесконечной $\aleph_0$-категоричной модели, откуда теория $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ не является псевдо-$\aleph_0$-категоричной.

Пусть теперь

$$\mathcal{M} := \langle \mathbb{Q}_1(2) + \mathbb{Q}_1(3) + \cdots + \mathbb{Q}_1(n) + \cdots, < \rangle.$$

Очевидно, что $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ не является $\aleph_0$-категоричной, поскольку длина конечных порядков не ограничена. Тем не менее, мы утверждаем, что теория $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ является псевдо-$\aleph_0$-категоричной. Действительно, данный порядок аппроксимируется $\aleph_0$-категоричными линейными порядками $\mathbb{Q}_1(2)+\mathbb{Q}_1(3)+\cdots+\mathbb{Q}_1(n)$, $n \geqslant 2$. Следующие предложения истинны в $\mathcal{M}$: не существует наименьшего элемента; не существует наибольшего элемента; любой элемент имеет непосредственного предшественника или непосредственного последователя; для каждого $n \geqslant 2$ существует элемент конечного порядка из n элементов и так далее. Очевидно, что любая конечная комбинация этих предложений имеет бесконечную $\aleph_0$-категоричную модель.

Аналогично можно установить, что элементарная теория следующего порядка

$$\big\langle \mathbb{Q}_1(2) + \mathbb{Q}_2(2,3) + \mathbb{Q}_3(2,3,4) + \mathbb{Q}_4(2,3,4,5) + \cdots, < \big\rangle$$

является псевдо-$\aleph_0$-категоричной. Данный порядок аппроксимируется $\aleph_0$-категоричными линейными порядками $\mathbb{Q}_1(2) + \mathbb{Q}_2(2,3) + \cdots + \mathbb{Q}_n(2,3,\ldots,n+1)$, $n \geqslant 2$.

Данные иллюстрации показывают, что псевдо-$\aleph_0$-категоричность может задавать неограниченные цепочки с чередованиями различных плотно упорядоченных конечных частей, включая предельные переходы конечных частей неограниченной длины, которые приобретают вид $\omega + \omega^*$ согласно теореме 4.

Предложение 4. *Не существует вполне упорядоченного множества $\langle M, < \rangle$, элементарная теория которой является псевдо-$\aleph_0$-категоричной.*

Доказательство. Если $\langle M, < \rangle$ бесконечно и вполне упорядочено, то M имеет один из следующих типов упорядочения:

$$\omega, \quad \omega + n, \quad \omega + \omega \quad \text{или} \quad \omega + \omega + \ldots, \qquad \text{где} \quad n \geqslant 1.$$

Если $M = \omega$, то рассмотрим следующее предложение:

$$S := \forall x \, \exists y S_0(x, y).$$

Очевидно, что предложение S, удовлетворяемое порядком ω, не имеет бесконечной $\aleph_0$-категоричной модели, поскольку конечное число промежуточных элементов между подходящими элементами может быть выбрано неограниченно большим.

В остальных случаях рассмотрим следующие формулы:

$$\psi(x) := \forall\, y\bigl[y < x \to \exists\, z(y < z < x)\bigr],$$
$$L(x) := \forall\, z[x \leqslant z],$$
$$\phi(x) := \psi(x) \wedge \neg L(x) \wedge \forall\, y\bigl[\psi(y) \wedge y < x \to L(y)\bigr].$$

Очевидно, что формула $\phi(x)$ определяет как наименьший элемент конечного порядка n в $\langle \omega + n, < \rangle$, так и наименьший элемент второй копии ω в $\langle \omega + \omega, < \rangle$ или $\langle \omega + \omega + \ldots, < \rangle$. Рассмотрим следующее предложение:

$$S_\phi := \exists\, x\bigl[\phi(x) \wedge \forall\, t(t < x \to \exists\, z[S_0(t, z) \wedge z < x])\bigr].$$

Очевидно, что предложение S_ϕ, удовлетворяемое всеми бесконечными полными порядками, кроме ω, также не имеет бесконечной $\aleph_0$-категоричной модели.

Замечание 10. В силу теоремы 5 и рассуждения для доказательства предложения 3 псевдо-$\aleph_0$-категоричные линейные порядки аппроксимируются $\aleph_0$-категоричными линейными порядками вида

$$n_0 + \widetilde{\mathbb{Q}}_1 + n_1 + \widetilde{\mathbb{Q}}_2 + \cdots + n_{k-1} + \widetilde{\mathbb{Q}}_k + n_k, \tag{4.1}$$

где $n_i \in \omega$, $\widetilde{\mathbb{Q}}_i$ – порядки, факторизации которых по ограниченным дискретным частям изоморфны порядку $\mathbb{Q}$. При этом мощности $2k + 1$ результатов факторизаций по перемежающимся дискретным и плотным частям n_i и $\widetilde{\mathbb{Q}}_j$ могут быть как ограниченными, так и неограниченно возрастать. В первом случае предельные переходы осуществляются за счет замены конечных дискретных частей на псевдоконечные части вида $\omega + \omega^*$, включая возможные замены дискретных частей в $\widetilde{\mathbb{Q}}_j$, или неограниченным увеличением длин конечных дискретных частей в $\widetilde{\mathbb{Q}}_j$, а во втором случае к указанным заменам добавляются результаты $\mathcal{M}$ неограниченных перемежающихся расширений перемешиваний вида (4.1) с возможной заменой дискретных частей на псевдоконечные как в предыдущем случае. При этом допускается замена рассматриваемых псевдоконечных частей вида $\omega + \omega^*$ на части вида $\omega + \sum_{i\in I}(\omega^* + \omega)_i + \omega^*$ из теоремы 4 с сохранением элементарной эквивалентности.

Поскольку $\aleph_0$-категоричные линейные порядки вида (4.1) *параметризуются* кортежами $\mathbf{a}$ натуральных чисел, задающих длины конечных дискретных частей n_i и допустимые длины конечных дискретных частей в $\widetilde{\mathbb{Q}}_j$, имеется счетное число теорий $\aleph_0$-категоричных линейных порядков. Предельные переходы к псевдо-$\aleph_0$-категоричным порядкам соответствуют предельным переходам кортежей $\mathbf{a}$, в которых сохраняются длины и неограниченно увеличиваются некоторые координаты, что соответствует неограниченным увеличениям длин конечных дискретных частей, либо неограниченно увеличиваются длины, что соответствует неограниченному увеличению числу перемежаний дискретных и плотных частей или неограниченному увеличению возможностей длин конечных дискретных частей в $\widetilde{\mathbb{Q}}_j$. Отметим, в последнем случае при предельных переходах появляется континуум вариантов теорий псевдо-$\aleph_0$-категоричных линейных порядков, задающихся варьированием как последовательностей значений n_i, так и длин дискретных частей в $\widetilde{\mathbb{Q}}_j$.

Предельные переходы параметризаций **a**, представляемые последовательностями этих параметризаций, задают параметризации псевдо-$\aleph_0$-категоричных линейных порядков, по которым восстанавливаются эти линейные порядки. Сами линейные порядки, получающиеся после этого восстановления, являются *каноническими* моделями своих теорий.

Тем самым образуется класс псевдо-$\aleph_0$-категоричных линейных порядков, являющихся моделями всевозможных псевдо-$\aleph_0$-категоричных теорий линейных порядков. Полученное множество теорий обозначим через PCCLO.

В силу замечания 10 имеет место следующая

Теорема 8. *Любая элементарная теория T бесконечного не счетно-категоричного линейного порядка псевдо-$\aleph_0$-категорична тогда и только тогда, когда T принадлежит множеству* PCCLO.

В качестве иллюстрации рассмотрим следующий

Пример 5. Теория $\mathrm{Th}(\mathbb{Q}_2(\omega,\omega^*))$ принадлежит множеству PCCLO, т.е. является псевдо-$\aleph_0$-категоричной, поскольку получается предельным переходом счетно категоричных теорий $\mathrm{Th}(\mathbb{Q}_1(n))$, поскольку в каждый предельный разрыв между наименьшим и наибольшим элементами дискретной цепи попадает копия структуры $\mathbb{Q}_2(\omega,\omega^*)$.

Рассмотрим следующие формулы:

$$S(x) := \exists\, z[x < z \wedge \forall\, u(x \leqslant u \leqslant z \to u = x \vee u = z)],$$

т.е. x имеет непосредственного последователя,

$$P(x) := \exists\, y[y < x \wedge \forall\, t(y \leqslant t \leqslant x \to t = y \vee t = x)],$$

т.е. x имеет непосредственного предшественника,

$S_n(x,y)$ – “y есть $(n+1)$-й последователь для x”, т.е. $x < y$ и между x и y имеется ровно n элементов, $n \in \omega$.

Аксиомы теории $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ – это аксиомы линейного порядка и следующие предложения.

(1) Не существует как наименьшего, так и наибольшего элементов.

(2) $\forall\, x[S(x) \vee P(x)]$, т.е. любой элемент имеет непосредственного последователя или непосредственного предшественника.

(3) Множество наименьших элементов копий ω плотно упорядочено.

(4) Множество наибольших элементов копий ω^* плотно упорядочено.

(5) $\psi_n := \forall\, x[S(x) \wedge \neg P(x) \to \exists\, y S_n(x,y)]$, $n \in \omega$, т.е. любой наименьший элемент копии ω имеет $n+1$-го последователя.

(6) $\phi_n := \forall\, x[\neg S(x) \wedge P(x) \to \exists\, y S_n(y,x)]$, $n \in \omega$, т.е. любой наибольший элемент копии ω^* имеет $n+1$-го предшественника.

(7) Множество наименьших элементов копий ω и наибольших элементов копий ω^* взаимно плотно упорядочено.

Утверждаем, что $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ допускает частичную элиминацию кванторов с точностью до формул $S(x)$, $P(x)$, $S_n(x,y)$, $n \in \omega$. В силу такой элиминации кванторов не существует формулы этой теории, отделяющей множество всех элементов, лежащих в копиях ω, от множество всех элементов, лежащих в копиях ω^*. Для каждого $n \geqslant 1$ существует формула, выделяющая выбранные n элементов во всех копиях ω (или ω^*). В силу плотной упорядоченности копий ω (и ω^*) невозможно формульно отделить одну копию ω (или ω^*) от другой. Таким образом, любое предложение, истинное в структуре $\mathcal{M}$, имеет бесконечную $\aleph_0$-категоричную модель.

Пусть F – множество всех конечных линейных порядков, $D = \{\omega, \omega^*, \omega+\omega^*, \omega^*+\omega\}$.

Теорема 9. *Пусть* $\mathcal{M} := \langle \mathbb{Q}_n(t_1, t_2, \ldots, t_n), < \rangle$, *где* $t_i \in F \cup D$, $1 \leqslant n < \omega$. *Тогда* $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ *псевдо-*$\aleph_0$*-категорична тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия*:

(1) $t_i \in D$ *для некоторого* $1 \leqslant i \leqslant n$;

(2) *если* $t_i = \omega$ $(t_i = \omega^*)$ *для некоторого* $1 \leqslant i \leqslant n$, *то* $t_j = \omega^*$ $(t_j = \omega)$ *или* $t_j = \omega + \omega^*$ *для некоторого* $1 \leqslant j \leqslant n$, $j \neq i$;

(3) *если* $t_i = \omega^* + \omega$ *для некоторого* $1 \leqslant i \leqslant n$, *то* $t_j = \omega + \omega^*$ *для некоторого* $1 \leqslant j \leqslant n$, $j \neq i$.

Доказательство. Если $t_i \in F$ для любого $1 \leqslant i \leqslant n$, то в силу теоремы 5 теория $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ счетно категорична. Следовательно, выполняется условие (1).

Случай 1: $t_i = \omega$ для некоторого $1 \leqslant i \leqslant n$.

Если $t_j \in F$ для любого $1 \leqslant j \leqslant n$ с условием $j \neq i$, то

$$\mathcal{M} = \langle \mathbb{Q}_n(\omega, t_2, \ldots, t_n), < \rangle.$$

Пусть формула $\phi_{t_j}(x)$ означает, что x – элемент конечного порядка t_j, $2 \leqslant j \leqslant n$. Рассмотрим следующее предложение:

$$\Phi := \forall\, x \Big[\bigvee_{j=2}^{n} \phi_{t_j}(x) \to \exists\, y \Big(y < x \wedge \bigwedge_{j=2}^{n} \neg\phi_{t_j}(y) \Big) \wedge \\ \forall\, u \Big(u < x \wedge \bigwedge_{j=2}^{n} \neg\phi_{t_j}(u) \to \exists\, z \Big[S_0(u,z) \wedge z < x \wedge \bigwedge_{j=2}^{n} \neg\phi_{t_j}(z) \Big] \Big) \Big].$$

Утверждаем, что предложение Φ не имеет бесконечной $\aleph_0$-категоричной модели.

Предположим теперь, что существует $1 \leqslant j \leqslant n$ такой, что $j \neq i$ и $t_j = \omega^* + \omega$, при этом остальные $t_l \in F$ для любого $1 \leqslant l \leqslant n$ условиями $l \neq i$ и $l \neq j$, т.е.

$$\mathcal{M} = \langle \mathbb{Q}_n(\omega, \omega^* + \omega, t_3, \ldots, t_n), < \rangle.$$

Тогда слегка корректируя предложение Φ (заменяем $j = 2$ на $j = 3$), также утверждаем, что предложение Φ не имеет бесконечной $\aleph_0$-категоричной модели.

Случай 2: $t_i = \omega^*$ для некоторого $1 \leqslant i \leqslant n$.

Этот случай рассматривается аналогично случаю 1: здесь в предложении Φ заменяем $S_0(u,z)$ на $S_0(z,u)$.

Случай 3: $t_i = \omega^* + \omega$ для некоторого $1 \leqslant i \leqslant n$.

Если $t_j \in F$ для любого $1 \leqslant j \leqslant n$ с условием $j \neq i$, то

$$\mathcal{M} = \langle \mathbb{Q}_n(\omega^* + \omega, t_2, \ldots, t_n), < \rangle.$$

Тогда рассматривая предложение Φ из случая 1, также утверждаем, что предложение Φ не имеет бесконечной $\aleph_0$-категоричной модели.

5. Псевдо-счетно-категоричные абелевы группы и модули. Пусть $\mathcal{A}$ – абелева группа сигнатуры $\Sigma = \langle +^{(2)}, -^{(1)}, 0^{(0)} \rangle$. Тогда через $k\mathcal{A}$ обозначается ее подгруппа $\{ka \mid a \in A\}$, через $\mathcal{A}[k]$ – подгруппа $\{a \in A \mid ka = 0\}$. В дальнейшем через P будем обозначать множество всех простых чисел. Если $p \in P$ и если p – простое число и $pA = \{0\}$, то через $\dim \mathcal{A}$ обозначается размерность группы $\mathcal{A}$, рассматриваемой как векторное пространство над полем из p элементов. Следующие числа для произвольных p и n (p – простое, n – натуральное) называются *инвариантами Шмелевой* [14] для группы $\mathcal{A}$ [5]:

$$\alpha_{p,n}(\mathcal{A}) = \min\bigl\{\dim((p^n\mathcal{A})[p]/(p^{n+1}\mathcal{A})[p]), \omega\bigr\},$$
$$\beta_p(\mathcal{A}) = \min\bigl\{\inf\{\dim((p^n\mathcal{A})[p] \mid n \in \omega\}, \omega\}\bigr\},$$
$$\gamma_p(\mathcal{A}) = \min\bigl\{\inf\{\dim((\mathcal{A}/\mathcal{A}[p^n])/p(\mathcal{A}/\mathcal{A}[p^n])) \mid n \in \omega\}, \omega\bigr\},$$
$$\varepsilon(\mathcal{A}) \in \{0,1\}, \qquad \varepsilon(\mathcal{A}) = 0 \Leftrightarrow \bigl(n\mathcal{A} = \{0\}\,\text{для некоторого}\, n \in \omega,\ n \neq 0\bigr).$$

Известно [5; теорема 8.4.10], что две абелевы группы элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда их соответствующие инварианты Шмелевой совпадают. Кроме того, справедливо следующее.

Предложение 5 [5; предложение 8.4.12]. *Пусть для каждого p и n даны кардиналы $\alpha_{p,n}$, β_p, $\gamma_p \leqslant \omega$ и $\varepsilon \in \{0,1\}$. Для того чтобы существовала абелева группа $\mathcal{A}$, для которой инварианты Шмелевой $\alpha_{p,n}(\mathcal{A})$, $\beta_p(\mathcal{A})$, $\gamma_p(\mathcal{A})$ и $\varepsilon(\mathcal{A})$ совпадали соответственно с $\alpha_{p,n}$, β_p, γ_p и ε, необходимо и достаточно выполнение следующих условий*:

1) *если для простого p множество $\{n \mid \alpha_{p,n} \neq 0\}$ бесконечно, то $\beta_p = \gamma_p = \omega$;*
2) *если $\varepsilon = 0$, то для любого простого p выполнены равенства $\beta_p = \gamma_p = 0$ и множество $\{\langle p, n\rangle \mid \alpha_{p,n} \neq 0\}$ конечно.*

Через $\mathbb{Q}$ будем обозначать аддитивную группу рациональных чисел, $\mathbb{Z}_{p^n}$ – циклическую группу порядка p^n, $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ – квазициклическую группу всех комплексных корней из 1 степени p^n для всех $n \geqslant 1$, R_p – группу несократимых дробей со взаимно простым с p знаменателем. Группы $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_{p^n}$, R_p, $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ называются *базисными.* В дальнейшем обозначения для указанных групп будут также отождествляться с их носителями.

Из совпадения теорий абелевых групп, имеющих одинаковые инварианты Шмелевой, вытекает, что любая абелева группа $\mathcal{A}$ элементарно эквивалентна группе

$$\bigoplus_{p,n} \mathbb{Z}_{p^n}^{(\alpha_{p,n})} \oplus \bigoplus_{p} \mathbb{Z}_{p^\infty}^{(\beta_p)} \oplus \bigoplus_{p} R_p^{(\gamma_p)} \oplus \mathbb{Q}^{(\varepsilon)}, \tag{5.1}$$

где $\mathcal{B}^{(k)}$ означает прямую сумму k подгрупп, изоморфных группе $\mathcal{B}$. Таким образом, теория любой абелевой группы имеет в качестве своей модели некоторую прямую сумму базисных групп. В дальнейшем группы вида (5.1) будем называть *стандартными.*

Напомним, что любая полная теория абелевой группы базируется множеством позитивно примитивных формул [5; лемма 8.4.5] и сводится к множеству формул

$$\exists\, y(m_1x_1 + \ldots + m_nx_n \approx p^k y), \tag{5.2}$$

$$m_1x_1 + \ldots + m_nx_n \approx 0, \tag{5.3}$$

где $m_i \in \mathbb{Z}$, $k \in \omega$, p – простое число [15], [5; лемма 8.4.7]. Формулы (5.2) и (5.3) свидетельствуют о том, что шмелевские инварианты определяют теории абелевых групп по модулю предложения 5.

С учетом предложения 3.1 и соотношений (5.2) и (5.3) получаем следующее

Замечание 11. Теории абелевых групп задаются предложениями, выводимыми из формул вида (5.2) и (5.3), и описывающими размерности относительно $\alpha_{p,n}$, β_p, γ_p, ε, а также оценки для порядков p^k элементов и возможностей для деления элементов на p^k. Кроме того, различные значения шмелевских инвариантов отделяются некоторыми предложениями по модулю предложения 5. Следовательно, для подсчета рангов семейств теорий абелевых групп достаточно рассматривать предложения, отделяющие шмелевские инварианты.

Определение 7 [16]. Для произвольной группы G наименьшее число n, для которого $g^n = e$ при всех $g \in G$, если такое n существует, называется *экспонентой* группы G.

По определению наличие экспоненты группы G означает, что все элементы группы G имеют ограниченный порядок, а если такая группа является бесконечной и абелевой, то согласно предложению 5 все шмелевские инварианты β_p, γ_p, ε равны нулю и лишь конечное число инвариантов α_{p_n} имеют положительные значения, причем хотя бы одно из этих значений бесконечно.

Теорема 10 [16]. *Бесконечная абелева группа A тогда и только тогда является $\aleph_0$-категоричной, когда A имеет конечную экспоненту.*

Теорема 11 [17]. *Для любой полной теории T абелевых групп следующие условия эквивалентны*:

(1) *теория T псевдоконечна*;

(2) *теория T имеет некоторое бесконечное значение $\alpha_{p,n}$ или бесконечное число положительных конечных значений $\alpha_{p,n}$, и при этом все положительные значения β_p и γ_p влекут $|\{n \mid \alpha_{p,n}\}| = \omega$ и $\beta_p = \gamma_p = \omega$, а равенство $\varepsilon = 1$ влечет $|\{\langle p, n\rangle \mid \alpha_{p,n} \neq 0\}| = \omega$.*

В силу теоремы 10 $\aleph_0$-категоричные абелевы группы параметризуются кортежами $\mathbf{a}$ положительных значений $\alpha_{p,n}$. Тем самым, имеется счетное число теорий счетно категоричных абелевых групп. При аппроксимировании псевдо-$\aleph_0$-категоричных абелевых групп неограниченно увеличиваются длины кортежей $\mathbf{a}$, а также могут неограниченно увеличиваться конечные значения $\alpha_{p,n}$. Такие аппроксимирования соответствуют аппроксимированиям псевдоконечных абелевых групп с той лишь разницей, что согласно теореме 11 псевдоконечность не влечет неограниченного увеличения длин параметризующих кортежей $\mathbf{a}$ и при фиксации этих длин задает счетно категоричные абелевы группы. Следовательно, теории псевдоконечных абелевых групп подразделяются на счетно категоричные и псевдо-счетно-категоричные, в зависимости от конечного или бесконечного числа положительных шмелевских инвариантов $\alpha_{p,n}$. В последнем случае возникает континуум вариантов для этих инвариантов, откуда следует континуум почти-счетно-категоричных теорий абелевых групп.

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 12. *Для любой полной теории T абелевых групп следующие условия эквивалентны*:

(1) *теория T псевдо-счетно-категорична*;

(2) *теория T имеет бесконечное число положительных значений $\alpha_{p,n}$, и при этом все положительные значения β_p и γ_p влекут $|\{n \mid \alpha_{p,n}\}| = \omega$ и $\beta_p = \gamma_p = \omega$, а равенство $\varepsilon = 1$ влечет $|\{\langle p, n\rangle \mid \alpha_{p,n} \neq 0\}| = \omega$.*

Следующая теорема позволяет описать представления для псевдо-счетно-категоричных теорий модулей.

Теорема 13 [18]. *Для любого счетного кольца R и счетного R-модуля A следующие условия эквивалентны*:

(1) *A является $\aleph_0$-категоричным*;

(2) *существует $n \in \omega$, конечные R-модули $B_0, \ldots, B_{n-1}$ и кардиналы $\kappa_0, \ldots, \kappa_{n-1} \leqslant \omega$ такие, что $A = \bigoplus_{i<n} B_i^{(\kappa_i)}$ и $\max\{\kappa_0, \ldots, \kappa_{n-1}\} = \omega$.*

Согласно теореме 13 счетно категоричные модули параметризуются кортежами $\mathbf{a}$, включающими информацию о конечных R-модулях B_i и показателях κ_i. Значит, имеется счетное число счетно категоричных теорий R-модулей. При аппроксимировании псевдо-счетно-категоричных теорий R-модулей могут расширяться до псевдоконечных R-модули B_i, увеличиваться в пределах ω конечные кардиналы κ_i и увеличиваться до счетного числа количество слагаемых. Тем самым, возникает континуум псевдо-счетно-категоричных теорий R-модулей, и справедлива следующая

Теорема 14. *Для любого счетного кольца R и счетного R-модуля A следующие условия эквивалентны*:

(i) *A является псевдо-$\aleph_0$-категоричным*;

(ii) *существуют конечные или псевдоконечные R-модули B_i, $i < \omega$, и кардиналы $\kappa_i \leqslant \omega$ такие, что $A = \bigoplus_{i<\omega} B_i^{(\kappa_i)}$ и $\max\{\kappa_i \mid i < \omega\} = \omega$; при этом если количество нетривиальных слагаемых конечно, то некоторый R-модуль B_i является псевдоконечным.*

6. Счетные спектры псевдо-счетно-категоричных теорий. Напомним, что число попарно неизоморфных моделей теории T, имеющих мощность λ, обозначается через $I(T, \lambda)$, а функция $I(T, \cdot)$ называется *функцией спектра* теории T. Следуя [22], теория T называется *эренфойхтовой*, если $I(T, \omega) \in \omega \setminus \{0, 1, 2\}$.

Приведем следующие *примеры Эренфойхта* [19] теорий T_n, $n \in \omega$, с условиями $I(T_n, \omega) = n \geqslant 3$, а также *пример Перетятькина* [20] теории T' с тремя счетными моделями.

Пример 6. Пусть T_n – теория системы $\mathcal{M}^n$, полученной из системы $\langle\mathbb{Q};<\rangle$ добавлением констант c_k, $c_k < c_{k+1}$, $k \in \omega$, таких, что $\lim_{k\to\infty} c_k = \infty$, а также добавлением одноместных предикатов $P_0, \ldots, P_{n-3}$, образующих разбиение множества рациональных чисел $\mathbb{Q}$ с условиями

$$\models \forall\, x, y \quad \big((x < y) \to \exists\, z\ ((x < z) \wedge (z < y) \wedge P_i(z))\big), \qquad i = 0, \ldots, n-3.$$

Теория T_n имеет ровно n попарно неизоморфных счетных моделей:

а) простую модель $\mathcal{M}^n$ ($\lim_{k\to\infty} c_k = \infty$);

б) простые модели $\mathcal{M}^n_i$ над реализациями властных типов $p_i(x) \in S^1(\varnothing)$, определяемых множествами формул $\{c_k < x \mid k \in \omega\} \cup \{P_i(x)\}$, $i = 0, \ldots, n-3$ ($\lim_{k\to\infty} c_k \in P_i$);

в) насыщенную модель $\overline{\mathcal{M}}^n$ (предел $\lim_{k\to\infty} c_k$ иррационален).

Пример 7. Пусть $\mathcal{M} = \langle M; \leqslant\rangle$ – *дерево встреч*, т.е. нижняя полурешетка без наименьшего и максимальных элементов такая, что

а) никакие два несравнимых элемента не имеют верхней грани;

б) между любыми двумя различными сравнимыми элементами имеется промежуточный;

в) для любого элемента a существует бесконечное число попарно несравнимых бóльших элементов, инфимум которых равен a.

Обогатим систему $\mathcal{M}$ константами c_n, $n \in \omega$, такими, что $c_n < c_{n+1}$, $n \in \omega$. Теория T' полученной системы имеет ровно три счетные модели: простую, насыщенную, а также простую над реализацией властного типа $p_\infty(x)$, изолируемого множеством формул $\{c_n < x \mid n \in \omega\}$.

Данная конструкция, как и в примере 6, позволяет на верхнем конусе, задаваемом константой c_0, ввести взаимно плотные одноместные предикаты $P_0, \ldots, P_{n-3}$, гарантирующие наличие ровно $n \geqslant 3$ счетных моделей.

Каждый из приведенных примеров строится на основе счетно категоричной структуры плотного линейного порядка и плотной нижней полурешетки, соответственно. Добавление одноместных взаимно плотных предикатов $P_0, \ldots, P_{n-3}$ сохраняет счетную категоричность, как и добавление любого конечного числа констант c_n. Поскольку каждая совместная формула указанных теорий включает лишь конечное число константных символов и, следовательно, имеет счетно категоричную модель, в силу предложения 4 наличие неизоморфных счетных моделей в примерах Эренфойхта и Перетятькина означает, что все эти теории, как и их совместные формулы, являются псевдо-счетно-категоричными.

К указанному списку теорий можно добавить псевдо-счетно-категоричную $\aleph_1$-категоричную теорию T_ω функции следования s, аксиоматизируемую предложениями $\forall\, y\, \exists^{=1} x s(x) \approx y$ и $\forall\, x \neg s^n(x) \approx x$ и аппроксимируемую счетно категоричными теориями T_n, модели которых состоят из бесконечного числа циклов длины n, $n \in \omega$. Хорошо известно, что $I(T_\omega, \omega) = \omega$.

Кроме того, согласно теореме 1 псевдо-счетно-категоричной является известная теория T_c независимых одноместных предикатов P_n, $n \in \omega$, аксиоматизируемая предложениями $\exists\, x(P_0^{\delta_0}(x) \wedge \cdots \wedge P_n^{\delta_n}(x))$, $\delta_0, \ldots, \delta_n \in \{0, 1\}$, $n \in \omega$, и имеющая континуум счетных моделей.

Таким образом, справедлива следующая:

Теорема 15. *Для любого кардинала* $\lambda \in (\omega \setminus \{0,1,2\}) \cup \{\omega, 2^\omega\}$ *существует псевдо-счетно-категоричная теория* T, *у которой* $I(T,\omega) = \lambda$.

Замечание 12. В работе [21] показано, что плотные n-сферические порядки имеют счетно категоричные теории. Счетная категоричность сохраняется при их разбиении на конечное число взаимно плотных одноместных предикатов. Поскольку их подходящие константные обогащения имеют $\prod_{k\in n\setminus\{1\}}(2^k+2)^{r_k}$ счетных моделей, где r_k – произвольные натуральные числа, эти обогащения, будучи псевдо-счетно-категоричными теориями, иллюстрируют теорему 15.

Замечание 13. Все рассмотренные выше примеры эренфойхтовых теорий являются псевдо-счетно-категоричными. Синтаксические генерические конструкции из [22] позволяют расширять до эренфойхтовых модели предикатных теорий со счетным числом типов над пустым множеством, включающих предложения, не являющиеся псевдо-счетно-категоричными. С этой целью вводятся новые предикаты, с помощью которых контролируется как число почти простых моделей, т.е. простых моделей над конечными множествами, так и число предельных моделей, которые не являются почти простыми, но представляются в виде объединения элементарных цепей почти простых моделей.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] S. V. Sudoplatov, “Approximations of theories”, *Сиб. электрон. матем. изв.*, **17** (2020), 715–725.

[2] S. V. Sudoplatov, “Approximating formulae”, *Сиб. электрон. матем. изв.*, **21**:1 (2024), 463–480.

[3] N. D. Markhabatov, S. V. Sudoplatov, “Pseudofinite formulae”, *Lobachevskii J. Math.*, **43**:12 (2021), 3583–3590.

[4] Б. Ш. Кулпешов, Ин. И. Павлюк, С. В. Судоплатов, “Ранги и аппроксимации для семейств упорядоченных теорий”, *Матем. заметки*, **116**:4 (2024), 531–551.

[5] Ю. Л. Ершов, Е. А. Палютин, *Математическая логика*, Физматлит, М., 2011.

[6] E. Rosen, “Some aspects of model theory and finite structures”, *Bull. Symbolic Logic*, **8**:3 (2002), 380–403.

[7] J. Väänänen, “Pseudo-finite model theory”, *Mat. Contemp.*, **24** (2003), 169–183.

[8] G. Cherlin, E. Hrushovski, *Finite Structures with Few Types*, Ann. of Math. Stud., **152**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2003.

[9] H. D. Macpherson, Ch. Steinhorn, “Definability in classes of finite structures”, *Finite and Algorithmic Model Theory*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **379**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2011, 140–176.

[10] H. D. Macpherson, D. Marker, C. Steinhorn, “Weakly o-minimal structures and real closed fields”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **352**:12 (2000), 5435–5483.

[11] A. Pillay, C. Steinhorn, “Definable sets in ordered structures. I”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **295**:2 (1986), 565–592.

[12] M. Dickmann, “Elimination of quantifiers for ordered valuation rings”, *J. Symbolic Logic*, **52**:1 (1987), 116–128.

[13] J. G. Rosenstein, “$\aleph_0$-categoricity of linear orderings”, *Fund. Math.*, **64** (1969), 1–5.

[14] W. Szmielew, “Elementary properties of Abelian groups”, *Fund. Math.*, **41** (1955), 203–271.

[15] P. C. Eklof, E. R. Fischer, "The elementary theory of Abelian groups", *Ann. Math. Logic*, **4** (1972), 115–171.

[16] J. G. Rosenstein, "$\aleph_0$ categoricity of groups", *J. Algebra*, **25** (1973), 435–467.

[17] In. I. Pavlyuk, S. V. Sudoplatov, "Ranks for families of theories of abelian groups", *Изв. Иркутского гос. ун-та. Серия Математика*, **28** (2019), 95–112.

[18] W. Baur, "$\aleph_0$-categorical modules", *J. Symbolic Logic*, **40**:2 (1975), 213–220.

[19] R. Vaught, "Denumerable models of complete theories", *Infinitistic Methods* (Proc. Sympos. Foundations of Math., Warsaw, 1959), Pergamon, London, 1961, 303–321.

[20] М. Г. Перетятькин, "О полных теориях с конечным числом счётных моделей", *Алгебра и логика*, **12**:5 (1973), 550–576.

[21] B. Sh. Kulpeshov, S. V. Sudoplatov, "Spherical orders, properties and countable spectra of their theories", *Сиб. электрон. матем. изв.*, **20**:2 (2023), 588–599.

[22] С. В. Судоплатов, *Классификация счетных моделей полных теорий*, Изд-во НГТУ, Новосибирск, 2018.

Б. Ш. Кулпешов
Казахстанско-Британский технический университет,
г. Алматы;
Институт математики и математического
моделирования, г. Алматы
E-mail: kulpesh@mail.ru

Поступило
26.05.2024
После доработки
04.07.2024
Принято к публикации
15.10.2024

Ин. И. Павлюк
Новосибирский государственный технический
университет
E-mail: inessa7772@mail.ru

С. В. Судоплатов
Институт математики им. С. Л. Соболева
Сибирского отделения
Российской академии наук, г. Новосибирск
E-mail: sudoplat@math.nsc.ru