Министерство науки и высшего образования Республики Казахстан
Комитет науки
Институт математики и математического моделирования

Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня науки Республики Казахстан, 80-летия Сектора математики и механики Казахского филиала Академии наук СССР и 60-летия Института математики и математического моделирования

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Алматы 2025

УДК 51
ББК 22.1, 22.2
В1

Редакторы: А. Т. Асанова, Д. Б. Базарханов, Б. С. Байжанов, В. В. Вербовский, Н. С. Даирбеков, М. А. Садыбеков.

Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня науки Республики Казахстан. Сборник тезисов. — Алматы: Институт математики и математического моделирования, 2025. — 301 с. — Каз., рус, eng.

ISBN 978-601-08-5014-9

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан, являясь организатором конференции, представляет этот Сборник тезисов, который содержит краткие аннотации докладов участников Традиционной международной апрельской математической конференции в честь Дня науки Республики Казахстан, 2025.

Эта конференция ставит перед собой цель объединения математиков как Казахстана, так и других стран.

ISBN 978-601-08-5014-9

Министерство науки и высшего образования Республики Казахстан
Комитет науки
Институт математики и математического моделирования

Традиционная международная апрельская математическая
конференция в честь Дня науки Республики Казахстан,
80-летия Сектора математики и механики
Казахского филиала Академии наук СССР и
60-летия Института математики и математического моделирования

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня науки Республики Казахстан

Председатель программного комитета — академик НАН РК Кальменов Т. Ш.
Заместитель председателя программного комитета — академик НАН РК Садыбеков М. А.
Председатель организационного комитета — д.ф.-м.н., доцент Вербовский В. В.
Ученый секретарь — к.ф.-м.н. Сахауева М. А.

Члены Программного комитета:
профессор Алексеева Л. А. (Алматы, Казахстан)
профессор Асанова А. Т. (Алматы, Казахстан)
академик НАН РК Байжанов Б. С. (Алматы, Казахстан)
профессор Базарханов Д. Б. (Алматы, Казахстан)
д.ф.-м.н. Вербовский В. В. (Алматы, Казахстан)
д.ф.-м.н. Даирбеков Н. С. (Алматы, Казахстан)
академик НАН РК Джумадильдаев А. С. (Алматы, Казахстан)
профессор Б.Е. Кангужин (Алматы, Казахстан)
академик НАН РК Кулпешов Б. Ш. (Алматы, Казахстан)
профессор Нурсултанов Е. Д. (Астана, Казахстан)
академик НАН РК Садыбеков М. А. (Алматы, Казахстан)
профессор С.Я. Серовайский (Алматы, Казахстан)
академик НАН РК Харин С. Н. (Алматы, Казахстан)

Организационный комитет:
Ж. Адиль
М. И. Алькенов
Б. С. Байжанов
Э. А. Бакирова
А. О. Бекетаева
Т. Е. Жакупбеков
Ж.М. Кадирбаева
М. А. Сахауева
О. А. Умбетбаев

Содержание

Пленарные доклады

Председатели: академик НАН РК Садыбеков М. А.
академик НАН РК Кальменов Т. Ш.
академик НАН РК Кулпешов Б. Ш.

Рахимбердиев Марат Исимгалиевич: Жизнь и научная деятельность (к 80-летию со дня рождения)

Г.К. ВАСИЛИНА

[1] *Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*

v_gulmira@mail.ru

Профессор Рахимбердиев Марат Исимгалиевич, доктор физико-математических наук, был крупным ученым, известным специалистом в области качественной теории дифференциальных уравнений и их приложений.

М.И. Рахимбердиев родился 30 января 1945 года в городе Зайсан Восточно-Казахстанской области в семье военнослужащего. В детстве в связи с переводами по службе отца жил и учился в Усть-Каменогорске, Караганде, Кокшетау, Атырау (ранее Гурьев). В 1962 году после окончания средней школы в Атырау начал свою трудовую деятельность на электростанции, проработав в должностях моториста и машиниста котла. В 1964 году поступил на механико-математический факультет Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова. Специализировался на кафедре дифференциальных уравнений под руководством профессора В.М. Миллионщикова. После окончания университета в 1969 году по рекомендации кафедры поступил в аспирантуру отделения математики мехмата МГУ. В университете активно занимался как научной, так и общественной работой, сначала в интернациональном секторе комитета комсомола МГУ, а затем дважды избирался секретарем комсомольской организации мехмата (1970–1972 гг.).

В аспирантуре МГУ под руководством В.М. Миллионщикова и Н.Х. Розова им была написана кандидатская диссертация на тему „Об устойчивости особых показателей и замыкании множества линейных систем с экспоненциальной дихотомией“, в которой были изучены свойства особых показателей систем линейных дифференциальных уравнений с точки зрения влияния на них малых возмущений системы. Защита состоялась в марте 1975 года на диссертационном совете мехмата МГУ.

После окончания аспирантуры в 1974 году М.И. Рахимбердиев был распределен в Институт математики и механики АН Казахской ССР, где работал сначала в лаборатории дифференциальных уравнений (заведующий — академик АН КазССР Жаутыков О.А.), а с 1978 года — в лаборатории численных методов теории переноса (заведующий — академик АН КазССР Султангазин У.А.). С образованием Института космических исследований он по приглашению Султангазина У.М. становится заведующим лабораторией и заместителем директора данного института. В 1996 году вернулся в Институт теоретической и прикладной математики (позднее переименованный в Институт математики), где заведовал лабораторией динамических систем до последних дней своей жизни.

Докторскую диссертацию на тему „Устойчивость и распределение показателей Ляпунова“, защитил в 1992 году в Минске на диссертационном совете Института математики АН Беларуссии. Научным консультантом был В.М.Миллионщиков.

Рахимбердиевым М.И. опубликовано более 130 научных работ. Наиболее существенные научные результаты Рахимбердиевым получены в следующих направлениях: экспоненциально дихотомические системы [1, 2] и грубые свойства неоднородных линейных дифференциальных систем [3], критерий выполнимости условия Перрона [20, 22, 26, 29, 31]; введение и изучение классов линейных систем с различными свойствами грубости асимптотического поведения их решений [23], исследование центральных показателей как разрывных функций параметров системы [10, 13], изучение вопроса о бэровской классификации показателей Ляпунова как разрывных функций [11], описание распределения значений показателей Ляпунова вблизи их точек разрывов как функций системы в различных ситуациях. Им дано описание замыкания множества линейных систем с экспоненциальной дихотомией в метрическом пространстве систем с равномерной метрикой [1, 2], описано открытое ядро множества неоднородных систем, имеющих хотя бы одно ограниченное решение [3]; совместно с Н.Х. Розовым решена задача распределения показателей Ляпунова периодических систем относительно малых в среднем возмущений коэффициентов системы [6, 7]. Для ряда систем решены задачи о локализации спектра показателей на основе их векторного представления. Им установлена строгая принадлежность второму классу Бэра показателей линейных дифференциальных систем и уравнений [11, 34]. Изучены экспоненциально разделенные и равномерно неразделенные гомоморфизмы векторных расслоений динамических систем, введено понятие сильно положительного гомоморфизма и установлена его эквивалентность экспоненциальной разделенности с индексом $n-1$ (n — размерность векторного расслоения), а для $n-k$-ой внешней степени гомоморфизма эквивалентность экспоненциальной разделенности с индексом k [19, 20, 26, 29]; получены коэффициентные признаки экспоненциальной разделенности линейных систем произвольного индекса [22]; показано, что замыкание множества систем с экспоненциальной близостью совпадает с множеством равномерно неразделенных систем [4, 23]. Им получены распределения показателей Ляпунова для линейных расширений динамической системы на торе [16, 24] и совместно со Т.И Смирновым та же задача решена для пе-риодических аппроксимаций эргодический динамической системы на торе [25]. Установлены необходимые и достаточные условия равномерной экспоненциальной разделенности линейного расширения динамической системы на векторном расслоении в терминах послойной сильной положительности семейства автоморфизмов, порождающего динамическую систему [27]; найдены достаточные условия устойчивости старшего показателя семейства автоморфизмов векторного расслоения [19]; установлены типичные свойства однопараметрического семейства линейных дифференциальных уравнений при бифуркациях экспоненциальной устойчивости [30]; найдены условия разрешимости краевых задач для линейных дифференциальных уравнений при их возмущении [35].

Под влиянием У.М. Султангазина и в сотрудничестве с ним существенные результаты получены совместно с их учениками Цаем М.Д, Калыбаевой А.А. при изучении свойств дискретных уравнений Больцмана в пространственно однородном случае, исследована устойчивость положения равновесия, дано описание инвариантных множеств, установлены условия топологической и дифференцируемой эквивалентности пространственно однородных моделей [9,17,26,32]; совместно с Панкратовой И.Н. исследованы бифуркационные свойства многомерных аналогов нелинейных логистических уравнений, дано описание структуры инвариантных множеств дискретного аналога нелинейного логистического разностного уравнения [33]; разработаны некоторые математические модели биологических популяций, которые нашли применение при решении ряда прикладных задач, в частности, при изучении динамики популяции сайгаков и саранчи на территории Казахстана и др.

Много времени он уделял преподавательской деятельности. Более тридцати лет (с 1975 года) по совместительству преподавал на механико-математическом факультете КазНУ им. аль-Фараби (Казахский государственный университет им. С.М. Кирова). Под его руководством защищено 7 кандидатских диссертаций. Постоянно занимался научной экспертизой: член Президиума ВАК РК (1998–2000), член диссертационного совета по защите докторских диссертаций при Институте математики МОН РК, с 2001 по 2004 — заместитель председателя, с 2004 г. по 2008 г. — председатель этого совета. С 1978 года референт реферативных журналов „РЖ Математика“, „Mathematical Review“ (член AMS с 1978 г.), постоянный рецензент журналов „Дифференциальные уравнения“, „Известия НАН РК. Серия физико-математическая“ и др. Был одним из организаторов и заместителем главного редактора „Математического журнала“. Марат Исимгалиевич всегда активно занимался научно-организаторской деятельностью. В 1996–97 гг. исполнял обязанности академика-секретаря Отделения физико-математических наук НАН РК. С 1997 по 2004 г. являлся председателем секции физико-математических наук рабочей группы Высшей научно-технической комиссии при Правительстве РК. В 1997–1999, 2000–2002, 2003–2005, 2006–2008 гг. — научный руководитель республиканских программ фундаментальных исследований по дифференциальным уравнениям и уравнениям математической физики.

За научно-педагогическую и научно-организаторскую деятельность в 2005 году он был награжден медалью Республики Казахстан „Ерен еңбегі үшін“.

Выдающийся ученый Марат Исимгалиевич Рахимбердиев ушел из жизни 9 августа 2008 года. В жизни Марат Исимгалиевич был замечательным человеком, высокоинтеллигентным, добрым, отзывчивым, всегда готовым помочь и словом, и делом, и в то же время принципиальным и твердым, когда того требовали обстоятельства. Светлая память о Марате Исимгалиевиче Рахимбердиеве — Человеке с большой буквы, крупном ученом и педагоге, прекрасном организаторе и руководителе — навсегда останется в сердцах всех, с кем он соприкасался в течение своей яркой и многогранной научной, педагогической и общественной деятельности.

Литература

[1] Рахимбердиев М.И. Об устойчивости особых показателей линейной системы и замыкании множества линейных систем с экспоненциальной дихотомией.1 , *Дифференц. уравнения*, **10**:4 (1974), 659–670.

[2] Рахимбердиев М.И. Об устойчивости особых показателей линейной системы и замыкании множества линейных систем с экспоненциальной дихотомией.2, *Дифференц. уравнения*, **10**:10 (1974), 1797–1807.

[3] Рахимбердиев М.И. Некоторые топологические свойства линейных неоднородных систем, *Дифференц. уравнения*, **12**:5 (1976), 931–936.

[4] Рахимбердиев М.И. О линейных системах, связанных отношением почти проводимости с системами скалярного типа, *Дифференц. уравнения*, **13**:4 (1977), 616–625.

[5] Рахимбердиев М.И. Об одном отношении эквивалентности во множестве систем обыкновенных дифференциальных уравнений, *Известия АН Каз. ССР. Сер. физ-мат.*, **3** (1977), 55–59.

[6] Рахимбердиев М.И., Розов Н.Х. Распределение показателей Ляпунова линейных систем с периодическими коэффициентами, близкими в среднем к постоянным, *Дифференц. уравнения*, **14**:9 (1978), 1710–1714.

[7] Рахимбердиев М.И., Розов Н.Х. Распределение показателей Ляпунова линейных стационарных систем при малых в среднем периодических возмущениях коэффициентов, *Дифференц. уравнения*, **14**:10 (1978), 1913–1914.

[8] Рахимбердиев М.И., Розов Н.Х. О локализации спектра линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, *Известия АН Каз. ССР сер. физ.-мат.*, **1** (1980), 72–76.

[9] Рахимбердиев М.И., Султангазин У.М. Об устойчивости положения равновесия дискретного уравнения Больцмана, *Известия АН Каз ССР. Сер., физ.-мат.*, **1** (1981), 42–46.

[10] Рахимбердиев М.И. О свойстве неустойчивости центральных показателей линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, *Успехи матем. наук*, **36**:4 (1981), 277.

[11] Рахимбердиев М.И. О бэровском классе показателей Ляпунова, *Матем. заметки*, **31**:6 (1982), 925–931.

[12] Рахимбердиев М.И. О распределении нулей решений линейного дифференциального уравнения второго порядка, *Дифференц. уравнения*, **18**:11 (1982), 2016–2017.

[13] Рахимбердиев М.И. О центральных показателях линейных систем, *Дифференц. уравнения*, **19**:2 (1983), 253-259.

[14] Рахимбердиев М.И. Об одном типичном свойстве показателей Ляпунова, *Известия АН Каз. ССР. Сер. физ.-мат.*, **5** (1983), 71–73.

[15] Рахимбердиев М.И. О представлении и изменениях при возмущении системы показателей Ляпунова, *Успехи матем. наук*, **39**:4 (1984), 104.

[16] Рахимбердиев М.И. О показателях Ляпунова линейных расширений динамической системы на торе, *Матем. заметки*, **36**:3 (1984), 309–317.

[17] Рахимбердиев М.И., Цай М. Асимптотические свойства дискретного уравнения Больцмана в пространственно однородном случае, *Известия АН Каз. ССР. Сер. физ.-мат.*, **5** (1985).

[18] Рахимбердиев М.И. Условия грубой экспоненциальной устойчивости, *Успехи матем. наук*, **42**:4 (1987), 118.

[19] Рахимбердиев М.И. Об условиях непрерывности старшего показателя линейного расширения динамической системы, *Дифференц. уравнения*, **24**:4 (1988), 591–600.

[20] Рахимбердиев М.И. Об экспоненциальной разделенности с максимальным индексом и равномерной сильной положительности семейства автоморфизмов векторного расслоения, *Дифференц. уравнения*, **25**:2 (1988), 234-240.

[21] Рахимбердиев М.И. Некоторые свойства старшего показателя Ляпунова как функции параметра, *Успехи матем. наук*, **44**:4 (1989), 209.

[22] Рахимбердиев М.И. Критерий экспоненциальной разделенности линейной системы, *Дифференц. уравнения*, **30**:7 (1994), 70–72.

[23] Рахимбердиев М.И. Об экспоненциальной разделенности линейных систем дифференциальных уравнений, *Успехи матем. наук*, **49**:4 (1994), 141.

[24] Рахимбердиев М.И. Соотношение классов семейств автоморфизмов векторного расслоения с различными свойствами грубости, *Изв. НАН РК. Сер. физ.- мат.*, **1** (1994), 73–77.

[25] Рахимбердиев М.И., Смирнов Т.И. О свойствах линейных расширений сдвигов на торе, близких к эргодическим, *Изв. МН-АН РК. Сер. физ.- мат.*, **3** (1997), 47–57.

[26] Рахимбердиев М.И., Калыбаева А.А. Инвариантные множества и предельные точки дискретного уравнения Больцмана в пространственно однородном случае, *Изв. МН АН РК. Сер. физ.-мат.*, **5** (1997), 24–33.

[27] Рахимбердиев М.И. Положительность и экспоненциальная разделенность семейства автоморфизмов векторного расслоения, *Дифференц. уравнения*, **35**:1 (1999), 121–124.

[28] Рахимбердиев М.И. Об условии слабой экспоненциальной разделенности линейного расширения динамических систем, *Труды Ин-та математики АН Беларуси*, (2000), 51–58.

[29] Рахимбердиев М.И. Соотношение топологической структуры векторного расслоения и условия равномерной экспоненциальной разделенности семейства его морфизмов, *Математический журнал*, **1**:2 (2002), 66-72.

[30] Рахимбердиев М.И. Равномерная экспоненциальная разделенность семейства морфизмов векторного расслоения, *Математический журнал*, **1**:1 (2001), 116–117.

[31] Рахимбердиев М.И. Свойство старшего показателя Ляпунова как разрывной функции системы, *Дифференц. уравнения*, **38**:6 (2002), 855.

[32] Рахимбердиев М.И., Калыбай А.А. Пространственно однородная дискретная модель уравнения Больцмана. Интегрируемый случай, *Математический журнал*, **1**:1 (2002), 56–60.

[33] Рахимбердиев М.И. Канонический вид многомерного аналога нелинейного логистического разностного уравнения , *Математический журнал*, **3**:1 (2003), 54–58.

[34] Рахимбердиев М.И. О разрывности показателей Ляпунова линейных дифференциальных уравнений, *Дифференц. уравнения*, **40**:1 (2004), 1570.

[35] Рахимбердиев М.И. Об условии разрешимости краевых задач для линейных дифференциальных уравнений при их возмущении, *Математический журнал*, **5**:2 (2005), 71–73.

[36] Dauylbaev M.K., Dzhumabaev D.S., Il'in, V.A. et al. Marat Isimgalievich Rakhimberdiev, *Differential Equations*, **44**:12 (2008), 1779–1780. https://doi.org/10.1134/S0012266108120173

[37] Памяти Марата Исимгалиевича Рахимбердиева, *Мат. журнал*, **15**:1 (2015), 104–111.

Геометрия Нийенхейса и ее приложения

А.В. Болсинов

Loughborough University, Loughborough, UK
Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

a.bolsinov@lboro.ac.uk

Цель доклада — рассказать о некоторых приложениях операторов Нийенхейса [11] в геометрии, алгебре и математической физике, следуя работам [2, 3, 4]. Говоря об операторах, мы имеем в виду операторные тензорные поля $A = \left(A^i_j(x)\right)$ на гладких многообразиях.

Определение 1. *Оператором Нийенхейса* называется тензорное поле $L = \left(L^i_j(x)\right)$, удовлетворяющее тождеству $\mathcal{N}_L(\xi,\eta) \stackrel{\mathrm{def}}{=} L^2[\xi,\eta] - L[L\xi,\eta] - L[\xi,L\eta] + [L\xi,L\eta] = 0$ для произвольных векторных полей ξ, η.

Функция f называется *законом сохранения* для оператора A, если 1-форма $A^*\mathrm{d}\, f$ замкнута.

Оператор B называется *симметрией* оператора A, если эти операторы коммутируют в алгебраическом смысле, т.е. $AB = BA$, и для произвольного векторного поля ξ выполняется соотношение:

$$B[A\xi,\xi] + A[\xi,B\xi] - [A\xi,B\xi] = 0. \tag{1}$$

Если для произвольных векторных полей ξ и η выполняется более сильное соотношение

$$\langle A,B\rangle(\xi,\eta) \stackrel{\mathrm{def}}{=} B[A\xi,\eta] + A[\xi,B\eta] - [A\xi,B\eta] - AB[\xi,\eta] = 0, \tag{2}$$

то B называется *сильной симметрией.*

Оператор L, действующий в n-мерном пространстве, называется gl-*регулярным*, если существует вектор ξ такой, что $\xi, L\xi, \dots, L^{n-1}\xi$ линейно независимы.

Первый результат показывает, что операторы Нийенхейса позволяют строить содержательные примеры квазилинейных эволюционных систем с бесконечным числом симметрий и законов сохранения (ср. [9]).

Теорема 2. *Пусть L — оператор Нийенхейса. Рассмотрим семейство операторов вида*

$$A_\lambda = \sigma(\lambda)(L - \lambda\,\mathrm{Id})^{-1}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

где $\sigma(\lambda) = \det\bigl(\lambda\,\mathrm{Id} - L(x)\bigr) = \lambda^n + \sigma_1(x)\lambda^{n-1} + \sigma_2(x)\lambda^{n-2} + \ldots + \sigma_n(x)$ — характеристический многочлен оператора L. Все эти операторы являются симметриями друг для друга. Функции $\frac{1}{\sigma(\mu)}$, $\mu \in \mathbb{R}$, являются общими законами сохранения для этих операторов.

Если L — gl-регулярный оператор, то законы сохранения для (3) могут быть описаны еще одним способом. Рассмотрим произвольную симметрию M оператора L и запишем ее в виде линейной комбинации

$$M = g_1 L^{n-1} + g_2 L^{n-2} + \dots + g_n \mathrm{Id}. \tag{4}$$

Тогда функция g_1 будет общим законов сохранения для всех операторов (3). Более того,

$$A^*_\lambda \mathrm{d}\, g_1 = \mathrm{d}\left(g_1\lambda^{n-1} + g_2\lambda^{n-2} + \dots + g_n\right). \tag{5}$$

Определение 3. Две метрики g и $\bar g$ называются *геодезически эквивалентными*, если они имеют одинаковые геодезические (параметризация на геодезических при этом не учитывается).

Роль операторов Нийенхейса в теории геодезически эквивалентных метрик, восходящей к классическим работам Бельтрами, Дини и Леви-Чивита [1, 6, 8], объясняет следующая конструкция [5, 12]. Рассмотрим геодезически согласованные метрики g и $\bar g$ и оператор L, заданный формулой

$$L = \left|\frac{\det \bar g}{\det g}\right|^{\frac{1}{n+1}} g\bar g^{-1}. \tag{6}$$

Следующая теорема суммирует результаты, полученные разными авторами [5, 7, 10, 13, 14, 15] и касающиеся фундаментальных свойств этого оператора.

Теорема 4. (a) L является оператором Нийенхейса.

(b) Операторы A_λ вида (3) являются $(1,1)$-тензорами Киллинга метрики g.

(c) Функции $F_\lambda : T^*\mathsf{M} \to \mathbb{R}$, $F_\lambda = g^{-1}(A^*_\lambda p, p)$, являются коммутирующими первыми интегралами геодезического потока метрики g на $T^*\mathsf{M}$.

(d) Если L gl-регулярен, то среди интегралов F_λ, $\lambda \in \mathbb{R}$, можно выбрать $n = \dim \mathsf{M}$ функционально независимых и, следовательно, геодезический поток метрики g вполне интегрируем по Лиувиллю.

В случае gl-регулярного оператора L естественно задать вопрос о том, какой потенциал можно *добавить* к геодезическому потоку метрики g, чтобы интегрируемость сохранялась. Ответ дает следующая конструкция.

Теорема 5. *Пусть M — симметрия оператора L, записанная в виде* (4)*. Рассмотрим натуральную гамильтонову систему на многообразии M с метрикой g и потенциалом $V = g_1(x)$, т.е. систему на $T^*\mathsf{M}$ с гамильтонианом вида $H = K + V = \frac{1}{2}\, g^{-1}(p,p) + g_1(x)$.*

Эта система интегрируема по Лиувиллю. Ее коммутирующими первыми интегралами являются функции вида $\widetilde{F}_\lambda = F_\lambda + V_\lambda$, где

$$F_\lambda = \tfrac{1}{2} g^{-1}(A_\lambda p, p) \quad и \quad V_\lambda(x) = g_1\lambda^{n-1} + g_2\lambda^{n-2} + \dots + g_n.$$

Заметим, что соотношение (6) позволяет выразить метрику $\bar g$ через g и L простой формулой $\bar g = \frac{1}{\det L} g L^{-1}$. Мы будем говорить, что метрика g и g-симметричный оператор L геодезически согласованы, если метрики g и $\bar g = \frac{1}{\det L} g L^{-1}$ геодезически эквивалентны. Ясно, что изучение пар геодезически эквивалентных метрик $(g, \bar g)$ сводится к изучению геодезически согласованных пар (g, L). При этом вторая задача имеет определенные преимущества, поскольку позволяет использовать методы и результаты геометрии Нийенхейса. В этом контексте естественными являются следующие вопросы.

- Пусть на многообразии M задан оператор Нийенхейса L. Допускает ли этот оператор хотя бы одну геодезически согласованную с ним метрику g?
- Пусть L допускает геодезически согласованную с ним метрику g. Как описать все такие метрики?

Теорема 6 ([3])**.** *Для всякого вещественно-аналитического* gl*-регулярного оператора L локально существует геодезически согласованная с ним метрика g.*

Эта метрика может быть задана явно, если в некоторых координатах $u^1, \dots, u^n$ оператор L записан в виде так называемой сопровождающей матрицы (приведение к такому виду в вещественно-аналитическом случае всегда возможно):

$$L = L_{\mathsf{comp}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\sigma_n & -\sigma_{n-1} & \dots & -\sigma_2 & -\sigma_1 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

где σ_i — коэффициенты характеристического многочлена оператора L. В этом случае метрика g может быть задана формулой

$$g = g_{\mathsf{comp}} = \sum_{m=1}^{n} \left(\sigma_{n-m} \sum_{i+j=m+1} \mathrm{d}\, u_i \mathrm{d}\, u_j \right), \qquad \sigma_0 = 1.$$

Следующая теорема важна для ответа на второй вопрос.

Теорема 7 ([4])**.** *Пусть L и g геодезически согласованы. Предположим, что оператор M самосопряжен относительно g и является сильной симметрией для L. Тогда L и $gM := (g_{is}M^s_j)$ геодезически согласованы. Более того, если L* gl*-регулярен, то всякая метрика $\widetilde{g}$, геодезически согласованная с L, имеет вид $\widetilde{g} = gM$, где M — симметрия оператора L.*

Финансирование: Данное исследование финансируется Министерством науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № AP23483476).

Ключевые слова: оператор Нийенхейса, закон сохранения, интегрируемые гамильтоновы системы, геодезически эквивалентные метрики.

2010 Mathematics Subject Classification: 53C15, 53A45, 37K05, 37K06, 37K10

Литература

[1] Beltrami E. Resoluzione del problema: riportari i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetische vengano rappresentante da linee rette, *Ann. Mat.*, **1** (1865), no. 7, 185–204.

[2] Bolsinov A.V., Konyaev A.Yu., Matveev V.S. Nijenhuis geometry, *Advances in Mathematics*, **394** (2022), 108001.

[3] Bolsinov A.V., Konyaev A.Yu., Matveev V.S. Nijenhuis Geometry IV: conservation laws, symmetries and integration of certain non-diagonalisable systems of hydrodynamic type in quadratures, *Nonlinearity* **37** (2024), 105003.

[4] Bolsinov A.V., Konyaev A.Yu., Matveev V.S. Applications of Nijenhuis Geometry V: geodesic equivalence and finite-dimensional reductions of integrable quasilinear systems. *J. Nonlinear Sci.* **34**, (2024) 33.

[5] Bolsinov A.V., Matveev V.S. Geometrical interpretation of Benenti systems, *J. Geom. Phys.* **44** (2003), no. 4, 489–506.

[6] Dini U. Sopra un problema che si presenta nella theoria generale delle rappresetazioni geografice di una superficie su un'altra, *Ann. Mat.*, ser. 2, **3**(1869), 269–293.

[7] Gover A.R., Matveev V.S. Projectively related metrics, Weyl nullity and metric projectively invariant equations, *Proc. Lond. Math. Soc.* **114** (2017), no. 2, 242–292.

[8] Levi-Civita T. Sulle trasformazioni delle equazioni dinamiche, *Ann. di Mat.*, serie 2a, **24** (1896), 255–300.

[9] Lorenzoni P., Magri F., A cohomological construction of integrable hierarchies of hydrodynamic type, *Int. Math. Res. Notices*, **34** (2005), 2087–2100.

[10] Matveev V.S., Topalov P.J. Trajectory equivalence and corresponding integrals, *Regular and Chaotic Dynamics*, **3**(1998), 30–45.

[11] Nijenhuis A. X_{n-1}-forming sets of eigenvectors. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* **54**: *Indag. Math.* **13** (1951), 200–212.

[12] Синюков Н. С. *Геодезические отображения римановых пространств.* Москва: Наука, 1979, 256 с.

[13] Tabachnikov S. Projectively equivalent metrics, exact transverse line fields and the geodesic flow on the ellipsoid. *Comment. Math. Helv.* **74** (1999), 306–321.

[14] Topalov P. Geodesic compatibility and integrability of geodesic flows, *J. Math. Phys.* **44** (2003), no. 2, 913–929.

[15] Topalov P., Matveev V.S. Geodesic Equivalence via Integrability, *Geometriae Dedicata* **96** (2003) 91–115.

Обобщенный интеграл Дирихле и эллиптические краевые задачи на стратифицированном множестве

Н.С. Даирбеков

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан
Университет СДУ, Каскелен, Казахстан

nurlan.dairbekov@gmail.com

В данном докладе будет дан обзор результатов, полученных автором за последние годы в совместной работе с О. М. Пенкиным, Д. В. Савастеевым и Л. О. Сарыбековой, по вопросам постановки и разрешимости эллиптических краевых задач на стратифицированных множествах.

Стратифицированное множество определяется как связное подмножество евклидова пространства $\mathbb{R}^d$, являющееся объединением конечного семейства Σ непересекающихся связных подмногообразий σ_k (без края), называемых далее стратами:

$$\Omega = \bigcup_{\sigma_k \in \Sigma} \sigma_k.$$

Каждая страта σ_k имеет компактное замыкание в $\mathbb{R}^d$. Предполагается, что страты примыкают друг к другу по типу клеточного комплекса, т.е. граница каждой страты состоит из некоторых страт семейства Σ и каждое пересечение $\overline{\sigma}_k \cap \overline{\sigma}_m$ замыканий страт в $\mathbb{R}^d$ либо пусто, либо является объединением некоторых страт из Σ. Далее соотношение $\sigma_k \succ \sigma_m$ между двумя стратами означает, что $\sigma_m \subset \partial\sigma_k$; в этом случае мы говорим, что данные страты примыкают друг к другу. Страты, не примыкающие к стратам большей размерности, называются свободными.

Пусть $d(\sigma_k)$ обозначает размерность страты σ_k. Мы определяем меру μ на Ω следующим образом. Скажем, что подмножество ω в Ω является μ-измеримым, если каждое пересечение $\omega \cap \sigma_k$ измеримо относительно $d(\sigma_k)$-мерной лебеговой меры на σ_k. Очевидно, что такие подмножества образуют σ-алгебру в Ω, а функция μ, определяемая формулой

$$\mu(\omega) = \sum_{\sigma_k \in \Sigma} \mu_{d(\sigma_k)}(\sigma_k \cap \omega),$$

в которой $\mu_{d(\sigma_k)}$, обычная $d(\sigma_k)$-мерная мера Лебега на σ_k, обладает всеми свойствами меры. Интеграл Лебега μ-измеримых функций f, определяемых стандартным образом, сводится к сумме

$$\int\limits_{\omega} f\,d\mu = \sum_{\sigma_k \in \Sigma} \int\limits_{\sigma_k \cap \omega} f\,d\mu_{d(\sigma_k)}.$$

Множество Ω предполагается представленным в виде объединения $\Omega^\circ \cup \partial\Omega$ (*“внутренности”* и *“границы”*), в котором Ω° — связное относительно открытое подмножество Ω, состоящее из некоторых страт из Σ и удовлетворяющее равенству $\overline{\Omega^\circ} = \Omega$, а оставшаяся часть $\partial\Omega = \Omega \backslash \Omega^\circ$ оказывается тогда топологической границей множества Ω°.

Пусть $\widetilde{\Sigma} \subset \Sigma$ — некоторое семейство страт, лежащих в Ω°, которое содержит все свободные страты, и пусть θ — стратифицированная константа, равная 1 на стратах из $\widetilde{\Sigma}$ и равная 0 на оставшихся стратах. Определим обобщенный интеграл Дирихле

$$\mathcal{D}_p(f) = \int_{\Omega^\circ} |\theta \nabla u|^p \, d\mu = \sum_{\sigma_k \in \widetilde{\Sigma}} \int_{\sigma_k} |\nabla u|^p \, d\mu_{d(\sigma_k)}. \tag{1}$$

Нашим основным объектом исследования является уравнение Эйлера – Лагранжа для этого функционала, которое имеет следующий вид:

$$\nabla \cdot (|\theta \nabla u|^{p-2} \theta \nabla u) = 0, \quad u\big|_{\partial\Omega^0} = \phi. \tag{2}$$

Внешний значок ∇ – (стратифицированная) дивергенция.

(Стратифицированная) дивергенция векторного поля $\vec{F} \in \vec{C}^1(\Omega^\circ)$ в точке $X \in \sigma_k \subset \Omega^\circ$ задаётся формулой:

$$\nabla \cdot \vec{F}(X) = \nabla_{d(\sigma_k)} \cdot \vec{F}(X) + \sum_{\sigma_i \succ \sigma_k, d(\sigma_i) = d(\sigma_k)+1} \vec{F}(X + 0 \cdot \vec{\nu}_i) \cdot \vec{\nu}_i,$$

где суммирование проводится по всем стратам σ_i, примыкающим к σ_k и имеющим размерность на единицу больше. Здесь $\nabla_{d(\sigma_k)}$ в правой части обозначает оператор обычной, $d(\sigma_k)$-мерной, дивергенции, применённый к сужению $\vec{F}|_{\sigma_k}$ на страту σ_k, $\vec{\nu}_i$ — единичная внутренняя нормаль к σ_k в σ_i в точке X, а $\vec{F}(X + 0 \cdot \vec{\nu}_i)$ — предел $\vec{F}(Y)$ при $Y \in \sigma_i$, стремящемся к X изнутри страты $\sigma_i \succ \sigma_k$ по направлению вектора ν_i.

Отметим два крайних случая: $\widetilde{\Sigma}$ совпадает со всем набором внутренних страт и $\widetilde{\Sigma}$ совпадает с набором всех свободных страт. В первом случае дифференциальный оператор в (2) является жестким p-лапласианом. Во втором случае — мягким p-лапласианом. Для $p = 2$ мы получаем гармонические функции в смысле жесткого лапласиана в первом случае, и гармонические функции в смысле мягкого лапласиана во втором.

Исследование слабой разрешимости задачи (2) основано на аналогах неравенства Соболева в случае, когда соболевская полунорма задается обобщенным интегралом Дирихле (1). Ранее аналог неравенства Соболева для $\widetilde{\Sigma}$, заданного всем набором внутренних страт, был получен в [1]. Он дает разрешимость задачи Дирихле в случае жесткого p-лапласиана.

Классическая разрешимость задачи (2) исследовалась только для гармонических функций в смысле мягкого лапласиана и базировалась на методе Перрона. Соответствующий результат опубликован в [2].

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № BR20281002).

Ключевые слова: интеграл Дирихле, p-лапласиан, неравенство Соболева, метод Перрона

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

Литература

[1] Даирбеков Н. С., Пенкин О. М., Сарыбекова Л. О. Аналог неравенства Соболева на стратифицированном множестве, *Алгебра и анализ*, **30**:5 (2018), 149–158.

[2] Даирбеков Н. С., Пенкин О. М., Савастеев Д.В. Метод Перрона в задаче Дирихле для мягкого лапласиана на стратифицированном множеств, *Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр.*, ***521***:*1 (2025), 23–27.*

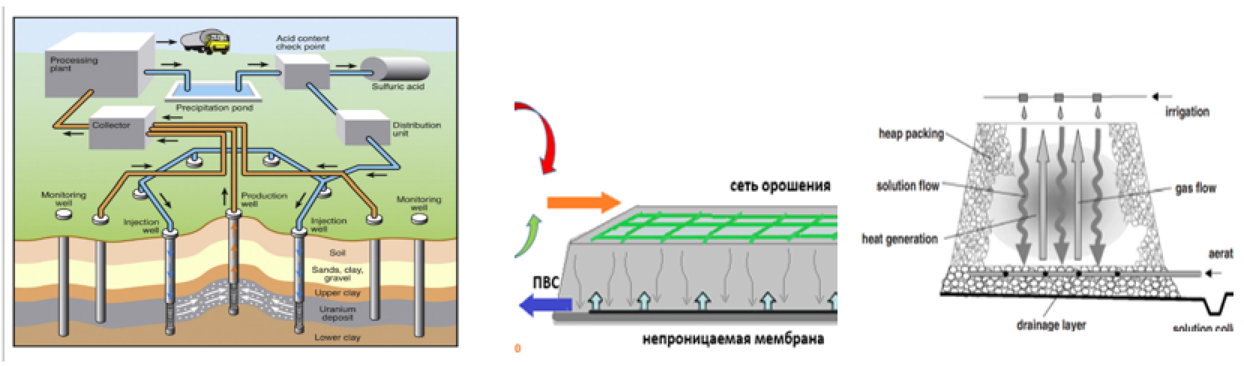
Моделирование и исследование процессов химического и биохимического выщелачивания минералов

А. КАЛТАЕВ

Satbayev University, Алматы, Казахстан

a.kaltayev@satbayev.university

Все более широкое применение технологии извлечения соединений металлов методами химического и биохимического выщелачивания из руд на месте их залегания или из кучи становится явным трендом современного горного дела [1-7].



Схемы подземного скважинного и кучного выщелачивания

Технология выщелачивания металлов включает следующие основные три процессы: фильтрация химического или биохимического растворителя через рудосодержащую пористую среду, перевод целевого металла или его соединений из твердого в жидкое состояние с помощью реагента и дальнейшая его транспортировка (перекачка) в места переработки. В докладе рассматриваются модели подземного химического скважинного выщелачивания оксидов урана и биохимического кучного выщелачивания дисульфида железа(II) и результаты исследований на их основе.

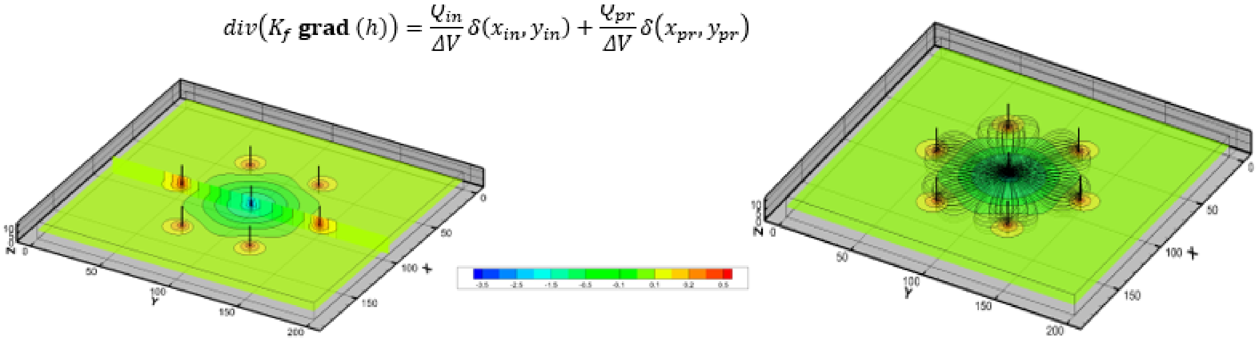
1. Подземное скважинное выщелачивание урана

При подземном скважинном химическом выщелачивании оксидов урана в Казахстане в основном используется сернокислотный растворитель H_2SO_4. В силу приближенного характера данных по составу рудосодержащей породы в расчетной модели приняты следующие относительно упрощенные химические реакций, по которым происходит перевод четырех и шести валентных оксидов урана и рудосодержащей породы из твердого в жидкое состояние [5,7]:

$$UO_{2(s)} + H_2SO_{4(l)} \rightarrow UO_2SO_{4(l)} + 2H^+_{(l)}$$
$$UO_{3(s)} + H_2SO_{4(l)} \rightarrow UO_2SO_{4(l)} + H_2O_{(l)}$$
$$Minerals_{(s)} + H_2SO_{4(l)} \rightarrow Solution_{(l)}$$

Фильтрация химического растворителя и части растворенной рудосодержащей породы через пористую среду описываются законом сохранения масс и законом Дарси. Эти два уравнения сводятся к одному 3D эллиптическому уравнению относительно давления, которое решается численно. По заданным значениям расходов растворителя на закачных и продуктивного раствора на откачных скважинах определяется поле давления. Вдали от скважин давление считается постоянным и равным $p = p_0$. По найденному полю давления из закона Дарси определяется поле скорости, затем с использованием алгоритма Поллока строятся линий тока [8-10].

$$div\left(K_f\, \mathbf{grad}\,(h)\right) = \frac{Q_{in}}{\Delta V}\delta(x_{in}, y_{in}) + \frac{Q_{pr}}{\Delta V}\delta(x_{pr}, y_{pr})$$

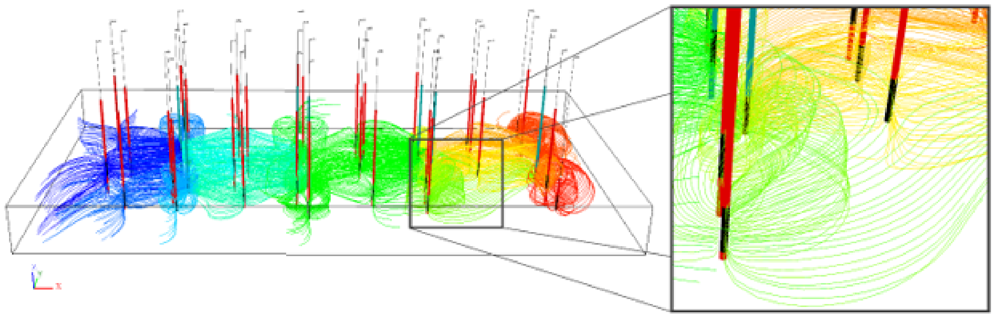


Линий одинаковых давлении (слева) и линии тока течений (справа) в одной гексагональной ячейке, 389 линий тока (9×7×6)

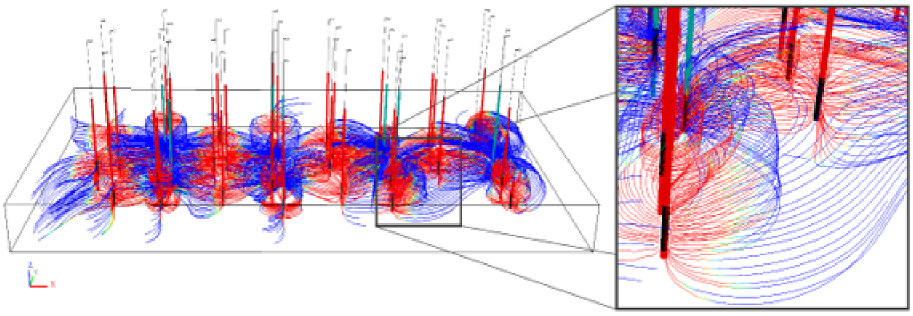
Растворение соединений урана и части рудосодержащей породы из твердого в жидкое состояние и дальнейшая их транспортировка (перекачка) в места переработки описываются уравнениями переноса компонентов в пористой среде с реакциями второго порядка. При этом 3D уравнения переноса компонентов сведены к 1D уравнениям, проектированием их на линии тока.

$$\begin{aligned} &\partial_t C_M = -\nu_1 \omega/(1-\phi) \\ &\partial_t C_R + \mathbf{u}.\nabla C_R = \nabla.(D\,\nabla C_R) - \nu_2\omega/\phi \\ &\partial_t C_P + \mathbf{u}.\nabla C_P = \nabla.(D\,\nabla C_P) + \nu_3\omega/\phi \end{aligned} \qquad \omega = k\, C_M C_R$$

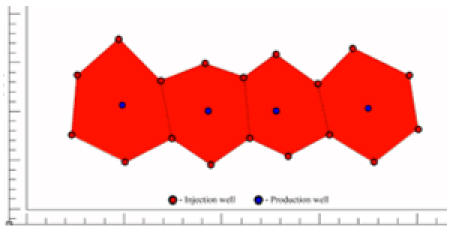
Система уравнений решается численно. Задаются начальные концентраций минерала в пласте и растворителя на закачных скважинах. Размеры рассчитанных реальных месторождений составляют порядка 500м x 200м x 10м. Задача распараллеливается с использованием CUDA технологий. В качестве примера приведены расчеты по блоку, состоящему из 8-и гексагональных ячеек, включающего 30 закачных и 8 откачных скважин. Расстояние между скважинами 45 м. Построены и показаны 3D линий тока в межскважинном пространстве в некоторый момент времени работы блока. Также показаны 3D распределения выщелачивающего раствора и оксидов урана в твердом и жидком состояниях вдоль линии тока.



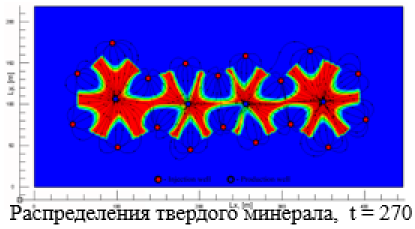
3D линии тока в межскважинном пространстве в некоторый момент времени работы 38 скважин: 30 закачных и 8 откачных. Расстояние между скважинами 45 м. Цвета линии токов указывает на принадлежность к определенной закачной скважине.



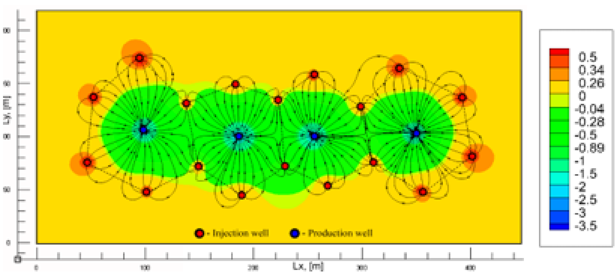
3D распределение выщелачиваю-щего раствора вдоль линии тока в некоторый момент времени работы скважин в межскважинном пространстве. Красный цвет означает максимальную концентрацию реагента, синий – минимальную.



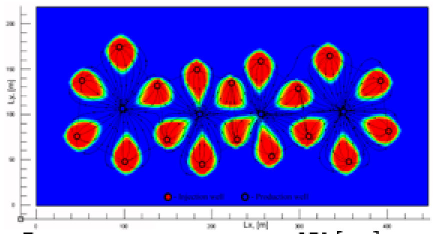
Исходное распределения твердого минерала



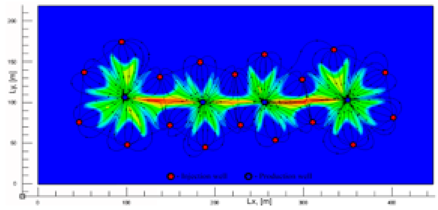
Распределения твердого минерала, t = 270 [сут]



Распределение давления в пласте в момент времени t = 270 [сут]



Распределения реагента, t = 270 [сут]



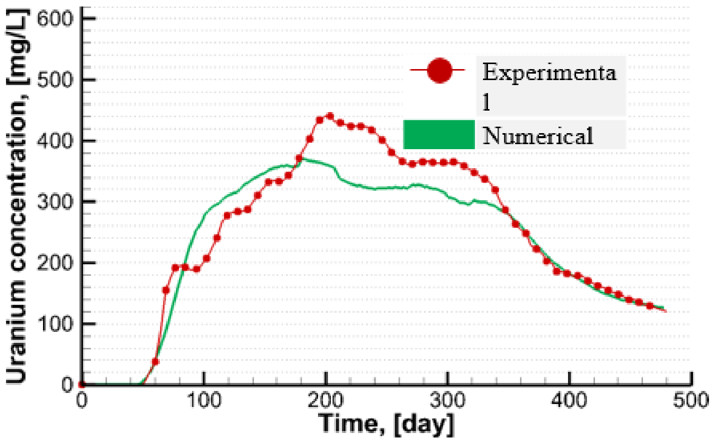
Распределения растворенного компонента, t = 270 [сут]

Характеристики участка месторождения

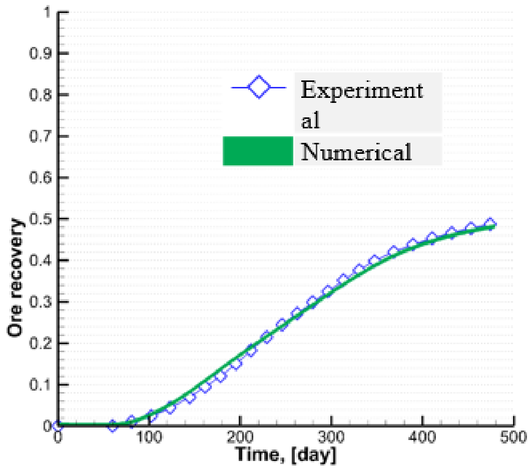
h	y_U	a_U	K_f	ρ_s	ϕ
м	кг.кг$^{-1}$	м%	м сут$^{-1}$	кг м$^{-3}$	
11.28	0.00077	0.8686	7.0	1700	0.22

Проведены сравнения экспериментальной и численной зависимостей кривой извлечения оксидов урана от времени и изменения со временем экспериментального и численного результатов степени извлечения оксидов урана, которые находятся в удовлетворительном согласии.

Проведены моделирование и исследования работы различных блоков месторождений. Разработаны 6 программных обеспечений (ПО) и на них получены авторские свидетельства. На основе проведенных расчетов и исследований создана система управления для добывающих подразделений, позволяющая прогнозировать, планировать, мониторить и управлять извлечение урана на всех стадиях его разработки. Эти ПО переданы ИВТ НАК «Казатомпром» по Договору о закупке работ по разработке ПО. Два ПО внедрены на двух горнорудных управлениях и НАК «Казатомпрому» продана лицензия на их использования.



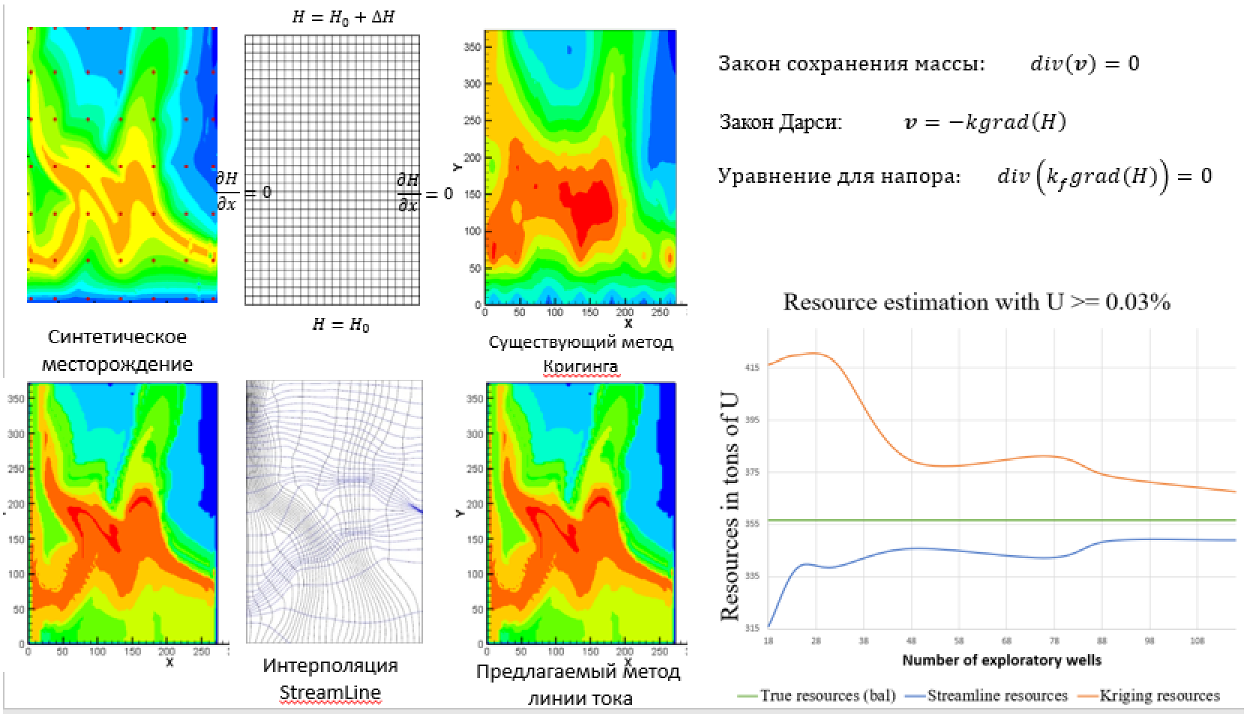
Сравнение экспериментальной и численной зависимостей кривой извлечения от времени. Вертикальная кривая отражает концентрацию урана в продуктивном растворе на откачных скважинах



Сравнение изменения со временем экспериментального и численного результатов степени извлечения урана

Метод построения геологической модели на основе линии тока

Также разработан и предложен метод построения геологической модели месторождения урана на основе линий тока, учитывающий направление потока в пласте, так как месторождения инфильтрационного типа образуются за счет переотложения минералов под вековым действием сил тяжести [11].



По скважинным данным рассчитывается 3D распределение концентраций оксидов урана и их запасов между скважинами. Метод позволяет с высокой точностью оконтуривать месторождения минералов и рассчитать запасы полезных ископаемых и подкисленный объем. Четыре статьи опубликованы в журналах, входящих в список WoS и Scopus, сделаны два доклада на конференции МАГАТЭ в Вене.

2. Биохимическое выщелачивание пирита — дисульфида железа (FeS_2))

Многие минералы из сульфидных руд можно извлекать методом подземного скважинного или кучного выщелачивания, переводя минералы из твердого в жидкое состояние путем окисления их ионами железа(III) (Fe^{3+}) [12-16]. Перевод минералов в жидкое состояние происходит по реакции

$$MeS_{(s)} + 2Fe^{3+} + 2H^{+} \to chemically \to Me^{2+}_{(l)} + H_2S^{+} + 2Fe^{2+}.$$

с образованием ионов железа(II) (Fe^{2+}). (Ионы трехвалентного железа(III) также быстро окисляют и растворяют нерастворимые в серной кислоте оксиды четырехвалентного урана $UO_{2(s)}$по реакции [16]:

$$UO_{2(s)} + 2Fe^{3+} \to chemically \to UO_{2(l)} + 2Fe^{2+},$$

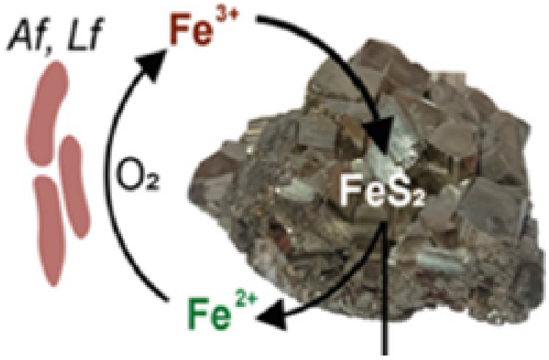
тогда как он не растворяется серной кислотой.) После этого сульфаты металлов эффективно извлекаются из пластов методами подземного скважинного выщелачивания или из кучи методами фильтрации. Для поддержания данной реакции ионы железа(III) могут быть получены, при наличии кислорода, по следующей реакцией

$$2Fe^{2+} + 0.5O_2 + 2H^{+} \to chemically \to 2Fe^{3+} + H_2O,$$

которая является медленной, лимитирующий процесс выщелачивания, реакцией при кислотности среды $pH < 2$. В то же время, использование железоокисляющих бактерий, типа *Acidithiobacillus ferrooxidans (At. ferrooxidans)* и *Leptospirillum ferrooxidans (L. ferrooxidans)*, как катализаторов, увеличивает скорость окисления ионов железа(II) на порядки, в разы ускоряя общий процесс выщелачивания [17]

$$2Fe^{2+} + 0.5O_2 + 2H^{+} \to bacteria \to 2Fe^{3+} + H_2O.$$

Связано это с тем, что образовавшиеся в результате окисления сульфидных минералов (и оксида урана) ионы железа(II) являются электрон-донорами (источниками энергии) для бактерии. Железоокисляющие бактерий, получая электрон из ионов железа(II), регенерируют ионы железа(III) и процесс окисления минералов ионами железа(III) повторяется. В этом процессе очень важно наличие пирита, как источника ионов железа(II). Данный процесс называется биохимическим выщелачиванием минералов, в котором растворение твердых сульфидных минералов происходит путем химических реакций, катализируемых железоокисляющими бактериями.

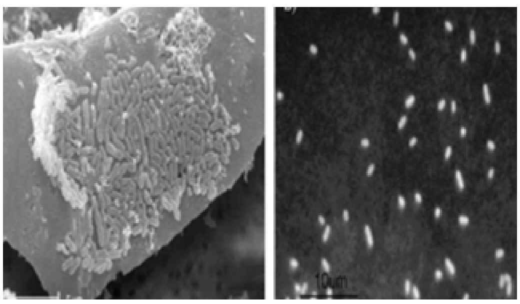


Модель бактериального выщелачивания металлических поверхностей

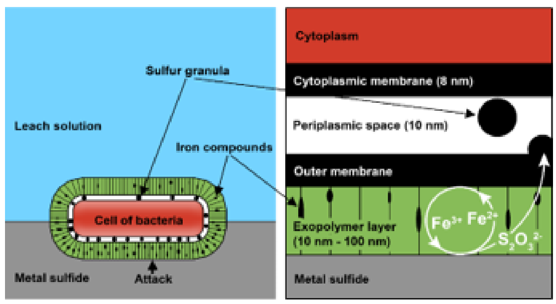
Железоокисляющие бактерий представляют собой одноклеточный организм без ядер приблизительно цилиндрической формы длиной около 1.5 микрона и диаметром в 1 мкр.

Процесс биохимического выщелачивания минералов включает:

— инокуляцию бактерий в рудосодержащую породу,
— прикрепление их к поверхности пирита и/или отсоединение,
— размножение бактерий с переводом ионов железаII в ионов железаIII,
— окисление соединений металлов ионами железаIII,
— транспортировка растворенных соединений металлов.



A. ferrooxidans
(a) Прикрепленные к поверхности пирита,
(b) планктонной форме в растворе. **[M. Gleisner et al. 2006.]**



Экзополисахариды образуют слой вокруг бактерии и являются биокатализаторами реакций окисления сульфата железа(II) – Fe^{2+} и серы

Бактерии могут находится в планктонном (взвешенном) состоянии в жидкости, содержащей ионы железа(II) и питательные вещества или прикрепляться к поверхности пирита [18]. Прикрепление к отрицательно заряженной поверхности пирита происходит электрохимическим путем за счет положительно заряженных ионов во внешней мембране бактерий [19]. Эксперименты показывают, что скорость прикрепления к поверхности, также, как и отсоединения от нее, линейно зависят от концентраций бактерий на поверхности пирита [20].

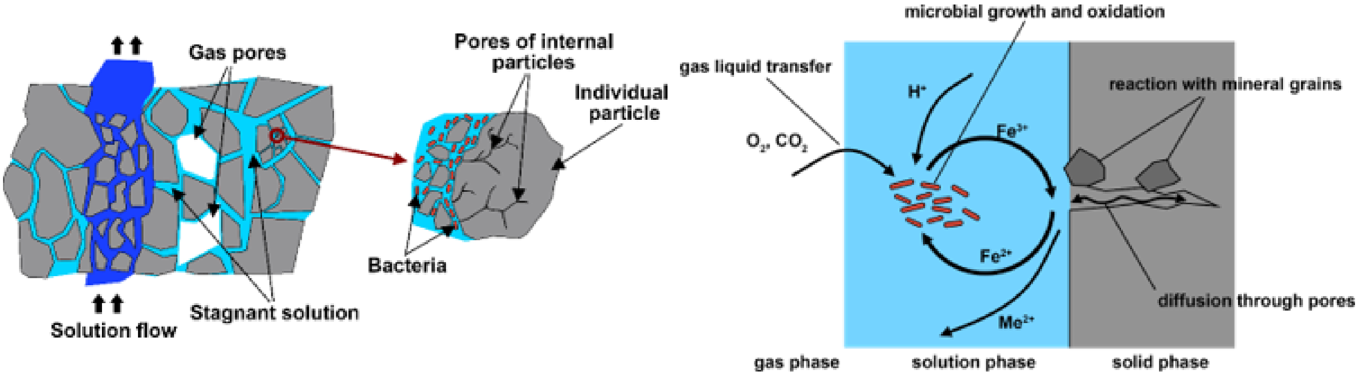


Схема движения раствора и бактерий сквозь пористой среды

Скорость размножения бактерий делением пополам описывается уравнением Моно:

$$\frac{dX}{dt} = \frac{\mu_{\max} S}{K_S + S} X,$$

где X — это концентрация бактерий, S — субстрат (концентрация источника энергий $Fe^{(2+)}$, μ_{max} — максимальная скорость роста бактерий, K_s — константа, равная концентрации субстрата, при которой скорость роста равна половине максимальной скорости роста.

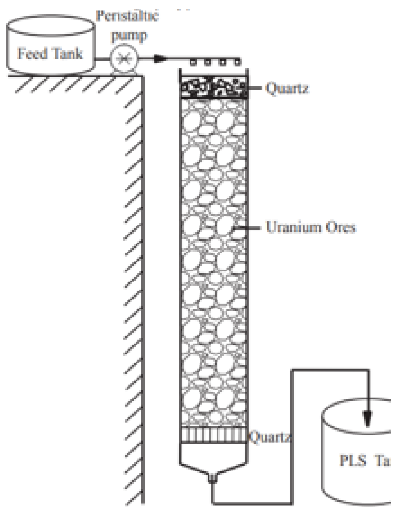
Для описания скорости окисления пирита предложено следующее эмпирическое уравнение [21, 22]

$$\frac{dC_{FeS_2}}{dt} = \frac{V_{FeS_2}^{\max}}{1 + B \cdot (C_{FeII}/C_{FeIII})} \cdot C_{FeS_2}$$

Таким образом, полная система уравнений, описывающая 1D биохимическое выщелачивание пирита имеет следующий вид:

$$\frac{\partial C_{FeIII}}{\partial t} + u\frac{\partial C_{FeIII}}{\partial x} = D_L \frac{\partial^2 C_{FeIII}}{\partial x^2} - 2 \cdot \frac{v_{FeS2}^{\max} C_{FeIII}}{C_{FeIII} + BC_{FeII}} C_{FeS_2} + 2 \cdot \frac{1}{Y} \frac{\mu_{\max} C_{FeII}}{k_s + C_{FeII}} X_a$$

$$\frac{\partial C_{FeII}}{\partial t} + u\frac{\partial C_{FeII}}{\partial x} = D_L \frac{\partial^2 C_{FeII}}{\partial x^2} + 3 \cdot \frac{v_{FeS2}^{\max} C_{FeIII}}{C_{FeIII} + BC_{FeII}} C_{FeS_2} - 2 \cdot \frac{1}{Y} \frac{\mu_{\max} C_{FeII}}{k_s + C_{FeII}} X_a$$



$$\frac{\partial X_f}{\partial t} + u\frac{\partial X_f}{\partial x} = D_L \frac{\partial^2 X_f}{\partial x^2} - K_A(1 - \frac{X_a}{X_S}) X_f + K_D X_a$$

$$\frac{dX_a}{dt} = K_A(1 - \frac{X_a}{X_S}) X_f - K_D X_a + \frac{\mu_{\max} C_{FeII}}{k_s + C_{FeII}} X_a$$

$$\frac{dC_{FeS2}}{dt} = -1 \cdot \frac{v_{FeS2}^{\max} C_{FeIII}}{C_{FeIII} + BC_{FeII}} C_{FeS_2}$$

где

$u = U / \varepsilon$,

$D_L = \alpha_L u$.

Начальные условия t=0:

$X_f(x,0) = 0$, $X_a(x,0) = 0$, $C_{FeS2}(x,0) = C^0_{FeS2}(x)$, $C_{FeII}(x,0) = 0$, $C_{FeIII}(x,0) = 0$.

Граничные условия x=0:

$X_f(0,t) = X_{f0}(t)$, $X_a(0,t) = 0$, $C_{FeS2}(0,t) = 0$, $C_{FeII}(0,t) = 0$, $C_{FeIII}(0,t) = F^0(t)$.

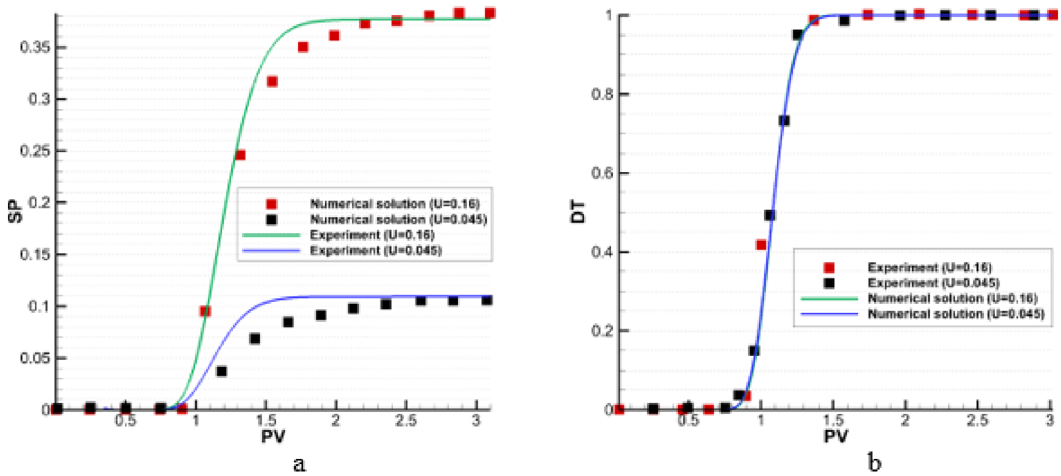
На рисунке ниже приведены изменения со временем концентраций трассера и взвешенных суспензий без выщелачивания на выходе из колонны и сравнения их с экспериментальными данными при значениях параметров, начальных и граничных условий и сравнение их с экспериментальными данными [23].

Параметры задачи:

U	ε	Для SP: D_L	Для DT: D_L	K_{dep}	C_0
cm/sec		cm^2/sec	cm^2/sec	1/h	g/L
0.16	0.375	$1.6u^{0.99}$	$0.36u^{0.93}$	$46.87U^{0.33}(U^{0.49})$	0.1

Начальные и граничные условия следующие

при t=0	$C_{SP}(x,0)=0,$	$C_{DT}(x,0)=0,$
при x=0	$C_{SP}(0,t)=C_0,$	$C_{DT}(0,t)=C_0.$



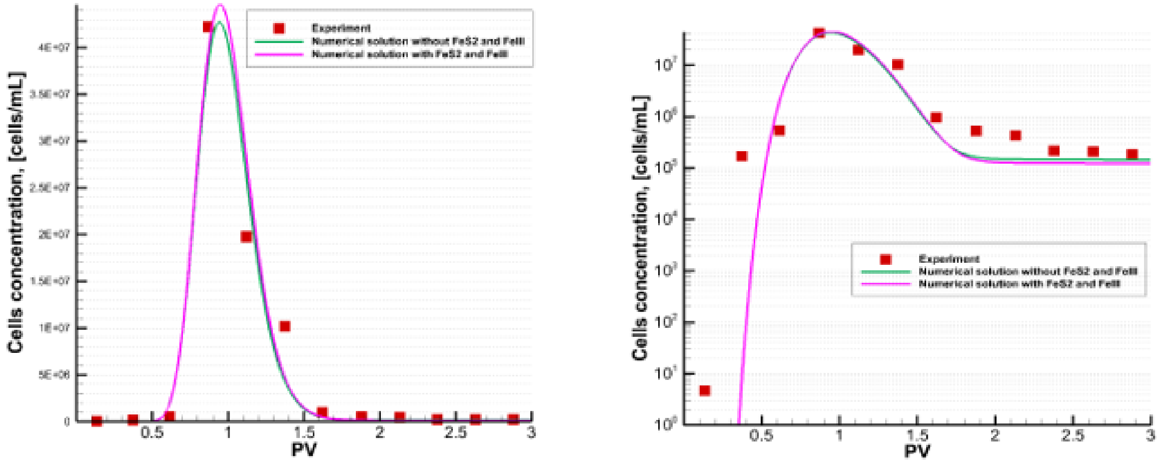
Изменения со временем концентраций взвешенных суспензии a) и трассера b) на выходе из колонны. Экспериментальные данные взяты из [Nasre-Dine Ahfir et al., 2016].

На Рисунке показано влияние насыщения поверхности бактериями на распределение планктонных бактерий на выходе из колонны. Начальными и граничными условиями для бактерий были:

при t=0	$X_f(x,0)=0,$	$X_a(x,0)=0,$	$C_{FeS2}(x,0)=C^0_{FeS2}(x),$
	$C_{FeII}(x,0)=0,$	$C_{FeIII}(x,0)=0.$	
при x=0	$X_f(0,t)=\begin{cases}1E+9, t\le 0.0227\\ 0, t>0.0227\end{cases}$	$C_{FeIII}(0,t)=F^0(t).$	$X_a(0,t)=0,$
	$C_{FeII}(0,t)=0,$	$C_{FeS2}(0,t)=0,$	

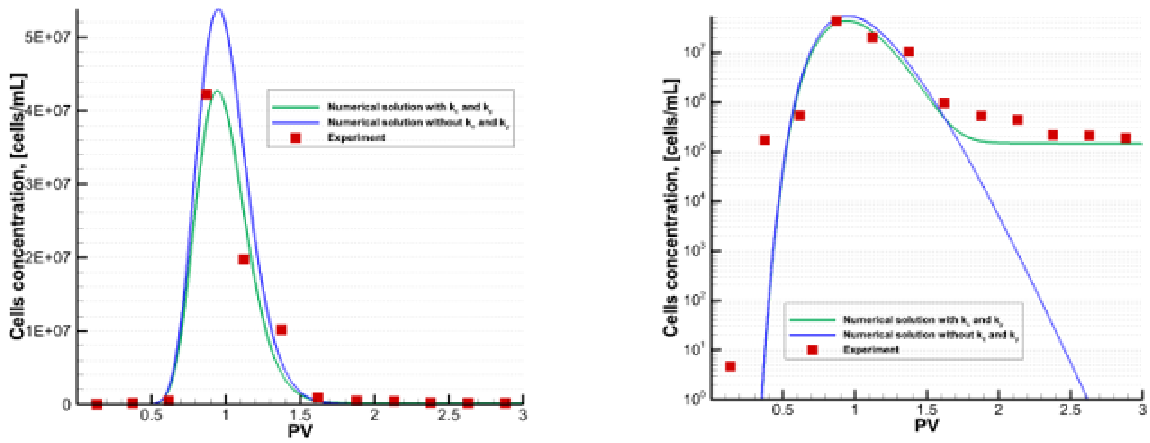
Дополнительными параметрами были:

X_S	μ_{max}	k_s	$Y_{X/S}$	B	$V^{max}_{FeS_2}$	Q
cells/mL	h^{-1}	g/mL	cells /g		h^{-1}	mL h^{-1}
10^7	0.0864	$7.1*10^{-4}$	$2.0*10^7$	2200	$6.7*10^{-3}$	100



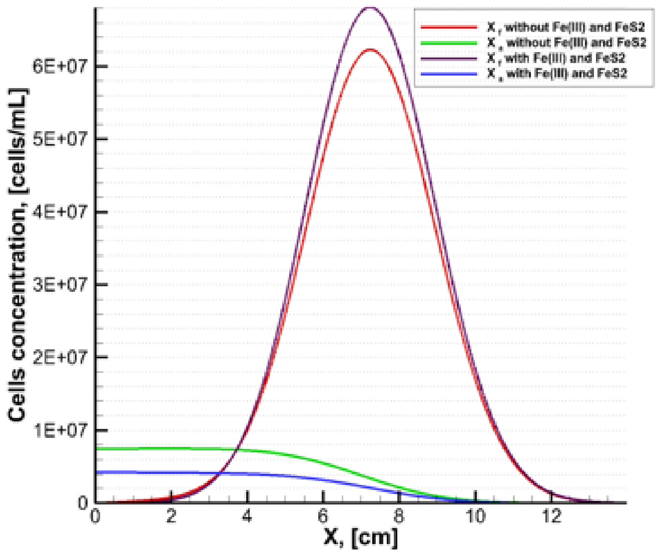
Влияние наличия пирита и ионов железаIII – Fe^{3+} на распределение планктонных бактерий на выходе из колонны. **a** – в линейных координатах, **b** – в логарифмичесих координатах.

На рисунках ниже приведены результаты численного решения изменения концентрации бактерий в потоке со временем на выходе из колонны и сравнение их с экспериментальными данными [24].



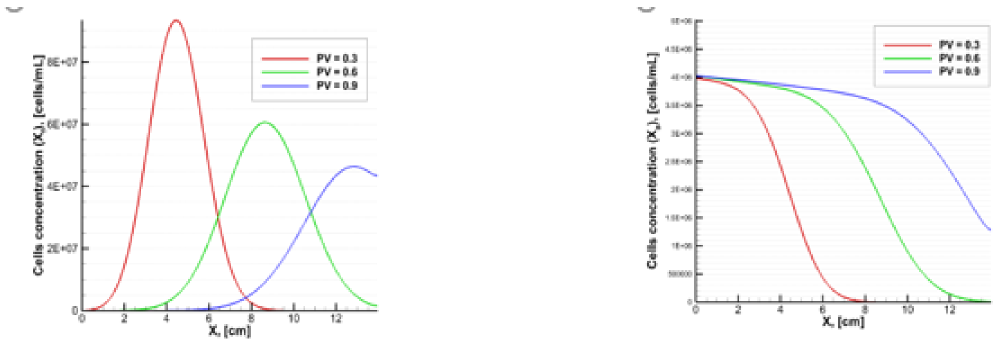
Кривые изменения со временем концентрации свободных бактерий на выходе из колонны. а) – в линейных координатах, b) – в логарифмических координатах.

Ниже показано влияние наличия пирита и ионов железаIII на распределение планктонных бактерий вдоль колонны. Параметры задачи такие же, как и в предыдущем рисунке.

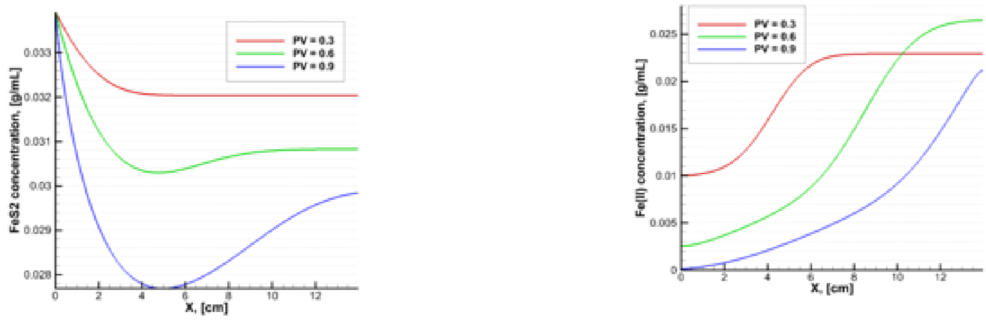


Влияние наличия пирита и ионов железаIII на распределение планктонных бактерий вдоль колонны.

На рисунках ниже приведены распределения концентраций планктонных и прикрепленных бактерий, пирита и ионов железаII и железа III вдоль колонны.



Концентрации планктонных и прикрепленных бактерий вдоль колонны в разные моменты времени.



Концентрации пирита и железаII вдоль колонны в разные моменты времени.

Из проведенных исследовании видно, что разрабатываемые модели биохимического выщелачивания пирита вполне адекватно описывает экспериментальные данные.

Исследования по теме находится еще в развитии.

Финансирование: Данное исследование финансировался Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (ПЦФ -2018/BR05236447, ГФ -2021/AP09260105).

Ключевые слова: подземное скважинное выщелачивание минералов, биохимическое выщелачивание минералов, математическое моделирование.

2010 Mathematics Subject Classification: 76S05, 35Q35.

Литература

[1] Batterham R., Robinson D. The future of mining: will in place recovery ever come of age?, Conference Paper , www.researchgate.net/publication/323655569,(September 2018).

[2] Dixon D. and Hendrix J. The oretical Basis for Variable Order Assumption in the Kinetics of Leaching of Discrete Grains, AIChE Journal, Vol. 39, No. 5 (May 1993).

[3] Developments in uranium resources, production, demand and the environment. Proceedings of a technical committee meeting held in Vienna, (15–18 June 1999), IAEA-TECDOC-1425.

[4] Ho E., Quan C. Iron(II) oxidation by SO2O2 for use in uranium leaching, Hydrometallurgy 85 (2007), 183–192. [5] Fyodorov G.V. Uranium deposits of the Inkay - Mynkuduk ore field, (1999), Kazakhstan.

[6] In Situ Leach Uranium Mining: An Overview of Operations, International atomic energy agency (IAEA) Nuclear Energy Series, No. NF-T-1.4, Vienna (2016).

[7] Мамилов, В.А. Добыча урана методом подземного выщелачивания, Москва, (1980.)

[8] Kurmanseiit, M.B.; Tungatarova, M.S.; Kaltayev, A.; Royer, J.-J. Reactive Transport Modeling during Uranium In Situ Leaching (ISL): The Effects of Ore Composition on Mining Recovery. (2022), MDPI Minerals. № 11, N 1340, https://doi.org/10.3390/min12111340.

[9] Kurmanseiit, M.B., Tungatarova, M.S., Royer, J.-J., Aizhulov, D.Y., Shayakhmetov, N.M., Kaltayev, A. Streamline-based reactive transport modeling of uranium mining during in-situ leaching: Advantages and drawbacks // Hydrometallurgy, (2023), 220, 106107.

[10] Shayakhmetov N., Alibayeva K., Kaltayev A., Panfilov Enhancing uranium in-situ leaching efficiency through the well reverse technique: A study of the effects of reversal time on production efficiency and cost. Hydrometallurgy 219, (2023) 106086.

[11] Aizhulov, D.; Tungatarova, M.; Kaltayev, A. Streamlines Based Stochastic Methods and Reactive Transport Simulation Applied to Resource Estimation of Roll-Front Uranium Deposits Exploited by In-Situ Leaching. (2022), ISSN - 2075-163X, MDPI Minerals. № 10, N 1209, https://doi.org/10.3390/min1

[12] Boon M., Heijnen J. Chemical oxidation kinetics of pyrite in bioleaching processes. Hydrometallurgy, 48, (1998), pp. 27–41.

[13] Abhilash and Pandey, B. Microbially Assisted Leaching of Uranium—A Review. Mineral Processing & Extractive Metall. Rev., 34, (2013), pp.81–113.

[14] Umanskii A., Klyushnikov A. Bioleaching of low grade uranium ore containing pyrite using A. ferrooxidans and A. thiooxidans. Journal of Radioanalytical and Nuclear Chemistry, 295, (2013), N 1 pp.151-156.

[15] Zammit, C. et al. In situ recovery of uranium — the microbial influence. Hydrometallurgy, 150, (2014), pp.236–244.

[16] D Barrie Johnson Biomining — biotechnologies for extracting and recovering metals from ores and waste materials. Current Opinion in Biotechnology, 30, (2014), pp. 24-31.

[17] Rawlings, D. Biomining (ed. by Douglas E. Rawlings and D. Barrie Johnson), Ch.9. Relevance of Cell Physiology and Genetic Adaptability of Biomining Microorganisms to Industrial Processes, (2007), pp. 177-198.

[18] Gleisner, M., et al. Pyrite oxidation by Acidithiobacillus ferrooxidans at various concentrations of dissolved oxygen, Chemical Geology, 225, (2006), pp.16– 29.

[19] Tributsch, H. 2001 Direct versus indirect bioleaching , Hydrometallurgy, 59, (2001), pp. 177–185.

[20] Corapcioglu, M., Haridas, A. Microbial transport in soils and groundwater: A numerical model , Adv. Water Resources, Volume 8, December, 1985, pp. 188-200.

[21] Williamson M., Rimstidt D. The kinetics and electrochemical rate-determining step of aqueous pyrite oxidation. Geochimlca et Cosmochimica Acta. Vol. 58. No. 24, (1994), pp. 5443-5454.

[22] Boon M., Heijnen J. Chemical oxidation kinetics of pyrite in bioleaching processes. Hydrometallurgy 48, (1998), pp. 27–41.

[23] Nasre-Dine Ahfir et al. Porous media grain size distribution and hydrodynamic forces effects on transport and deposition of suspended particles. , J. Environ. Sci. (2016).

[24] [Hornberger G.] Bacterial Transport in Porous Media' Evaluation of a del Using Laboratory Observations. Water Resources Research, Vol. 28, NO. 3, (March 1992), pp. 9t5-938.

Задача Зоммерфельда в бесконечном полуцилиндре

Т.Ш. КАЛЬМЕНОВ[1], А. ЛЕС[2]

Satbayev University, Алматы, Казахстан

[1,2]*Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*

kalmenov.t@gmail.ru

Описание движения электромагнитных волн в R^3 немецким физиком Зоммерфельдом сведено к следующей задаче:

Задача Зоммерфельда:

$$Lu = -\Delta_x u - k^2 u = f(x), \quad x \in R^3 \tag{1}$$

удовлетворяющее условию

$$|u(x)||_{|x|=R} \leq \frac{M}{R}, \quad R \to \infty, \tag{2}$$

$$\left|\frac{\partial u}{\partial n_x} - iku\right|_{|x|=R} \leq \frac{M}{R^2}, \quad R \to \infty \tag{3}$$

как показывает пример $u_0(x) = \frac{\sin(k|x|)}{|x|}$, $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, $-\Delta_x u_0 - k^2 u_0 = 0$. Выполнение только условия (2) не обеспечивает единственности решения задачи Зоммерфельда.

Пусть $\Omega \subset R^2$ - конечная область с гладким границам, а $D = \Omega \times x_3 > 0$ - бесконечный полуцилиндр в R^3. Изучение геофизических полей в D сводится к решению следующей задачи:

Найти решение уравнения

$$Lu = -\Delta_x u - k^2 u = f(x), \quad x \in D, \tag{4}$$

$$|u(x)||_{|x|=R} \leq \frac{M}{R}, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial n_x} - iku\right|_{|x|=R} \leq \frac{M}{R^2} \quad R \to \infty, \tag{5}$$

$$Q[u]|_{x \in \partial D} = 0, \tag{6}$$

где Q - прозрачные граничные условия, такие что любая волна, приходящая изнутри области D проходит без отражения на ∂D. На практике Q - определяется приближенно из физических свойств изученной среды. В данной работе даем явные представления оператора Q.

Пусть

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|x|}}{|x|} \tag{7}$$

фундаментальное решение уравнения Гельмгольца

$$(-\Delta_x - k^2)\varepsilon(x) = \delta(x), \tag{8}$$

Определим, как в работе Кальменова Т.Ш., Сурагана Д.[1], граничные условия потенциала Гельмгольца:

$$u(x) = \int_D \varepsilon(x,y) f(y) dy \tag{9}$$

$$N[u] = -\frac{u(x)}{2} + \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial n_y}(x,y) u(y) - \varepsilon(x,y) \frac{\partial u(y)}{\partial n_y}\right) dS_y = 0, \quad x \in \partial\Omega. \tag{10}$$

Имеет место

Теорема 1. *Пусть* $f \in L_2(\Omega)$, $suppf(x) = D_0$ *— конечная область* D. *Тогда существует единственное решение задачи*

$$Lu = -\Delta_x u - k^2 u = f(x), \quad x \in D, \tag{4}$$

$$|u(x)||_{|x|=R} \le \frac{M}{R}, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial n_x} - iku\right|_{|x|=R} \le \frac{M}{R^2} \quad R \to \infty, \tag{5}$$

$$N[u]|_{x \in \partial D} = 0. \tag{6}$$

Следствие 2. *Прозрачным боковым граничным условием* Q *задачи (4)-(6) является потенциальное граничное условие* $N[u]|_{x \in \partial D} = 0$.

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № AP23488701).

Ключевые слова: задача Зоммерфельда, уравнение Гельмгольца, потенциал Ньютона.

2010 Mathematics Subject Classification: 31B10, 35J05, 35G15

Литература

[1] Kalmenov T. S., Suragan D. A boundary condition and spectral problems for the Newton potential, *Modern aspects of the theory of partial differential equations. - Basel : Springer Basel*, (2011), 187–210.

Конечномерные интегрируемые системы и решения конечнозонного типа многокомпонентных систем с дисперсией

А.Ю. Коняев

[1]*МГУ им. М.В.Ломоносова, Москва, Россия*

maodzund@ya.ru

Хорошо известно, что специальные решения уравнений типа геодезического потока с потенциалом в некоторых случаях дают решения уравнения Кортвега-де Фриза. Такого рода эффекты были известны для систем Ноймана, потоков на эллипсоиде и многих других случаях.

В рамках деятельности, связанной с развитием геометрии Нийенхейса, удалось вскрыть геометрический механизм это явления. Подобная связь — решения некоторой конечномерной системы дают решения некоторой другой, нелинейной системы — является, судя по всему, типичной для уравнений, допускающих разделение переменных. Возникающие при этом решения относятся к конечнозонному (там, где этот термин корректно употреблять) типу.

При этом естественной оказывается ситуация, где полученные решения удовлетворяют многокомпонентным системам — например, системе Каупа-Буссинеска. То есть обнаруженная связь позволяет получать решения довольно широкого класса систем.

В докладе будет рассказано о полученных результатах и потенциальных направлениях их развития. Отметим, что помимо широкой применимости, метод интересен тем, что не требует вычисления лаксовых пар, стационарных потоков и прочего (довольно непростого!) инструментария интегрируемых систем. То есть, по сути, использует элементарные инструменты — по сути, интегрирование в квдаратурах, известное с XIX века.

Финансирование: Данное исследование финансируется грантом РНФ 24-21-00450.

Ключевые слова: геодезические потоки с потенциалами, уравнение Кортвега-де Фриза, интегрируемость в квадратурах.

Литература

[1] Bolsinov A.V., Konyaev A.Yu., Matveev V.S. Orthogonal separation of variables for spaces of constant curvature // Forum Mathematicum, **1**:1 (2024)

[2] Bolsinov A.V., Konyaev A.Yu., Matveev V.S. Applications of Nijenhuis Geometry V: Geodesic Equivalence and Finite-Dimensional Reductions of Integrable Quasilinear Systems // Journal of Nonlinear Science, **34** (2), p. 33 (2024)

[3] Konyaev A.Yu., Matveev V.S. Potentials with finite-band spectrum and finite-dimensional reductions of BKM systems // arXiv:2411.02290, preprint

[4]Bolsinov A.V., Konyaev A.Yu., Matveev V.S.Finite-dimensional reductions and finite-gap type solutions of multicomponent integrable PDEs // arXiv:2410.00895, preprint

О неравенстве Гельдера

Е.Д. НУРСУЛТАНОВ

Казахстанский филиал МГУ имени М.В. Ломоносова, Астана, Казахстан
Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан
er-nurs@yandex.ru

Неравенство Гёльдера является основой многих неравенств. Так из неравенства Гёльдера следуют классические неравенства Минковского, Харди, которые в свою очередь используются в доказательстве основных интегро-дифференциальных неравенств.

Более того, теория сопряжённых пространств, сопряжённых операторов тесно связана с неравенством Гёльдера.

В докладе мы приведем неравенство, которое в некотором смысле уточняет неравенство Гёльдера. Мы также приведем некоторые важные следствия.

Ключевые слова: неравенство Гельдера, функциональные пространства, функциональные неравенства.

2010 Mathematics Subject Classification: 26D15, 46E30

О логическом строении математики

С.Я. СЕРОВАЙСКИЙ

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан
serovajskys@mail.ru

Математический мир, как никакой другой, отличается чрезвычайно высокой раздробленностью. Специалисты одного раздела математики, как правило, не только не в курсе актуальных проблем других ее разделов, но зачастую даже не понимают язык, на котором говорят их коллеги, работающих в других направлениях. В действительности же математика представляет собой единый организм, где различные понятия, свойства, сюжеты переплетены многообразными связями. Описанию таких связей посвящена книга The Logical Structure of Mathematics: An Overview of Mathematical Concepts, выходящая в английском издательстве Taylor & Francis Group.

Книга состоит из шести частей. Первая часть «Язык» посвящена общим принципам построения математических теорий. Во второй части, называемой «Множества», дается краткое описание теории множеств как основания математики.

Третья часть «Числа» состоит из нескольких секций. Сначала определяются кардинальные числа, являющиеся мощностями конечных множеств. Затем описываются порядковые числа, включая трансфинитные, которые вводятся последовательно одно за другим. Третий класс образуют алгебраические числа, связанные с решением некоторых уравнений. Действительные и p-адические числа образуют класс предельных чисел. Наконец, векторные числа (комплексные, кватернионы и др.) составляют последний класс объектов.

В четвертой части описываются «Объекты», представляющие собой множества, являющиеся обобщением рассматриваемых ранее числовых классов. В частности, порядковые объекты связаны с порядковыми числами, алгебраические объекты — с алгебраическими числами, топологические объекты — с предельными числами, а векторные числа естественным образом выводят на линейную алгебры, также характеризующие алгебраические объекты. Таким образом, в трех разделах четвертой части, описываются важнейшие классы множеств, наделенных порядковой, алгебраической и топологической структурой.

В пятой части описываются «Теории», связанные с множествами, наделенными одновременно несколькими структурами. В первом разделе здесь рассматриваются проблемы топологической алгебры, в которой описываются алгебраические объекты, наделенные дополнительно топологией, а также пространства с нормой и скалярным произведением, являющиеся основой функционального анализа. Второй раздел связан с приложениями линейной алгебры, а также различными геометрическими теориями. Третий раздел посвящен дифференциальному и интегральному исчислению. В частности, наряду с общей теорией интегрирования здесь рассматривается интегральные уравнения и теория вероятностей, а теория дифференцирования помимо классических результатов вещественного и комплексного анализа включает теорию распределений, дифференцирование операторов, гладкие многообразия, группы Ли, дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. Последний раздел посвящен алгебраической геометрии и алгебраической топологии.

В заключительной части «Категории» с единых позиции описывается структура различных математических теорий, за каждой из которых стоит своя категория. Кроме того, характеризуются связи между различными теориями посредством функторов. Наконец, обсуждается возможность построения математики в целом, включая саму теорию множеств, средствами теории категорий.

Хочется надеяться, что книга найдет своего читателя.

The uncertainty principle for Poincaré and Lorenz chaos

M.U. AKHMET

[1]*Middle East Technical University, Ankara, Turkiye*

marat@medu.edu.tr

W. Heisenberg developed the famous principle of uncertainty, which has implicitly strongly affected various areas of science, industry, and social life. Working on the chaos research, we have indicated an uncertainty in mathematical chaos by using the following inequalities,

$$h_\alpha \le s_n d(p_n, p) \le h_\beta, \tag{1}$$

where s_n is the time sequence of divergence, p_n is the converging space sequence, and d is a metric. The formula has been announced in the book [1]. We believe that the inequalities will make insights into chaos similar to those in quantum mechanics. Related questions for alpha unpredictability, ultra Poincaré and Lorenz chaos [1], artificial neural networks [2] differential equations, deterministic and stochastic dynamical systems [1], synchronization [3], are under discussion. Open problems related to theory of functions, the recurrence theorem, chaos investigation will be announced.

The alpha unpredictable point is the origin of ultra Poincaré chaos [1]. A point p of a dynamics is alpha unpredictable, if there exists a positive number e, sequences t_n and s_n increasing to infinity, such that $p_n = f(t_n, p)$ converges to p, and points $f(t_n + s_n, p)$ are on distance larger than e from $f(s_n, p)$ for all n. We are in a position where chaos can not be observed precisely in experiments since the closer approximation points $f(t_n, p)$ are observed, and the near to infinity are moments of divergence s_n. Conversely, if one determine better a large moment s_n, then finding corresponding t_n is a difficult task. That is, the more precisely determined s_n means less accuracy for p_n. Thus, we are busy with the uncertainty, since the sequences of points p_n, and moments t_n, s_n, are not less theoretical than the Heisenberg quantities.

The source of uncertainty in Lorenz chaos is sensitivity, which is the main ingredient of the irregular dynamics. A dynamics $f(q,t)$ is sensitive at a point p provided that there exists a positive number e, sequences of points p_n and moments $s_n, n = 1, 2, \ldots$, such that $p_n \to p$, and distance between $f(p, s_n)$ and $f(p_n, s_n)$ is larger than e for all n. This is on one side of the uncertainty since to learn sensitivity we have to look for points p_n arbitrarily close to point p, but this makes less observable moments, where the divergence happens. Oppositely, if one tries to determine large *moments* of the divergence, precision for the location of corresponding points p_n decreases, and vice versa. Thus, the principle of the uncertainty for chaos is based on the Lorenz sensitivity, also.

What is the philosophical conclusion for our discussion? The more uncertainties there are for dynamics the better. An uncertainty is the main argument that a theoretical phenomenon deserves to be researched since it is about the unity of opposites. Thus, it is significant achievement that the uncertainty for chaos has been discovered.

Keywords: Ultra Poincaré chaos, Lorenz chaos, principle of uncertainty, dynamical systems, recurrence theorem, Poisson stability.

2010 Mathematics Subject Classification: 34H10, 37A05, 37A50, 65P20

References

[1] Akhmet, M.U. *Ultra Poincaré chaos and alpha labeling*, IOP, Birmingham (2025).

[2] Akhmet, M.U., Tleubergenova, M.A., Zhamanshin, A.U., Nugayeva, Z.T. *Artificial Neural Networks: alpha unpredictability and chaotic dynamics*, Springer, Berlin(2025).

[3] Akhmet, M. and Baskan, K. and Yesil, C. Delta synchronization of Poincaré chaos in gas discharge-semiconductor systems, *Chaos*, **32**:81 (2022), 083137.

Long-time dynamics of small solutions to 1D quartic Klein-Gordon equation

A. KAIRZHAN

Nazarbayev University, Astana, Kazakhstan

akairzhan@nu.edu.kz

In this talk, we consider the quartic Klein-Gordon equation

$$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u + u + V(x)u = \alpha(x)u^2 \pm u^p, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2, \tag{1}$$

where $p = 4$ and $\alpha(x)$ is an exponentially decaying function at infinity. Our main interest is to present new results on the long-time asymptotic behavior of small solutions under certain conditions on the spectrum of the linearized operator

$$\mathcal{L} := -\partial_x^2 + 1 + V(x). \tag{2}$$

In particular, we make *an assumption that the spectrum of $\mathcal{L}$ has only a positive eigenvalue $\lambda > 0$ and a continuous spectrum* $[1, +\infty)$.

The motivation to investigate the above-described problem comes from *a long-standing conjecture on asymptotic stability of the kink solution of the ϕ^4-model*

$$\partial_t^2 \phi - \partial_x^2 \phi = \phi - \phi^3, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2. \tag{3}$$

The kink solution of (3) is given by $H(x) = \tanh(x/\sqrt{2})$, and the orbital stability of the kink state in the energy space is known due to Henry, Perez and Wreszinski [2]. To study the asymptotic stability, we consider the perturbed kink $\phi(x,t) = H(x)+v(x,t)$ and, from (3), obtain the evolution equation for the perturbation v given by (roughly)

$$\partial_t^2 v - \partial_x^2 v + v - \operatorname{sech}^2(x/\sqrt{2})v = -3H(x)v^2 - v^3. \tag{4}$$

It turns out that the spectrum of the corresponding linearized operator of (4) is similar to the assumptions we make on the operator $\mathcal{L}$ in (2). Note that the equation (4) is of type (1) if we set $\alpha = -3H(x)$ and $p = 3$. The best available results on the long-time dynamics of (4) are given in the recent work by Delort and Masmoudi in [1], where they prove the decay of v in suitable Sobolev spaces for times of order $\mathcal{O}(\varepsilon^{-4})$ for data of size ε.

Among the global-in-time results for (1), we point out the recent work by Leger and Pusateri [4], where the authors prove the global-in-time decay of small solutions in $3+1$ space dimensions when $p = 2$ and $\alpha(x)$ is bounded. For the one-dimensional version of (1), similar result was proven by Kopylova and Komech in [3] for $p = 14$ and exponentially decaying α.

The goal of this talk is to present the following (roughly written) theorem:

Theorem 1. *Let $\alpha(x) \to 0$ exponentially fast as $|x| \to \infty$ and set $p = 4$ in (1). For all initial data u_0 that are sufficiently small in a suitable weighted Sobolev space, solutions to (1) satisfy*

$$\|u\|_{L^\infty_x} \lesssim t^{-1/2+} \qquad \textit{for all } t \gg 1.$$

This improves the result in [3] by decreasing the nonlinearity power from $p = 14$ to $p = 4$. It also compliments [1] by obtaining global-in-time decay, but under weaker conditions on the nonlinearity terms.

This is a joint work with Gong Chen (Georgia Institute of Technology), Gael Diebou (University of Toronto) and Fabio Pusateri (University of Toronto).

Funding: This research is funded by the Nazarbayev University Faculty Development Competitive Research Grants Program 040225FD4702.

Keywords: dispersive equation, asymptotic stability, long-time behavior, internal mode, decay.

2010 Mathematics Subject Classification: 43A32, 42B37, 35P25, 35Q55

References

[1] J.-M. Delort and N. Masmoudi, Long-time dispersive estimates for perturbations of a kink solution of onedimensional cubic wave equations. *Memoirs of the European Mathematical Society* **1** (2022), ix+280.

[2] D. B. Henry, J. F. Perez and W. F. Wreszinski. Stability theory for solitary-wave solutions of scalar field equations. *Comm. Math. Phys.* **85** (1982), 351–361.

[3] E. Kopylova and A. I. Komech, On asymptotic stability of kink for relativistic Ginzburg–Landau equations. Arch. Ration. Mech. Anal. 202 (2011), 213–245

[4] T. Leger and F. Pusateri, Internal modes and radiation damping for quadratic Klein-Gordon in 3D. (2022) Preprint arXiv:2112.13163, 125 pages. (To appear in Memoirs of the Amer. Math. Soc.)

Synchronization of Shunting Inhibitory Memristive Neural Networks and its Application

A. KASHKYNBAYEV

[1]*Department of Mathematics, Nazarbayev University, Astana, Kazakhstan*

ardak.kashkynbayev@nu.edu.kz

This study investigates the finite time synchronization and fixed time synchronization of shunting inhibitory memristive neural networks with time-varying delays via different control techniques. First, a new terminal sliding mode surface is designed and its reachability is analyzed. Then, a unique sliding mode controller is constructed suitable for both the finite time and fixed time synchronization and its stability analysis is done by using Lyapunov functionals. Numerical examples with the estimated settling times are provided to show the effectiveness of our results. Finally, applications in secure communication in terms of image encryption and decryption will be shown.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. BR21882172).

Keywords: synchronization; memrisitive neural networks; delay differential equations; sliding mode control, secure communication, image encryption.

2010 Mathematics Subject Classification: 34D06, 34K35, 94A08

To inverse scattering problem on the real axis

A.P. SOLDATOV

Belgorod State University, Belgorod, Russia

soldatov48@gmail.com

Sufficient conditions for the fulfillment of the main theorem of Faddeev-Marchenko are discussed. A representation of the solution to the inverse Sturm-Liouville problem on the entire axis is given, based on the study of the boundary value problem for Jost functions and the corresponding singular integral equation. The unique solvability of this problem in corresponding Holder weight classes is proved.

Eigenvalue lower bounds for Robin and polyharmonic Laplacians

D. SURAGAN

Nazarbayev University, Astana, Kazakhstan

durvudkhan.suragan@nu.edu.kz

In this talk, we present new results concerning lower bounds on the first eigenvalue for the Laplace operators, especially under variable-component Robin boundary conditions. Our analysis focuses on convex domains, where we not only derive novel results for the Robin Laplacian, but also improve existing bounds over those for the Dirichlet Laplacian. The methodology adopted in our study is further extended to establish new lower bounds on the first eigenvalue of the polyharmonic Dirichlet operator. In addition, if time permits, we discuss a simple and elegant proof of the Poincaré inequality specific to Robin Laplacians, based on an equality framework. The key ingredients in our proofs are taken from [1]-[3].

The goal of this talk is to present these advances, providing a deeper understanding and expanding the existing knowledge base in the field of eigenvalue lower bound problems.

This talk is based on our joint work with Rupert L. Frank (Caltech and LMU Munchen) and Ari Laptev (Imperial College London).

Funding: This research is funded by the Nazarbayev University Grant (Grant No. 20122022FD4105).

Keywords: Robin Laplacian, Polyharmonic operator, Lowest eigenvalue, Hardy inequality, Poincaré inequality.

2010 Mathematics Subject Classification: 35P15, 58J50

References

[1] Frank R. L. and Larson S. Two Consequences of Davies' Hardy Inequality, *Funct. Anal. Its Appl.*, **55**:2 (2021), 174–177.

[2] Kovarik H. and Laptev A. Hardy inequalities for Robin Laplacians, *J. Funct. Anal.*, **262**:12 (2012), 4972–4985.

[3] Ozawa T. and Suragan D. Sharp remainder of the Poincaré inequality, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **148**:10 (2020), 4235–4239.

Grand Net Spaces and Applications to Integral Operators

M.A. ZAIGHUM

Nazarbayev University, Astana, Kazakhstan
Riphah International University, Islamabad, Pakistan
zaighum.asad@nu.edu.kz

Net spaces first appeared in the work of Nursultanov [3] in 1998 where it was used for obtaining Hardy–Littlewood-type theorems for Fourier coefficients. These spaces are generalizations of classical Lorentz spaces. One of the main differences between net spaces and other known function spaces is that the former depends on the distribution of the oscillation and singularities of functions. For a special choice of nets, these spaces coincide with Lorentz space and Morrey spaces M_1^λ. We also refer to [4] for the net spaces defined in the framework of general measures.

The grand Lebesgue spaces were introduced in 1992 by Iwaniec and Sbordone [2] in connection with the study of integrability properties of Jacobian. Later, Greco et al. [1] considered a more general variant of these spaces $L^{p),\theta}(\Omega)$.

In this talk, we will introduce grand net spaces, which combine the notion of grand Lebesgue spaces and net spaces. This provides a general framework for studying net spaces and grand Lorentz spaces [5]. We will discuss structural properties, interpolation theorems, and boundedness criteria for integral operators in these spaces. The results presented here generalize some results in [4], [5].

Funding: This research was funded by Nazarbayev University under Collaborative Research Program (Grant: 20122022CRP1601).

Keywords: Grand Lebesgue spaces, Net spaces, Integral operators.

2010 Mathematics Subject Classification: 46E30, 42B20

References

[1] L. Greco, T. Iwaniec and C. Sbordone, Inverting the p-harmonic operator, *Manuscripta Math.* **92** (1997), no. 2, 249–258.

[2] T. Iwaniec and C. Sbordone, On the integrability of the Jacobian under minimal hypotheses,*Arch. Rational Mech. Anal.* **119** (1992), no. 2, 129–143.

[3] E. D. Nursultanov, Net spaces and inequalities of Hardy-Littlewood type, Sb. Math. **189** (1998), no. 3-4, 399–419.

[4] E. D. Nursultanov and S. Y. Tikhonov, Net spaces and boundedness of integral operators, *J. Geom. Anal.* **21** (2011), no. 4, 950–981.

[5] E. D. Nursultanov, H. Rafeiro and D. Suragan, Convolution-type operators in grand Lorentz Spaces, arXiv:2502.11757, (2025).

1 Теория функций и функциональный анализ

Руководители:	профессор Базарханов Д.Б. профессор Нурсултанов Е.Д.
Секретарь:	Найманова Жансая

Весовые неравенства для суперпозиции трех операторов

А.Н. АБЕК[1], А. ГОГАТИШВИЛИ[2], Н.А. БОКАЕВ[3], Т. УНВЕР[4]

[1,3]*Евразийский Национальный Университет им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан*
[2]*Институт математики Академии наук Чехии, Прага, Чехия*
[4]*Университет Кириккале, Кириккале, Турция*

[1]azhar.abekova@gmail.com, [2]gogatish@math.cas.cz, [3]bokayev2011@yandex.kz,
[4]tugceunver@kku.edu.tr

В данной работе рассматривается суперпозиция трех операторов: Копсона, Харди и Тандори. Через $\mathfrak{M}^+(0,\infty)$ обозначим множество всех неотрицательных измеримых функций на $(0,\infty)$.

Теорема 1. *Пусть $p \in (1,\infty)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ и u,v,w — весовые функции на $(0,\infty)$, φ — квазивогнутая функция на $(0,\infty)$. Тогда существует константа $C>0$ такая, что неравенство*

$$\int\limits_0^\infty \sup_{t<s<\infty}\left(\frac{1}{\varphi(s)}\int\limits_0^s \tau h(\tau)d\tau + s\int\limits_s^\infty h(\tau)d\tau\right)w(t)dt \le C\left(\int\limits_0^\infty h^p(\tau)v(\tau)d\tau\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1}$$

выполняется для всех $h\in\mathfrak{M}^+(0,\infty)$ тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие:

$$C := \left(\int_0^\infty\left(\int_0^\infty \frac{w(s)ds}{\varphi(s)+\varphi(t)}\right)^{p'} d\nu_p(t)\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty$$

где ν_p — мера представления

$$\varphi^r(t)\operatorname*{ess\,sup}_{s\in(t,\infty)}\frac{1}{\varphi^{p'}(s)}\left(\int_0^\infty \frac{\tau^{p'}s^{p'}}{s^{p'}+\tau^{p'}}v^{1-p'}(\tau)d\tau\right),$$

т.е.

$$\varphi^{p'}(t)\operatorname*{ess\,sup}_{s\in(t,\infty)}\frac{1}{\varphi^{p'}(s)}\left(\int_0^\infty \frac{\tau^{p'}s^{p'}}{s^{p'}+\tau^{p'}}v^{1-p'}(\tau)d\tau\right) = \int_0^\infty \frac{\varphi^{p'}(t)}{\varphi^{p'}(s)+\varphi^{p'}(t)}\nu_p(s)ds.$$

При доказательстве этой теоремы существенно используется следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $p \in (1,\infty)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ и u,v,w — весовые функции на $(0,\infty)$, φ — квазивогнутая функция на $(0,\infty)$. Тогда существует константа $C>0$ такая, что неравенство (1) выполняется для всех $h\in\mathfrak{M}^+(0,\infty)$ тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие:*

$$A := \left(\sum_{k\in Z}\left(\sup_{x_k\le t\le x_{k+1}}\frac{G(t)}{\varphi(t)}\left(\int_{x_k}^t s^{p'}v^{1-p'}(s)ds + t^{p'}\int_t^{x_{k+1}} v^{1-p'}(s)ds\right)^{\frac{1}{p'}}\right)^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty, \tag{2}$$

где $G(t)=\int\limits_0^t w(s)ds+\varphi(t)\int\limits_t^\infty \varphi^{-1}(s)w(s)ds$. Наилучшая константа C в (1) эквивалентна A.

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант №AP22686420).

Ключевые слова: ограниченность операторов, оператор Харди, наилучшая константа, суперпозиция операторов.

2010 Mathematics Subject Classification: 42B25, 46E30, 47L07, 47B38

Оценки билинейного приближения функции в пространстве Лоренца

Г. АКИШЕВ

Казахстанский филиал МГУ, Астана, Казахстан
Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан
akishev_g@mail.ru

Пусть $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел и $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{I}^m = [0,1)^m$, $\mathbb{T}^m = 2\pi\mathbb{I}^m$.

Через $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ обозначим пространство Лоренца, состоящее из всех измеримых по Лебегу 2π–периодических функций f, для которых (см. [1], с. 228)

$$\|f\|_{p,\tau} := \left(\int\limits_0^1 f^{*^{\tau}}(t) t^{\frac{\tau}{p}-1} dt\right)^{1/\tau} < \infty, \ 1 < p < \infty, 1 \leqslant \tau \leqslant \infty,$$

где $f^*(t)$ — невозрастающая перестановка функции $|f(2\pi\overline{x})|$, $\overline{x} \in \mathbb{I}^m$.

Пусть $V_l(t)$ — одномерное ядро Валле-Пуссена порядка $2l-1$, $l \in \mathbb{N}$. Каждому $\overline{s} = (s_1, \ldots, m)$, $s_j \in \mathbb{N}$ сопоставим тригонометрический полином (см. [2], [3])

$$A_{\overline{s}}(\overline{x}) = \prod_{j=1}^{m} (V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j-1}}(x_j)).$$

Для функции $f \in L_1(\mathbb{T}^m)$ рассмотрим свертку $A_{\overline{s}}(f, \overline{x}) = (f * A_{\overline{s}})(\overline{x})$.

Пусть $\overline{r} = (r_1, \ldots, r_m)$, $\overline{\theta} = (\theta_1, ..., \theta_m)$, $r_j > 0$, $1 \leqslant \theta_j \leqslant \infty$, $j = 1, \ldots, m$. Рассмотрим класс Никольского – Бесова

$$\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\tau,\overline{\theta}} B := \left\{ f \in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m) : \ \left\| \left\{ 2^{\langle \overline{s}, \overline{r} \rangle} \| A_{\overline{s}}(f) \|_{p,\tau} \right\}_{\overline{s} \in \mathbb{Z}^m_+} \right\|_{l_{\overline{\theta}}} \leqslant 1 \right\}.$$

Здесь и далее $l_{\overline{\theta}}$ пространство числовых последовательностей $\{a_{\overline{n}}\}$ с нормой $\|\{a_{\overline{n}}\}\|_{l_{\overline{\theta}}}$.

Рассматривается $\tau_M(F)_{p,\tau}$ — наилучшее билинейное приближение порядка $M \in \mathbb{N}$ функции $f \in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^{2m})$. Если $F \subset L_{p,\tau}(\mathbb{T}^{2m})$, то положим $\tau_M(F)_{p,\tau} = \sup\limits_{f \in F} \tau_M(f)_{p,\tau}$.

Оценки наилучшего билинейного приближения функции классов Соболева, Никольского–Бесова в пространстве $L_p(\mathbb{T}^{2m})$ установлены в [2]–[4]. Доказана

Теорема 1. *Пусть* $r_1 = \ldots = r_{2m}$, $1 \leqslant \theta_j \leqslant \infty$, $j = 1, ..., m$, $1 < p < q < \infty$, $1 \leqslant \tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant 2$ *и* $\tau_2/q < \tau_1/p$. *Тогда справедлива оценка*

$$\tau_M(\mathbb{S}^{r_1}_{p,\tau,\overline{\theta}} B)_{q,\tau_2} \leqslant C M^{-2r_1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{q}} (\log_2 M)^{2r_1(m-1) + 2\sum_{j=2}^{m} (\frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\theta_j})_+},$$

Замечание 2. *В случае* $\tau_1 = p$, $\tau_2 = q$ *и* $\theta_j = \theta$ *для* $j = 1, ..., m$ *эту теорему ранее доказали А.С. Романюк и В.С. Романюк [4].*

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № AP19677486).

Ключевые слова: билинейное приближение, класс Никольского – Бесова, пространство Лоренца.

2010 Mathematics Subject Classification: 42A10, 41A46

Литература

[1] Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах, Мир, М. (1974).

[2] Темляков В.Н. Оценки наилучших билинейных приближений функций, *Труды матем. инст. АН СССР*, **181**(1988), 250–267.

[3] Bazarkhanov D., Temlyakov V. Nonlinear tensor product approximation of functions, *Jour. Complexity*, **31**(2015), 867–884.

[4] Романюк А.С., Романюк В.С. Наилучшие билинейные приближения классов функций многих переменных, *Укр. матем. ж.*, **65**:12 (2013), 1681–1699.

Оптимальные кубатурные формулы для классов периодических функций с заданной мажорантой модуля гладкости

Ш.А. БАЛГИМБАЕВА

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

sholpan.balgyn@gmail.com

Пусть K — компакт (с непустой внутренностью) в $\mathbb{R}^d \, (d \geq 2)$, F — некоторое множество (класс) комплекснозначных функций, заданных и непрерывных на K. При численном интегрировании для приближения интеграла $\int_K f(x)dx$, $f \in \mathrm{F}$, используются выражения вида (кубатурные формулы) $\mathcal{Q}(f, C_N, \Lambda_N) := \sum_{k=1}^N c(k) f(\lambda(k))$, здесь $C_N := (c(1), \ldots, c(N)) \in \mathbb{C}^N$ — веса и $\Lambda_N := (\lambda(1), \ldots, \lambda(N)) \subset K^N$ — сетка узлов кубатурной формулы, а $\mathcal{R}(f, K, C_N, \Lambda_N) := \int_K f(x)dx - \mathcal{Q}(f, C_N, \Lambda_N)$ ее погрешность на функции f. Обозначим

$$\mathcal{R}(\mathrm{F}, K, C_N, \Lambda_N) := \sup\{|\mathcal{R}(f, K, C_N, \Lambda_N)| \;\mid\; f \in \mathrm{F}\}. \tag{1}$$

Задача оптимального численного интегрирования, рассматриваемая нами, состоит в определении точного (по N) порядка величины

$$\mathcal{R}_N(\mathrm{F}, K) := \inf\{\mathcal{R}(\mathrm{F}, K, C_N, \Lambda_N) \,|\, C_N, \Lambda_N\} \tag{2}$$

(оптимальной погрешности) и построении последовательности $(C_N^*, \Lambda_N^* \mid N \in \mathbb{N})$ весов и узлов таких, что погрешности $\mathcal{R}(\mathrm{F}, K, C_N^*, \Lambda_N^*)$ соответствующих кубатурных формул (1) реализуют порядок оптимальной погрешности (2). Кубатурные формулы $\mathcal{Q}(f, C_N^*, \Lambda_N^*)$ будем называть оптимальными (по порядку).

Нами рассматривается случай $K = \mathbb{T}^d$ — $d-$мерный тор, F— функциональные классы типа Никольского–Бесова. Для $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$ определим смешанный модуль гладкости порядка $l \in \mathbb{N} : \Omega_l(f, t)_p = \sup_{|h_j| \leq t_j, j \in \mathrm{e}_d} \|\Delta_h^l f(\cdot)\|_p, t = (t_1, \ldots, t_d) \in [0, \pi]^d$, где смешанная разность порядка l функции f в точке $x \in \mathbb{T}^d$ с шагом $h = (h_1, \ldots, h_d) \in \mathbb{R}^d$ определяется следующим образом $\Delta_h^l f(x) = \Delta_{h_1,1}^l \Delta_{h_2,2}^l \ldots \Delta_{h_d,d}^l f(x)$, здесь $\Delta_{h_j,j}^l$ — оператор (обычной) конечной разности порядка l с шагом h_j по j-ой переменной.

Пусть $\Omega : [0, \infty)^d \to [0, +\infty)$ — заданная мажоранта модуля гладкости порядка l .

Теперь определим пространства Никольского–Бесова $SB_{p\theta}^{l,\Omega}(\mathbb{T}^d)$ функций с заданной мажорантой Ω смешанного модуля гладкости порядка l.

Определение 1. Пусть $1 \leq p, \theta \leq \infty$. Тогда пространство Никольского–Бесова $SB_{p\theta}^{l,\Omega} = SB_{p\theta}^{l,\Omega}(\mathbb{T}^d)$ состоит из всех функций $f \in L_p$ с конечной нормой

$$\| \, f \,|\, SB_{p\,\theta}^{l,\Omega} \, \| = \|f\|_p + \left\{ \sum_{\varnothing \neq e \subset e_d} \int_{[0,\pi]^{\# e}} \left(\frac{\Omega_{l^e}(f, t^e)}{\Omega(t^e, \mathbf{1}^{\hat{\mathbf{e}}})} \right)^\theta \prod_{j \in e} \frac{dt_j}{t_j} \right\}^{1/\theta}, \; 1 \leq \theta < \infty$$

$$\| \, f \,|\, SB_{p\,\infty}^{l,\Omega} \, \| = \|f\|_p + \sum_{\varnothing \neq e \subset e_d} \sup_{t^e > 0} \frac{\Omega_{l^e}(f, t^e)}{\Omega(t^e, \mathbf{1}^{\hat{\mathbf{e}}})}.$$

Обозначим единичный шары пространства $SB_{p\,\theta}^{l,\Omega}$ через $\mathrm{SB}_{p\,\theta}^{l,\Omega} = \mathrm{SB}_{p\,\theta}^{l,\Omega}(\mathbb{T}^d)$ и будем называть их классом Никольского–Бесова.

Для специального выбора $\Omega_r(t) = \left(\prod_{j=1}^d t_j\right)^r$, где $l > r$, функциональные пространства $SB_{p\theta}^{l,\Omega_r}(\mathbb{T}^d)$ совпадают с классическими пространствами Никольского–Бесова $SB_{p\theta}^r(\mathbb{T}^d)$ периодических функций с доминирующей смешанной производной, удовлетворяющей "кратному условию Гельдера". В частности, $SB_{p\infty}^r(\mathbb{T}^d) = SH_p^r(\mathbb{T}^d)$ — соответствующие пространства Никольского.

Для классов $\mathcal{R}_N(\mathrm{SH}_p^r)$ правильная по порядку оценка снизу установлена Н.С.Бахваловым [1] в общем случае, а правильная оценка сверху — Н.С.Бахваловым [2,3] (случай $d = 2$) и В.В.Дубининым [4] (общий случай). Точный порядок величины $\mathcal{R}_N(\mathrm{SB}_{p\theta}^r)$ найден В.В. Дубининым [5].

Нами устанавливается точный порядок величины $\mathcal{R}_N(\mathrm{SB}_{p\theta}^{l,\Omega})$ с $1 \le p, \theta \le \infty$, когда мажоранта Ω имеет вид $\Omega(t_1, \dots, t_d) = \omega(\prod_{j=1}^d t_j)$, где $\omega(t)$ — одномерный модуль гладкости порядка l, удовлетворяющий известным условиям Бари–Стечкина, а также условию непрерывного вложения $B_{p\theta}^{l,\Omega}(\mathbb{T}^d) \hookrightarrow C(\mathbb{T}^d)$.

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № BR20281002).

Ключевые слова: кубатурная формула, классы Никольского–Бесова, смешанная гладкость, многомерный тор

2010 Mathematics Subject Classification: 42B35, 41A63, 41A55

Литература

[1] Бахвалов Н. С. Оценки снизу асимптотических характеристик классов функций с доминирующей смешанной производной, , *Матем. заметки*, **12** (1972), 655–664.

[2] Бахвалов Н. С. О приближенном вычислении кратных интегралов, *Вестник МГУ. Сер.1, матем. и мех.*, 4 (1959), 3–18.

[3] Бахвалов Н. С. Об оптимальных оценках сходимости квадратурных процессов и методов интегрирования типа Монте-Карло на классах функций, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **4**:Дополнение к № 4 (1964), 5–63.

[4] Дубинин В. В. Кубатурные формулы для классов функций с ограниченной смешанной разностью, *Матем. сборник*, **183** (1992), 23–34.

[5] Дубинин В. В. Кубатурные формулы для классов Бесова, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **61** (1997), 27–52.

Новые кубатурные формулы для пространств Коробова

С.Ж. БАСАРОВ[1], Н.Т. ТЛЕУХАНОВА[2]

[1,2]*Евразийский Национальный университет им. Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан*

[1]bassarov.serzhan98@gmail.com, [2]tleukhanova@rambler.ru

Пусть F — некоторый класс функций интегрируемых в смысле Римана на $[0,1]^n, n \in \mathbb{N}$. И пусть $f \in F$.

Определение 1. *Кубатурной формулой* будем называть сумму $Q_N f = \sum_{k=1}^N c_k f(M_k)$, которая приближенно вычисляет интеграл $I(f) = \int\limits_{[0,1]^n} f(x)dx$ с погрешностью R_N:

$$I(f) = \int\limits_{[0,1]^n} f(x)dx = \sum_{k=1}^{N} c_k f(M_k) - R_N. \tag{1}$$

Определение 2. Пусть $\alpha > 0$. Будем говорить, что функция f принадлежит *пространству Коробова* $E^\alpha = E^\alpha[0,1]^n$, если

$$\|f\|_{E^\alpha} = \sup_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n} \left(\prod_{j=1}^{n} \max(1, |k_j|)\right)^{\alpha} \left|\hat{f}(\mathbf{k})\right| < \infty,$$

где $\hat{f}(\mathbf{k})$ — коэффициент кратного ряда Фурье функции f.

Пусть $p > 1$ — простое число и $m \in \mathbb{N}$. И пусть $f \in C[0,1]^n$, f — 1-периодическая. Определим функционал $F_m(f;p)$ следующим образом

$$F_m(f;p) = \frac{1}{p^m} \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_n=m \\ k_j\in\mathbb{Z}^+}} \sum_{r_1=0}^{p^{k_1}-1} \cdots \sum_{r_n=0}^{p^{k_n}-1} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{\left[\sum_{l=1}^{p-1} e^{-\pi i\left(\frac{2lr_j}{p}+\varepsilon(k_j)\right)}\right]}{(p-1)^{(1-\varepsilon(k_j))}} f\left(\frac{r_1}{p^{k_1}}, \dots, \frac{r_n}{p^{k_n}}\right), \qquad (2)$$

где $\varepsilon(x) = 1$ если $x > 0$, иначе 0.

Теорема 3. *Пусть $n, m \in \mathbb{N}$. Если $\alpha > 1$, $f \in E^\alpha$, то*

$$\sup_{||f||_{E^\alpha}=1} |I(f) - F_m(f;p)| \le c\frac{m^{n-1}}{p^{\alpha m}}, \qquad (3)$$

где c — константа, зависящая от α, q, n.

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № AP23488613).

Ключевые слова: Кубатурные формулы, численное интегрирование, пространства Коробова, периодические функций.

2010 Mathematics Subject Classification: 65D30, 65D32

Об интерполяции локальных пространств типа Морри

К.А. БЕКМАГАНБЕТОВ[1], Е.Д. НУРСУЛТАНОВ[2]

[1,2]*Казахстанский филиал МГУ имени М.В. Ломоносова, Астана, Казахстан*
[1,2]*Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*
[1]bekmaganbetov-ka@yandex.kz, [2]er-nurs@yandex.ru

В серии работ В.И. Буренкова и Е.Д. Нурсултанова были определены локальные пространства типа Морри и изучены их интерполяционные свойства относительно вещественного метода интерполяции.

Определение 1. Пусть $0 < p, q \le \infty$ и $0 < \lambda < \infty$ при $q < \infty$ или $0 \le \lambda < \infty$ при $q = \infty$. Локальные пространства типа Морри $LM^\lambda_{p,q}$ определяются как пространство всех функций $f \in L^{loc}_p(\mathbb{R}^n)$ таких, что при $q < \infty$

$$\|f\|_{LM^\lambda_{p,q}} = \left(\int_0^\infty \left(t^{-\lambda}\|f\|_{L_p(B(0;t)}\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} < \infty,$$

и при $q = \infty$

$$\|f\|_{LM^\lambda_{p,q}} = \sup_{t>0} t^{-\lambda}\|f\|_{L_p(B(0;t))} < \infty,$$

где $B(0;t)$ – открытый шар с центром в точке $0 \in \mathbb{R}^n$ радиуса $t > 0$.

В частности, в [1] была получена следующая теорема:

Теорема 2. *Пусть $0 < p, q_0, q_1, q \le \infty$ и $0 < \theta < 1$. Пусть, кроме того, $\lambda_0 \ne \lambda_1$ и $0 < \lambda_0, \lambda_1 < n/p$ если $p < \infty$ и хотя бы один из параметров q_0, q_1 или q конечен, и $0 \le \lambda_0, \lambda_1 \le n/p$ если $q_0 = q_1 = q = \infty$. Тогда*

$$\left(LM^{\lambda_0}_{p,q_0}, LM^{\lambda_1}_{p,q_1}\right)_{\theta,q} = LM^\lambda_{p,q},$$

где $\lambda = (1-\theta)\lambda_0 + \theta\lambda_1$.

Заметим, что относительно вещественного метода интерполяции возможно лишь описание результата интерполяция пары $\left(LM^{\lambda_0}_{p,q_0}, LM^{\lambda_1}_{p,q_1}\right)$ с одинаковым параметром p. Нас же интересует вопрос описания интерполяционных пространств для пары $\left(LM^{\lambda_0}_{p_0,q_0}, LM^{\lambda_1}_{p_1,q_1}\right)$ при $p_0 \neq p_1$.

В данной работе мы изучаем интерполяционные свойства локальных пространств типа Морри относительно метода интерполяции для анизотропных пространств [2]. Пользуясь схемой из работы Е.И. Бережного [3] определим аппроксимационные локальные пространства типа Морри $\overline{LM^{\lambda q}_{pr}}$ и $\widetilde{LM^{\lambda q}_{pr}}$.

Определение 3. Пусть $U(0;1) \subset \mathbb{R}^n$ таково, что $0 \in U(0;1)$ и $\mu(U(0;1)) \in (0,\infty)$. Положим также, что $U(0;1)$ – звездное множество относительно точки 0, то есть, если $x \in U(0;1)$, то и $\nu x \in U(0;1)$ при $\nu \in (0,1)$. Обозначим через $U(0;t)$ – множество гомотетичное множеству $U(0;1)$ с коээфициентом t и построим семейство непересекающихся колец $R(0;k) = U(0;2^k) \setminus U(0;2^{k-1})$, $k \in \mathbb{Z}$.

Пусть далее $0 < p,r,q \leq \infty$ и $0 < \lambda < \infty$ при $q < \infty$ или $0 \leq \lambda < \infty$ при $q = \infty$. Аппроксимационные локальные пространства типа Морри $\overline{LM^{\lambda q}_{pr}}$ и $\widetilde{LM^{\lambda q}_{pr}}$ определяются как пространства всех функций $f \in L^{loc}_{pr}(\mathbb{R}^n)$ таких, что конечны следующие величины

$$\|f\|_{\overline{LM^{\lambda q}_{pr}}} = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(2^{-\lambda k} \left\|f\chi_{R(0;k)}(\cdot)\right\|_{L_{pr}(\mathbb{R}^n)}\right)^q\right)^{1/q} \quad \text{и}$$

$$\|f\|_{\widetilde{LM^{\lambda q}_{pr}}} = \left\|\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(2^{-\lambda k} \left(f\chi_{R(0;k)}\right)^*(\cdot)\right)^q\right)^{1/q}\right\|_{L_{pr}(\mathbb{R}^n)},$$

с соответствующей модификацией при $q = \infty$.

Здесь $\chi_{R(0;k)}(x)$ – характеристическая функция кольца $R(0;k)$, $f^*(t)$ – невозрастающая перестановка функции $f(x)$.

Замечание 4. *Можно показать, что при $p = r$ пространство $\overline{LM^{\lambda q}_{pr}}$ совпадает с локальным пространством типа Морри $LM^{\lambda}_{p,q}$ из Определения 1 (с эквивалентностью норм).*

Нами доказана следующая теорема:

Теорема 5. *Пусть $0 < p_0 \neq p_1 \leq \infty$, $0 < r \leq \infty$ и $0 < q_0, q_1, q \leq \infty$. Пусть, кроме того, $\lambda_0 \neq \lambda_1$ и $0 < \lambda_i < n/p_i$ если $p_i < \infty$ $(i = 0,1)$ и хотя бы один из параметров q_0, q_1 или q конечен, и $0 \leq \lambda_i \leq n/p_i$ $(i = 0,1)$ если $q_0 = q_1 = q = \infty$. Тогда при $0 < \theta_1, \theta_2 < 1$ верны следующие равенства:*

$$\text{а) если } \star_1 = (1,2), \text{ то } \left(LM^{\lambda_0}_{p_0,q_0}, LM^{\lambda_1}_{p_1,q_1}\right)_{(\theta_1,\theta_2),(r,q)^{\star_1}} = \overline{LM^{\lambda q}_{pr}},$$

$$\text{б) если } \star_2 = (2,1), \text{ то } \left(LM^{\lambda_0}_{p_0,q_0}, LM^{\lambda_1}_{p_1,q_1}\right)_{(\theta_1,\theta_2),(r,q)^{\star_2}} = \widetilde{LM^{\lambda q}_{pr}},$$

где $\lambda = (1-\theta_2)\lambda_0 + \theta_2\lambda_1$ и $1/p = (1-\theta_1)/p_0 + \theta_1/p_1$.

Замечание 6. *Ранее данный подход был нами использован для интерполяции пространств типа Никольского-Бесова и Лизоркина-Трибеля (смотри [4]).*

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № AP23488613).

Ключевые слова: локальные пространства типа Морри, аппроксимационные локальные пространства типа Морри, метод анизотропной интерполяции.

2010 Mathematics Subject Classification: 42B35, 46B70, 46E30

Литература

[1] Буренков В.И., Нурсултанов Е.Д. Описание интерполяционных пространств для локальных пространств типа Морри, *Труды МИАН*, **269** (2010), 52–62.

[2] Нурсултанов Е.Д. Интерполяционные теоремы для анизотропных функциональных пространств и их приложения, *Докл. РАН*, **394**:1 (2004), 22–25.

[3] Бережной Е.И. Дискретный вариант локальных пространств Морри, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **81**:1 (2017), 3–30.

[4] Bekmaganbetov K.A., Nursultanov E.D. Interpolation of Besov $B^{\sigma q}_{p\tau}$ and Lizorkin-Triebel $F^{\sigma q}_{p\tau}$ spaces, *Analysis Math.*, **35**:3 (2009), 169–188.

В честь 80-летнего юбилея профессора Михаила Львовича Гольдмана

Н.А. БОКАЕВ[1], Г.Ж. КАРШЫГИНА[2], А. ГОГАТИШВИЛИ[3]

[1]*Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева», Астана, Казахстан*
[2]*Международный университет Астаны, Астана, Казахстан*
[3]*Институт математики Чешской академии наук, Прага, Чехия*

[1]bokayev2011@yandex.ru, [2]karshygina84@mail.ru, [3]gogatish@math.cas.cz

Статья посвящена 80-летнему юбилею профессора Михаила Львовича Гольдмана, выдающегося ученого, лауреата множества наград, члена ведущих научных обществ и основоположника ряда областей математической науки. В докладе рассмотрены его научные достижения, включая работы в таких областях, как спектральная теория, интегральные неравенства и оптимальные вложения потенциалов, а также вклад профессора в развитие математического образования и научных исследований. Отмечены его более 100 публикаций, в том числе 28 статей с 2015 по 2025 годы. участие в международных конференциях, а также активная образовательная деятельность, включающая подготовку более 20 бакалавров, 12 магистров и нескольких кандидатов наук. Статья также подчеркивает важность работы Михаила Львовича в роли научного руководителя, наставника и рецензента, а также его влияние на развитие математики в России и за рубежом. 80-летие профессора Гольдмана — значимая веха в его жизни и карьере, символизирующая его неоценимый вклад в науку, образование и развитие математической науки на международном уровне. А также представлен результат совместной работы.

2010 Mathematics Subject Classification: 01A70

Об оценке дискретного оператора Харди в весовых пространствах последовательностей

А. ГОГАТИШВИЛИ[1], Н.А. БОКАЕВ[2], Н.К. КУЗЕУБАЕВА[3], Т. УНВЕР[4]

[1]*Институт математики Чешской Академии, Прага, Чехия*
[2,3]*Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан*
[4]*Университет Кириккале, Кириккале, Турция*

[1]gogatish@math.cas.cz, [2]bokayev2011@yandex.ru, [3]nurgul.kuzeubaeva@mail.ru, [4]tugceunver@kku.edu.tr

Рассмотрим весовое неравенство Харди

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)^q a_n\right)^{\frac{1}{q}} \le C\left(\sum_{n=1}^{\infty}x_n^p b_n\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1}$$

для неотрицательных, невозрастающих последовательностей $x = \{x_n\}$. Здесь $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — заданные неотрицательные весовые последовательности, $p, q \in (0, \infty)$ — фиксированные параметры, а константа $C > 0$ не зависит от x. Соответствующая задача в непрерывном случае была рассмотрена в [1]. В следующих теоремах неравенство (1) для неотрицательных, невозрастающих последовательностей сводится к неравенству для неотрицательных последовательностей.

Теорема 1. *Пусть $0 < q \leq \infty$, $0 < p < 1$. Предположим, что $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — заданные последовательности неотрицательных весов. Тогда следующие условия эквивалентны.*

(i) *Неравенство* (1) *выполняется для всех неотрицательных, невозрастающих последовательностей $\{x_n\}$.*

(ii) *Справедливо следующее неравенство:*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=i}^{\infty}y_k\right)^{\frac{1}{p}}\right)^{q}a_n\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\sum_{n=1}^{\infty}y_nB_n\right)^{\frac{1}{p}}$$

для всех неотрицательных последовательностей y_n, где $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k, \quad n \in \mathbb{N}$.

Теорема 2. *Пусть $0 < q \leq \infty$, $0 < p < 1$. Предположим, что $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ –– заданные последовательности неотрицательных весов. Тогда следующие условия эквивалентны.*

(i) *Неравенство* (1) *выполняется для всех неотрицательных, невозрастающих последовательностей (x_n).*

(ii) *Для любого $\alpha > 0$ справедливо следующее неравенство:*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{B_i^{\frac{\alpha+1}{p}}}\left(\sum_{k=1}^{i}B_k^{\alpha+1}y_k\right)^{\frac{1}{p}}\right)^{q}a_i\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\sum_{n=1}^{\infty}y_nB_n\right)^{\frac{1}{p}},$$

для всех неотрицательных последовательностей $\{y_n\}$.

Ключевые слова: дискретное весовое неравенство Харди, неотрицательные весовые последовательности, последовательности.

2010 Mathematics Subject Classification: 42B25, 46E30

Литература

[1] A.Gogatishvili and V.D.Stepanov. *Reduction theorems for weighted integral inequalities on the cone of monotone functions.*, Uspekhi Mat. Nauk 68, (2013), 597–664

О корректной разрешимости начальной задачи для стандартного уравнения Кортевега-де Фриза в весовом дробном пространстве Соболева

Л.К. ЖАПСАРБАЕВА[1], А.Х. КАСТРО[2]

[1]*Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан*
[2]*Назарбаев университет, Астана, Казахстан*

[1]leylazhk67@gmail.com, [2]alejandro.castilla@nu.edu.kz

Рассмотрим задачу для стандартного уравнения Кортевега-де Фриза

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} + uu_x = 0, \ x \in \mathbb{R}, \ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1}$$

с начальными данными в весовых дробных пространствах Соболева. k-обобщенные уравнения Кортевега-де Фриза были предложены для моделирования магнитоакустических волн в физике плазмы, а также тесно связаны с задачами нелинейной оптики ([1]).

В данной работе доказана локальная корректность начальной задачи (1) для уравнения Кортевега-де Фриза в весовом дробном пространстве Соболева $H^{3/4}(\mathbb{R}) \cap L^2(|x|^{2r}dx)$, $r \in (0, 3/8]$ с использованием техники пространства Бургена. Изучение нелинейных дисперсионных уравнений в весовых дробных пространствах Соболева минимальной регулярности на данный момент является очень актуальным. Оптимальные результаты по локальной и глобальной корректности для уравнения Кортевега-де Фриза в пространствах Соболева $H^s(\mathbb{R})$ были получены в [2], [3]. Результаты в весовых пространствах Соболева для k-обобщенного уравнения Кортевега-де Фриза при $k = 3$ в весовом пространстве Соболева $H^s(\mathbb{R}) \cap L^2(|x|^{2r})dx)$, $0 < s < 1$, $r \in (0, s/2]$ были получены в [4], [5].

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант №AP23489433 «Математический анализ нелинейных k-обобщенных уравнений Кортевега-де Фриза в весовых дробных пространствах Соболева»).

Ключевые слова: уравнение Кортевега-де Фриза, весовые дробные пространства Соболева, дисперсионные уравнения, локальная корректность.

2010 Mathematics Subject Classification: 35A02, 35A02, 35G25, 35Q55

Литература

[1] Kodama Y. Optical solitons in a monomode fiber,*Math. Scand.*, **39** (1985), 597–614.

[2] Guo Z. Global well-posedness of Korteweg-de Vries equation in $H^{-3/4}$,*J. Math. Pur. Appl.*, **91** (2009), 583–597.

[3] Tao T. Scattering for the quartic generalised Korteweg-de Vries equation,*J. Differ. Equ.*, **32** (2007), 623–651.

[4] Castro A.J., Jabbarkhanov K., Zhapsarbayeva L. The Nonlinear Schrödinger-Airy equation in weighted Sobolev spaces, *Nonlinear Analysis*, **223** (2022), 113068.

[5] Castro A.J., Esfahani A., Zhapsarbayeva L. A note on the quartic generalized Korteweg-de Vries equation in weighted Sobolev spaces, *Nonlinear Analysis*, **238** (2024), 113400.

L_p-ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ КРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ

А.Б. МУКАНОВ[1], Е.Д. НУРСУЛТАНОВ[2]

[1]*Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*
[2]*Казахстанский филиал МГУ имени М.В. Ломоносова, Астана, Казахстан*
[1]mukanov.askhat@gmail.com, [2]er-nurs@yandex.ru

Данная работа посвящена изучения критерия L_p-интегируемости суммы кратного тригонометрического ряда. В работе [1] Ф. Морицем был получен двумерный аналог известной теоремы Харди-Литтлвуда об L_p-интегируемости суммы тригонометрического ряда с монотонными коэффициентами. Мы сформулируем результат Морица в d-мерном случае, $d \geq 1$, для рядов вида

$$\sum_{k \in \mathbb{N}^d} a_k e^{i(k,x)} = \sum_{k_d=1}^{\infty} \ldots \sum_{k_1=1}^{\infty} a_{k_1,\ldots,k_d} e^{i(k_1x_1+\ldots+k_dx_d)}, \quad x \in [-\pi,\pi]^d,$$

где $\lim\limits_{k_1+\ldots+k_d\to\infty} a_k = 0$.

Для последовательности $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}^d}$ комплексных чисел определим разности:

$$\Delta^j a_k = \Delta^j a_{k_1,\ldots,k_j,\ldots k_d} := a_{k_1,\ldots,k_j,\ldots k_d} - a_{k_1,\ldots,k_j+1,\ldots k_d}, \quad 1 \leq j \leq d,$$
$$\Delta^{(d)} a_k := \Delta^1(\Delta^2 \ldots (\Delta^d a_k) \ldots).$$

Определение 1. Последовательность $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}^d}$ вещественных чисел называется монотонной в смысле Харди, если для любого $k\in\mathbb{N}^d$

$$\Delta^{(d)}a_k \ge 0.$$

Замечание 2. *Для последовательности* $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}^d}$, *такой что* $\lim\limits_{k_1+\ldots+k_d\to\infty} a_k = 0$, *монотонность в смысле Харди влечет монотонность по каждому индексу:*

$$a_k \le a_m, \quad \textit{для любых} \quad k \ge m, \quad k,m\in\mathbb{N}^d.$$

Теорема 3 (Ф. Мориц)**.** *Пусть* $f(x)$ *– интегрируемая на* $[-\pi,\pi]^d$ *функция с рядом Фурье* $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}^d} a_k e^{i(k,x)}$, *где* $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}^d}$ *– монотонная последовательность в смысле Харди. Тогда для любого* $1<p<\infty$ *справедливо*

$$\|f\|_{L_p([-\pi,\pi]^d)} \asymp \left(\sum_{k\in\mathbb{N}^d} |a_k|^p \left(\prod_{j=1}^d k_j\right)^{p-2}\right)^{\frac{1}{p}} =: J_p(f). \tag{1}$$

В [2, 3, 4] М. Дьяченко доказал теорему Харди-Литтлвуда при более слабых ограничениях на коэффициенты ряда. В частности, эквивалентность (1) была установлена для ряда $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}^d} a_k e^{i(k,x)}$ с коэффициентами, монотонными по каждому индексу, при $\frac{2d}{d+1}<p<\infty$. Кроме того, в [3] для случая $1<p<\frac{2d}{d+1}$ был построен пример ряда с коэффициентами, монотонными по каждому индексу, показывающий, что неравенство $\|f\|_{L_p} \lesssim J_p(f)$ не выполняется. В недавней работе [5] такой пример был построен для критического случая $p=\frac{2d}{d+1}$.

В работе [6] эквивалентность (1) была установлена при $2\le p<\infty$ для рядов с комплексными коэффициентами, удовлетворяющими условию слабой монотонности.

В недавних работах [7,8] можно найти дальнейшие обобщение теоремы Харди-Литтлвуда для двойных тригонометричеких рядов.

Мы рассмотрели новый класс кратных комплекснозначных обобщенно монотонных последовательностей.

Определение 4. Будем говорить, что последовательность $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}^d}$ комплексных чисел принадлежит классу GM^d_*, если существует $C>0$ такое, что для любого $k\in\mathbb{N}^d$ выполняется неравенство

$$\sum_{m_d=2^{k_d-1}}^{2^{k_d}-1}\cdots\sum_{m_1=2^{k_1-1}}^{2^{k_1}-1}\left|\Delta^{(d)}a_{m_1,\ldots,m_d}\right| \le C\widetilde{a}_{2^k}(\mathcal{W}_d),$$

где

$$\widetilde{a}_{2^k}(\mathcal{W}_d) = \sup_{\substack{w\in\mathcal{W}_d\\ |w|\ge 2^{k_1+\cdots+k_d}}} \frac{1}{|w|}\left|\sum_{i\in w} a_i\right|,$$

а $\mathcal{W}_d$ – это множество параллелепипедов в $\mathbb{N}^d$.

Пусть f – интегрируемая на $[-\pi,\pi]^d$ функция с рядом Фурье $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}^d} a_k e^{i(k,x)}$. Для $1<p<\infty$ определим

$$I_p(f) := \left(\sum_{k_d=1}^{\infty}\ldots\sum_{k_1=1}^{\infty}\left(2^{\frac{k_1+\ldots+k_d}{p'}}\Theta_{k_1,\ldots,k_d}(f)\right)^p\right)^{1/p},$$

где

$$\Theta_{k_1,\ldots,k_d}(f) = \sum_{m_d=2^{k_d-1}}^{2^{k_d}-1}\cdots\sum_{m_1=2^{k_1-1}}^{2^{k_1}-1}\left|\Delta^{(d)}a_{m_1,\ldots,m_d}\right|.$$

Для кратных тригонометрических рядов с коэффициентами из введенного класса обобщенно монотонных последовательностей при всех $1 < p < \infty$ удалось установить следующие критерии L_p-интегрируемости.

Теорема 5. *Пусть* $1 < p < \infty$ *и* $f \in L_1([-\pi,\pi]^d)$, $f(x) \sim \sum\limits_{k\in\mathbb{N}^d} a_k e^{i(k,x)}$. *Пусть также* $a = \{a_k\}_{k\in\mathbb{N}^d} \in \mathrm{GM}_*^d$, *тогда*

$$\|f\|_{L_p([-\pi,\pi]^d)} \asymp I_p(f).$$

Теорема 6. *Пусть* $1 < p < \infty$ *и* $f \in L_1([-\pi,\pi]^d)$, $f(x) \sim \sum\limits_{k\in\mathbb{N}^d} a_k e^{i(k,x)}$. *Пусть также* $a = \{a_k\}_{k\in\mathbb{N}^d} \in \mathrm{GM}_*^d$, *тогда*

$$\|f\|_{L_p([-\pi,\pi]^d)} \asymp J_p^*(f) := \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} (a_k^*)^p k^{p-2}\right)^{\frac{1}{p}},$$

где $\{a_k^*\}_{k\in\mathbb{N}}$ *– невозрастающая перестановка последовательности* $a = \{a_k\}_{k\in\mathbb{N}^d}$.

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № AP22688236).

Ключевые слова: тригонометрические ряды Фурье, кратные ряды, пространства Лебега, обобщенная монотонность, теорема Харди-Литтлвуда.

2010 Mathematics Subject Classification: 42B05, 46E30

Литература

[1] Móricz F. On double cosine, sine, and Walsh series with monotone coefficients, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **109**:2 (1990), 417–425.

[2] Dyachenko M.I. On the convergence of double trigonometric series and Fourier series with monotone coefficients, *Math. USSR Sbornik*, **57**:1 (1987), 57–75.

[3] Dyachenko M.I. Multiple trigonometric series with lexicographically monotone coefficients, *Anal. Math.*, **16** (1990), 173–190.

[4] Dyachenko M.I. Norms of Dirichlet kernels and some other trigonometric polynomials in L_p-spaces, *Sb. Math.*, **78**:2 (1994), 267–282.

[5] Dyachenko M.I., Oganesyan K.A. Counterexamples to the Hardy-Littlewood theorem for generalized monotone sequences, *Math. Notes*, **113**:3 (2023), 458–463.

[6] Nursultanov E. Net spaces and inequalities of Hardy-Littlewood type, *Sb. Math.*, **189**:3 (1998), 399–419.

[7] Yu D., Zhou P., Zhou S. Mean bounded variation condition and applications in double trigonometric series, *Anal. Math.*, **38** (2012), 83–104.

[8] Oganesyan K. Two-dimensional Hardy-Littlewood theorem for functions with general monotone Fourier coefficients, *J. Fourier Anal. Appl.*, **29**:Article number 60, (2023).

Dynamics of a Volterra quadratic stochastic operator with a piecewise-linear function as parameter

SH.B. ABDURAKHIMOVA

[1]*Namangan State University, Namangan, Uzbekistan*

shakhnoza.karimova95@mail.ru

In this work, we study the fixed points and two-periodic points of a Volterra quadratic stochastic operator defined on $\mathcal{S} = S^1 \times [-1,1]$, whose parameter is a piecewise-linear function, and their type.

Let S^{m-1} be the simplex:

$$S^{m-1} = \{x = (x_1, ..., x_m) \in R^m : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} x_i = 1\}. \tag{1}$$

We consider a Volterra operator on S^1 and construct a time varying dynamical system. This dynamics is generated by the operator $W : (x, y, a) \in \mathcal{S} \to \mathcal{S}$,(where $\mathcal{S} = S^1 \times [-1, 1]$) having the following form:

$$W : \begin{cases} x' = x(1 - ay), \\ y' = y(1 + ax), \\ a' = f(a) \end{cases} \tag{2}$$

where $f : [-1, 1] \to [-1, 1]$ and it has the following appearance:

$$f(a) = \begin{cases} 2a + 2, if - 1 \le a < -\frac{1}{2}, \\ -2a, if - \frac{1}{2} \le a \le \frac{1}{2}, \\ 2a - 2, if \frac{1}{2} < a \le 1. \end{cases} \tag{3}$$

Remark 1. *Since a uniquely defines the probability*

$$P_{21,1} = \frac{1 + a}{2}$$

each choice of $a \in [-1, 1]$ *has a biological interpretation. Moreover, given f in (2) can be considered as a control rule on the population.*

Definition 2. A point $x \in X$ is called a fixed point for $f : X \to X$ if $f(x) = x$. The point x is called a periodic point of period n if $f^n(x) = x$. The least positive n for which $f^n(x) = x$ is called the prime period of x.

Denote by $Fix(W)$ the set of all fixed points of W, i.e., the set of all solutions of $W(x) = x$.

Definition 3. (see [1]) A fixed point x^* of a mapping F is called

- *hyperbolic* point if its Jacobian J_F at x^* has no eigenvalues on the unit circle.
- *attracting point* if all the eigenvalues of the Jacobi matrix $J_F(x^*)$ are less than 1 in absolute value;
- *repelling point* if all the eigenvalues of the Jacobi matrix $J_F(x^*)$ are greater than 1 in absolute value;
- a *saddle point* otherwise.

Theorem 4. *1.The problem of finding two-periodic points of the function f divides the interval* $[-1, 1]$ *into the subintervals as follows:*

$[-1, 1] = [-1, -\frac{3}{4}] \cup (-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}) \cup [-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}) \cup [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}] \cup (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \cup (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \cup [\frac{3}{4}, 1]$

And we have followings:

a) If $a \in [-1, 1]$*, then the solution of* $f(a) = a$ *and if* $a \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$*, then the solution of* $f(f(a)) = a$ *is* $a = 0$*. It is a fixed point for f.*

b)If $a \in [-1, -\frac{3}{4}]$*, then the solution of* $f(f(a)) = a$ *is* $a = -\frac{4}{5}$ *and if* $a \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ *then the solution of* $f(f(a)) = a$ *is* $a = \frac{2}{5}$*. These points form the following 2-periodic orbit for f:* $\{-\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\}$*.*

c) If $a \in (-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2})$*, then the solution of* $f(f(a)) = a$ *is* $a = -\frac{2}{3}$ *and if* $a \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$*, then the solution of* $f(f(a)) = a$ *is* $a = \frac{2}{3}$*. These points form the two-periodic orbit for f as follows:* $\{-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\}$*.*

d) If $a \in [-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$*, then the solution of* $f(f(a)) = a$ *is* $a = -\frac{2}{5}$ *and if* $a \in [\frac{3}{4}, 1]$*, then the solution of* $f(f(a)) = a$ *is* $a = \frac{4}{5}$*. These points form the two-periodic orbit for f as follows:* $\{-\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\}$*.*

2. a)The set of fixed points of W is $Fix(W) = \{(x, 1 - x, 0)|0 \le x \le 1\}$*. The type of fixed points of W is non-hyperbolic.*

b)W has two-periodic orbit corresponding to $\{-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\}$ *i.e. two-periodic orbit of f as following:*
$\{(0.4188611699, 0.5811388301, -\frac{2}{3}), (0.5811388301, 0.4188611699, \frac{2}{3})\}$*.*
The type of the point $(0.4188611699, 0.5811388301, -\frac{2}{3})$ *is repelling.*

Keywords: Quadratic stochastic operators, fixed point, periodic point, Volterra operators, simplex.

2010 Mathematics Subject Classification: 92D25, 37C25, 37E05

References

[1] Devaney R.L. *An introduction to chaotic dynamical system*, Westview Press, (2003).

[2] Hofbaver J., Sigmund K. *The theory of evolution and dynamical systems*, Cambridge Univ. (1988).

Compartmental unpredictable functions

M. AKHMET[1], M. TLEUBERGENOVA[2]

[1]*Middle East Technical University, Ankara, Turkiye*
[2]*K.Zhubanov Aktobe Regional University, Aktobe, Kazakhstan*
[1]marat@metu.edu.tr, [2]madina-1970@mail.ru

There is a huge family of recurrent functions, which starts with equilibria and ends with Poisson stable functions. They are fundamental in theoretical and application senses, and they admit a famous history. Recently, we have added the unpredictable functions to the family. The research has been performed in several papers and books. Obviously, theoretical and application merits of functions increase if one provides rigorously approved efficient methods of construction of concrete examples, as well as their numerical simulations. In the present study, we met the challenges for unpredictability by considering functions of two variables on diagonals [1]. Algorithms have been created, and they are both deterministic and random. Characteristics are introduced to evaluate contributions of periodic and unpredictable components to the dynamics, and they are clearly illustrated in graphs of the functions. Definitions of non-periodic compartmental functions are provided as suggestions for the research in the future.

Keywords: unpredictable functions, compartmental unpredictable functions, degree of periodicity.

2010 Mathematics Subject Classification: 26B40

References

[1] Akhmet M., Tleubergenova M., Zhamanshin A. Compartmental Unpredictable Functions, *Mathematics*, **11(5)** (2023), 1069.

Weighted Hardy type inequalities

A. ALGA

SDU University, Almaty, Kazakhstan
atinaalga02@gmail.com

Definition 1. A couple of C^1-functions (V,W) is an N-dimensional Bessel pair on $(0,R)$ if there exists $c>0$ such that the ordinary differential equation

$$y''(r)+\left(\frac{N-1}{r}+\frac{V_r(r)}{V(r)}\right)y'(r)+\frac{cW(r)}{V(r)}y(r)=0 \tag{1}$$

has a positive solution on the interval $(0,R)$.

Theorem 2 (Improved Hardy identity with more general weights)**.** *Let G be a homogeneous Lie group and $|.|$ be any homogeneous quasi-norm. Let $B_R \subset G$ be a quasi-ball with respect to $|.|$*

Let $0 < R \leq \infty$, V and W be positive C^1-functions on $(0,R)$. Assume that $\left(r^{N-1}V, r^{N-1}W\right)$ is a Bessel pair on $(0,R)$. Then for $u \in C_0^\infty(B_R \backslash \{0\})$:

$$\int_{B_R} \left|\frac{du(x)}{d|x|}\right|^2 dx - \int_{B_R} W(|x|)|u(x)|^2\, dx = \int_{B_R} V(|x|)\phi^2(|x|) \left|\frac{d}{d|x|}\left(\frac{u(x)}{\phi(|x|)}\right)\right|^2 dx. \tag{2}$$

Here ϕ is the positive solution of

$$\left(|x|^{N-1}V(|x|)y'(|x|)\right)' + |x|^{N-1}W(|x|)y(|x|) = 0 \tag{3}$$

on the interval $(0,R)$.

Remark 1 (Improved Hardy Inequality)**.** In the Abelian case $G = (R^n, t)$. For $V = 1$, $W = \frac{(N-2)^2}{4|x|^2}$, $\phi = |x|^{-\left(\frac{N-2}{2}\right)}$, we obtain the following improved Hardy inequality for all $u \in C_0^\infty(B_R \backslash \{0\})$:

$$\int_{B_R} |\nabla u(x)|^2 dx \geq \int_{B_R} \left|\frac{d}{d|x|}u\right|^2 dx \geq \left(\frac{N-2}{2}\right)^2 \int_{B_R} \frac{|u|^2}{|x|^2} dx \tag{4}$$

where $N \geq 3$.

Remark 2 (Weighted Improved Hardy Inequality)**.** In the Abelian case $G = (R^n, t)$. For $V = |x|^{-\alpha}$, $W = \frac{(N-2-(\alpha))^2}{4} r^{-2-\alpha}$, $\phi = |x|^{-\left(\frac{N-2-\alpha}{2}\right)}$, we obtain the following weighted improved Hardy inequality for all $u \in C_0^\infty(B_R \backslash \{0\})$:

$$\int_{B_R} \frac{|\nabla u(x)|^2}{|x|^\alpha} dx \geq \int_{B_R} \frac{\left|\frac{d}{d|x|}u\right|^2}{|x|^\alpha} dx \geq \left(\frac{N-2-\alpha}{2}\right)^2 \int_{B_R} \frac{|u|^2}{|x|^{2+\alpha}} dx. \tag{5}$$

Remark 3 (Critical improved Hardy inequality)**.** In the Abelian case $G = (R^n, t)$. $V = \frac{1}{|x|^{N-2}}$, $W = \frac{1}{4|x|^N \left|\log \frac{|x|}{R}\right|^2}$, $\phi = \sqrt{\left|\log \frac{|x|}{R}\right|}$. Then we obtain the following critical improved Hardy inequality for all $u \in C_0^\infty(B_R \backslash \{0\})$:

$$\int_{B_R} \frac{|(\nabla u)(x)|^2}{|x|^{N-2}} dx \geq \int_{B_R} \frac{\left|\frac{d}{d|x|}u(x)\right|^2}{|x|^{N-2}} dx \geq \frac{1}{4} \int_{B_R} \frac{|u(x)|^2}{|x|^N \left(\log \frac{R}{|x|}\right)^2} dx \tag{6}$$

which gives an improved version for the classical critical Hardy inequality when $N = 2$:

$$\int_{B_R} |(\nabla u)(x)|^2 dx \geq \int_{B_R} \left|\frac{d}{d|x|}u(x)\right|^2 dx \geq \frac{1}{4} \int_{B_R} \frac{|u(x)|^2}{|x|^2 \left(\log \frac{R}{|x|}\right)^2} dx. \tag{7}$$

This talk is based on the joint research with Nurgissa Yessirkegenov (KIMEP University, Kazakhstan).

Keywords: Bessel pairs, Hardy inequalities, factorization methods.

2010 Mathematics Subject Classification: 26D10, 46E35, 35A23

References

[1] Gesztesy and L. Littlejohn: Factorizations and Hardy-Rellich inequalities, Congr. Rep., Eur. Math. Soc., Zürich, P. 207–226, 2018. (Rellich inequalities for the Laplace operator Δ)

[2] Ghoussoub and A. Moradifam: Bessel pairs and optimal Hardy and Hardy-Rellich inequalities, Math. Ann. 349 (2011), no. 1, 1–57.

[3] Ghoussoub and A. Moradifam: Functional inequalities: new perspectives and new applications,, Mathematical Surveys and Monographs, 187, American Mathematical Society, Providence, RI, 2013. xxiv+299.

[4] Nguyen Lam: Hardy and Hardy-Rellich type inequalities with Bessel pairs, Annales Academi Scientiarum Fennic Mathematica, Volumen 43, 2018, 211- 223.

Generalised Picone's identity for Δ_γ–Laplace operator and its applications

S.Zh. ANUARBEK

SDU University, Kaskelen, Kazakhstan

anuarsamatunderworld@gmail.com

The Δ_γ-operator was considered by B. Franchi and E. Lanconelli.

Definition 1. We set

$$\Delta_\gamma := \sum_{j=1}^{N} \partial_{x_j}(\gamma_j^2 \partial_{x_j}), \quad \partial_{x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, \dots, N, \tag{1}$$

$$\nabla_\gamma u := (\gamma_2 \partial_{x_2} u, \gamma_1 \partial_{x_1} u, \dots, \gamma_N \partial_{x_N} u), \quad |\nabla_\gamma u| := \left(\sum_{i=1}^{N} |\gamma_i \partial_{x_i} u|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Here, the functions $\gamma_j : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ are assumed to be continuous, nonzero, and of the class C^1 in $\mathbb{R}^N \setminus \Pi$, where

$$\Pi := \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N : \prod_{j=1}^{N} x_j = 0 \right\}. \tag{2}$$

Theorem 2 (Picone's identity)**.** *For differentiable functions $v > 0$ and $u \geq 0$, we have*

$$|\nabla u|^2 + \frac{u^2}{v^2}|\nabla v|^2 - 2\frac{u}{v}\nabla u \cdot \nabla v = |\nabla u|^2 - \nabla\Big(\frac{u^2}{v}\Big) \cdot \nabla v \geq 0. \tag{3}$$

Applications of the identity (3) to second-order elliptic equations and systems are extensive. We discuss variable exponent of the anisotropic Δ_γ–Laplace operator for the nonlinear Picone's identity. Abolarinwa A. developed the variable exponent Picone type identities. Luyen developed a nonlinear Picone's identity using operator (1).

Additionally, we establish the Picone identity for the p-biharmonic operator $\mathcal{L}^2_{p,\gamma}$, and provide applications to generic weighted Rellich type inequalities, a Hardy-type inequality, and the Sturmian comparison principle.

This talk is based on joint research with Nurgissa Yessirkegenov (KIMEP University and Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Kazakhstan).

Keywords: Picone's identity, Laplace operator.

2010 Mathematics Subject Classification: 35J92

References

[1] Abolarinwa A. Nonlinear variable exponent Picone identity and $p(x)$-sub-Laplacian first eigenvalue for general vector fields, math.AP, arXiv:2209.05642v1 (2022).

[2] Allegretto W. Positive solutions and spectral properties of weakly coupled elliptic systems, J. Math. Anal. Appl., 120(1986):2,723—729.

[3] Allegretto W. On the principal eigenvalues of indefinite elliptic problems, Math. Z., 195:1(1987), 29–35.

[4] Allegretto W. Sturmian theorems for second order systems, Proc. Amer. Math. Soc., 94:2 (1985), 291—296.

[5] Franchi B., Lanconelli E. A metric associated with a class of degenerate elliptic operators, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino, (1984), 105–114.

[6] Luyen D. Picone's identity for Δ_γ-Laplace operator and its applications, Ukr. Math. J, 73:4 (2021), 601–609.

Factorizations and unified Hardy inequalities

K. APSEIT

[1] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Kazakhstan*
[1] *SDU University, Kaskelen, Kazakhstan*
kuralay.apseit@sdu.edu.kz

In this note, we begin by recalling results from [1], which employ the factorization method of differential operators introduced in [1]–[3]:

$$\int_\Omega |(\partial_r f)(x)|^2 \, d^n x \quad \geqslant \int_\Omega |x-x_0|^{-2} |f(x)|^2 \left\{ \frac{(n-2)^2}{4} + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{m} \prod_{k=1}^{j} [\ln_k(\gamma/|x-x_0|)]^{-2} \right\} d^n x \quad (1)$$

valid for $f \in C_0^\infty(\Omega)$, assuming that $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$, is open and bounded with $x_0 \in \Omega, m \in \mathbb{N}$, and the logarithmic terms $\ln_k(\gamma/|x-x_0|), k \in \mathbb{N}$, are recursively given by

$$\begin{aligned} &\ln_1(\gamma/|x-x_0|) := \ln(\gamma/|x-x_0|), \quad 0 < |x-x_0| < \gamma, \\ &\ln_{k+1}(\gamma/|x-x_0|) := \ln(\ln_k(\gamma/|x-x_0|)), \quad 0 < |x-x_0| < \gamma/e_{k+1}, \quad k \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

for $\gamma > 0, x \in \mathbb{R}^n \backslash \{x_0\}, n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$, with $0 < |x-x_0| < \operatorname{diam}(\Omega) < \gamma/e_m$, where $e_1 := 1, \quad e_{k+1} := e^{e_k}, \quad k \in \mathbb{N}$. We denote $\sum_{j=1}^{0}(\cdot) := 0$ and $\prod_{k=1}^{0}(\cdot) := 1$, so when $m = 0, x_0 = 0$.

In this talk, we discuss the inequality (1) with a more general weight. Moreover, we show the sharp remainder formula for the inequality (1).

Furthermore, we discuss the generalizations of these results on homogeneous Lie groups.

This talk is based on joint research with Nurgissa Yessirkegenov (KIMEP University and Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Kazakhstan).

Funding: This research is funded by the Committee of Science of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP23490970).

Keywords: factorization method, Hardy inequality, homogeneous Lie group, stratified group.

2010 Mathematics Subject Classification: 22E30,26D10

Linear widths of some compacta in the Nikol'skii – Besov space, related to the Morrey space, over m-dimensional torus

R. BAICHAPANOVA

Al Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan
baychapanovaroza@mail.ru

Let $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, $\mathrm{z}_m = \{1, \ldots, k\}$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$. For $x = (x_1, \ldots, x_m), y = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$, we put $xy = x_1 y_1 + \ldots + x_m y_m$, $|x| = |x_1| + \ldots + |x_m|$, $|x|_\infty = \max(|x_\mu| : \mu \in \mathrm{z}_m)$; $x \leq y \ (x < y) \Leftrightarrow x_\mu \leq y_\mu \ (x_\mu < y_\mu)$ for all $\mu \in \mathrm{z}_m$. For $t \in \mathbb{R}$, $t_+ := \max\{0, t\}$.

Let $\mathcal{S} := \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ and $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ be the Schwartz spaces of test functions and tempered distributions, respectively; $\widehat{f} \equiv \mathcal{F}_m(f)$ and $\mathcal{F}_m^{-1}(f)$ direct and inverse Fourier transforms of $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$; in particular, for $\varphi \in \mathcal{S}$,

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \mathcal{F}_m(\varphi)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x) e^{-2\pi i\,\xi x} dx, \quad \mathcal{F}_m^{-1}(\varphi)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x) e^{2\pi i\,\xi x} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^m.$$

Let $\mathbb{T}^m = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^m$ be the m-dimensional torus; sometimes it will be convenient for us to identify $\mathbb{T}^m$ with the cube $Q_0 := [0,1)^m$ in $\mathbb{R}^m$. Further, we denote by $\widetilde{\mathcal{S}'} \equiv \mathcal{S}'(\mathbb{T}^m)$ the space of all distributions f from $\mathcal{S}'$ which are 1-periodic in each variable (i.e. such that $\langle f, \varphi(\cdot + \xi)\rangle = \langle f, \varphi\rangle$ for all $\varphi \in \mathcal{S}$ and any $\xi \in \mathbb{Z}^m$) and by $\widetilde{\mathcal{S}} := \widetilde{\mathcal{S}} := \mathcal{S}(\mathbb{T}^m)$ the space of all infinitely continuously differentiable functions on $\mathbb{T}^m$ endowed with the topology of uniform convergence of all derivatives over $\mathbb{T}^m$. Then the space $\mathcal{S}'(\mathbb{T}^m)$ is naturally identified with the space that is topologically dual to $\mathcal{S}(\mathbb{T}^m)$. It is well known that $f \in \widetilde{\mathcal{S}'}$ if and only if $\operatorname{supp} \widehat{f} \subset \mathbb{Z}^m$, i.e. distribution $\widehat{f}$ vanishes on the open set $\mathbb{R}^m \backslash \mathbb{Z}^m$.

For $1 \le p \le \infty$ and a measurable set $G \subset \mathbb{R}^m$, as usual, let $L_p(G)$ be the space of measurable functions $f : G \to \mathbb{C}$, which are Lebesgue integrable in p-th power (when $p = \infty$ essentially bounded) over G, endowed with the standard norm $\| f \,|\, L_p(G) \|$.

For $1 \le q \le \infty$, let $\ell_q := \ell_q(\mathbb{N}_0)$ be the space of all (complex) number sequences $(c_j) = (c_j : j \in \mathbb{N}_0)$ with finite standard norm $\|(c_j) \,|\, \ell_q\|$.

Further, let $\ell_q(L_p(G))$ (respectively, $L_p(G; \ell_q)$) be the space of all function sequences $(g_j(x)) = (g_j(x) : k \in \mathbb{N}_0)$ $(x \in G)$ with finite standard quasi-norm (norm if $p, q \ge 1$)

$$\| (g_j(x)) \,|\, \ell_q(L_p(G)) \| = \| (\| g_j \,|\, L_p(G) \|) \,|\, \ell_q \|$$

(respectively,

$$\| (g_j(x)) \,|\, L_p(G; \ell_q) \| = \| \, \| (g_j(\cdot)) \,|\, \ell_q \| \,|\, L_p(G) \|).$$

Let $\mathcal{Q}$ be the set of all half-open dyadic cubes in $\mathbb{R}^m$ of the form

$$Q = Q_{j\xi} = \{ x \in \mathbb{R}^m \,:\, 2^j x - \xi \in [0,1)^m \} \ (j \in \mathbb{Z}, \xi \in \mathbb{Z}^m).$$

For a cube $Q = Q_{j\xi}$, we denote by $x_Q := 2^{-j} \cdot \xi$, $l(Q)(= 2^{-j})$, $j(Q) := j$ and $|Q|(= 2^{-jm})$ its "lower left" corner, side length, level and volume, respectively.

Let

$$\widetilde{\mathcal{Q}} = \{ Q \in \mathcal{Q} \,|\, Q \subset Q_0 = [0,1)^m \} = \{ Q_{j\xi} \,|\, j \in \mathbb{N}_0,\, \xi \in \mathbb{Z}^m : \mathbf{0} \le \xi < 2^j \mathbf{1} \} \quad (\mathbf{0}, \mathbf{1} \in \mathbb{R}^m).$$

First we choose a test function $\eta_0 \in \mathcal{S}$ such that

$$0 \le \widehat{\eta}_0(\xi) \le 1, \quad \xi \in \mathbb{R}^m; \quad \widehat{\eta}_0(\xi) = 1 \ \text{ if } |\xi|_\infty \le 1; \quad \operatorname{supp} \widehat{\eta}_0 = \{ \xi \in \mathbb{R}^m \mid |\xi|_\infty \le 2 \}.$$

Put $\widehat{\eta}(\xi) = \widehat{\eta}_0(2^{-1}\xi) - \widehat{\eta}_0(\xi)$, $\ \widehat{\eta}_j(\xi) := \widehat{\eta}_j(\xi) = \widehat{\eta}(2^{1-j}\xi)$, $\ j \in \mathbb{N}$. Then

$$\sum_{j=0}^{\infty} \widehat{\eta}_j(\xi) \equiv 1, \quad \xi \in \mathbb{R}^m,$$

i.e. $\{ \widehat{\eta}_j(\xi) \,|\, j \in \mathbb{N}_0 \}$ is a resolution of unity (by corridors) on $\mathbb{R}^m$. It is clear that

$$\eta(x) = 2^m \eta_0(2x) - \eta_0(x),\ \eta_j(x) := 2^{(j-1)m} \eta(2^{j-1}x),\ j \in \mathbb{N}.$$

Let $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ be an arbitrary function, its periodization $\widetilde{g} : \mathbb{T}^m \to \mathbb{C}$ is defined as the (formal) sum of the series $\sum\limits_{\xi \in \mathbb{Z}^m} g(x + \xi)$.

In particular, by the Poisson summation formula it is easy to see that if $\varphi \in \mathcal{S}$ then $\widetilde{\varphi} \in \widetilde{\mathcal{S}}$, and, moreover, $\widetilde{\varphi}(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^m} \widehat{\varphi}(\xi) e^{2\pi i \xi x}$.

Next we denote by $\widetilde{\Delta}_j^\eta$ the operators defined on $\widetilde{\mathcal{S}}'$ $(j \in \mathbb{N}_0)$ as follows. For $f \in \widetilde{\mathcal{S}}'$,

$$\widetilde{\Delta}_j^\eta(f,x) = f * \widetilde{\eta}_j(x) = \langle f, \widetilde{\eta}_j(x-\cdot)\rangle = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^m} \widehat{\eta}_j(\xi)\widehat{f}(\xi)e^{2\pi i\,\xi x}.$$

For the sake of convenience, we put $\widetilde{\Delta}_j^\eta(f,x) \equiv 0$ if $j<0$.

Let $s,\tau \in \mathbb{R}$, $1 \le p,q \le \infty$. Then

I. the smoothness space $\widetilde{B}_{p\,q}^{s\,\tau} := B_{p\,q}^{s\,\tau}(\mathbb{T}^m)$ of Nikol'skii – Besov type, related to the Morrey space, consists of all distributions $f \in \widetilde{\mathcal{S}}'$, for which the norm

$$\|\, f \,|\, \widetilde{B}_{p\,q}^{s\,\tau} \,\| = \sup_{Q \in \widetilde{\mathcal{Q}}} \frac{1}{|Q|^\tau} \|(2^{sj}\widetilde{\Delta}_j^\eta(f,x)\mathrm{sign}((j+1-j(Q))_+)) \,|\, \ell_q(L_p(Q))\|$$

is finite,

II. the smoothness space space $\widetilde{F}_{p\,q}^{s\,\tau} := F_{p\,q}^{s\,\tau}(\mathbb{T}^m)$ $(p<\infty)$ of Lizorkin – Triebel type, related to the Morrey space, consists of all distributions $f \in \widetilde{\mathcal{S}}'$, for which the norm

$$\|\, f \,|\, \widetilde{F}_{p\,q}^{s\,\tau} \,\| = \sup_{Q \in \widetilde{\mathcal{Q}}} \frac{1}{|Q|^\tau} \|(2^{sj}\widetilde{\Delta}_j^\eta(f,x)\mathrm{sign}((j+1-j(Q))_+)) \,|\, L_p(Q;\ell_q)\|$$

is finite.

We denote the unit balls of $\widetilde{F}_{p\,q}^{s\,\tau}$ by $\widetilde{\mathrm{F}}_{p\,q}^{s\,\tau} := \mathrm{F}_{p\,q}^{s\,\tau}(\mathbb{T}^m)$.

We define $N-$th linear width $\lambda_N(\mathrm{F}, X)$ of a set F in a Banach space X $(N \in \mathbb{N})$as follows :

$$\lambda_N(\mathrm{F}, X) = \inf_A \sup_{x \in \mathrm{F}} \|\, x - Ax \,|\, X\|,$$

where inf is taken over all possible finite-dimensional operators $A : X \to X$ with rank(A) $\le N$.

Theorem. *Let $s,t \in \mathbb{R}, t<s$, $1<p,q,r<\infty$, $0 \le \tau \le \min\{\frac{1}{p},\frac{1}{r}\}$. If $\frac{s-t}{m} > (\frac{1}{p}-\frac{1}{r})_+$ and $p \ge 2$ or $r \le 2$, then the following weal asymptotic estimate holds* :

$$\lambda_N(\widetilde{\mathrm{F}}_{pq}^{s\tau}, \widetilde{B}_{rq}^{t\tau}) \asymp N^{\frac{t-s}{m}+(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})_+} \quad \text{at} \quad N \to \infty.$$

Key words: (smoothness) space of Nikol'skii – Besov/Lizorkin – Triebel type, Morrey space, linear width, m-dimensional torus.

2010 Mathematics Subject Classification: 41A46, 42B05, 42B35

Quantitative analysis of some classes of integral operators

D.B. BAZARKHANOV

Institute of Mathematics and Math Modeling, Almaty, Kazakhstan

dauren.mirza@gmail.com

We consider integral operators $\mathscr{K}$ with kernels $K : \mathbb{T}^{m+n} = \mathbb{T}^m \times \mathbb{T}^n \to \mathbb{C}$ of the form

$$g(x) = \mathscr{K}(f,x) = \int_{\mathbb{T}^n} K(x,y)f(y)dy$$

(here $\mathbb{T}^k = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^k$ — $k-$dimensional torus, $x = (x_1,\ldots,x_m) \in \mathbb{T}^m$, $y = (y_1,\ldots,y_n) \in \mathbb{T}^n$, $m,n \in \mathbb{N}$).

We fix the numbers $k \in \mathbb{N} : k \le m$ and $l \in \mathbb{N} : l \le n$, the vectors $\mathtt{m} = (m_1,\ldots,m_k) \in \mathbb{N}^k$ and $\mathtt{n} = (n_1,\ldots,n_l) \in \mathbb{N}^l$ such that $m_1+\cdots+m_k = m$, $n_1+\cdots+n_l = n$, as well as the "partitions" $x=(x^1,\dots,x^k)\in\mathbb{T}^{m_1}\times\dots\times\mathbb{T}^{m_k}$ and $y=(y^1,\dots,y^l)\in\mathbb{T}^{n_1}\times\dots\times\mathbb{T}^{n_l}$ of variables $x=(x_1,\dots,x_m)\in\mathbb{T}^m$ and $y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{T}^n$ respectively.

Further, we consider the product Nikol'skii – Besov spaces $B^{S\,(\mathtt{m},\mathtt{n})}_{P\,Q}(\mathbb{T}^{m+n})$, $B^{s\,\mathtt{m}}_{p\,q}(\mathbb{T}^m)$, $B^{t\,\mathtt{n}}_{r\,u}(\mathbb{T}^n)$ and the product Lizorkin – Triebel spaces $L^{S\,(\mathtt{m},\mathtt{n})}_{P\,Q}(\mathbb{T}^{(m+n)})$, $L^{s\,\mathtt{m}}_{p\,q}(\mathbb{T}^m)$, $L^{t\,\mathtt{n}}_{r\,u}(\mathbb{T}^n)$ (of function/distribution), as well as the Lebesgue spaces $L_r(\mathbb{T}^m)$ (here $S=(S_1,\dots,S_{k+l})\in\mathbb{R}^{k+l}$, $S^1=(S_1,\dots,S_k)$, $S^2=(S_{k+1},\dots,S_{k+l})$; $s=(s_1,\dots,s_k)\in\mathbb{R}^k$, $t=(t_1,\dots,t_l)\in\mathbb{R}^l$, $P=(P_1,P_2)$, $Q=(Q_1,Q_2)$, $1\le P_1,\,P_2,\,Q_1,\,Q_2,\,p,\,q,\,r,\,u\le\infty$).

Definitions of $B^{s\,\mathtt{m}}_{p\,q}(\mathbb{T}^m)$, $L^{s\,\mathtt{m}}_{p\,q}(\mathbb{T}^m)$ can be found in [1] (the spaces $B^{t\,\mathtt{n}}_{r\,u}(\mathbb{T}^n)$, $L^{t\,\mathtt{n}}_{r\,u}(\mathbb{T}^n)$ are defined analogously). The spaces $B^{S\,(\mathtt{m},\mathtt{n})}_{P\,Q}(\mathbb{T}^{m+n})$ and $L^{S\,(\mathtt{m},\mathtt{n})}_{P\,Q}(\mathbb{T}^{(m+n)})$ are defined similarly to $B^{s\,\mathtt{m}}_{p\,q}(\mathbb{T}^m)$ and $L^{s\,\mathtt{m}}_{p\,q}(\mathbb{T}^m)$ respectively, only the norms $\|\cdot\,|\,L_p(\mathbb{T}^m)\|$ and $\|\cdot\,|\,\ell_q(\mathbb{N}_0^k)\|$ should be replaced by the mixed norms $\|\cdot\,|\,L_P(\mathbb{T}^{m+n})\|$ and $\|\cdot\,|\,\ell_Q(\mathbb{N}_0^{k+l})\|$ (here the norms $\|\cdot\,|\,L_P(\mathbb{T}^{m+n})\|$ and $\|\cdot\,|\,\ell_Q(\mathbb{N}_0^{k+l}\|$ are defined as follows : for a function $f:\mathbb{T}^{m+n}\to\mathbb{C}$ and a sequence $\mathrm{c}=(c_{(k,l)})_{k\in\mathbb{N}_0^k,l\in\mathbb{N}_0^l}\subset\mathbb{C}$,

$$\|f\,|\,L_P(\mathbb{T}^{m+n})\|=\|\|f(x,y)\,|\,L_{P_1,x}(\mathbb{T}^m)\|\,|\,L_{P_2,y}(\mathbb{T}^n)\|,$$

$$\|\mathrm{c}\,|\,\ell_Q((\mathbb{N}_0^{k+l})\|=\|\|c_{(k,l)}\,|\,\ell_{Q_1,k}(\mathbb{N}_0^k)\|\,|\,\ell_{Q_2,l}(\mathbb{N}_0^l)\|.$$

In this talk, we discuss the weak asymptotics of the approximation numbers and the Kolmogorov widths of integral operators $\mathscr{K}$ with kernels K belonging to $B^{S\,(\mathtt{m},\mathtt{n})}_{P\,Q}(\mathbb{T}^{m+n})$ or $L^{S\,(\mathtt{m},\mathtt{n})}_{P\,Q}(\mathbb{T}^{m+n})$, acting from $B^{t\,\mathtt{n}}_{u\,v}(\mathbb{T}^n)$ or $L^{t\,\mathtt{n}}_{u\,v}(\mathbb{T}^n)$ into $L_r(\mathbb{T}^m)$, as well as into $B^{s\,\mathtt{m}}_{r\,w}(\mathbb{T}^m)$ or $L^{s\,\mathtt{m}}_{r\,w}(\mathbb{T}^m)$ for a number of relations between the parameters of kernel spaces, function spaces, and target spaces.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. BR20281002).

Keywords: Integral operator, product space, function, distribution, approximation number, Kolmogorov width, weak asymptotics.

2010 Mathematics Subject Classification: 41A46, 41A63, 47B06, 47G10

References

[1] Bazarkhanov D. B. Optimal Cubature Formulas on Classes of Periodic Functions in Several Variables, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **312** (2021), 16–36.

Dirichlet Problem for a Two-Dimensional Quasilinear Second-Order Elliptic Equation in Besov Spaces

N.K. BLIEV

Institute of Mathematics and Math Modeling, Almaty, Kazakhstan

bliev.nazarbay@mail.ru

The Dirichlet problem for a quasilinear second-order elliptic equation, which is not reduced to canonical form, is considered in a planar domain in the framework of Besov spaces. The representation formula, solvability (uniqueness) conditions for the solutions of the problem are obtained.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. BR20281002).

Keywords: Elliptic equation, Besov space.

2010 Mathematics Subject Classification: 46E35, 42B35.

On the Generalization of Bochkarev-Type Inequalities

A. GHORBANALIZADEH

Nazarbayev University, Astana, Republic of Kazakhstan.
Institute for Advanced studies in Basic Sciences (IASBS), Zanjan, Iran
arash.ghorbanalizadeh@nu.edu.kz; ghorbanalizadeh@iasbs.ac.ir

This work is based on a collaboration with Professor E. Nursultanov and Professor D. Suragan.

The Hausdorff–Young inequality is a fundamental result in harmonic analysis that provides an upper bound on the ℓ^q-norm of the Fourier coefficients of a function in terms of its L^p-norm. It states that if $f \in L^p(\mathbb{T})$ for $1 \le p \le 2$, then its Fourier coefficients belong to ℓ^q, where q is the Hölder conjugate of p (i.e., $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$). The generalization of the Hausdorff–Young inequality for Lorentz spaces was studied by Elias M. Stein, who extended the classical Hausdorff–Young inequality to the refined scale of Lorentz spaces $L^{p,r}$. His result states that if $f \in L^{p,r}$ for $1 < p < 2$, then its Fourier coefficients satisfy

$$\|\hat{f}\|_{\ell_{q,r}} \le C\|f\|_{L_{p,r}}$$

Bochkarev showed that, unlike in the spaces $L^{p,q}$ for $1 < p < 2$ and $1 < q < \infty$, a direct analogue of the Hausdorff-Young theorem does not hold in Lorentz spaces $L^{2,q}$ for $2 < q < \infty$ and later, he obtained upper bounds for the Fourier coefficients of functions in $L^{2,q}$. In fact, in Lorentz spaces, the coefficient depends on p, and as $p \to \infty$, it blows up, i.e.,

Lemma 1. *Let $1 < p < 2$, and let $f \sim \sum a_k e^{2\pi ikx}$. Then*

$$\|a\|_{\ell_{p'q}} \le c \frac{1}{\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} \|f\|_{L_{pq}}, \quad 2 \le q < \infty. \tag{1}$$

where c is some constant.

In this work, we extend these results to Grand Lorentz spaces.

Funding: This research was funded by Nazarbayev University under Collaborative Research Program (Grant: 20122022CRP1601).

Keywords: Grand Lorentz spaces, Hardy's inequality, Bochkarev type inequality.

2010 Mathematics Subject Classification: 42B35, 46E30

References

[1] Bochkarev S.V. Hausdorff–Young–Riesz Theorem in Lorentz Spaces and Multiplicative Inequalities, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **219** (1997), 103–114.

[2] Nursultanov E.D., Rafeiro H., Suragan D. *Convolution-type operators in grand Lorentz spaces*, arXiv preprint arXiv:2502.11757 (2025).

Growth properties of Laguerre transform via moduli of continuity

N. KAKHARMAN[1], N.E. TOKMAGAMBETOV[2]

[1,2]*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[1]n.kakharman@math.kz, [2]tokmagambetov@math.kz

In 1960, Debnath [1] introduced the Laguerre transform of a function $f(x)$ defined in $0 \le x < \infty$ by means of the integral

$$L\{f(x)\} = \widehat{f}_\alpha(n) = \int_0^\infty e^{-x} x^\alpha L_n^{(\alpha)}(x) f(x)\, dx,$$

where $L_n^{(\alpha)}(x)$ is the Laguerre polynomial of degree n (≥ 0) and order α (> -1) defined by the Rodrigues' formula [2, p.101, Formula (5.1.5)]

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{e^x}{n!} x^{-\alpha} \frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n+\alpha} e^{-x}\right), \qquad x > 0,$$

which satisfies the ordinary differential equation expressed in the self-adjoint form

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x} x^{\alpha+1} \frac{d}{dx} L_n^{(\alpha)}(x)\right) + n e^{-x} x^{\alpha} L_n^{(\alpha)}(x) = 0.$$

The inverse Laguerre transform is given by

$$f(x) = L^{-1}\{\widehat{f}_\alpha(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} (\delta_n^\alpha)^{-1} \widehat{f}_\alpha(n) L_n^{(\alpha)}(x),$$

where δ_n^α is a normalization factor given by $\delta_n^\alpha = \binom{n+\alpha}{n}\Gamma(\alpha+1) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}$.

The focus of the current paper is to establishes a general inequality controlling the growth behavior of the Laguerre transform using the modulus of continuity defined by a generalized translation operator associated with the Laguerre translation. We first introduce the weighted Lebesgue measurable space $\mathcal{L}_\alpha^p$, then we prove the Riemann-Lebesgue lemma and the Hausdorff-Young inequality for the Laguerre transform. Furthermore, we introduce the Laguerre translation operator and define the modulus of continuity of a function with respect to this operator. Finally, study the growth property of the Laguerre transform and prove an analog of the Titchmarsh theorem for functions from $\mathrm{Lip}(\beta, \mathcal{L}_\alpha^p)$.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP22785364).

Keywords: Laguerre transform, modulus of smoothness, Riemann-Lebesgue lemma, Hausdorff-Young inequality, Titchmarsh's theorem.

2010 Mathematics Subject Classification: 42A45, 44A15, 33C45

References

[1] Debnath L. On Laguerre transform, *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society*, **55** (1960), 69–77.

[2] Szegö G. *Orthogonal Polynomials*, American Mathematical Society, New York (1959).

Cylindrical Hardy type inequalities and identities

M.S. KALAMAN

[1]*SDU University, Kaskelen, Kazakhstan*

[1]*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*

madina.kalaman22@gmail.com

In this work, we study cylindrical extensions of the Hardy and Sobolev inequalities, with a focus on sharp constants and identities following the approach of Badiale-Tarantello [1]. This extension leads to sharper constants, direct identities and the confirmation of the nonexistence of nontrivial extremizers. As a secondary result, we introduce extended Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities with remainder terms, which lead to a cylindrical version of the Heisenberg-Pauli-Weyl uncertainty principle. Moreover, we prove new L^p-Hardy-type identities with logarithmic weights, which, in a specific case, yield the critical Hardy inequality. We also examine the extension of these results to homogeneous Lie groups.

This talk is based on the joint research with Nurgissa Yessirkegenov (KIMEP University, Kazakhstan).

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP23490970).

Keywords: Cylindrical Hardy inequality, Euclidean space, Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequality.

2010 Mathematics Subject Classification: 22E30, 43A80

References

[1] Badiale M, Tarantello G. A Sobolev-Hardy inequality with applications to a nonlinear elliptic equation arising in astrophysics, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **163**: (2002), 259–293.

Hardy-type inequalities for a class of iterated operators

A.A. KALYBAY

KIMEP University, Almaty, Kazakhstan
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
kalybay@kimep.kz

Let $1 < p, q < \infty$ and $0 < r < \infty$. Suppose u, v, and w are weights, i.e., positive measurable functions on $(0, \infty)$. Moreover, let $\|f\|_{p,v} = \left(\int\limits_0^\infty v(t)|f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$ denote the norm of the Lebesgue space $L_{p,v}(0, \infty)$.

Let us consider the weighted inequality

$$\|Sf\|_{q,u} \leq C\|f\|_{p,v}, \quad 0 \leq f \in L_{p,v}(0, \infty), \tag{1}$$

where S is one of the following operators:

$$S^+ f(x) = \left(\int\limits_0^x w(t) \left(\int\limits_0^t f(s)ds \right)^r dt \right)^{\frac{1}{r}},$$

$$S^- f(x) = \left(\int\limits_x^\infty w(t) \left(\int\limits_t^\infty f(s)ds \right)^r dt \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Inequality (1) for the operator S^+ was first studied in [1] for the cases $1 < p \leq q < \infty$, $0 < r < \infty$, and $1 < q < p < \infty$, $0 < r \leq q$. This study was motivated by the connection between inequality (1) and the boundedness of the multidimensional Hardy inequality from a Lebesgue space to a Morrey-type space. In this work, we examine the validity of inequality (1) for both operators S^+ and S^- in the case $1 < q < \min\{p, r\} < \infty$, which was not considered in [1].

Let us note that the results on inequality (1) for the operators S^+ and S^- have numerous applications, as outlined in the recent papers [2] and [3].

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP19677836).

Keywords: integral operator, Hardy-type inequality, weight function, Lebesgue space.

2010 Mathematics Subject Classification: 26D10, 26D15, 47B38

References

[1] Burenkov V.I., Oinarov R. Necessary and sufficient conditions for boundedness of the Hardy-type operator from a weighted Lebesgue space to a Morrey-type space, *Math. Inequal. Appl.*, **16**:1 (2013), 1–19.

[2] Gogatishvili A., Mihula Z., Pick L., Turčinová H., Ünver T. Weighted inequalities for a superposition of the Copson operator and the Hardy operator, *J. Fourier Anal. Appl.*, **28**:24 (2022), doi:10.1007/s00041-022-09918-6.

[3] Gogatishvili A., Ünver T. New characterization of weighted inequalities involving superposition of Hardy integral operators, *Math. Nachr.*, **297**:9 (2024), doi:10.1002/mana.202400007.

On the Laplace-Beltrami operator in stratified sets composed of punctured circles and segments

B.E. KANGUZHIN[1], K.A. DOSMAGULOVA[2]

[1,2]*Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*
[1,2]*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[1]kanbalta@mail.ru, [2]karlygash.dosmagulova@gmail.com

This study explores the introduction of local coordinates on the circle S^1 and investigates various function classes defined on it. It establishes the correspondence between smooth functions on the circle and smooth 2π-periodic functions on the real axis. Using exterior differential forms and the Hodge operator, the Laplace-Beltrami operator on S^1 is introduced, and its explicit form in local coordinates is derived, demonstrating its reduction to the second-order differentiation operator. A spectral analysis is conducted, determining eigenvalues and eigenfunctions expressed through Chebyshev polynomials of the first and second kinds. Additionally, well-posed problems for the Laplace-Beltrami operator on a punctured circle are formulated. Finally, the study extends to stratified sets consisting of punctured circles and segments, providing eigenvalues and eigenfunctions for a specific configuration of two punctured circles and a finite interval.

Choose an arbitrary point $x_0 \in S^1$. Denote by S^1_0 the punctured circle $S^1 \setminus \{x_0\}$. Consider the equation
$$(I-\Delta)w(x)=f(x), x\in S^1_0 \tag{1}$$

Theorem 1. *For any function $f \in L_2(S^1)$ and any numbers γ_0 and γ_1, the inhomogeneous equation* (1) *is supplemented by the conditions*
$$U_0(w)=\gamma_0, \quad U_1(w)=\gamma_1 \tag{2}$$
has a unique solution.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP22685565).

Keywords: Laplace-Beltrami operator, stratified sets.

2010 Mathematics Subject Classification: 35J05, 35S35, 35A21

References

[1] Levitan B. M., Sargsyan I. S. *Introduction to Spectral Theory*, Nauka, Moscow (1970).

[2] Kanguzhin B.E., Dosmagulova K.A. Well-posed problems for the Laplace-Beltrami operator on a punctured two-dimensional sphere, *Advances in the Theory of Nonlinear Analysis and its Applications*, **7**:2 (2023), 428–440.

[3] Dosmagulova, K., Kanguzhin, B. Uniquely solvable problems for the Laplace-Beltrami operator on a sphere punctured by a curve, *Results in Nonlinear Analysis*, **6**:3 (2023), 43–49.

[4] Kanguzhin B., Fazullin Z. On the localization of the spectrum of some perturbations of a two-dimensional harmonic oscillator, *Complex Variables and Elliptic Equations*, **66**:6-7 (2021), 1194-1208.

[5] Kanguzhin B.E. Changes in a finite part of the spectrum of the Laplace operator under delta-like perturbations, *Differential Equations*, **55**:10 (2019), 1328-1335.

Best constant in L^p Poincaré-Friedrichs's inequality for Hörmander vector fields

M. KARAZYM

Nazarbayev University, Astana, Kazakhstan

mukhtar.karazym@nu.edu.kz

Let U be a bounded domain in $\mathbb{R}^d$ with $d \geq 2$ and let

$$X_i = \sum_{k=1}^{m} b_{ik}(x)\partial_{x_k}, \quad i = 1, \ldots, m \quad \text{with} \quad m \leq d,$$

be smooth vector fields in U satisfying Hörmander's finite rank condition. We define the horizontal gradient by

$$X := (X_1, \ldots, X_m)$$

and its length by

$$|Xf| = \left(\sum_{i=1}^{m} (X_i f)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Let $\Omega \Subset U$ be an open connected subset. We say that $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ is a weak derivative of $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ with respect to X_i, written

$$X_i f = g,$$

provided

$$\int_\Omega g(x)\varphi(x)dx = \int_\Omega f(x)X_i^*\varphi(x)dx \qquad \text{for all } \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Here X_i^* represents the formal adjoint of X_i given by

$$X_i^*\varphi(x) = -\sum_{k=1}^{n} \partial_{x_k}\left(b_{ik}\varphi(x)\right).$$

Then

$$\mathcal{W}_X^{1,p}(\Omega) := \{f \in L^p(\Omega) : \ \ X_i f \in L^p(\Omega) \quad \text{for } i = 1, \ldots, m\}$$

equipped with

$$\|u\|_{\mathcal{W}_X^{1,p}(\Omega)} := \left(\int_\Omega \left(|u|^p + |Xu|^p\right) dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

is called the horizontal Sobolev space. Next we define the trace zero horizontal Sobolev space $\mathcal{W}_{X,0}^{1,p}(\Omega)$ as the closure of $C_0^\infty(\Omega)$ in $\mathcal{W}_X^{1,p}(\Omega)$. We refer to [1] for more information on this subject.

The following inequality, known as the Poincaré-Friedrichs inequality for Hörmander vector fields, can be found, for example, in [2] and [3].

Theorem 1. *There exists a constant $C > 0$ such that*

$$\int_\Omega |u|^p dx \leq C \int_\Omega |Xu|^p dx \qquad \textit{for all } u \in \mathcal{W}_{X,0}^{1,p}(\Omega). \tag{1}$$

Here C does not depend on u.

Using (1), we equip $\mathcal{W}_{X,0}^{1,p}(\Omega)$ with the equivalent norm

$$\|u\|_{\mathcal{W}_{X,0}^{1,p}(\Omega)} := \left(\int_\Omega |Xu|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Having established the necessary preliminaries, we now focus on

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} X_i^* \left(|Xu|^{p-2}\, X_i u \right) &= \lambda |u|^{p-2} u \quad && \text{in } \Omega, \\ u &= 0 && \text{on } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{2}$$

We interpret (2) in the weak sense. The nonlinear eigenvalue problem (2) necessitates the concept of eigenfunctions, which we define next.

Definition 2. If a function $u \in \mathcal{W}^{1,p}_{X,0}(\Omega) \setminus \{0\}$ satisfies

$$\int_\Omega |Xu|^{p-2} Xu \cdot X\varphi dx = \lambda \int_\Omega |u|^{p-2} u\varphi dx \tag{3}$$

for all $\varphi \in \mathcal{W}^{1,p}_{X,0}(\Omega)$, then we call u an eigenfunction of (2) corresponding to an eigenvalue λ.

Given $u \in \mathcal{W}^{1,p}_{X,0}(\Omega) \setminus \{0\}$, we define the Rayleigh quotient by

$$\frac{\int_\Omega |Xu|^p dx}{\int_\Omega |u|^p dx}. \tag{4}$$

We will demonstrate that minimizing the Rayleigh quotient results in the first eigenvalue of (2).

Theorem 3. [4] *There exists $u_1 \in \mathcal{W}^{1,p}_{X,0}(\Omega) \setminus \{0\}$ such that*

$$\frac{\int_\Omega |Xu_1|^p dx}{\int_\Omega |u_1|^p dx} = \inf_{u \in \mathcal{W}^{1,p}_{X,0}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_\Omega |Xu|^p dx}{\int_\Omega |u|^p dx} = \lambda_1.$$

Moreover, (λ_1, u_1) satisfies (3) for all $\varphi \in \mathcal{W}^{1,p}_{X,0}(\Omega)$ and λ_1 is the smallest eigenvalue.

As a result of Theorem 3, we have determined the sharp constant in (1).

Corollary 4. *The Poincaré-Friedrichs inequality for Hörmander vector fields*

$$\int_\Omega |u|^p dx \leq \lambda_1^{-1} \int_\Omega |Xu|^p dx$$

holds for all $u \in \mathcal{W}^{1,p}_{X,0}(\Omega)$. The constant λ_1^{-1} is sharp.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of Kazakhstan (Grant No. AP19674900).

Keywords: spectral problem, subelliptic p-Laplacian, L^p Poincaré-Friedrichs's inequality for Hörmander vector fields, sharp constant.

2010 Mathematics Subject Classification: 35P30, 35H20, 35J92, 35R03

References

[1] Bramanti M. *Hörmander operators*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, pp. xxviii+693, 2023.

[2] Capogna L. et al. The asymptotic p-Poisson equation as $p \to \infty$ in Carnot-Carathéodory spaces, *Mathematische Annalen*, 2024, 1–41,

[3] Chen H., Chen H.-G, and Li J.-N. Sharp embedding results and geometric inequalities for Hörmander vector fields, *arXiv:2404.19393*, 2024, 1–43.

[4] Karazym M. and Suragan D. Subelliptic p-Laplacian spectral problem for Hörmander vector fields, *Mathematische Nachrichten*, 2025, 1–17.

The two measurements problem in medicine and medical databases in Kazakhstan

K.T. MYNBAEV[1], A.T. AUBAKIROVA[2], A.K. SHAIMERDENOVA[3]

[1]Kazakh-British Technical University, Almaty, Kazakhstan
[1]Syzganov National Scientific Center of Surgery, Almaty, Kazakhstan
[2]Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan
[1]k.mynbayev@kbtu.kz, [2]a.t.aubakirova1978@gmail.com, [3]altynay.kaznu@gmail.com

In medicine, often it is advisable to use the average value of two measurements for a number of parameters. This is necessary to improve the accuracy and reproducibility of results, especially when analyzing biomarkers, where variations in measurements are possible. In scientific literature, averaging of values is recommended

- when studying hematological and biochemical parameters,
- immunological markers (for example, sugar (insulin) to total protein or hemoglobin to erythrocytes, bilirubin to urea, etc.),
- as well as pharmacokinetic parameters, such as the concentration of tacrolimus (used together with other medicines to prevent the body from rejecting a transplanted organ).

In Kazakhstani practice, taking two measurements is not standard. In routine laboratory diagnostics in Kazakhstan, as a rule, one measurement is used, since averaging of values is not made mandatory by regulatory documents and may require additional resources. However, in scientific research, repeated measurements are justified, especially when working with highly variable parameters. The main reasons why this method is not used everywhere are limited resources, lack of regulatory requirements in national normative documents and impracticality for routine analyses with a small spread of values. At the moment, there is no direct requirement to average values in laboratory studies in official documents of the Ministry of Health of the Republic of Kazakhstan. However, in international recommendations (for example, Clinical and Laboratory Standards Institute, World Health Organization) this approach is used to increase the reliability of data.

The two measurements problem is formalized as follows. Suppose X_1, X_2 are independent identically distributed variables with a distribution function F and density f. We consider estimation of the distribution function of the sum $X_1 + X_2$

$$H(t) \equiv F_{X_1+X_2}(t) = \int_R F(t-x)f(x)dx$$

This equation suggests plugging good estimators $\hat{F}$ and $\hat{f}$ of F and f, respectively, to obtain an estimator of $H(t)$.

In the first result we suggest an estimator $\hat{F}(x)$ that converges to $F(x)$ at all points $x \in R$. Mynbaev et al. (2022) proposed an estimator of $F(x)$ that converges to $F(x)$ at all continuity points of F. Here F does not have to be absolutely continuous and may have jumps.

In the second result we develop an estimator $\hat{f}(x)$ of $f(x)$ that converges to $f(x)$ at all Lebesgue points. Smoothness of f is not required and the result is true under the minimal assumption $f \in L_1(R)$.

Finally, imposing additional restrictions on the kernels in the first two theorems, we tackle the problem of estimating $H(t)$. The smoothness condition on F and f are expressed in terms of continuity moduli, which are further made more explicit using Besov spaces.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP19676673).

Keywords: two measurements problem, nonparametric estimation, density function, distribution function, asymptotic unbiasedness.

2010 Mathematics Subject Classification: 62G05, 62G07, 62G30

References

[1] Mynbaev K.T., Martins-Filho, C.B., Henderson, D.J. Nonparametric estimation of unrestricted distributions and their jumps. *Can. J. Statistics*, **50**:2 (2022), 638–662.

On estimates of M-term trigonometric approximations of functions with bounded mixed derivative

A.Kh. MYRZAGALIYEVA[1], G.A. AKISHEV[2]

[1]*Astana IT University, Astana, Kazakhstan*

[2]*Lomonosov Moscow State University, Kazakhstan Branch, Astana, Kazakhstan*

[1]aigul.myrzagalieva@astanait.edu.com, [2]*akishev*_g@mail.ru

Let $\mathbb{N}$ be a set of natural numbers and $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$; $\mathbb{T}^m = [0, 2\pi)^m$ and $\mathbb{I}^m = [0, 1)^m$.

$L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ denotes the Lorentz space of all real-valued Lebesgue measurable functions f, which have a 2π-period in each variable and for which the quantity is finite

$$\|f\|_{p,\tau} = \left\{ \frac{\tau}{p} \int\limits_0^1 \big(f^*(t)\big)^\tau t^{\frac{\tau}{p}-1} dt \right\}^{\frac{1}{\tau}}, \ 1 < p < \infty, 1 \le \tau < \infty,$$

where $f^*(t)$ is a non-increasing rearrangement of the function $|f(2\pi\overline{x})|$, $\overline{x} \in \mathbb{I}^m$ (see [1], P. 213–216).

Consider the one-dimensional Bernoulli kernel (see, for example, [2])

$$F_r(x) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} k^{-r} \cos(kx - r\pi/2), \ r > 0.$$

Next, for a vector $\overline{r} = (r_1, \ldots, r_m)$, $r_j > 0$, $j = 1, \ldots, m$, we set $F_{\overline{r}}(\overline{x}) = \prod_{j=1}^m F_{r_j}(x_j)$.

Consider the functional class

$$W_{p,\tau}^{\overline{r}} = \{f \colon f = \varphi \star F_{\overline{r}}, \ \|\varphi\|_{p,\tau} \leqslant 1\},$$

where $1 < p < \infty$, $1 \le \tau < \infty$, $(\varphi \star F_{\overline{r}})(\overline{x}) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathbb{T}^m} \varphi(\overline{x} - \overline{u}) F_{\overline{r}})(\overline{u}) d\overline{u}$.

Here $e_M(f)_{p,\tau}$ is the best M–term trigonometric approximation of a function $f \in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$, $M \in \mathbb{N}$. For a functional class $F \subset L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$, we set $e_M(F)_{p,\tau} = \sup_{f \in F} e_M(f)_{p,\tau}$.

Theorem 1. *Let $0 < r_1 = \ldots = r_\nu < r_{\nu+1} \le \ldots \le r_m$, $1 < q \le 2 < p < \infty$, $1 < \tau_1, \tau_2 < \infty$ and $\tau_1^{'} = \frac{\tau_1}{\tau_1 - 1}$.*

If $1 < q < 2$ and $r_1 > \frac{1}{q}$, then

$$e_M(W_{q,\tau_1}^{\overline{r}})_{p,\tau_2} \asymp M^{-(r_1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{q})} (\log_2 M)^{(\nu-1)(r_1 - \frac{1}{q} + \frac{1}{\tau_1^{'}})}.$$

If $q = 2$ and $r_1 > \frac{1}{2}$, then

$$e_M(W_{2,\tau_1}^{\overline{r}})_{p,\tau_2} \le CM^{-r_1} (\log_2 M)^{(\nu-1)(r_1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{\tau_1^{'}}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{\tau_1})_+},$$

$a_+ = \max\{0, a\}$. For $1 < \tau_1 \le 2$, the estimate is sharp in order.

Remark 2. *For $\tau_1 = q$ and $\tau_2 = p$, Theorem 2.2 [2] and Theorem 2.8 [3] follow from Theorem 1.*

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP22683029).

Keywords: Lorentz space, Sobolev class, mixed derivative, trigonometric polynomial, M-term approximation.

2010 Mathematics Subject Classification: 41A10, 41A50, 42A10, 46E35.

References

[1] Stein E.M., Weiss G. *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*, Princeton Univ. Press, Princeton (1971).

[2] Belinsky, E.S. Approximation by a ”floating” system of exponentials on the classes of smooth periodic functions with bounded mixed derivative, *Research on the theory of functions of many real variables Yaroslavl' State University* (1988), 16-33.

[3] Temlyakov V.N. Constructive sparse trigonometric approximation and other problems for functions with mixed smoothness, *Sbornic Mathematics*, **206**:11 (2015), 131–160.

Sparse wavelet approximation of some compacta in the Nikol'skii – Besov space, related to the Morrey space, over m-dimensional torus

Zh. NAIMANOVA

Al Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

zansaanajmanova62@gmail.com

Let $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, $\mathrm{z}_m = \{1, \ldots, k\}$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$. For $x = (x_1, \ldots, x_m), y = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$, we put $xy = x_1y_1 + \ldots + x_my_m$, $|x| = |x_1| + \ldots + |x_m|$, $|x|_\infty = \max(|x_\mu| : \mu \in \mathrm{z}_m)$; $x \leq y \ (x < y) \Leftrightarrow x_\mu \leq y_\mu \ (x_\mu < y_\mu)$ for all $\mu \in \mathrm{z}_m$. For $t \in \mathbb{R}$, $t_+ := \max\{0, t\}$.

Let $\mathcal{S} := \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ and $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ be the Schwartz spaces of test functions and tempered distributions, respectively; $\widehat{f} \equiv \mathcal{F}_m(f)$ and $\mathcal{F}_m^{-1}(f)$ direct and inverse Fourier transforms of $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$; in particular, for $\varphi \in \mathcal{S}$,

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \mathcal{F}_m(\varphi)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x) e^{-2\pi i\,\xi x} dx, \ \ \mathcal{F}_m^{-1}(\varphi)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x) e^{2\pi i\,\xi x} dx, \ \ \xi \in \mathbb{R}^m.$$

Let $\mathbb{T}^m = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^m$ be the m-dimensional torus; sometimes it will be convenient for us to identify $\mathbb{T}^m$ with the cube $Q_0 := [0,1)^m$ in $\mathbb{R}^m$. Further, we denote by $\widetilde{\mathcal{S}'} \equiv \mathcal{S}'(\mathbb{T}^m)$ the space of all distributions f from $\mathcal{S}'$ which are 1-periodic in each variable (i.e. such that $\langle f, \varphi(\cdot + \xi)\rangle = \langle f, \varphi\rangle$ for all $\varphi \in \mathcal{S}$ and any $\xi \in \mathbb{Z}^m$) and by $\widetilde{\mathcal{S}} := \widetilde{\mathcal{S}} := \mathcal{S}(\mathbb{T}^m)$ the space of all infinitely continuously differentiable functions on $\mathbb{T}^m$ endowed with the topology of uniform convergence of all derivatives over $\mathbb{T}^m$. Then the space $\mathcal{S}'(\mathbb{T}^m)$ is naturally identified with the space that is topologically dual to $\mathcal{S}(\mathbb{T}^m)$. It is well known that $f \in \widetilde{\mathcal{S}'}$ if and only if $\operatorname{supp} \widehat{f} \subset \mathbb{Z}^m$, i.e. distribution $\widehat{f}$ vanishes on the open set $\mathbb{R}^m \backslash \mathbb{Z}^m$.

For $1 \leq p \leq \infty$ and a measurable set $G \subset \mathbb{R}^m$, as usual, let $L_p(G)$ be the space of measurable functions $f : G \to \mathbb{C}$, which are Lebesgue integrable in p-th power (when $p = \infty$ essentially bounded) over G, endowed with the standard norm $\| f \,|\, L_p(G) \|$.

For $1 \leq q \leq \infty$, let $\ell_q := \ell_q(\mathbb{N}_0)$ be the space of all (complex) number sequences $(c_j) = (c_j : j \in \mathbb{N}_0)$ with finite standard norm $\|(c_j) \,|\, \ell_q\|$.

Further, let $\ell_q(L_p(G))$ (respectively, $L_p(G; \ell_q)$) be the space of all function sequences $(g_j(x)) = (g_j(x) : k \in \mathbb{N}_0)$ $(x \in G)$ with finite standard quasi-norm (norm if $p, q \geq 1$)

$$\| \, (g_j(x)) \,|\, \ell_q(L_p(G)) \, \| = \| \, (\, \| \, g_j \,|\, L_p(G) \|) \,|\, \ell_q \, \|$$

(respectively,

$$\| \, (g_j(x)) \,|\, L_p(G; \ell_q) \, \| = \| \, \| \, (g_j(\cdot)) \,|\, \ell_q \, \| \,|\, L_p(G) \|).$$

Let $\mathcal{Q}$ be the set of all half-open dyadic cubes in $\mathbb{R}^m$ of the form

$$Q = Q_{j\xi} = \{\, x \in \mathbb{R}^m \,:\, 2^j x - \xi \in [0,1)^m \,\}\ (j \in \mathbb{Z}, \xi \in \mathbb{Z}^m).$$

For a cube $Q = Q_{j\xi}$, we denote by $x_Q := 2^{-j} \cdot \xi$, $l(Q)(= 2^{-j})$, $j(Q) := j$ and $|Q|(= 2^{-jm})$ its "lower left" corner, side length, level and volume, respectively.

Let

$$\widetilde{\mathcal{Q}} = \{Q \in \mathcal{Q} \,|\, Q \subset Q_0 = [0,1)^m\} = \{Q_{j\xi} \,|\, j \in \mathbb{N}_0,\, \xi \in \mathbb{Z}^m : \mathbf{0} \le \xi < 2^j \mathbf{1}\}\ \ (\mathbf{0}, \mathbf{1} \in \mathbb{R}^m).$$

First we choose a test function $\eta_0 \in \mathcal{S}$ such that

$$0 \le \widehat{\eta}_0(\xi) \le 1, \quad \xi \in \mathbb{R}^m; \quad \widehat{\eta}_0(\xi) = 1 \ \text{ if } |\xi|_\infty \le 1; \quad \operatorname{supp} \widehat{\eta}_0 = \{\xi \in \mathbb{R}^m \mid |\xi|_\infty \le 2\}.$$

Put $\widehat{\eta}(\xi) = \widehat{\eta}_0(2^{-1}\xi) - \widehat{\eta}_0(\xi)$, $\ \widehat{\eta}_j(\xi) := \widehat{\eta}_j(\xi) = \widehat{\eta}(2^{1-j}\xi)$, $\ j \in \mathbb{N}$. Then

$$\sum_{j=0}^{\infty} \widehat{\eta}_j(\xi) \equiv 1, \quad \xi \in \mathbb{R}^m,$$

i.e. $\{\widehat{\eta}_j(\xi) \,|\, j \in \mathbb{N}_0\}$ is a resolution of unity (by corridors) on $\mathbb{R}^m$. It is clear that

$$\eta(x) = 2^m \eta_0(2x) - \eta_0(x),\ \eta_j(x) := 2^{(j-1)m} \eta(2^{j-1}x),\ j \in \mathbb{N}.$$

Let $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ be an arbitrary function, its periodization $\widetilde{g} : \mathbb{T}^m \to \mathbb{C}$ is defined as the (formal) sum of the series $\sum\limits_{\xi \in \mathbb{Z}^m} g(x + \xi)$.

In particular, by the Poisson summation formula it is easy to see that if $\varphi \in \mathcal{S}$ then $\widetilde{\varphi} \in \widetilde{\mathcal{S}}$, and, moreover, $\widetilde{\varphi}(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^m} \widehat{\varphi}(\xi) e^{2\pi i \xi x}$.

Next we denote by $\widetilde{\Delta}^\eta_j$ the operators defined on $\widetilde{\mathcal{S}}'$ $(j \in \mathbb{N}_0)$ as follows. For $f \in \widetilde{\mathcal{S}}'$,

$$\widetilde{\Delta}^\eta_j(f, x) = f * \widetilde{\eta}_j(x) = \langle f, \widetilde{\eta}_j(x - \cdot)\rangle = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^m} \widehat{\eta}_j(\xi) \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i\, \xi x}.$$

For the sake of convenience, we put $\widetilde{\Delta}^\eta_j(f, x) \equiv 0$ if $j < 0$.

Let $s, \tau \in \mathbb{R}$, $1 \le p, q \le \infty$. Then

I. the smoothness space $\widetilde{B}^{s\,\tau}_{p\,q} := B^{s\,\tau}_{p\,q}(\mathbb{T}^m)$ of Nikol'skii–Besov type, related to the Morrey space, consists of all distributions $f \in \widetilde{\mathcal{S}}'$, for which the norm

$$\|\, f \,|\, \widetilde{B}^{s\,\tau}_{p\,q} \,\| \ = \sup_{Q \in \widetilde{\mathcal{Q}}} \frac{1}{|Q|^\tau} \|(2^{sj} \widetilde{\Delta}^\eta_j(f, x) \operatorname{sign}((j + 1 - j(Q))_+)) \,|\, \ell_q(L_p(Q))\|$$

is finite,

II. the smoothness space space $\widetilde{F}^{s\,\tau}_{p\,q} := F^{s\,\tau}_{p\,q}(\mathbb{T}^m)$ $(p < \infty)$ of Lizorkin–Triebel type, related to the Morrey space, consists of all distributions $f \in \widetilde{\mathcal{S}}'$, for which the norm

$$\|\, f \,|\, \widetilde{F}^{s\,\tau}_{p\,q} \,\| \ = \sup_{Q \in \widetilde{\mathcal{Q}}} \frac{1}{|Q|^\tau} \|(2^{sj} \widetilde{\Delta}^\eta_j(f, x) \operatorname{sign}((j + 1 - j(Q))_+)) \,|\, L_p(Q; \ell_q)\|$$

is finite.

We denote the unit balls of $\widetilde{F}^{s\,\tau}_{p\,q}$ by $\widetilde{\mathrm{F}}^{s\,\tau}_{p\,q} := \mathrm{F}^{s\,\tau}_{p\,q}(\mathbb{T}^m)$.

Let $\Phi = \{\phi_\upsilon \,|\, \upsilon \in \Upsilon\}$ be a countable system of elements of a Banach space X over field of complex numbers $\mathbb{C}$. We put $(N \in \mathbb{N})$

$$\Sigma_N(\Phi) = \{\phi = \sum_{\upsilon \in \Upsilon} c_\upsilon \phi_\upsilon \,|\, (c_\upsilon)_{\upsilon \in \Upsilon} \subset \mathbb{C} \ \text{ such that } \ \sum_{\upsilon \in \Upsilon} \operatorname{sign}|c_\upsilon| \le N\}.$$

Best $N-$term approximation of an element $x \in X$ with respect to system Φ is defined as follows :

$$\sigma_N(x, \Phi, X) = \inf\{\| x - \phi \,|\, X\| \mid \phi \in \Sigma_N(\Phi)\}.$$

For a set $\mathrm{F} \subset X$, we put

$$\sigma_N(\mathrm{F}, \Phi, X) = \sup\{\sigma_N(x, \Phi, X) \mid x \in \mathrm{F}\}.$$

Let $\widetilde{\mathcal{W}}^{(m)}$ be $m-$dimensional system of periodized Meyer's wavelets (for its definition see [1, ch. 3]).

We denote $r_* = \min\{r, 2\}$, $\imath = \min\{p, q, r\}$.

Theorem. *Let $s, t \in \mathbb{R}, t < s$, $1 < p, q, r < \infty$, $0 \le \tau \le \min\{\frac{1}{p}, \frac{1}{r}\}$. If $\frac{s-t}{m} > (\frac{2}{r_*\imath} - \frac{1}{r})_+$, then the following weal asymptotic estimate holds* :

$$\sigma_N(\widetilde{\mathrm{F}}^{s\tau}_{pq}, \widetilde{\mathcal{W}}^{(m)}, \widetilde{B}^{t\tau}_{rq}) \asymp N^{\frac{t-s}{m}} \quad \text{as} \quad N \to \infty.$$

Key words: (smoothness) space of Nikol'skii – Besov/Lizorkin – Triebel type, Morrey space, best $N-$term approximation, wavelet,$m-$dimensional periodized system of Meyer's wavelets, $m-$dimensinal torus.

2010 Mathematics Subject Classification: 41A46, 42B05, 42B35

References

[1] Meyer Y. *Wavelets and operators*, Cambridge University Press, Cambridge (1992).

Weak version of symmetric space

T. NURLYBEKULY

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
Astana It University, Astana, Kazakhstan

bekjant@yahoo.com

We investigate a weak version of symmetric spaces and to study some properties of noncommutative spaces associated with the weak version of symmetric spaces.

Definition 1. Let E be a symmetric (quasi-)Banach space on $(0, 1)$. The fundamental function φ_E is defined by $\varphi_E(t) = \|\chi_A\|$, where $t \in [0, 1)$ and A is a Lebesgue measurable subset of $(0, 1)$ with $m(A) = t$.

Note that $\varphi_{L_1(0,1)} = t$ (see [2, p. 65]). Let $0 < p < \infty$. If $A \subset (0, 1)$ with $m(A) = t$ $(0 \le t < 1)$, then

$$\varphi_{L_p(0,1)}(t) = \|\chi_A\|_p = \|\chi_A\|_1^{\frac{1}{p}} = t^{\frac{1}{p}}.$$

Let $M_{\varphi_E}(0, 1)$ be the usual Marcinkiewicz space:

$$M_{\varphi_E}(0, 1) = \{f \in L_0(0, 1) : \ \|f\|_{M_{\varphi_E}} = \sup_{t>0} \frac{\varphi_E(t)}{t} \int_0^t \mu_s(f) ds < \infty\}.$$

Definition 2. Let E be a symmetric (quasi-)Banach space on $(0, 1)$. We call $M_{\varphi_E}(0, 1)$ is a weak version of E and denote it by E_∞.

The classical weak L_p space $L_{p,\infty}(0, 1)$ $(1 \le p < \infty)$ is defined as the set of all measurable functions f on $(0, 1)$ such that

$$\|f\|_{L_{p,\infty}} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} \mu_t(f) < \infty.$$

For $p > 1$, $L_{p,\infty}(0,1)$ can be renormed into a Banach space. More precisely,

$$f \mapsto \sup_{t>0} t^{-1+\frac{1}{p}} \int_0^t \mu_s(f)ds$$

gives an equivalent norm on $L_{p,\infty}(0,1)$. We refer to [3] for more information about weak L_p spaces.

If $E = L_p(0,1)$ $(1 < p < \infty)$, then $E_\infty = L_{p,\infty}(0,1)$. But for $0 < p \leq 1$, if $f \in (L_p(0,1))_\infty$, then

$$\|f\|_{(L_p(0,1))_\infty} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}-1} \int_0^t \mu_s(f)ds = \int_0^1 \mu_s(f)ds = \|f\|_1.$$

Hence, $(L_p(0,1))_\infty = L_1(0,1)$ and it is different from the classical weak L_p space.

Let Φ be an N-function, we define

$$a_\Phi = \inf_{t>0} \frac{t\Phi'(t)}{\Phi(t)} \quad \text{and} \quad b_\Phi = \sup_{t>0} \frac{t\Phi'(t)}{\Phi(t)}.$$

If $b_\Phi < \infty$, then the fundamental function of Orlicz space $L_\Phi(0,1)$ on $(0,1)$ equipped with the Luxemburg norm, is the following

$$\varphi_{L_\Phi(\Omega)}(t) = 1/\Phi^{-1}(\frac{1}{t}), \quad t > 0,$$

where the Luxemburg norm is defined by

$$\|x\|_\Phi = \inf\{\lambda > 0 : \int_0^1 \Phi(\frac{|x|}{\lambda})dx \leq 1\}.$$

Hence, if $E = L_\Phi(0,1)$ and $1 < a_\Phi \leq b_\Phi < \infty$, then $E_\infty = L_{\Phi,\infty}(0,1)$.

Proposition 3. *Let E_i be a symmetric (quasi-)Banach space on $(0,1)$ which is α_i-convex for some $0 < \alpha_i < \infty$ $(i = 1,\ 2)$. Then E_1 and E_2 can be equipped with equivalent quasi norms $\|\cdot\|_1$ and $\|\cdot\|_2$, respectively, so that $\varphi_{E_1 \odot E_2}(t) = \varphi_{E_1}(t)\varphi_{E_2}(t)$, for any $t \geq 0$.*

Theorem 4. *Let E_i be a symmetric (quasi-)Banach space on $(0,1)$ which is α_i-convex for some $0 < \alpha_i < \infty$ $(i = 1,\ 2)$ and $0 < a < 1$. If $x \in ((E_1^{(a)})_\infty)^{(\frac{1}{a})}(\mathcal{M})$ and $y \in ((E_2^{(1-a)})_\infty)^{(\frac{1}{1-a})}(\mathcal{M})$, then $xy \in (E_1 \odot E_2)_\infty(\mathcal{M})$ and the following Hölder type inequality holds*

$$\|xy\|_{(E_1 \odot E_2)_\infty} \leq \|x\|_{((E_1^{(a)})_\infty)^{(\frac{1}{a})}} \|y\|_{((E_2^{(1-a)})_\infty)^{(\frac{1}{1-a})}}.$$

Theorem 5. *Let E be a symmetric (quasi-)Banach space on $(0,1)$. Then we have the following Chebyshev type inequality*

$$t\varphi_E(\tau(e_{(t,\infty)}(|x|))) \leq \|x\|_{E\infty}, \quad \forall x \in E_\infty(\mathcal{M}).$$

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP23484600).

Keywords: Symmetric space, fundamental function of symmetric space, noncommutative symmetric space, von Neumann algebra.

2010 Mathematics Subject Classification: 46L52, 47L05

References

[1] Bekjan T.N., Chen Z., Liu P., Jiao Y. Noncommutative weak Orlicz spaces and martingale inequalities, *Studia Math.*, **204**: (2011), 195–212.

[2] Bennett C., Sharpley R. *Interpolation of operators*, Academic Press Inc., Boston, MA (1988).

[3] Grafakos L. *Classical and modern Fourier analysis*, Pearson Education, London (2004).

Sparse trigonometric approximation of some compacta in the Nikol'skii – Besov space, related to the Morrey space, over m-dimensional torus

B. OMAROV

Al Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

beksultan.omarov.01@mail.ru

Let $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, $\mathrm{z}_m = \{1, \ldots, k\}$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$. For $x = (x_1, \ldots, x_m), y = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$, we put $xy = x_1 y_1 + \ldots + x_m y_m$, $|x| = |x_1| + \ldots + |x_m|$, $|x|_\infty = \max(|x_\mu| : \mu \in \mathrm{z}_m)$; $x \leq y$ $(x < y) \Leftrightarrow x_\mu \leq y_\mu$ $(x_\mu < y_\mu)$ for all $\mu \in \mathrm{z}_m$. For $t \in \mathbb{R}$, $t_+ := \max\{0, t\}$.

Let $\mathcal{S} := \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ and $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ be the Schwartz spaces of test functions and tempered distributions, respectively; $\widehat{f} \equiv \mathcal{F}_m(f)$ and $\mathcal{F}_m^{-1}(f)$ direct and inverse Fourier transforms of $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$; in particular, for $\varphi \in \mathcal{S}$,

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \mathcal{F}_m(\varphi)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x) e^{-2\pi i\, \xi x} dx, \quad \mathcal{F}_m^{-1}(\varphi)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x) e^{2\pi i\, \xi x} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^m.$$

Let $\mathbb{T}^m = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^m$ be the m-dimensional torus; sometimes it will be convenient for us to identify $\mathbb{T}^m$ with the cube $Q_0 := [0,1)^m$ in $\mathbb{R}^m$. Further, we denote by $\widetilde{\mathcal{S}'} \equiv \mathcal{S}'(\mathbb{T}^m)$ the space of all distributions f from $\mathcal{S}'$ which are 1-periodic in each variable (i.e. such that $\langle f, \varphi(\cdot + \xi)\rangle = \langle f, \varphi\rangle$ for all $\varphi \in \mathcal{S}$ and any $\xi \in \mathbb{Z}^m$) and by $\widetilde{\mathcal{S}} := \widetilde{\mathcal{S}} := \mathcal{S}(\mathbb{T}^m)$ the space of all infinitely continuously differentiable functions on $\mathbb{T}^m$ endowed with the topology of uniform convergence of all derivatives over $\mathbb{T}^m$. Then the space $\mathcal{S}'(\mathbb{T}^m)$ is naturally identified with the space that is topologically dual to $\mathcal{S}(\mathbb{T}^m)$. It is well known that $f \in \widetilde{\mathcal{S}'}$ if and only if $\operatorname{supp} \widehat{f} \subset \mathbb{Z}^m$, i.e. distribution $\widehat{f}$ vanishes on the open set $\mathbb{R}^m \backslash \mathbb{Z}^m$.

For $1 \leq p \leq \infty$ and a measurable set $G \subset \mathbb{R}^m$, as usual, let $L_p(G)$ be the space of measurable functions $f : G \to \mathbb{C}$, which are Lebesgue integrable in p-th power (when $p = \infty$ essentially bounded) over G, endowed with the standard norm $\| f \,|\, L_p(G) \|$.

For $1 \leq q \leq \infty$, let $\ell_q := \ell_q(\mathbb{N}_0)$ be the space of all (complex) number sequences $(c_j) = (c_j : j \in \mathbb{N}_0)$ with finite standard norm $\|(c_j) \,|\, \ell_q\|$.

Further, let $\ell_q(L_p(G))$ (respectively, $L_p(G; \ell_q)$) be the space of all function sequences $(g_j(x)) = (g_j(x) : k \in \mathbb{N}_0)$ $(x \in G)$ with finite standard quasi-norm (norm if $p, q \geq 1$)

$$\| \, (g_j(x)) \,|\, \ell_q(L_p(G)) \, \| = \| \, (\, \| \, g_j \,|\, L_p(G) \|) \,|\, \ell_q \, \|$$

(respectively,

$$\| \, (g_j(x)) \,|\, L_p(G; \ell_q) \, \| = \| \, \| \, (g_j(\cdot)) \,|\, \ell_q \, \| \,|\, L_p(G) \|).$$

Let $\mathcal{Q}$ be the set of all half-open dyadic cubes in $\mathbb{R}^m$ of the form

$$Q = Q_{j\xi} = \{ \, x \in \mathbb{R}^m \, : \, 2^j x - \xi \in [0,1)^m \, \} \ (j \in \mathbb{Z}, \xi \in \mathbb{Z}^m).$$

For a cube $Q = Q_{j\xi}$, we denote by $x_Q := 2^{-j} \cdot \xi$, $l(Q) (= 2^{-j})$, $j(Q) := j$ and $|Q| (= 2^{-jm})$ its "lower left" corner, side length, level and volume, respectively.

Let

$$\widetilde{\mathcal{Q}} = \{ Q \in \mathcal{Q} \,|\, Q \subset Q_0 = [0,1)^m \} = \{ Q_{j\xi} \,|\, j \in \mathbb{N}_0, \, \xi \in \mathbb{Z}^m : \mathbf{0} \leq \xi < 2^j \mathbf{1} \} \ \ (\mathbf{0}, \mathbf{1} \in \mathbb{R}^m).$$

First we choose a test function $\eta_0 \in \mathcal{S}$ such that

$$0 \leq \widehat{\eta}_0(\xi) \leq 1, \quad \xi \in \mathbb{R}^m; \quad \widehat{\eta}_0(\xi) = 1 \ \text{ if } |\xi|_\infty \leq 1; \quad \operatorname{supp} \widehat{\eta}_0 = \{ \xi \in \mathbb{R}^m \mid |\xi|_\infty \leq 2 \}.$$

Put $\widehat{\eta}(\xi) = \widehat{\eta}_0(2^{-1}\xi) - \widehat{\eta}_0(\xi)$, $\ \widehat{\eta}_j(\xi) := \widehat{\eta}_j(\xi) = \widehat{\eta}(2^{1-j}\xi)$, $\ j \in \mathbb{N}$. Then

$$\sum_{j=0}^{\infty} \widehat{\eta}_j(\xi) \equiv 1, \quad \xi \in \mathbb{R}^m,$$

i.e. $\{\widehat{\eta}_j(\xi)\,|\, j\in\mathbb{N}_0\}$ is a resolution of unity (by corridors) on $\mathbb{R}^m$. It is clear that

$$\eta(x)=2^m\eta_0(2x)-\eta_0(x),\ \eta_j(x):=2^{(j-1)m}\eta(2^{j-1}x),\ j\in\mathbb{N}.$$

Let $g:\mathbb{R}^m\to\mathbb{C}$ be an arbitrary function, its periodization $\widetilde{g}:\mathbb{T}^m\to\mathbb{C}$ is defined as the (formal) sum of the series $\sum\limits_{\xi\in\mathbb{Z}^m} g(x+\xi)$.

In particular, by the Poisson summation formula it is easy to see that if $\varphi\in\mathcal{S}$ then $\widetilde{\varphi}\in\widetilde{\mathcal{S}}$, and, moreover, $\widetilde{\varphi}(x)=\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^m}\widehat{\varphi}(\xi)e^{2\pi i\xi x}$.

Next we denote by $\widetilde{\Delta}_j^\eta$ the operators defined on $\widetilde{\mathcal{S}}'$ $(j\in\mathbb{N}_0)$ as follows. For $f\in\widetilde{\mathcal{S}}'$,

$$\widetilde{\Delta}_j^\eta(f,x)=f*\widetilde{\eta}_j(x)=\langle f,\widetilde{\eta}_j(x-\cdot)\rangle=\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^m}\widehat{\eta}_j(\xi)\widehat{f}(\xi)e^{2\pi i\,\xi x}.$$

For the sake of convenience, we put $\widetilde{\Delta}_j^\eta(f,x)\equiv 0$ if $j<0$.

Let $s,\tau\in\mathbb{R}$, $1\le p,q\le\infty$. Then

I. the smoothness space $\widetilde{B}^{s\,\tau}_{p\,q}:=B^{s\,\tau}_{p\,q}(\mathbb{T}^m)$ of Nikol'skii$-$Besov type, related to the Morrey space, consists of all distributions $f\in\widetilde{\mathcal{S}}'$, for which the norm

$$\|\,f\,|\,\widetilde{B}^{s\,\tau}_{p\,q}\,\|\ =\sup_{Q\in\widetilde{\mathcal{Q}}}\frac{1}{|Q|^\tau}\|(2^{sj}\widetilde{\Delta}_j^\eta(f,x)\mathrm{sign}((j+1-j(Q))_+))\,|\,\ell_q(L_p(Q))\|$$

is finite,

II. the smoothness space space $\widetilde{F}^{s\,\tau}_{p\,q}:=F^{s\,\tau}_{p\,q}(\mathbb{T}^m)$ $(p<\infty)$ of Lizorkin$-$Triebel type, related to the Morrey space, consists of all distributions $f\in\widetilde{\mathcal{S}}'$, for which the norm

$$\|\,f\,|\,\widetilde{F}^{s\,\tau}_{p\,q}\,\|\ =\sup_{Q\in\widetilde{\mathcal{Q}}}\frac{1}{|Q|^\tau}\|(2^{sj}\widetilde{\Delta}_j^\eta(f,x)\mathrm{sign}((j+1-j(Q))_+))\,|\,L_p(Q;\ell_q)\|$$

is finite.

We denote the unit balls of $\widetilde{F}^{s\,\tau}_{p\,q}$ by $\widetilde{\mathrm{F}}^{s\,\tau}_{p\,q}:=\mathrm{F}^{s\,\tau}_{p\,q}(\mathbb{T}^m)$.

Let $\Phi=\{\phi_\upsilon\,|\,\upsilon\in\Upsilon\}$ be a countable system of elements of a Banach space X over field of complex numbers $\mathbb{C}$. We put $(N\in\mathbb{N})$

$$\Sigma_N(\Phi)=\{\phi=\sum_{\upsilon\in\Upsilon}c_\upsilon\phi_\upsilon\,|\,(c_\upsilon)_{\upsilon\in\Upsilon}\subset\mathbb{C}\ \text{ such that }\ \sum_{\upsilon\in\Upsilon}\mathrm{sign}|c_\upsilon|\le N\}.$$

Best $N-$term approximation of an element $x\in X$ with respect to system Φ is defined as follows :

$$\sigma_N(x,\Phi,X)=\inf\{\|\,x-\phi\,|\,X\|\ |\ \phi\in\Sigma_N(\Phi)\}.$$

For a set $\mathrm{F}\subset X$, we put $\sigma_N(\mathrm{F},\Phi,X)=\sup\{\sigma_N(x,\Phi,X)\ |\ x\in\mathrm{F}\}$.

Let $\mathfrak{T}^{(m)}=\{e^{2\pi i\xi x}\ |\ \xi\in\mathbb{Z}^m\}$ be $m-$dimensional trigonometric.

Theorem. *Let $s,t\in\mathbb{R}, t<s$, $1<p,q,r<\infty$, $0\le\tau\le\min\{\frac{1}{p},\frac{1}{r}\}$.*

(i) *If $p<r\le 2$, $\frac{s-t}{m}>\frac{1}{p}-\frac{1}{r}$, then the following weal asymptotic estimate holds* :

$$\sigma_N(\widetilde{\mathrm{F}}^{s\tau}_{pq},\mathfrak{T}^{(m)},\widetilde{B}^{t\tau}_{rq})\asymp N^{\frac{t-s}{m}+\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}\ \text{ as }\ N\to\infty.$$

(ii) *If $2\le p\le r$, $\frac{s-t}{m}>\frac{1}{2}$, then the following weal asymptotic estimate holds* :

$$\sigma_N(\widetilde{\mathrm{F}}^{s\tau}_{pq},\mathfrak{T}^{(m)},\widetilde{B}^{t\tau}_{rq})\asymp N^{\frac{t-s}{m}}\ \text{ as }\ N\to\infty.$$

(iii) *If $p\le 2<r$, $\frac{s-t}{m}>\frac{1}{p}$, then the following weal asymptotic estimate holds* :

$$\sigma_N(\widetilde{\mathrm{F}}^{s\tau}_{pq},\mathfrak{T}^{(m)},\widetilde{B}^{t\tau}_{rq})\asymp N^{\frac{t-s}{m}+\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}\ \text{ as }\ N\to\infty.$$

Key words: (smoothness) space of Nikol'skii – Besov/Lizorkin – Triebel type, Morrey space, best $N-$term trigonometric approximation, $m-$dimensinal torus.

2010 Mathematics Subject Classification: 41A46, 42B05, 42B35

Generalized integral Hardy inequalities

I.A. ORYNGALIYEV

[1]*SDU University, Kaskelen, Kazakhstan*
[1]*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Kazakhstan*
imangali.oryngaliyev@gmail.com

Hardy-type inequalities are fundamental in functional analysis and PDEs. While their Euclidean versions are well understood, the work by Drábek, Heinig, and Kufner [1] established higher-dimensional extensions with sharp constants. This work generalizes these inequalities to homogeneous Lie groups, providing new insights into integral and gradient inequalities in non-Euclidean settings.

A key result that we obtained is the extension of weighted gradient inequalities to homogeneous Lie groups, replacing radial symmetry with homogeneous quasi-norms and left-invariant vector fields. Additionally, a new inequality is obtained for the case when the integrability exponent of the gradient term is smaller than that of the function itself, which was previously unknown with the sharp constant. These results build upon classical inequalities established by Hardy, Littlewood, and Pólya [2] and extend their applicability beyond Euclidean space.

Furthermore, we derive weighted exponential integral inequalities in Lie groups, proving their validity under appropriate weight conditions. These findings contribute to the broader study of metric measure spaces and PDE estimates in non-Euclidean settings. Future research may explore further generalizations to sub-Riemannian geometries and Carnot groups.

This talk is based on the joint research with Nurgissa Yessirkegenov (KIMEP University and Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Kazakhstan).

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP23490970).

Keywords: Integral Hardy-type inequality, sharp constant, homogeneous Lie groups.

2020 Mathematics Subject Classification: 22E30, 26D15

References

[1] P. Drábek, H. P. Heinig, and A. Kufner, *Higher dimensional Hardy inequality*, International Series of Numerical Mathematics, Vol. 123, Birkhäuser Verlag Basel, 1997.

[2] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge University Press, 1959.

Existence and regularity of solutions to gradient degenerate PDEs

P. OZA[1], D. SURAGAN[2]

[1,2]*Nazarbayev University, Astana, Kazakhstan*
[1]priyank.kumar@nu.edu.kz, [2]durvudkhan.suragan@nu.edu.kz

In this talk, we discuss a gradient-degenerate nonlocal version of the generalized p-Laplacian, introduced by Baravdish-Cheng-Svensson-Åström [1]. A key feature of this operator is that it degenerates along the set of critical points. We establish the existence and interior Lipschitz regularity of viscosity solutions to

$$|Du|^{\gamma(\cdot)}\left(-(-\Delta)^s u + (q(|Du|)-1)\Delta_\infty^s u + b\cdot Du\right) = f \text{ in } \Omega, \tag{1}$$

where Ω is a bounded domain in $\mathbb{R}^N$, $\gamma \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ satisfies $\inf_\Omega \gamma \geq 0$, and $f \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$. In this equation, Du denotes the gradient of u, $(-\Delta)^s$ represents the fractional Laplacian, and Δ_∞^s

is the infinity Laplacian with order $s \in (1/2, 1)$. The function $b\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N$ is bounded Lipschitz continuous, while $q(|Du|)$ is a continuous function with $q(|Du|) \geq 0$, specified later. A distinctive feature of the operator in (1) is its gradient-dependent structure, combined with the fact that it degenerates on the set of critical points, $\mathcal{C} := \{x\colon Du(x) = 0\}$. These characteristics make the analysis of this operator particularly interesting. we employ an adapted Ishii-Lions "doubling variables" technique [2]. We also discuss a setting in which the uniqueness of the solutions is confirmed.

Funding: This research has been funded by Nazarbayev University under Collaborative Research Program Grant 20122022CRP1601.

Keywords: integro-PDE, nonlocal elliptic equation, variable exponents, viscosity solutions

2010 Mathematics Subject Classification: 35B65, 35J60, 35J70, 35D40, 47G20

References

[1] Baravdish G., Cheng Y., Svensson O., Årström F. Generalizations of p-Laplace operator for image enhancement: Part 2, *Communications on Pure and Applied Analysis*, **19**:7 (2020), 3477–3500.

[2] Ishii H., Lions P.–L. Viscosity solutions of fully nonlinear second-order elliptic partial differential equations, *Journal of Differential Equations*, **83**:1 (1990), 26–78.

On spectrum of the generalized Cesàro operator on rearrangement invariant spaces

B.O. OZBEKBAY

[1]*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*

ozbekbay.b00@gmail.com

This work studies the spectrum of the generalized Cesàro operator

$$C_\beta f(t) := \beta t^{-\beta} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} f(s)ds, \quad \beta > 0, \tag{1}$$

acting on rearrangement invariant spaces $E(0,1)$ and $E(0,\infty)$ with Boyd indices satisfying $0 < \alpha \leq \beta < 1$. The boundedness of the operator and its spectral structure are investigated. The results provide new insights into the properties of Cesàro-type operators in rearrangement invariant spaces and their potential applications. This research is a joint work with Kanat Tulenov.

On the density of the set of finite sequences in the weighted Sobolev difference space

D.S. SARSENALY

[1]*L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan*

dinara.sarsenali@mail.ru

This work is devoted to the study of the relationship between the weighted Sobolev difference space and the closure of a set of finite sequences depending on the behavior of the weight sequences at infinity.

Let $1 < p < \infty$, $p' = \frac{p}{p-1}$. Let $\{f_i\}_{i=0}^{\infty}$ be the sequence of real numbers, and define the difference operation:

$$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i, \quad i \geq 0, \qquad \Delta^n f_i = \Delta\left(\Delta^{n-1} f_i\right), n = 1, 2, ...$$

Let $E_\circ$ be the set of sequences of real numbers $\{f_i\}_{i=0}^{\infty}$, where $f_k = 0, \;\; k = 0, 1, ..., n-1$, which is equivalent to the condition $\Delta^i f_0 = 0, \;\; i = 0, 1, ..., n-1$. Let us define a weight difference space on this set $E_\circ$.

A sequence of real numbers $\{\upsilon_i\}_{i=0}^{\infty}$ is called a weight sequence, if $\upsilon_i > 0, i \geq 0$. Let $n \geq 1$, $W_{p,\upsilon}^n$ be the set of all sequences from $E_\circ$, satisfying the condition

$$\|\Delta^n f\|_{p,\upsilon} = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \upsilon_i \, |\Delta^n f_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

and we define the norm of this set as follows:

$$\|f\|_{W_{p,\upsilon}^n} = \|\Delta^n f\|_{p,\upsilon}, \forall f \in W_{p,\upsilon}^n. \tag{1}$$

Then the pair $\left(W_{p,\upsilon}^n, \|f\|_{W_{p,\upsilon}^n}\right)$ forms a normalized space and let us call this space $W_{p,\upsilon}^n$ the weighted Sobolev difference space, which is complete.

Let's denote by $\overset{\circ}{E}$ the set of sequences from the set $E_\circ$, whose values become zero after a finite number of indices. From these definitions, it follows that $\overset{\circ}{E} \subset W_{p,\upsilon}^n$.

By $\overset{\circ}{W}{}^n{}_{p,\upsilon}$, we denote the closure of the set $\overset{\circ}{E}$ with respect to the norm (1) of the space $W_{p,\upsilon}^n$.

The main goal of the work is to study the relationship between spaces $W_{p,\upsilon}^n$ and $\overset{\circ}{W}{}^n{}_{p,\upsilon}$, that is, to determine under what conditions they coincide.

Theorem 1. *Let $1 < p < \infty$. In order for $\overset{\circ}{W}{}^n{}_{p,\upsilon} = W_{p,\upsilon}^n$ it is necessary and sufficient that the weight sequence $\{\upsilon_i\}_{i=0}^{\infty}$ satisfies the condition:*

$$\sum_{j=0}^{\infty} \upsilon_j^{1-p'} = \infty. \tag{2}$$

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP23488579).

Keywords: The weighted Sobolev difference space, weighted spaces, weight sequences, finite sequences, closure of the set.

2010 Mathematics Subject Classification: 46A45, 46B45

Fourier multipliers and their applications on the quantum Euclidean space

S. SHAIMARDAN

Institute of mathematics and mathematical modeling, Almaty, Kazakhstan

shaimardan.serik@mail.com

In this work, we present some applications of the L^p-L^q boundedness of Fourier multipliers to PDEs on the noncommutative (or quantum) Euclidean space. More precisely, we establish L^p-L^q norm estimates for solutions of heat equation with Caputo fractional derivative in the case $1 < p \leq 2 \leq q < \infty$. Moreover, we obtain the well-posedness of the nonlinear heat equation on the non-commutative Euclidean space.

Critical Hardy type identities and inequalities with multiple logarithmic weights

Y.Y. SHAIMERDENOV

SDU University, Almaty, Kazakhstan
Ghent University, Ghent, Belgium
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
yerkin.shaimerdenov@sdu.edu.kz

Consider the cylindrical extended weighted Hardy-type inequality as presented in [1]. Let

$$x = (x', x'') \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{n-N},$$

with $2 \leq N \leq n$ and $1 < p < N$. Then, for all $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{x' = 0\})$, the following inequality holds:

$$\left\| \frac{f}{|x'|^{\alpha/p}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{p}{N-\alpha} \left\| \frac{x' \cdot \nabla_N f}{|x'|^{\alpha/p}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

where $|x'|$ denotes the Euclidean norm in $\mathbb{R}^N$ and ∇_N is the standard gradient on $\mathbb{R}^N$. The constant $\frac{p}{N-\alpha}$ is optimal.

The critical case $\alpha = N$ of the above inequality was obtained in [2] in the form

$$\left\| \frac{f}{|x'|^{N/p}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq p \left\| \frac{x' \cdot \nabla_N f}{|x'|^{N/p}} \log|x'| \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \tag{1}$$

with the constant p being sharp.

In this presentation, we generalize (1) by introducing logarithmic weights on both sides of the inequality. In particular, our generalized inequality reduces to (1), and to the classical critical Hardy inequality with a logarithmic weight on the left-hand side. We also establish the optimal constant and derive an identity that demonstrates the non-attainability of the sharp constant. Moreover, we present higher-order versions that intriguingly involve Stirling numbers of the second kind (as in [2]) and a Caffarelli–Kohn–Nirenberg type inequality which implies an uncertainty-type principle.

This talk is based on joint research with Nurgissa Yessirkegenov (KIMEP University and Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Kazakhstan).

Funding: This research is funded by the Committee of Science of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP23490970).

Keywords: Cylindrical extension, Critical Hardy inequality, Stirling number.

2010 Mathematics Subject Classification: 22E30, 11B73, 26D10

References

[1] Kalaman M. Functional inequalities on Lie groups and applications., *Master's thesis, SDU University,* (2023).

[2] Ruzhansky M., Shaimerdenov Y., and Yessirkegenov N. Cylindrical extensions of critical Sobolev type inequalities and identities, *arXiv:2408.10697v1*, 2024.

On boundedness of the Calderón operator on Marcinkiewicz spaces

K.S. TULENOV

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

tulenov@math.kz

The Calderón operator has its origins in the work of Alberto Calderón in the 1950s, particularly in the study of singular integral operators and boundary value problems in mathematical physics. It was initially introduced in the context of Calderón's approach to the Cauchy integral and its role in solving elliptic partial differential equations. The operator plays a crucial role in Calderón's inversion method for electrical impedance tomography and is deeply connected to the theory of pseudodifferential operators. Its development laid the foundation for modern harmonic analysis, microlocal analysis, and the study of boundary layer potentials in PDEs.

In this work, we study boundedness of the Calderón operator in Marcinkiewicz spaces. Moreover, we characterize optimal range for the Calderón operator among Marcinkiewicz spaces. We also presend some applications of these results.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. BR20281002).

Keywords: Marcinkiewicz spaces, Calderón operator, fully symmetric space, optimal range.

2010 Mathematics Subject Classification: 46E30, 47B10, 46L51

On the boundedness of Multilinear Calderón-Zygmund operators on grand Herz-Hardy spaces

M.A. ZAIGHUM

Nazarbayev University, Astana, Kazakhstan.
Riphah International University, Islamabad, Pakistan.

zaighum.asad@nu.edu.kz

In this talk, the boundedness of multilinear Calderón-Zygmund operators on the product of grand Herz-Hardy spaces shall be presented. Formally, we will find the conditions for which the following inequality

$$\left\|T(\vec{f})\right\|_{\dot{K}^{\alpha,p),\theta}_{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \leq C\prod_{i=1}^{m}\|f_i\|_{H\dot{K}^{\alpha_i,p_i),\theta}_{q_i(\cdot)}(\mathbb{R}^n)},$$

holds, where C is a constant that does not dependent on $\vec{f}=(f_1,\cdots,f_m)$. The key idea used in the proof is the atomic decomposition of grand Herz–Hardy spaces, which was established in [1].

Funding: This research was funded by Nazarbayev University under Collaborative Research Program (Grant: 20122022CRP1601).

Keywords: Multilinear Operators, Calderon Zygmund Kernels, Grand Herz Hardy Spaces.

2010 Mathematics Subject Classification: 46E30, 42B20

References

[1] Shabbir, F., & Zaighum, M. A. On the Boundedness of Sublinear Operators on Grand Herz–Hardy Spaces with Variable Exponent, *Mediterranean Journal of Mathematics*, **21**:2, (2024), 51.

[2] Shabbir, F., & Zaighum, M. A. Multilinear Calderón-Zygmund operator on grand Herz-Hardy spaces, Preprint, (2025).

Refined General Weighted L^p Hardy and Caffarelli-Kohn-Nirenberg type Inequalities and Identities Related to Baouendi-Grushin vector fields

A.E. ZHANGIRBAYEV

SDU University, Kaskelen, Kazakhstan
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

amir.zhangirbayev@gmail.com

The study of inequalities involving the Baouendi-Grushin operator began with the work of N. Garofalo [1], who examined them within the L^2 space setting. Subsequently, L. D'Ambrosio [2, 3] extended the results to L^p spaces. Then, P. Niu, Y. Chen, and I. Han [4] explored different Hardy-type inequalities on the entire space, the pseudo-ball and the exterior region of the pseudo-ball using the Picone identity. More recently, I. Kombe and A. Yener [5] provided a significant advancement by identifying a sufficient criterion involving pairs of nonnegative weight functions, ensuring the validity of a generalized weighted Hardy-type inequality with an additional remainder term.

In the talk, we present refined general Hardy-type inequalities and identities with explicit remainder terms associated with Baouendi-Grushin vector fields, thereby improving most of the results above. In addition, we obtained the corresponding weighted Caffarelli-Kohn-Nirenberg type inequalities with remainder terms, which, as a result, allow us to derive the Heisenberg-Pauli-Weyl uncertainty type principles.

This talk is based on joint research with Nurgissa Yessirkegenov (KIMEP University and Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Kazakhstan).

Funding: This research is funded by the Committee of Science of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP23490970).

Keywords: Hardy inequalities, Baouendi-Grushin operator.

2020 Mathematics Subject Classification: 26D10, 35J70

References

[1] Garofalo N. Unique continuation for a class of elliptic operators which degenerate on a manifold of arbitrary codimension, *J. Differential Equations*, **104**:1 (1993), 117–146.

[2] D'Ambrosio L. Hardy inequalities related to Grushin type operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **132**:3 (2004), 725–734.

[3] D'Ambrosio L. Hardy-type inequalities related to degenerate elliptic differential operators, *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa. Cl. Sci.*, **4**:3 (2004), 451–486.

[4] Niu P., Chen Y. and Han Y. Some Hardy-type inequalities for the generalized Baouendi-Grushin operators, *Glasg. Math. J.*, **46**:3 (2004), 515–527.

[5] Kombe I., Yener A. General weighted Hardy type inequalities related to Baouendi-Grushin operators, *Complex Var. Elliptic Equ.*, **63**:3 (2018), 420–436.

2 Дифференциальные уравнения

Руководители:	профессор Асанова А.Т. академик НАН РК Садыбеков М.А.
Секретари:	профессор Бакирова Э.А. профессор Кадирбаева Ж.М.

Сингулярлы ауытқыған импульсті жүйе шешімінің асимптотикалық жіктелуі

Н. АВИЛТАЙ

[1]*әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қаласы, Қазақстан*
avyltaynauryzbay@gmail.com

Бұл жұмыста сингулярлы ауытқыған импульсті сызықты емес дифференциалдық теңдеулер үшін бастапқы есеп қарастырылады. Қарастырылып отырған жүйенің дифференциалдық теңдеуінен бөлек, импульсті бөлігіде сингулярлы ауытқыған. Жұмыста шекаралық функциялар әдісін қолданып, шешімнің асимптотикалық жуықтауын құру алгоритмі көрсетіледі.

Сингулярлық ауытқыған импульсті дифференциалдық теңдеулерді

$$\begin{aligned} \varepsilon z' &= F(z,y,\varepsilon), \quad \varepsilon\Delta z|_{t=\theta_i} = I(z,y,\varepsilon), \\ y' &= f(z,y), \qquad\quad \Delta y|_{t=\theta_i} = J(z,y) \end{aligned} \tag{1}$$

төмендегі бастапқы шартпен қарастырайық:

$$z(0,\varepsilon) = z^0, \quad y(0,\varepsilon) = y^0, \tag{2}$$

мұндағы ε оң кіші параметр, z, F және $I-$ m өлшемді функциялар, y, f және $J-$ are n өлшемді функциялар, z^0 және y^0- $\varepsilon-$нан тәуелсіз болсын, $\theta_{i}{}_{i=1}^{p}, 0 < \theta_1 < \theta_2 < ... < \theta_p < T-$ $(0,T)$ интервалындағы үзіліс моменттері. Ал $\Delta x|_{t=\theta_i} = x(\theta_i+) - x(\theta_i)$, мұндағы $x(\theta_i+) = \lim\limits_{t\to\theta_i+} x(t)$ және $x(\theta_i-) = x(\theta_i)$ болсын.

Теорема 1. *Айталық $(C1)-(C5)$ және $(C6)$ шарттары орындалсын. Егер $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ үшін төмендегі теңсіздікті қанағаттандыратын оң тұрақтылар ε_0 және c табылса, онда $[0,T]$ кесіндісінде (1),(2) есебінің шешімі бар және жалғыз болады:*

$$\begin{aligned} |z(t,\varepsilon) - Z_n(t,\varepsilon)| &\le c\varepsilon^{n+1}, \;\; 0 \le t \le T, \\ |y(t,\varepsilon) - Y_n(t,\varepsilon)| &\le c\varepsilon^{n+1}, \;\; 0 \le t \le T, \end{aligned}$$

мұндағы

$$\begin{aligned} Z_n(t,\varepsilon) &= \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k \tilde{z}_k(t) + \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k \omega_k^{(i)}(\tau_i), \\ Y_n(t,\varepsilon) &= \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k \tilde{y}_k(t) + \varepsilon \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k \nu_k^{(i)}(\tau_i), i = 1,2,...,p. \end{aligned}$$

Қаржыландыру: Бұл зерттеуді Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім Министрлігінің Ғылым комитеті (грант № AP23488301) қаржыландырады.

Кілтті сөздер: Импульстік жүйелер, сингулярлы импульстік дифференциалдық теңдеулер, шекаралық функциялар әдісі.

2010 Mathematics Subjecеnt Classification: 35B25, 35B40, 34A37

Әдебиет

[1] Aviltay N., Akhmet M., Zhamanshin A. . Asymptotic solutions of differential equations with singular impulses, *Carpathian Journal of Mathematics*, **40**:(3) (2024), 581—598.

[2] Akhmet M., Çağ S. Tikhonov theorem for differential equations with singular impulses, *Discontinuity, Nonlinearity, and Complexity*, **7**:(3) (2018), 291–303.

[3 Akhmet M., Çağ S. Chattering as a Singular Problem, *Nonlinear Dynamics*, **90**:(4) (2017), 2797–2812.

[4] Vasil'eva A. B., Butuzov V. F. *Asymptotic Expansion of Solutions of Singularly Perturbed Equations*, Nauka, Moscow, (1973) [in russian].

Комплекс коэффициентті төртінші ретті параболалық теңдеу үшін кері есептің шешімділігі

А.Б. ИМАНБЕТОВА

[1]*М. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан университеті, Шымкент, Қазақстан*

aselek_enu@mail.ru

Төртінші ретті бір өлшемді теңдеу үшін аралас кері есептің бар болуы және жалғыз болуы анықталады Бұл жұмыста комплекс мәнді коэффициенті бар төртінші ретті параболалық теңдеуі

$$u(x,t) + \frac{\partial^4}{\partial x^4}u(x,t) + q(x)u(x,t) = f(t), \quad (x,t) \in \Omega, \tag{1}$$

Дирихле шекаралық шарттарымен

$$u(-1,t) = 0, u(1,t) = 0, u_{xx}(-1,t) = 0, u_{xx}(1,t) = 0, \quad t \in [0,T] \tag{2}$$

және бастапқы шарттары $u(x,0) = \varphi$, $u(x,T) = \psi(x)$, $x \in [-1,1]$, мұндағы $\Omega = \{-1 < x < 1, 0 < t < T\}$, $\varphi(x)$ пен $\psi(x)$ жеткілікті тегіс функциялар және $q(x) = q_1(x) + iq_2(x)$ комплекс мәнді коэффициент. $C_{x,t}^{k,l}$ кеңістігі барлық $u(x,t)$ функциясының t бойынша l, x бойынша k ретті үзліссіз туындысынан тұрады.

Айталық $D(L_q)$ жиыны (2) шекаралық шартты қанағаттандыратын функциялардан тұрады $\varphi(x), \psi(x) \in C^4(-1,1) \cap C^3[-1,1]$.

Теорема. Айталық $q(x) \in C^4[-1,1]$ және $\varphi, \psi, L_q\varphi, L_q\psi \in D(L_q)$ болсын. Онда (1), (2) және бастапқы шарттары кері есебінің жалғыз шешімі келесі Фурье қатары түрінде жазамыз

$$u(x,t) = \varphi(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_k - \psi_k}{1 - e^{-\lambda_k T}}(e^{-\lambda_k t} - 1)X_k(x), \text{ және}$$

$$f(x) = L_q\varphi(x) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_k - \psi_k}{1 - e^{-\lambda_k T}}\lambda_k X_k(x).$$

Кілттік сөздер: Параболалық теңдеу, Рисс базисі.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

ӘДЕБИЕТ

[1] Imanbetova A., Sarsenbi A., Seilbekov B. Inverse problem for a fourth order hyperbolic equation with a complex-valued coefficient, *MDPI Mathematics*, 11 (15), 3432 (2023). https://doi.org/10.3390/math11153432

[2] Imanbetova A., Sarsenbi A.A, Seilbekov B. TInverse problems for the beam vibration equation with involution. *Vestnik Udmurtskogo Universiteta, Matematika, Mekhanika, Kompyuternye Nauki*, (2023) ; 33 (3): 452-466. https://doi.org/10.35634/vm230305

Кешігулі аргументі бар интегралдық-дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есепті параметрлеу әдісімен зерттеу

Н.Б. ИСКАКОВА[1], А. ЖАҚАН[2]

[1]*Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы, Қазақстан*
[2]*Әл-Фараби атындағы ҚазҰУ, Алматы, Қазақстан*

[1]narkesh77@gmail.com, [2]akhanat9191@gmail.com

Кешігулі аргументі бар интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйеге өткен оқиғалар немесе күйлердің ұзақ әсері тиетін салаларда кеңінен қолданылады. Олардың қолданысын сипаттайтын негізгі құбылыстар: экология және биологиядағы популяциялар динамикасы; экономика және қаржы жүйелері; Биологиялық және физиологиялық процестер; химиялық реакциялар және диффузия процестері; қоршаған орта процестері және климат модельдері; Электр тізбектері мен сигнал тасымалдау; материалтанудағы заттардың өсу және ыдырау процестері.

$(0,T)$ аралығында кешігулі аргументі бар интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін қосңүктелі шеттік есеп қарастырылады

$$\frac{dx\,(t)}{dt} = A\,(t)\,x\,(t) + \int_0^T \varphi\,(t)\,\psi\,(s)\,x\,(s-\tau)\,ds + f\,(t)\,, \quad t \in (0,T)\,, \quad x \in R^n, \tag{1}$$

$$x\,(t) = diag\,[x\,(0)] \cdot \phi\,(t)\,, \quad t \in [-\tau, 0]\,, \tag{2}$$

$$Bx\,(0) + Cx\,(T) = d, \quad d \in R^n, \tag{3}$$

мұндағы $(n \times n)$ −өлшемді матрица $A\,(t)$ және $n-$өлшемді вектор-функция $f\,(t)$ $(0,T)$ аралығында үзіліссіз, B және C – $(n \times n)$ өлшемді тұрақты матрицалар, $\phi\,(t)-$ бастапқы жиын $[-\tau, 0]$ да берілген үзіліссіз дифференциалданатын вектор-функция, сондай-ақ $\phi_i\,(0) = 1$, $i = 1, 2, ..., n$, $\tau > 0-$ тұрақты кешігулі аргумент.

Кейде кешігулі аргументі бар интегралдық-дифференциалдық теңдеулердің аналитикалық шешімдерін табу қиын, сондықтан біз олардың сандық шешімдерін табуға назар аударамыз. Осыған дейінгі көптеген жұмыстарда кешігулі аргументі бар интегралдық-дифференциалдық теңдеулердің сандық шешімдерін табудың әртүрлі әдістері қарастырылды. Олардың ішінде: коллокация әдістері, сплайн және спектрлік әдістер, Мюнц-Лежандр матрицалық әдісі, дифференциалдық түрлендіру әдісі, Чебышев көпмүшеліктері әдістерін ерекше атап өтуге болады.

Бұл жұмыста (1)-(3) шеттік есепті шешу үшін Джумабаев параметрлеу әдісі қолданылады. Параметрлеу әдісінің [1,2] идеяларына негізделе отырып, (1)-(3) шеттік есептің шешілімділігінің шарттары алынды және оның жуықталған шешімін табу алгоритмі құрылды.

Қаржыландыру: Бұл зерттеуді Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім Министрлігінің Ғылым комитеті (грант № AP23486114) қаржыландырады.

Кілтті сөздер: интегралдық-дифференциалдық теңдеулер, параметрлеу әдісі, алгоритм, кешігулі аргумент.

2010 Mathematics Subject Classification: 34B37, 65L06

Әдебиет

[1] Dzhumabayev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **29**:1 (1989), 34–46.

[2] D. Dzhumabayev, *A method for solving the linear boundary value problem for an integro-differential equations,* Comput. Math. Math. Phys. **50** (2010), 1150–1161.

Жүктелген функционалдық-айырымдылық теңдеу үшін сызықтық шеттік есептің шешімділігі

Н.Б. Искакова[1], А.Т. Орал[2]

[1]*Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы, Қазақстан*
[2]*Әл-Фараби атындағы ҚазҰУ, Алматы, Қазақстан*

[1]n.iskakova@math.kz, [2]aruzhanoral@gmail.com

Соңғы бірнеше жылда жүктелген дифференциалдық теңдеулермен сипатталатын мәселелерге үлкен қызығушылық танытылуда. Бұл теңдеулер қалдық әсерлері бар процестерді сипаттайды, мұнда белгілі бір уақыт мезетіндегі процестің күйі бүкіл процесс барысына әсер етуі мүмкін. Жүктелген дифференциалдық теңдеулер биология, экология және жерасты сұйықтықтарының динамикасы сияқты әртүрлі салаларда қолданылады.

$(0, T)$ аралығында кешігулі аргументі бар жүктелген дифференциалдық теңдеу үшін сызықтық шеттік есеп қарастырылады

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + B(t)x(t-\tau) + \sum_{j=1}^{N} K_j(t)x(\theta_j) + f(t), \quad t \in (0,T), \quad x \in \mathbf{R}^n, \tag{1}$$

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \tag{2}$$

$$C_1 x(0) + C_2 x(T) = d, \quad d \in \mathbf{R}^n, \tag{3}$$

мұндағы $(n \times n)-$ өлшемді матрицалар $A(t), B(t)$ және $n-$ өлшемді $f(t)$ вектор-функциясы $(0,T)$ аралығында үзіліссіз, $\varphi(t) : [-\tau, 0] \to \mathbf{R}^n$ - үзіліссіз дифференциалданатын вектор-функция, $C_1, C_2 - (n \times n)$ өлшемді тұрақты матрицалар, $\tau > 0$ - кешігулі аргумент және $N\tau = T$, $N-$натурал сан ; θ_j - жүк нүктелер және $\theta_{j+1} - \theta_j = \tau$, $j = \overline{1, N}$.

Бұл жұмыста кешігулі аргументі бар жүктелген дифференциалдық теңдеулер үшін екі нүктелі сызықтық шеттік есепті шешуге арналған тиімді сандық алгоритм ұсынылады. (1)-(3) есептің шешімділігін тағайындау үшін Джумабаев параметрлеу әдісі қолданылады. Бұл әдісті қолдану қарастырылып отырған есепті оңай шешілетін сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесіне және жәй дифференциалдық теңдеулер үшін Коши есебіне келтіреді.

Қаржыландыру: Бұл зерттеуді Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім Министрлігінің Ғылым комитеті (грант № AP23485618) қаржыландырады.

Кілтті сөздер: жүктелген функционалдық-айырымдылық теңдеу, сызықтық шеттік есептер, кешігулі аргумент, параметрлеу әдісі, алгоритм.

2010 Mathematics Subject Classification: 34B37, 65L06

Әдебиет

[1] Dzhumabayev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation, *Computational Mathematics and Mathematical Physics,* **29**:1 (1989), 34-46.

Төртінші ретті дифференциалдық теңдеудің корректілігі туралы

Е.Ө. Молдағали[1], Т.А. Алдомжарова[2]

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана, Қазақстан

[1]yerka2998@gmail.com, [2]aldomzharova01@gmail.com

Біз келесі төртінші ретті дифференциалдық теңдеуді қарастырамыз:

$$(p(x)(p(x)y')'')' - (r(x)y')' = F(x), \tag{1}$$

мұндағы

$$x \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty), \; r(x) > 0, \; p(x) > 0,$$

$p(x)$ — үш рет үзіліссіз дифференциалданатын, ал $r(x)$ — үзіліссіз дифференциалданатын функция. $F(x) \in L_2(\mathbb{R})$ деп ұйғарамыз. $C_0^{(4)}(\mathbb{R})$ төрт рет үзіліссіз дифференциалданатын және финитті функциялардың жиынында анықталған

$$L_0 y = (p(x)(p(x)y')'')' - (r(x)y')'$$

операторының $L_2(\mathbb{R})$ кеңістігі нормасында тұйықталуын L деп белгілейік. (1) теңдеуінің шешімі деп $Ly = F$ теңдігін қанағаттандыратын $y \in D(L)$ элементін атаймыз.

Біздің мақсатымыз — шешімнің бар болуы мен жалғыздығы туралы теореманы дәлелдеу. Сондай-ақ шешімнің және оның бірінші ретті туындысының салмақты нормасының бағасын алу.

Төртінші ретті дифференциалдық теңдеулер негізінен шектеулі облыста зерттелген. Компактылы емес облыс жағдайында жалпы түрдегі айнымалы коэффициенттері бар жоғары жұп ретті дифференциалдық теңдеулердің шешілу және регулярлық шарттарын М.А. Наймарк, А.Г. Костюченко, М.В. Федорюк, Р.С. Исмагилов, сондай-ақ М.Өтелбаев зерттеген. Бірақ бұл авторлар оң таңбалы кіші коэффициенті бар теңдеулерді қарастырды. Керісінше, (1) теңдеуінің кіші мүшесі жоқ, оған қолдануға жоғарыда аталған авторлардың әдістері жарамсыз. $p = 1$ жағдайында, r функцияларының кең класы үшін (1) теңдеуінің корректілігі [1] мақаласының нәтижелерінен шығады ([2] - ні де қараңыз). [3] жұмысында [1] мақаласының нәтижесі шенелген айнымалы жоғарғы коэффициентті теңдеуге жалпыланған.

Қаржыландыру: Бұл зерттеуді Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім Министрлігінің Ғылым комитеті (грант № AP23488049) қаржыландырады.

Кілтті сөздер: нұқсанды дифференциалдық теңдеу, күшті шешім, шенелмеген коэффициент, корректілік, шешімді бағалау.

2010 Mathematics Subject Classification: 34A30, 34B20, 34C11

Әдебиет

[1] Касымов Е.А., Отелбаев М. О существенной самосопряженности одного дифференциального оператора, *Известия АН Каз ССР. Серия физ. – мат.*, **1** (1979), 20–23.

[2] Eastham M.S.P. The limit-2 case of fourth-order differential equations , *Quart. J. Math. Oxford* , **22**:2 (1971), 131–4.

[3] Касымов Е.А. Достаточное условие самосопряженности дифференциального оператора, *Известия АН Каз ССР. Серия физ. – мат.*, **3** (1980), 40–44.

Сызықты емес теорияға негізделген бөрененің көлденең тербелісінің фундаментал жиілігінің қасиеті туралы

Д.Б. НҰРАХМЕТОВ

[1]*Астана халықаралық университеті, Астана, Қазақстан*
[1]*Математика және математикалық моделдеу институты, Алматы, Қазақстан*
nurakhmetov@math.kz

Механикалық жүйелердің көлденең тербелістерін неғұрлым дәлірек моделдеу үшін бөрененің қисықтығын сызықты емес бесінші ретке дейін алу маңыздылығы [1] жұмыста зерттелген. Ол жұмыста параметр бойынша жіктеу әдісі қолданылып, бөрененің көлденең тербелісінің фундаментал жиілігіне жуық аналитикалық формула табылған. Бұл кезде ұзындығы ℓ бөрененің көлденең тербелісі Эйлер–Бернулли теориясы бойынша келесі теңдеумен сипатталады:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\frac{3}{8}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^4\right)\right)+P\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+k\,w+\rho\,A\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0, \qquad (1)$$

мұндағы E деген бөрененің материалының серпімділік модулі, I деген бөрененің момент инерциясы, P деген сығушы күш, k деген серіппелі негіздің қатаңдығы, $w := w(x,t)$ деген бөрененің көлденең ығысуы, ρ деген бөрененің материалының тығыздығы, A деген бөрененің көлденең қимасының ауданы. Сондай-ақ, бөрене екі жақ шетінен топсалы бекітілген

$$w(0,t)=\left.\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x=0}=0,\ w(\ell,t)=\left.\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x=\ell}=0, \qquad (2)$$

және бөрененің бастапқы сәттегі қалпы бастапқы шарттармен сипатталады:

$$w(x,0) = v_1(x), \ \left.\frac{\partial\, w(x,t)}{\partial\, t}\right|_{t=0} = 0. \tag{3}$$

Бөрененің қисықтығы сызықты функциямен жуықталғанда ұзындығы ℓ-ге тең топсалы-топсалы бекітілген Эйлер-Бернулли бөренесінің меншікті жиіліктері мен меншікті функцияларының симметриялы эквиваленттік қасиеттері [2] жұмыста зерттелген. Ол жұмыста ұзындығы ℓ-ге тең топсалы-топсалы бекітілген бөрененің меншікті жиіліктерінің жиыны ұзындығы $\ell/2$-ге тең топсалы-сырғымалы және топсалы-топсалы екі қысқа бөрененің меншікті жиіліктерінің жиындарының бірігуінен тұратындығы дәлелденген. [1] жұмыста (1)-(3) бастапқы-шекаралық есептің меншікті жиілігіне амплитуданың әсері айқын көрсетілді. Сондықтан "[2] жұмыстың нәтижелері (1)-(3) бастапқы-шекаралық есептің меншікті жиіліктеріне сақталуы мүмкін бе?"деген сұрақ туындайды. Баяндамада осы зерттеу сұрағына қатысты кейбір нәтижелер баяндалатын болады.

Баяндаманы дайындау барысында ой-пікірлерін білдіргендері үшін қауымдастырылған профессор Джумабаев С.А. мен қауымдастырылған профессор Анияров А.А.-ға автор алғысын білдіреді.

Қаржыландыру: Бұл зерттеуді Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім Министрлігінің Ғылым комитеті (грант № AP19579114) қаржыландырады.

Кілтті сөздер: бөрене теңдеуі, сызықты емес теңдеу, меншікті жиілік, бастапқы және шекаралық шарттар.

2010 Mathematics Subject Classification: 35P30

Әдебиет

[1] Седиги Х.М., Ширази К.Х. Исследование поперечных колебаний балки на упругом основании на основе нелинейной теории пятого порядка с использованием точного выражения для кривизны балки, *Прикладная механика и техническая физика*, **55**:6 (2014), 3–45.

[2] Nurakhmetov D., Jumabayev S., Aniyarov A., Kussainov R. Symmetric Properties of Eigenvalues and Eigenfunctions of Uniform Beams, *Symmetry*, **12**, 2097 (2020), 1–13.

Бейлокал шеттік есептер үшін Ляпунов тектес теңсіздіктер

Г.Ә. РАМАЗАН

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан
Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы, Қазақстан

gulnazramazan@bk.ru

$$\begin{cases} y''(x) - \varepsilon y''(a+b-x) + q(x)y(x) = 0 \\ y(a) = y(b) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Бұл жұмыста екінші ретті инволюциясы бар (1) дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есеп қарастырылады. Қарастырылатын шеттік есеп үшін Ляпунов теңсіздігі алынады. Дәлелдеу барысында Гельдер және Соболев теңсіздігі қолданылады.

Теорема 1. *Берілген* (1) *шекаралық есебі* $q \in L^s(a,b)$ *үшін қандайда бір* $1 \le s \le \infty$ *болсын. Егер* y (1) *есептің тривиалды емес шешімі болса, онда* $1 < s < \infty$, *және* $q_+ \neq q$ *немесе* $q \ge 0$ (1) *есептің анықталу аймағына тиесілі болмаса, онда*

$$\left(\int_a^b q_+^s dx\right) > \frac{1+\varepsilon}{K(2s',2)^2(b-a)^{(2-1/s)}}, \tag{2}$$

мұндағы $s = 1$ үшін

$$\int_a^b q_+^s dx > \frac{4(1+\varepsilon)}{b-a}, \tag{3}$$

және $s = \infty$

$$\|q\|_\infty \geq \frac{\pi^2(1+\varepsilon)}{(b-a)^2} \tag{4}$$

q_+ тұрақты болған жағдайда ғана қатаң теңсіздік орындалады.

Кілтті сөздер: Ляпунов тектес теңсіздіктер, Соболев теңсіздігі, Гельдер теңсіздігі шеттік есептер.

Төрт өлшемді гипергеометриялық функция үшін сызықты-тәуелсіз шешімдер

А.Р. РЫСҚАН[1], А.Е. АМАНГЕЛЬДЫ[2], Б.Қ. АБДРАХМАН[3]

[1,2,3]*Абай атындағы қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы, Қазақстан*

[1]ainur-ryskan@mail.ru, [2]ayajanjan1234@gmail.com, [3]balnura.abdrakhman@mail.ru

Бұл зерттеу жұмысы төрт айнымалы гипергеометриялық $F_{17}^{(4)}$ функциясы үшін екінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесін шешуге арналған. Жүйенің сегіз сызықты тәуелсіз шешімдері айқын түрде анықталған.

Қолданбалы есептерді шешу үшін – физикалық процестермен байланысты математикалық модельдерді құру және нәтижелерді болжау үшін көп айнымалы гипергеометриялық функцияларының қасиеттері үздіксіз зерттеліп келеді.

Физикалық процестердің математикалық модельдері, әдетте, қарапайым дифференциалдық теңдеулерді, дербес туындылы дифференциалдық теңдеулерді немесе теңдеулер жүйелерін қамтиды. Алайда, нақты процестерді сипаттайтын теңдеулердің тек кейбіреулері ғана элементар функциялар класында шешілуі мүмкін. Жаңа функциялар әдетте дифференциалдық теңдеулердің немесе олардың жүйелерінің шешімі ретінде анықталды және олар арнайы немесе трансценденттік функциялар деп аталды. Осылайша, Бессель функциялары, Эрмит функциялары, Гаусстың гипергеометриялық функциясы пайда болды. [1].

Кванттық химия есептерін шешу қажеттілігі [2],[3] сонымен қатар газ динамикасының көптеген есептері бір және бірнеше айнымалысы бар арнайы функциялар теориясының дамуына түрткі болды. Газ динамикасының есептері бірнеше айнымалысы бар гипергеометриялық функцияларын қолдану арқылы өрнектелетін екінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулерді шешуге әкеледі [4]. Сондықтан осы теңдеулер үшін шеттік есептерді зерттеу кезінде гипергеометриялық функциялар жүйесінің шешімін зерттеп, айқын сызықтық тәуелсіз шешімдерді табуымыз қажет [5],[6],[7]. Экстон $K_1 - K_{21}$ класындағы төрт айнымалы 21 гипергеометриялық функциясын енгізді, кейінірек Шарма мен Парихар [8] әртүрлі параметрлері бар төрт айнымалысы бар 83 гипергеометриялық функцияны енгізді.

Бұл жұмыстың мақсаты $F_{17}^{(4)}$ функциясы үшін айқын жазылған теңдеулер жүйесінің сызықтық тәуелсіз шешімдерін табу болып табылады.

Гипергеометриялық $F_{17}^{(4)}$ функциясын қарастырайық

$$F_{17}^{(4)}(a_1, a_2, b_1, b_2; c_1, c_2, c_3; x, y, z, t) = \sum_{m,n,p,q=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{m+n+p}(a_2)_q(b_1)_{m+n+q}(b_2)_p}{(c_1)_{m+p}(c_2)_n(c_3)_q} \frac{x^m y^n z^p t^q}{m!n!p!q!} \tag{1}$$

мұндағы $c \neq 0, -1, -2, -3, \ldots$, $i = 1, \ldots, 3$.

Көп айнымалы гипергеометриялық функциялар теориясына және олардың қасиеттеріне сәйкес [1] гипергеометриялық функция үшін (1) дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесін келесі түрде жазуға болады:

$$\begin{gathered}\left(c_1+x\frac{\partial}{\partial x}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(x\frac{\partial}{\partial x}+1\right)x^{-1}u-\left(a_1+x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(b_1+x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)u=0,\\ \left(c_2+y\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(y\frac{\partial}{\partial y}+1\right)y^{-1}u-\left(a_1+x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(b_1+x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)u=0,\\ \left(c_1+x\frac{\partial}{\partial x}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(z\frac{\partial}{\partial z}+1\right)z^{-1}u-\left(a_1+x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(b_2+z\frac{\partial}{\partial z}+t\frac{\partial}{\partial t}\right)u=0,\\ \left(c_3+t\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(t\frac{\partial}{\partial t}+1\right)t^{-1}u-\left(a_2+t\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(b_2+z\frac{\partial}{\partial z}+t\frac{\partial}{\partial t}\right)u=0.\end{gathered}\tag{2}$$

Мұндағы

$$u(x,y,z,t)=F_{17}^{(4)}(a_1,a_2,b_1,b_2;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t)\tag{3}$$

Алгебралық амалдармен қарапайым есептеулерді орындай отырып, келесі екінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\begin{cases}x(1-x)u_{xx}-2xyu_{xy}+z(1-x)u_{xz}-y^2u_{yy}-yzu_{yz}+\\ \qquad +[c_1-(a_1+b_1+1)x]u_x-(a_1+b_1+1)yu_y-b_1zu_z-a_1b_1u=0,\\ y(1-y)u_{yy}-x^2u_{xx}-2xyu_{xy}-xzu_{xz}-yzu_{yz}-\\ \qquad -(a1+b1+1)xu_x+[c_2-(a_1+b_1+1)y]u_y-b_1zu_z-a_1b_1u=0,\\ z(1-z)u_{zz}+x(1-z)u_{xz}-xtu_{xt}-yzu_{yz}-ytu_{yt}-ztu_{zt}-b_2xu_x-b_2yu_y+\\ \qquad +[c_1-(a_1+b_2+1)z]u_z-a_1tu_t-a_1b_2u=0,\\ t(1-t)u_{tt}-ztu_{zt}-a_2zu_z+[c_3-(a_2+b_2+1)t]u_t-a_2b_2u=0.\end{cases}\tag{4}$$

Айта кету керек, (4) жүйесінің үш теңдеуі сызықты тәуелді болады, өйткені $F_{17}^{(4)}$ (4) жүйені қанағаттандырады. Сызықтық тәуелсіз шешімдерді келесі түрде іздейміз:

$$u=x^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma}t^{\delta}w\tag{5}$$

Мұндағы w — белгісіз функция, ал $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ анықталатын тұрақтылар. (5) өрнегін (4) жүйедегі u-дың орнына қойып, дифференциалдық теңдеулердің келесі жүйесін аламыз:

$$\begin{cases}x(1-x)w_{xx}-2xyw_{xy}+(1-x)zw_x-y^2w_{yy}-yzw_{yz}+[C_1-(A_1+B_1+1)x]w_x-\\ \qquad -(A_1+B_1+1)w_y-[\alpha x^{-1}-B_1]zw_z+[\alpha(c_1+\alpha+\gamma-1)x^{-1}-A_1B_1]w=0,\\ y(1-y)w_{yy}-x^2w_{xx}-2xyw_{xy}-xzw_{xz}-yzw_{yz}-(A_1+B_1+1)xw_x\\ \qquad +[C_2-(A_1+B_1+1)y]w_y-B_1zw_z+[\beta(c_2+\beta-1)y^{-1}-A_1B_1]w=0,\\ z(1-z)w_{zz}+x(1-z)w_{xz}-xtw_{xt}-yzw_{yz}-ytw_{yt}-ztw_{zt}-B_2xw_x-B_2yw_y\\ \qquad +[C_1-(A_1+B_2+1)z]w_z-A_1tw_t+[\gamma(c_1+\gamma-1)z^{-1}-A_1B_2]w=0,\\ t(1-t)w_{tt}-ztw_{zt}-A_2w_z+[C_3-(A_2+B_2+1)t]w_t+[\delta(c_3+\delta-1)t^{-1}-A_2B_2]w=0.\end{cases}\tag{6}$$

Мұндағы

$$A_4=\alpha+\beta+\gamma+a_1,\quad A_2=\delta+a_2,\quad B_1=\alpha+\beta+b_1,\quad B_2=\gamma+\delta+b_2,$$

$$C_1 = c_1 + 2\alpha + \gamma, \quad C_1 = c_1 + 2\gamma, \quad C_2 = c_2 + 2\beta, \quad C_3 = c_3 + 2\delta.$$

(6) жүйе (4) жүйемен сәйкес келеді, егер келесі шарттар орындалса:

$$\begin{cases} \gamma = 0, \\ \alpha(c_1 + \alpha + \gamma - 1) = 0, \\ \beta(c_2 + \beta - 1) = 0, \\ \gamma(c_1 + \gamma - 1) = 0, \\ \delta(c_3 + \delta - 1) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

жүйесінің шешімдерін сегіз комбинация түрінде жазуға болады:

	1	2	3	4	5	6	7	8
α	0	$1-c_1$	0	0	$1-c_1$	$1-c_1$	0	$1-c_1$
β	0	0	$1-c_2$	0	$1-c_2$	$1-c_2$	$1-c_2$	$1-c_2$
γ	0	0	0	0	0	0	0	0
δ	0	0	0	$1-c_3$	0	$1-c_3$	$1-c_3$	$1-c_3$

Осылайша, жүйенің шешімдерін (5)-ке қойып, біз келесі гипергеометриялық функциялар түріндегі төрт айнымалы екінші ретті (4) дифференциалдық теңдеулер жүйесінің сызықтық тәуелсіз шешімдерін аламыз:

$$u_1(x,y,z,t) = F_{17}^{(4)}(a_1,a_2,b_1,b_2;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t) = \\ = \sum_{m,n,p,q=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{m+n+p}(a_2)_q(b_1)_{m+n}(b_2)_{p+q}x^m y^n z^p t^q}{(c_1)_{m+p}(c_2)_n(c_3)_q\, m!\, n!\, p!\, q!} \tag{8}$$

$$u_2(x,y,z,t) = x^{1-c_1}F_{17}^{(4)}(a_1+1-c_1,a_2,b_1+1-c_1,b_2;2-c_1,c_2,c_3;x,y,z,t) = \\ = x^{1-c_1}\sum_{m,n,p,q=0}^{\infty} \frac{(a_1+1-c_1)_{m+n+p}(a_2)_q(b_1+1-c_1)_{m+n}(b_2)_{p+q}x^m y^n z^p t^q}{(2-c_1)_{m+p}(c_2)_n(c_3)_q\, m!\, n!\, p!\, q!} \tag{9}$$

$$u_3(x,y,z,t) = y^{1-c_2}F_{17}^{(4)}(a_1+1-c_2,a_2,b_1+1-c_2,b_2;c_1,2-c_2,c_3;x,y,z,t) = \\ = y^{1-c_2}\sum_{m,n,p,q=0}^{\infty} \frac{(a_1+1-c_2)_{m+n+p}(a_2)_q(b_1+1-c_2)_{m+n}(b_2)_{p+q}x^m y^n z^p t^q}{(c_1)_{m+p}(2-c_2)_n(c_3)_q\, m!\, n!\, p!\, q!} \tag{10}$$

$$u_4(x,y,z,t) = t^{1-c_3}F_{17}^{(4)}(a_1,a_2+1-c_3,b_1,b_2+1-c_3;c_1,c_2,2-c_3;x,y,z,t) = \\ = t^{1-c_3}\sum_{m,n,p,q=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{m+n+p}(a_2+1-c_3)_q(b_1)_{m+n}(b_2+1-c_3)_{p+q}x^m y^n z^p t^q}{(c_1)_{m+p}(c_2)_n(2-c_3)_q\, m!\, n!\, p!\, q!} \tag{11}$$

$$u_5(x,y,z,t) = x^{1-c_1}y^{1-c_2}F_{17}^{(4)}(a_1+2-c_1-c_2,a_2,b_1+2-c_1-c_2,b_2;2-c_1,2-c_2,c_3;x,y,z,t) = \\ = x^{1-c_1}y^{1-c_2}\sum_{m,n,p,q=0}^{\infty} \frac{(a_1+2-c_1-c_2)_{m+n+p}(a_2)_q(b_1+2-c_1-c_2)_{m+n}(b_2)_{p+q}x^m y^n z^p t^q}{(2-c_1)_{m+p}(2-c_2)_n(c_3)_q\, m!\, n!\, p!\, q!} \tag{12}$$

$$u_6(x,y,z,t)=x^{1-c_1}t^{1-c_3}F_{17}^{(4)}(a_1{+}1{-}c_1,a_2{+}1{-}c_3,b_1{+}1{-}c_1,b_2{+}1{-}c_3;2{-}c_1,c_2,2{-}c_3;x,y,z,t)=$$
$$=x^{1-c_1}t^{1-c_3}\sum_{m,n,p,q=0}^{\infty}\frac{(a_1+1-c_1)_{m+n+p}(a_2+1-c_3)_q(b_1+1-c_1)_{m+n}(b_2+1-c_3)_{p+q}x^my^nz^pt^q}{(2-c_1)_{m+p}(c_2)_n(2-c_3)_q\,m!\,n!\,p!\,q!} \tag{13}$$

$$u_7(x,y,z,t)=y^{1-c_2}t^{1-c_3}F_{17}^{(4)}(a_1{+}1{-}c_2,a_2{+}1{-}c_3,b_1{+}1{-}c_2,b_2{+}1{-}c_3;c_1,2{-}c_2,2{-}c_3;x,y,z,t)$$
$$=y^{1-c_2}t^{1-c_3}\sum_{m,n,p,q=0}^{\infty}\frac{(a_1+1-c_2)_{m+n+p}(a_2+1-c_3)_q(b_1+1-c_2)_{m+n}(b_2+1-c_3)_{p+q}x^my^nz^pt^q}{(c_1)_{m+p}(2-c_2)_n(2-c_3)_q\,m!\,n!\,p!\,q!} \tag{14}$$

$$u_8(x,y,z,t)=$$
$$=x^{1-c_1}y^{1-c_2}t^{1-c_3}F_{17}^{(4)}(a_1{+}2{-}c_1{-}c_2,a_2{+}1{-}c_3,b_1{+}2{-}c_1{-}c_2,b_2{+}1{-}c_3;2{-}c_1,2{-}c_2,2{-}c_3;x,y,z,t)=$$
$$=x^{1-c_1}y^{1-c_2}t^{1-c_3}\times$$
$$\times\sum_{m,n,p,q=0}^{\infty}\frac{(a_1+2-c_1-c_2)_{m+n+p}(a_2+1-c_3)_q(b_1+2-c_1-c_2)_{m+n}(b_2+1-c_3)_{p+q}x^my^nz^pt^q}{(2-c_1)_{m+p}(2-c_2)_n(2-c_3)_q\,m!\,n!\,p!\,q!} \tag{15}$$

Қорытынды

Бұл жұмыста төрт айнымалы гипергеометриялық $F_{17}^{(4)}$ функциясы үшін екінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесінің шешімі қарастырылды. Жүйенің сегіз сызықты тәуелсіз шешімі аналитикалық түрде алынды.

Кілтті сөздер: төрт айнымалы гипергеометриялық функция, екінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеу, жүйенің сызықтық тәуелсіз шешімдері.

Әдебиет

[1] Appell P., Kampe de Fériet J. *Fonctions Hypergéométriques Hypersphériques.* Gauthier-Villars, Paris, 1926, 440 p.

[2] Niukkanen A. W. Generalised hypergeometric series NF(x1, ..., xN) arising in physical and quantum chemical applications // J. Phys. A: Math., Gen. N. 16, 1983, pp. 1813-1825.

[3] Srivastava H.M. A class of generalised multiple hypergeometric series arising in physical and quantum chemical applications // J. Phys. A: Math. Gen. V. 18, 1985, pp. 227-234.

[4] Франкль Ф.И. *Избранные труды по газовой динамике*, Наука, Москва, 1973.

[5] Bin-Saad M.G., Hasanov A. Linear Independent Solutions and Operational Representations for Hypergeometric Functions of Four Variables, // Hindawi Publishing Corporation, Chinese Journal of Mathematics, V.2014, (Article ID 273064), 6 p., 2014.

[6] Hasanov A. Fundamental solutions for degenerated elliptic equation with two perpendicular lines of degeneration // International Journal of Applied Mathematics and Statistics, V. 13, N. 8, 2008, pp. 41-49.

[7] Salakhtdinov M.S., Hasanov A. A solution of the Neumann-Dirichlet boundary value problem for generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation // Complex Variables and Elliptic Equations, V. 53, N. 4, 2008, pp. 355-364.

[8] Sharma C., Parihar C.L. Hypergeometric functions of four variables // Indian Academy of Mathematics, V. 11, 1989, pp. 121-133.

ТӨРТ АЙНЫМАЛЫ ГИПЕРГЕОМЕТРИЯЛЫҚ $F_{15}^{(4)}$ ФУНКЦИЯСЫ ҮШІН ЕКІНШІ РЕТТІ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ЖҮЙЕСІН ШЕШУ

А.Р. РЫСҚАН[1], Ұ.Е. МАХАМБЕТИЯРОВА[2]

Абай атындағы Қазақ Ұлттық педагогикалық университеті, Алматы, Қазақстан

[1]uldana.m@kazstroymonolit.kz, [2]ainur-ryskan@mail.ru

Бұл мақала барысында төрт айнымалы гипергеометриялық функциясы үшін, яғни, $F_{15}^{(4)}$ үшін дербес туындылы екінші ретті дифференциалдық теңдеулер жүйесінің шешімі ретінде қарастырамыз.

Гипергеометриялық функциялар теориялық және қолданбалы математиканың функциялары ішінде маңызды рөл атқарады. Қазіргі таңда көп айнымалы гипергеометриялық функцияларды сипаттаудың әдістері жеткілікті. Бұл функциялар белгілі бір дәрежелік қатарлардың қосындысы түрінде [1], дифференциалдық теңдеулер жүйесінің шешімі ретінде [2], Эйлер типіндегі интегралдар[3] немесе Меллин-Барнс [4] интегралдары арқылы анықталуы мүмкін. Осы есепті шығару барысында біз гипергеометриялық функцияны дифференциалдық теңдеулер жүйесінің шешімі ретінде қарастырамыз.

Гипергеометриялық функцияны қарастырайық [5]:

$$F_{15}^{(4)}(a_1,a_2,a_3,b;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t)=\sum_{m,n,p,q=0}^{\infty}\frac{(a_1)m+n+p(a_2)q(a_3)m+n+p+q}{(c_1)m+p(c_2)n(c_3)q}$$
$$\times x^m y^n z^p t^q \frac{1}{m!n!p!q!} \tag{1}$$

$$\text{мұндағы } c_i\neq 0,-1,-2,-3,\ldots,\ \text{ және } i=1,2,3.$$

Гипергеометриялық функциялар [6],[7],[8] теориясынан белгілі болғандай, $F_{15}^{(4)}$ функциясы екінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесін қанағаттандырады:

$$\begin{cases} x(1-x)u_{xx}-2xyu_{xy}-xzu_{xz}-xtu_{xt}+zu_{xz}-y^2u_{yy}-yzu_{yz}-ytu_{yt}-ztu_{zt}\\ \quad+(c_1-(a_1+b_1+1)x)u_x+(a_1+b_1+1)yu_y-a_1tu_t-b_1zu_z-a_1b_1u=0,\\ y(1-y)u_{yy}-2xyu_{xy}-x^2u_{xx}-xzu_{xz}-xtu_{xt}-ytu_{yt}-yzu_{yz}-ztu_{zt}\\ \quad-(a_1+b_1+1)xu_x+(c_2-(a_1+b_1+1))yu_y-a_1tu_t-b_1zu_z-a_1b_1u=0,\\ z(1-z)u_{zz}-xzu_{xz}-yzu_{yz}+xu_{xz}+(c_1-(a_1+b_2+1)z)u_z\\ \quad-b_2xu_x-b_2yu_y-a_1b_2u=0,\\ t(1-t)u_{tt}-xtu_{xt}-ytu_{yt}+(c_3-(a_2+b_1+1)t)u_t-a_2xu_x-a_2yu_y-a_2b_1u=0. \end{cases} \tag{2}$$

$$\text{мұндағы: } u=F_{15}^{(4)}(a_1,a_2,a_3,b_1,b_2;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t)$$

Жүйенің шешімін келесі түрде іздейміз:

$$u=x^\alpha y^\beta z^\gamma t^\delta \omega \tag{3}$$

мұнда w – белгісіз функция, $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ – анықталуы қажет тұрақтылар. $x^\alpha y^\beta z^\gamma t^\delta w$-ды (2) теңдеуге қойғанда, дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\begin{cases} x(1-x)\omega_{xx} - 2xy\omega_{xy} - xt\omega_{xt} - z(x-1)\omega_{xz} + t\omega_{xt} - y^2\omega_{yy} - yz\omega_{yz} - yt\omega_{yt} - zt\omega_{zt} \\ +[C_1 - (A_1 + B_1 + 1)x]\omega_x + (A_1 + B_1 + 1)y\omega_y - (B_1 - \alpha x^{-1})z\omega_z + A_1\omega_t \\ +(\alpha(\alpha + \gamma + c_1 - 1)x^{-1} - A_1B_1)\omega = 0, \\ y(1-y)\omega_{yy} - x^2\omega_{xx} - 2xy\omega_{xy} - xz\omega_{xz} - xt\omega_{xt} - yz\omega_{yz} - yt\omega_{yt} - zt\omega_{zt} \\ +[C_2 - (A_1 + B_1 + 1)]y\omega_y - (A_1 + B_1 + 1)x\omega_x - B_1z\omega_z - A_1\omega_t \\ +(\beta(C_2 + \beta - 1)y^{-1} - A_1B_1)\omega = 0, \\ z(1-z)\omega_{zz} - x(z-1)\omega_{xz} - yz\omega_{yz} + [C_1 - (A_1 + B_2 + 1)z]\omega_z - (B_2 - \gamma z^{-1})x\omega_x - B_2y\omega_y \\ +(\gamma(\gamma + \alpha + C_1 - 1)z^{-1} - A_1B_2)\omega = 0, \\ t(1-t)\omega_{tt} - xt\omega_{xt} - yt\omega_{yt} + [C_3 - (A_2 + B_1 + 1)t]\omega_t - A_2x\omega_x - A_2y\omega_y \\ +(\delta(C_3 + \delta - 1)t^{-1} - B_1A_2)\omega = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Мұндағы:

$$\begin{aligned} &\alpha + \beta + \gamma + a_1 = A_1, & \delta + a_2 = A_2, \\ &\alpha + \beta + \delta + b_1 = B_1, & \gamma + b_2 = B_2, \\ &c_1 + 2\alpha + \gamma = C_1, & c_1 + \alpha + 2\gamma = C_1, \\ &2\beta + c_2 = C_2, & 2\delta + c_3 = C_3, \\ &A_1B_1 = (\alpha + \beta + \gamma + a_1)(\alpha + \beta + \delta + b_1), & \\ &A_1B_2 = (\alpha + \beta + \gamma + a_1)(\gamma + b_2), & B_1A_2 = (\delta + a_2)(\alpha + \beta + \delta + b_1). \end{aligned} \tag{5}$$

(2) және (4) жүйелер келесі шарттар орындалғанда баламалы болып шығады:

$$\begin{cases} \alpha = 0, \quad \gamma = 0, \\ \alpha(c_1 + \alpha + \gamma - 1) = 0, \\ \beta(c_2 + \beta - 1) = 0, \\ \gamma(c_1 + \alpha + \gamma - 1) = 0, \\ \delta(c_3 + \delta - 1) = 0. \end{cases} \tag{6}$$

(6) жүйенің шешімдері төрт комбинация түрінде жазылуы мүмкін:

	1	2	3	4
α	0	0	0	0
β	0	$1-c_2$	0	$1-c_2$
γ	0	0	0	0
δ	0	0	$1-c_3$	$1-c_3$

(7)

Осылайша,(7) жүйенің шешімдерін (3) жүйеге қою арқылы, екінші ретті төрт айнымалысы бар дифференциалдық [9] теңдеулер жүйесінің сызықтық тәуелсіз шешімдерін келесі төрт гипергеометриялық функция түрінде аламыз:

$$u_1(x,y,z,t) = F_{15}^{(4)}(a_1, a_2, a_3, b; c_1, c_2, c_3; x, y, z, t) \tag{8}$$

$$u_2(x,y,z,t) = y^{1-c_2}F_{15}^{(4)}(a_1 + 1 - c_2, a_2, a_3, b + 1 - c_2; c_1, 2 - c_2, c_3; x, y, z, t) \tag{9}$$

$$u_3(x,y,z,t) = t^{1-c_3}F_{15}^{(4)}(a_1, a_2, a_3 + 1 - c_3, b + 1 - c_3; c_1, c_2, 2 - c_3; x, y, z, t) \tag{10}$$

$$u_4(x,y,z,t) = y^{1-c_2}t^{1-c_3}F^{(4)}_{15}(a_1+1-c_2, a_2, a_3+1-c_3, b+2-c_2-c_3; c_1, 2-c_2, 2-c_3; x,y,z,t) \tag{11}$$

Кілтті сөздер: көп айнымалы гипергеометриялық функциялар, дифференциалдық теңдеулер, екінші ретті дифференциалдық теңдеу, гипергеометриялық қатар әдісі, аналитикалық шешімдер, рекурренттік қатынастар, сызықтық тәуелсіз шешімдер.

Әдебиет

[1] Гельфанд, И.М., Граев, М.И., Ретах, В.С. *Гипергеометрическое уравнение Гаусса и описание его решений в виде рядов и интегралов* / И. М. Гельфанд, М. И. Граев, В. С. Ретах // ДАН. Т. 331. 1993. – Б. 140-143.

[2] Гельфанд, И.М., Зелевинский, А.В., Капранов, М.М. *Гипергеометрические функции и торические многообразия* / И. М. Гельфанд, А. В. Зелевинский, М. М. Капранов // Функциональный анализ и его приложения. Т. 23. – Вып. 2. 1989. – Б. 12-26.

[3] Gelfand, I. M., Kapranov, M. M., Zelevinsky, A.V. *Generalized Euler integrals and A-hypergeometric functions* / I. M. Gelfand, M. M. Kapranov and A. V. Zelevinsky // Adv. Math. – Vol. 84. 1990. – Б. 255-271.

[4] Passare, M., Tsikh, A., Zhdanov, O. *A multidimensional Jordan residue lemma with an application to Mellin-Barnes integrals* / M. Passare, A. Tsikh and O. Zhdanov // Aspects Math. E. 26. 1994. – Б. 233-241.

[5] Sharma, C., Parihar, C.L. *Hypergeometric functions of four variables* / C. Sharma, C. L. Parihar // Indian Academy of Mathematics, – Vol. 11, 1989. – Б. 121-133.

[6] Appell, P., Kampe de F'eriet, J. *Fonctions Hypergeometriques et Hyperspheeriques* / P. Appell, J. Kampe de Feeriet. – Paris.: Gauthier-Villars, 1926. – 440 б.

[7] Erdelyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F., Tricomi, F.G. *Higher Transcendental Functions* / A. Erdelyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F.G. Tricomi. – New York, Toronto and London: V. I. Mc Graw Hill, 1953.

[8] Exton, H. *Multiple Hypergeometric Functions and Applications* / H. Exton. – London.: Halsted Press, 1976.

[9] Bin-Saad, M.G., Hasanov, A. *Linear Independent Solutions and Operational Representations for Hypergeometric Functions of Four Variables* / M. G. Bin-Saad, A. Hasanov // Hindawi Publishing Corporation, Chinese Journal of Mathematics, – Vol.2014, (Article ID 273064), 6 б., 2014. http://dx.doi.org/10.1155/2014/273064.

Локал/бейлокал оператор қатысқан жартылайсызықты жылутаралу теңдеулері үшін Фуджита тектес критикалық көрсеткіштер

Б.Т. ТӨРЕБЕК

[1]*Математика және математикалық моделдеу иституты, Алматы, Қазақстан*

torebek@math.kz

Бұл жұмыс
$$u_t + \mathcal{L}_{a,b}u = |u|^p + f(x),\, t > 0,\, x \in \mathbb{R}^d,$$
жартылай сызықтық жылу теңдеуінің $f(x) = 0$ және $f(x) \neq 0$ жағдайларындағы Фуджита тектес критикалық көрсеткіштерін зерттейді. Мұндағы $\mathcal{L}_{a,b}$ аралас локал-бейлокал операторы
$$\mathcal{L}_{a,b} = -a\Delta + b(-\Delta)^s,\, a,\, b \in \mathbb{R}_+,\, s \in (0,1),$$
Лаплас операторын Δ және бөлшек ретті Лаплас операторын $(-\Delta)^s$ қамтиды. Есептің глобал шешімдерінің бар болуы немесе болмауын зерттеу арқылы Фуджита тектес критикалық

көрсеткішті анықтаймыз. Бір қызығы, критикалық көрсеткіш оператордың бейлокал бөлігінің дәрежесіне тәуелді болады және нәтижесінде бөлшек ретті Лаплас қатысқан есептің критикалық көрсеткішімен сәйкес келеді.

$f(x) = 0$ жағдайда біздің нәтижелеріміз Биаджи және т.б. [Bull. London Math. Soc. 57 (2025), 265–284] және Дель Пеццо және т.б. [Nonlinear Analysis 255 (2025), 113761] жұмыстардың нәтижелерін жақсартады. $f(x) \neq 0$ жағдайда, біздің нәтижелер Ванг және т.б. [J. Math. Anal. Appl., 488 (1) (2020), 124067] және Маджуб [La Matematica, 2 (2023), 340–361] жұмыстарын толықтырады.

Қаржыландыру: Бұл зерттеуді Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім Министрлігінің Ғылым комитеті (грант № BR20281002) қаржыландырады.

Кілтті сөздер: жылутаралу теңдеуі, критикалық көрсеткіш, локал шешім, глобал шешім.

2010 Mathematics Subject Classification: 35K58, 35B33, 35A01, 35B44

Критерий однозначной разрешимости спектральных задач Трикоми для одного класса многомерных гиперболо-эллиптических уравнений

С.А. АЛДАШЕВ

[1]*Институт математики и математического моделирования,КН МНВО РК,*

aldash51@mail.com

Двумерные спектральные задачи для уравнений гиперболо-эллиптического типа хорошо изучены, однако, их многомерные аналоги мало исследованы.

В работе установлен критерий однозначной разрешимости спектральных задач Трикоми для одного класса многомерных гиперболо-эллиптических уравнений. Найдены собственные значения и соответствующие им собственные функции этих задач.

Пусть Ω_ε– конечная область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1, ..., x_m)$, ограниченная при $t > 0$ сферической поверхностью $\Gamma : |x|^2 + t^2 = 1$, а при $t < 0$ конусами $K_\varepsilon : |x| = -t + \varepsilon$, $K_1 : |x| = 1 + t$, $\frac{\varepsilon-1}{2} \leq t \leq 0$, где $|x|$– длина ветора $(x_1, ..., x_m$, а $0 \leq \varepsilon < 1$.

Обозначим через Ω^+ и Ω_ε^- части области Ω_ε, лежащие в полупространствах $t > 0$ и $t < 0$. Часть конусов K_ε, K_1, ограничивающих области Ω_ε^-, обозначим через S_ε, S_1 соответственно.

В области Ω_ε рассмотрим многомерные гиперболо-элиптическкие уравнения со спектральным действительным параметром μ

$$\Delta_x u + (sgnt)u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(x,t)u_{x_i} + b(x,t)u_t + c(x,t)u = \mu u, \tag{1}$$

где Δ_x - оператор Лапласа по переменным $x_1, ..., x_m$, $m \geq 2$.

Рассмотрим следующие спектральные задачи Трикоми для уравнения (1).

Задача T_μ**.** Найти решение уравнения (1) в области Ω_ε при $t \neq 0$ из класса $C(\overline{\Omega}_\varepsilon)\cap$ $\cap C^2(\Omega^+ \cup \Omega_\varepsilon^-)$ удовлетворяющее краевым условиям

$$u\Big|_\Gamma = 0, u\Big|_{S_\varepsilon} = 0 \tag{2}$$

или

$$u\Big|_\Gamma = 0, u\Big|_{S_1} = 0. \tag{3}$$

Вдальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1, ..., x_m, t$ к сферическим $r, \theta_1, ..., \theta_{m-1}, t$, $r \geq 0$, $0 \leq \theta_1 < 2\pi$, $0 \leq \theta_i \leq \pi$, $i = 2, ..., \ m-1$, $\theta = (\theta_1, ..., \theta_{m-1})$.

Пусть $a_i(r,\theta,t), b(r,\theta,t), c(r,\theta,t) \in W_2^l(\Omega^+ \cup \Omega_\varepsilon^-)$, $i = 1, ..., m$, $l \geq m+1$

Справедливы следующие теоремы

Теорема 1. При $\varepsilon = 0$, задача (1), (2) для каждого μ имеет собственные функции.

Теорема 2. Если $\varepsilon > 0$, то решение задачи (1), (2) $u(r,\theta,t) \equiv 0 \Leftrightarrow \mu \neq -\gamma_s^2$.

Следствие. Задача (1), (2) имеет собственные значения $\mu = -\gamma_s^2$ и соответствующие им собственные функции.

Теорема 3. Для любого $\varepsilon \geq 0$, задача (1), (3) имеет тривиалное решение $\Leftrightarrow \mu \neq -\gamma_s^2$.

Следствие. Задача (1), (3) имеет собственные значения $\mu = -\gamma_s^2$ и соответствующие им собственные функции.

Здесь γ_s- положительные нули функции Бесселя первого рода $J_s(z)$ целого порядка $s \geq \frac{m+1}{2}$.

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант №BR20281002).

Литература

[1] Кальменов Т.Ш. *О регулярных краевых задачах и их спектре для уравнений гиперболического и смешанного типа*, Автореф. дисс. док. физ.-мат. наук, МГУ, Москва (1982).

[2] Моисеев Е.И. *Уравнения смешанного типа со спектральным параметром*, Изд.-во МГУ, Москва (1988).

[3] Бицадзе А.В. *Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка*, М.: Наука (1966).

[4] Алдашев С.А. Критерий однозначной разрешимости спектральных задач Трикоми для многомерного уравнения Лаврентьева-Бицадзе, *Тезисы докладов межд. апрельской матем. конференции*, Алматы, ИМММ КН МНВО РК (2023).

О решении граничной задачи для неоднородного уравнения третьего порядка в R^3

Ю.П. АПАКОВ[1], А.А. ХАМИТОВ[2]

[1,2]*Наманганский инженерно-строительный институт, Наманган, Узбекистан*

[1]*Институт математики им. В.И.Романовского АН РУз, Наманган, Узбекистан*

[1]yusupjonapakov@gmail.com, [2]azizbek.khamitov.93@mail.ru

В области $D = \{(x,y,z) : 0 < x < p,\ 0 < y < q,\ 0 < z < r\}$ рассмотрим уравнение третьего порядка вида

$$L\left[u\right] \equiv u_{xxx} - u_{yy} - u_{zz} = f\left(x,y,z\right), \tag{1}$$

где $p,q,r \in R^+$ и для него исследуем следующую задачу.

Задача *A*. Найти решение уравнения (1) в области D из класса $C^{3,2,2}_{x,y,z}\left(D\right) \cap C^{2,1,1}_{x,y,z}\left(\overline{D}\right)$, удовлетворяющее краевым условиям:

$$u\left(x,0,z\right) = u\left(x,q,z\right) = 0, \quad u\left(x,y,0\right) = u\left(x,y,r\right) = 0, \tag{2}$$

$$\begin{cases} au\left(0,y,z\right) + bu_{xx}\left(0,y,z\right) = \psi_1\left(y,z\right), \\ cu\left(p,y,z\right) + du_{xx}\left(p,y,z\right) = \psi_2\left(y,z\right), \\ u_x\left(p,y,z\right) = \psi_3\left(y,z\right), \end{cases} \tag{3}$$

где $a,\ b,\ c,\ d \in R\backslash\left\{0\right\}$, а $\psi_i\left(y,z\right),\ i=\overline{1,3}$ – заданные достаточно гладкие функции, причем

$$\begin{cases} \psi_i\left(0,z\right) = \psi_i\left(q,z\right) = 0,\ \dfrac{\partial^2\psi_i\left(0,z\right)}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2\psi_i\left(q,z\right)}{\partial y^2} = 0, \\ \psi_i\left(y,0\right) = \psi_i\left(y,r\right) = 0,\ \dfrac{\partial^2\psi_i\left(y,0\right)}{\partial z^2} = \dfrac{\partial^2\psi_i\left(y,r\right)}{\partial z^2} = 0, \\ f\left(x,0,z\right) = f\left(x,q,z\right) = 0,\ f\left(x,y,0\right) = f\left(x,y,r\right) = 0, \end{cases} \quad i=\overline{1,3}. \tag{4}$$

Отметим, что для уравнения (1) в плоскости, т.е. $z = 0$ при $b = d = 0$ в работах [1–2], а при $a = c = 0$ в работе [3] исследованы краевые задачи.

Теорема 1. *Если задача A имеет решение, то при выполнении условий $ab > 0$, $cd < 0$, оно единственно.*

Теорема 1 доказана методом интегралов энергии.

Теорема 2. *Если выполняются следующие условия:*
1) $\dfrac{\partial^6 \psi_i(y,z)}{\partial y^3 \partial z^3} \in C(0 \le y \le q, 0 \le z \le r), i = \overline{1,3}$;
2) $\dfrac{\partial^5 f(x,y,z)}{\partial x \partial y^2 \partial z^2} \in C(0 \le x \le p, 0 \le y \le q, 0 \le z \le r)$,
и (4), *то решение задачи A существует.*

Теорема 2 доказана методом разделения переменных.

Ключевые слова: Дифференциальное уравнение, частные производные, уравнение третьего порядка, краевая задача, собственное значение, собственная функция, функциональный ряд, абсолютная и равномерная сходимость.

2010 Mathematics Subject Classification: 35G15, 39A14, 39A27

Литература

[1] Апаков Ю.П. К теории уравнений третьего порядка с кратными характеристиками, Fan va texnologiya, Ташкент (2019), 156 стр.

[2] Апаков Ю.П. О решении краевой задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, Украинский математический журнал, 1:64 (2012), 1–11.

[3] Апаков Ю.П., Жураев А.Х. О решении краевой задачи для уравнения третьего порядка с помощью функции Грина, Узбекский математический журнал, 3 (2011), 36–42.

Асимптотическая сходимость решения интегральной краевой задачи для интегро-дифференциальных уравнений

Н.А. БАХТИЯРОВ

Казахский Национальный Университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан

bakhtiyarovnuradil@gmail.com

Рассмотрим следующее интегро-дифференциальное уравнение

$$L_\varepsilon y \equiv \varepsilon y^{(n)} + A_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + A_n(t)y = F(t) + \int_0^1 \sum_{i=0}^{m_1+1} H_i(t,x)y^{(i)}(x,\varepsilon)dx \tag{1.1}$$

с граничными условиями

$$h_i y(t,\varepsilon) \equiv \sum_{j=0}^{m_i} \alpha_{ij} y^{(j)}(0,\varepsilon) = a_i, i = \overline{1,p}$$

$$h_{p+i} y(t,\varepsilon) \equiv \sum_{j=0}^{l_i} \beta_{ij} y^{(j)}(1,\varepsilon) - \int_0^1 \sum_{i=0}^{m_1+1} a_{ik}(x) y^{(k)}(x,\varepsilon)dx = b_i, i = \overline{1,q} \tag{1.2}$$

где $\varepsilon > 0$ - малый параметр, $\alpha_{ij}, \beta_{ij}, a_i, b_i \in R$ - известные константы, не зависящие от ε.

Предположим, что выполняются следующие условия:
1. $A_i(t), F(t), i = \overline{1.i}$ являются достаточно гладкими функциями на интервале $[0,1]$;
2. $A_1(t) \ge \gamma = const > 0, \quad 0 \le t \le 1$;
3. $H_i(t,x), i = 0,\ldots,m_1+1$ определены и достаточно гладки в области $D = (0 \le t \le 1, 0 \le x \le 1)$;

4. $\alpha_{1,m_1} \neq 0, \beta_{1,l_i} \neq 0, n-1 > m_1 > m_2 > \ldots > m_p, n-1 > l_1 > l_2 > \ldots > l_q, p+q = n, i = \overline{1,p}\,, i = \overline{1,q}$;

5. $\overline{\Delta} = \begin{vmatrix} h_2 y_{10}(t) & \cdots & h_2 y_{n-1,0}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ h_n y_{10}(t) & \cdots & h_n y_{n-1,0}(t) \end{vmatrix} \neq 0$, где $y_{i0}, i = 1, ..., n-1$ является фундаментальной системой решений следующего однородного дифференциального уравнения

$$L_0 y(t) \equiv A_1(t) y^{(n-1)}(t) + ... + A_n(t) y(t) = 0.$$

Некоторые другие условия будут установлены позже.

Будем искать решение краевой задачи (1.1) и (1.2) в виде:

$$y(t,\varepsilon) = C_1 \Phi_1(t,\varepsilon) + \ldots + C_n \Phi_n(t,\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t K(t,s,\varepsilon) z(s,\varepsilon) ds,$$

где $K(t,s,\varepsilon)$ - функция Коши, $\Phi_i(t,\varepsilon),\ i = 1,\ldots,n$ — граничные функции, $C_i,\ i = 1,\ldots,n$ — неизвестные константы, а $z(t,\varepsilon)$ — неизвестная функция.

Ключевые слова: интегро-дииференциальные уравнения, интегральные краевые условия, граничная функция, функция Коши.

Литература

[1] Касымов К.А., Дауылбаев М.К. Об оценке решений задачи Коши с началь ным скачком любого порядка для линейных сингулярно возмущенных интегро дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. Москва– Минск, 1999.– Т. 35, № 6.– С. 822– 830.

[2] Дауылбаев М.К. Линейные интегро-дифференциальные уравнения с малым параметром.– Алматы: «Қазақ университеті», 2009.– 190 с.

[3] Vasil'eva A, Butuzov V, Kalachev L. "The boundary function method for singular perturbation problems Philadeplhia: SIAM Studiesin Applied Mathematics, (1995).

Асимптотика линейно независимых решений линейного уравнения с инволюцией

А.Ж. БЕЙСЕБАЕВА[1], Э. МУСІРЕПОВА[2]

[1,2]*Южно–Казахстанский университет имени М. Ауэзова, Шымкент, Казахстан*

[1]akbope_a@mail.ru, [2]musrepova_elmira@mail.ru

Работа посвящена изучению поведения решений уравнения

$$l_\alpha u \equiv -u''(x) + \alpha u''(-x) + q(x)u(x) = \rho^2 u(x), -1 < x < 1.$$

При этом, мы развиваем методы работы [1] (см. также [2]). Следуя работе [2; 53], разобьем всю комплексную $\alpha\rho$ плоскость на 4 сектора $S_\nu, \nu = 0,1,2,3$, определяемых неравенством

$$\frac{\nu\pi}{2} \leq arg\ \alpha\rho \leq \frac{(\nu+1)\pi}{2}.$$

Теорема 1. Если функция $q(x)$ непрерывна в интервале $[-1,1]$, то в области $S_\nu, \nu = 0,1, \alpha_1 \geq \alpha_0$, и $S_\nu, \nu = 2,3, \alpha_0 \geq \alpha_1$ комплексной ρ - плоскости уравнение

$$u''(x) - \alpha u''(-x) - q(x)u(x) + \rho^2 u(x) = 0$$

имеет два линейнонезависимых решения u_0, u_1, удовлетворяющих соотношениям

$$u_k(x) = \left(e^{\alpha_{k-1}\rho i x} + (-1)^{k+1} e^{-\alpha_{k-1}\rho i x}\right)\left[1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right], k = 1,2,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} u_k(x) = \alpha_{k-1}\rho i \left(e^{\alpha_{k-1}\rho i x} - (-1)^k e^{-\alpha_{k-1}\rho i x}\right)\left[1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right], k = 1,2,$$

где $\alpha_0 = \sqrt{\frac{1}{1+\alpha}}$, $\alpha_1 = \sqrt{\frac{1}{1-\alpha}}$, $\rho \in S_\nu$ при достаточно большом $|\rho|$.

Ключевые слова: Асимптотика, дифференциальное уравнение, инволюция.

2010 Mathematics Subject Classification: 35L35; 35N30; 35E99; 34L10

Литература

[1] Стоун М.Х. Сравнение рядов Фурье и Биркгофа, Труды Американского математического общества, (1926) - 28(4). С. 695–761. https://doi.org/10.2307/1989072

[2] Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы, штат Нью-Йорк, США (1968).

О фундаментальных соленоидальных системах в квадратной области

М.Т. ДЖЕНАЛИЕВ[1], М.Г. ЕРГАЛИЕВ[2], К.Б. ИМАНБЕРДИЕВ[3], К.С. ШАРИПОВ[4]

[1,2,3]*Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*
[4]*Международный ун-т транспорта и гуманитарных наук, Алматы, Казахстан*

[1]muvasharkhan@gmail.com, [2]ergaliev.madi.g@gmail.com, [3]kanzharbek75ikb@gmail.com, [4]7847526@mail.ru

Введение. О спектральной задаче для оператора Стокса

В ряде работ академика О.А. Ладыженской указывалось на важность построения фундаментальной системы в пространстве соленоидальных функций для простейших областей типа куба, шара и др.

Теоретически, существование такой системы не требует доказательства, это общеизвестно. Последний факт активно используется специалистами при доказательстве теорем существования для 2-D и 3-D систем Навье-Стокса (как в линейном, так и в нелинейном случаях) и для дальнейшего анализа качественных свойств решения, доказанного на существование. Однако, для численного решения граничных задач для системы уравнений как Стокса, так и Навье-Стокса возникает необходимость в построении вышеуказанной фундаментальной системы.

В связи со сказанным, главная цель представленной работы: это построение фундаментальных систем в пространстве соленоидальных функций для квадратной области по пространственным переменным!

Здесь, во-первых, с помощью оператора ротор мы вводим понятие функции тока для 2-D случая. Здесь мы получаем обобщенную спектральную задачу для дифференциального оператора четвертого порядка, которая не разрешима в квадратурах табулированных функций.

Во-вторых, мы вводим вместо полученного оператора новый дифференциальный оператор четвертого порядка (измененный 2-D бигармонический оператор), для которого построена фундаментальная система обобщенных собственных функций в пространстве скалярных функций тока и соответствующих собственных значений.

В-третьих. В 2-D случае, применяя формулы, по которым мы ввели функцию тока, к построенной фундаментальной системе, получаем некоторую систему 2-D вектор-функций.

Мы показываем, что эта система окажется фундаментальной в пространстве соленоидальных функций.

В результате, нами дан ответ на вопрос О.А. Ладыженской для квадратной области.

Ладыженская О.А. ([1], p. 105) отмечает: «Мы не включаем в понятие „Фундаментальная система“ $\{\vec{\varphi}_k\}_{k=1}^{\infty}$ (например, в пространстве $(\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))^d$, $d \geq 2$) свойство линейной независимости элементов этой системы, однако требуем от нее только следующее: для любого числа $\varepsilon > 0$ и любой функции $\vec{\varphi} \in (\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))^d$ существует такая сумма $\vec{\varphi}^\varepsilon = \sum\limits_{k=1}^{N_\varepsilon} a_k \vec{\varphi}_k$, $N_\varepsilon < \infty$, что имеет место неравенство $\|\nabla(\vec{\varphi}-\vec{\varphi}^{\varepsilon})\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon$.» Этого определения фундаментальной системы функций мы будем придерживаться в настоящей работе.

Отметим, что спектральные задачи для оператора Стокса (но с условиями периодичности) в кубической области рассматривались также в работах [2-4].

Прежде всего, мы дадим постановку спектральной задачи для оператора Стокса. Пусть $x = (x_1, ..., x_d) \in \Omega \subset \mathbb{R}^d,\ d \geq 2,$ — открытая ограниченная (односвязная) область с границей $\partial\Omega$. Найти нетривиальные решения $\{\vec{w}_k(x),\ p_k(x),\ x \in \Omega,\ \ k \in \mathbb{N}\}$ и соответствующие значения параметра $\{\lambda_k^2,\ k \in \mathbb{N}\}$ для следующей граничной задачи:

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta\vec{w}(x) + \nabla p(x) & = & \lambda^2 w(x), & x \in \Omega, \\ \operatorname{div}\{\vec{w}(x)\} & = & 0, & x \in \Omega, \\ \vec{w}(x) & = & 0, & x \in \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{A}$$

Введем основные пространства, которые нами будут использоваться.

Пусть $x = (x_1, ..., x_d) \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, — открытая ограниченная (односвязная) область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, $m \geq 0$ — целое число,

$$W_2^m(\Omega) = \left\{v|\ \partial_x^{|\alpha|} v \in L^2(\Omega),\ |\alpha| \leq m\right\}, \ \text{ где } \ \partial_x^{|\alpha|} = \partial_{x_1}^{\alpha_1} ... \partial_{x_d}^{\alpha_d},\ |\alpha| = \sum_{j=1}^{d} \alpha_j,\ \partial_{x_j} = \frac{\partial}{\partial_{x_j}},$$

$$\overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega) = \left\{v|\ v \in W_2^m(\Omega),\ \partial_{\vec{n}}^j v = 0,\ j = 0, 1, 2..., m-1,\ \vec{n} \text{ — внешняя нормаль к } \partial\Omega\right\}.$$

1. Прямоугольная область

Пусть $\dim \Omega_1 = 2$, $\Omega_1 = \{x_0 < x < x_1,\ y_0 < y < y_1\}$ — заданный прямоугольник, x_0, x_1, y_0, y_1 — заданные выличины. Введем скалярную функцию тока $U(x, y)$ согласно формул

$$w_1(x, y) = \partial_y U(x, y),\ (x, y) \in \Omega)_1, \tag{1}$$

$$w_2(x, y) = -\partial_x U(x, y),\ (x, y) \in \Omega_1, \tag{2}$$

$$\partial_x w_1 + \partial_y w_2 = 0,\ (x, y) \in \Omega_1. \tag{3}$$

Ставится следующая задача: при условиях (1)–(3) найти скалярную функцию $U(x, y)$ для заданной вектор-функции $\vec{w}(x, y) = \{w_1(x, y), w_2(x, y)\}$.

Доказано следующее утверждение.

Предложение 1. *Для каждой двумерной вектор-функции $\vec{w}(x, y) \in (C^1(\Omega_1))^2$ существует скалярная функция $U(x, y) \in C^2(\Omega_1)$, удовлетворяющая соотношениям* (1)–(3). *Справедливо и обратное утверждение: для каждой скалярной функции $U(x, y) \in C^2(\Omega_1)$ существует двумерная вектор-функция $\vec{w}(x, y) \in (C^1(\Omega_1))^2$, удовлетворяющая соотношениям* (1)–(3).

2. Квадратная область

Пусть теперь $\Omega = \{0 < x, y < l\}$. Если $w_j(x, y) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega), j = 1, 2$, тогда мы будем иметь функцию тока $U(x, y)$, принадлежащую пространству $\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$.

Спектральную задачу (A) с помощью формул (1)–(3) мы сведем к следующей спектральной задаче для би-гармонического оператора в терминах функции тока:

$$\left\{\begin{array}{l} (-\Delta)^2 U(x, y) = \lambda^2(-\Delta)U(x, y),\ (x, y) \in \Omega, \\ U(x, y) = 0,\ \partial_{\vec{n}} U(x, y) = 0,\ (x, y) \in \partial\Omega, \end{array}\right. \tag{A1}$$

где $\vec{n}$ — единичная внешняя нормаль к границе $\partial\Omega$.

Спектральная задача (A1), а также ее обобщения для полигармонических операторов, изучалась многими авторами. Оказалось, что она явно не разрешима для квадратной области. Здесь метод разделения переменных не работает. Исключение составляют только круговая и сферическая области [5-7].

Краткая схема нашего исследования: замена бигармонического оператора в задаче (A1) другим дифференциальным оператором четвертого порядка, для которого рассмотрим соответствующую спектральную задачу. С помощью решения последней мы хотим построить фундаментальную систему в пространстве соленоидальных функций.

Итак, мы рассматриваем видоизмененную спектральную задачу:

$$(\partial_x^4 + \partial_y^4)U = \lambda^2(-\Delta)U, \ \ (x,y) \in \Omega, \tag{4}$$

с условиями Дирихле на границе

$$U(x,y)_{|\partial\Omega} = \partial_{\vec{n}} U(x,y)_{|\partial\Omega} = 0. \tag{5}$$

Оказалось, что задача (4)–(5) разрешима. Дадим определение следующих пространств.

Определение 2. Обозначим через $V_1(\Omega)$ и $V_2(\Omega)$ пространства соответственно со скалярными произведениями

$$(\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)} \ \forall\, u, v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega),$$

$$((u,v)) \overset{\text{def}}{=} \left(\partial_x^2 u, \partial_x^2 v\right)_{L^2(\Omega)} + \left(\partial_y^2 u, \partial_y^2 v\right)_{L^2(\Omega)} \ \forall\, u, v \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega).$$

Теперь мы можем сформулировать следующие теоремы.

Теорема 3. *Спектральная задача* (4) *и* (5) *имеет следующее решение*

$$U_n(x,y) = X_n(x) Y_n(y), \ \ \lambda_n^2, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{6}$$

где $X_n(x) = \Phi_n(\zeta)_{|\zeta=x}, \ \ Y_n(y) = \Phi_n(\zeta)_{|\zeta=y}$*:*

$$\begin{cases} \Phi_{2n-1}(\zeta) = \sin^2 \frac{\lambda_{2n-1}\zeta}{2}, \ \lambda_{2n-1}^2 = \left(\frac{2(2n-1)\pi}{l}\right)^2, \ \ n \in \mathbb{N}, \\ \Phi_{2n}(\zeta) = [\lambda_{2n} l - \sin \lambda_{2n} l] \sin^2 \frac{\lambda_{2n}\zeta}{2} - \sin^2 \frac{\lambda_{2n} l}{2} \left[\lambda_{2n}\zeta - \sin \lambda_{2n}\zeta\right], \\ \qquad \lambda_{2n}^2 = \left(\frac{2\nu_n}{l}\right)^2, \ \ n \in \mathbb{N}, \end{cases} \tag{7}$$

и $\{\nu_n, \ n \in \mathbb{N}\}$ *являются положительными корнями уравнения* $\tan \nu = \nu$.

Далее, в пространстве $V_1(\Omega)$ (определение 2) сперва, мы показываем ортогональность системы собственных функций (6) и (7). И далее, проводим нормировку системы (6) и (7) опять же в пространстве $V_1(\Omega)$ (определение 2). В результате, устанавливаем следующую теорему.

Теорема 4. *Спектральная задача* (4)–(5) *имеет следующее решение*

$$\bar{u}_{2n-1}(x,y) \ = \ \frac{\sqrt{l}}{(2n-1)\pi}\sqrt{\frac{8}{3l}} \sin^2 \frac{\lambda_{2n-1} x}{2} \sin^2 \frac{\lambda_{2n-1} y}{2}, \ \ n \in \mathbb{N}, \tag{8}$$

$$\bar{u}_{2n}(x,y) \ = \ \sqrt{\frac{l}{4}} \cdot \frac{\sqrt{6}(1+\nu_n^2)^2}{\nu_n^4 \sqrt{13\nu_n^4 + 18\nu_n^2 + 13}} \cdot \left[\frac{1}{\nu_n} \sin \frac{2\nu_n x}{l} - \frac{2}{l} x + 2 \sin^2 \frac{\nu_n x}{l}\right] \cdot \tag{9}$$

$$\cdot \left[\frac{1}{\nu_n} \sin \frac{2\nu_n y}{l} - \frac{2}{l} y + 2 \sin^2 \frac{\nu_n y}{l}\right], \ \ n \in \mathbb{N}, \tag{10}$$

где $\{\nu_n, \ n \in \mathbb{N}\}$ *являются положительными корнями уравнения* $\tan \nu = \nu, \ n \in \mathbb{N}$.

При этом, системы собственных функций (8)–(9) принадлежат пространству $V_2(\Omega)$ *(определение 2) и составляют ортонормированный базис в пространстве* $V_1(\Omega)$ *(определение 2).*

3. Фундаментальность системы соленоидальных функций (8)–(9)

Определение 5. Обозначим через $\mathbf{H}(\Omega)$ пространство:

$$\mathbf{H}(\Omega) = \{\vec{w} |\, \vec{w} \in \mathbf{L}^2(\Omega),\ \operatorname{div} \vec{w} = 0,\ \vec{w} \cdot \vec{n}|_{\partial\Omega} = 0\},\ \ \mathbf{L}^2(\Omega) = (L^2(\Omega))^2, \tag{11}$$

где $\vec{w} \cdot \vec{n}$ — нормальная составляющая вектора $\vec{w}$.

Теорема 6. *Совокупность вектор-функций* $\vec{w}_n(x,y) = \{w_{1n}(x,y), w_{2n}(x,y)\}$:

$$\{w_{jn}(x,y) \in V_1(\Omega), j = 1,2,\ n \in \mathbb{N}\}$$

образует фундаментальную систему в пространстве соленоидальных функций $\mathbf{H}(\Omega)$*, где* $\vec{u}_n(x,y) = \{0, 0, \bar{u}_n(x,y)\}$,

$$\vec{w}_n(x,y) = \mathbf{rot}\{\vec{u}_n(x,y)\},\ \ (x,y) \in \Omega,\ n \in \mathbb{N}, \tag{12}$$

$$\operatorname{div} \vec{w}_n(x,y) = 0,\ \ (x,y) \in \Omega,\ n \in \mathbb{N}, \tag{13}$$

$$\vec{w}_n(x,y) = 0,\ \ (x,y) \in \partial\Omega,\ n \in \mathbb{N}. \tag{14}$$

Заключение

В работе найдено явное построение фундаментальных систем в пространстве соленоидальных функций для квадрата, которое несложно переформулировать и для прямоугольника. Дано представление ортонормированного варианта построенной фундаментальной системы. Эти системы функций могут быть использованы для приближенного решения граничных задач для стационарных и эволюционных систем уравнений Стокса и Навье-Стокса в квадратной области, и соответственно в цилиндрах с сечениями в виде квадрата.

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № BR20281002).

Ключевые слова: оператор Стокса, спектральная задача, квадратная область, фундаментальная соленоидальная система.

2010 Mathematics Subject Classification: 35J05, 35Q30, 76D05, 76D07

Литература

[1] Ladyzhenskaya O.A. On a construction of basises in spaces of solenoidal vector-valued fields, *Zap. Nauchn. Sem. POMI*, **306** (2003), 92–106 (in Russian).

[2] Сакс Р.С. Решение спектральной задачи для оператора ротор и оператора Стокса с периодическими краевыми условиями, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, **318** (2004), 246–276.

[3] Saks R.S. Spectral Problems for the Curl and Stokes Operators, *Doklady Mathematics*, **76**:2 (2007), 724–728.

[4] Saks R.S. Cauchy problem for the Navier-Stokes equations. Fourier method, *Ufimskii Math. Journal*, **3**:1 (2011), 53–79 (in Russian).

[5] Jenaliyev M., Ramazanov M., Yergaliyev M. On the numerical solution of one inverse problem for a linearized two-dimensional system of Navier-Stokes equations, *Opuscula Math.*, **42**:5 (2022), 709–725.

[6] Jenaliyev M.T., Serik A.M. On the spectral problem for three-dimesional bi-Laplacian in the unit sphere, *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series*, 2(114) (2024), 86-–104.

[7] Jenaliyev M., Serik A., Yergaliyev M. Navier–Stokes Equation in a Cone with Cross-Sections in the Form of 3D Spheres, Depending on Time, and the Corresponding Basis, *Mathematics*, **12**:19 (2024), 3137.

Условия разрешимости коэффициентных обратных задач для уравнения Бюргерса

М.Г ЕРГАЛИЕВ

[1]*Институт Математики и Математического Моделирования, Алматы, Казахстан*
ergaliev@math.kz

Рассмотрим следующую нелинейно вырождающуюся область

$$\Omega = \{x, t \mid \varphi_1(t) < x < \varphi_2(t),\ 0 < t < T < \infty\},$$

с сечением $\Omega_t = \{\varphi_1(t) < x < \varphi_2(t)\}$ для фиксированного значения временной переменной $t \in (0, T)$, и для которой выполняется

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0).$$

В области Ω мы исследуем следующую обратную задачу для уравнения Бюргерса

$$\partial_t u(x,t) + u(x,t)\partial_x u(x,t) - \nu\partial_x^2 u(x,t) = \lambda(t)u(x,t) + w(t)f(x,t),$$

с различными комбинациями неизвестных и граничных условий.

Основной целью работы является определение дополнительных условий, при которых эти обратные задачи будут однозначно разрешимы.

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № BR20281002).

Ключевые слова: уравнение Бюргерса, обратная задача, вырождающаяся область, метод Галеркина.

2010 Mathematics Subject Classification: 35K55, 35R30, 35R37

Литература

[1] Jenaliyev M.T, Kabanikhin S.I., Kassen M., Yergaliyev M.G. On the solvability of an inverse problem for the Burgers equation with an integral overdetermination condition in a nonlinearly degenerating domain, *Journal of Inverse and Ill-posed Problems*, **33**:1 (2025), 93–106.

[2] Jenaliyev M., Romankyzy A., Yergaliyev M., Zholdasbek A. On an inverse problem with an integral overdetermination condition for the Burgers equation, *Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science*, **117**:1 (2023), 24–41.

[3] Jenaliyev M.T., Yergaliyev M.G. On initial-boundary value problem for the Burgers equation in nonlinearly degenerating domain, *Applicable Analysis*, **103**:11 (2024), 2003–2014.

О свойствах базисности систем собственных функций оператора дифференцирования при интегральном возмущении краевого условия со спектральным параметром

Н.С. ИМАНБАЕВ[1], М.А. САДЫБЕКОВ[2]

[1,2]*Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*
[1]*Южно-Казахстанский пед. университет им. О. Жанибекова, Шымкент, Казахстан*
[1]imanbaevnur@mail.ru, [2]sadybekov@math.kz

Рассматривается спектральная задача для оператора дифференцирования со спектральным параметром в краевых условиях при интегральном возмущении краевого условия

$$l(u) \equiv u'(x) = \lambda u(x), \quad 0 < x < 1, \tag{1}$$

$$U_1(u) \equiv u(0) - \alpha u(1) + \lambda\{u(0) - \beta u(1)\} = \int_0^1 \overline{p(x)} u(x) dx. \tag{2}$$

Здесь α и $\beta \neq 0$ — заданные комплексные числа, $p(x) \in L_2(0,1)$.

Характеристическим определителем исходной «невозмущенной» задачи при $p(x) \equiv 0$ будет $\Delta_0(\lambda) = \lambda[\beta e^{\lambda} - 1] + [\alpha e^{\lambda} - 1] = 0$, которое отдельным собственным значением $\widetilde{\lambda}^0$ и серией собственных значений, имеющих асимптотику, являются $\lambda_k^0 = -\ln\beta + 2k\pi i + \delta_k$, $k \in Z$, $\delta_k = O\left(\frac{1}{k}\right)$, соответствующая система собственных функций имеет вид $\widetilde{u}^0(x) = e^{\widetilde{\lambda}^0 x}$, $u_k^0(x) = e^{\lambda_k^0 x} \equiv \beta^{-x} e^{\delta_k x} e^{2k\pi i x}$, $k \in Z$.

Лемма 1. *Система $\left\{u_k^0(x), k \in Z\right\}$ образует базис Рисса пространства $L_2(0,1)$.*

Лемма 2. *Биортогональной к $\left\{u_k^0(x), k \in Z\right\}$ является система $\left\{v_k^0(x), k \in Z\right\}$, выражаемая по формуле $v_k^0(x) = e^{-\overline{\lambda_k^0} x} \equiv \overline{\beta}^x e^{-\overline{\delta_k} x} e^{-2k\pi i x}$, $k \in Z$. При этом система $\left\{v_k^0(x), k \in Z\right\}$ образует базис Рисса пространства $L_2(0,1)$.*

Теорема 1. *Характеристический определитель «возмущенной» спектральной задачи* (1)-(2) *имеет вид $\Delta_1(\lambda) = \Delta_0(\lambda) + \sum\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{p_k} \frac{e^{\left(\lambda-\lambda_k^0\right)}-1}{\lambda-\lambda_k^0}$, где $\Delta_0(\lambda)$ - характеристический определитель невозмущенной (то есть, при $p(x) \equiv 0$) задачи, а p_k– коэффициенты Фурье разложения функции $p(x) = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} p_k v_k^0(x)$ по системе $\left\{v_k^0(x), k \in Z\right\}$, являющейся биортогональной к системе $\left\{u_k^0(x), k \in Z\right\}$.*

Теорема 2. *Множество функций $p(x)$, при которых система корневых векторов «возмущенной» задачи* (1)-(2) *образует базис Рисса в $L_2(0,1)$, является плотным множеством в $L_2(0,1)$.*

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № 23485279).

Ключевые слова: оператор дифференцирования, собственные функции, базисность, интегральное возмущение, спектральный параметр.

2010 Mathematics Subject Classification: 34B05, 34B09, 34L10, 34L15

Краевая задача для одного вырождающегося уравнения с дробной производной

Б.И ИРГАШЕВ

[1]*Наманганский государственный технический университет, Наманган, Узбекистан*
[1]*Институт математики им.В.И.Романовского АН РУз., Ташкент, Узбекистан*

bahromirgasev@gmail.com

В области $\Omega = \Omega_x \times \Omega_y$, $\Omega_x = \{x : 0 < x < 1\}$, $\Omega_y = \{y : 0 < y < 1\}$, рассмотрим уравнение

$$K(y)\, l\,(u\,(x,y)) + q_C D_{0x}^{\alpha} u = f\,(x,y)\,, 0 \neq q \in R, \tag{1}$$

где

$$l(u) = (-1)^s \frac{\partial^{2s} u\,(x,y)}{\partial y^{2s}} + \frac{\partial^{s-1}}{\partial y^{s-1}} \left((-1)^{s-1} p_{s-1}\,(y)\, \frac{\partial^{s-1} u\,(x,y)}{\partial y^{s-1}} \right) + ...$$
$$+ \frac{\partial}{\partial y} \left(-p_1\,(y)\, \frac{\partial u\,(x,y)}{\partial y} \right) + p_0\,(y)\, u\,(x,y)\,,$$

$$0 \le p_j\left(y\right) \in C^j\left(\overline{\Omega}_y\right),\ j=0,1,...,s-1,\ s\in N,$$
$$K\left(y\right)>0, y\in\left(0,1\right), K(0)=K\left(1\right)=0,$$
$$K^{(i)}\left(y\right)=O\left(y^{m-i}\right), y\to 0+0, 0\le m<s,$$
$$K^{(i)}\left(y\right)=O\left(\left(1-y\right)^{n-i}\right), y\to 1-0, 0\le n<s, i=0,1,...,$$
$$K\left(y\right)\in C^{2s}\left(0,1\right); 1<\alpha<2,$$

${}_C D_{0x}^{\alpha} u\left(x,y\right)=\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\int\limits_0^x \frac{\frac{\partial^2 u(t,y)}{\partial t^2}dt}{(x-t)^{\alpha-1}}-$ дробная производная в смысле Капуто, функция $f(x,y)$ является достаточно гладкой в $\overline{\Omega}$.

Для уравнения (1) исследуем следующую задачу.

Задача R. Найти решение уравнения (1) с условиями:

$$l(u), {}_C D_{0x}^{\alpha} u \in C\left(\Omega\right),$$

$$u_x\left(x,y\right)\in C\left(\bar{\Omega}\right), \frac{\partial^{2s-1}u\left(x,y\right)}{\partial y^{2s-1}}\in C\left(\bar{\Omega}\right), \frac{\partial^{2s}u\left(x,y\right)}{\partial y^{2s}}\in C\left(\Omega\right),$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$\frac{\partial^j u\left(x,0\right)}{\partial y^j}=\frac{\partial^j u\left(x,1\right)}{\partial y^j}=0,\ \ 0\le x\le 1,\ j=0,1,...,s-1,$$

$$a_0 u\left(0,y\right)+b_0 u_x\left(0,y\right)=\varphi_0\left(y\right), a_1 u\left(1,y\right)+b_1 u_x\left(1,y\right)=\varphi_1\left(y\right),$$

где функции $\varphi_0\left(y\right), \varphi_1\left(x\right)$ достаточно гладкие, $b_0 b_1\neq 0$.

В данной работе изучена краевая задача типа Робена для уравнения (1) на однозначную разрешимость. Рассмотрены отдельно случаи $q>0$ и $q<0$. Доказаны теоремы существования и единственности.

Об одной краевой задаче с разрывными условиями склеивания для нагруженного уравнения смешанного типа третьего порядка в бесконечной трёхмерной области

Б.И ИСЛОМОВ[1], Е.К. АЛИКУЛОВ[2]

[1]*Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека ,Ташкент, Узбекистан;*
[1]*Каршинский государственный университет, Карши, Узбекистан;*
[2]*Ташкентский университет информационных технологий , Ташкент, Узбекистан;*
[1]islomovbozor@yandex.com, [2]aliqulov.yolqin.1984@mail.ru

Краевые задачи для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического и парабо-ло-гиперболического типов второго порядка в трёхмерной области были исследованы в работах А.В. Бицадзе [1-4].

Насколько нам известно, краевые задачи для нагруженных уравнений параболо-гиперболического типов в бесконечных призматических областях мало изучены. Отметим работы [5-7].

Исходя из этого, настоящая работа посвящена постановке и исследованию аналога задачи Трикоми с разрывными условиями склеивания для нагруженного уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа в трехмерной области.

Рассмотрим уравнение

$$0=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\begin{array}{ll} U_y-U_{xx}-U_{zz}-\mu U(x,0,z) & \text{в } \Omega_1, \\ U_{yy}-U_{xx}-U_{zz}-\mu U(x,0,z) & \text{в } \Omega_2. \end{array}\right. \qquad (1)$$

Пусть Ω - область трёхмерного пространства (x,y,z), ограниченная поверхностями

$$\Gamma_0 : x=0,\ \ 0\le y\le h,\ \ \ z\in R=(-\infty,+\infty),\ \ \Gamma_1 : x=1,\ \ 0\le y\le h,\ \ z\in R,$$

$$\Gamma_2 : y=h,\ \ 0\le x\le 1,\ \ \ z\in R, S_1 :\ \ x+y=0,\ \ \ y\le 0,\ \ \ 0\le x\le 0,5,\ \ \ z\in R,$$

$$S_2 :\ \ x-y=1,\ \ \ y\le 0,\ \ \ 0,5\le x\le 1,\ \ \ z\in R,\ \ \ \Omega=\Omega_1\cup\Omega_2\cup\left(\bar{\Omega}_1\cap\bar{\Omega}_2\right).$$

$$\mu=const<0. \tag{2}$$

Введём обозначения: $A(0,0,z)=\overline{\Gamma}_0\cap\bar{S}_1$, $C\left(\frac{1}{2},0,z\right)=\bar{S}_1\cap\bar{S}_2$, $B(1,0,z)=\bar{\Gamma}_1\cap\bar{S}_2$, $\Omega_1=\Omega\cap\{(x,y,z):x>0,y>0,z\in R\}$, $\Omega_2=\Delta ABC$, $I=\{(x,y,z):0<x<1,y=0,z\in R\}$,
$D=\Omega\ \cap\ \{z=0\}$, $D_j=\Omega_j\cap\{z=0\}$, $\sigma_j=S_j\cap\{z=0\}$, $(j=1,2)$, $J=I\bigcap\ \{z=0\}$.

Определение 1. $L\left(-\infty,+\infty\right)$ –множество функций $\mathrm{H}(x,y,z)$, определенных в Ω и абсолютно интегрируемых по переменному z в интервале $(-\infty,+\infty)$.

Определение 2. Функция $U(x,y,z)$ называется регулярным решением уравнения (1), если она удовлетворяет следующим условиям:
1) $U(x,y,z)\in C(\bar{\Omega}_1\cup\bar{\Omega}_2)\cap L(-\infty,+\infty)$;
2) $U_x(x,y,z),\ U_y(x,y,z), U_z(x,y,z)\in C(\bar{\Omega}_1\cup\bar{\Omega}_2)\cap L(-\infty,+\infty)$,
3)$U_{xxx},\ U_{xzz}\in C(\Omega_1\cup\Omega_2)\cap L(-\infty,+\infty)$, $U_{xy}\in C(\Omega_1)\cap L(-\infty,+\infty)$,
$U_{xyy}\in C(\Omega_2)\cap L(-\infty,+\infty)$ и удовлетворяет уравнению (1) в областях $\Omega_j\,(j=1,2)$.

В области Ω для уравнения (1) исследуем следующую задачу.

Задача T_p. Требуется найти в области Ω регулярное решение $U(x,y,z)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$\left.U\right|_{\Gamma_0}=\Phi_0(y,z),\qquad \left.U\right|_{\Gamma_1}=\Phi_1(y,z),\ \ \left.U_x\right|_{\Gamma_0}=\Phi_2\left(y,z\right),\quad 0\le y\le h,\ \ z\in R,$$

$$\left.U\right|_{S_1}=\Psi_1(x,z),\quad \left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_{S_1}=\Psi_2(x,z),\quad 0\le x\le\frac{1}{2},\ \ z\in R,$$

$$\lim_{y\to-0}U(x,\,y,z)=A_1(x,z)\lim_{y\to+0}U(x,\,y,z)+B_1(x,z),\quad (x,0,z)\in\overline{I},\quad z\in R,$$

$$\lim_{y\to-0}U_y(x,\,y,z)=A_2(x,z)\lim_{y\to+0}U_y(x,\,y,z)+B_2(x,z),\quad (x,0,z)\in I,\quad z\in R,$$

$$\lim_{|z|\to\infty}U(x,y,z)=\lim_{|z|\to\infty}U_x(x,y,z)=\lim_{|z|\to\infty}U_y(x,y,z)=\lim_{|z|\to\infty}U_z(x,y,z)=0,$$

где n — внутренняя нормаль, $\Phi_k(y,z)$ $(k=\overline{0,2})$, $\Psi_j(x,z)$, $A_j(x,z)$, $B_j(y,z)$ $(j=1,2)$ — заданные функции, причем

$$\Psi_1\left(0,z\right)=\Phi_0\left(0,z\right)=0,\Psi_2(0,z)=\Phi_0'(0,z)+(\sqrt{2}-1)\Phi_2(0,z), \tag{3}$$

$$\Phi_j(y,z),\Phi_{jy}(y,z)\in C\left([0;h]\times R\right)\cap L(-\infty,+\infty),(j=0,1), \tag{4}$$

$$\Phi_2(y,z)\in C\left([0,h]\times R\right)\cap C^1\left((0,h)\times R\right)\cap L(-\infty,+\infty), \tag{5}$$

$$\Psi_1(x,z)\in C^2\left([0;0,5]\times R\right)\cap C^3\left((0;0,5)\times R\right)\cap L(-\infty,+\infty), \tag{6}$$

$$\Psi_2(x,z)\in C^1\left([0;0,5]\times R\right)\cap C^3\left((0,[0;0,5)\times R\right)\cap L(-\infty,+\infty), \tag{7}$$

$$A_1(x,z),\ \ B_1(x,z)\in C^1\left([0,1]\times R\right)\cap C^2\left((0,1)\times R\right)\cap L(-\infty,+\infty), \tag{8}$$

$$A_2(x,z),\ \ B_2(x,z)\in C\left([0,1]\times R\right)\cap C^2\left((0,1)\times R\right)\cap L(-\infty,+\infty), \tag{9}$$

$$\lim_{|z|\to\infty}\Phi_i(y,z)=0,\forall y\in[0,h]\,,(i=\overline{0,2}),\lim_{|z|\to\infty}\Psi_j(x,z)=0,\forall x\in[0;0,5]\,,(j=1,2), \tag{10}$$

$$\lim_{|z|\to\infty} A_j(x,z)=0,\quad \forall x\in[0,1]\,,\ \lim_{|z|\to\infty} B_j(x,z)=0,\quad \forall x\in[0,1]\,,(j=1,2). \tag{11}$$

Решение задачи T_p будем искать в классе функций, представимых интегралом Фурье:

$$U(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x,y;\lambda)e^{-i\lambda z}d\lambda. \tag{12}$$

На основании (12), уравнения (1) сведем к следующему уравнению

$$0=\frac{\partial}{\partial x}\begin{cases} u_y-u_{xx}+\lambda^2u-\mu\, u(x,0,\lambda), & (x,y)\in D_1, \quad \lambda\in R,\\ u_{yy}-u_{xx}+\lambda^2u-\mu\, u(x,0,\lambda), & (x,y)\in D_2\end{cases} \tag{13}$$

В силу (12), задача T_p эквивалентно сводится к следующей задаче.

Задача T_p^λ. Определить функцию $u(x,y,\lambda)$ такую, что

1) $u(x,y,\lambda)\in C(\bar D_1\cup\bar D_2)\cap\ \cap C^1\left(D_1\cup D_2\cup J\cup\sigma_1\cup\gamma_0\right)$, причем $u_y(x,y,\lambda)$ может обращаться в бесконечность порядка меньше единицы в концах интервала J; 2) $u(x,y,\lambda)$ является регулярным решением уравнения (13) в областях D_j, $(j=1,2)$; 3) $u(x,y,\lambda)$ удовлетворяет условиям

$$u|_{\gamma_0}=\varphi_0(y,\lambda),\qquad u|_{\gamma_1}=\varphi_1(y,\lambda),\qquad u_x|_{\gamma_0}=\varphi_2(y,\ \lambda),\quad 0\le y\le h,\quad \lambda\in R,$$

$$u|_{\sigma_1}=\psi_1(x,\lambda),\ \ u_n|_{\sigma_1}=\psi_2(x,\lambda),\quad 0\le x\le 0,5,\ \ \lambda\in R,$$

$$\lim_{y\to-0}u(x,\,y,\lambda)=a_1(x,\lambda)\lim_{y\to+0}u(x,\,y,\lambda)+b_1(x,\lambda),\quad (x,0)\in\bar J,\ \ \lambda\in R,$$

$$\lim_{y\to-0}u_y(x,\,y,\lambda)=a_2(x,\lambda)\lim_{y\to+0}u_y(x,\,y,\lambda)+b_2(x,\lambda),\quad (x,0)\in J,\ \ \lambda\in R;$$

где $\varphi_0(y,\lambda)$, $\varphi_j(y,\lambda)$, $\psi_j(x,\lambda)$, $a_j(x,\lambda)$, $b_j(x,\lambda)$ $(j=1,2)$ — заданные функции, причем

$$\varphi_i(y,\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_i(y,z)e^{i\lambda z}dz,\ (i=\overline{0,2}),\quad \psi_j(x,\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi_j(x,z)e^{i\lambda z}dz,$$

$$a_j(y,\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}A_j(x,z)e^{i\lambda z}dz,\quad b_j(x,\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}B_j(x,z)e^{i\lambda z}dz,\ \ (j=1,2),$$

$$\varphi_0(0,\lambda)=\psi_1(0,\lambda),\psi_2(0,\lambda)=\varphi_0'(0,\lambda)+(\sqrt{2}-1)\varphi_2(0,\lambda),$$

$$\varphi_i(y,\lambda)\in C\,[0;h]\cap C^1(0,h),\quad (i=\overline{0,2}), \tag{14}$$

$$\psi_1(x,\lambda)\in C^2\left[0,\frac12\right]\cap C^3\left(0,\frac12\right),\quad \psi_2(x,\lambda)\in C^1\left[0,\frac12\right]\cap C^2\left(0,\frac12\right), \tag{15}$$

$$a_1(E,\lambda),\ \beta_1(E,\lambda)\in C^1(\overline{J})\cap C^2(J),\quad a_2(E,\lambda),b_2(E,\lambda)\in C(\overline{J})\cap C^2(J). \tag{16}$$

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 3. *Если выполнены условия* (2), (14), (15), (16), *то решение задачи* T_p^λ *для уравнения (12) в области* D *существует и единственно.*

Теорема 4. *Если выполнены условия* (2), (14),(15), (16), *то решение задачи* T_p^λ *для уравнения* (13) *в области* D *существует, единственно и дается формулой*

$u(x,y;\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}U(x,y,z)e^{i\lambda z}dz$, *причем при больших значениях* $|\lambda|$ *допускает оценку* $u\left(x,y,\lambda\right)=O\left(1\big/\left|\lambda\right|^{\delta}\right)$, $\delta>3$, *то при выполнении условия*(2)-(11) *в области* Ω *решение задачи* T_p *для уравнения* (1) *существует, единственно и находится формулой (12).*

Доказательство теоремы 3-4 следуют из принципа экстремума для нагруженных уравнений третьего порядка и метода интегральных уравнений.

Ключевые слова: Уравнение третьего порядка, нагруженное уравнение, преобразование Фурье, регулярное решение, принцип экстремума, оценка решения.

2010 Mathematics Subject Classification: 35M10, 35M12, 35K20, 35L20.

Литература

[1] Бицадзе А.В. Об уравнениях смешанного типа в трехмерных областях. //"Доклады АН СССР". 1962. Т.143. С. 1017-1919.

[2] Нахушев А.М. Об одном трехмерном аналоге задачи Геллерстедта.// Дифференциальные уравнения. 1968. **4**(1). С. 52-62.

[3] Салахитдинов М.С., Исломов Б. О трехмерном аналоге задачи Трикоми для уравнения смешанного типа. //Доклады АН СССР. 1990. **311**(4).С. 797-801.

[4] Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажонов М. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. Ташкент: Фан. 1986.

[5] Islomov B.I., Umarova, G. B. Three-dimensional problems for a parabolic-hyperbolic equation with two planes of change of type. //Lobachevskii J. Math. 2020. **41**(9). P.1811-1822.

[6] Islomov B.I., Alikulov E.K. Analogues of the Cauchy-Goursat problem for a loaded third-order hyperbolic type equation in an infinite three-dimensional domain. //Siberian Electronic Mathematical Reports. 2021. **18**(1). P.72-85.

[7] Islomov B.I., Alikulov Y.K. Boundary value problem for loaded equation of parabolic-giperbolic type of the third order in an infinite three-dimensional domain. //International journal of applied mathematics. 2021. **34**(2). P.158-170.

Об одной нелокальной задаче для уравнения смешанного типа четвёртого порядка со степенным вырождением

Б.Ж. КАДИРКУЛОВ[1], Д.Е. УЗАКБАЕВА[2]

[1]*Университет Альфраганус, Ташкент, Узбекистан*

[1,2]*Институт Математики имени В.И.Романовского АН РУз, Ташкент, Узбекистан,*

[1]b.kadirkulov@afu.uz, [2]uzaqbaevadilfuza1606@gmail.com

В прямоугольной области $\Omega = \{(x,t)\,|0 < x < 1, -\alpha < t < \beta\}$ рассмотрим уравнение смешанного типа четвёртого порядка со степенным вырождением вида

$$Lu \equiv \begin{cases} t^n u_{xxxx} + u_t = 0,\ t > 0; \\ (-t)^m u_{xxxx} + u_{tt} = 0,\ t < 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $n > 0$, $m > 0$, $\alpha > 0, \beta > 0$ - заданные действительные числа. Обозначим $\Omega_1 = \Omega \cap \{t > 0\}$, $\Omega_2 = \Omega \cap \{t < 0\}$.

Задача S. Найти в области Ω решение $u\,(x,t)$ уравнение (1) из класса

$$u(x,t) \in C^{3,1}_{x,t}(\bar{\Omega}) \cap C^2_t(\Omega_2) \cap C^4_x(\Omega_1 \cup \Omega_2), \tag{2}$$

удовлетворяющее условиям

$$u(1,t) = 0, u_x(0,t) + u_x(1,t) = 0, u_{xx}(0,t) = 0, u_{xxx}(0,t) + u_{xxx}(1,t) = 0, -\alpha \le t \le \beta. \tag{3}$$

$$u(x,-\alpha) = h \cdot u(x,\beta) + \varphi(x), 0 \le x \le 1 \tag{4}$$

здесь $\varphi(x)$ -заданная функция, h-действительное число.

В данной работе для вырождающегося уравнения смешанного типа четвёртого порядка в прямоугольнике изучается краевая задача с нелокальным граничным условием, связывающим значения искомого решения на нижнем и верхнем основаниях данного прямоугольника, которые принадлежат разным типам изучаемого уравнения. Методом спектрального анализа доказаны теоремы о существовании и единственности решения поставленной задачи, при этом решение построено в виде суммы ряда по собственным функциям соответствующей одномерной спектральной задачи. В работе также изучены спектральные свойства задачи типа Самарского-Ионкина для обыкновенного дифференциального уравнения четвёртого порядка, полученная с применением метода Фурье, найдены собственные числа, а также соответствующие собственные функции, доказана их полнота и базисность, также исследована сопряженная задача.

Отметим, что аналогичные задачи, в случае вырождающихся уравнений смешанного типа второго порядка изучены в работах [1], [2].

Финансирование: Данное исследование выполнено при финансовой поддержке Комитета науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № AP23488086).

Ключевые слова: вырождающийся уравнения, уравнение смешанного типа, задача типа Ионкина-Самарского, спектральный метод, полнота, базис Рисса, существование, единственность.

2020 Mathematics Subject Classification: 34B10, 34L10, 35M12

Литература

[1] К.Б.Сабитов, С.Н.Сидоров. Обратная задача для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения с нелокальным граничным условием, *Известия вузов. Математика*, **1** (2015), 46–59.

[2] С.Н.Сидоров. Нелокальные задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа со степенным вырождением, *Известия вузов. Математика*, **12** (2015), 55–65.

Об одной нелокальной задаче типа Бицадзе–Самарского для эллиптического уравнения с вырождением

Б.Ж. КАДИРКУЛОВ[1], О.Т. ЭРГАШЕВ[2]

[1]*Университет Альфраганус, Ташкент, Узбекистан*

[1,2]*Институт Математики имени В.И.Романовского АН РУз, Ташкент, Узбекистан,*

[1]b.kadirkulov@afu.uz, [2]okiljonergashev@gmail.com

Для уравнения

$$Lu \equiv y^m u_{xx} + u_{yy} = 0, \tag{1}$$

где

$$m = const > 0,$$

в вертикальной полуполосе $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < 1, y > 0\}$ рассмотрим следующую нелокальную задачу.

Задача 1. Найти функцию $u(x, y)$ со свойствами:

1) $u\,(x,t) \in C\left(\bar{\Omega}\right) \cap C^2\,(\Omega)$;

2) в области Ω удовлетворяет уравнению (1);

3) удовлетворяет условиям

$$\lim_{y\to+\infty} u(x,y) = 0 \text{ равномерно по } x \in [0,1], \tag{2}$$

$$u_x\,(0,y) = \varphi_1(y),\ u\,(1,y) - u\,(x_0,y) = \varphi_2(y),\ y \geq 0, \tag{3}$$

$$u(x;0) = \tau(x), 0 \leq x \leq 1, \tag{4}$$

где $\varphi_1(y), \varphi_2(y), \tau(x)$ — заданные функции.

В данной работе для вырождающегося эллиптического уравнения в вертикальной полуполосе исследована нелокальная задача типа Бицадзе-Самарского, связивающее значение искомой функции на правой границе со значением функции во внутренной точке области. Единственность решения задачи доказана с помощью принципа экстремума, а существование решения задачи установлена методами разделения переменных и интегральных уравнений. В работе также изучены спектральные свойства задачи типа Бицадзе-Самарского для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, полученная с применением спектрального метода, найдены собственные числа, а также соответствующие собственные функции, доказана их полнота и базисность, а также исследована сопряженная задача.

Аналогичные задачи, исследуемыми спектральным методом, рассматривались в публикациях [1],[2].

Ключевые слова: вырождающиеся уравнения, полуполоса, задача типа Бицадзе-Самарского, собственные числа, корневые функции, полнота, базисность, базис Рисса.

2020 Mathematics Subject Classification: 34L10, 35J25, 35J70

Литература

[1] Моисеев Е. И. О решении спектральным методом одной нелокальной краевой задачи, *Дифференц. уравнения*, **35**:8 (1999), 1087–1093.

[2] Репин О. А. Задача Трикоми для уравнения смешанного типа в области, эллиптическая часть которой – полуполоса, *Дифференц. уравнения*, **32**:4 (1996), 565–567.

О полноте потенциала простого слоя в ядре оператора Лапласа

Т.Ш. КАЛЬМЕНОВ[1], У.А. ИСКАКОВА[2], А. КАДИРБЕК[3]

[1,2,3]*Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*
kalmenov.t@gmail.ru

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ - ограниченная область с границей $\partial\Omega$. Определим Δ_0 как замыкание оператора Лапласа Δ в $L_2(\Omega)$ на подмножестве функций $u \in C^2(\Omega)$ условием:

$$u|_{\partial\Omega} = \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0,$$

и назовем его минимальным оператором Δ, где $\partial/\partial n$ - внешняя нормальная производная. Кроме того, как описано Дезиным [1], мы обозначаем Δ_0^* как сопряженный оператор Δ_0, который называется максимальным оператором, без каких-либо условий на $\partial\Omega$.

Пусть u_μ потенциалом простого слоя оператора Лапласа следующим образом:

$$u_\mu(x) = \int_{\partial\Omega} \varepsilon(x-y)\mu(y)dS_y, \qquad x \in \Omega, \tag{1}$$

где

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}|x|, & n = 1, \\ \dfrac{1}{2\pi}\ln|x|, & n = 2, \\ -\dfrac{1}{(n-2)\omega_n}|x|^{2-n}, & n \geq 3, \end{cases}$$

фудаментальное решение оператора Лапласа и $\mu \in W_2^{1/2}(\partial\Omega)$ плотность потенциала простого слоя.

Так как $\Delta_0^* u_\mu = 0$, то возникает вопрос: $\{u_\mu\}_\mu \subset W_2^2(\Omega)$ плотна ли система в $\ker(\Delta_0^*)$? то есть: можем ли мы описать все решения $u(x) \in W_2^2(\Omega)$ уравнения

$$\Delta_0^* u = 0$$

через потенциалов простого слоя (1)?

Имеет место

Теорема 1. *Потенциал простого слоя u_μ совпадает с константой тогда и только тогда, когда $\mu \equiv 0$. Таким образом, ядро $\ker\{\Delta_0^*\}$ разлагается в линейную прямую сумму в $L_2(\Omega)$*

$$\ker(\Delta_0^*) = \overline{\{u_\mu\}}_\mu \dot{+} \{c\},$$

где $\overline{\{u_\mu\}}_\mu$ - замыкание линейных комбинаций $\{u_\mu\}_\mu$ в $L_2(\Omega)$. Кроме того, если

$$\int_{\partial\Omega} \mu(y) \int_\Omega \frac{dx}{|x-y|^{n-2}} dS_y = 0,$$

тогда ядро $\ker(\Delta_0^*)$ разлагается на ортогональную сумму в $L_2(\Omega)$

$$\ker(\Delta_0^*) = \overline{\{u_\mu\}}_\mu \oplus \{c\}.$$

В двумерном случае потенциал простого слоя u_μ определяется как

$$u_\mu(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \ln|x-y|\,\mu(y) dS_y.$$

По сравнению со случаями $n \geq 3$ логарифмическое ядро не стремится к нулю когда $|x| \to \infty$, По этой причине для μ необходимо дополнительное условие.

Теорема 2. *Предположим, что*

$$\int_{\partial\Omega} \mu(y) dS_y = 0,$$

тогда потенциал простого слоя u_μ совпадает с константой тогда и только тогда, когда $\mu \equiv 0$. Таким образом, ядро $\ker(\Delta^*)$ разлагается в линейную прямую сумму в $L_2(\Omega)$

$$\ker(\Delta_0^*) = \overline{\{u_\mu\}}_\mu \dot{+} \{c\}.$$

Кроме того, если

$$\int_{\partial\Omega} \mu(y) \int_\Omega \ln|x-y| dS_y = 0,$$

тогда ядро $\ker(\Delta_0^*)$ разлагается на ортогональную сумму в $L_2(\Omega)$

$$\ker(\Delta^*) = \overline{\{u_\mu\}}_\mu \oplus \{c\}.$$

В случае $n = 1$ непосредственным вычислением получим в том что

$$\overline{\{u_\mu\}}_\mu = \ker\{\Delta^*\}.$$

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № AP23488701).

Ключевые слова: потенциал простого слоя, максимальный оператор, минимальный оператор.

2010 Mathematics Subject Classification: 47G40, 35A02, 35G15

Литература

[1] Dezin A. A. General questions of the theory of boundary value problems. *"Nauka Moscow,* (1980).

Разрешимость краевых задач с общими условиями для тригармонического уравнения в шаре

Б.Д. КОШАНОВ[1], Г.Д. СМАТОВА[2], Н.М. ШЫНЫБАЕВА[3]

[1,3]*Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*
[2]*Сатпаев университет, Алматы, Казахстан*

[1]koshanov@math.kz, [2]smatova1977@mail.ru, [3]shynybayeva001@mail.ru

Одним из эффективных методов представления решений краевых задач для эллиптических уравнений является метод, основанный на построении функции Грина задачи. Много работ посвящено построению функции Грина в явном виде для различных классических краевых задач. Явный вид функции Грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения в единичном шаре построен различными способами в работах [1–5]. В [6,7] исследованы разрешимость и построены функции Грина для нескольких локальных и нелокальных краевых задач с инволюцией для бигармонического уравнения. Условия разрешимости некоторых вариантов краевых задач для бигармонического уравнения в шаре получены также в [8]. В [9] найдены решения задач Дирихле и Неймана для однородного полигармонического уравнения без использования функции Грина. В [10] приведены функции Грина задач Навье [11] и Рикье-Неймана для бигармонического уравнения в шаре, а в [12] построены функции Грина таких задач для полигармонического уравнения. В [13,14] найдены условии разрешимости некоторых краевых задач для полигармонического уравнения и приведены примеры для бигармонического и тригармонического уравнения. В [15,16] исследованы фредгольмова разрешимость и вычислены формулы индекса обобщенной задачи Неймана для эллиптических уравнений высокого порядка, содержащей степени нормальных производных в граничных условиях.

В данной работе исследуется следующая краевая задача с общими условиями для тригармонического уравнения в единичном шаре $S = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$

$$\Delta^3 u(x) = 0, \quad x \in S, \tag{1}$$

$$\begin{cases} a_{00}u + a_{01}\frac{\partial}{\partial\nu}u + a_{02}\Delta u + a_{03}\frac{\partial}{\partial\nu}\Delta u + a_{04}\Delta^2 u = \varphi_1(x),\ x \in \partial S, \\ a_{11}\frac{\partial}{\partial\nu}u + a_{12}\Delta u + a_{13}\frac{\partial}{\partial\nu}\Delta u + a_{14}\Delta^2 u + a_{15}\frac{\partial}{\partial\nu}\Delta^2 u = \varphi_2(x),\ x \in \partial S, \\ a_{21}\frac{\partial}{\partial\nu}u + a_{22}\Delta u + a_{23}\frac{\partial}{\partial\nu}\Delta u + a_{24}\Delta^2 u + a_{25}\frac{\partial}{\partial\nu}\Delta^2 u = \varphi_3(x),\ x \in \partial S, \end{cases} \tag{2}$$

где $\frac{\partial}{\partial\nu}$ — внешняя нормальная производная к ∂S, a_{ij} — некоторые постоянные ($i = 0$, $j = \overline{0,4}$, $i = 1,2$, $j = \overline{1,5}$).

Эта задача обобщает задачу Дирихле ($a_{00} \neq 0$, $a_{11} \neq 0$, $a_{22} \neq 0$, $a_{ij} = 0$ для остальных i, j), задачу Рикье ($a_{00} \neq 0$, $a_{12} \neq 0$, $a_{23} \neq 0$, $a_{ij} = 0$ для остальных i, j), но не обобщает задачу Неймана.

Теорема 1. *a) Решение задачи (1)–(2) из класса $C^3(\overline{S})$ при произвольных функциях $\varphi_1(x) \in C^2(\partial S)$, $\varphi_2(x) \in C^1(\partial S)$, $\varphi_3(x) \in C^1(\partial S)$ существует и единственно тогда и только тогда, когда полином*

$$\det P(\lambda) =$$

$$\begin{vmatrix} a_{00} + \lambda a_{01} & 2[a_{01} + 2(2\lambda+n)(a_{02} + \lambda a_{03})] & 8[a_{02} + a_{03} + (2+2\lambda+n)(2\lambda+n)a_{04}] \\ \lambda a_{11} & 2[a_{11} + 2(2\lambda+n)(a_{12} + \lambda a_{13})] & a_{12}^* \\ \lambda a_{21} & 2[a_{21} + 2(2\lambda+n)(a_{22} + \lambda a_{23})] & a_{22}^* \end{vmatrix}, \tag{3}$$

$$a_{i2}^* = 8\left[a_{i2} + a_{i3} + (2+2\lambda+n)(2\lambda+n)(a_{i4} + \lambda a_{i5})\right],\ i = 1,2,$$

не имеет целочисленных корней в $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.
b) Если $P(m) = 0$, то однородная задача (1)–(2) имеет решение

$$u(x) = \left[C_1 - C_2 + (C_2 - C_3)\,|x|^2 + (C_3 - C_2)\,|x|^4\right] H_m(x), \tag{4}$$

где $H_m(x)$ — однородный гармонический полином степени m [17], а константы C_1, C_2, C_3 находятся из системы уравнений

$$P(m)\overrightarrow{C} = 0.$$

Финансирование: Работа выполнена при поддержке грантов BR20281002 и AP19678182 Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан.

Ключевые слова: полигармонические уравнения, тригармонические уравнения, задача Дирихле, задача Неймана, задача Навье, задача Рикье-Неймана, функция Грина.

2010 Mathematics Subject Classification: 35J08, 31B30, 35J40

Литература

[1.] Boggio T. Sulle funzioni di Green d'ordine m //Palermo Rend. 1905. V. 20. P. 97–135.

[2.] Begerh H., Vu TN.H., Zhang Z.X. Polyharmonic Dirichlet Problems //Proceedings of the Steklov Institute of Math. 2006. V. 255. P. 13–34.

[3.] Kal'menov T.Sh., Koshanov B.D., Nemchenko M.Y. Green Function Representation in the Dirichlet Problem for Polyharmonic Equations in a Ball //Doklady Mathematics. 2008. V.78(1). P. 528–530.

[4.] Koshanov B.D., Kuntuarova A.D. Equivalence of the Fredholm solvability condition for the Neumann problem to the complementarity condition //Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science. 2021. V. 111(3). P. 39–51.

[5.] Karachik V.V. Construction of Polynomial Solutions to the Dirichlet Problem for the Polyharmonic Equation in a Ball //Comp. Math. and Math. Physics. 2014. V. 54. P. 1122–1143.

[6.] Karachik V. Green's functions of some boundary value problems for the biharmonic equation //Complex Var. and Elliptic Eq. 2022. V. 67. P. 1712–1736.

[7.] Karachik V., Turmetov B., Yuan H. Four Boundary Value Problems for a Nonlocal Biharmonic Equation in the Unit Ball //Mathematics. 2022. 10. 1158.

[8.] Karachik V.V., Torebek B.T. On the Dirichlet-Riquier problem for biharmonic equations //Math. Notes. 2017. V. 102. P. 31–42.

[9.] Karachik V.V. Dirichlet and Neumann boundary value problems for the polyharmonic equation in the unit ball //Mathematics. 2021. 9. 1907.

[10.] Karachik V.V. Green's Functions of the Navier and Riquier-Neumann Problems for the Biharmonic Equation in the Ball //Differential Eq. 2021. V. 57. P. 654–668.

[11.] Sweers G. A survey on boundary conditions for the biharmonic //Complex Var. and Elliptic Eq. 2009. V. 54. P. 79–93.

[12.] Karachik V. Riquier-Neumann Problem for the Polyharmonic Equation in a Ball //Mathematics. 2023; 11: 1000.

[13.] Кангужин Б.Е., Кошанов Б.Д. Необходимые и достаточные условия разрешимости краевых задач для полигармонического уравнения //Уфимский математический журнал. 2010. Т. 2(2). С. 41–52.

[14.] Koshanov B.D. About solvability of boundary value problems for the nonhomogeneous polyharmonic equation in a ball //Journal Advances in Pure and Applied Math. 2013. V. 4(4). P. 351–373.

[15.] Soldatov A.P. On the Fredholm property and index of the generalized Neumann problem //Differential eq. 2020. V. 56. P. 212–220.

[16.] Koshanov B., Soldatov A. On Fredholm solvability and on the index of the generalized Neumann problem for an elliptic equation //Complex Var. and Elliptic Eq. 2022. V. 67(12). P. 2907–2923.

[17.] Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. -М.: Наука, 1974. -809 с.

Спектральные свойства линейного оператора типа Кортевега-де Фриза

М.Б. МУРАТБЕКОВ[1], А.О. СУЛЕЙМБЕКОВА[2]

[1,2]*Таразский университет имени М.Х.Дулати, Тараз, Казахстан*

[1]musahan_m@mail.ru, [2]suleimbekovaa@mail.ru

Как известно, уравнение в частных производных третьего порядка являються одним из основных уравнений теорий волн. Например, в частности, линеаризованные уравнения типа Кортевега-де Фриза с переменными коэффициентами моделирует ионно-акустические волны в плазменные и акустические волны на кристалической решетке.

В последнее время интерес к дифференциальным уравнениям в частных производных третьего порядка возрос благодаря новыми приложениями в физике, механике и биологии.

Из обзора литературных источников следует, что ранее в основном изучены вопросы о существовании и гладкости решений для дифференциальных уравнений с частными производными третьего порядка в случае с постоянными и ограниченными коэффициентами.

В отличие от этих интересных работ, в настоящей статье рассматриваются проблемы существование, компактность и оценки собственных и s-чисел, а также полнота корневых векторов резольвенты одного класса линейных сингулярных операторов типа Кортевега-де Фриза в случае неограниченной области с сильно растущими коэффициентами.

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № AP19676466).

Ключевые слова: резольвента, разделимость, оприорная оценка, линейный оператор, дифференциальные уравнения в частных производных, уравнение Кортевега-де Фриза.

2010 Mathematics Subject Classification: 35R20, 35P05, 47B39

Литература

[1] Temam R. Sur un probleme non linearie, *Journal de Mathmatiques Pures et Appliques*, **48**:2 (1969), 159–172.

[2] Villanueva A. On Linearized Korteweg-de Vries Equations, *Journal of Mathematics Research*, **4**:1 (2012), 2–8.

[3] Talfin E. Analytic Linearization of the Korteweg-de Vries Equation, *Pacific Journal of Mathematics*, **108**:1 (1983), 203–220.

[4] Kato T. On the Korteweg-de Vries Equation, *manuscripta mathematica*, **28** (1979), 89–99.

[5] Saut J. C., Temam R. Remarks on the Korteweg-de Vries Equation, *Isreal Journal of mathematics*, **24**:1 (1976), 78–87.

Построение решения начально-краевой задачи для волнового уравнения с периодическими краевыми условиями

А.Н. ОМАРБАЕВА[1], М.А. САДЫБЕКОВ[2]

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

[1]arai-79@mail.ru, [2]sadybekov@math.kz

В области

$$\Omega = \{(x,t) : 0 < x < 1, 0 < t < T\}$$

рассматривается начально-краевая задача для волнового уравнения

$$u_{tt}(x,t) - a^2 u_{xx}(x,t) = 0,$$

с классическими начальными условиями

$$u(x,0) = \tau(x), \;\; u_t(x,0) = \nu(x), \;\; 0 \le x \le 1,$$

и с периодическими краевыми условиями по пространственной переменной

$$u(0,t) = u(1,t), \;\; u_x(0,t) = u_x(1,t), \;\; 0 \le t \le T.$$

Здесь $\tau(x)$ и $\nu(x)$ заданные функции.

Хорошо известно, что классическое решение этой начально-краевой задачи существует, единственно и может быть построено методом разделения переменных Фурье. Этот метод представляет решение задачи в виде ряда по собственным функциям спектральной задачи, возникающей в ходе использования метода Фурье. Для равномерной сходимости полученных рядов и вторых производных от них необходимо требовать повышенную гладкость от начальных данных задачи.

В работе В.И. Корзюк [1] для первой начально-краевой задачи для волнового уравнения был предложен метод характеристик, который позволяет записать решение задачи в явном аналитическом виде. Представление решения получается в произвольной точке области по формуле, аналогичной формуле Даламбера. В [2] этот результат был им распространен на случай второй начально-краевой задачи.

Рассмотрение начально-краевых задач с нелокальными краевыми условиями является гораздо более сложным. В настоящем докладе реализован аналог метода характеристик и классическое решение начально-краевой задачи для волнового уравнения с классическими начальными условиями и с периодическими краевыми условиями по пространственной переменной построено в явном виде.

Финансирование: Данное исследование выполнено в рамках проекта грантового финансирования Комитета науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № AP26194859).

Ключевые слова: волновое уравнение, нелокальные краевые условия, метод характеристик, классическое решение.

2020 Mathematics Subject Classification: 35L20

Литература

[1] Корзюк В.И., Чеб Е.С., Ширма М.С. Решение первой смешанной задачи для волнового уравнения методом характеристик, *Труды Института математики*, **17**:2 (2009), 23–34.

[2] Корзюк В.И., Наумовец С.Н., Севастюк В.А. О классическом решении второй смешанной задачи для одномерного волнового уравнения, *Труды Института математики*, **26**:1 (2018), 35–42.

Условия максимальной регулярности решения одного дифференциального уравнения второго порядка

Қ.Н. ОСПАНОВ[1], Р.Д. АХМЕТКАЛИЕВА[2], А. АЙДОС[3]

[1,2,3]*Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан*

[1]kordan.ospanov@gmail.com, [2]raya_84@mail.ru, [3]aidosaibubi@gmail.com

Доклад посвящен вопросам корректности и максимальной регулярности обобщенного решения следующего уравнения

$$-(\rho(x)y')' + r(x)y' + q(x)y = f(x), \tag{1}$$

где ρ, r и q гладкие, но вообще говоря, неограниченные функции $\rho(x) > 0, r(x) \ge 1$, а $f \in L_p = L_p(-\infty, +\infty), 1 < p < \infty$.

Рассмотрим оператор $l_0y = -(\rho(x)y')' + r(x)y' + q(x)y$ с $D(l_0) = C_0^{(2)}(-\infty, +\infty)$.

Пусть l — его замыкание в L_p. Функцию $y \in D(l)$ такую, что $ly = f$, назовем решением уравнения (1).

Уравнение (1), в основном, изучалось в случае $r = 0$ и $q \geq \delta > 0$ и $p = 2$ [1]. Когда r растет на бесконечности и $\rho = 1$, оно рассмотрено в [2]. К уравнению (1) приводят задачи из стохастического анализа и биологии [3].

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № AP23488049).

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, неограниченный коэффициент, корректность, оценка производной, максимальная регулярность решения.

2010 Mathematics Subject Classification: 34A30, 34B20, 34C11

Литература

[1] Отелбаев М. О разделимости эллиптических операторов, *Доклады АН СССР*, **234** (1977), 540–543.

[2] Ospanov K.N. Maximal L_p - regularity for a second-order differential equation with unbounded intermediate coefficient, *Electron. J. Qual. Theory Dif. Equations*, **65** (2019), 1–13.

[3] Bogachev, V.I., Krylov, N.V., Rockner, M., Shaposhnikov, S.V. *Fokker–Planck–Kolmogorov Equations. Mathematical Surveys and Monographs vol. 207.*, AMS, Providence, (2015).

Оценка решений одного класса конечномерных нелинейных уравнений

М. ОТЕЛБАЕВ[1], Б.Д. КОШАНОВ[2]

[1,2]*Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*

[1]otelbaevm@mail.ru, [2]koshanov@math.kz

В этой статье мы получаем две теоремы об априорных оценках решений нелинейных уравнений в конечномерном пространстве. Эти теоремы доказаны при выполнении некоторых условий, которые заимствованы из условий которым удовлетворяют конечномерные аппроксимации одного класса нелинейных начально-краевых задач.

1. Введение и о происхождении задачи

Многие задачи математической физики благодаря закону сохранения энергии позволяют доказать существование решения, которое удовлетворяет энергетической оценке. Энергетическая оценка в случае, когда количество пространственных переменных n не меньше чем 3, обычно не позволяет использовать теорию возмущений.

Решения, которые не позволяют (точнее, не могут позволить) использовать теорию возмущений, называются (обычно) „слабыми“ решениями. Возможность использовать теорию возмущений очень важна в задачах математической физики. Поэтому в теории дифференциальных уравнений сильно интересуются вопросами существования решения, позволяющего использовать теорию возмущений. Решение уравнения, которое позволяет использовать теорию возмущений, математически называют „сильным” решением (не всегда).

Многие задачи математической физики могут быть записаны в „ограниченной записи“ (в виде интегрального уравнения) обычно следующего вида

$$f(u) = u + L(u) = g, \tag{1}$$

где $L(u)$ – нелинейная часть. Это уравнение изучается часто в метрике некоторого Банахова или Гильбертова пространства H.

При переходе к „ограниченной записи“ энергетическая оценка, обычно выполняющаяся для задач математической физики, перейдет в априорную оценку следующего вида

$$\|G(u)\| \leq C \cdot \|u + L(u)\| = C\|g\|, \tag{2}$$

где C — постоянное число, не зависящее от $u \in H$, а G — вполне непрерывный оператор в H.

Априорная оценка (2) обычно не позволяет использовать теорию возмущений. Поэтому возникает необходимость получить оценку следующего вида

$$\|u\| \leq \varphi\left(\|f(u)\|\right), \tag{3}$$

где $\varphi(\cdot)$ — непрерывная на $[0, \infty)$ функция.

Наличие оценки вида (3), как правило, открывает возможность использования теории возмущений (при подходящем выборе пространства H).

Весьма важной проблемой является проблема существования последовательности конечномерных аппроксимаций задачи (1) (точнее, аппроксимаций операции $u + L(u)$):

$$f_1(\cdot),\ f_2(\cdot),\ \dots\ ,\ f_n(\cdot),\ \dots \tag{4}$$

рассматриваемых в пространствах

$$H_1,\ H_2,\ \dots\ ,\ H_n,\ \dots\ , \quad \dim H_n = n, \tag{5}$$

таких, что выполняются априорные оценки вида (2) и возможно получить аналогичную (3) оценку.

При этом подразумевается, что H_n $(n = 1, 2, \dots)$ является подпространством H и метрика H_n — есть метрика, индуцированная из метрики H.

Задача описания динамики несжимаемой жидкости, в силу своей теоретической и прикладной важности, привлекает внимание многих исследователей.

Данная работа посвящена к проблеме о существовании и гладкости решений уравнений математической физики [1]. В работах [2-4] приведены достаточно полный анализ современного состояния проблемы и обзор имеющейся литературы, предложены методы решения задачи. Работы [5-13] посвящены к исследованию разрешимости в целом уравнений математической физики, непрерывная зависимость решения параболического уравнения, а также гладкости решения.

Эта работа возникла в результате многочисленных попыток авторов решить проблему существования сильного решения уравнения математической физики.

В этой работе мы получаем две теоремы об априорных оценках решений нелинейных уравнений в конечномерном гильбертовом пространстве. Работа состоит из четырех пунктов. Первый пункт посвящен введению и происхождению задачи. Во втором пункте приводятся используемые обозначения и формулировка основных результатов. В третьем пункте приведено доказательство теоремы 1, которое в пределе дает слабую разрешимость многих задач математической физики. В четвертом пункте доказывается теорема 2, который в пределе позволяет установить сильную разрешимость некоторых задач математической физики, допускающих теорию возмущений. Условия теорем такова, что можно использовать при изучении некоторого класса начально-краевых задач для получения сильных априорных оценок при наличии слабых априорных оценок.

2. Используемые условия и формулировка результатов

Займемся выводом равномерных оценок для нелинейных задач в конечномерном пространстве. Рассматриваемые уравнения являются (как правило) аналогами конечномерных приближений уравнений математической физики, записанных в „ограниченной записи“.

Всюду в этом разделе H — конечномерное действительное гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ и нормой $\| \cdot \|$.

Нас будет интересовать уравнение следующего вида

$$u + L(u) = g \in H, \tag{6}$$

где $L(\cdot)$ — нелинейное непрерывное преобразование, g — элемент пространства H. Решение u задачи (6) ищется в H.

Мы нацелены на такие конечномерные уравнения вида (6), которые есть конечномерные аппроксимации бесконечномерных задач вида (6) в бесконечномерном гильбертовом пространстве. При этом окажется весьма важным получение *не зависящих от номера аппроксимации оценок, позволяющих переходить к пределу*, и получить в пределе априорную оценку для решения бесконечномерной задачи. Бесконечномерные задачи вида (6), на которые мы нацелены в дальнейшем, являются, как правило, задачами математической физики, записанными в ограниченной форме.

Здесь и всюду далее $f(u)$ будет означать операцию вида

$$f(u) := u + L(u). \tag{7}$$

Если $\xi \in [0, +\infty)$ — параметр и вектор $u(\xi)$ есть вектор-функция, непрерывно дифференцируемая по параметру ξ, то будем предполагать, что также непрерывно дифференцируема и вектор-функция $L(u(\xi))$, а также возникающие в дальнейшем из $L(u)$ и $f(u)$ выражения.

Введем обозначения L_u:

$$(L(u(\xi)))_\xi = L_{u(\xi)} u_\xi(\xi). \tag{8}$$

Очевидно, что L_u (при каждом $u \in H$) будет линейным оператором

$$L_u v = (L(u(\xi)))|_{u_\xi = v}. \tag{9}$$

Имеем

$$(f(u(\xi)))_\xi = u_\xi + L_u u_\xi = (E + L_u) u_\xi.$$

В дальнейшем, если $u_0, v_0 \in H$, то вектор $L_{u_0} v_0$ – понимаем следующим образом: берем непрерывно дифференцируемую вектор-функцию $u(\xi)$ такую, что

$$u|_{\xi=0} = u_0, \quad u_\xi(\xi)|_{\xi=0} = v_0$$

и за $L_{u_0} v_0$ принимаем вектор

$$L_{u_0} v_0 = (L(u(\xi))_\xi \big|_{\xi=0}.$$

Здесь и всюду в дальнейшем E — единичное преобразование. Обозначим

$$D_u = E + L_u, \qquad D_u^* = E + L_u^*, \tag{10}$$

$$D_u^* f(u) = (E + L_u^*) f(u). \tag{11}$$

$$M_u a = \left(D_{u(\xi)}^* f(u(\xi)) \right)_\xi \Bigg|_{\substack{u(\xi) = u \\ u_\xi(\xi) = a}} = M_u u_\xi \big|_{u_\xi = a} = M_u a. \tag{12}$$

Приведем используемые условия.

Условие У1: *Для операторов* $L(\cdot)$, L_u, L_u^*, D_u, D_u^* *выполнены условия*

$$\begin{cases} \|M_u - M_v\|_{H\to H} + \|L(u) - L(v)\| + \|L_u - L_v\|_{H\to H} + \\ + \|L_u^* - L_v^*\|_{H\to H} \le \psi(\|u\|)\, \psi(\|v\|)\, \|u - v\|, \\ \|M_v u\| + \|D_v^* u\| + \|D_v u\| \le \psi(\|v\|)\, \|u\|, \end{cases} \tag{13}$$

где $\|\cdot\| = \|\cdot\|_H$, $\psi(\cdot)$ *— неубывающая на* $[0, \infty)$, *положительная непрерывная функция.*

Условие У2: *Существуют линейные обратимые операторы* T *и* Q *такие, что*

$$\|T\| \le C_T, \quad \|Q\| \le C_T, \quad \|T^{-1}\| < \infty, \quad \|Q^{-1}\| < \infty, \tag{14}$$

и для любого $u \in H$ *выполнены неравенства*

$$\langle Tu, L(u)\rangle \ge 0, \quad \langle Tu, u\rangle \ge \|Qu\|^2. \tag{15}$$

В (14) C_T *— некоторое фиксированное постоянное число.*

В дальнейшем через C или c (прописные или строчные, с индексами или без индексов) будем обозначать постоянные числа (вообще говоря, разные в разных местах), не зависящие от рядом стоящих множителей.

Справедлива

Теорема 1. *Пусть выполнены условие У1 и условие У2. Тогда для любого* $g \in H$ *задача*

$$f(u) = g \tag{16}$$

имеет решение $u \in H$, *удовлетворяющее оценке*

$$\|Qu\|^2 \le C_T\, \|g\|^2, \tag{17}$$

где Q *— оператор из условия У2, а* C_T *— константа из условия У2.*

Обозначениями преобразований $f(u)$, $L(u)$, операторов $L_u\cdot$, $D_u\cdot$, $M_u\cdot$ (определенных при каждом $u \in H$, (см. (6) - (11)) и их сопряженных L_u^*, D_u^* и M_u будем пользоваться без оговорок.

Введем также обозначения:

$$J(u) = \|u\|^2 \, \exp\left\{-\|f(u)\|^2\right\}, \tag{18}$$

$$N(u) = D_u^* f(u) - \gamma(u)\, u\,. \tag{19}$$

Часто без оговорок используем обозначения (18) и (19), а также обозначения, возникшие в формулировках условий У1 и У2, и обозначения, которые возникнут в формулировках ниже приведенных условий У3 и У4.

Условие У3: *Существует обратимый оператор* G, *такой, что*

$$\|G\|_{H\to H} \le C_0 < \infty, \quad \|G^{-1}\| < \infty \tag{20}$$

и для любого $u \in H$ *выполнено неравенство*

$$\|G\,u\|^2 \le d_0\ \|f(u)\|^2, \tag{21}$$

где $d_0 > 0$ *— постоянное число.*

Условие У4: *Если* $0 \ne u_0 \in H$, $\gamma(u) > \|u\|^{-2}$ *и* $N(u) = 0$, *то выполнены строгие неравенства*

$$\inf_{\{a\}} \frac{\langle M_u P_u a, P_u a\rangle - \gamma(u)\|P_u a\|^2}{\|P_u a\|^2} < 0 < \sup_{\{a\}} \frac{\langle M_u P_u a, P_u a\rangle - \gamma(u)\|P_u a\|^2}{\|P_u a\|^2}. \tag{22}$$

Теорема 2. *Если выполнены условия У1, У3 и У4, то для любого* $u \in H$ *выполнена априорная оценка:*

$$\|u\|^2 \le C\, \exp\left\{\|f(u)\|^2\right\}. \tag{23}$$

Оценка (23) выполняется, если соблюдаются условия У1, У3 и ниже следующее

Условие У5: *Существуют постоянные числа* c_0, c_1, m *и самосопряженный оператор* T, *такие, что если* $\|u\| \ge 1$, *то выполняются неравенства*

$$\|L(u)\| \ge c_0\, \|Tu\|^m, \qquad \|u\| \le c_1\, \|u\|^m. \tag{24}$$

Замечание 1. Если выполняются условия теоремы 1, то выполняется условие У3. Это вытекает из теоремы 1.

3. Доказательство теоремы 1

Пути доказательства теорем, содержания которых подобны утверждению теоремы 1, хорошо известны, и мы могли бы ограничиться ссылкой на них. Однако ради полноты излагаемых результатов мы снабжаем теорему 1 доказательством.

Для доказательства используем один общеизвестный прием (в удобной для нас форме).

Пусть $g \in H$. Обозначим через $M(g)$ множество векторов

$$M(g) = \{u \in H : \langle Tu, u \rangle \leq 16 \langle Tg, g \rangle\}, \tag{25}$$

где T — оператор из условия У2.

Предположим, что уравнение $u + L(u) = g$ не имеет решения $u \in M(g)$. Определим преобразование

$$F(u) = -\frac{u + L(u) - g}{\sqrt{\langle T(u + L(u) - g), u + L(u) - g \rangle}} 4\sqrt{\langle Tg, g \rangle}. \tag{26}$$

Так как уравнение $u + L(u) = g$ не имеет решения, то в силу условия У2 (см. (15)), преобразование $F(\cdot)$ непрерывно. Легко видеть, что это преобразование переводит множество $M(g)$ в себя. Поэтому, в силу теоремы Браудера о неподвижной точке и конечномерности H, преобразование $F(\cdot)$ имеет неподвижную точку $u_0 \in M(g)$, то есть

$$F(u_0) = u_0. \tag{27}$$

Подействуем на (27) оператором T, а затем полученное равенство скалярно умножим на $u_0 + L(u_0) - g$. Тогда, используя (26), получаем

$$\begin{aligned} -A :\equiv -4\sqrt{\langle Tg, g \rangle}\sqrt{\langle T(u_0 + L(u_0) - g), u_0 + L(u_0) - g \rangle} = \\ = \langle Tu_0, u_0 + L(u_0) - g_0 \rangle \geq \langle Tu_0, u_0 \rangle - \langle Tu_0, g \rangle = \\ = \langle Tu_0, u_0 \rangle - \tfrac{1}{2} \left(\langle Tu_0, g \rangle + \langle u_0, T^* g \rangle \right). \end{aligned} \tag{28}$$

При выводе (28) в предпоследнем переходе использовано (15) из условия У2.

Так как согласно условию У2 неравенство $\langle Tv, v \rangle \geq \|Qv\|^2$ выполнено для любого $v \in H$ и оператор Q обратим, то величину $\langle Tu_0, u_0 \rangle$ можно принять за квадрат нормы вектора u_0, а величину $\frac{1}{2} \left(\langle Tu_0, g \rangle + \langle u_0, T^* g \rangle \right)$ – за (согласованное с этой нормой) скалярное произведение векторов u_0 и g в некотором действительном гильбертовом пространстве. Поэтому можно использовать известное неравенство Коши и получим неравенство

$$-A \geq \langle Tu_0, u_0 \rangle - (\varepsilon^{-1} \langle Tu_0, u_0 \rangle + \varepsilon \langle Tg, g \rangle) = \langle Tu_0, u_0 \rangle (1 - \varepsilon^{-1}) - \varepsilon \langle Tg, g \rangle. \tag{29}$$

Из (27) и (26) имеем

$$\langle Tu_0, u_0 \rangle = \langle TF(u_0), F(u_0) \rangle = 16 \ \langle Tg, g \rangle.$$

Отсюда и из (29) получаем

$$-A \geq [(1 - \varepsilon^{-1})16 - \varepsilon] \ \langle Tg, g \rangle.$$

Выбрав здесь $\varepsilon = 2$, получаем $-A \geq 6 \ \langle Tg, g \rangle$.

Так как левая часть неравенства есть отрицательная величина, то оно противоречит неравенству (15) из условия У2. Это доказывает, что уравнение $u + Tu = g$ имеет решение $u \in M(g)$.

Для решения уравнения $u + L(u) = g$, умножая его скалярно на Tu, имеем

$$\langle Tu, u \rangle + \langle Tu, L(u) \rangle = \langle Tu, g \rangle = \frac{1}{2} \left(\langle Tu, g \rangle + \langle u, T^* g \rangle \right).$$

Здесь справа стоит скалярное произведение векторов Tu и g в некотором гильбертовом пространстве. Применяя известное неравенство Коши и учитывая первое неравенство из (15) условия У2, получаем:

$$\langle Tu, u\rangle \leq \left(\langle Tu, u\rangle\right)^{1/2} \left(\langle Tg, g\rangle\right)^{1/2}.$$

Отсюда

$$\langle Tu, u\rangle \leq \langle Tg, g\rangle \leq \|Tg\| \|g\| \leq C_T \|g\|^2,$$

где C_T — константа из условия У2.

Теперь из второго неравенства (15) условия У2 получаем требуемое:

$$\|Qu\|^2 \leq C_T \|g\|^2.$$

Замечание 2. Теорема 1 позволяет доказать существования „слабого“ решения некоторых задач математической физики. Для доказательства существования „сильного“ решения, позволяющего использовать теорию возмущений для некоторых задач математической физики, нам нужна ещё одна конечномерная теорема, которая будет доказана при выполнении условий У1, У3 и У4.

Подробное доказательство теоремы 2 приведено в нашей статье в Казахском Математическом Журнале [14].

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № BR20281002).

Ключевые слова: теория дифференциальных уравнений, задачи математической физики, Гильбертова пространства, слабое решение, сильное решение, последовательность конечномерных аппроксимаций задачи.

2010 Mathematics Subject Classification: 35K55, 35Q30, 76D05

Литература

[1.] Fefferman Ch. Existence and smoothness of the Navier-Stokes equation http://claymath.org/millennium/ Navier-Stokes_Equations/.- Cambridge, MA: Clay Mathematics Institute, 2000. 1–5.

[2.] Отелбаев М. Существование сильного решения уравнения Навье-Стокса// Математический журнал (Алматы). - 2013. - Т. 13, №4 (50). - С. 5–104. http://www.math.kz/images/journal/2013-4/Otelbaev_N-S_21_12_2013.pdf

[3.] Ладыженская О.А. Решение «в целом» краевой задачи Навье-Стокса в случае двух пространственных переменных // Доклады АН СССР. - 1958. - Т. 123, №3. - С. 427–429.

[4.] Ладыженская О.А. Шестая проблема тысячелетия: уравнения Навье-Стокса, существование и гладкость// Успехи математических наук. - 2003. - Т. 58, №2 (350). - С. 45–78.

[5.] Hopf E. ̈[U] ber die Anfangswertaufgabe f̈[u] r die Hydrodinamischen Grundgleichungen // Math. Nachr. - 1951. - V. 4. - P. 213–231.

[6.] Отелбаев М. Примеры не сильно разрешимых в целом уравнений типа Навье–Стокса // Математические заметки. - 2011. - Т. 89, №5. - С. 771–779.

[7.] Отелбаев М., Дурмагамбетов А.А., Сейткулов Е.Н. Условия существования сильного решения в целом одного класса нелинейных эволюционных уравнений в гильбертовом пространстве. II // Сибирский математический журнал. - 2008. - Т. 49, №4. - С. 855–864.

[8.] Отелбаев М. Условия существования сильного решения в целом одного класса нелинейных эволюционных уравнений в гильбертовом пространстве // Труды математического института им. В.А. Стеклова. - 2008. - Т. 260, №1. - С. 202–212.

[9.] Отелбаев М., Жапсарбаева Л.К. Непрерывная зависимость решения параболического уравнения в гильбертовом пространстве от параметров и от начальных данных // Дифференциальные уравнения. - 2009. - Т. 45, №6. - С. 818–849.

[10.] Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. Пер. с фр. - М. - Мир. - 1972. - 586 с.

[11.] Сакс Р.С. Задача Коши для уравнений Навье–Стокса, метод Фурье // Уфимский математический журнал. - 2011. - Т. 3, №1. - С. 53–79.

[12.] Похожаев С.И. Гладкие решения уравнений Навье-Стокса // Математический сборник. - 2014. - Т. 205, №2. - С. 131–144.

[13.] Otelbaev M., Koshanov B.D. Correct Contractions stationary Navier-Stokes equations and boundary conditions for the setting pressure // AIP Conference Proceedings. - 2016. - 1759. http://dx.doi.org/10.1063/1.4959619.

[14.] Otelbaev M., Koshanov B.D., Shynybekov A. Evaluation of solutions of one class of finite-dimensional nonlinear equations. Kazakh Mathematical Journal. (В печати.)

К решению задачи теплопроводности с кусочно-постоянным коэффициентом и граничными условиями типа Самарского-Ионкина

И.Н. Панкратова[1], М.А. Садыбеков[2], У.К. Койлышов[3]

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

[1]pankratova@math.kz, [2]sadybekov@math.kz, [3]koylyshov@math.kz

В области $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < 1, 0 < t < T\}$ рассматривается начально-краевая задача для уравнения теплопроводности с кусочно-постоянным коэффициентом теплопроводности $k(x)$

$$u_t(x,t) - k_1^2 u_{xx}(x,t) = f(x,t),\ \ 0 < x < 1/2,\ 0 < t < T,$$

$$u_t(x,t) - k_2^2 u_{xx}(x,t) = f(x,t),\ \ 1/2 < x < 1,\ 0 < t < T,$$

с классическим начальным условием

$$u(x,0) = \varphi(x),\ \ 0 \le x \le 1,$$

с естественными условиями сопряжения

$$u(1/2-0,t) = u(1/2+0,t),\ \ 0 \le t \le T,$$

$$k_1 u_x(1/2-0,t) = k_2 u_x(1/2+0,t),\ \ 0 \le t \le T,$$

и краевыми условиями типа Самарского-Ионкина

$$u(0,t) = 0,\ \ k_1 u_x(0,t) = k_2 u_x(1,t),\ \ 0 \le t \le T.$$

Здесь k_1, k_2 – константы, $\varphi(x)$, $f(x,t)$ – заданные вещественные функции.

Путем введения специально подобранной функции $v(x,t)$ решение нелокальной начально-краевой задачи сводится к последовательному решению двух начально-краевых задач с локальными и самосопряженными краевыми условиями для функций $c(x,t)$ и $s(x,t)$. Здесь

$$2c(x,t) = u(x,t) + v(x,t),\ \ \ 2s(x,t) = u(x,t) - v(x,t).$$

Для численного решения задачи построена разностная схема, аппроксимирующая дифференциальную задачу в заданной области. Исследованы вопросы корректности постановки дифференциальной задачи, корректности и устойчивости адаптированного для разностных схем алгоритма сведения нелокальной разностной схемы к последовательному решению двух локальных разностных схем, а также вопросы устойчивости разностных схем.

В случае $k_1 = k_2$ в [1] была построена разностная схема, аппроксимирующая дифференциальную задачу и обоснована ее устойчивость.

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № AP19679487).

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, разрывный коэффициент теплопроводности, нелокальные краевые условия, численные методы, разностные операторы.

2020 Mathematics Subject Classification: 35K05, 35K20, 65M06, 65M12

Литература

[1] Sadybekov M.A., Pankratova I.N. Correct and Stable Algorithm for Numerical Solving Nonlocal Heat Conduction Problems with Not Strongly Regular Boundary Conditions, *Mathematics*, **10**:20 (2022), 3780 , 17 pp.

Об интегральных представлениях решений регулярных краевых задач для вырождающегося эллиптического уравнения Геллерстедта

А.В. РОГОВОЙ[1], Т.Ш. КАЛЬМЕНОВ[2]

[1,2]*Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*
[1]*Университет Мирас, Шымкент, Казахстан*
[1]rog2005@list.ru, [2]kalmenov.t@mail.ru

В конечной области $\Omega \subset R^2$, ограниченной при $y > 0$ гладкой кривой σ и отрезком AB оси $y = 0$ рассмотрим вырождающееся эллиптическое уравнение Геллерстедта

$$Lu \equiv y^m u_{xx} + u_{yy} = f(x, y). \tag{1}$$

Фундаментальное решение однородного уравнения (1) имеет вид [1]:

$$\varepsilon(x, y, \xi, \eta) = k \cdot \left(r_1^2\right)^{-\beta} (1 - \sigma)^{1-2\beta} F(1 - \beta, 1 - \beta; 2 - 2\beta; 1 - \sigma), \tag{2}$$

где

$$\beta = \frac{1}{2(m+2)}, \quad k = \left(\frac{4}{m+2}\right)^{4\beta-2} \cdot \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(1-\beta)\cdot\Gamma(2\beta)}, \quad \sigma = \frac{r^2}{r_1^2},$$

$$r^2 = (x-\xi)^2 + \frac{4}{(m+2)^2}\left(y^{\frac{m+2}{2}} - \eta^{\frac{m+2}{2}}\right)^2,$$

$$r_1^2 = (x-\xi)^2 + \frac{4}{(m+2)^2}\left(y^{\frac{m+2}{2}} + \eta^{\frac{m+2}{2}}\right)^2,$$

$F(a, b; c; z)$ — гипергеометрическая функция; $\Gamma(z)$ — гамма-функция.

Пусть $\widetilde{q}\,(\xi_1, \eta_1, \xi, \eta)$ — регулярное решение уравнения Геллерстедта

$$\left(\eta^m \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right) \widetilde{q}\,(\xi_1, \eta_1, \xi, \eta) = 0$$

и

$$q(x, y, \xi, \eta) = \int\limits_{\partial\Omega} \varepsilon(x, y, \xi_1, \eta_1) \widetilde{q}\,(\xi_1, \eta_1, \xi, \eta)\, d\xi_1 d\eta_1.$$

Тогда оператор

$$u(x, y) = L_Q^{-1} f = \int\limits_{\Omega} \left(\varepsilon(x, y, \xi, \eta) - q(x, y, \xi, \eta)\right) f(\xi, \eta) d\xi\eta \tag{3}$$

является решением регулярной краевой задачи для уравнения Геллерстедта, определяемой произвольной функцией $q(x, y, \xi, \eta)$.

Используя результаты работы [2] и пользуясь методикой работы [3], доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Интегральный оператор* (3) *является единственным решением регулярной краевой задачи для уравнения* (1) *тогда и только тогда, когда выполняется условие*

$$-\frac{u(x)}{2}+\int\limits_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial n_y}+\frac{\partial q}{\partial n_y}\right)u(y)dS_y-\int\limits_{\partial\Omega}(\varepsilon+q)\frac{\partial u}{\partial n_y}(y)dS_\xi=0,\quad x\in\partial\Omega. \tag{4}$$

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № AP23488701).

Ключевые слова: уравнение Геллерстедта, интегральное представление решения, регулярная краевая задача, эллиптическое уравнение, гипергеометрическая функция.

2010 Mathematics Subject Classification: 35L80, 35M10, 35N30, 33C05

Литература

[1] Gellerstedt S. *Sur un probleme aux limites pour une equation lineaire aux derivees partielles du second ordre de type mixte*, These, Uppsala (1935).

[2] Кальменов Т.Ш., Отелбаев М. Критерий граничности интегральных операторов, *Доклады Академии наук. — Федеральное государственное бюджетное учреждение "Российская академия наук"*, **466**:4 (2016), 395–395.

[3] Kalmenov T.Sh. Boundary criterion for integral operators and its applications, in: *Abstracts of the VII World Congress of Turkic World Mathematicians (TWMS Congress-2023)*, Turkestan (2023), 123–124.

Спектральные свойства дифференциального оператора второго порядка со спектральным параметром в краевом условии

Н.Н. САЙРАМ[1], М.А. САДЫБЕКОВ[2]

[1,2]*Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*
[1]*Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан*

[1]nurgul.sairam02@mail.ru, [2]sadybekov@math.kz

Рассматривается спектральная задача для оператора, заданного операцией дифференцирования второго порядка

$$Ly=-y''(x)=\lambda y(x),\quad 0<x<1, \tag{1}$$

с краевыми условиями с линейным вхождением спектрального параметра

$$y(0)=0, \tag{2}$$

$$U_0(y)+\lambda U_1(y)=0. \tag{3}$$

Здесь $U_j(y)$ — линейные формы вида $U_j(y)=a_{j1}y'(0)+a_{j2}y'(1)+a_{j3}y(0)+a_{j4}y(1)$.

Спектральные свойства краевых задач для уравнения (1) в случае, когда в краевых условиях отсутствует спектральный параметр, полностью исследованы и эти результаты хорошо известны. Наиболее полно все случаи разобраны в [1].

В настоящей работе исследованы спектральные свойства задачи (1)-(3) с линейным вхождением спектрального параметра в одно краевое условие. В терминах коэффициентов краевого условия (3) выделены регулярные и нерегулярные краевые условия. Выделены и описаны все случаи поведения собственных значений и собственных функций.

Финансирование: Данное исследование выполнено в рамках проекта грантового финансирования Комитета науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № AP23485279).

Ключевые слова: обыкновенный дифференциальный оператор, нелокальные краевые условия, спектральный параметр в краевом условии, спектральные свойства.

2020 Mathematics Subject Classification: 34L05, 34L10,34L15

Литература

[1] Lang P., Locker J. Spectral theory of two-point differential operators determined by $-D^2$, *J. Math. Anal. And Appl.*, **146**:1 (1990), 148–191.

Разрешимость краевых задач для нелинейных уравнений с инволюцией

А.А. САРСЕНБИ[1], А.М. САРСЕНБИ[2]

[1]*ЮКУ им.М. Ауэзова, Шымкент, Казахстан*
[2]*ЮКУ им.М.Ауэзова,Шымкент, Казахстан*
abzhahan@gmail.com

Рассмотрим нелинейное уравнение с инволюцией

$$y''(x) + \alpha y''(-x) = F(x, y(x), y(-x)), \; x \in (-1, 1), \tag{1}$$

краевыми условиями

$$y(-1) = y_1, \; y(1) = y_2, \tag{2}$$

где $F : [0, 1] \times R^2 \to R$ заданная функция,$\alpha \neq \pm 1$. Краевая задача (1), (2) эквивалентна интегральному уравнению

$$y(x) = \frac{1}{2}(y_2 + y_1) + \frac{1}{2}(y_2 - y_1)x + \int_{-1}^{1} G(x, t) F(t, y(t), y(-t)) dt,$$

где $G(x, t)$ есть функция Грина соответствующего (1) однорородного уравнения с однородными краевыми условиями (2) $y_1 = y_2 = 0$. Один из полученных результатов можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть $\alpha \neq \pm 1$. Пусть функция $F(x, \varsigma, \xi)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица $\left|F(x, \varsigma, \xi) - F\left(x, \tilde{\varsigma}, \tilde{\xi}\right)\right| \leq l_1 |\varsigma - \tilde{\varsigma}| + l_2 \left|\xi - \tilde{\xi}\right|$ для любого $(x, \varsigma, \xi), \left(x, \tilde{\varsigma}, \tilde{\xi}\right) \in \Omega$, и положительные числа l_1, l_2 таковы,что $\frac{9(l_1+l_2)}{16|1-|\alpha||} < 1$. Тогда краевая задача (1), (2)имеет единственное решение.*

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № AP19674587).

Ключевые слова: дифференциальное уравнение с инволюцией, функция Грина, нелинейное уравнение, краевая задача, теорема Шаудера.

2010 Mathematics Subject Classification: 34A34, 34B27, 34K10

Литература

[1] Sarsenbi A.A., Sarsenbi A.M. Boundary value problems for a second-order differential equation with involution in the second derivative and their solvability, AIMS Mathematics, 8(11):2023, 26275-26289. doi: 10.3934/math.20231340

Метод погашения влияния малых делителей в нелинейных возмущённых квазипериодических колебаниях с диофантовыми частотами

Ж.А. САРТАБАНОВ

Актюбинский региональный университет имени К.Жубанова, Актобе, Казакстан

sartabanov42@mail.ru

Предлагаемый метод опишем на примере нелинейного уравнения второго порядка, которое часто встречается в теории нелинейных колебаний[1]:

$$\ddot{x} + x = \beta x^2 + f(\tau) \tag{1}$$

с квазипериодическим возмущением, представляемым абсолютно сходящим рядом

$$f(\tau) = \sum_{p\in Z^2} f^p e^{2\pi i(p_1\nu_1+p_2\nu_2)} \equiv \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{|p|=j} f^p e^{2\pi i(p_1\nu_1+p_2\nu_2)} \equiv$$
$$\equiv \{\lambda_p = 2\pi(p_1\nu_1+p_2\nu_2), f^p\} \equiv \{f^p\}, p = (p_1,p_2) \in Z\times Z = Z^2, \tag{2}$$

и малым параметром $\beta > 0$, где Z — множество целых чисел, $(\nu_1,\nu_2) = \nu$ — частотный базис колебаний обладает свойством сильной несоизмеримости [2]:

$$|p_1\nu_1 + p_2\nu_2| \geq c|p|^3, |p| = |p_1| + |p_2| > 0, p \in Z^2, \tag{3}$$

Базис частот (ν_1,ν_2), обладающий свойством (3) называется диофантовым.

Малые делители $p_1\nu_1+p_2\nu_2$, $p \in Z^2$, которые появляются в представлениях решений уравнений рядом Фурье и создают непреодолимую трудность при построении их методом малых параметров и последовательных приближений.

В данном исследовании методом расширенных оператором дифференцирования уравнение (1) приводится к уравнению

$$\ddot{z} + z = \beta z^2 + \psi(\tau), \tag{4}$$

$$\psi(\tau) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{|p|=j} f^p e^{2\pi i(1+|p|)^3(p_1\nu_1+p_2\nu_2)\tau} =$$
$$= \{\mu_p = 2\pi(1+|p|)^3(p_1\nu_1+p_2\nu_2), f^p\}, |p| = |p_1| + |p_2| > 0, \tag{5}$$

где $\mu_p = 2\pi(1+|p|)^3\lambda_p$, $p \in Z^2$.

Теорема 1 данного исследования гласит о приводимости заданного уравнения (1) с возмущением (2) с оценкой влияния малых делителей (3) к уравнению (4) с возмущением (5) с погащенным влиянием малых делителей на основе метода расширенных операторов дифференцирования.

Доказана теорема 2, которая утверждает существование единственного квазипериодические решение линейного уравнения, полученного из уравнения (4) при $\beta = 0$ с тем же частотным базисом $(\nu_1,\nu_2) = \nu$, что у уравнения (1).

Теоремой 3 на основе метода последовательных приближений устанавливается существование единственного квазипериодического решения уравнения (4) с возмущением (5) при достаточно малых значениях параметра $\beta > 0$.

В заключительной теореме 4 приводится алгоритм представления квазипериодического решения исходного уравнения (1) со свойствами (2) и (3) в виде ряда Фурье.

Исследование завершается применением описанного метода для установления единственного квазипериодического решения уравнения Дуффинга с полигармоническим возмущением и диофантовым частотным базисом методом последовательных приближений.

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № AP19676629).

Ключевые слова: метод погашения; влияние малых делителей; квазипериодические колебания; диофантовые частоты; расширенный оператор; коэффициенты; показатели; ряды Фурье.

2010 Mathematics Subject Classification: 34C25, 42A16, 34C10

Литература

[1] Стокер Д.Ж *Нелинейные колебания в механических и электрических системах*, М.: ИЛ, 1953г. -256с.

[2] Арнольд В.И. *Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений*, М.: Наука, 1978г. -304с.

Применение метода расширения операторов дифференцирования к обыкновенным дифференциальным уравнениям с отклоняющимся аргументом

Ж.А. САРТАБАНОВ[1], Г.М. АЙТЕНОВА[2], А.А. КУЛЬЖУМИЕВА[3]

[1]*Актюбинский региональный университет имени К. Жубанова, Актобе, Казахстан*
[2,3]*Западно-Казахстанский университет имени М. Утемисова, Уральск, Казахстан*
[1]sartabanov42@mail.ru, [2]gulsezim-88@mail.ru

Рассмотрим начальную задачу для скалярного уравнения

$$\frac{dx(t)}{dt} = \lambda x(t) + \mu\phi(t, x(t-\varepsilon)) + f(t, x(t))\phi(\tau, x(t-\varepsilon)) \tag{1}$$

$$x = x^0(t) \in C_t^1[-\varepsilon, 0]$$

с постоянным отклонением $\varepsilon > 0$, постоянными коэффициентами λ, $\mu \neq 0$ и гладкими функциями $\phi(\tau, y) \in C_{\tau,y}^{(2,2)}(R\times R)$, $\frac{\partial\phi}{\partial y} \neq 0$ и $f(\tau, x) \in C_{\tau,x}^{2,2}(R\times R)$, причем $f(\tau, x)$ обратим относительно x. Следовательно,

$$\frac{\partial\phi(t, y)}{\partial y} \neq 0; f(t, x) + \mu = 0 \implies x = \psi(t) \in C(R). \tag{2}$$

Суть метода изучения этой задачи (1)-(2) заключается в введении новой независимой переменной τ и сведении задачи для обыкновенного дифференциального уравнения к задаче для уравнения в частных производных по t и τ.

Чтобы ввести новую независимую переменную τ будем пользоваться простым соображением о том, что постоянное отклонение $\varepsilon > 0$, находящееся в аргументах функций, будем считать частным значением этой переменной τ.

Тогда уравнение (2) можно представить в виде

$$\frac{\partial x(t)}{\partial t} = \lambda x(t) + \mu\phi(t, x(t-\tau)) + f(t, x(t))\phi(t, x(t-\tau)). \tag{3}$$

Сдвигая t на τ имеем уравнение

$$\frac{\partial x(t+\tau)}{\partial t} = \lambda x(t+\tau) + \mu\phi(t+\tau, x(t)) + f(t+\tau, x(t+\tau))\phi(t+\tau, x(t)), \tag{4}$$

которое эквивалентно уравнению (3).

Чтобы получить расширенную систему уравнении в частных производных достаточно дифференцировать уравнения (3) и (4) по параметру τ:

$$\begin{cases} [f(t,x(t))+\mu]\frac{\partial\phi(t,x(t-\tau))}{\partial y}\frac{\partial x(t-\tau)}{\partial\tau}=0 \\ \frac{\partial^2 x(t+\tau)}{\partial\tau\partial t}=\lambda\frac{\partial x(t+\tau)}{\partial\tau}+\mu\frac{\partial\phi(t+\tau,x(t))}{\partial\tau}+\left[\frac{\partial f(t+\tau,x(t+\tau))}{\partial t}+\frac{\partial f(t+\tau,x(t+\tau))}{\partial x}\right]\phi(t+\tau,x(t))+ \\ +f(t+\tau,x(t+\tau))\frac{\partial\phi(t+\tau,x(t))}{\partial t}. \end{cases} \tag{5}$$

Тогда в силу (2) система (5) эквивалентна уравнению

$$\frac{\partial^2 x(t+\tau)}{\partial\tau\partial t}-\lambda\frac{\partial x(t+\tau)}{\partial\tau}=g(t,\tau,x(t+\tau)) \tag{6}$$

где $g(t,\tau,x(t+\tau))$ определяется соотношением

$$g(t,\tau,x(t+\tau))=[f_t(t+\tau,x(t+\tau))+f_x(t+\tau,x(t+\tau))]\phi(t+\tau,\psi(t))+ \\ +[f(t+\tau,x(t+\tau))+\mu]\phi_t(t+\tau,\psi(t)). \tag{7}$$

Обозначив $x(t+\tau)=u(\tau,t)$ уравнение (6)-(7) представим в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\tau\partial t}-\lambda\frac{\partial u}{\partial t}=g(\tau,t,u) \tag{8}$$

с начальным условием

$$u(\tau,\tau)=x^0(\tau),\tau\in[-\varepsilon/2,0], \tag{8^0}$$

$$\frac{\partial u(\tau,\tau)}{\partial\tau}+\frac{\partial u(\tau,\tau)}{\partial t}=x^0_\tau(\tau),\tau\in[-\varepsilon/2,0].$$

Далее, в некоторых частных случаях уравнение (1), а следовательно, уравнения (8) исследуется разрешимость задачи (8)-(8^0).

Также исследуется уравнения, известные из [1], к которым применим вышеизложенный прием.

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (Грант № AP19676629).

Ключевые слова: метода расширения, оператор дифференцирования, дифференциальное уравнение, отклонение, разрешимость.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 47F05, 35A25

Литература

[1] Эльсгольц Л.Э. *Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом*, Наука, Москва (1964).

Многопериодические решения гиперболических систем второго порядка с матричным оператором дифференцирования

Ж.А. Сартабанов[1], А.Х. Жумагазиев[2]

[1,2]*Актюбинский региональный университет имени К.Жубанова, Актобе, Казахстан*

[1]sartabanov@mail.ru, [2]charmeda@mail.ru

Исследуется вопрос существования многопериодических решений систем вида

$$Dx=Bx+f(\tau,t,x), \quad D=\frac{\partial}{\partial\tau}+\sum_{j=1}^{m}A_j\frac{\partial}{\partial t_j}, \tag{1}$$

где искомая вектор-функция переменных $\tau \in (-\infty, +\infty) = R$, $t = (t_1, ..., t_m) \in R \times ... \times R = R^m$, A_j – постоянные 2×2-матрицы гиперболического типа, то есть собственные значения $\lambda_{jl} = \lambda_{jl}(A_j)$ ненулевые и действительные:

$$0 \neq \lambda_{jl} = \lambda_{jl}(A_j) \in R, \quad j = \overline{1, m}, \quad l = 1, 2, \tag{2}$$

B – постоянная 2×2-матрица, $f = f(f_1, f_2)$ – вектор-функция, (θ, ω)-периодическая и достаточно гладкая по (τ, t) и по x порядка $(1, 1) = (\tilde{e})$:

$$f(\tau + \theta, t + \omega, x) = f(\tau, t, x) \in C^{0,e,\tilde{e}}_{\tau,t,x}(R \times R^m \times R^2), \tag{3}$$

$\theta = \omega_0, \omega_1, ..., \omega_m$ – несоизмеримые положительные постоянные, $\omega = (omega_1, ..., \omega_m)$.

Изучаются два вопроса: 1) методом сужения матричный оператор дифференцирования D сводится к оператору обыкновенного дифференцирования $d/d\tau$, который следует определить и 2) обобщением методов для узкогиперболических систем разрабатывается метод установления многопериодических решений гиперболической системы (1) при некоторых дополнительных к (2) и (3) условиях, которые следует определить.

Данные исследования являются обобщением результатов [1] на общий гиперболический случай на примере систем второго порядка.

По решению первого вопроса сначала рассмотрим суженный оператор дифференцирования $D_1 x = \frac{\partial x}{\partial \tau} + A_1 \frac{\partial x}{\partial t}$ и приводим его к оператору $d/d\tau$. Для этого линейной заменой $x = B_1 y$ приводим этот оператор к каноническому виду $D_1 y = \frac{\partial y}{\partial \tau} + J_1 \frac{\partial y}{\partial t}$. Матрица J_1 может быть диагональной: $J_1 = diag(\lambda_1, \lambda_2)$. Тогда, $D_1 y(\tau, t) = dz(\tau)/d\tau$ где $z(\tau) = y(\tau, h(\tau, \xi, \eta)) \equiv (y_1(\tau, h_{11}), y_2(\tau, h_{12}))$, $h_{1j} = \eta_j + \lambda_{1j}(\tau, \xi, \eta_j)$. Следовательно, имеем

$$D_1 y = dz(\tau)/d\tau, \quad z(\tau) = (y_1(\tau, h_{11}(\tau, \xi, \eta_1)), y_2(\tau, h_{12}(\tau, \xi, \eta_1)). \tag{4}$$

Если $J_!$ имеет треугольный вид $J_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, то тогда $D_1 y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda^{-1} & 1 \end{pmatrix} dz(\tau)/d\tau$, где $z(\tau) = y(\tau, h(\tau, \xi, \eta) \equiv (y_1(\tau, h_1, y_2(\tau, h_1))$, $h = \eta + \lambda(\tau - \xi)$. В этом кратном случае появляется матрица перехода

$$\Pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda^{-1} & 1 \end{pmatrix} = J_1^{-1}$$

и имеем формулу

$$D_1 y(\tau, t_1) = \Pi_1 dz(\tau)/d\tau, \quad z(\tau) = (y_1(\tau, h_1(\tau, \xi, \eta_1)), y_2(\tau, h_1(\tau, \xi, \eta_1)). \tag{5}$$

Таким образом, в случае простых элементарных делителей матрица перехода $\Pi_1 = E$ – единичная матрица, а при картном элементарном делителе матрица перехода $\Pi_1 = J^{-1}$. С учётом этого, линейной заменой $u(\tau) = \Pi_1 z(\tau)$, объединив формулы (4) и (5) перехода, запишем

$$D_1 y(\tau, t_1) = du(\tau)/d\tau. \tag{6}$$

Заметим, что эти процессы (4)-(6) обратимые, то есть расширив оператор $d/d\tau$ получим D_1 – оператор дифференцирования в частных производных. Далее, если рассмотрим более широкий оператор дифференцирования D_2:

$$D_2 x = \frac{\partial}{\partial \tau} + A_1 \frac{\partial x}{\partial t_1} + A_2 \frac{\partial x}{\partial t_2},$$

то на основе (6) запишем его в виде

$$D_2 x = \frac{\partial u(\tau, t_2)}{\partial \tau} + B_1^{-1} A_2 B_1 \frac{\partial u(\tau, t_2)}{\partial t} = D_1 u(\tau, t_2)$$

и по той же методике, описанной соотношениями (4)-(6) приводим его к виду

$$D_1 u(\tau, t_2) = dv(\tau)/d\tau. \tag{7}$$

При выводе (7) будем пользоваться характеристиками матрицы A_2, так как A_2 и подобная матрица $B_1^{-1}A_2B_1$ имеют общие характеристики: $(h_{21}=\eta_{21}+\lambda_{21}(\tau-\xi_1), h_{22}=\eta_{22}+\lambda_{22}(\tau-\xi_1))$, либо $(h_2=\eta_2+\lambda_2(\tau-\xi), h_{22}=\eta_{22}+\lambda_{22}(\tau-\xi))$ – общая характеристика в кратном случае элементарных делителей матрицы A_2. Матрица перехода определяется соотношением

$$\Pi_2=\begin{cases} E, & \text{в случае простых элементарных делителей,}\\ \begin{pmatrix} 1 & 0\\ -\lambda_2^{-1} & 1\end{pmatrix}=J_2^{-1}, & \text{в случае кратных элементарных делителей.}\end{cases}$$

Таким образом, продолжив этот метод сужения, оператор дифференцирование приводим к виду

$$Dx=dw/d\tau.$$

Далее, в системе обыкновенных дифференциальных уравнений других преград не будет. Система (1) приобретает вид

$$dw(\tau)/d\tau=(B_1,...B_m)^{-1}B(B_1,...B_m)w+(B_1,...,B_m)^{-1}f(\tau,h,B_1,...B_m,w), \tag{8}$$

которая является квазипериодической по τ и ξ, ω-периодической по $\eta=(\eta_1,...,\eta)$. Отсюда на основе первых интегралов характеристических систем запишем её с рассмотренным оператором $D^*=\frac{\partial}{\partial\tau}+\sum_{l=1}^{k}\frac{\partial}{\partial\tau_l}+\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial}{\partial t_j}$, $1\le k\le 2m$, согласно методу В. Харасахала в виде

$$D^*w^*=B^*w^*+f^*(\tau,\tau_1,...,\tau_k,t_1,...,t_m,w^*), \tag{9}$$

где $B^*=(B_1,...B_m)^{-1}B(B_1,...B_m)$, $f^*(\tau,\overline{\tau},t,w^*$ – функция, построенная по теореме Бора на основе квазипериодической функции $(B_1,...B_m)^{-1}f(\tau,h,B_1,...,B_m,w)$ с заменой w на w^*, где среди h_{j1} и h_{j2} могут быть равные $h_{j1}=h_{j2}$ в зависимости от кратности. Число k определяется количеством собственных чисел, не соизмеримых между собой. Если все $\lambda_{11},\lambda_{12},...,\lambda_{m1},\lambda_{m2}$ – соизмеримые, но несоизмеримые с θ, то $k=1$, а если все не соизмеримые, то $k=2m$. Определив несоизмеримые частоты $2\pi\nu_1,...,2\pi\nu_m$ собственных колебаний имеем периоды $\theta_1=\nu_1^{-1},...,\theta_k=\nu_k^{-1}$.

Изучив многопериодические решения уравнения (9) периодов $(\theta_1,...,\theta_k,\omega_1,...,\omega_m)$, исходя из этого устанавливаем многопериодические решения уравнения (1). Очевидно, что у матрицы B все собственные значения имеют $Re\mu\neq 0$, то система (1) имеет единственное многопериодическое решение при достаточно малой константе Липшица функции f по x.

Это есть результат исследования по второму вопросу.

В заключении следует отметить, что идея метода по проведению оператора D к виду принадлежит профессору Сартабанову Ж.А. [1]. Здесь соотношениями (4)-(6) она написана в более простой доступной форме.

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № AP19676629).

Ключевые слова: система второго порядка, матричный оператор дифференциарования, многопериодичность, гиперболичность, оператор сужения.

2010 Mathematics Subject Classification: 15A21, 35B10, 35R20

Литература

[1] Zhumagaziyev A.Kh., Sartabanov Zh.A., Sultanaev Ya.T. On a new method for investigation of multiperiodic solutions of quasilinear strictly hyperbolic system, *Azerbaijan Journal of Mathematics*, **1**:12 (2022), 32–48.

Обратная задача для пседопараболического уравнения дробного порядка

Б.Н. СЕЙЛБЕКОВ[1], А.А. САРСЕНБИ[2]

[1]*Южно-Казахстанский университет им. М. Ауэзова, Шымкент, Казахстан*
[2]*Университет дружбы народов им. академика А. Куатбекова, Шымкент, Казахстан*
[1]seilbekovbn@gmail.com, [2]abdisalam.sarsenbi@gmail.com

В данной работе изучается обратная задача для нелокального псевдопараболического уравнения. Исследуется уравнение

$$D_t^{\alpha}\left(u\left(x,t\right)+u_{xxxx}\left(x,t\right)\right)+u_{xxxx}\left(x,t\right)=f\left(x\right),\ \ (t,x)\in\Omega, \tag{1}$$

с граничными условиями

$$u\left(1,t\right)=0,\ \ u_x\left(-1,t\right)=u_x\left(1,t\right),\ \ u_{xx}\left(-1,t\right)=0,\ \ u_{xxx}\left(-1,t\right)=u_{xxx}\left(-1,t\right),\ \ t\in\left[0,T\right], \tag{2}$$

и начальные условия

$$u\left(x,0\right)=\varphi\left(x\right),\ \ u\left(x,T\right)=\psi\left(x\right),\ \ x\in\left[-1,1\right], \tag{3}$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ известные достаточно гладкие функции и $\Omega=\{0<t<T<\infty,\ -1<x<1\}$ и $0<\alpha<1$. D_t^{α} является производной Капуто (см. [1]) где $0<\alpha<1$ и $D_t^{\alpha}=\partial_t$ при $\alpha=1$.

В этой заметке мы в основном используем приемы из работы [2].

Теорема 1. *Пусть* $f\in C^2\left[-1,1\right]$ *и* $f^i\left(-1,t\right)=f^{(i)}\left(1,t\right)=0,\ i=0,1,\ \varphi,\ \psi\in C^5\left[-1,1\right]$ *и* $\varphi^{(j)}\left(-1\right)=\varphi^{(j)}\left(1\right)=\psi^{(j)}\left(-1\right)=\psi^{(j)}\left(1\right)=0,\ j=0,1,2,3,4.$ *Тогда существует единственное решение* $u\left(x,t\right)\in C_{x,t}^{3,1}\left(\bar{\Omega}\right)\cap C_{x,t}^{4,1}\left(\Omega\right)$ *и ее можно записать как*

$$\begin{aligned}u\left(x,t\right)=\varphi\left(x\right)&+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1-E_{\alpha,1}\left(-\frac{\lambda_{k1}}{1+\lambda_{k1}}t^{\alpha}\right)\left(\psi_{k1}^{(5)}-\varphi_{k1}^{(5)}\right)}{\left(1-E\left(-\frac{\lambda_{k1}}{1+\lambda_{k1}}T^{\alpha}\right)\right)\left(\pi k\right)^5}X_{k1}\left(x\right)\\&+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-E_{\alpha,1}\left(-\frac{\lambda_{k2}}{1+\lambda_{k2}}t^{\alpha}\right)\left(\psi_{k2}^{(5)}-\varphi_{k2}^{(5)}\right)}{\left(1-E\left(-\frac{\lambda_{k2}}{1+\lambda_{k2}}T^{\alpha}\right)\right)\left(\pi k\right)^5}X_{k2}\left(x\right),\end{aligned}$$

и

$$f\left(x\right)=\varphi^{IV}\left(x\right)+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\psi_{k1}^{(5)}-\varphi_{k1}^{(5)}}{\left(1-E\left(-\frac{\lambda_{k1}}{1+\lambda_{k1}}T^{\alpha}\right)\right)\pi k}X_{k1}\left(x\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\psi_{k2}^{(5)}-\varphi_{k2}^{(5)}}{\left(1-E\left(-\frac{\lambda_{k2}}{1+\lambda_{k2}}T^{\alpha}\right)\right)\pi k}X_{k2}\left(x\right),$$

для $(x,t)\in\bar{\Omega}$ *где*

$$\varphi_{k1}^{(5)}=\int\limits_{-1}^{1}\varphi^{V}\left(x\right)\sin\left(\pi kx\right)dx,\ \ \varphi_{k2}^{(5)}=\int\limits_{-1}^{1}\varphi^{V}\left(x\right)\left(\cos\left(\pi kx\right)+(-1)^k\frac{e^{\pi kx}-e^{-\pi kx}}{e^{\pi k}-e^{-\pi k}}\right)dx,$$

$$\psi_{k1}^{(5)}=\int\limits_{-1}^{1}\psi^{V}\left(x\right)\sin\left(\pi kx\right)dx,\ \ \psi_{k2}^{(5)}=\int\limits_{-1}^{1}\psi^{V}\left(x\right)\left(\cos\left(\pi kx\right)+(-1)^k\frac{e^{\pi kx}-e^{-\pi kx}}{e^{\pi k}-e^{-\pi k}}\right)dx.$$

Финансирование: нет.

Ключевые слова: пседопараболические уравнения четвертого порядка; обратная задача; собственная функция; базис Рисса; метод Фурье.

2010 Mathematics Subject Classification: 35L35; 35N30; 35E99; 34L10

Литература

[1] Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations, North-Holland: Elsevier (2006).

[2] Serikbaev D. Inverse problem for fractional order pseudo-parabolic equation with involution, Ufa Math. J., 12:4 (2020), 119–135.

Алгоритм численного решения начально-краевой задачи для уравнения субдиффузии с нелокальными краевыми условиями

М.А. Султанов[1], В.Е. Мисилов[2], М.А. Садыбеков[3]

[1]*Международный казахско-турецкий университет им. Х.А. Ясави, Туркестан, Казахстан*
[2]*Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия*
[2]*Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия*
[3]*Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*

[1]murat.sultanov@ayu.edu.kz, [2]v.e.misilov@urfu.ru, [3]sadybekov@math.kz

В работе рассматривается уравнение

$$D_t^{\alpha} u(x,t) - u_{xx}(x,t) = f(x,t), \tag{1}$$

с начальным условием

$$u(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le 1, \tag{2}$$

и следующими нелокальными краевыми условиями

$$\begin{cases} u_x(0,t) - u_x(1,t) - au(1,t) = 0, \\ u(0,t) = 0, \end{cases} \qquad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

где $a > 0$. Дробная производная порядка α рассматривается в смысле Капуто.

Для численного решения задачи (1)–(3) применяется метод [1]. Подход заключается в сведении задачи с нелокальными краевыми условиями к решению двух задач для функций $C(x,t)$ и $S(x,t)$ (таких, что $u(x,t) = C(x,t) + S(x,t)$) с локальными краевыми условиями

$$D_t^{\alpha} C(x,t) - C_{xx}(x,t) = f_0(x,t), \quad \begin{cases} C_x(0,t) - aC(0,t) = 0, \\ C_x(1,t) - aC(1,t) = 0, \end{cases} \tag{4}$$

$$D_t^{\alpha} C(x,t) - S_{xx}(x,t) = f_1(x,t), \quad \begin{cases} S(0,t) = -C(0,1), \\ S(1,t) = -C(1,t), \end{cases} \tag{5}$$

Задача (4) имеет краевые условия третьего рода, а задача (5) — условия Дирихле.

Для решения задач (4) и (5) построены неявные разностные схемы на основе L1-аппроксимации дробной производной Капуто и центрально-разностной схемы для пространственных производных. Исследована устойчивость и сходимость разностных схем. Для решения систем линейных алгебраических уравнений используется метод прогонки. Проведены численные эксперименты для исследования построенного алгоритма. Результаты экспериментов подтверждают теоретический порядок сходимости $O(\tau^{2-\alpha} + h^2)$.

Финансирование: Работа поддержана Министерством науки и высшего образования Республики Казахстан (проект № AP19676663).

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, дробная производная, уравнение субдиффузии, нелокальные задачи, не усиленно регулярные краевые условия, начально-краевая задача, численные алгоритмы.

2010 Mathematics Subject Classification: 35K20, 35R11, 65M06

Литература

[1] Sadybekov M.A. Initial-Boundary Value Problem for a Heat Equation with not Strongly Regular Boundary Conditions, in: *Proceedings in Mathematics & Statistics*, Springer (2017), vol. 216, 330–348.

О задаче Гельмгольца с вырождающейся диффузией в классе дифференциальных уравнений эквивалентных в среднем квадратическом

М.И. ТЛЕУБЕРГЕНОВ[1], Г.К. ВАСИЛИНА[2], Г.Т. ИБРАЕВА[3],
Д.Т. АЖЫМБАЕВ[4]

[1,2]*1Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*
[2]*АУЭС имени Г.Даукеева, Алматы, Казахстан*
[3]*Военный институт Сил воздушной обороны имени дважды Героя Советского Союза Т.Я.Бегельдинова, Актобе, Казахстан*
[4]*Актюбинский региональный университет имени К. Жубанова, Актобе, Казахстан*

[1]marat207@mail.ru, [2]v_gulmira@mail.ru, [3]gulmira_ibraeva@mail.ru,
[4]darkhan70@gmail.com

Рассматривается линейная постановка задачи Гельмгольца для общих систем стохастических уравнений, а именно систем стохастических уравнений первого порядка с вырождающейся диффузией

$$\begin{cases} \dot{x}_i = A_{ij}(t)x_j + B_{ik}(t)y_k, & i=\overline{1,n_1}, \\ \dot{y}_i = A_{lj}(t)x_j + B_{lk}(t)y_k + T_{lr}\dot{\xi}^j, & k=\overline{1,n_2},\ n_1 \geq 0,\ n_2 \geq 0,\ n_1+n_2=n. \end{cases} \tag{1}$$

Постановка задачи. По заданной линейной системе стохастических уравнений первого порядка с вырождающейся диффузией (1) требуется построить эквивалентные заданным стохастическим уравнениям уравнения гамильтоновой структуры в пространстве моментных функций второго порядка (в Θ-пространстве).

Замечание 1. *Частным случаем системы стохастических уравнений* (1) *является система уравнений вида*

$$\begin{cases} \dot{x}_i = y_i, \\ \dot{y}_i = F_i(x,y,t) + \sigma_{ij}(x,y,t)\dot{\xi}^j, \quad i=\overline{1,n},\ n_1 \equiv n_2 \equiv n/2, \end{cases} \tag{2}$$

к которой сводится стохастическое дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{x}_i = F_i(x,\dot{x},t) + \sigma_{ij}(x,\dot{x},t)\dot{\xi}^j,\ \ i=\overline{1,n/2}, \tag{3}$$

и система стохастических дифференциальных уравнений (2) *есть система уравнений первого порядка с диффузией вырождающейся ровно по половине независимых переменных* x_i, $i=\overline{1,n/2}$.

Предварительно, введя обозначения $a=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix}$, $\eta=\begin{pmatrix} 0 \\ \xi \end{pmatrix}$, $G(t)=\begin{pmatrix} 0_{n_1\times r} \\ T_{n_2\times r} \end{pmatrix}$, где матрицы A_1, A_2, B_1, B_2 имеют размерности: A_1 – $(n_1\times n_1)$, A_2 – $(n_2\times n_1)$, B_1 – $(n_1\times n_2)$, B_2 – $(n_2\times n_2)$, перепишем уравнение (1) в виде $\dot{a}=D(t)+G(t)\dot{\eta}$.

Следовательно, вектор-функции $a^0=a-Ma$ и a^{0^T} удовлетворяют соответственно уравнениям

$$\dot{a}^0 = D(t)a^0 + G(t)\dot{\eta} \ \text{ и } \ \dot{a}^{0T} = a^{0T}D^T(t) + \dot{\eta}^T G^T(t).$$

Введем, далее, матрицу корреляционных моментов $\Theta(t) = M[a^0(t)a^{0T}(t)]$, которое, следуя [1], удовлетворяет уравнению

$$\dot{\Theta} = D(t)\Theta + \Theta D^T(t) + G(t)G^T(t) \tag{4}$$

или $\dot{\theta}_{kl} = d_{kj}\theta_{jl} + d_{lj}\theta_{jk} + g_{kj}g_{jl}$. Перенумеруем элементы матрицы Θ – $(n \times n)$ и введем вектор $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_N)^T$, где $N = n^2$, тогда уравнение (4) примет вид

$$\dot{\lambda}_k = r_{kl}\lambda_l + \phi_k, \ \ k = \overline{1, N}, \tag{5}$$

где функции $r_{kl}(t)$ зависят от элементов матриц A_1, A_2, B_1, B_2, а функции ϕ_k – от функций $\sigma_{ij}(t)$. Для решения поставленной задачи введем, следуя методу Лиувилля, дополнительные переменные $\kappa_i, \ i = \overline{1, n_1}$ и $\nu_k, \ k = \overline{1, n_2}$ а также функцию Гамильтона расширенной системы в виде

$$H = -(X_i(x, y, t)\kappa_i + Y_k(x, y, t)\nu_k), \tag{6}$$

где $X_i = A_{ij}(t)x_j + B_{ik}(t)y_k, \ i = \overline{1, n_1}$, $Y_k = A_{lj}(t)x_j + B_{lk}(t)y_k, \ k = \overline{1, n_2}$, $n_1 + n_2 = n$.

Тогда $X_i = -\frac{\partial H}{\partial \kappa_i}$, $Y_k = -\frac{\partial H}{\partial a_k}$, и соответствующие уравнения расширенной системы запишутся в виде

$$\begin{cases} \dot{\kappa}_i = \dfrac{\partial H}{\partial x_i}, \ \ i = \overline{1, n_1}, \ n_1 \geq 0 \ \ (7a) \\ \dot{x}_i = \dfrac{\partial H}{\partial \kappa_i}, \ \ (7b) \\ \dot{\nu}_k = \dfrac{\partial H}{\partial y_k}, \ \ k = \overline{1, n_2}, \ n_2 \geq 0 \ \ (7c) \\ \dot{y}_k = \dfrac{\partial H}{\partial a_k} + \sigma_{kj}\dot{\xi}^j, \ \ n_1 + n_2 = n, \ \ (7d) \end{cases} \tag{7}$$

где уравнения (7b) и (7d) совпадают с исходными уравнениями (4), а уравнения (7a) и (7c) служат для определения вспомогательных переменных $\kappa_i, \ i = \overline{1, n_1}$ и $\nu_k, \ k = \overline{1, n_2}$.

Теорема 2. *Необходимыми и достаточными условиями представления уравнения Ито первого порядка* (1) *в виде уравнений канонической структуры* (7) *является представление функции Гамильтона в виде* (6) *с помощью дополнительных переменных* $\kappa_i, \ i = \overline{1, n_1}$ *и* $\nu_k, \ k = \overline{1, n_2}$, *которые определяются из уравнений (7a) и (7c).*

Таким образом, методом моментных функций в сочетании с методом дополнительных переменных решена задача Гельмгольца в классе дифференциальных уравнений эквивалентных в среднем квадратическом. Полученный результат обобщает один из ранее полученных результатов [2-5] на более общий класс стохастических дифференциальных уравнений.

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № BR20281002).

Ключевые слова: уравнение Ито, задача Гельмгольца, функция Гамильтона, метод моментных функций.

2010 Mathematics Subject Classification: 34Cxx, 60G07, 60H10

Литература

[1] Пугачев В.С., Синицын И.Н. *Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация*, Наука, М. (1990).

[2] Tleubergenov M.I., Azhymbaev D.T. Stochastic problem of Helmholtz for Birkhoff system, *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series*, **1**:93 (2019), 78–87.

[3] Tleubergenov M.I., Azhymbaev D.T. On the Solvability of Stochastic Helmholtz Problem, *Journal of Mathematical Sciences (United States)*, **253**:2 (2021), 297–305.

[4] Marat Tleubergenov, Gulmira Vassilina, Darkhan Azhymbaev Stochastic Helmholtz problem and convergence in distribution, *Filomat*, **36**:7 (2022), 2451–2460.

[5] M. I. Tleubergenov, G. K. Vassilina, and D. S. Kulakhmetova. Stochastic Helmholtz Problem with Constraints Linearly Depending on Velocities, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **43**:11 (2022), 3292–3297.

О задачах типа Бицадзе-Самарского для нелокального уравнения Пуассона

Б.Х. ТУРМЕТОВ[1], Ж.Н. ТУРГАНБАЕВА[2]

[1,2]*Университет Ахмеда Ясави, Туркестан, Казахстан*
[1]*Университет Альфрагануса, Ташкент, Узбекистан*

[1]batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz, [2]zhannur.turganbayeva@ayu.edu.kz

Пусть $S_1, S_2, ..., S_m$ симметричные коммутативные матрицы размерности $n \times n$ и $S_i^2 = E$, E-единичная матрица. Если i некоторый индекс и $i = (i_n ... i_2 i_1)_2$ его двоичный запись, то мы можем рассмотреть отображения вида $S_n^{i_n} ... S_2^{i_2} S_1^{i_1} x$.

Пусть Ω и $\partial\Omega$ соответственно единичный шар и единичная сфера в $R^n, n \geq 2$, Δ - оператор Лапласа и $a_i, b_i, i = 0, 1, ..., 2^m - 1$ некоторый набор действительных чисел. Введем операторы

$$\ell_b u(x) = \sum_{i=0}^{2^m-1} b_i u(S_n^{i_n} ... S_1^{i_1} x), L_a u(x) \equiv \ell_a [\Delta u](x).$$

Рассмотрим в области Ω следующие задачи.

Задача 1. Найти функцию $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ удовлетворяющую уравнению

$$L_a u(x) = f(x), x \in \Omega \tag{1}$$

и граничному условию

$$\ell_b[u](x) = g(x), x \in \partial\Omega.$$

Задача 2. Найти функцию $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ удовлетворяющую уравнению (1) и граничному условию

$$\ell_b [\partial_\nu u](x) = g(x), x \in \partial\Omega,$$

где $\partial_\nu u(x) = \frac{\partial u}{\partial \nu}$, ν — вектор нормали.

Отметим,что задачи 1 и 2 в случае $b_j = 1, 2, ..., 2^m - 1$ изучены в работе [1].

В настоящей работе доказаны теоремы о существовании и единственности решения задач 1 и 2. Изучены также спектральные задачи для оператора L_a. Используя свойства собственных функций и собственных значений классических задач Дирихле и Неймана в явном виде найдены системы собственных функций и собственные значения основных задач. Доказаны теоремы о полноте систем собственных функций рассматриваемых задач.

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № AP19677926).

Ключевые слова: инволюция, нелокальный оператор, уравнение Пуассона, нелокальная задача, спектральная задача.

2010 Mathematics Subject Classification: 34K06,34K10,35J05, 35J25

Литература

[1] Турметов Б.Х., Карачик В.В. О разрешимости краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Пуассона с множественной инволюцией, *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*, **31**:4 (2021), 651– 667.

Сингулярно возмущенная задача Дирихле с бипограничным слоем

Д.А. ТУРСУНОВ[1], К.К. ШАКИРОВ[2]

[1,2]*Ошский государственный университет, Ош, Кыргызстан*

[1]dtursunov@oshsu.kg, [2]kshakirov@oshsu.kg

Исследуем следующую задачу Дирихле для кольца

$$\varepsilon^4 \Delta u_\varepsilon(\rho,\varphi) + (\rho-a)^2 p(\rho,\varphi)\frac{\partial u_\varepsilon(\rho,\varphi)}{\partial\rho} - \\ - ((\rho-a)^2 q(\rho,\varphi) + \varepsilon r(\rho,\varphi)) u_\varepsilon(\rho,\varphi) = f(\rho,\varphi),\ (\rho,\varphi)\in D, \quad (1)$$

$$u_\varepsilon(a,\varphi)=0, \quad u_\varepsilon(b,\varphi)=0,\ \varphi\in[0,2\pi], \quad (2)$$

где ε — малый параметр, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$ — оператор Лапласа в полярной системе координат, $a,\ b$ — заданные, известные постоянные числа, $p,\ q,\ r,\ f\in C^\infty(\overline{D})$,
$(\rho,\varphi)\in\overline{D}:\ 0<p(\rho,\varphi), 0<q(\rho,\varphi),\ 0<r(\rho,\varphi),\ f(a,\varphi)\neq 0,\ \varphi\in[0,2\pi]$,
$D=\{(\rho,\varphi)|a<\rho<b,\ 0\le\varphi\le 2\pi\}$, $\overline{D}=\{(\rho,\varphi)|a\le\rho\le b,\ 0\le\varphi\le 2\pi\}$,
$u_\varepsilon(\rho,\varphi)$ — искомая функция, зависящая от малого параметра ε.

Нетрудно заметить, что предельное уравнение, $\varepsilon=0$:

$$(\rho-a)^2 p(\rho,\varphi)\frac{\partial u_0(\rho,\varphi)}{\partial\rho} - (\rho-a)^2 q(\rho,\varphi) u_0(\rho,\varphi) = f(\rho,\varphi),\ (\rho,\varphi)\in D,$$

имеет особую линию (окружность $\rho=a$), соответственно оно будет влиять на внешнее решение задачи (1)-(2). Такое явление свойственно бисингулярным задачам [1], [3]-[5].

Нами доказывается, что в окрестности граничной окружности $\rho=a$, кроме классического пограничного слоя, появляется еще один промежуточный слои, т.е. в окрестности $\rho=a$ появляется бипограничный (двойной) слой.

Теорема Для решения задачи Дирихле (1), (2) в кольце $\overline{D}$ при $\varepsilon\to 0$, справедливо асимптотическое разложение:

$$u_\varepsilon = \Big(\sum_{j=0}^{s}\varepsilon^j v_j + \frac{1}{\mu}\sum_{j=0}^{(s+1)}\mu^j w_j + \frac{1}{\lambda^2}\sum_{j=0}^{2(s+1)}\lambda^j \pi_j\Big) e^{\int_b^\rho \frac{q(s,\varphi)}{p(s,\varphi)}ds} + O(\varepsilon^s).$$

Финансирование: Данное исследование финансируется Ошским государственным университетом (грант №01-25).

Ключевые слова: сингулярное возмущение, задача Дирихле, бисингулярная задача, промежуточный пограничный слой, бипограничный слой, асимптотическое решение.

2010 Mathematics Subject Classification: 35C20, 35O25

Литература

[1] Il'in A.M. *Matching of Asymptotic Expansions of Solutions of Boundary Value Problems*, Nauka, Moscow (1992).

[2] Tursunov D.A., Omaralieva G.A. An intermediate boundary layer in singularly perturbed first-order equations, *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN.*, **28**:2 (2022), 193–200.

[3] Tursunov D.A., Kozhobekov K.G., Shakirov K.K. Asymptotics of the solution of a singularly perturbed problem with a singular line, *Lobachevskii J. Math.*, **46**:1 (2025), 536–546.

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА ПАРАМЕТРИЗАЦИИ К ИССЛЕДОВАНИЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

К.И. УСМАНОВ[1], К.Ж. НАЗАРОВА[2], М.А. МУРАТБЕКОВА[3]

[1,2,3]*Международный казахско-турецкий университет, Туркестан, Казахстан*

[1]kairat.usmanov@ayu.edu.kz, [2]kulzina.nazarova@ayu.edu.kz,
[3]moldir.muratbekova@ayu.edu.kz

Дробное исчисление является расширением классического дифференциального и интегрального исчисления для произвольных порядков дифференцирования. В последние десятилетия интерес в данной области значительно возрос из-за широкого спектра приложений, включая моделирование процессов с памятью, аномальную диффузию и динамику сложных систем.

Впервые идея дробных производных была предложена Лейбницем в 1695 году, а математические основы разработаны Лиувиллем и Риманом в XIX веке. Строгие математические основы дробного дифференцирования были впервые разработаны Лиувиллем в 1832 году [1], а затем расширены Риманом в 1847 году [2], что привело к появлению интеграла Римана – Лиувилля, ставшего классическим инструментом в дробном исчислении.

На отрезке $[0,T]$ рассматривается линейная двухточечная краевая задача

$$ {}_C D^{\alpha} x\left(t\right) = A\left(t\right) x + f\left(t\right), \quad t \in \left[0,T\right], \quad x \in R^n, \tag{1} $$

$$ Bx\left(0\right) + Cx\left(T\right) = d, \quad d \in R^n, \tag{2} $$

где матрица $A\left(t\right)$, вектор-функция $f\left(t\right)$ непрерывны на $[0,T]$, $A\left(t\right) = \max\limits_{i=1,n} \sum\limits_{j=1}^{n} \left|a_{ij}\left(t\right)\right| \le a$, a — const.

Решением задачи (1), (2) на отрезке $[0,T]$ является вектор-функция $x\left(t\right)$, которая непрерывно дифференцируемая на $[0,T]$, определена дробная производная Капуто на рассматриваемом отрезке ${}_C D^{\alpha} x\left(t\right) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^t \left(t-\xi\right)^{-\alpha} x_r'\left(\xi\right) d\xi,$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений (1), имеющая в точках $t=0,\ t=T$ значения $x\left(0\right),\ x\left(T\right)$, для которых справедливо равенство (2). В данной работе предлагается один из вариантов исследования разрешимости краевых задач для дифференциального уравнения дробного порядка, т.е. применение метода параметризации предложенный профессором Д.Джумабаевым [3].

На основе метода параметризации был предложен алгоритм нахождения решения, а также установлена сходимость данного алгоритма.

Теорема 1. *Пусть при некотором разбиении* $h > 0 : Nh = T$ *матрица* $Q_h : R^{n(N+1)} \to R^{n(N+1)}$ *обратима и выполняются неравенства:*
а) $\left[Q_h\right]^{-1} \le \gamma\left(h\right)$,
б) $q\left(h\right) = \frac{a^2\gamma(h)}{\Gamma^2(\alpha+1)} E_{\alpha}\left(a\Gamma(\alpha) h^{\alpha}\right) h^{2\alpha} < 1.$
Тогда последовательность пар $\left(\lambda^{(k)}, u^{(k)}\left[t\right]\right)$ *при* $k \to \infty$ *сходится к* $\left(\lambda^{(*)}, u^{(*)}\left[t\right]\right)$.

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № AP23488086).

Ключевые слова: дифференциальные уравнения дробного порядка, метод параметризации, краевые задачи, разрешимость, дробная производная Капуто.

2010 Mathematics Subject Classification: 34B99, 34B05, 34Б60

Литература [1] Liouville J. Sur le calcul des differentielles indices quelconques (in french), *Gesammelte Werke*, **71** (1832).

[2] Riemann B. Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation , *Ecole Polytechnique*, **62**:1876 (1876).

[2] Dzhumabayev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation , *Comput. Maths. Math. Phys.*, **29**:34 (1989), 34–46.

Начально-краевые задачи для гиперболического уравнения с инволюцией

Д.Д ШАРАФИДИНОВ[1], Б.Х. ТУРМЕТОВ[2]

[1,2]*Университет Ахмеда Ясави, Туркестан, Казахстан*
[2]*Университет Альфраганус,Ташкент,Узбекистан*
[1]dimabekeev@mail.ru, [2]batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz

Пусть Q_T цилиндрическая область $Q_T = (0,T) \times \Omega$, где Ω единичный шар в $R^n, n \geq 2$, $\partial\Omega$ — единичная сфера, S — ортогональная матрица: $S \cdot S^T = E$ и $S^2 = E$, где E единичная матрица. Примером такой матрицы является матрица отображения $Sx = -x$. Рассмотрим в области Q_T следующую начально-краевую задачу:

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} - a_0 \Delta u(t,x) - a_1 \Delta u(t,Sx) = h(t,x), (t,x) \in Q_T, \tag{1}$$

$$u(0,x) = \tau(x), u_t(0,x) = \rho(x), x \in \bar{\Omega}, \tag{2}$$

$$u(t,x) = 0, [0,T] \times \partial\Omega, \tag{3}$$

где a_0, a_1 — некоторые действительные числа, $h(t,x), \tau(x)$ и $\rho(x)$ заданные функции.

Классическим решением задачи (1) - (3) назовем функцию $u(t,x)$ из класса $C^{2,2}_{t,x}\left(Q_T\right) \cap C^{1,0}_{t,x}\left(\bar{Q}_T\right)$ и удовлетворяющую условиям (1) - (3) в обычном смысле.

Наряду с этой задачей мы будем исследовать также начально-краевую задачу с условиями (1),(2) и граничным условием Неймана $\partial_\nu u(t,x) = 0, [0,T] \times \partial\Omega$, где $\partial_\nu = \frac{\partial}{\partial \nu}$ — производная по направлению вектора нормали к сфере $\partial\Omega$.

В этом случае решение будем искать в классе функции $u(t,x) \in C^{2,2}_{t,x}\left(Q_T\right) \cap C^{1,1}_{t,x}\left(\bar{Q}_T\right)$.

Отметим, что обратные задачи для уравнения (1) в случае $n = 1$ изучено в работах [1,2].

Рассматриваемые задачи решаются сведением их к эквивалентным задачам для классического гиперболического уравнения. Используя известные утверждения для начально-краевых задач для классического гиперболического уравнения доказаны теоремы о существовании и единственности решения. Показано, что корректность рассматриваемых задач существенно зависит от коэффициентов участвующих в определении нелокального оператора Лапласа. Решения рассматриваемых задач построены в виде ряда.

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № AP19677926).

Ключевые слова: инволюция, нелокальный оператор, гиперболическое уравнение, начально-краевая задача, условие Дирихле, условие Неймана.

2010 Mathematics Subject Classification: 35R30, 35K05, 35K20

Литература

[1] Kirane M., Al-Salti N. Inverse problems for a nonlocal wave equation with an involution perturbation, *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, **9** (2016), 1243–1251.

[2] Tapdigoglu R., Torebek, B. T. Inverse source problems for a wave equation with involution, *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series*, **91**:3 (2018), 75–82.

Multipoint boundary value problems in differential-algebraic equations

Zh.N. ARTYKBAYEVA[1], B.E. KANGUZHIN[2]

[1]Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
[2]Al-Farabi Kazakh National University, Almaty Kazakhstan
[1]artykbaeva.zhanar@gmail.com, [2]kanbalta@mail.ru

We consider a differential-boundary equation with algebraic terms on a finite interval $0 < x < 1$

$$l(y) \equiv \frac{d}{dx}\left(\frac{dy(x)}{dx} + \sum_{i=1}^{k} h_i(x)U_i(y) + \sum_{j=1}^{s} \lambda_j q_j(x)\right) + r_1(x)\frac{dy(x)}{dx} + r_0(x)y(x) = f(x), \qquad (1)$$

A distinctive feature of these equations is that, alongside the function being sought, a certain number of unknown values must also be determined. This leads to the critical question of unique solvability: how many and what type of conditions need to be imposed on equation (1) to ensure that the resulting problem has a unique solution in a given space?

This kind of equations are classified as differential operator equations in [1]. Such equations, consisting of both differential and algebraic parts, are called differential-algebraic equations [2].

Keywords: differential-algebraic equation, hybrid operator, restriction, inhomogeneous operator equation.

References

[1] Dezin A.A. *Differential Operator Equations: A Method of Model Operators in the Theory of Boundary Value Problems.*, Proc. Steklov Inst. Math., 229(2000), 1–161.

[2] Kunkel, P.; Mehrmann, V. *Differential-Algebraic Equations. Analysis and Numerical Solution.2nd.*.,Berlin: EMS Press, 2024.

Space-dependent source identification problem for the subdiffusion equation

R.R. ASHUROV[1], M.D. SHAKAROVA[2]

[1,2]Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Science, Tashkent, Uzbekistan
[1]ashurovr@gmail.com, [2]shakarova2104@gmail.com

An inverse problem of determining the right-hand side of the abstract subdiffusion equation with a fractional Riemann-Liouville derivative is considered in a Hilbert space H. For the forward problem, the non-local in-time condition $u(0) = u(T)$ is taken instead of the Cauchy condition. The right-hand side of the equation has the form $g(t)f$ with a given function $g(t)$ and an unknown element $f \in H$. As an over-determination condition, we adopt the integral condition $\int_0^T u(t)dt = \psi$. Here $\psi \in H$ is a given element. For a sign-preserving function $g(t)$, the existence and uniqueness of a solution are proved. If the function $g(t)$ changes sign, then necessary and sufficient conditions for the existence of a solution are found. All the presented results are new for diffusion equations as well.

Multipoint problem for higher order hyperbolic equations with impulse discrete memory

A.T. ASSANOVA

[1]*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*

assanova@math.kz

We consider on restangular domain $\Omega = [0,T] \times [0,\omega]$ multipoint problem for higher order hyperbolic equations with impulse discrete memory

$$\frac{\partial^{m+1} z}{\partial x^m \partial t} = \sum_{i=1}^{m} a_i(t,x)\frac{\partial^i z(t,x)}{\partial x^i} + \sum_{i=1}^{m} b_i(t,x)\frac{\partial^i z(t,x)}{\partial x^{i-1}\partial t} + c(t,x)z(t,x) + f(t,x)+$$

$$+\sum_{i=1}^{m} a_{0i}(t,x)\frac{\partial^i z(\gamma(t),x)}{\partial x^i} + \sum_{i=1}^{m} b_{0i}(t,x)\frac{\partial^i z(\gamma(t),x)}{\partial x^{i-1}\partial t} + c_0(t,x)z(\gamma(t),x), \tag{1}$$

$$t \neq \theta_j, \qquad j = \overline{1, N-1},$$

$$\sum_{k=1}^{N}\left\{\sum_{i=1}^{m} p_{ki}(x)\frac{\partial^i z(t_k,x)}{\partial x^i} + \sum_{i=1}^{m} s_{ki}(x)\frac{\partial^i z(t,x)}{\partial x^{i-1}\partial t}\Big|_{t=t_k} + q_k(x)z(t_k,x)\right\} = \varphi_0(x), \quad x\in[0,\omega], \tag{2}$$

$$\lim_{t\to\theta_j+0} z(t,x) - \lim_{t\to\theta_j-0} z(t,x) = \varphi_j(x), \qquad x\in[0,\omega], \quad j=\overline{1,N-1}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial^p z(t,x)}{\partial x^p}\Big|_{x=0} = \psi_p(t), \qquad p=\overline{0,m-1}, \qquad t\in[0,T], \tag{4}$$

where $u(t,x)$ is unknown function, functions $a_i(t,x)$, $b_i(t,x)$, $a_{0i}(t,x)$, $b_{0i}(t,x)$, $i=\overline{1,m}$, $c(t,x)$, $c_0(t,x)$, and $f(t,x)$ are continuous on Ω,

$\gamma(t) = \zeta_j, \quad t\in[\theta_j, \theta_{j+1}), \quad j=\overline{0,N-1}; \quad \theta_j \le \zeta_j \le \theta_{j+1}$ for all $j=0,1,...,N-1$;
$0=\theta_0<\theta_1<...<\theta_{N-1}<\theta_N=T$;

functions $p_{ki}(x)$, $s_{ki}(x)$, $q_k(x)$, $k=\overline{1,N}$, $i=\overline{1,m}$, and $\varphi_0(x)$ are continuous on $[0,\omega]$;

$$0=t_0<t_1<...<t_{N-1}<t_N=T, \quad t_k\neq\theta_j, \quad k,j=\overline{1,N-1};$$

functions $\varphi_j(x)$ m are m times continuously differentiable on $[0,\omega]$, functions $\psi_p(t)$, $p=\overline{0,m-1}$, continuously differentiable on $[0,T]$.

Recently, a modification of Dzhumabaev's parametrization method [1] was proposed which proved to be a constructive method for solving nonlocal problems for hyperbolic equations with integral condition [2], with impulsive actions [3], [4], with delayed argument [5] and with discrete memory [6]. Note that multipoint problem for higher order partial differential equations was considered in [7].

The method is based on the introduction of functional parameters that are set as the values of the desired solution along the lines of the domain partition with respect to the time variable. With the aid of the functional parameters and new unknown functions, the considered problem is reduced to an equivalent problem for a system of hyperbolic equations with data on the interior partition lines and functional relations with respect to the introduced parameters. We have developed a two-stage procedure to approximately solve the latter problem: firstly, we solve an initial-value problem for a system of differential equations in functional parameters; then, we solve a problem for a system of hyperbolic equations in new unknown functions with data on the interior partition lines. We have obtained some conditions for the convergence of approximate solutions to the exact solution of the problem under study in terms of input data and proved that these conditions guarantee the existence of a unique solution of the equivalent problem. Finally, we have established coefficient conditions for the unique solvability of the multipoint problem (1)–(4).

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. BR20281002).

Keywords: higher order hyperbolic equations, impulse discrete memory, multipoint condition, solvability, algorithm.

2010 Mathematics Subject Classification: 35G16, 34K45, 35L35, 35R12

References

[1] Dzhumabayev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation, *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, **29**:1 (1989), 34–46.

[2] Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Well-posedness of nonlocal boundary value problems with integral condition for the system of hyperbolic equations, *J. Math. Anal. Appl.*, **402**:1 (2013), 167–178.

[3] Assanova A.T., Bakirova E.A., Kadirbayeva Z.M. On the unique solvability of a nonlocal boundary-value problem for systems of loaded hyperbolic equations with impulsive actions, *Ukrainian Math J.*, **69**:8 (2018), 1175–1195.

[4] Assanova A., Kadirbayeva Z. Periodic problem for an impulsive system of the loaded hyperbolic equation, *Electr. J. Differ. Equ.*, **2018**:72 (2018), 1–8.

[5] Assanova A., Iskakova N., Orymbayeva N. On the well-posedness of periodic problems for the system of hyperbolic equations with finite time delay, *Math. Methods Appl. Sci.*, **43**:2 (2020), 881–902.

[6] Imanchiyev A.E., Assanova A.T., Molybaikyzy A. Properties of a nonlocal problem for hyperbolic equations with impulse discrete memory, *Lobachevskii J. Math.*, **44**:10 (2023), 4294–4303.

[7] Assanova A.T., Imanchiyev A.E. A nonlocal problem with multipoint conditions for partial differential equations of higher order, *Filomat*, **38**:1 (2024), 295–304.

Optimal control task in HJB PDEs for Transaction costs

D.M BAIMAKHANBET

[1]*SDU University, Kaskelen, Kazakhstan*

241101005@sdu.edu.kz

This research investigates optimal control problems arising in financial models with transaction costs, formulated through Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) partial differential equations. The presence of transaction costs introduces nonlinearities that complicate the solution structure, requiring advanced mathematical and numerical techniques. We explore different approaches to solving these HJB equations, including viscosity solutions and discrete approximations. The study also focuses on control strategies that optimize trading decisions under various cost structures, balancing profitability and risk. Computational methods are implemented to analyze the impact of transaction costs on optimal strategies, providing insights into efficient numerical schemes for practical applications. The results contribute to the understanding of dynamic optimization in financial markets, offering a rigorous framework for incorporating transaction costs into decision-making processes.

Funding: This research is supported by SDU University to advance the mathematical modeling and numerical analysis of optimal control problems in financial markets with transaction costs.

Keywords: optimal control, homogeneous body, Hamilton-Jacobi-Bellman equations, transaction costs, stochastic control.

2010 Mathematics Subject Classification: 34K50, 65L03

References

[1] Barles, G., Souganidis, P. E. *Convergence of approximation schemes for fully nonlinear second order equations. Asymptotic Analysis*, (1991).

[2] Çetin, U., Jarrow, R. A., Protter, P. Liquidity risk and arbitrage pricing theory. (2004)

[3] Crandall, M. G., Ishii, H., Lions, P. L. User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations., Bulletin of the American Mathematical Society ,(1992)

Well-posed solvability of a boundary value problem for delay integro-differential equations

E.A. BAKIROVA [1], S.G. KARAKENOVA[2]

[1]*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[2]*Kh.Dosmukhamedov Atyrau University, Atyrau, Kazakhstan*

[1]bakirova1974@mail.ru, [2]sayakhat.karakenova05@gmail.com

In the present paper we consider a linear boundary value problem for delay integro-differential equations

$$\frac{dx}{dt} = \mathcal{A}(t)x + \mathcal{B}(t)x(t-\tau) + \int\limits_0^T \mathcal{K}(t,s)x(s)ds + f(t), \quad t \in [0,T], \tag{1}$$

$$x(t) = diag[x(0)]\varphi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \tag{2}$$

$$\mathcal{C}x(0) + \mathcal{D}x(T) = d, \quad d \in R^n, \tag{3}$$

where the matrices $\mathcal{A}(t)$, $\mathcal{B}(t)$, and vector-function $f(t)$ are continuous on $[0,T]$, the matrix $\mathcal{K}(t,s)$ is continuous on $[0,T]\times[0,T]$, $\varphi : [-\tau, 0] \to \mathbb{R}^n$ is a continuously differentiable vector-function such that $\varphi_i(0) = 1$, $i = \overline{1,n}$; τ is a constant delay; the matrices $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ and the vector d are constant.

We divide the interval $[0,T]$ into parts with $h > 0 : mh = T$ and approximate problem (1)-(3) by the boundary value problem for delay loaded differential equations

$$\frac{dy}{dt} = \mathcal{A}(t)y + \mathcal{B}(t)y(t-\tau) + \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{(i-1)h}^{ih} \mathcal{K}(t,s)y[(i-1)h]ds + f(t), \quad t \in [0,T],$$

$$y(t) = diag[y(0)]\varphi(t), \quad t \in [-\tau, 0],$$

$$\mathcal{C}y(0) + \mathcal{D}y(T) = d, \quad d \in R^n,$$

By using parametrization method [1] and an approximation of the delay integro-differential equation by delay loaded differential equation, we establish coefficient tests for the well-posedness of the considered problem (1)-(3) and suggest an algorithm for finding the solution.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant no. AP23486114). [2] **Keywords**: delay integro-differential equation, delay loaded differential equation, boundary value problem, correct solvability, relationship.

2010 Mathematics Subject Classification: 34B37, 65L06.

References

[1] Dzhumabayev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **29**:1 (1989), 34–46.

[2] Dzhumabayev D.S., Bakirova E.A. Criteria for the well-possedness of a linear two-point boundary value problem for systems of integro-differential equations, *Differential equations*, **46**:4 (2010), 553–567.

Parabolic systems with conormal boundary condition

B. BEKMAGANBETOV

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
Brown University, Providence, USA

bekarys_bekmaganbetov@brown.edu

Let $d \geq 1$ and $n \geq 1$ be integers. Let $\mathbb{R}^d_+ = \{x = (x', x_d) : x' \in \mathbb{R}^{d-1}, x_d > 0\}$ be the upper half-space. For $T \in (-\infty, \infty]$ we denote $\Omega_T = (-\infty, T) \times \mathbb{R}^d_+$. Let $\alpha \in (-1, \infty)$ be fixed.

We study second order parabolic systems

$$x_d^\alpha a_0(x_d) u_t - D_i(x_d^\alpha A_{ij} D_j u) + \lambda x_d^\alpha C_0 u = -D_i(x_d^\alpha F_i) + \sqrt{\lambda} x_d^\alpha f \qquad \text{in } \Omega_T \tag{1}$$

with the conormal boundary condition

$$\lim_{x_d \to 0^+} x_d^\alpha (A_{dj} D_j u - F_d) = 0 \qquad \text{on } (-\infty, T) \times \mathbb{R}^{d-1}. \tag{2}$$

Here $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, the coefficients $(A_{ij}, C_0) = (A_{ij}, C_0)(t, x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ and $a_0 = a_0(x_d) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ are matrix-valued functions defined for $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d_+$, $(u, F_i, f) = (u, F_i, f)(t, x) \in \mathbb{R}^n$ are vector-valued functions on Ω_T, and $\lambda \geq 0$ is a parameter.

We assume that the coefficients A_{ij} are bounded, measurable, and strongly elliptic, $a_0 = a_0^T$ is symmetric, and that a_0 and C_0 are bounded, measurable, and positive definite: there exists $\kappa \in (0, 1]$ such that $|A_{ij}| \leq \kappa^{-1}, |a_0| \leq \kappa^{-1}, |c_0| \leq \kappa^{-1}$, and for all $\xi = (\xi^i_\alpha)^{1 \leq i \leq d}_{1 \leq \alpha \leq n}, \eta \in \mathbb{R}^n$ holds

$$\kappa |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{d} \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} A^{\alpha\beta}_{ij} \xi^i_\alpha \xi^j_\beta, \quad \kappa |\eta|^2 \leq \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_0^{\alpha\beta} \eta_\alpha \eta_\beta, \quad \kappa |\eta|^2 \leq \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} C_0^{\alpha\beta} \eta_\alpha \eta_\beta.$$

For $z_0 = (t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}^d_+}$ and $r > 0$, denote $Q^+_r(z_0) = Q'_r(z'_0) \times (\max(0, x_{0d} - r), x_{0d} + r)$, where $Q'_r(z'_0) = (t_0 - r^2, t_0) \times B'_r(x'_0)$, $B'_r(x'_0)$ is the ball in $\mathbb{R}^{d-1}$ of radius r centered at x'_0. Denote $d\mu(z) = x_d^\alpha dx dt, d\mu(x) = x_d^\alpha dx$. We impose the following partial BMO condition on A_{ij} and C_0.

Assumption 1 (γ_0, R_0)**.** *For any $r \in (0, R_0]$ and $z_0 = (t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}^d_+}$, we have*

$$\max_{i,j} \fint_{Q^+_r(z_0)} |A_{ij}(t, x) - [A_{ij}]_{r,z_0}(x_d)| d\mu(z) + \fint_{Q^+_r(z_0)} |C_0(t, x) - [C_0]_{r,z_0}(x_d)| d\mu(z) \leq \gamma_0,$$

where $[A_{ij}]_{r,z_0}(x_d) = \fint_{Q'_r(z'_0)} A_{ij}(t, x', x_d) dx' dt$ is the average of a_{ij} with respect to (t, x') over $Q'_r(z'_0)$.

For $p, q \in (1, \infty)$ and Muckenhoupt weights $w_0 = w_0(t) \in A_q(\mathbb{R}), w_1 = w_1(x) \in A_p(\mathbb{R}^d_+, \mu)$, we denote $w = w_0(t) w_1(x)$ and

$$\|f\|_{L_{q,p}(\Omega_T, w d\mu)} = \left(\int_{-\infty}^{T} \left(\int_{\mathbb{R}^d_+} |f(t, x)|^p w_1(x) d\mu(x) \right)^{q/p} w_0(t) dt \right)^{1/q}.$$

We say that $u \in W^{0,1}_{q,p}(\Omega_T, w d\mu)$ if $u, D_x u \in L_{q,p}(\Omega_T, w d\mu)$.

Theorem 2. *Let $\alpha \in (-1, \infty), p, q, K \in (1, \infty)$, $\kappa \in (0, 1]$, $R_0 \in (0, \infty)$, $w = w_0(t) w_1(x)$, where $w_0 \in A_q(\mathbb{R})$ and $w_1 \in A_p(\mathbb{R}^d_+, \mu)$ with $[w_0]_{A_q(\mathbb{R})} \leq K$ and $[w_1]_{A_p(\mathbb{R}^d_+, \mu)} \leq K$. Then, there exist $\gamma_0 = \gamma_0(d, n, \alpha, p, q, \kappa, K) \in (0, 1)$ and $\lambda_0 = \lambda_0(d, n, \alpha, p, q, \kappa, K) \geq 0$ such that the following assertions hold. Suppose that Assumption (γ_0, R_0) is satisfied. If $u \in W^{0,1}_{q,p}(\Omega_T, w d\mu)$ is a weak solution to (1)-(2) for some $\lambda \geq \lambda_0 R_0^{-2}$, $f \in L_{q,p}(\Omega_T, w d\mu)$, and $F \in L_{q,p}(\Omega_T, w d\mu)^d$, then we have*

$$\|Du\|_{L_{q,p}(\Omega_T, w d\mu)} + \sqrt{\lambda} \|u\|_{L_{q,p}(\Omega_T, w d\mu)} \leq N \|F\|_{L_{q,p}(\Omega_T, w d\mu)} + N \|f\|_{L_{q,p}(\Omega_T, w d\mu)},$$

where $N = N(d, n, \alpha, p, q, \kappa, K) > 0$. Moreover, for any $\lambda > \lambda_0 R_0^{-2}$, $f \in L_{q,p}(\Omega_T, w d\mu)$, and $F \in L_{q,p}(\Omega_T, w d\mu)^d$, there exists a unique weak solution $u \in W^{0,1}_{q,p}(\Omega_T, w d\mu)$ to (1)-(2).

We also consider more general equations with singular lower-order terms of the form

$$x_d^\alpha a_0(x_d)u_t - D_i(x_d^\alpha A_{ij}D_j u + x_d^{\alpha-1}B_i u) + x_d^{\alpha-1}\hat{B}_i D_i i + x_d^{\alpha-2}Cu + \lambda x_d^\alpha C_0 u$$
$$= -D_i(x_d^\alpha F_i) + x_d^{\alpha-1}F_0 + \sqrt{\lambda}x_d^\alpha f,$$

for which we obtain similar results under certain smallness assumptions on $B_i, \hat{B}_i$, and C, and certain structural conditions on the weight $w_1(x)$. Our results extend those in [1], which were established for scalar equations, to systems of equations with singular lower-order terms.

Joint work with Hongjie Dong.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP19677486).

References

[1] Hongjie Dong and Tuoc Phan, On parabolic and elliptic equations with singular or degenerate coefficients, *Indiana Univ. Math. J.*, **72** (2023), 1461–1502.

Asymptotic spectral analysis of the biharmonic Steklov problem on a thin domain

B.O. DERBISSALY

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

derbissaly@math.kz

In this work, we analyze the asymptotic behavior of eigenvalues and eigenfunctions in the generalized biharmonic Steklov problem within a thin domain. We examine the problem separately in both two-dimensional and higher-dimensional settings. Our findings demonstrate that as the domain becomes increasingly thin, the eigenvalues in both cases converge to zero. Notably, the results obtained for the multidimensional case also encompass those for the two-dimensional scenario.

Inverse problems of the determining right-hand side for mixed type equations with the Gerasimov–Caputo fractional derivative

U.Kh. DUSANOVA

Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Science, Tashkent

umidakhon8996@gmail.com

Let $0 < \rho \le 1$. In the rectangular domain $D = \{(x,t)|\ 0 < x < 1,\ -\alpha < t < \beta\}$ we consider an equation of a mixed-type:

$$Lu = F(x,t), \tag{1}$$

here

$$Lu = \begin{cases} D_{0t}^\rho u - u_{xx}, & 0 < t < \beta, \\ u_{tt} - u_{xx}, & -\alpha < t < 0, \end{cases} \qquad F(x,t) = \begin{cases} f_1(x,t), & 0 < t < \beta, \\ f_2(x,t), & -\alpha < t < 0. \end{cases}$$

We take the Dirichlet condition as the boundary condition

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad -\alpha \le t \le \beta. \tag{2}$$

Let the initial condition be of the following form

$$u(x,-\alpha) = \varphi(x), \quad 0 < x < 1. \tag{3}$$

We take the gluing conditions in the form

$$u(x,+0)=u(x,-0), \quad \lim_{t\to+0} D^{\rho}_{0t}u(x,t)=u_t(x,-0), \quad 0<x<1, \tag{4}$$

where $\varphi(x)$ and $F(x,t)$ are given sufficiently smooth functions, $\alpha>0$, $\beta>0$ are given real numbers.

Problem (1)–(4) is also called *the forward problem.*

We introduce the following designations: $D_+=(0,1)\times(0,\beta)$, $D_-=(0,1)\times(-\alpha,0)$.

Definition 1. A function $u(x,t)\in C(\overline{D})$ and $u(x,t)\in AC([0,1]\times[0,\beta])$ with the properties

1. $u(x,t)\in C^2_{x,t}(D_-)$,
2. $D^{\rho}_t u(x,t)\in C(\overline{D}_+)$,
3. $u(x,t)\in C^2_x(D_+)$,
4. $u(x,t)\in C^1_t(\overline{D}_-)$,

and satisfying equation (1) and conditions (2)-(4) is called the (classical) solution of the forward problem.

Let for all $k\in\mathbb{N}$

$$\Delta_\alpha(k)=\cos\sqrt{\lambda_k}\alpha+\sqrt{\lambda_k}\sin\sqrt{\lambda_k}\alpha=\sqrt{1+\lambda_k}\sin\left(\sqrt{\lambda_k}\alpha+\theta_k\right)\neq 0, \tag{5}$$

where in $k\to\infty$, $\theta_k=arcsin(\frac{1}{\sqrt{1+\lambda_k}})\to 0$.

Lemma 2. *If α is an arbitrary natural number, then there exists a constant C_0 such that, for all $k\in\mathbb{N}$,*

$$|\Delta_\alpha(k)|\geq C_0=1. \tag{6}$$

Lemma 3. *There exists an infinite set M of irrational algebraic numbers $\alpha>0$ of degree two:*

$$M=\{\alpha| \quad \alpha=\sqrt{d}+p, \quad p\in\mathbb{Z}, \quad \sqrt{d}>-p, \quad d=2,3,5,6,7,8\},$$

for which holds the inequality

$$|\Delta_\alpha(k)|=|\sqrt{1+\pi k}||\sin(\pi k\alpha+\theta_k)|>C_0, \quad k\in\mathbb{N}, \tag{7}$$

where C_0 is a positive number depending on α.

Proof of Lemma 2 and Lemma 3 can be found in [1] and [2] respectively.

Theorem 4. *Let*

$$f_1(x,t)\in C(\overline{D}_+)\cap C^{3,0}_{x,t}(\overline{D}_+),\ f_1(0,t)=f_1(1,t)=0,\ f_1^{''}(0,t)=f_1^{''}(1,t)=0, \tag{8}$$

for $0\leq t\leq\beta$ and

$$f_2(x,t)\in C(\overline{D}_-)\cap C^{3,0}_{x,t}(\overline{D}_-),\ f_2(0,t)=f_2(1,t)=0,\ f_2^{''}(0,t)=f_2^{''}(1,t)=0, \tag{9}$$

for $-\alpha\leq t\leq 0$ and let

$$\varphi(x)\in C^4[0,1],\ \varphi(0)=\varphi(1)=\varphi_1^{'''}(0)=\varphi^{'''}(1)=0, \tag{10}$$

and conditions of Lemma 2 or Lemma 3 hold. Then there exists a unique solution to the forward problem (1)–(4) *and it can be represented as the series*

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\omega_k}{\Delta_\alpha(k)}\left(\cos\pi kt-\pi k\sin\pi kt\right)+\frac{f_{1k}(0)}{\pi k}\sin\pi kt\right)\sin\pi kx+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi k}\int\limits_0^t f_{2k}(\tau)\sin\pi k\,(t-\tau)\;d\tau\right)\sin\pi kx,\quad t<0,\quad (11)$$

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\omega_k}{\Delta_\alpha(k)}E_{\rho,1}\left(-(\pi k)^2t^\rho\right)+\int\limits_0^t\tau^{\rho-1}E_{\rho,\rho}\left(-\pi k\tau^\rho\right)f_{1k}(t-\tau)\,d\tau\right)\sin\pi kx,\quad t>0.\quad (12)$$

where

$$\omega_k=\varphi_k+\frac{f_{1k}(0)\sin\pi k\alpha}{\pi k}-\frac{1}{\pi k}\int\limits_{-\alpha}^{0}f_{2k}\left(\tau\right)\sin\pi k\left(\alpha+\tau\right)\;d\tau.$$

Following K. Sabitov [1] let us formulate three inverse problems.

Inverse problem 1. Let

$$F(x,t)=\begin{cases}f_1(x)\phi_1(t), & 0<t<\beta,\\ f_2(x,t), & -\alpha<t<0.\end{cases}\quad (13)$$

Find a pair of functions $\{u(x,t),\phi_1(t)\}$, where $u(x,t)$ is a solution of the forward problem and $\phi_1(t)\in C[0,\beta]$, satisfying equation (1), conditions (2)-(4) and the over-determination condition

$$u(x_0,t)=h_1(t),\quad 0<x<1,\quad 0\le t\le\beta.\quad (14)$$

Here the functions $f_1(x),\ f_2(x,t),\ h_1(t)-$ are given sufficiently smooth functions, x_0 is a given point from the interval $(0,1)$.

Inverse problem 2. Let

$$F(x,t)=\begin{cases}f_1(x,t), & 0<t<\beta,\\ f_2(x)\phi_2(t), & -\alpha<t<0.\end{cases}\quad (15)$$

Find a pair of functions $\{u(x,t),\phi_2(t)\}$, where $u(x,t)$ is a solution of the forward problem and $\phi_2(t)\in C[-\alpha,0]$, satisfying equation (1), conditions (2)-(4) and the over-determination condition

$$u(x_0,t)=h_2(t),\quad x\in\Omega,\quad -\alpha\le t\le 0.\quad (16)$$

Here the functions $f_1(x,t),\ f_2(x),\ h_2(t)-$ are given sufficiently smooth functions.

Inverse problem 3. Let

$$F(x,t)=\begin{cases}f_1(x)\phi_1(t), & 0<t<\beta,\\ f_2(x)\phi_2(t), & -\alpha<t<0.\end{cases}\quad (17)$$

Find a pair of functions $\{u(x,t),\phi_1(t),\phi_2(t)\}$, where $u(x,t)$ is a solution of the forward problem and $\phi_1(t)\in C[0,\beta]$, $\phi_2(t)\in C[-\alpha,0]$ satisfying equation (1), conditions (2)–(4) and the over-determination conditions (14), (16).

Here the functions $f_1(x)$ $f_2(x)$ are given sufficiently smooth functions.

Based on the overdetermination conditions (14) and (16), natural conditions are imposed on the functions f_1 and f_2:

$$f_1(x_0)\neq 0,\quad f_2(x_0)\neq 0.$$

When solving inverse problems using the classical Fourier method, to determine unknown functions $g_i(t)$ we obtain integral Volterra of the first kind. In order to reduce these equations to the Volterra equation of the second kind we apply fractional differentiation.

In this connection, the following conditions on functions from the overdetermination conditions arise:

$$D_{0t}^{\rho} h_1(t) \in C[0, \beta], \quad h_2(t) \in C[-\alpha, 0].$$

In each of the three inverse problems, by solving the Volterra integral equations of the second kind, the existence and uniqueness of solutions of all three inverse problems are proven.

ACKNOWLEDGEMENT: The author acknowledges financial support from the Ministry of higher education, science and innovations of the Republic of Uzbekistan, Grant No F-FA-2021-424.

Keywords: Gerasimov–Caputo fractional derivative, forward and inverse problem, Volterra integral equations.

2010 Mathematics Subject Classification: 35M10, 35M12

References

[1] Sabitov K.B., Boundary and Inverse problems for the Inhomogeneous Equation of a Mixed Parabolic-Hyperbolic Equation, *Mathematical Notes*, **102**:3 (2017), 415–435.

[2] Sabitov K.B., Safin E. M., Inverse problem for a mixed parabolic-hyperbolic equation, *Mathematical Notes*, **87**:6 (2010), 907–918.

Dynamics of solutions of inhomogeneous NLS system with a $\chi^{(2)}$ nonlinearity

A. ESFAHANI[1], V.D. DINH[2]

[1]*Nazarbayev University, Astana, Kazakhstan*
[2]*École normale supérieure de Lyon & CNRS, Lyon, France*
[1]amin.esfahani@nu.edu.kz, [2]contact@duongdinh.com

In this work, we investigate a system of inhomogeneous nonlinear Schrödinger equations that arise in optical media. Specifically, we consider the system

$$\begin{cases} \mathrm{i}\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta u + |x|^{-\alpha}\overline{u}v = 0, \\ \mathrm{i}\partial_t v + \frac{\kappa}{2}\Delta v - \gamma v + \frac{1}{2}|x|^{-\alpha}u^2 = 0, \end{cases} \tag{1}$$

where the unknown functions $u, v : \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^d \to \mathbb{C}$ represent wave amplitudes. The parameters satisfy $d \geq 1$, $\alpha > 0$, $\kappa > 0$, and $\gamma \in \mathbb{R}$. This system models the interaction of two waves in a quadratic medium, specifically a degenerate (type-I) process involving the fundamental-frequency (FF) and second-harmonic (SH) components, under the influence of a spatially singular modulation of the $\chi^{(2)}$ nonlinearity. The real parameter γ quantifies the phase mismatch between the FF and SH components, and through an appropriate rescaling, it can be taken as $0, \pm 1$. For a detailed derivation of this model from the underlying physical principles, we refer to [2,3,4].

By applying the abstract argument (see [1]), we show that system (1) is locally well-posed in $\mathcal{H}^1 := H^1(\mathbb{R}^d) \times H^1(\mathbb{R}^d)$. More precisely, we have the following local wellposedness result.

Theorem 1. *Let $1 \leq d \leq 5$, $\kappa > 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < \min\{2, d\}$, and $\alpha < \frac{6-d}{2}$ if $3 \leq d \leq 5$. For any $(u_0, v_0) \in \mathcal{H}^1$, there exists a unique maximal solution*

$$(u, v) \in C((-T_*, T^*), \mathcal{H}^1) \cap C^1((-T_*, T^*), \mathcal{H}^{-1})$$

to (1) with initial data $(u, v)|_{t=0} = (u_0, v_0)$, where $\mathcal{H}^{-1} := H^{-1}(\mathbb{R}^d) \times H^{-1}(\mathbb{R}^d)$ is the dual space of $\mathcal{H}^1$. The maximal time satisfies the blow-up alternative: if $T^* < \infty$ (resp. $T_* < \infty$), then

$$\lim_{t \nearrow T^*} \|(u(t), v(t))\|_{\mathcal{H}^1} = \infty \quad \left(\textit{resp.} \lim_{t \searrow -T_*} \|(u(t), v(t))\|_{\mathcal{H}^1} = \infty \right).$$

In addition, there are conservation laws of mass and energy, i.e.,

$$\mathbb{M}(u(t),v(t)) = \|u(t)\|_{L^2}^2 + 2\|v(t)\|_{L^2}^2 = \mathbb{M}(u_0,v_0),$$
$$\mathbb{E}(u(t),v(t)) = \frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 + \frac{\kappa}{2}\|\nabla v(t)\|_{L^2}^2 + \gamma\|v(t)\|_{L^2}^2 - \Re\langle |x|^{-\alpha}u^2(t), v(t)\rangle = \mathbb{E}(u_0,v_0),$$

for all $t \in (-T_*, T^*)$.

We also find the conditions under which the local solution is global (see [2]). Once global solutions exist, we study the long time behavior of these solutions. We have the following energy scattering for global solutions in the mass-supercritical regime.

Theorem 2. *Let* $3 \le d \le 5$, $0 < \alpha < \min\left\{2, \frac{d}{2}\right\}$, $\frac{4-d}{2} < \alpha < \frac{6-d}{2}$, $\kappa > 0$, *and* $\gamma \in \mathbb{R}$. *Let* $(u_0,v_0) \in \mathcal{H}^1$ *satisfy*

$$\mathbb{H}(u_0,v_0)\left(\mathbb{M}(u_0,v_0)\right)^{\sigma} < \mathbb{E}_0(\varphi,\psi)\left(\mathbb{M}(\varphi,\psi)\right)^{\sigma}, \tag{2}$$
$$\mathbb{K}(u_0,v_0)\left(\mathbb{M}(u_0,v_0)\right)^{\sigma} < \mathbb{K}(\varphi,\psi)\left(\mathbb{M}(\varphi,\psi)\right)^{\sigma}, \qquad \sigma = \frac{6-d-2\alpha}{d+2\alpha-4}. \tag{3}$$

where $\mathbb{H}(u,v) := \begin{cases} \mathbb{E}(u,v) & \text{if } \gamma \ge 0, \\ \mathbb{E}(u,v) + \frac{|\gamma|}{2}\mathbb{M}(u,v) & \text{if } \gamma < 0. \end{cases}$ $\mathbb{E}_0(\varphi,\psi) := \frac{1}{2}\mathbb{K}(\varphi,\psi) - \mathbb{P}(\varphi,\psi)$, $\mathbb{K}(u,v) := \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \kappa\|\nabla v\|_{L^2}^2$, *and* $\mathbb{P}(u,v) := \Re\langle |x|^{-\alpha}u^2, v\rangle_{L^2}$. *Then the corresponding solution to* (1) *scatters in* $\mathcal{H}^1$ *in both directions in the sense that there exist* $(u_\pm, v_\pm) \in \mathcal{H}^1$ *such that*

$$\lim_{t\to\pm\infty} \|(u(t),v(t)) - (\mathcal{S}_1(t)u_\pm, \mathcal{S}_2(t)v_\pm)\|_{\mathcal{H}^1} = 0,$$

where $(\mathcal{S}_1(t), \mathcal{S}_2(t)) = \left(e^{it\frac{1}{2}\Delta}, e^{it\left(\frac{\kappa}{2}\Delta - \gamma\right)}\right)$ *is the linear propagator.*

Funding: A. E. is supported by Nazarbayev University under Faculty Development Competitive Research Grants Program for 2023-2025 (grant number 20122022FD4121).

Keywords: Inhomogeneous NLS System, Global Existence, Scattering.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q55, 35B44, 35P25

References

[1] Dinh V.D., Esfahani A. A system of inhomogeneous NLS arising in optical media with a $\chi^{(2)}$ nonlinearity, part I : Dynamics, *Communications on Pure and Applied Analysis*, **24**:4 (2025), 584–625.

[2] Fibich G., Xiao-Ping X.P. Stability of solitary waves for nonlinear Schrödinger equations with inhomogeneous nonlinearities, *Physica D: Nonlinear Phenomena* **175**:1-2 (2003), 96-108.

[3] Gill T. S. Optical guiding of laser beam in nonuniform plasma, *Pramana*, **55** (2000), 835–842.

[4] Liu C. S., Tripathi V. K. Laser guiding in an axially nonuniform plasma channel, *Physics of plasmas* **1**:9 (1994), 3100–3103.

Dynamical Systems of Absolute Stochastic Volterra Quadratic Operator on the Set of Idempotent Measures

I.T. JURAEV

Namangan State University, Namangan, Uzbekistan

jurayev.ilhomjon.85@gmail.com

Idempotent mathematics is developed using a new set of basic associative operations: addition $\oplus$ and multiplication $\odot$, such that all semifield or semiring axioms hold. Additionally, the new addition is idempotent, meaning that for every element x of the corresponding semiring, the equality $x \oplus x = x$ holds (see, for example, [1, 2, 3, 7, 8, 10, 13]).

One of the most extensively studied examples is the semifield $\mathbf{R}\max = \mathbf{R} \cup -\infty$, known as the Max-Plus algebra. This semifield consists of all real numbers along with an additional element $\mathbf{0} = -\infty$. The element $\mathbf{0}$ serves as the zero element in $\mathbf{R}\max$, and the basic operations are defined as follows: $x \oplus y = \max x, y$ and $x \odot y = x + y$. The identity element $\mathbf{1}$ corresponds to the usual zero 0.

There are several studies on idempotent linear operators and their analogies with Markov chains ([1, 7, 8, 10, 13]). This theory of idempotent measures emerges as a new branch of mathematical analysis aimed at studying deterministic control problems and first-order nonlinear partial differential equations (such as Hamilton-Jacobi equations) with discontinuous initial data and low-lying eigenfunctions of the Schrodinger operator.

The n-dimensional simplex of idempotent measures is defined as follows: Define simplex $\mathcal{I}_n$ of idempotent measures on $\{1, 2, \ldots, n\}$, as

$$\mathcal{I}_n = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n_{\max} : \max_{1 \le i \le n} x_i = 0\} = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n_{\max} : x_1 \oplus ... \oplus x_n = \mathbf{1}\}.$$

In [2, 3], an idempotent analogue of the Markov chain was introduced, where the linearity of the evolution operator is defined by the new operations $\oplus$ and $\odot$. In [11], all linear operators that map the n-dimensional simplex of idempotent measures to itself are fully described. These operators serve as "idempotent" analogues of Markov chains, where the state of the Markov chain is represented as an idempotent measure, but the linearity of the evolution operator is defined by conventional operations $+$ and $\cdot$. Furthermore, in [11], dynamical systems generated by linear maps on the set of idempotent measures are studied.

In this paper, we consider some quadratic operators that map $\mathcal{I}_n$ to itself and study the dynamical systems generated by these operators.

Volterra Quadratic Operators

Consider a cubic matrix $P = (p_{ij,k})^n_{i,j,k=1}$ with $p_{ij,k} \in \mathbf{R}_{\max}$.

Definition 1. The quadratic map

$$Q : x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n_{\max} \to x' = Q(x) = (x'_1, ..., x'_n) \in \mathbf{R}^n_{\max}$$

is defined as follows:

$$x'_k = \sum_{i,j=1}^{n} p_{ij,k} x_i x_j, \quad k = 1, 2, ..., n. \tag{1}$$

where $p_{ij,k} \in \mathbf{R}_{\max}$.

Let us denote the set

$$M_n = \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n_{\max} : x_i \le 0, \sum_{k=1}^{n} x_k = -1\}.$$

Proposition 2. *Any quadratic map given by equation (1) with $p_{ij,k} \leq 0$ and*

$$\sum_{k=1}^{n} p_{ij,k} = -1 \tag{2}$$

maps M_n to itself.

Remark A quadratic stochastic operator (QSO) (see, e.g., [6], [9], [12]) is typically defined using equation (1) with the conditions

$$p_{ij,k} \geq 0, \quad \sum_{k=1}^{n} p_{ij,k} = 1.$$

Such a QSO maps the simplex

$$S^{n-1} = \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, \sum_{k=1}^{n} x_k = 1\}$$

to itself. to itself. Consequently, the results established for QSOs can be reformulated for the quadratic maps described in Proposition 2 by appropriately substituting positive values (of both parameters and variables) with negative ones. Additionally, we examine the dynamics of quadratic maps on the complement set $\mathbf{R}^n_{\max} \setminus M_n$.

Definition 3. A quadratic operator (1) associated with a cubic matrix $P = (p_{ij,k})^n_{i,j,k=1}$, with $p_{ij,k} \leq 0$ for all indices, is termed a quadratic Volterra operator if it satisfies the condition:

$$p_{ij,k} = 0, \quad k \notin \{i, j\}. \tag{3}$$

According to this definition, it follows that a Volterra operator (denoted as V) has the form:

$$V: \quad x'_k = x_k \sum_{i=1}^{n} (p_{ik,k} + p_{ki,k}) x_i, \quad k = 1, 2, ..., n. \tag{4}$$

Theorem 4. *[14] A quadratic operator V given by cubic matrix $P = (p_{ij,k})^n_{i,j,k=1}$ with $p_{ij,k} \leq 0$ maps $\mathcal{I}_n$ to itself, if and only if it satisfies one of following conditions:*

i) Each k-th matrix of the cubic matrix P contains exactly one non-zero row and exactly one non-zero column.

ii) Cubic matrix P has at least one zero matrix, i.e., $\exists m \leq n$ such that all elements of m-th matrix $P_m = (p_{ij,m})^n_{i,j=1}$ consists of only zeroes.

Condition (3) implies that the Volterra operator satisfies the first condition of Theorem 4.

Theorem 5. *A quadratic Volterra operator maps the simplex $\mathcal{I}_n$ to itself.*

For any $I \subset E = \{1, ..., n\}$ define face Γ_I of $\mathcal{I}_n$ as folloows

$$\Gamma_I = \{x \in \mathcal{I}_n : x_i = 0 \;\text{ for any }\; i \in I\}.$$

Proposition 6. *If V is a Volterra QSO, then every face of $\mathcal{I}_n$ is an invariant set with respect to V.*

Definition 7. A quadratic Volterra operator (4) that satisfies condition (2) is called a quadratic absolute stochastic Volterra operator (QASVO).

It follows from condition (2) that, for a QASVO, we have $p_{ii,i} = -1$ for any $i = 1, \ldots, n$.

Definition 8. A solution x to the equation $V(x) = x$ is called a fixed point. The set of all fixed points denoted by $\mathrm{Fix}(V)$.

Proposition 9. *If $x = (x_1, \dots, x_n)$ is a fixed point of a quadratic map (1) with $p_{ij,k} \leq 0$ and (2) then*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \in \{-1, 0\}.$$

Assume that,

$$p_{ik,k} + p_{ki,k} = -1, \quad \forall i, k = 1, \dots, n \tag{5}$$

In this case from (4) we get

$$V_0 : \quad x'_k = -x_k \sum_{i=1}^{n} x_i, \quad k = 1, 2, ..., n. \tag{6}$$

Proposition 10. *If (2), (3) and $p_{ij,i} + p_{ji,i} = -1$.*

Then the set of all fixed points for the QASVO $V_0 : \mathcal{I}_n \to \mathcal{I}_n$ is

$$\mathrm{Fix}(V_0) = \{(0, 0, ..., 0)\} \cup \mathcal{J}_n,$$

where

$$\mathcal{J}_n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathcal{I}_n : \sum_{i=1}^{n} x_i = -1\}.$$

Let $x^{(0)} \in \mathcal{I}_n$ be an initial point, define its trajectory (dynamical system) as $x^{(m+1)} = V_0(x^{(m)}),\ m = 0, 1, 2, ...$ Our aim is to study limit points of the trajectory for any initial point $x^{(0)}$.

Denote

$$D_{n-1}^{\{n\}} = \{x \in \mathcal{I}_n : -1 < x_1 + x_2 + ... + x_{n-1} \leq 0\}.$$

Theorem 11. *For any initial point $x^{(0)} \in \mathcal{I}_n$ the following equality holds*[1]

$$\lim_{m \to \infty} V_0^m(x^{(0)}) = \begin{cases} x^{(0)}, & \text{if } \ x^{(0)} \in \mathrm{Fix}(V_0) \\ (0, 0, \dots, 0), & \text{if } \ x^{(0)} \in D_{n-1}^{\{n\}} \\ (-\infty, ..., -\infty, 0), & \text{if } \ x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, ..., x_{n-1}^{(0)}, 0\right) \in \mathcal{I}_n \setminus \left(\mathrm{Fix}(V_0) \cup D_{n-1}^{\{n\}}\right) \end{cases}$$

References

[1] M. Akian, Densities of idempotent measures and large deviations // Trans. Amer. Math. Soc. V.351. 1999. Pp. 4515-4543.

[2] P. Del Moral, M. Doisy, On applications of Maslov optimization theory // Math. Notes. V.69, Iss 2. 2001. Pp. 232-244.

[3] P. Del Moral, M. Doisy, Maslov idempotent probability calculus, I, II. Theory Probab. Appl. V.43, Iss 4. 1998. Pp. 562-576; V.44, Iss 2. 1999. Pp 319-332.

[4] R. L. Devaney, An introduction to chaotic dynamical system, Westview Press. 2003.

[5] R.N. Ganikhodzhaev, F.M. Mukhamedov, U.A. Rozikov, Quadratic stochastic operators: Results and open problems // Infin. Dim. Anal., Quantum Probab. Related Topics. V.14. Iss 2. 2011. Pp. 279-335.

[1]The third line also true in other cases $x_i = 0$.

[6] H. Kesten, Quadratic transformations: a model for population growth (I, II) // Adv. Appl.Probab. V.2. 1970. Pp. 1-82; Pp. 179-228.

[7] G. L. Litvinov, V.P. Maslov (eds.), Idempotent mathematics and mathematical physics, Vienna, 2003; Contemp. Math., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005. P.377.

[8] G. L. Litvinov, Maslov dequantization, idempotent and tropical mathematics: a brief introduction // J. Math. Sciences. V.140. Iss 3. 2007. Pp. 426-444.

[9] Yu.I.Lyubich, Mathematical structures in population genetics // Biomathematics, V.22 Springer-Verlag, 1992.

[10] V. P. Maslov, S. N. Samborskii (eds.), Idempotent analysis // Adv. Soviet Math. V.13, Amer. Math. Soc., Providence, RI 1992.

[11] U.A. Rozikov, M.M. Karimov, Dinamics of linear maps of idempotent measures // Lobachevskii Journal of Mathematics, V.34. Iss 1. 2013. Pp. 20-28.

[12] U.A. Rozikov, Population dynamics: algebraic and probabilistic approach, Singapore, World Sci. Publ. 2020. Pp. 460.

[13] M.M. Zarichnyi, Spaces and maps of idempotent measures // Izvestiya: Mathematics. V.74. Iss 3. 2010. Pp. 481-499.

[14] I.T.Juraev, M.M. Karimov, Quadratic Operators Defined on a Finite-dimensional Simplex of Idempotent Measures // Journal of Discontinuity, Nonlinearity, and Complexity, V.8. Iss 3. 2019. Pp. 279-286.

[15] Juraev I. T., Dynamics of Quadratic Operators of Idempotent Measures // Lobachevskii Journal of Mathematics, V.43. Iss 8. 2022. Pp. 2145-2154.

[16] Juraev I. T., Fixed points of quadratic operators defined on a three dimensional simplex of idempotent measures, Lobachevskii Journal of Mathematics, V.43. Iss 3. 2022. Pp. 762-769..

[17] R.L. Devaney, A First Course in Chaotic Dynamical Systems, 2nd ed., New York, CRC, 2020.

Integral problem for functional-partial differential equations of hyperbolic type

A.E. IMANCHIYEV[1], A.T. ASSANOVA[2]

[1]*K. Zhubanov Aktobe Regional University, Aktobe, Kazakhstan*
[2]*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[1]imanchiev_ae@mail.ru, [2]assanova@math.kz

In this communication, we consider the integral problem for a system of functional partial differential equations of hyperbolic type

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t \partial x} = A(t,x)\frac{\partial z}{\partial x} + B(t,x)\frac{\partial z}{\partial t} + C(t,x)z(t,x) + f(t,x) + A_0(t,x)\frac{\partial z(\alpha(t),x)}{\partial x} + B_0(t,x)\frac{\partial z(\alpha(t),x)}{\partial t} + C_0(t,x)z(\alpha(t),x), \qquad (t,x) \in \Omega, \quad (1)$$

$$P_2(x)\frac{\partial z(0,x)}{\partial x}+P_1(x)\frac{\partial z(t,x)}{\partial t}\Big|_{t=0}+P_0(x)z(0,x)$$
$$+\int_0^T\Big\{K_2(\tau,x)\frac{\partial z(\tau,x)}{\partial x}+K_1(\tau,x)\frac{\partial z(\tau,x)}{\partial \tau}+K_0(\tau,x)z(\tau,x)\Big\}d\tau$$
$$+S_2(x)\frac{\partial z(T,x)}{\partial x}+S_1(x)\frac{\partial z(t,x)}{\partial t}\Big|_{t=T}+S_0(x)z(T,x)=\varphi(x),\qquad x\in[0,X], \quad (2)$$

$$z(t,0)=\psi(t),\qquad t\in[0,T], \quad (3)$$

where $\Omega=[0,T]\times[0,X]$, the vector function $z(t,x)=(z_1(t,x),z_2(t,x),\dots,z_n(t,x))'$ is unknown, $n\times n$ matrices $A(t,x)$, $B(t,x)$, $C(t,x)$, $A_0(t,x)$, $B_0(t,x)$, $C_0(t,x)$, and n-vector function $f(t,x)$ are continuous on Ω; $n\times n$ matrices $P_i(x)$, $S_i(x)$, $i=0,1,2$, and n-vector function $\varphi(x)$ are continuous on $[0,\omega]$; $n\times n$ matrices $K_i(t,x)$, $i=0,1,2$, are continuous on Ω, n-vector function $\psi(t)$ is continuously differentiable on $[0,T]$. The generalized piecewise constant argument $\alpha(t)$ is defined as follows: $\alpha(t)=\zeta_{r-1}$ if $t\in[t_{r-1},t_r)$ $r=1,2,\dots,M$, where t_r are some points in the interval $[0,T]$: $0=t_0<t_1<...<t_{M-1}<t_M=T$, and ζ_r are some constants such that $t_{r-1}\le\zeta_{r-1}<t_r$.

For solving the integral problem is applied method of introducing new functions [1] and Dzhumabaev's parametrization method [2]. Conditions for the existence and uniqueness of the integral problem for the system of functional - partial differential equations of hyperbolic type are established in the term of special matrix. An algorithm for determining approximate solution the integral problem is proposed and its convergence to an exact solution is showed. We are also applied methods and results in [3].

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP23485509).

Keywords: functional - partial differential equations, integral condition, solvability, algorithm.

2010 Mathematics Subject Classification: 35G16, 34K45, 35L35, 35R12

References

[1] Dzhumabayev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation, *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, **29**:1 (1989), 34–46.

[2] Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Well-posedness of nonlocal boundary value problems with integral condition for the system of hyperbolic equations, *J. Math. Anal. Appl.*, **402**:1 (2013), 167–178.

[3] Assanova A.T., Imanchiyev A.E. A nonlocal problem with multipoint conditions for partial differential equations of higher order, *Filomat*, **38**:1 (2024), 295—304.

Properties of a nonlocal problem for hyperbolic equations with impulse discrete memory

A. E. IMANCHIYEV[1], A.T. ASSANOVA[2], A. MOLYBAIKYZY[3]

[1]*Zhubanov Aktobe Regional University, Aktobe, Kazakhstan*
[2]*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[3]*Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*

[1]imanchiev_ae@mail.ru, [2]anartasan@gmail.com, [3]altynaimolybai@gmail.com

On the domain $\Omega=[0,T]\times[0,\omega]$ we consider the nonlocal problem for an impulsive system of hyperbolic equations with discrete memory in the following form

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}=A(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}+B(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}+C(t,x)u(t,x)+f(t,x)+A_0(t,x)\frac{\partial u(\gamma(t),x)}{\partial x}+$$
$$+B_0(t,x)\frac{\partial u(\gamma(t),x)}{\partial t}+C_0(t,x)u(\gamma(t),x),\quad t\neq\theta_j,\quad j=1,\dots,N-1. \quad (1)$$

$$P(x)u(0,x) + S(x)u(T,x) = \varphi(x), \quad x \in [0,\omega]. \tag{2}$$

$$\lim_{t\to\theta_p+0} u(t,x) - \lim_{t\to\theta_p-0} u(t,x) = \varphi_p(x), \quad x \in [0,\omega], \quad p = 1,\dots,N-1. \tag{3}$$

$$u(t,0) = \psi(t), \quad t \in [0,T]. \tag{4}$$

where $u(t,x) = colon(u_1(t,x), u_2(t,x), ..., u_n(t,x))$ is an unknown vector function, the $n \times n$ matrices $A(t,x), B(t,x), C(t,x), A_0(t,x), B_0(t,x), C_0(t,x)$ and the n vector function $f(t,x)$ are continuous on Ω.

Theorem 1. *Assume that the $nN \times nN$ matrix $Q_1(\Delta_N(\omega), x)$ is invertible for all $x \in [0,\omega]$, and the following conditions are valid:*

$$1)\|[Q^*(\Delta_N(\omega), x)]^{-1}\| \le \gamma^*(\Delta_N(\omega), x),$$

$$2)q^*(\Delta_N(\omega), x) = \gamma^*(\Delta_N(\omega), x)\max\left(\|P(x)\| + \|S(x)\|, 2\right) \times$$
$$\times \alpha(x)\theta\left[e^{\alpha(x)\theta} - 1 + \theta\alpha_0(x)e^{\alpha(x)\theta}\right] \le \chi < 1,$$

where $\gamma^*(\Delta_N(\omega), x)$ is positive continuous on $[0,\omega]$ function, χ is positive constant.

Theorem 2. *Assume that the $nN \times nN$ matrix $Q_1(\Delta_N(\omega), x)$ is invertible for all $x \in [0,\omega]$ and inequalities 1), 2) of Theorem 1 are satisfied. Then, nonlocal problem (1)–(4) has a unique solution.*

Keywords and phrases: impulsive system of hyperbolic equations, discrete memory, nonlocal problem, algorithm, solvability.

2020 Mathematics Subject Classification: 35L75 , 35L70

References

[1] S. Busenberg and K. L. Cooke. Models of vertically transmitted diseases with sequential-continuous dynamics, *Nonlinear Phenomena in Mathematical Sciences,* NewYork, (1982), 179–187.

[2] S. M. Shah and J. Wiener, Advanced differential equations with piecewise constant argument deviations,*Math,*. **6** ,(1983), 671–703

[3] K. L. Cooke and J. Wiener, Retarded differential equations with piecewise constant delays, *Math,*. **99** ,(1984), 265–297.

About an algorithm for solving a two-point boundary value problem with impulsive effect for linear systems of ODEs

P.B. ABDIMANAPOVA[1], S.S. KABDRAKHOVA[2]

[1,2]*Al-Farabi Kazakh National University, Alamty, Kazakhstan*
[1]*Almaty Technology University, Alamty, Kazakhstan*
[2]*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Alamty, Kazakhstan*
[1]perizatabdimanapova344@gmail.com, [2]symbat2909.sks@gmail.com

On the interval $[0,T]$, we consider a linear two-point boundary value problem with impulsive effects at fixed moments in time:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \quad t \in [0,T]\backslash\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m\}, \quad \theta_i \in (0,T), \quad i = \overline{1,m}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

$$Bx(0) + Cx(T) = d, \quad d \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

$$B_i x(\theta_i - 0) - C_i x(\theta_i + 0) = p_i, \quad p_i \in \mathbb{R}^n, \quad i = \overline{1,m}, \tag{3}$$

where the matrix $A(t)$, and the vector-function $f(t)$ are piecewise continuous on $[0, T]$, with possible first-order discontinuities at the points $t = \theta_i$, $i = \overline{1, m+1}$. The matrices B, C, B_i, and C_i $(i = \overline{1, m})$ are constant matrices.

Linear two-point boundary value problems with impulsive effects are an important area in the theory of differential equations. They describe the dynamics of systems that experience sudden, instantaneous changes at fixed moments in time. Such models have widespread applications in physics, engineering, biology, economics, and other sciences, where processes may undergo abrupt changes due to external factors. Two-point boundary value problems with impulsive effects have been extensively studied by numerous researchers, as seen in works [1]-[5]. These studies have provided valuable insights into the behavior of systems subjected to sudden changes at specific moments, offering a deeper understanding of their dynamics and applications in various fields.

This work proposes a new two-parameter algorithm for the approximate solution of the two-point boundary value problem with impulsive effects for linear systems of ordinary differential equations. Sufficient conditions for the existence and convergence of the proposed algorithm to a unique solution are established, along with an estimate of the difference between the exact and the approximate solutions.

Financing: This research is financed by grant financing of projects by the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (grant № AP23488811).

Keywords: Ordinary differential equations, Linear systems, Two-point boundary value problems, Impulsive effect, Approximate solution algorithms.

2010 Mathematics Subject Classification: 34B05, 34B10, 34B37

References

[1] Lakshmikantham V., Bainov D.D., Simeonov P.S. *Theory of Impulsive Differential Equations*, World Scientific, Singapore (1989). P.288

[2] Luo Z., Nieto J.J. New results for the periodic boundary value problem for impulsive integro-differential equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **2**:350 (2009), 657–670.

[3] S. M. Temesheva, D. S. Dzhumabaev, and S. S. Kabdrakhova On one algorithm to find a solution to a linear two-point boundary value problem, *Lobachevskii J. Math.*, **3**:42 (2021), 606–612.

[4] Assanova A.T., Bakirova E.A., Kadirbayeva Zh.M., Uteshova R.E. A computational method for solving a problem with parameter for linear systems of integro-differential equations, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **5**:43 (2020), 789–803.

[5] A. B. Tleulesova On the solvability of a two-point boundary value problem with impulsive effects, *Mathematical Journal*, **4**:14 (2004), 93–102.

A fast numerical method for solving a problem for impulsive differential equations with loadings subject to integral boundary condition

Zh.M. KADIRBAYEVA[1], S.B. KHUDAIBERGENOVA[2]

[1] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[1] *Kazakh National Women's Teacher Training University, Almaty, Kazakhstan*
[2] *Kazakh National Women's Teacher Training University, Almaty, Kazakhstan*

[1] zhkadirbayeva@gmail.com, [2] hudajbergenovasymbat@gmail.com

We consider the following boundary value problem for impulsive differential equations with loadings subject to integral boundary condition

$$\frac{dx}{dt} = A_0(t)x + \sum_{j=1}^{m_1} A_j(t) \lim_{t \to \zeta_j + 0} x(t) + f(t), \quad t \in [0, T] \setminus \{\theta_1, \theta_2, ..., \theta_{m_2}\}, \tag{1}$$

$$\lim_{t \to \theta_i - 0} x(t) - \lim_{t \to \theta_i + 0} x(t) = \varphi_i, \quad x \in R^n, \quad \varphi_i \in R^n, \quad i = \overline{1, m_2}, \tag{2}$$

$$Bx(0) + Cx(T) + \int_0^T D(\tau)x(\tau)d\tau = d, \quad d \in R^n, \tag{3}$$

where $(n\times n)$-matrices $A_k(t)$, $D(t)$ $(k=\overline{0,m_1})$ and n-vector-function $f(t)$ are piecewise continuous on $[0,T]$ with possible discontinuities of the first kind at the points $t=\zeta_j$ $(j=\overline{1,m_1})$. B and C are constant $(n\times n)$-matrices, and φ_i, $(i=\overline{1,m_2})$ and d are constant n vectors, $\theta_i\neq\zeta_j$, $i=\overline{1,m_2}$, $j=\overline{1,m_1}$.

A solution to problem (1) – (3) is a piecewise continuously differentiable vector function $x(t)$ on $[0,T]$, which satisfies the differential equation system with loadings (1) on $[0,T]$ except the points $t=\theta_i$ $(i=\overline{1,m_2})$, conditions of impulse effects at the fixed time points (2) and the boundary condition (3).

Boundary-value problems involving loaded equations [1] and integral conditions frequently arise in mathematical physics and mathematical biology. The analysis of loaded differential equations that incorporate impulse effects, together with the methods to solve them, is addressed in [2]. Such problems are encountered in modeling various natural science processes.

In the present paper, the Dzhumabaev parameterization method [3] is used to solve a linear boundary value problem for impulsive differential equations with loadings subject to the integral boundary condition (1)–(3). A numerical algorithm is offered to solve the problem (1)–(3).

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant no. AP19174331).

Keywords: loaded differential equation, impulse effect, integral condition, parametrization method, algorithm.

2010 Mathematics Subject Classification: 34B37, 65L06.

References

[1] Nakhushev A.M. Loaded equations and their applications, Nauka, Moscow (2012).

[2] Assanova A.T., Kadirbayeva Zh.M. On the numerical algorithms of parametrization method for solving a two-point boundary-value problem for impulsive systems of loaded differential equations, Computational and Applied Mathematics, 37:4 (2018), 4966–4976.

[3] Dzhumabaev D.S. On one approach to solve the linear boundary value problems for Fredholm integro-differential equations, J. of Comp. and Applied Math., 294 (2016), 342–357.

On eigenvalues of an one dimensional integral operator

T.Sh. KALMENOV[1], A. KADIRBEK[2]

[1,2]*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*

[1]kalmenov.t@mail.ru, [2]kadirbekayan5@gmil.com

Consider the following integral operator

$$u(x) = (-1)^m \cdot \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{(2m-1)!}|x-y|^{2m-1}f(y)dy, \qquad x\in(-1,1).$$

where $u(x)$ is a particular solution of the following equation

$$Lu = (-1)^m \frac{d^{2m}}{dx^{2m}}u(x) = f(x), \qquad x\in(-1,1).$$

Now, for the eigenvalue problem

$$(-1)^m \cdot \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{(2m-1)!}|x-y|^{2m-1}u(y)dy = \frac{u(x)}{\lambda}, \qquad x\in(-1,1) \tag{1}$$

we have the following

Theorem 1. *Let $m = \overline{1,4}$. Then the eigenvalue problem (1) has only m negative eigenvalues.*

Particularly, for $m = 1$, the eigenvalue problem (1) becomes

$$-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}|x-y|u(y)dy = \frac{u(x)}{\lambda}, \qquad x \in (-1,1).$$

In this case, there is only one negative eigenvalue, which is in the following form $\lambda = -\frac{\mu^2}{4}$, where μ is the root of the following equation $\tanh(\mu) = \frac{1}{\mu}$.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP23488701).

Keywords: eigenvalues, integral operator, eigenvalue problem.

2010 Mathematics Subject Classification: 45C05, 34B09, 47A75

References

[1] Kalmenov T. S., Suragan D. A boundary condition and spectral problems for the Newton potential, *Modern aspects of the theory of partial differential equations. - Basel : Springer Basel*, (2011), 187–210.

[2] Kalmenov T. S., Kadirbek A., Kydyrbaikyzy A. Some properties of the one-dimensional potentials, *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series*, **113**:11 (2024), 101–111.

On the solution of a BVP for an equation with fractional derivative

M.T. KOSMAKOVA[1], D.M. AKHMANOVA[2], K.A. IZHANOVA[3]

[1,2,3]*Karaganda Buketov University, Karaganda, Kazakhstan*

[1]svetlanamir578@gmail.com, [2]danna.67@mail.ru, [3]kamila.izhanova@alumni.nu.edu.kz

In a non-cylindrical domain G:

$$G = \{(x,y;t)\big|\sqrt{x^2+y^2} \le t;\ t>0\}$$

we consider a boundary value problem, two-dimensional in the spatial variable for the fractionally loaded heat conduction equation:

$$u_t = a^2\Delta u + \lambda\{{}_{RL}D^{\beta}_{ot}u(x,y;t)\} + f(x,y;t) \tag{1}$$

with the following condition on the boundedness of a solution:

$$\lim_{\sqrt{x^2+y^2}\to+\infty} u(x,y;t) = 0; \tag{2}$$

and with the condition on the lateral surface of the cone:

$$u(x,y;t)\Big|_{\sqrt{x^2+y^2}=t} = g(t), \tag{3}$$

where λ is a complex parameter, ${}_{RL}D^{\beta}_{ot}u(x,y;t)$ is the Riemann-Liouville derivative of an order $\beta, 0<\beta<1$.

Definition 1. The Riemann-Liouville derivative of fractional order is defined by the following formula:

$${}_{RL}D^{\beta}_{ot}u(x,y;t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{u(x,y;\tau)}{(t-\tau)}d\tau \tag{4}$$

Theorem 2. *The solution of the boundary value problem (2) with conditions (3) and (4) can be represented in the following form:*

$$w(r,t) = g(0) + \lambda g(0)t^{1-\beta}\mathcal{E}_{1-\beta,2-\beta}(\lambda t^{1-\beta}) + \lambda \int_0^t f_1(\tau)d\tau + \\ \lambda^2 \int_0^t (t-\tau)^{1-\beta}\mathcal{E}_{1-\beta,2-\beta}(\lambda(t-\tau)^{1-\beta}) f_1(\tau)d\tau + f(r,t) \quad (5)$$

Funding: The study was carried out with the financial support of the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (grant No. AP23488740, 2024–2026).

Keywords: fractionally loaded heat equation, isotropy, asymmetry

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

References

[1] Polyanin A.D. Handbook of linear equations of mathematical physics, Fizmat lit, Moscow (2001).

[2] Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I. Special functions, Fizmat lit, Moscow (2003).

Solution of nonlocal problem for loaded parabolic equations

S. KUANYSH

[1]*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[1]*Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*
saule270898@gmail.com

We consider a nonlocal problem for loaded parabolic equation in the domain $(t,x) \in \Omega = (0,T) \times (0,l)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = p(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(t,x)u(t,x) + \sum_{j=1}^{m} k_j(t,x)u(\theta_j,x) + f(t,x), \quad (1)$$

$$B(x)u(0,x) + C(x)\frac{\partial u(0,x)}{\partial x} + D(x)u(T,x) + E(x)\frac{\partial u(T,x)}{\partial x} = \psi(x), \quad x \in [0,l], \quad (2)$$

$$u(t,0) = \varphi_0(t), \quad u(t,l) = \varphi_1(t), \quad t \in [0,T], \quad (3)$$

where $p(t,x) \le \gamma > 0$, $q(t,x) \le 0$, $k_j(t,x)$, $j = \overline{1,m}$, and $f(t,x)$ be functions that are continuous in t and satisfy Holder continuity in x; T and l are positive numbers; $\theta_j \in (0,T)$, $j = \overline{1,m}$, are loading points; $B(x)$, $C(x)$, $D(x)$, $E(x)$, are continuous functions on the interval $(0,l)$. It is assumed that the functions $\psi(x)$, $\varphi_0(t)$ and $\varphi_1(t)$ are fully smooth and fulfill the matching conditions:

$B(0)\varphi_0(0) + C(0)\varphi_0(0) + D(0)\varphi_0(T) + E(0)\varphi_0(T) = \psi(0)$,

$B(l)\varphi_1(0) + C(l)\varphi_1(0) + D(l)\varphi_1(T) + E(l)\varphi_1(T) = \psi(l)$.

A solution to problem (1)–(3) is a function $u(t,x)$, continuous on $\bar{\Omega} = [0,T] \times [0,l]$ that has a continuous first-order partial derivative with respect to t and a continuous second-order partial derivative with respect to x. It satisfies the loaded parabolic equation (1) as well as conditions (2) and (3).

Loaded parabolic equations belong to a complex yet important class of differential equations and are widely applied in various scientific and engineering problems, as well as in ecology, epidemic propagation modeling, and biological systems [1].

In the present paper, the nonlocal problem for the loaded parabolic equation (1)–(3) is considered. Discretizing with respect to the spatial variable x reduces the problem to a two-point boundary value problem for a system of loaded ordinary differential equations [2]. To solve this problem, the Dzhumabaev parametrization method is employed [3], [4]. A theorem on the convergence of the discretized problem's solution to the nonlocal problem (1)-(3) is proposed.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (grant no. AP23485618).

Keywords: loaded parabolic equations, nonlocal problem, method of lines, convergence, parameterization method.

2010 Mathematics Subject Classification: 35K10, 35R10, 65M22

References

[1] Friedman A. *Mathematical modeling of biological processes, Lecture notes on mathematical modelling in the life sciences*, Springer International Publishing, New York (1974).

[2] Budak B.M. The method of straight lines for certain boundary-value problems of the parabolic type, Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz., 6 (1961), 1105–1112.

[3] Assanova, A.T., Dzhumabaev D.S. On estimates of solutions and their derivatives of the boundary value problem for the parabolic equation, News of NAS RK. Physical and mathematical series., 5 (2000), 3–8.

[4] Assanova, A.T., Kadirbayeva Zh. On the numerical algorithms of parametrization method for solving a two-point boundary-value problem for impulsive systems of loaded differential equations, Comput. Appl. Math., 37 (2018), 4966–4976.

Alpha unpredictable oscillations for symmetrical impulsive Hopfield type neural networks

Z NUGAYEVA

[1]*K. Zhubanov Aktobe Regional University, Aktobe 030000, Kazakhstan*

[2]*Institute of Information and Computational Technologies, Almaty 050010, Kazakhstan*

znugayeva@zhubanov.edu.kz

We investigate, the existence and stability of unpredictable solutions of symmetrical impulsive Hopfield type neural networks of the form

$$
\begin{aligned}
y_i'(t) &= a_i(t)y_i(t) + \sum_{j=1}^{p} b_{ij}(t)f_j(y_j(t)) + c_i(t),\ t \neq \theta_k,\\
\Delta y_i|_{t=\theta_k} &= \alpha_{ik}y_i(\theta_k) + \sum_{j=1}^{p} \beta_{ijk}g_j(y_j(\theta_k)) + \gamma_{ik},
\end{aligned} \tag{1}
$$

where $t,\ y_i, i = 1,\dots p$, are from the real axis, $y_i(t)$ and $y_i'(t)$, $i = 1,\dots p$, denote the membrane potentials of neuron i, and their rates of change; and p is the total number of neurons in the network. Moreover, $a_i, i = 1,\dots,p$, are the rates of self-regulation or reset potentials for neurons $i = 1,\dots,p$, when they are isolated; f_j, $j = 1, 2,\dots,p$, are the activation functions for neurons j, $j = 1,\dots,p$, which determine how the membrane potential influences other neurons; b_{ij}, $i, j = 1, 2,\dots,p$ are weights of the connection between neurons j, and i, $i, j = 1, 2,\dots,p$; $c_i(t)$, $i = 1, 2,\dots,p$, are input functions representing external stimuli or inputs to neurons i, $i = 1, 2,\dots,p$. The sequence $\theta_k, k \in \mathbb{Z}$ of discontinuity moments is increasing such that $|\theta_k| \to \infty$ as $k \to \infty$.

Similarly to the differential part of the model, the coefficients $\alpha_{ik}, i = 1, 2,\dots,p$, $k \in \mathbb{Z}$, in the impulsive equation are constants of self-regulation for the units or reset of potentials, when the units are isolating, the constants β_{ijk}, $i, j = 1, 2,\dots,p$, $k \in \mathbb{Z}$, denote the weights for connection between units j and i, g_j, $j = 1, 2,\dots,p$, are activation vectors, the sequences γ_{ik}, $i = 1, 2,\dots,p, k \in \mathbb{Z}$, are external impulses for the network. One can see that the impulsive part of the model admits the same structure as the differential part. This is why we call the model *symmetrical* one.

Consider sequences of real numbers t_n, θ_k, indices $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}$. They are assumed to be strictly increasing with regard to the indices. Sequence $\theta_k,\ k \in \mathbb{Z}$ is unbounded in both directions. Moreover, it satisfies $\underline{\theta} \le \theta_{k+1} - \theta_k \le \overline{\theta}$ with positive numbers $\underline{\theta}$, $\overline{\theta}$.

Definition 1. [1] A couple (t_n, θ_k) of sequences $t_n, \theta_k,\ n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}$, is called a Poisson couple if there exists a sequence l_n, $n \in \mathbb{N}$, which diverges to infinity, such that

$$\theta_{k+l_n} - t_n - \theta_k \to 0 \ as\ n \to \infty, \tag{2}$$

uniformly on each bounded interval of integers k.

Definition 2. [1] An element $v(t)$ of $\mathcal{D}$ with discontinuity moments $\theta_k,\ k \in \mathbb{Z}$, is said to be discontinuous Poisson stable function, if there exist a sequence $t_n \to \infty$ of real numbers such that (t_n, θ_k), $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}$, is a Poisson couple and $v(t+t_n) \to v(t)$ as $n \to \infty$ on each bounded intervals of real numbers in B-topology [2].

Denote by $\widehat{[\xi, \zeta]}$, $\xi, \zeta \in \mathbb{R}$, the interval $[\xi, \zeta]$, if $\xi \le \zeta$ and interval $[\zeta, \xi]$, if $\zeta < \xi$.

Definition 3. [1] A discontinuous Poisson stable function $v(t)$ of $\mathcal{D}$ with discontinuity moments $\theta_k,\ k \in \mathbb{Z}$ and convergence sequence t_n is said to be discontinuous unpredictable, provided that (t_n, θ_k), $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}$, is a Poisson couple, and there exist positive numbers ϵ_0, δ and sequences s_n of real numbers and m_n of integers both of which diverge to infinity such that interval $[s_n - \delta, s_n + \delta] \subseteq \widehat{[\theta_{m_n}, (\theta_{m_n+l_n} - t_n)]}$ does not contain discontinuity points of $v(t)$ and $v(t+t_n)$, and $\|v(t+t_n) - v(t)\| \ge \epsilon_0$ on the interval.

We present the symmetric discontinuous Hopfield type neural networks (1) in the following vector form:

$$\begin{aligned} & y' = \mathcal{A}(t)y + \mathcal{B}(t)F(y) + \mathcal{C}(t),\ t \ne \theta_k, \\ & \Delta y\big|_{t=\theta_k} = A_k y + B_k G(y) + \Gamma_k, \end{aligned} \tag{3}$$

where $y = colon(y_1, \dots, y_p) \in \mathbb{R}^p$, $t \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{A}(t) = (a_1(t), \dots, a_p(t))$, $A_k = (\alpha_{1k}, \dots, \alpha_{pk})$ are diagonal matrices, $\mathcal{B}(t) = \{b_{ij}(t)\}_{p\times p}$, $t \in \mathbb{R}$, $B_k = \{\beta_{ijk}\}_{p\times p}$, $k \in \mathbb{Z}$ are matrices. In addition, $F(y) = colon(f_1(y_1), \dots, f_p(y_p))$, $\mathcal{C}(t) = colon(c_1(t), \dots, c_p(t))$, $G(y) = colon(g_1(y_1), \dots, g_p(y_p))$, and $\Gamma_k = colon(\gamma_{1k}, \dots, \gamma_{pk})$, $t \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z}$, are vector functions and vector sequence, respectively.

The symbols introduced are:

$$m_{\mathcal{B}} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|\mathcal{B}(t)\|, \quad m_F = \sup_{\|u\|<H} \|F(u)\|, \quad m_{\mathcal{C}} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|\mathcal{C}(t)\|,$$

$$m_B = \sup_{k\in\mathbb{Z}} \|B_k\|, \quad m_G = \sup_{\|u\|<H} \|G(u)\|, \quad m_\Gamma = \sup_{k\in\mathbb{Z}} \|\Gamma_k\|.$$

The following conditions are needed:

(C1) $\|Y(t,s)\| \le Ke^{\lambda(t-s)}$ with constants $K \ge 1$ and $\lambda < 0$, where $Y(t,s)$ is the transition matrix, of the system associated with (3);

(C2) the coefficients of matrices $\mathcal{A}(t), \mathcal{B}(t)$, and the input $\mathcal{C}(t)$, are continuous Poisson stable [1], and the sequence of convergence t_n, $n \in \mathbb{N}$, is common for all their coordinates;

(C3) the sequences $\{A_k\}$, $\{B_k\}$, $\{\Gamma_k\}$, $k \in \mathbb{Z}$ are Poisson stable [1], with a common convergence sequence l_n, $n \to \infty$;

(C4) there exist numbers $l_F > 0$ and $l_G > 0$ such that $\|F(x) - F(y)\| \le l_F\|x-y\|$, $\|G(x) - G(y)\| \le l_G\|x-y\|$, for all $x, y \in \mathbb{R}^p$;

(C5) $K\left(\frac{1}{-\lambda}\Big(m_{\mathcal{B}}m_F + m_{\mathcal{C}}\Big) + \frac{1}{1-e^{\lambda\underline{\theta}}}\Big(m_B m_G + m_\Gamma\Big)\right) < H;$

(C6) $K\left(\frac{l_F m_{\mathcal{B}}}{-\lambda} + \frac{l_G m_B}{1-e^{\lambda\underline{\theta}}}\right) < 1;$

(C7) $Kl_F m_{\mathcal{B}} + \frac{1}{\underline{\theta}} ln(1 + Kl_G m_B) < -\lambda;$

(C8) the function $\mathcal{C}(t)$ in (3) satisfies condition $C(2)$, and there exist numbers $\epsilon_0 > 0, \delta > 0$ and sequence s_n, $s_n \to \infty$, such that $\|\mathcal{C}(t+t_n) - \mathcal{C}(t)\| \geq \epsilon_0$ for each $t \in [s_n - \delta, s_n + \delta]$ and $n \in \mathbb{N}$.

Theorem 4. *If conditions (C1)-(C8) are valid, then system (3) has a unique exponentially stable unpredictable solution.*

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP23487275).

Keywords: impulsive Hopfield neural networks, symmetry of impulsive and differential compartments, discontinuous unpredictable functions, Poisson couples.

2010 Mathematics Subject Classification: 34A36, 34A37, 45M10

References

[1] Akhmet M., Tleubergenova, M., Seilova R., Nugayeva, Z. Symmetrical Impulsive Inertial Neural Networks with Unpredictable and Poisson-Stable Oscillations, *Symmetry*, **15** (2023), 1812.

[2] Akhmet, M.U. *Principles of discontinuous dynamica*, Springer, New-York (2010).

Solution estimates for third-order PDEs on non-cylindrical domain

A. MERZETKHAN[1], M.N. OSPANOV[2]

[1,2]*Eurasian National University, Astana,Kazakhstan*

[1]akerkemerzetkhan@gmail.com, [2]ospanov_mn@enu.kz

Let $\varphi(x)$ be continuous on the $\mathbb{R}$ and $\varphi(x) > 0$ function. In the non-cylindrical domain $\Omega = [0, \omega] \times [0, \varphi(\omega)]$ consider next third-order partial differential equation:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} = a_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + a_1 \frac{\partial u}{\partial x} + a_2 \frac{\partial u}{\partial t} + a_3 u + f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega, \tag{1}$$

$$u(0,t) = 0 \tag{2}$$

$$u(x,0) = u(x, \varphi(\omega)), \quad x \in [0, \omega], \tag{3}$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \frac{\partial u(x,\varphi(\omega))}{\partial t}, \quad x \in [0,\omega]. \tag{4}$$

We assume that $a_i = a_i(x,t)\,(i = \overline{0,3})$, $f(x,t)$ are continuous on Ω.

Theorem. *Let the function* $a_1(x,t) \geq \sigma > 0$ *in equation* (1). *Then the problem* (1)-(4) *has a unique solution* $u(x,t)$ *for all* $(x,t) \in \Omega$ *and the following estimates hold:*

$$\|u(x,\cdot)\| \leq \int_0^x \gamma(\xi) \left\| \frac{f(\xi,\cdot)}{\varphi(\xi) a_1(\xi,\cdot)} \right\| d\xi,$$

$$\left\| \frac{\partial u(x,\cdot)}{\partial t} \right\| \leq \alpha_0 \int_0^x \gamma(\xi) \left\| \frac{f(\xi,\cdot)}{\varphi(\xi) a_1(\xi,\cdot)} \right\| d\xi,$$

$$\left\|\frac{\partial u(x,\cdot)}{\partial x}\right\| \leq \beta(x)\int_0^x \gamma(\xi)\left\|\frac{f(\xi,\cdot)}{\varphi(\xi)a_1(\xi,\cdot)}\right\|_0 d\xi + \left\|\frac{f(x,\cdot)}{\varphi(x)a_1(x,\cdot)}\right\|$$

Where, $\| u(x,\cdot) \| = \max\limits_{t\in[0,\varphi(\omega)]} \|u(x,t)\|$, $\quad \alpha_0 = \max(\max\limits_{(x,t)\in\Omega} |a_0(x,t)+a_1(x,t)|\,, 1)$

$$\beta(x) = \max_{t\in[0,\varphi(\omega)]}\left\{\alpha_0\left|\frac{a_2(x,t)}{a_1(x,t)}\right| + \left|\frac{a_3(x,t)}{a_1(x,t)}\right|\right\},$$

$$\gamma(x) = \exp\left[\int_0^x \beta(\eta)d\eta\right], \quad (0 \leq x \leq \omega)$$

Keywords:third-order partial differential equation with variable coefficient, non-cylindrical domain.

2010 Mathematics Subject Classification: 35B10,

References

[1] Dzhumabayev, D.S. (1989). Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation. USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics, 29 (1), 34–46. https://doi.org/10.1016/0041-5553(89)90038-

On a solution to a semi-periodic boundary value problem for a hyperbolic equation with a fractional derivative

N.T. ORUMBAYEVA[1], B.B. ZHANTASSOVA[2]

[1,2]*Karaganda Buketov University, Karaganda, Kazakhstan*

[1]orumbayevanurgul@gmail.com, [2]zh.botagoz.b@gmail.com

On $\Omega = [0,X]\times[0,T]$, a semi-periodic boundary value problem for a hyperbolic equation with a fractional derivative is considered:

$$\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x\partial t} = A(x,t)\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} + \mu\left[D_t^\beta w(x,t)\right] + f(x,t), \quad 0\leq\beta<1, \quad (x,t)\in\Omega, \tag{1}$$

$$w(0,t)=\varphi(t), \quad w(x,0)=w(x,T), \quad t\in[0,T], \quad x\in[0,X]. \tag{2}$$

Here, $A(x,t)$, $f(x,t)$ are continuous on Ω, $\varphi(t)$ is continuously differentiable on $[0,T]$ and satisfies the compatibility condition $\varphi(0)=\varphi(T)$, $D_t^\beta u(x,t)$ is the Riemann-Liouville fractional derivative of order β.

Theorem 1. *Assume the following conditions hold:*
1. The function $A(x,t)$ is continuous on $\Omega=[0,X]\times[0,T]$ and bounded: $|A(x,t)|\leq C_1, (x,t)\in\Omega$.
2. The function $f(x,t)$ is continuous on Ω and satisfies the condition: $|f(x,t)|\leq C_2, (x,t)\in\Omega$.
3. The function $\varphi(t)$ is continuously differentiable on $[0,T]$, and its derivative is bounded: $|\varphi'(t)|\leq C_3, t\in[0,T]$.
4. The parameter β satisfies the condition $0\leq\beta<1$.
5. The initial and boundary conditions are compatible: $\varphi(0)=\varphi(T)$.

Then the solution $w(x,t)$ to problem (1), (2) exists, is unique in the class of continuous functions, and has the form:

$$w(x,t) = \int\limits_0^x u(\xi,t)\,d\xi + \varphi(t),$$

$$u(x,t) = \lambda(x) + \int_0^t G(t-\tau)\left(A(x,\tau)\lambda(x) + \mu\left[D_\tau^\beta\int\limits_0^x \lambda(\xi)\,d\xi\right] + \mu\left[D_\tau^\beta\varphi(\tau)\right] + f(x,\tau)\right)d\tau,$$

$$\lambda(x) = -M^{-1}(x)F(x), \quad F(x) = \int_0^T G(T-\tau)f(x,\tau)d\tau,$$

$$M(x) = \int_0^T G(T-\tau)\left(A(x,\tau)\lambda(x) + \mu\left[D_\tau^\beta \int_0^x \lambda(\xi)\,d\xi\right] + \mu\left[D_\tau^\beta \varphi(\tau)\right]\right)d\tau,$$

$G(t-\tau)$ is Green's function: $G(t-\tau) = (t-\tau)^{\beta-1}E_{\beta,\beta}\left(\mu(t-\tau)^\beta\right)$,
$E_{\beta,\beta}(z)$ is Mittag-Leffler function: $E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}$.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP23488729).

Keywords: Fractional derivatives, Green's function, Mittag-Leffler function, integral equations, boundary conditions.

2010 Mathematics Subject Classification: 35L20, 35L10

References

[1] Nakhushev A.M. *Elements of Fractional Calculus and Their Applications, Nalchik: NII PMA KBSC RAS. (2000).*

[2] Pskhu A.V., Ramazanov M.I., Gulmanov N. K., Iskakov S.A. Boundary value problem for fractional diffusion equation in a curvilinear angle domain, *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series*, **105**:1 (2022), 83–95.

Solvability of a multiperiodic problem for the quasilinear system of integro-differential equations with limited hereditarity

Zh.A. SARTABANOV[1], G.A. ABDIKALIKOVA[2], G.M. AITENOVA[3], A.Kh. ZHUMAGAZIYEV[4]

[1,2,4]*K. Zhubanov Aktobe Regional University, Aktobe, Kazakhstan*
[3]*M. Utemisov West Kazakhstan University, Uralsk, Kazakhstan*
[1]sartabanov@mail.ru, [2]agalliya@mail.ru

The quasilinear integro-differential equation is considered

$$D_c u(\tau,t) = A(\tau,t)u(\tau,t) + \int_\tau^{\tau+\theta} K(\xi,\tau,t,\beta(\xi,\tau,t))u(\xi,\beta(\xi,\tau,t))d\xi + f(\tau,t,u(\tau,t),\varepsilon). \tag{1}$$

Here $D_c = \frac{\partial}{\partial\tau} + \langle c, \frac{\partial}{\partial t}\rangle$ is the differential operator; $\beta(\xi,\tau,t)$ is the periodic characteristic of the operator D_c; $A(\tau,t) \in C_{\tau,t}^{(0,e)}(R\times R^m)$ and $K(\xi,\tau,t,\beta) \in C_{\xi,\tau,t,\beta}^{(0,0,e,\widetilde{e})}$ are the $n\times n$-matrices; e and $\widetilde{e}$ - unit m-vectors; $f(\tau,t,u(\tau,t),\varepsilon) \in C_{\tau,t,u}^{(0,e,\widetilde{e})}(R\times R^m\times R^n)$; ε - is the positive parameter.

We assume that condition (N), holds if:

$$A(\tau+\theta,t+\omega) = A(\tau,t);$$
$$K(\xi+\theta,\tau,t,\beta(\xi+\theta,\tau,t)) = K(\xi,\tau,t,\beta(\xi,\tau,t));$$
$$K(\xi,\tau+\theta,t+\omega,\beta(\xi,\tau+\theta,t+\omega)) = K(\xi,\tau,t,\beta(\xi,\tau,t));$$
$$f(\tau+\theta,t+\omega,u,\varepsilon) = f(\tau,t,u,\varepsilon).$$

Many problems from hydrodynamics, acoustics, transport theory, and other sections of continuum mechanics, as well as some phenomena of substance transport in biological systems, lead to systems of type (1) [1-3].

Problem. Find sufficient conditions for the existence of a unique multiperiodic solution of the quasilinear system (1) satisfying the initial condition

$$u|_{\tau=\tau_0} = \Psi(t) \in C_t^{(e/\omega)}(R^m). \tag{2}$$

Theorem 1. *Let conditions (N) and $\frac{a(k_1+k_2\delta)}{\alpha} < \delta$. Then the quasilinear system of integro-differential equations (1) has a unique (θ,ω)-periodic solution $u^*(\tau,t)$ from $H_\delta^{(\theta,\omega)}$, bounded in norm by the number $\delta > 0$.*

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP19676629).

Keywords: periodic characteristics, multiperiodicity, integro-differential equation, heriditarity.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 47F05, 45M15

References

[1] Volterra V. *Lecons sur les equations integrals et les equations integro-differentielles*, Paris (1913).

[2] Umbetzhanov D.U. *Almost periodic solutions of evolutionary equations*, Alma-Ata: Nauka (1990). [in Russian]

[3] Sartabanov Zh.A. Periodicity of characteristics of the differentiation operator along the diagonal, *Vestnik KazNPU imeni Abaja*, **2**:82 (2023), 40–53. [in Russian]

Multiperiodic solution of a nonlinear Van der Pol-type equation with a polyharmonic perturbation of a Diophantine frequency basis

Zh. SARTABANOV[1], B. OMAROVA[2]

[1,2]*K. Zhubanov Aktobe Regional University, Aktobe, Kazakhstan*

[1]sartabanov42@mail.ru, [2]bibigul.zharbolkyzy@gmail.com

We consider the equation

$$\begin{aligned} &D^2x + x = \varepsilon\left[Dx + \frac{1}{3}(Dx)^3\right] + \frac{1}{2}\left[a_1e^{2\pi i\nu_1\tau} + a_1e^{-2\pi i\nu_1\tau} + a_2e^{2\pi i\nu_2\tau} + a_2e^{-2\pi i\nu_2\tau}\right], \\ &D = \frac{\partial}{\partial\tau} + \frac{\partial}{\partial t}, \end{aligned} \tag{1}$$

which describes multiperiodic fluctuations with periods $\omega_1 = \nu_1^{-1}$ and $\omega_2 = \nu_2^{-1}$ in τ and t, respectively. When the partial differential differentiation operator D is narrowed to the ordinary derivative $\frac{d}{d\tau}$, the equation takes a special form of the Van der Pol equation with a polyharmonic perturbation of the frequency basis $(\nu_1,\nu_2) = \nu$ with low viscosity ε, as shown in

$$\ddot{x} + x = \varepsilon\left[\dot{x} + \frac{1}{3}\dot{x}^3\right] + a_1\cos\nu_1\tau + a_2\cos\nu_2 t, \quad \frac{dt}{d\tau} = 1, \tag{2}$$

where $\varepsilon > 0$ is a parameter, a_1 and a_2 are real constants, nonzero, $\tau \in (-\infty,+\infty) = R$, the frequency basis (ν_1,ν_2) is Diophantine. Therefore, it satisfies the condition of strong incommensurability [1], as shown in (3), where Z is an integer set. Under condition

$$|p_1\nu_1 + p_2\nu_2| \geq c\,|p|^{-3},\ |p| = |p_1| + |p_2| > 0,\ p = (p_1,p_2) \in Z \times Z = Z^2, \tag{3}$$

the frequency basis, which estimates the effect of small dividers, is called Diophantine [2].

The small divisors $\delta_p = p_1\nu_1 + p_2\nu_2 \neq 0, p \in Z^2$ for any multiplicities $p = (p_1,p_2)$ are pairs (ν_1,ν_2) with the modulus $|p| = |p_1| + |p_2| > 0$ and they appear when integrating both equation (1) and (2).

Classical methods of studying problems in differential equations involve transitioning from the original problem to the equivalent problem for integral equations, which is then studied using the method of operators' compression. This approach is based on a modified Newton's method, which it cannot overcome the difficulties posed of small divisors.

This method has a linear convergence rate of approximations, and to overcome the unpleasant effect of small divisors, quadratic convergence of approximations is necessary, which is characteristic of Newton's tangent method. This method has a linear convergence rate for approximations, but to overcome the undesirable effects of small divisors, quadratic convergence is necessary, which is characteristic of Newton's tangent method. The KAM theory is based on quadratic convergence [2], where the influence of small divisors is suppressed by the method developed by A.N. Kolmogorov [1]. In the case of linear convergence of approximations, the problem remained unresolved.

In this study, a new offset method is proposed to suppress the influence of small divisors, where an integer increase in frequencies accelerates the convergence of approximations depending on the multiplicity modules $|p| = |p_1| + |p_2|$. The idea of the method is suggested by condition (3) on Diophantine frequencies.

As a rule, oscillation problems are investigated in terms of Fourier series. Consequently, the convergence of approximations is determined by the coefficients, and the acceleration of convergence is achieved by Fourier exponents, which modify the Fourier coefficients when integrating the equations. Therefore, a integer change in the Fourier exponents by modules yields positive effects that cancel out the influence of the corresponding small divisors.

This study was conducted according to the following scheme by the recommendation of Prof. Sartabanov Zh., using this idea:

1. From the problem for equation (1) under condition (3) we pass to the problem for equation

$$D^2 z + z = \varepsilon \left[Dz + \frac{1}{3} (Dz)^3 \right] + \left[a_1 e^{4\pi i \nu_1 \tau} + a_1 e^{-4\pi i \nu_1 \tau} + a_2 e^{4\pi i \nu_2 \tau} + a_2 e^{-4\pi i \nu_2 \tau} \right] \tag{4}$$

and the solution of this problem is sought in the form

$$z = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{|p|=j} z^p e^{2\pi i (1+|p|)^3 (p_1\nu_1 + p_2\nu_2)} \tag{5}$$

for sufficiently small values of the parameter $\varepsilon > 0$.

The transition from the problem for equation (1) to the problem for equation (4) is realized by the method of extended differentiation operator, which also belongs to the author of the idea of the new method.

2. The problem of oscillatory solutions (5) for equation (4) is solved by the method of successive approximations with linear convergence.

3. By replacing the exponents $\mu_p = (1+|p|)^3 \lambda_p$ with the exponent $\lambda_p = 2\pi (p_1\nu_1 + p_2\nu_2)$ in solution (5) without changing the Fourier coefficients, we obtain the solution

$$x = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{|p|=j} z^p e^{2\pi (p_1\nu_1 + p_2\nu_2)}$$

of the problem for equation (1) with the same Fourier exponents, but the Fourier coefficients of solution (5).

In conclusion, we note that the results of this study can be generalized to the case of quasiperiodic perturbations with absolutely convergent Fourier series.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP19676629).

Keywords: diffusion equation, homogeneous body, initial state, local inhomogeneity, transparent boundary conditions.

2010 Mathematics Subject Classification: 35B05, 35B10, 35C10

References

[1] Arnold V.I. *Additional chapters of the theory of ordinary differential equations*, Nauka, Moscow (1978) (in russian).

[2] de la Llave R. *Introduction to KAM Theory*, Institute of Computer Science, Izhevsk (2003) (in russian).

On inverse problem for a fractional-order loaded pseudo-parabolic equation with involution perturbation

A.Q. SOBIRJONOV[1], B.K. TURMETOV[2]

[1,2] *Alfraganus university,Tashkent, Uzbekistan.*
[2]*Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University,Turkistan, Kazakhstan.*
[1]*V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan.*

[1] batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz, [2] avazbeksobirjonov1998@gmail.com

In this work, the problem of solving an inverse problem for a nonlocal pseudo-parabolic equation is studied. The nonlocal pseudo-parabolic equation is introduced using transformations that possess the property of involution. In the problem under consideration, along with the solution of the equation, a function that appears on the right-hand side and depends on the spatial variable is determined. The proposed problem is solved using the Fourier method.

Definition 1. The fractional derivatives ${}_cD_{at}^{\alpha}$ of order $0<\alpha\le 1$ on $[a,b]$ defined as

$$ {}_cD_{at}^{\alpha}u(t)=D_{at}^{\alpha}[u(t)-u(a)] $$

is called the left-sided Caputo fractional derivatives of order α [1], where

$$ D_{at}^{\alpha}u(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_a^t (t-s)^{-\alpha}u(s)ds, \quad 0<\alpha\le 1. $$

Consider the heat equation

$$ {}_CD_{0t}^{\alpha}\left[u(x,t)-L_a(u)\right]-L_a(u)+b_1u(x,t_0)+b_2u(-x,t_0)=f(x), \quad (x,t)\in\Omega, \tag{1} $$

where, ${}_CD_{0t}^{\alpha}$ is Caputo derivative and $L_a(u)=a_1u_{xx}(x,t)+a_2u_{xx}(-x,t)$, α, a_i, b_i $(i=1,2)$ are real numbers such that, $0<\alpha\le 1$, $a_1\pm a_2>0$ and Ω is a rectangular domain given by $\Omega=\{-p<x<p, \quad 0<t<T\}$, t_0 is any fixed number, and that $t_0\in(0,T)$ Our aim is to find a regular solution to the following four inverse problems:

Problem IP_P**:** Find a pair of functions $u(x,t)$ and $f(x)$ in the domain Ω satisfying equation (1) and the conditions

$$ u(x,0)=\varphi(x), \quad u(x,T)=\psi(x), \quad x\in[-p,p] \tag{2} $$

and the Periodic boundary conditions

$$ u(-p,t)=u(p,t), \quad u_x(-p,t)=u_x(p,t), \quad t\in[0,T], \tag{3} $$

where $\varphi(x)$ and $\psi(x)$ are given, sufficiently smooth functions.

Definition 2. By a regular solution of problem IP_P we mean a pair of functions $u(x,t)$ and $f(x)$ of the class $u\in C(\overline{\Omega})$, ${}_CD_{0t}^{\alpha}u, {}_CD_{0t}^{\alpha}u_{xx}\in C(\Omega), f(x)\in C[-p,p]$.

Keywords: Inverse problems, fractional-order loaded pseudo-parabolic equation, involution perturbation

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

References

[1] A.A.Kilbas, Hari M. Srivastava, and Juan J.Trujillo. *Theory and applications of fractional differential equations*, Elsevier Science B.V, Amsterdam (2006).

On the relationship between solutions of boundary value problems for differential equations and corresponding problems for dynamic equations on time scales

O. STANZHYTSKYI[1], R. UTESHOVA[2]

[1]*Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine*
[2]*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[1]ostanzh@gmail.com, [2]r.uteshova@math.kz

This study investigates boundary value problems for systems of ordinary differential equations on a finite time interval and their corresponding formulations for families of dynamic equations on time scales. The theory of dynamic equations on time scales began its intensive development following the work of S. Hilger [1], where the concept of the derivative on a time scale (Δ-derivative) was introduced. This allowed for a unified approach to discrete and continuous analysis. A comprehensive exposition of results in the field of dynamic equations can be found in the monographs [2,3].

We begin by introducing some basic notations from the theory of time scales [2]. A time scale $\mathbb{T}$ is a non-empty closed subset of $\mathbb{R}$. For a given set $A \subset \mathbb{R}$, we define $A_{\mathbb{T}} := A \cap \mathbb{T}$. The *forward jump operator* $\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ is given by $\sigma(t) := \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\}$. Similarly, the *backward jump operator* $\rho : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ is defined as $\rho(t) := \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\}$. Here we adopt the convention $\inf \varnothing := \sup \mathbb{T}$, $\sup \varnothing := \inf \mathbb{T}$. A point $t \in \mathbb{T}$ is called *left-dense (LD)*, *left-scattered (LS)*, *right-dense (RD)*, or *right-scattered (RS)* if $\rho(t) = t$, $\rho(t) < t$, $\sigma(t) = t$ or $\sigma(t) > t$, respectively. If $\mathbb{T}$ has a left-scattered maximum M, then we define $\mathbb{T}^\kappa = \mathbb{T} \setminus \{M\}$; otherwise, we set $\mathbb{T}^\kappa = \mathbb{T}$. The *graininess function* $\mu(t) := \sigma(t) - t$ characterizes the density of the time scale. A function $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^d$ is called Δ-differentiable at $t \in \mathbb{T}^\kappa$ if the limit

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s}.$$

exists in $\mathbb{R}^d$, and the number $f^{\Delta}(t)$ is called the Δ-derivative at the point.

In this direction, the theory of optimal control on time scales has been actively developing. Interesting results have been obtained for dynamic equations on time scales with complex topological structures (e.g., Cantor sets). Many studies have examined the preservation of various properties of solutions when transitioning between ordinary differential equations and dynamic equations, and vice versa. Research has also explored the relationship between globally bounded solutions of ordinary and dynamic equations, as well as the interdependence of oscillatory properties of solutions. However, the behavior of solutions to boundary value problems during the transition from differential equations to dynamic equations, and vice versa, has not been previously studied.

We consider the system of ordinary differential equations on $[0, T]$:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = X(t, x), \\ F(x(0), x(T)) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

where $x \in D \subset \mathbb{R}^d$, $X : [0, T] \times D \to \mathbb{R}^d$, and $F : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$. For a family of time scales $\mathbb{T}_\lambda$ parameterized by λ, where 0 and T belong to all time scales, we consider the corresponding dynamic system

$$\begin{cases} x_\lambda^{\Delta} = X(t, x_\lambda), \\ F(x_\lambda(0), x_\lambda(T)) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

where x^{Δ} is the Δ-derivative on the time scale $\mathbb{T}_\lambda$. Let $\mu_\lambda(t) : \mathbb{T}_\lambda \to [0, \infty)$ be the graininess function. Define $\mu := \sup\limits_{t \in \mathbb{T}} \mu_\lambda(t)$. If $\mu_\lambda \to 0$ as $\lambda \to 0$, then the $[0, T]_\lambda$ approaches $[0, T]$, and the boundary value problem on the family of time scales (2) transitions to the boundary value problem

(1). This raises the question of the relationship between the solutions of these problems. We prove that, under certain conditions, the existence of solutions to problem (2) for sufficiently small λ implies the existence of a solution to problem (1), and vice versa. Furthermore, we establish that as $\lambda \to 0$, the solution $x_\lambda(t)$ of problem (2) converges to the solution $x(t)$ of problem (1). This result is particularly important for approximating solutions of boundary value problems (1) using difference schemes with a variable step size.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP23485618).

Keywords: time scale, boundary value problem, dynamic equation, Δ-derivative, graininess function.

2010 Mathematics Subject Classification: 34N05, 34B15

References

[1] Hilger S. *Ein Maßkettenkalkül mit Anwendungen auf Zentrumsmannigfaltigkeiten*, Universität Würzburg, Würzburg (1988).

[2] Bohner M., Peterson A. *Dynamical equations on time scales. An introduction with applications*, Boston, MA, USA: Birkhäuser (2001).

[2] Bohner M., Peterson A. *Advances in dynamical equations on time scales*, Boston, MA, USA: Birkhäuser (2003).

On a boundary value problem with impulsive action for a system of nonlinear differential equations

S.M. TEMESHEVA[1], A.B. TLEULESSOVA[2]

[1]*Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*
[2]*L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan*
[1,2]*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[1]s.temesheva@math.kz, [2]agila_72@mail.ru

We consider the boundary value problem with impulsive action on $[t_1, t_2]$

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \tag{1}$$

$$x(\theta) - x(\theta - 0) = p, \tag{2}$$

$$g(x(t_1), x(t_2)) = 0, \tag{3}$$

where $x \in \mathbb{R}^n$ is unknown vector function, $t \in [t_1, t_2] \setminus \{\theta\}$, θ is a fixed point, $\theta \in (t_1, t_2)$, $f : (t_1, t_2) \setminus \{\theta\} \to \mathbb{R}^n$ is piecewise continuous and bounded function, $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ is continuous function, $p \in \mathbb{R}^n$ is a given constant vector.

Let $PC([t_1, t_2] \setminus \{\theta\}, \mathbb{R}^n)$ be a space of piecewise continuous functions with the norm

$$\|x\|_1 = \max\left\{ \sup_{t\in[t_1,\theta)} \|x(t)\|, \sup_{t\in(\theta,t_2]} \|x(t)\| \right\}.$$

A solution to the problem (1)-(3) is a piecewise continuously differentiable function $x^*(t) \in PC([t_1, t_2] \setminus \{\theta\}, \mathbb{R}^n)$ on the interval $(t_1, t_2) \setminus \{\theta\}$, which satisfies the differential equation (1), the impulsive condition (2) at the point $t = \theta$, and the boundary condition (3). Note that at the points $t = t_1$ and $t = t_2$, the equation (1) holds for the one-sided derivatives $\dot{x}^*_+(t_1)$ and $\dot{x}^*_-(t_2)$.

Problem (1)-(3) is studied via a parametrization method with modified algorithms. Conditions for the existence of an isolated solution to the considered boundary value problem with impulsive action are established. This modifications of algorithms of Dzhumabaev's parametrization method will enable the investigation and solution of boundary value problems with impulses at non-fixed time moments for nonlinear differential equations.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP23488811).

Keywords: nonlinear differential equation, boundary value problem, impulsive action, isolated solution, parametrization method, modified algorithm.

2010 Mathematics Subject Classification: 34A37, 34B15, 34B37

References

[1] Dzhumabaev D.S., Temesheva S.M. A parametrization method for solving nonlinear two-point boundary value problems, *Comput. Math. Math. Phys.*, **47**:1 (2007), 37—61.

[2] Tleulessova A.B., Orazbekova A.S. On the solvability of a problem with impulsive action, *BOOK OF ABSTRACTS. The International Summer School & Conference "Evolution Equations, Approximation and Spectral Optimization", September, 11-18 (2024)*, 42.

On the critical behavior for inhomogeneous semilinear biharmonic heat equations on exterior domains

N. TOBAKHANOV[1], B. TOREBEK[2]

[1]*Nazarbayev University, Kazakhstan*

[2]*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Kazakhstan*

[1]nurdaulet.tobakhanov@nu.edu.kz, [2]berikbol.torebek@ugent.be

This report is devoted to the existence and nonexistence of global weak solutions to the inhomogeneous semilinear heat equations with forcing terms on exterior domains

$$\begin{cases} u_t + \Delta^2 u = |u|^p + f(x), & \text{in } D^c \times (0, \infty), \\ u(x,0) = u_0(x), & \text{in } D^c, \end{cases} \tag{1}$$

where $p > 1$ is a constant, Δ is the Laplace operator, and $D = \overline{B_1}$ is the closed unit ball, and D^c is its complement in $\mathbb{R}^N$.

We investigate the critical behavior of solutions to the semilinear biharmonic heat equation with forcing term $f(x)$, under six homogeneous boundary conditions. By employing a method of test function, we derive the critical exponents p_{Crit} in the sense of Fujita. Moreover, we show that $p_{Crit} = \infty$ if $N = 2, 3, 4$ and $p_{Crit} = \frac{N}{N-4}$ if $N \geq 5$. The impact of the forcing term on the critical behavior of the problem is also of interest, and thus a second critical exponent in the sense of Lee-Ni, depending on the forcing term is introduced. We also discuss the case $f \equiv 0$, and present the finite-time blow-up results for the subcritical and critical cases.

Keywords: Exterior problem, Fujita critical exponent, nonexistence, existence

2020 Mathematics Subject Classification: 35A01, 35B09, 35B44

On the solvability of a singular boundary value problem for a Fredholm integro-differential equation

R. UTESHOVA

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

r.uteshova@math.kz

We consider the boundary value problem for a singular Fredholm integro-differential equation of the second kind on the positive semi-axis:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \int_0^\infty K(t,s)x(s)\,ds + f(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in (0, \infty), \tag{1}$$

with the boundary conditions $x(0) = \alpha, \quad \lim_{t\to\infty} x(t) = \beta$.

We investigate the unique solvability of this problem and construct its solution. Using the parameterization method introduced by Dzhumabaev [1], we derive necessary and sufficient conditions for the unique solvability of the given boundary value problem and construct approximating regular boundary value problems.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. BR20281002).

Keywords: Fredholm integro-differential equation, singular boundary value problem, parameterization method.

2010 Mathematics Subject Classification: 45J05, 34B40

References

[1] Dzhumabaev D. Necessary and sufficient conditions for the solvability of linear boundary- value problems for the Fredholm integro-differential equations, *Ukrainian Math. J.*, **66**:8 (2015), 1200–1219.

Solvability of boundary value problems for differential-algebraic equations via the Kronecker canonical form

R. UTESHOVA

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

r.uteshova@math.kz

This work examines the solvability of the boundary value problem for linear differential-algebraic equations with constant coefficients:

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t), \quad t \in (0, T), \tag{1}$$

$$Bx(0) + Cx(T) = d. \tag{2}$$

Here $E, A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B, C \in \mathbb{R}^{l\times n}$, $d \in \mathbb{R}^l$, $T > 0$.

By a solution of the boundary value problem (1), (2) we mean a function $x \in C^1([0, T], \mathbb{R}^n)$ that satisfies equation (1) and the boundary condition (2).

Differential-algebraic equations (DAEs) have become an essential tool for modeling and simulating dynamical systems with constraints across various fields. Boundary value problems for DAEs arise in numerous engineering applications, including electrical circuits and multi-body dynamics. The development of this theory has been closely linked to adapting classical numerical methods, such as modified shooting and collocation techniques, originally designed for ordinary differential equations. For a comprehensive overview of this evolution, we refer to [1,2].

In [3], we investigated the boundary value problem (1), (2) under the assumption that the matrix pair (E, A) is regular, meaning that $m = n$ and $\det(\lambda E - A)$ is not identically zero. By employing the parameterization method [4], we introduced a parameter representing the solution's value at the left endpoint of the interval. Utilizing the Weierstrass canonical form for the matrix pair, we established a solvability criterion ensuring the uniqueness of the solution.

In this study, we extend our analysis to the general case, where the matrix pair (E, A) in (1) is not necessarily regular. Our approach relies on the Kronecker canonical form of (E, A) combined with the parameterization method to derive a solvability criterion for the problem. Applying this method transforms the boundary value problem into a system of algebraic equations for the introduced parameters. Since the resulting system's matrix is generally neither square nor invertible, we utilize the concept of a generalized inverse, which provides a systematic framework for representing and analyzing solutions to such systems.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP19675193).

Keywords: differential-algebraic equation, boundary value problem, Kronecker canonical form, parameterization method.

2010 Mathematics Subject Classification: 4A09, 34B05, 15A22

References

[1] Kunkel P., Mehrmann V. *Differential-algebraic Equations: Analysis and Numerical Solution* European Mathematical Society, Zürich (2006).

[2] Lamour R., März R., Weinmüller E. Boundary-value problems for differential-algebraic equations: A survey, in: *Surveys in Differential-Algebraic Equations III*, Differential- Algebraic Equations Forum, Springer (2015), 177–309.

[3] Assanova A., Trunk C., Uteshova R. On the solvability of boundary value problems for linear differential-algebraic equations with constant coefficients, *Contemporary Mathematics*, **798** (2024), 13–19.

[4] Dzhumabaev D. Criteria for the unique solvability of a linear boundary- value problem for an ordinary differential equation, *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, **29** (1989), 34–46.

On the stability of non-autonomous automatic control systems in the vicinity of a program manifold

S.S. ZHUMATOV

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakstan

sailau.math@mail.ru

In the space R^n, we choose a simply connected closed region $G\,(R)$:

$$G\,(R) = \{(t,x) : t \in I \wedge \|\omega\,(t,x)\| \le \rho < \infty\}\,. \tag{1}$$

In this region, we consider the problem of constructing the following system of differential equations

$$\dot{x} = f\,(t,x)\,, \tag{2}$$

and the automatic control systems for a given smooth program manifold $\Omega(t) \equiv \omega(t,x) = 0$, in the following form [1]:

$$\dot{x}(t) = f(t,x) - B_1(t)\xi, \quad \xi = \varphi(t,\sigma), \quad \sigma = P^T(t)\omega, \quad t \in I = [0,\infty), \tag{3}$$

where $x \in R^n$ is the vector of the object's state, $f \in R^n$ is the vector function satisfying the conditions for the existence of a solution $x(t) = 0$, and $B_1(t) \in \Xi^{n\times r}, P(t) \in \Xi^{n\times r}$ are matrices, $\omega \in R^s (s \le n)$ is a vector, $\xi \in R^r$ is a σdifferentiable vector function satisfying the local quadratic relation

$$\begin{gathered}\varphi(t,0) = 0 \wedge 0 < \sigma^T\varphi(t,\sigma) \le \sigma^T K(t)\sigma, \quad \forall\sigma \ne 0,\\ K_1(t) \le \frac{\partial\varphi(t,\sigma)}{\partial\sigma} \le K_2(t), \{K(t) = K^T(t) > 0, K_i(t) = K_i^T(t) > 0\} \in \Xi^{r\times r}.\end{gathered} \tag{4}$$

Here Ξ - is the class of continuously-differentiable on time t and bounded in the norm matrices.

Vector function $\varphi(t,\sigma)$ is essentially a program deviation control function, since on the program manifold $\Omega(t)$ the function $\xi = \varphi(t,\sigma)$ vanishes and equation (3) takes the form (2). Hence, $\Omega(t)$ is an integral manifold also for (3).

Due to the fact that the program manifold $\Omega(t)$ is integral for the system (2), (3) takes place

$$\dot{\omega} = \frac{\partial\omega}{\partial t} + Hf\,(t,x) = F(t,x,\omega), \tag{5}$$

where $F(t,x,0) \equiv 0$ is a vector function of Yerugin [1-3].

Choosing the function $F(t,x,\omega)$linear with respect to ω, we reduce our problem to investigation of quality properties of the following system with respect to vector-function ω [2, 3]:

$$\begin{aligned}&\dot{\omega} = -A(t)\omega - B(t)\xi, \quad t \in I = [0,\ \infty)\,,\\ &\dot{\xi} = \varphi\,(\sigma)\,, \quad \sigma = P^T(t)\omega,\end{aligned} \tag{6}$$

Here nonlinearity satisfies also to generalized conditions (4), and $F(t,x,\omega) = -A(t)\omega,\ A(t) \in \Xi^{s\times s},\ H(t) = \dfrac{\partial\omega}{\partial x},\ B(t) = H(t)B_1(t)$.

Statement of the Problem. Obtain conditions of absolute stability of nonautonomous control systems (6) in the vicinity of a program manifold $\Omega(t)$, if the conditions (4) are met..

For system (1), we construct the Lyapunov function in the following form

$$V(\omega) = \omega^T L\omega + \beta\int\limits_0^t S(\tau)d\tau, \tag{7}$$

. where $L(t) = L^T(t) >> 0 \quad \beta(t) = diag(\beta_1(t), ..., \beta_r) >> 0$ and

$$S(t) = \sigma^T(K(t)\sigma(t) - \varphi(\sigma,t)) \geq 0.$$

Using the function (7) are obtained.sufficient conditions for the absolute stability of nonautonomous control systems (6) in the vicinity of a program manifold $\Omega(t)$.

In the works (see [3]-[12]) are given different problems dedicated to the construction various of autonomous and non-autonomous basic and inedirectautomatic control systems on the given program manifold possessing of quality properties and to solving of different inverse problems of dynamics.

Funding: This results are supported by grant of the Ministry of Science and Higher Education of Republic Kazakhstan No. BR 20281002 for 2023-2025 years.

Keywords: absolute stability, program manifold, nonautonomous automatic control systems, Lyapunov function.

2010 Mathematics Subject Classification: 34K20, 93C19, 34K29

References

[1] Maygarin B.G. *Stability and quality of process of nonlinear automatic control system*, Nauka, Alma-Ata (1981).

[2] Erugin N.P. Construction of the entire set of systems of differential equations that have a given integral manifold, *Prikladnaya Matematika i Mecanika*, **10**:6 (1952), 659–670.

[3] Zhumatov S.S., Krementulo B.B., Maygarin B.G. *Lyapunov's second method in the problems of stability and control by motion*, Gylym, Almaty (1999).

[4] Galiullin A.S., Mukhametzyanov I.A., Mukharlyamov R.G. Review of researches on the analytical construction of the systems programmatic motions, *Vestnik RUDN*, **1** (1994), 5–21.

[5] Llibre J., Ramirez R. *Inverse Problems in Ordinary Differential Equations and Applications.* Springer International Publishing Switzerland(2016).

[6] Zhumatov S.S. Absolute stability of a program manifold of non-autonomous basic control systems, *News NAS RK. Series physico-mathematical.* **322**: 6 (2018), 37-43.

[7] Zhumatov S.S.On the stability of a program manifold of control systems with variable coefficients,*Ukrainian Mathematical Journal.* **71**: 8 (2020), 1202-1213.

[8] Zhumatov S.S.On the absolute stability of a program manifold of non-autonomous control systems with non-stationary nonlinearities,*Kazakh Mathematical Journal.***19**: 4 (2020), 35-46.

[9] *Zhumatov S.S., Vasilina G., K.* The Absolute Stability of Program Manifold of Control Systems with Rigid and Tachometric Feedbacks, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, -2022, **43**: 11 (2022), 3344–3351. Pleiades Publishing, Ltd., 2022.

[10] *Zhumatov S.S. Mynbayeva S.T.* Stability of the program manifold of automatic indirect control systems taking into account the external loads, *Advances in the Theory of Nonlinear Analysis and its Applications*, -2023, **7**: 2, (2023), 405-412.

[11] *Sailaubay S. Zhumatov, Meiramgul Z. Talipova, Zagira S. Kobeyeva* On the absolute stability of automatic control systems in the vicinity of a program manifold, *Kazakh Mathematical Journal.* **22**: 2 (2022), 37-47.Published 2024-09.30

[12]*Sailaubay S. Zhumatov* Transformation of degenerate indirect control system in the vicinity of a program manifold, *Kazakh Mathematical Journal.* **24**: 4 (2024), 52-62.Published 2025-01.10

DOI https://doi.org/10.70474/wcda3590

[13] *Zhumatov S.S., Kadirbayeva Zh.M., Kobeyeva Z.S.* Construction of a set of differential equations systems and stability in the vicinity of a program manifold, *Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science* **123**: 3(2024), 48-56. ISSN: 1563-0277.
https://doi.org/10.26577/JMMCS2024-v123-i3-6

[14] *A.Tleulesova, S.Zhumatov, L.Zhapsarbayeva* Absolute stability of program manifoldof control system with local c0nnections, *Bulletin of the National Engineering Academy of the Republic of Kazakhstan* **94**: 4(2024), 302-309/

Stability of a program manifold of indirect control systems with various feedback on an infinite time interval

S.S. ZHUMATOV

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakstan
sailau.math@mail.ru

Consider the problem of construction of the control systems with various feedback, i.e. the presence of both rigid and tachometric feedbacks, by given $(n-s)$-dimensional program manifold $\Omega\left(t\right)\equiv\omega(t,x)=0$, in the following form [1]:

$$\begin{array}{l}\dot{x}=f\left(t,x\right)-B_1\xi-D_1\varphi(\sigma),\quad t\in I=\left[0,\ \infty\right),\\ \dot{\xi}=\varphi\left(\sigma\right),\quad \sigma=P^T\omega-G\xi-N\varphi(\sigma),\end{array}\tag{1}$$

where $x\in R^n$ is a state vector of the object, $f\in R^n$ is a vector-function, satisfying to conditions of existence of a solution $x(t)=0$, and $B_1\in R^{n\times r},\ D_1\in R^{n\times r},\ P\in R^{s\times r}$ are constant matrices,$G\in R^{s\times r}, N\in R^{r\times r}$ are constant matrices of rigid and tachometric feedback, N is diagonal matrix, ξ is function differentiable with respect to σ, satisfies the following conditions

$$\begin{array}{c}\varphi(0)=0\wedge 0<\varphi^T(\sigma)\sigma<\sigma^TK\sigma\quad \forall\sigma\neq 0,\\ -K_1\leq\dfrac{d\varphi}{d\sigma}\leq K_2.\end{array}\tag{2}$$

Here $K,K_1,K_2-(r\times r)$-positive definite matrices. For the manifold $\Omega(t)$ to be integral and for the system (1) - (2) on the manifold $\omega=0$ it is necessary a condition $\xi=0$. This condition is satisfied for $G\neq 0$.

This problem reduce to investigation of stability properties of the following system with respect to vector-function ω [2, 3]:

$$\begin{array}{l}\dot{\omega}=-A\omega-B\xi-D\varphi(\sigma),\quad t\in I=\left[0,\ \infty\right),\\ \dot{\xi}=\varphi\left(\sigma\right),\quad \sigma=P^T\omega-G\xi-N\varphi(\sigma),\end{array}\tag{3}$$

Here nonlinearity satisfies also to generalized conditions (2), and $F(t,x,\omega)=-A\omega,\ A\in R^{s\times s},\ H=\dfrac{\partial\omega}{\partial x},\ B=HB_1,\ D=HD_1$.

Statement of the Problem. To get the condition of absolute stability of a program manifold $\Omega(t)$ of the indirect control systems with rigid and tachometric feedbacks in relation to the given vector-function ω.

Using a non-singular transformation, the system (3) is reduced to the canonical form.

For this system is constructed the Lyapunov function of the following type:

$$V=\omega^TL\omega+\xi^TQ\xi+\int\limits_0^\sigma\varphi^T(\sigma)\beta\kappa(\sigma)d\sigma,\tag{4}$$

where $L=\left\|\dfrac{l_il_j}{\rho_i+\rho_j}\right\|_1^s$-definitely positive matrix, l_i,l_j is are positive numbers and $Q>0,\kappa(\sigma)$ are defined in terms of the coefficients of the system under study.

$$Q=G+P^TD;\quad \kappa(\sigma)=E+N\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}.$$

Thus sufficient conditions for the absolute stability of the program manifold of indirect control systems with rigid and tachometric feedbacks, relatively to the vector function ω are obtained.

The reviews of the works devoted to the construction various of autonomous and non-autonomous basic and indirect automatic control systems on the given program manifold possessing of quality properties and to solving of different inverse problems of dynamics were shown (see [3]-[12]).The works contain articles published 2024 years.

Funding: This results are supported by grant of the Ministry of Science and Higher Education of Republic Kazakhstan No. AP 19677693 for 2023-2025 years.

Keywords: absolute stability, program manifold, indirect control systems, Lyapunov function, rigid and tachometric feedbacks.

2010 Mathematics Subject Classification: 34K20, 93C19, 34K29

References

[1] Maygarin B.G. Stability and quality of process of nonlinear automatic control system, Nauka, Alma-Ata (1981).

[2] Erugin N.P. Construction of the entire set of systems of differential equations that have a given integral manifold, *Prikladnaya Matematika i Mecanika*, 10:6 (1952), 659–670.

[3] Zhumatov S.S., Krementulo B.B., Maygarin B.G. Lyapunov's second method in the problems of stability and control by motion, Gylym, Almaty (1999).

[4] Galiullin A.S., Mukhametzyanov I.A., Mukharlyamov R.G. Review of researches on the analytical construction of the systems programmatic motions, *Vestnik RUDN*, 1 (1994), 5–21.

[5] Llibre J., Ramirez R. Inverse Problems in Ordinary Differential Equations and Applications. Springer International Publishing Switzerland(2016).

[6] Zhumatov S.S. Frequently conditions of convergence of control systems in the neighborhoods of program manifold, *Nelineinye kolebania.* 28: 3 (2016), 367–375.

[7] Zhumatov S.S. Absolute stability of a program manifold of non-autonomous basic control systems, *News NAS RK. Series physico-mathematical.* 322: 6 (2018), 37-43.

[8] Zhumatov S.S.On the stability of a program manifold of control systems with variable coefficients,*Ukrainian Mathematical Journal.* 71: 8 (2020), 1202-1213.

[9] Zhumatov S.S.On the absolute stability of a program manifold of non-autonomous control systems with non-stationary nonlinearities,*Kazakh Mathematical Journal.*19: 4 (2020), 35-46.

[10] Zhumatov S.S. Stability of the program manifold of different automatic indirect control systems, *News Of the Khoja Akhmet Yassawi Kazakh-Turkish International University. Mathematics, physics, computer science series.*-2021. 16: 1 (2021), 69-82.

[11] Zhumatov S.S., Vasilina G., K. The Absolute Stability of Program Manifold of Control Systems with Rigid and Tachometric Feedbacks, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, -2022, 43: 11 (2022), 3344–3351. Pleiades Publishing, Ltd., 2022.

[12] Zhumatov S.S. Mynbayeva S.T. Stability of the program manifold of automatic indirect control systems taking into account the external loads, *Advances in the Theory of Nonlinear Analysis and its Applications*, -2023, 7: 2, (2023), 405-412.

[13] Sailaubay S. Zhumatov, Meiramgul Z. Talipova, Zagira S. Kobeyeva On the absolute stability of automatic control systems in the vicinity of a program manifold, *Kazakh Mathematical Journal.* 22: 2 (2022), 37-47.Published 2024-09.30

[14] Sailaubay S. Zhumatov Transformation of degenerate indirect control system in the vicinity of a program manifold, *Kazakh Mathematical Journal.* 24: 4 (2024), 52-62.Published 2025-01.10
DOI https://doi.org/10.70474/wcda3590

[15] Zhumatov S.S., Kadirbayeva Zh.M., Kobeyeva Z.S. Construction of a set of differential equations systems and stability in the vicinity of a program manifold, *Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science* 123: 3(2024), 48-56. ISSN: 1563-0277.
https://doi.org/10.26577/JMMCS2024-v123-i3-6

[16] A.Tleulesova, S.Zhumatov, L.Zhapsarbayeva Absolute stability of program manifoldof control system with local connections, Bulletin of the National Engineering Academy of the Republic of Kazakhstan 94: 4(2024), 302-309/

3 Математическое моделирование, уравнения математической физики и геометрия

Руководители:	профессор Алексеева Л.А. д.ф.-м.н. Даирбеков Н.С. академик НАН РК Харин С.Н.
Секретарь:	д.ф.-м.н., доцент Бекетаева А.О.

Навье-Стокстың сызықтандырылған есебі

А.А. ЖҰМАШ[1], З.Ө. ӨТКІРҚЫЗЫ[2]

[1,2]*Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан*

[1]zhumash_ayazhan@live.kaznu.kz

Егер u(x,y), v(x,y) және p(x,y) функциялары сәйкес орныққан сығылмайтын сұйық жазық параллель қозғалысының жылдамдық векторлары және қысымы болса, онда олардың Навье-Стокс сызықтық дербес туындылы

$$u_{xx} + u_{yy} = kp_x, v_{xx} + v_{yy} = kp_y, k - const, u_x + v_y = 0. \tag{1}$$

теңдеулер жүйесін қанағаттандыратыны белгілі [1]. Айталық, $G \equiv \{|z| < 1\}$ - сұйық ағыны орналасқан аймақ, ал $\Gamma = \{|z| = 1\}$ - оның шекарасы болсын, $u, v \in C^3(G)$, $p \in C^2(G)$ деген ұйғарымда (1) жүйе келесі жүйеге эквивалентті:

$$(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}) = 0 \tag{2}$$

және (2) теңдеуін келесі түрде

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}(u_y - v_x) = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}), \quad z = x + iy$$

жазу арқылы

$$u_y - v_x = -2i(z\varphi(z))' + 2i\overline{(z\varphi(z))'},$$

екенін табамыз, мұнда $\varphi(z)$ - кез-келген аналитикалық функция.

Сонда (1) теңдеулер жүйесі

$$u_x + v_y = 0, \quad u_y - v_x = -2i(z\varphi(z))' + 2i\overline{(z\varphi(z))'} \tag{3}$$

түріне көшеді. Бұған $\omega = u + iv$ деп белгілеуін енгізіп, (3)-ті

$$\frac{\partial \omega}{\partial z} = -(z\varphi)' + \overline{(z\varphi)'}$$

түрінде жазып, одан

$$\omega(z) = (|z|^2 - 1)\overline{\varphi}' + z(\overline{\varphi} - \varphi) + \overline{\psi}, \tag{4}$$

аламыз [2]. Мұндағы $\psi(z)$ - кез-келген аналитикалық функция.

Келесі түрдегі шекаралық есепті қарастырамыз: Γ шекарасында

$$u = f, \quad \frac{\partial v}{\partial n} = g \tag{5}$$

шарттарын қанағаттандыратын G аймағында (1) теңдеулер жүйесінің регулярлық шешімін табу керек, мұндағы n - Γ шекарасына нормаль, ал f, g - берілген жеткілікті жатық функциялар. (4) өрнек көмегімен (5)-ші есеп φ және ψ функцияларын анықтайтын Шварц есебіне көшеді:

$$\mathrm{Re}(\frac{1 - t^2}{t}\varphi + \psi) = f(t), \quad t \in \Gamma,$$

$$\mathrm{Re}(-i[-(1 + t^2)\varphi' - \frac{1 + t^2}{t}\varphi + t\psi']) = g(t), \quad t \in \Gamma.$$

Бұдан

$$\frac{1 - z^2}{z}\varphi + \psi = i\alpha + Sf,$$

$$\frac{1+z^2}{z}\varphi + (1+z^2)\varphi' - z\psi' = \beta - iSg,$$

мұндағы S — Шварц операторы [3]. φ , ψ функцияларын анықтай отырып және (4)-ке қойып, есеп шешімін табамыз:

$$\omega(z) = (|z|^2-1)\overline{\frac{F(z)}{\overline{z}}} + z\,\mathrm{Im}\left(\frac{1}{z}F(z)\right) - i\alpha + \overline{Sf} + \frac{\overline{z}^2-1}{2\overline{z}}\overline{\int_0^z F(z)\,dz},$$

мұндағы

$$F(z) = -\beta + iSg + z(Sf)'.$$

Кілтті сөздер: Навье Стокс теңдеуі, сұйық жазық параллель қозғалысы, аналитикалық функция, шекаралық есеп.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Qxx, 35J05, 35K05

Әдебиет

[1] Бицадзе А.В. *Некоторые классы уравнений частных производных*, Наука, Москва (1981), 449.

[2] Tokibetov J.A., Abduahitova G.E., Kaparova R.M. On One Representation of Generalized Holomorphic Vector Via the Derivation of Harmonic Functions, *Journal of mathematical sciences*, **272(1)** (2023), 29–37.

[3] Тоқыбетов Ж.Ә. *Аналитикалық функциялар және шекаралық есептер*, Алматы (2008), 130.

Бейлокал диффузия теңдеуі үшін бастапқы-шеттік есебі

С.А. МАМБЕТОВ

Қ.А.Ясауи атындағы ХҚТУ, Түркістан, Қазақстан

Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы, Қазақстан

samat.mambetov@ayu.edu.kz, samatmambetov09@gmail.com

Айталық Ω облысы $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < 1,\ 0 < t < T\}$ болсын, келесі түрдегі теңдеуді

$$\mathcal{D}_{0+}^{\beta}u(x,t) - \mathcal{I}_{0+}^{\alpha}[\mathcal{L}_x u](x,t) = 0, \tag{1}$$

бастапқы және шеттік шарттарымен берілген

$$u(x,0) = \varphi(x) \ \text{ on } \ x \in [0,1], \tag{2}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \ \ 0 \le t \le T, \tag{3}$$

(1)-(3) есебін қарастырамыз. Мұндағы $0 < \alpha < \beta \le 1$ және $\varphi(x)$ үзіліссіз функция.

Мұндағы $\mathcal{I}_{0+}^{\alpha}$ Риман-Лиувилл мағынасындағы бөлшек $\alpha > 0$ ретті интегралдау операторы

$$\mathcal{I}_{0+}^{\alpha}u(x,t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1}u(x,s)\,ds, \ \ t \in (0,T],$$

және $\mathcal{D}_{0+}^{\beta}$ операторы Капуто мағынасындағы $\beta \in (0,1)$ ретті туындысы

$$\mathcal{D}_{0+}^{\beta}u(x,t) = \mathcal{I}_{0+}^{1-\beta}\left[\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)\right] = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\int\limits_0^t (t-s)^{-\beta}\frac{\partial}{\partial s}u(x,s)\,ds.$$

Келесідей инволюциялы операторды енгіземіз

$$\mathcal{L}_x u(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) + \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(1-x,t),$$

мұндағы $\varepsilon \geq 0$.

Теорема 1. *Айталық* $\varphi(x) \in C[0,1]$, $\varphi'(x) \in L_2(0,1)$ *болсын, онда* $(1)-(3)$ *есебінің* $u(x,t) \in C(\overline{\Omega})$ *жалғыз шешімі келесідей анықталады*

Қорытынды 2. *Бұл жұмыста негізгі нәтижелерге бөлшек операторлармен байланысты белгілі қасиеттері және классикалық шешімін құру мәселесі кіреді. Негізгі тұжырымдар шешімнің нақты формасын беретін теореманың көмегімен жинақталады. Шешім екі параметрлі Миттаг-Леффлер Функциясы қамтитын қатар түрінде өрнектеледі.*

Қаржыландыру: Бұл зерттеуді Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім Министрлігінің Ғылым комитеті (грант № AP23483960) қаржыландырады.

Кілтті сөздер: диффузия теңдеуі, Капуто мағынасындағы бөлшек ретті туынды.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

Әдебиет

[1] Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, North-Holland Mathematics Studies (2006).

[2] Kirane Al-Salti, M., Torebek B.T. On a class of inverse problems for a heat equation with involution perturbationl, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, **48**:3 (2019), 669–681.

[3] Ashyralyev A., Sarsenbi A.M. Well-Posedness of a parabolic equation with involution, *Numerical Functional Analysis and Optimization*, **38** (2017), 1295–1304.

Қисық сызықты координаталардағы Навье-Стокс теңдеулерімен каталитикалық нейтрализаторды математикалық және компьютерлік модельдеу

Н.М. ТЕМИРБЕКОВ[1], А. ҚЕРІМАҚЫН[2]

[1]*Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан*

[1]ntemirbekov314@gmail.com, [2]ainur-china@mail.ru

Математикалық модель

Каталитикалық нейтрализатордың шекарасы тегіс, қисық сызықты облыстарда стационарлы емес ағынды сипаттау үшін цилиндрлік координаталардағы Навье-Стокс теңдеулер жүйесін келесі түрде жазуға болады[1].

Теңдеулер жүйесі ток функциясы, жылдамдық ирімі айнымалыларында болғандықтан, үзіліссіздік теңдеуі автоматты түрде орындалады:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u\frac{\partial \omega}{\partial x} + v\frac{\partial \omega}{\partial r} = \frac{1}{Re}\left(\Delta\omega + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\omega}{r}\right)\right) - \operatorname{div}\left(\frac{k_P}{r}\operatorname{grad}\psi\right) - \frac{Gr}{Re^2}\frac{\partial \theta}{\partial x}, \tag{1}$$

$$\operatorname{div}\left(\frac{1}{r}\operatorname{grad}\psi\right) = \omega, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \frac{\partial (u\varphi_i)}{\partial x} + \frac{\partial (v\varphi_i)}{\partial r} = \operatorname{div}\left(\frac{D_i}{r}\operatorname{grad}\varphi_i\right), \tag{3}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u\frac{\partial \theta}{\partial x} + v\frac{\partial \theta}{\partial r} = \frac{1}{Pe\,Pr}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\theta}{r}\right)\right) + \frac{NuF}{Pe\,Pr}(T-\theta), \tag{4}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{1}{Pe\,Pr}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial x}\left(k_T r\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial r}\left(k_T r\frac{\partial T}{\partial r}\right)=\frac{NuF}{Pe\,Pr}(T-\theta), \tag{5}$$

мұндағы

$$u=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r},\quad v=-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial x},\quad \omega=\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{6}$$

$$k_P=\begin{cases}0, & \text{егер}\quad (x,r)\in\Omega_1\cup\Omega_3,\\ k_0(x,r), & \text{егер}\quad (x,r)\in\Omega_2.\end{cases} \tag{7}$$

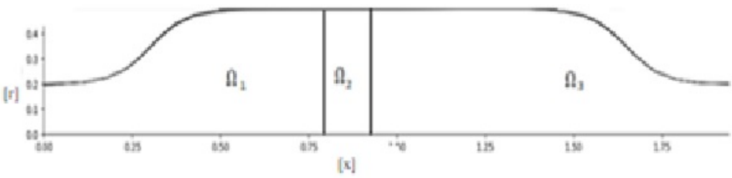


Рис. 1: Зерттеу облысы

Кілтті сөздер: Навье-Стокс теңдеулері, каталитикалық нейтрализатор, қисық сызықты координаталар, сандық модельдеу.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

Әдебиет

[1] Temirbekov N.M., *Approximate methods for solving viscous fluid equations in areas with complex geometry*, Almaty (2000), 143 p.

Нормализованный поток Риччи на пространствах Штифеля

Н.А. Абиев

Институт математики НАН КР, Бишкек, Кыргызстан

abievn@mail.ru

Пусть G/H — пространство Штифеля $\mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(n-2)$ с соответствующими алгебрами Ли $\mathfrak{g},\mathfrak{h}$ и разложением $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{p}$, где $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}_1\oplus\mathfrak{p}_2\oplus\mathfrak{p}_3$ — ортогональное дополнение к $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$ относительно скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle=-B(\cdot,\cdot)$, определенного на $\mathfrak{g}$ с помощью формы Киллинга B. В работе [3] доказано, что всякая инвариантная метрика на G/H может быть определена в виде суммы

$$(\cdot,\cdot)=x_1\langle\cdot,\cdot\rangle|_{\mathfrak{p}_1}+x_2\langle\cdot,\cdot\rangle|_{\mathfrak{p}_2}+x_3\langle\cdot,\cdot\rangle|_{\mathfrak{p}_3}\,, \tag{1}$$

где $x_1,x_2,x_3>0$. Тензор Риччи и скалярная кривизна такой метрики имеют вид $\mathrm{Ric}_{\mathbf{g}}(\cdot,\cdot)=x_1\mathbf{r}_1\langle\cdot,\cdot\rangle|_{\mathfrak{p}_1}+x_2\mathbf{r}_2\langle\cdot,\cdot\rangle|_{\mathfrak{p}_2}+x_3\mathbf{r}_3\langle\cdot,\cdot\rangle|_{\mathfrak{p}_3}$ и $S_{\mathbf{g}}=d_1\mathbf{r}_1+d_2\mathbf{r}_2+d_3\mathbf{r}_3$, где $\mathbf{r}_i$ — главные значения кривизны Риччи, $d_1=\dim\mathfrak{p}_1=n-2=\dim\mathfrak{p}_2=d_2$ и $d_3=\dim\mathfrak{p}_3=1$ с $d=2n-3$ (детали в [2, 4]). Пусть $\mathscr{R}_+$ множество метрик (1), имеющих положительную кривизну Риччи. В [1] доказана следующая теорема:

Теорема. В пространствах Штифеля $\mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(n-2)$, $n\geq 3$, нормализованный поток Риччи $\dot{\mathbf{g}}(t)=-2\,\mathrm{Ric}_{\mathbf{g}}+2d^{-1}\mathbf{g}(t)S_{\mathbf{g}}$ сохраняет метрики из $\mathscr{R}_+$ в $\mathscr{R}_+$; более того, любую метрику (1), не принадлежащую $\mathscr{R}_+$, переносит в $\mathscr{R}_+$ за конечное время.

Ключевые слова: пространства Штифеля, риманова метрика, нормализованный поток Риччи, кривизна Риччи.

2020 Mathematics Subject Classification: 53C30, 53E20, 37C10, 37C79

Литература

[1] Abiev N. The Ricci curvature and the normalized Ricci flow on the Stiefel manifolds $\mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(n-2)$, *arXiv*: 2412.03170 (2024) (Preprint).

[2] Arvanitoyeorgos A. Homogeneous Einstein metrics on Stiefel manifolds, *Comment. Math. Univ. Carolin.*, **37**:3 (1996), 627–634.

[3] Kerr M.M. New examples of homogeneous metrics, *Michigan Math. J.*, **45**:1 (1998), 115–134.

[4] Statha M. Ricci flow on certain homogeneous spaces, *Ann. Glob. Anal. Geom.*, **62**:1 (2022), 93–127.

Тензор Грина вибротранспортных уравнений Максвелла и его свойства при досветовых скоростях

Л.А. АЛЕКСЕЕВА[1], И.А. КАНЫМГАЗИЕВА[2]

[1,2]*Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*
[2]*Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан*
[1]alexeeva47@mail.ru, [2]kanymgazy1@gmail.com

Уравнения Максвелла играют важную роль в электродинамике и описании процессов распространения электромагнитных волн в различных средах, порождаемых электрическими токами и зарядами. Среди источников ЭМ волн весьма распространёнными являются подвижные, поэтому построение решений этих уравнений при действии подвижных источников излучения является актуальной научно-технической задачей. При анализе решений этих уравнений учитывается влияние частот колебаний (длин ЭМ волн) и скорости движения источников излучения на структуру электромагнитных полей и изменения, которые происходят в зависимости от отношения скорости движения к скорости света.

Авторами построены транспортные решения уравнений Максвелла во всём диапазоне скоростей от досветовых до сверхсветовых [1,2]. Здесь рассматривается система вибротранспортных уравнений Максвелла при действии движущихся в направлении оси x_3 с постоянной скоростью V зарядов и токов вида:

$$(j^E(x,t), j^H(x,t)) = (j^E(x_1,x_2,x_3-Vt), j^H(x_1,x_2,x_3-Vt))e^{i\omega t} \triangleq \mathbf{J}(x_1,x_2,x_3-Vt)e^{i\omega t},$$
$$\rho^E(x,t) = \varepsilon \operatorname{div} E(x,t), \quad \rho^H(x,t) = \mu \operatorname{div} H(x,t) \quad (1)$$

с частотой излучения ω. Соответственно, решения уравнений Максвелла строятся в подобном виде:

$$(E(x,t), H(x,t)) = (E(x_1,x_2,x_3-Vt), H(x_1,x_2,x_3-Vt))e^{i\omega t} \triangleq \mathbf{u}(x_1,x_2,x_3-Vt)e^{i\omega t},$$

где $E(x,t), H(x,t)$ - векторы электрической и магнитной напряжённости ЭМ поля, $j^E(x,t)$, $j^H(x,t)$ - векторы плотности электрических и 'магнитных' токов, $c = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$- скорость распространения ЭМ в среде. В подвижной системе координат $x_1, x_2, z = x_3 - Vt$ уравнения Максвелла для комплексных амплитуд токов примут вид:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} - \left(\frac{V\partial}{\partial z} - i\omega\right)\mu H_x = j_x^m,$$
$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} - \left(\frac{V\partial}{\partial z} - i\omega\right)\mu H_y = j_y^m,$$
$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} - \left(\frac{V\partial}{\partial z} - i\omega\right)\mu H_z = j_z^m \quad (2)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z}-(\frac{V\partial}{\partial z}-i\omega)\varepsilon E_x=j_x^e,$$
$$\frac{\partial H_x}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial x}-(\frac{V\partial}{\partial z}-i\omega)\varepsilon E_y=j_y^e,$$
$$\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}-(\frac{V\partial}{\partial z}-i\omega)\varepsilon E_z=j_z^e \quad (3)$$

Эта система уравнений достаточна для определения ЭМ поля при заданных токах. Соотвествующие заряды определяются уравнениями Максвела для зарядов (1). Используя преобразование Фурье построен тензор Грина $\mathbf{U}(x_1,x_2,z)$ уравнений (2),(3) — матрица фундаментальных решений (2), (3) при $\mathbf{J}(x_1,x_2,z)=\delta(x_1)\delta(x_2)\delta(z)(\delta_{ij})_{6\times 6}$, удовлетворяющая условиям излучения на бесконечности. Она удовлетворяет матричному уравнению:

$$\mathbf{M}_{V\omega}(\partial_1,\partial_2,\partial_z)\times\mathbf{U}(x_1,x_2,z)=\delta(x_1)\delta(x_2)\delta(z)(\delta_{ij})_{6\times 6} \quad (4)$$

Здесь $\mathbf{M}_{V\omega}(\partial_1,\partial_2,\partial_z)$ - дифференциальный оператор уравнений (2), (3) $\delta(x_1)\delta(x_2)\delta(z)$ - сингулярная дельта-функция, $(\delta_{ij})_{6\times 6}$ - символ Кронекера. Ее компоненты по столбцам имеют следующий вид:

$$(\mathbf{U}_{m.1})=\begin{bmatrix}0\\-\partial_z f(x,z)\\\partial_2 f(x,z)\\D(\partial_1,\partial_2,\partial_z)f_1(x,z)(i\varepsilon)^{-1}\\\partial_1,\partial_2 f_1(x,z)(i\varepsilon)^{-1}\\\partial_1,\partial_z f_1(x,z)(i\varepsilon)^{-1}\end{bmatrix},(\mathbf{U}_{m.2})=\begin{bmatrix}\partial_z f(x,z)\\0\\-\partial_1 f(x,z)\\\partial_1,\partial_2 f_1(x,z)(i\varepsilon)^{-1}\\D(\partial_1,\partial_2,\partial_z)f_1(x,z)(i\varepsilon)^{-1}\\\partial_2,\partial_z f_1(x,z)(i\varepsilon)^{-1}\end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$(\mathbf{U}_{m.3})=\begin{bmatrix}-\partial_2 f(x,z)\\\partial_1 f(x,z)\\0\\\partial_1,\partial_z f_1(x,z)(i\varepsilon)^{-1}\\\partial_2,\partial_z f_1(x,z)(i\varepsilon)^{-1}\\D(\partial_1,\partial_2,\partial_z)f_1(x,z)(i\varepsilon)^{-1}\end{bmatrix},\quad (\mathbf{U}_{m.4})=\begin{bmatrix}-D(\partial_1,\partial_2,\partial_z)f_1(x,z)(i\mu)^{-1}\\-\partial_1,\partial_2 f_1(x,z)(i\mu)^{-1}\\-\partial_1,\partial_z f_1(x,z)(i\mu)^{-1}\\0\\-\partial_z f(x,z)\\\partial_2 f(x,z)\end{bmatrix},$$

$$(\mathbf{U}_{m.5})=\begin{bmatrix}-\partial_1,\partial_2 f_1(x,z)(i\mu)^{-1}\\-D(\partial_1,\partial_2,\partial_z)f_1(x,z)(i\mu)^{-1}\\-\partial_2,\partial_z f_1(x,z)(i\mu)^{-1}\\\partial_z f(x,z)\\0\\-\partial_2 f(x,z)\end{bmatrix},\quad (\mathbf{U}_{m.6})=\begin{bmatrix}-\partial_1,\partial_z f_1(x,z)(i\mu)^{-1}\\-\partial_2,\partial_z f_1(x,z)(i\mu)^{-1}\\-D(\partial_1,\partial_2,\partial_z)f_1(x,z)(i\mu)^{-1}\\-\partial_2 f(x,z)\\\partial_1 f(x,z)\\0\end{bmatrix}.$$

Здесь введены обозначения:

$$\partial_j=\frac{\partial}{\partial x_j},\quad D(\partial_1,\partial_2,\partial_z)=(1-M){\partial_z}^2 2wMi\partial_z+w^2,\quad w=\frac{\omega}{c},$$

$$f(x,z)=\frac{\exp(-iwm^{-2}Mz)}{4\pi\sqrt{z^2+m^2r^2}}\exp(\frac{iw}{m^2})\sqrt{z^2+m^2r^2},\quad f_1(x,z)=0.5sgn(z)\int_0^z f(x,z-\zeta)d\zeta.$$

При построении решений использовались вибротранспортные решения волнового уравнения, построенные в [3].

Используя свойство тензора Грина построены вибротранспортные решения уравнений Максвелла, удовлетворяющие условиям излучения на бесконечности. Они имеют вид тензорно-функциональных свёрток вида:

$$\mathbf{u}(x_1,x_2,z)=\mathbf{U}(x_1,x_2,z)*\mathbf{J}(x_1,x_2,z) \quad (6)$$

Для регулярных $\mathbf{J}(x_1, x_2, z)$ эту формулу можно представить в интегральном виде:

$$\mathbf{u}(x_1, x_2, z) = \int_{R^3} \mathbf{U}(x_1 - y_1, x_2 - y_2, z - y_3) \times \mathbf{J}(y_1, y_2, y_3) dy_1 dy_2 dy_3.$$

Для сингулярных функций, описывающих сосредоточенные на поверхностях и линиях заряды и токи следует брать свёртки согласно правилам свёрток, в пространстве обобщённых функций [4]. Построенные решения можно использовать при расчётах ЭМ полей электромагнитных излучателей в диапазоне досветовых скоростей: $V < c$.

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № AP19674789).

Ключевые слова: уравнение Максвелла, тензор Грина, вибротранспортное уравнение, досветовая скорость.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

Литература

[1] Алексеева Л.А., Канымгазиева И.А. Транспортные уравнения Максвелла, их фундаментальные и обобщённые решения при постоянной скорости движения источника излучения, *Журнал технической физики*, **69**:4 (2024), 539–546.

[2] Алексеева Л.А., Канымгазиева И.А. Транспортные решения уравнений Максвелла при сверхсветовых скоростях. Ударные электромагнитные волны, *Журнал технической физики*, **94**:11 (2024), 1767–1776.

[3] Алексеева Л.А. Дозвуковые вибротранспортные решения волнового уравнения в пространствах размерности N=1,2,3 , *Известия НАН РК. Серия физико-математическая*, **4** (2024), 42–59.

[4] Владимиров В.С. *Обобщённые функции в математической физике*, Наука, Москва (1976).

Геометрия полуевклидовых пространств

А. АРТИКБАЕВ

[1] *Ташкентский Государственный Транспортный Университет, Ташкент, Узбекистан*

aartykbaev@mail.com

В следующем году исполнится 200-лет появлению неевклидовой геометрии.

Впервые появившаяся неевклидова геометрия называется геометрией Лобачевского, в честь имени его создателя Н.И. Лобачевского. Эта геометрия дала бурное развитие различным неевклидовым геометриям. Разнообразия неевклидовых геометрии изложена в монографии “Неевклидова пространства” Бариса Абрамовича Розенфельда [1]. Одним из очень развитой и много применяемой геометрией является геометрия пространства Лоренца, то есть геометрия пространства Минковского [2].

Основы теории неевклидовых пространств Б.А. Розенфельдом строился на псевдоримановом пространстве.

Конце XX века появился понятие “псевдомногобразия”- рассматриваемая как объект псевдоевклидова пространства [3].

Напомним определение псевдоевклидова пространства

Пусть A_n — аффинное n-мерное пространство с аффинной системой координат $O\{e_1,\, e_2,\, e_3,\, \ldots e_n\}$.

Дана векторы $\bar{X}\,\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $\bar{Y}\,\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ с аффинными координатами.

Определение 1. Аффинное пространство A_n, где скалярное произведение векторов определена по формуле:

$$\left(\bar{X}, \bar{Y}\right) = -x_1 y_1 - x_2 y_2 - \ldots - x_l y_l + x_{l+1} y_{l+1} + \ldots + x_n y_n \tag{1}$$

называется псевдоевклидовым пространством ${}^{l}R_n$.

Норма вектора определяется как корень от скалярного квадрата вектора и расстояния между точками пространства определяется как норма вектора соединяющие эти точки. Очевидно расстояние не является положительно определенным [1].

В псевдоевклидовом пространстве существуют подпространства, где формула расстояния вырождается, то есть при определении расстояния не участвует все координаты точек пространства. Это очевидно связано с вырождением скалярного произведении (1).

Действительно в подпространстве:

$$M\left(x_1, x_1 \ldots, x_l,\ x_1 + x_2 + \ldots + x_l, x_{l+1} + \ldots + x_{l+k}\right) \in {}^{l}R_{2l+k}.$$

Скалярное произведение векторов $\bar{X}$ и $\bar{Y} \in {}^{l}R_{2l+k}$ имеет вырожденный вид:

$$\left(\bar{X}, \bar{Y}\right) = x_{l+1}y_{l+1} + \ldots + x_{2l+k}y_{2l+k} \tag{2}$$

Это скалярное произведение k-мерного евклидова пространства R_k[1]. Расстояние, определяемое формулой (2) — также вырожденное.

Причем когда это расстояние равно нулю, точки могут быть различимыми.

Причем расстояние между ними зависит от координат $\{x_1, x_2, \ldots, x_l\}$.

Таким образом, появляется на подпространство M — геометрия названной полуевклидовым пространством ${}^{m}R_{l+m}$.

С начала XXI века развиваются геометрии различных полуевклидовых пространств.

Изложение основ полуевклидовой геометрии и полученных новых результатов по этой теории приведено в монографиях [4].

Решение одной задачи геометрии "в целом"в полуевклидовых пространств изложена в работе [5].

Ключевые слова:псевдоевклидово пространство, полуевклидовых пространств, галилеево пространство, изотропное пространство.

2010 Mathematics Subject Classification: 53A35;

Литература

[1] Розенфельд Б.А. *Неевклидовы пространства*, Москва, Наука, (1969), - 548 стр.

[2] Bang-Yen Chen *Pseudo-Riemannian geometry, $\delta-$ invariants and applications.* World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. (2010). 510 pp.

[3] Couto I.T., Lymberopoulos A. *Intoduction to Lorentz geometry curves and surfaces*,Taylor and Francis Group,2022, 1-335 pp.

[4] Артикбаев А., Султанов Б., Исмоилов Ш. *Геометрия полуевклидова пространства: изотропная и галилеева:*, Khwarezm publication, Узбекистан, 2024, 252 стр.

[5] Артикбаев А. Восстановление выпуклых поверхностей по внешней кривизне в Галилеевом пространстве, *Мат.сб. ДАН СССР*, т. 119(161), 12 (10), (1982), 204-224 стр.

Численное решение обратной задачи модели конкуренции двух фирм методом градиентного спуска

З.А. АРШИДИНОВА

Казахский Национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан

zilyamkhan02@gmail.com

Для решения обратной задачи применяется метод градиентного спуска. Основная идея метода состоит в последовательном уменьшении значения функционала невязки, который определяется как:

$$J(\theta) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - f(x_i, \theta))^2,$$

где $f(x_i, \theta)$ — решение прямой задачи для текущего значения параметра θ, а y_i — "измеренные данные".

Для вычисления градиента функционала $J(\theta)$ используется численный метод, поскольку аналитическое выражение производной получить затруднительно. Численный градиент приближённо рассчитывается следующим образом:

$$\frac{\partial J}{\partial \theta} \approx \frac{J(\theta + \varepsilon) - J(\theta)}{\varepsilon},$$

где ε — малый шаг, обеспечивающий точность приближения. Итерационный процесс обновления параметра θ описывается формулой:

$$\theta_{k+1} = \theta_k - \alpha \frac{\partial J}{\partial \theta},$$

где α — шаг метода, определяющий скорость сходимости. Процесс продолжается до тех пор, пока абсолютное значение градиента не станет меньше заданной точности δ, что свидетельствует о достижении минимума функционала $J(\theta)$.

В результате численного анализа была решена обратная задача для определения неизвестного параметра методом градиентного спуска с точностью δ. Численные расчёты выполнены с использованием среды MATLAB. Алгоритм продемонстрировал высокую эффективность и точность. Сходимость была достигнута на 12-й итерации, что свидетельствует о быстроте и эффективности метода. Найденное значение параметра θ совпало с истинным значением, что подтверждает корректность работы алгоритма.

Построенный алгоритм показал свою эффективность и может быть использован для решения более сложных задач. На следующем этапе рассмотрим исследование методов для моделей с несколькими параметрами, а также изучение задач с наличием шума в данных для проверки устойчивости метода.

Ключевые слова: модель конкуренции, обратная задача, метод градиентного спуска, функционал невязки, минимизация функционала.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

Литература

[1] Serovajsky S. “Mathematical Modelling”. CRC Press, 2022. 435 p.

[2] Hairer, E., Norsett, S. P., & Wanner, G. “Solving ordinary differential equations I: Nonstiff problems”. Springer-Verlag. 1993.

[3] Jerry J. Liu, Dah Ming Chiu. “Mathematical Modeling of Competition in Sponsored Search Market”. NetEcon, 2010.

Конечно-разностный метод решения трехмерной обратной задачи акустики

Г.Б. БАКАНОВ[1], И. ОРАЗОВ[2], Б.Т. САРСЕНОВ[3]

[1,2,3]*Международный казахско-турецкий университет им. Х.А.Ясави, Туркестан, Казахстан*

[1]galitdin.bakanov@ayu.edu.kz, [2]isabek.orazov@ayu.edu.kz,
[3]bakytbek.sarsenov@ayu.edu.kz

В работе рассматривается трехмерная обратная задача акустики, когда неизвестные параметры среды зависят не только от пространственных переменных, но и от времени. Пользуясь методикой, предложенных в [1], [2], разработан конечно-разностный метод численного решения обратной задачи акустики.

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № AP19678469).

Ключевые слова: обратная задача акустики, параметры среды, пространственные и временные переменные, конечно-разностный метод.

2010 Mathematics Subject Classification: 35R30, 65N06

Литература

[1] Кабанихин С.И. *Проекционно-разностные методы определения коэффициентов гиперболических уравнений*, Наука. Сибирское отделение, Новосибирск (1988).

[2] Kabanikhin S.I., Shishlenin M.A. Theory and numerical methods for solving inverse and ill-posed problems, *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, **27**:3 (2019), 453–456.

Итерационный метод Якоби решения трехмерной обратной задачи акустики

Г.Б. БАКАНОВ[1], М.А. СУЛТАНОВ[2], Р.Ж. ТУРЕБЕКОВ[3]

[1,2,3]*Международный казахско-турецкий университет им. Х.А.Ясави, Туркестан, Казахстан*

[1]galitdin.bakanov@ayu.edu.kz, [2]murat.sultanov@ayu.edu.kz,
[3]rauan.turebekov@ayu.edu.kz

В работе рассматривается трехмерная обратная задача акустики, когда неизвестные параметры среды зависят не только от пространственных переменных, но и от времени. Пользуясь методикой, предложенных в [1], [2], разработан алгоритм итерационного метода Якоби для численного решения обратной задачи акустики.

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № AP19678469).

Ключевые слова: обратная задача акустики, параметры среды, пространственные и временные переменные, итерационный метод Якоби.

2010 Mathematics Subject Classification: 35R30, 65N06

Литература

[1] Кабанихин С.И. *Проекционно-разностные методы определения коэффициентов гиперболических уравнений*, Наука. Сибирское отделение, Новосибирск (1988).

[2] Kabanikhin S.I., Shishlenin M.A. Theory and numerical methods for solving inverse and ill-posed problems, *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, **27**:3 (2019), 453–456.

Об одной краевой задаче для уравнения четвертого порядка составного типа

К.С. ГАЗИЕВ

Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан

goziyevqobiljon@gmail.com

В односвязной области $D \subset R^2$, ограниченной гладким жордановым контуром Γ рассмотрим уравнение

$$\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\beta\frac{\partial}{\partial y}\right)^2(u_{xx}+u_{yy})+c(x,y)u(x,y)=0, \tag{1}$$

где $\alpha,\beta=const$, причем $\alpha^2+\beta^2\neq 0$.

Считаем, что Γ обладает следующими свойствами:

а) характеристики $\beta x-\alpha y=l$, где $-\infty<l_1<l<l_2<+\infty$ пересекают контур Γ в двух точках, причем эти характеристики не касаются Γ; характеристики $\beta x-\alpha y=l_1$ и

$\beta x-\alpha y=l_2$ имеют с контуром Γ единственные общие точки (касания) - $N_1(x_1,y_1)$ и $N_2(x_2,y_2)$ соответственно, а характеристики $\beta x-\alpha y=l$ при $l<l_1$ и $l>l_2$ общих точек с Γ не имеют.

б) функции $x=x(s)$, $y=y(s)$ определяющие параметрическое уравнение кривой Γ, непрерывны вместе со своими производными до второго порядка включительно, причем $x'^2(s)+y'^2(s)\neq 0$.

Через Γ_1 обозначим ту часть Γ которая получается при движении от точки N_1 к точке N_2 в положительном направлении (т.е. против часовой стрелки), а через $\Gamma_2=\Gamma\backslash\Gamma_1$

Задача N. Найти решение $u(x,y)\in C^4(D)\bigcap C^2(\bar{D})$ уравнения (1) удовлетворяющее краевым условиям

$$u(x,y)=f_1(x,y),\quad \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial n^2}=f_2(x,y),\quad (x,y)\in\Gamma \tag{2}$$

здесь $f_1(x,y), f_2(x,y), c(x,y)$ - заданные функции, n-внешняя нормаль к Γ.

Отметим, что различные краевые задачи для уравнения (1) при $\beta=0$ были изучен в работе [1] и при $\beta\neq 0$, $c(x,y)=0$ рассмотрено в работе [2].

Доказано теорема единственности методом интегралов энергии, а существования решения доказывается с использованием методов интегральных уравнении.

Ключевые слова: метод интегралов энергии, метод интегральных уравнений.

2010 Mathematics Subject Classification: 35J40

Литература

[1] Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнения и смешанного и смешанно составного типов. Ташкент: Фан, 1979.

[2] Газиев К.С. Задача Дирихле для уравнения четвертого порядка составного типа //ДАН РУ. 1995. № 11-12. С. 4–7.

Эффективная проводимость дисперсных волокнистых композитов

Ж.Х. ЖУНУСОВА[1], В.В. МИТЮШЕВ[2]

[1]*Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан*
[1,2]*Институт математики и математического моделирования МНВО, РК*
[2]*Краковский политехнический университет, Краков, Польша*
[1]zhunusova@math.kz, [2]wladimir.mitiuszew@pk.edu.pl

Одной из основных проблем в производстве композитных материалов является определение геометрических параметров композитных структур из-за их существенного влияния на эффективные свойства материала [1,2]. Качественные описания структур, которые чаще всего используются для этой цели, недостаточны, особенно в контексте оптимизации процесса изготовления. Однако нет возможности провести их сравнение в параметризованном виде. Это лишь процедура количественного анализа композитных структур на основе аналитической теории RVE [3], которая позволяет определить параметры, характеризующие изменения в структуре композитного материала, произошедшие в результате технологического процесса. Разработанная методика позволяет проводить количественный анализ структуры композита с оценкой эффектов в результате примененного технологического процесса как в первом приближении на уровне концентрации армирующей фазы, так и в более высоких порядках приближения, например, для определения коэффициента анизотропии, включая эффекты в микро- и макромасштабах.

В настоящей работе мы расширяем аналитический метод RVE и вычисляем члены высокого порядка эффективной проводимости.

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № AP23486576).

Ключевые слова: эффективная проводимость, волокнистые материалы, функция Эйзенштейна, композиты, случайные среды, стационарная теплопроводность, диэлектрическая проводимость.

2010 Mathematics Subject Classification: 93A30, 00A72

Литература

[1] Andrianov I.V., Awrejcewicz J., Starushenko G.A. *Approximate models of mechanics of composites: an asymptotic approach*, CRC Press, London (2023).

[2] Andrianov I.V., Awrejcewicz J. *Asymptotic methods for engineers*, CRC Press, London (2024).

[3] Gluzman S., Mityushev V., Nawalaniec W. *Computational analysis of structured media*, Academic Press, London (2017).

Методы и алгоритмы стабилизации движения: задачи, подходы и решения

Л.Х. ЖУНУСОВА[1], Т.Ғ. ХАФИЗ[2]

[2]*Казахский национальный исследовательский технический университет им.К.Сатпаева Алматы, Казахстан*

[1,2]*Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*

[1]*Казахский национальный педагогический университет им.Абая, Алматы, Казахстан*

[1]trrkhfz@gmail.com, [2]zhunusova@abaiuniversity.edu.kz

Рассмотрим линейную нестационарную систему

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)u, x(t_0) = x_0, t \in [t_0, T) \tag{1}$$

где $A(t)$, $B(t)$ — матрицы размерности $n \times n$ и $n \times r$, соответственно, элементами которой являются кусочно-непрерывные действительные функции времени. В частности, A и B могут быть постоянными матрицами или $A(t)x$ не имеет особую точку $(t, x) = (T, x(T) = 0)S_0^0$ типа. Множество $U \in E^n$, т.е. ограничения на управления отсутствует. Пусть $\Phi(t)$ фундаментальная матрица решений системы:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x. \tag{2}$$

Тогда матрица $\Phi(t)$ можно определить из матричного дифференциального уравнения

$$\Phi(t) = A(t)\Phi(t), \Phi(t_0) = E_n. \tag{3}$$

Составляем матрицу $\Phi(t,\tau) = \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)$, определяемую из матричного дифференциального уравнения вида:

$$\frac{d}{dt}\Phi(t,\tau) = A(t)\Phi(t,\tau), \Phi(t,\tau) = E_n \tag{4}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Управление вида:*

$$u^0(t,x) = -B^*K(t)x, t \in [t_0, T), \tag{5}$$

$$K(t) = W^{-1}(t,x), t \in [t_0, T), \tag{6}$$

$$W(t,T) = \int_t^T \Phi(t,\tau)B(\tau)B^*(\tau)\Phi^*(t,\tau)d\tau, \tag{7}$$

$\Phi(t,\tau)$ *является решением системы (4),* $W(t_0,T)$ *- положительно-определенная матрица, осуществляет стабилизацию движения системы (1) на конечном отрезке времени.*

Заметим, что матрицу $W(t,T)$ можно определить как решение матричного дифференциального уравнения вида

$$\frac{dW(t,T)}{dt} = A(t)W(t,T) + W(t,T)A^*(t) - B(t)B^*(t), W(t,T) = 0. \qquad (8)$$

Интегрирование этого дифференциального уравнения позволяет найти матрицу $W(t,T)$ без предварительного определения фундаментальной матрицы $\Phi(t)$ решений однородного дифференциального уравнения (2). Управление (5) с другой стороны совпадает с программным управлением:

$$u(t) = -Q^*(t)R^{-1}(t_0,T)x_0, Q(t) = \Phi^{-1}(t)B(t)R(t,T) = \int_t^T Q(\tau)Q^*(\tau)d\tau, R(t_0,T) > 0 \qquad (9)$$

При этом $x(t) = \Phi(t)R(t,T)R^{-1}(t_0,T)x_0$, $x(T) = 0$. Выбирая T и x можно положить ограничение на управление (5) Тогда управление типа (5) также решает задачу о стабилизации движения системы (1) при ограниченном управлении. Рассмотрение таких систем возникло из необходимости решения задач математического моделирования из области биологии, генетики, химии и медицины.

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № AP23486576).

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, управление, стабилизация движения,нестационарные системы, решение.

2010 Mathematics Subject Classification: 34H05, 34H15

Литература

[1] Красовский А.Н. Control under Lack of Information , Birkhause, Springer-Verlag New York Inc. (1994).

[2] Курагин Л.Г., Островская И.В. Элементы теории устойчивости , Южный Федеральный университет, Ростов –на-Дону, (2016).

[3] Бияров Т.Н. Об устойчивости нелинейных систем с постоянно действующими возмущениями и динамическими системами , Изд-во КазГУ, Алма-Ата (1987).

Функция Грина уравнения Клейна – Гордона при досветовых скоростях движения источника излучения

Г.К. ЗАКИРЬЯНОВА[1], А.С. БАЕГИЗОВА[2]

[1]*Институт механики и машиноведения им. У.А. Джолдасбекова, Алматы, Казахстан*

[1,2]*Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*

[2]*Евразийский Национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан*

[1]gulmzak@mail.ru, [2]seisenbekovna60@gmail.com

Изучение волновых процессов в физических полях и средах приводит к решению дифференциальных уравнений в частных производных и краевых задач для них. Среди действующих источников возмущений особое место занимают транспортные, движущиеся в среде с определенной скоростью, форма которых не меняется с течением времени. При этом скорость движения источника излучения существенно влияет на тип дифференциальных уравнений, параметрически зависящих от отношения скорости движения к звуковой скорости.

Здесь представлено построение и исследование функции Грина — фундаментальных решений уравнения Клейна-Гордона в пространствах размерности $N = 1, 2, 3$ при действии источника излучения, движущегося с досветовой скоростью. Приведены результаты численных расчетов полученных решений.

Уравнение Клейна – Гордона [1-3] — уравнение квантовой механики, являющееся обобщением волнового уравнения, имеет вид

$$\Delta u(x,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + p^2 u(x,t) = G(x,t), \quad x \in R^N, \quad t \in R^1 \tag{1}$$

Рассматривается класс решений в предположении, что излучатель волн движется с постоянной скоростью v вдоль оси x_3 в противоположном направлении и его форма не зависит от времени: $G(x,t) = G(x_1, x_2, x_3 + vt)$. В подвижной системе координат, связанной с источником, с учетом обозначений $z = x_3 + vt$, $M = v/c$, уравнение (1) записывается следующим образом:

$$\frac{\partial^2 u(x,z)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u(x,z)}{\partial {x_2}^2} + (1 - M^2)\frac{\partial^2 u(x,z)}{\partial z^2} + p^2 u(x,z) = G(x,z), \quad x \in R^{N-1}, \quad z \in R^1 \tag{2}$$

Тип уравнения (2) эллиптический при досветовых скоростях движения источника излучения ($M < 1$), гиперболический — при сверхсветовых ($M > 1$). При световых скоростях $M = 1$, уравнение становится параболическим. Последнее влияет на постановку модельных краевых задач и методы их решения. Для волнового уравнения это показано в [4].

В работе использованием обобщенного преобразования Фурье построены функции Грина — фундаментальные решения уравнения Клейна-Гордона в пространствах размерности $N = 1, 2, 3$ и исследованы их свойства при действии источника излучения, движущегося с досветовой скоростью. Приведены результаты численных расчетов полученных решений. Представлены графики функции Грина в пространствах размерности $N = 1, 2, 3$ при действии источника излучения, движущегося с различной досветовой скоростью.

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № AP19674789).

Ключевые слова: уравнение Клейна-Гордона, волновое уравнение, фундаментальное решение, преобразования Фурье.

2010 Mathematics Subject Classification: 35E05, 35Q40

Литература

[1] Klein O. Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie, Zeitschrift für Physik, 37:2 (1926), 895.

[2] Gordon W. Der Comptoneffekt nach der Schrödingerschen Theorie, Zeitschrift für Physik, 40(1-2) (1926), 117.

[3] Владимиров В.С. Уравнения математической физики, Наука, М. (1976).

[4] Алексеева Л.А. Обобщенные решения краевых задач для одного класса бегущих решений волнового уравнения, Математический журнал, 8:2 (2008), 1-19.

О близости нагруженных сгущающихся «тканых» и резиноподобных мембран

Р.Н. ЗИМИН

[1]*ИМиММ КН МНВО РК, Алматы, РК*

[1]*ИВМиМГ СО РАН, Новосибирск, РФ*

reshat85@mail.ru

Краевые задачи на пространственных сетях (геометрических графах) возникают при изучении процессов и явлений в самых различных разделах естествознания. Наиболее наглядной реализацией таких задач являются упругие деформации сетки, связанной из натянутых струн. Примером такой сети могут служить мембранные материалы Gore-Tex, связанные с технологией растяжения политетрафторэтилена, или тефлона, которые используются в одежде и обуви. Нагретую заготовку из тефлона растягивают до состояния плёнки толщиной 0,01 мм. Её структура напоминает рыболовную сеть, образованную миллионами узелков полимера, соединённых и переплетённых между собой тончайшими волокнами.

Пусть имеется нагруженная резиноподобная мембрана, заполняющая область Ω, которая описывается задачей Дирихле для уравнения Пуассона

$$\sigma\Delta u = -f(x,y), \tag{1}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2}$$

где Δ – двумерный оператор Лапласа, $\sigma > 0$ – постоянное напряжение, а $f(x,y)$ – внешняя сила.

Пусть пространство $\mathbb{R}^2$ затянуто координатной сеткой R_h, образованной прямыми, параллельными осям координат, с узлами $v_{ij} = (ih, jh)$, где h – шаг сетки, а i, j – целые числа. Обозначим через Γ_h пересечение сетки R_h с исходной областью Ω. Множество Γ_h является геометрическим графом. Узлы Γ_h, попавшие внутрь Ω, будем называть внутренними вершинами графа и обозначим их через $I(\Gamma_h)$. Граничными вершинами этого графа являются точки пересечения линий координатной сетки с $\partial\Omega$ и это необязательно точки из R_h. Внутренние узлы будем классифицировать как регулярные и нерегулярные, как это описано в [1]. Так же будем предполагать, что сетка Γ_h является связной, т.е. любые два внутренних узла можно соединить ломанной, звенья которой параллельны координатным осям, а вершины являются внутренними вершинами графа.

На сетке из струн $\Gamma_h \subset \Omega$, закреплённой на границе, задача Дирихле имеет следующий вид:

$$T_h u''(x) = -\hat{f}_h(x), \quad x \in \gamma, \tag{3}$$

$$\sum_{\gamma\in\Re(v_{ij})} T_h u'_\gamma(v_{ij}) = -\hat{f}_h(v_{ij}), \quad v_{ij} \in I(\Gamma_h) \tag{4}$$

$$u|_{\partial\Gamma_h} = 0, \tag{5}$$

Здесь дифференцирование производится по натуральному параметру на каждом ребре. В уравнении (4) под $u'_\gamma(v_{ij})$ понимается производная по направлению «от вершины» v_{ij}. Через $\Re(v_{ij})$ обозначается множество номеров ребер, примыкающих к вершине v_{ij}. Коэффициент T_h – натяжение струны, он предполагается постоянным и на всех струнах одинаковым. Функция $\hat{f}_h(x)$ – это внешняя сила, действующая на струны, и сосредоточенная сила во внутренних вершинах в зависимости от расположения точки x. Рассматриваемые функции $u : \Gamma_h \to \mathbb{R}$ непрерывны во всех внутренних узлах.

Для Γ_h при некоторых физических характеристиках этих струн и нагрузки на эти струны, и достаточно малом h можно ставить вопрос о сходстве данных упругих систем, т.е. можно считать, что либо упругая сетка аппроксимирует непрерывно заполняющую все Ω нагруженную мембрану, либо мембрана является неким усреднением упругой сетки Γ_h, натянутой на границу $\partial\Omega$.

Ранее с применением подобной идеологии рассматривался вопрос о сходстве частотных спектров двух механических систем, одна из которых представляла из себя пространственную сеть, закреплённую на границе, а вторая – резиноподобного континума. Были получены результаты как для сеток из струн, где и фигурирует название данных сетей «ткаными» мембранами (см [2] – [3]).

Из физических соображений предполагается, что сила, сосредоточенная на кресте элементарной ячейки (это сила на струнах и точечная сила на перекрестье, т.е. в вершине v_{ij}) должна быть равна (или почти равна) силе на квадратном участке мембраны ω_{ij}^h с точкой пересечения диагоналей v_{ij} и содержащим рассматриваемые выше крест. Считая, что размер стороны ω_{ij}^h равен h, получаем равенство

$$\hat{f}_h(v_{ij}) + \int\limits_{\Gamma_h\cap\omega_{ij}^h} \hat{f}_h(x)dl = \iint\limits_{\omega_{ij}^h} f(x,y)dxdy. \tag{6}$$

Далее четыре силы T_h натяжения струн, приложенные к концам креста, равномерно распределим по периферии участка мембраны ω_{ij}^h. В результате получим следующее равенство

$$T_h = \sigma h. \tag{7}$$

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Для задачи* (1) – (2) *можно построить последовательность «тканых» мембран, с физическими параметрами, удовлетворяющими условиям* (6) – (7), *решений задачи* (3) – (5), *которые будут сходиться к решению задачи* (1) – (2) *при* $h \to 0$.

Ключевые слова: геометрический граф, уравнение Пуассона, задача Дирихле.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q99, 35J05, 35J25, 34B45, 65L12, 65N08

Литература

[1] Самарский А.А. *Теория разностных схем. 3-е изд., испр.*, Наука, Главная редакция физико-математической литературы, Москва (1989).

[2] Комаров А. В., Пенкин О. М., Покорный Ю. В. О спектре равномерной сетки из струн, *Изв. вузов. Матем.*, **4** (2000), 23—27.

[3] Комаров А. В., Пенкин О. М., Покорный Ю. В. О частотном спектре многомерного аналога тканой мембраны, *Доклады РАН. Математика*, **390**:2 (2003), 151–154.

Решение краевой задачи для уравнения дробной диффузии с правосторонним оператором Лиувилля в треугольной области

М.Т. ОМАРОВ[1], А.В. ПСХУ[2], М.И. РАМАЗАНОВ[3]

[1,3]*Карагандинский университет им. Е.А. Букетова, Караганда, Казахстан*

[2]*ИПМА Кабардино-Балкарского научного центра РАН, г. Нальчик, Россия*

[1]madiomarovt@gmail.com, [2]pskhu@list.ru, [3]ramamur@mail.ru

В области:

$$Q = \{(x,t), 0 < x < t, \quad t > 0\},$$

рассматривается краевая задача для дробно-диффузионного уравнения

$$D^{\alpha}_{\infty t} u(x,t) - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t), \quad \alpha \in (0,1),$$
$$u(x,t)|_{x=0} = u(x,t)|_{t=0} = 0,$$

где

$$D^{\alpha}_{\infty t} u(x,t) = -\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_t^{\infty} \frac{u(x,\tau)}{(\tau - t)^{\alpha}} d\tau$$

является правосторонней производной дробного порядка Лиувилля с началом в точке ∞.

Принцип причинности предполагает, что состояние процесса в текущий момент времени t, начавшегося в момент $\tau = a$, определяется всем набором предыдущих значений $f(\tau)$ при $a \le \tau < t$. В силу отсутствия оснований для использования будущих значений процесса обычно рассматриваются только левосторонние дробные производные. Тем не менее, нельзя исключать, что в будущем правосторонние производные найдут физическую интерпретацию при анализе динамических процессов.

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № AP23488729, 2024-2026).

Ключевые слова: дробная диффузия, правосторонняя производная Лиувилля, краевая задача, треугольная область, уравнения в частных производных.

2010 Mathematics Subject Classification: 35R11, 26A33

Литература

[1] Mathai A. M., Haubold H. J. *Special Functions for Applied Scientists*, Springer, New York (2008). doi:10.1007/978-0-387-75894-7.

[2] Псху А. В. *Уравнения частных производных дробного порядка*, Наука, Москва (2005), 199 с.

[3] Li Y., Dai B. Existence and multiplicity of nontrivial solutions for Liouville–Weyl fractional nonlinear Schrödinger equation, *Revista de La Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas* (2017). doi:10.1007/s13398-017-0405-8.

[4] Matychyn I., Onyshchenko V. Fractional differential equation on the whole axis involving Liouville derivative, *Fract. Calc. Appl. Anal.* **27** (2024), 2275–2283. doi:10.1007/s13540-024-00327-8.

Необходимые условия оптимальности оптимального управления для системы двух шаговых разностных уравнений на основе построения инвариантного многообразия

О.Ж. Сайидов[1], М.У. Яхшибоев[2]

[1,2]*Самаркандский филиал Ташкентского университета информационных технологий имени Мухаммада аль-Хоразми, г. Самарканд, Узбекистан*

[1]oltiboysaidov@gmail.com, [2]m.yakhshiboev@gmail.com

В данной работе рассматриваются управляемые системы двухшаговых разностных уравнений с запаздывающим аргументом и на основе минимизации квадратичного функционала синтезируются оптимальные управления, дающие требуемые свойства системы. В теории оптимального управления одной из основных задач является задача синтеза оптимального управления.

Принцип инвариантных или интегральных многообразий для нахождения решений разностных или дифференциально-разностных уравнений рассматривался и развивался в работах [1], [2] и др. Оптимальные управления для системы разностных уравнений с запаздывающим аргументом изучались мало, в общем случае такие системы рассматривались и развивались в работах [3], [4] и др.

В связи с этим рассмотрим управляемую систему разностных уравнений вида

$$X_{n+1} = A_0 X_n + A_1 X_{n-1} + B_0 U_n + \mu F(X_n,\, X_{n-1}), F(0;0) = 0\ , \tag{1}$$

где $X_n^* = (x_{n,1}, x_{n,2}, \ldots, x_{n,m}) \in R^m$ —вектор-столбец состояний, $U_n^* = (u_{n,1}, u_{n,2}, \ldots, u_{n,m}) \in R^m$ — вектор-столбец управлений, $A_0,\ A_1, B_0$ — квадратная матрица размеров $m\times m$, $\det\, A_1 \neq 0$, $\mu = const$ и $F^*(X_n,\, X_{n-1}) = (f_1(X_n,\, X_{n-1}), f_2(X_n,\, X_{n-1}),\, \ldots,\, f_m(X_n,\, X_{n-1}))$ — вектор-функции, * — операция транспонирования.

Для удобства дальнейших рассуждений, введем следующие обозначения:

$$F_k = F(X_k,\, X_{k-1})\,, W_k = W(X_k, U_k), (k = n, n+1, \ldots).$$

Ищем оптимальное управление $U_{on} = U_{on}(X_n, X_{n-1})$ такое, что минимизирующий квадратичный функционал

$$J = \frac{1}{2}\sum_{k=n}^{\infty}(X_k^* D_1 X_k + U_k^* D_2 U_k) = \frac{1}{2}\sum_{k=n}^{\infty} W(X_k, U_k), W(0;0) = 0, \tag{2}$$

где для матриц $D_1,\ D_2$ выполняются условия $D_1^* = D_1 > 0$, $D_2^* = D_2 > 0$, $(\det D_2 \neq 0)$.

Будем решать задачу синтеза оптимального управления для системы (1) с функционалом (2).

Предполагаем, что вектор-функция $F(X_n,\, X_{n-1})$ достаточное число раз дифференцируема по обоим аргументам, а вектор-функция $W(X_k, U_k)$, $(k = n, n+1, ...)$ — знакоположительная, также достаточное число раз дифференцируемая по всем аргументам, X_k — вектор состояний, U_k — вектор управлений, и с начальными условиями $X_k = X_k^o$ $(k = -1; 0)$, $U_k = U_k^o$ $(k = -1; 0)$.

Для нахождения необходимого условия оптимальности построим функционал Лагранжа:

$$H = \frac{1}{2}\sum_{k=n}^{\infty}\left(W_k + 2Y_k^*(A_0X_k + A_1X_{k-1} + B_0U_k + \mu F_k - X_{k+1})\right). \tag{3}$$

Теорема (Необходимые условия оптимальности). Для минимума функционала (3) Лагранжа H, необходимо выполнение условия $\delta H = 0$, т.е.

$$U_n = -D_2^{-1}B_0^*Y_n, \tag{4}$$

$$X_{n+1} = A_0X_n + A_1X_{n-1} - B_0D_2^{-1}B_0^*Y_n + \mu F(X_n, X_{n-1}), \tag{5}$$

$$Y_{n+1} = \left(A_1^* + \mu\frac{\partial F^*(X_{n+1}, X_n)}{\partial X_n}\bigg|_{X_{n+1} = Q_n}\right)^{-1} \times$$
$$\left(-D_1X_n - A_0^*Y_n + Y_{n-1} - \mu\frac{\partial F^*\left(X_n, X_{n-1}\right)}{\partial X_n}Y_n\right), \tag{6}$$

где

$$\frac{\partial F(X_{n+1}, X_n)}{\partial X_n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(X_{n+1},X_n)}{\partial x_{n,1}} & \frac{\partial f_1(X_{n+1},X_n)}{\partial x_{n,2}} & \dots & \frac{\partial f_1(X_{n+1},X_n)}{\partial x_{n,m}} \\ \frac{\partial f_2(X_{n+1},X_n)}{\partial x_{n,1}} & \frac{\partial f_2(X_{n+1},X_n)}{\partial x_{n,2}} & \dots & \frac{\partial f_2(X_{n+1},X_n)}{\partial x_{n,m}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m(X_{n+1},X_n)}{\partial x_{n,1}} & \frac{\partial f_m(X_{n+1},X_n)}{\partial x_{n,2}} & \dots & \frac{\partial f_m(X_{n+1},X_n)}{\partial x_{n,m}} \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial F(X_n, X_{n-1})}{\partial X_n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(X_n,X_{n-1})}{\partial x_{n,1}} & \frac{\partial f_1(X_n,X_{n-1})}{\partial x_{n,2}} & \dots & \frac{\partial f_1(X_n,X_{n-1})}{\partial x_{n,m}} \\ \frac{\partial f_2(X_n,X_{n-1})}{\partial x_{n,1}} & \frac{\partial f_2(X_n,X_{n-1})}{\partial x_{n,2}} & \dots & \frac{\partial f_2(X_n,X_{n-1})}{\partial x_{n,m}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m(X_n,X_{n-1})}{\partial x_{n,1}} & \frac{\partial f_m(X_n,X_{n-1})}{\partial x_{n,2}} & \dots & \frac{\partial f_m(X_n,X_{n-1})}{\partial x_{n,m}} \end{pmatrix},$$

$Q_n = X_{n+1} = A_0X_n + A_1X_{n-1} - B_0D_2^{-1}B_0^*Y_n + \mu F(X_n, X_{n-1})$, D^{-1}– обратная матрица.

Соотношения (4)–(6) означают необходимые условия оптимальности.

Теорема доказывается при помощи использования результатов работ [1] и [4].

Ключевые слова: Оптимальное управление, инвариантное многообразие, функционал Лагранжа, расщепление решения системы на положительно и отрицательно определенные типы, синтез.

Литература

[1] Валеев К.Г. *Расщепление спектра матриц*, Киев: Выща школа, Киев (1986).

[2] Соболев В.А., Щепакина Е.А., Тропкина Е.А., Параметризация инвариантных многообразий медленных движений,Вестник Самарский ГУ. Естественно-научная серия. Самара, 24:4 (2018), 33–40.

[3] Плеханов М.В., Байбулатова Г.Д., Задачи оптимального управления для одного класса вырожденных эволюционных уравнений с запаздыванием, Челябинский физико-математический журнал. 3(3), (2018), 319-331.

[4] Сайидов О.Ж., Оптимальное управление для системы нелинейных разностных уравнений на основе построения интегрального многообразия, «Научный вестник», СамГУ, **3** (2023), 75–81.

О двумерной системе моментных уравнений и макроскопических граничных условий, зависящих от скорости движения и температуры поверхности тела в жидкости

А. САКАБЕКОВ[1], Е. АУЖАНИ[2], С. МАДАЛИЕВА[3], Р. ЕРГАЗИНА[4], Ж. СЕЙТКУЛОВА[5]

[1,2,3,4,5]*Satbayev University, Алматы, Казахстан*

[1]auzhani@gmail.com , [2]madalieva_s@mail.ru, [3]ergazina.ryskul@gmail.com, [4]ergazina.ryskul@gmail.com, [5]zh.seitkulova@satbayev.university

Одной из важнейших задач гидродинамики является исследование движения твердых тел в жидкости, в частности изучение тех сил, с которыми среда действует на движущееся тело. Эта проблема приобрела особенно большое значение в связи с увеличением скорости движения морских судов и подводных лодок. Определение скорости движения и температуру поверхности тела, движущегося в потоке жидкости, а также параметров жидкости, такие как плотность, скорость течения жидкости и давления, представляет важную и актуальную задачу гидродинамики.

Основным инструментом описания движения газов и жидкости является одночастичная функция распределения, которая удовлетворяет уравнению Больцмана [1]. Применение уравнения Больцмана к расчету течений разряженного газа около летательных аппаратов или течений жидкости около твердого тела, движущего в потоке жидкости, предполагает решение этого уравнения при соответствующих граничных условиях. Определение граничных условий на поверхностях, обтекаемых разряженным газом, является одним из важнейших вопросов кинетической теории газов. Аэротермодинамические характеристики тел в потоке газа определяются передачей импульса и энергии к поверхности тела, то есть связью между скоростями и энергиями молекул, падающих на поверхность, и молекул, отраженных от нее, что является сущностью кинетических граничных условий на поверхности.

В случае течения газа или жидкости около движущего твердого тела граничные условия задаются в виде соотношения между падающими на границу и отраженными от границы частиц. Граничное условие Максвелла для решения конкретных задач более точно описывает взаимодействие молекул газа с поверхностью. Выведена новая двухмерная нестационарная нелинейная система моментных уравнений, зависящая от скорости перемещения и температуры поверхности движущегося в жидкости тела. Макроскопические граничные условия для моментной системы уравнений зависят от температуры поверхности тела. Система моментных уравнений при макроскопических граничных условиях позволяет определить скорости движения и температуру поверхности тела, движущегося в потоке жидкости, а также параметров жидкости [2].

Доказано существование и единственность решения начально-краевой задачи для системы моментных уравнений в первом приближении в пространстве функций, непрерывных по времени и суммируемых в квадрате пространственным переменным.

Ключевые слова: гидродинамика, уравнение Больцмана.

2010 Mathematics Subject Classification: 76P05, 35Q20.

Литература

[1] Коган М.Н. *Динамика разряженного газа* , М., Наука (1967),440.

[2] Sakabekov A. Auzhani Y., Akimshanova Sh. Auzhani Y., , *Mathematics* , **12**:10 (2024)

Свойства решений вырожденных гипергеометрических систем типа Бесселя полученные из систем Лауричелла

Ж.Н. ТАСМАМБЕТОВ

Западно-Казахстанский университет им. М.Утемисова. Уральск, Казахстан

tasmam@rambler.ru

Изучены свойства решений вырожденных гипергеометрических систем типа Бесселя, полученные из систем Лауричелла (F_A) и (F_B) [1].

В ряде работ Тасмамбетова Ж.Н. [2] были доказаны, что при установлении и исследовании важную роль играет система Горна

$$\begin{aligned} x_1Z_{x_1x_1} + (\gamma_1 - x_1)Z_{x_1} - x_2Z_{x_2} - \lambda Z = 0, \\ x_2Z_{x_2x_2} + (\gamma_2 - x_2)Z_{x_2} - x_1Z_{x_1} - \lambda Z = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

полученная путем предельного перехода из системы Лауричелла (F_A).

Свойства 1. Одним из частных решений системы Горна (1) является функция Гумберта

$$\Psi_2(\lambda;\gamma_1;\gamma_2;x_1;x_2) = \sum_{m_1,m_2=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_{m_1+m_2}x_1^{m_1}x_2^{m_2}}{(\gamma_1)_{m_1}(\gamma_2)_{m_2}m_1!m_2!}. \tag{2}$$

Свойства 2. Имеет место соотношение

$$\lim_{\lambda\longrightarrow\infty}\Psi_2(\lambda;\gamma_1;\gamma_2;x_1;x_2) = \sum_{m_1,m_2=0}^{\infty} \frac{1\cdot x_1^{m_1}x_2^{m_2}}{(\gamma_1)_{m_1}(\gamma_2)_{m_2}m_1!m_2!} = J(\gamma_1,x_1), \tag{3}$$

где, $J(\gamma_1,x_1)$ и $J(\gamma_2,x_2)$ вырождение гипергеометрические функции приводящиеся к функции Бесселя. Имеет место также соотношение.

Свойства 3. Двойной ряд определенный с помощью предельного перехода

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon\longrightarrow\infty}F_2(\frac{1}{\varepsilon},\frac{1}{\varepsilon},\frac{1}{\varepsilon};\gamma_1;\gamma_2;\varepsilon^2x_1,\varepsilon^2x_2) = \sum_{m_1,m_2=0}^{\infty} \frac{x_1^{m_1}x_2^{m_2}}{(\gamma_1)_{m_1}(\gamma_2)_{m_2}m_1!m_2!} = \\ = J(\gamma_1,x_1)J(\gamma_2,x_2), \end{aligned} \tag{4}$$

является частным решением системы

$$\begin{aligned} x_1Z_{x_1x_2} + \gamma_1Z_{x_1} - Z = 0, \\ x_2Z_{x_2x_1} + \gamma_2Z_{x_2} - Z = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

полученной из системы (F_2) с помощью предельного перехода [1].

Используя свойства 2 и 3 а также формулы связи между вырожденными гипергеометрическими функциями и функцией Бесселя получим справедливость утверждение.

Теорема 4. Функция Бесселя двух переменных представляется в виде

$$\begin{aligned} J_{\gamma_1,\gamma_2}(x_1,x_2) = J_{\gamma_1}(x_1)J_{\gamma_2}(x_2) = \\ = \sum_{m_1,m_2=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m_1+m_2}(x_1/2)^{2m_1+\gamma_1}(x_2/2)^{2m_2+\gamma_2}}{m_1!m_2!\Gamma(\gamma_1+m_1+1)\Gamma(\gamma_2+m_2+1)}. \end{aligned} \tag{6}$$

Опираясь на эти результаты можно выводить много различных свойств функций Бесселя двух переменных. В данной работе раскрыты свойства функций Бесселя двух переменных с целями индексами с половиной, которые выражаются через элементарные функций.

Свойства 5. Справедливо соотношение

$$J_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(x_1,x_2)^2+J_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(x_1,x_2)^2+J_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(x_1,x_2)^2+J_{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(x_1,x_2)^2=\frac{4}{J^2x_1x_2}.$$

Ключевые слова: вырожденная, гипергеометрическая система, система Лауричелла, система Горна, функция Бесселя.

2010 Mathematics Subject Classification: 33C65, 33C10, 35G50

Литература

[1] Appell P., Kampe de Feriet J. *Fonctions Hypergeometriques et Hyperspheriques*, polynomes d Hermite. – Paris:Gauthier-Villars (1926).

[2] Zh. Tasmambetov Multidimensional normal-regular solutions of degenerate systems associated with bessel functions of many variables, *materials of the VII World Congress of Turkic World Mathematicians*, Turkestan, Kazakhstan (2023), 197-211.

Особенности построения решений систем состоящих из трёх уравнений

Ж.Н. ТАСМАМБЕТОВ[1], Ж.К. УБАЕВА[2]

[1]*Западно-Казахстанский университет им. М.Утемисова. Уральск, Казахстан*
[2]*Актюбинский региональный университет им. К.Жубанова, Актобе, Казахстан*
[1]tasmam@rambler.ru, [2]zhanar-ubaeva@mail.ru

Рассматривается вырожденная гипергеометрическая система состоящая из трёх дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка

$$z_1(1-z_1)\frac{\partial^2W}{\partial z_1\partial z_1}+z_2\frac{\partial^2W}{\partial z_2\partial z_1}+z_3\frac{\partial^2W}{\partial z_3\partial z_1}+[\gamma-(\alpha_1+\beta_1+1)z_1]\frac{\partial W}{\partial z_1}-\alpha_1\beta_1W=0, \tag{1.1}$$

$$z_1\frac{\partial^2W}{\partial z_1\partial z_2}+z_2\frac{\partial^2W}{\partial z_2\partial z_2}+z_3\frac{\partial^2W}{\partial z_3\partial z_2}+(\gamma-z_2)\frac{\partial W}{\partial z_2}-\alpha_2W=0, \tag{1.2}$$

$$z_1\frac{\partial^2W}{\partial z_1\partial z_3}+z_2\frac{\partial^2W}{\partial z_2\partial z_3}+z_3\frac{\partial^2W}{\partial z_3\partial z_3}+\gamma\frac{\partial W}{\partial z_3}-W=0. \tag{1.3}$$

Уравнение (1_1) является частным случаем системы Лауричелла (F_B) [1]:

$$z_i(1-z_i)\frac{\partial^2W}{\partial z_i^2}+\sum_{j=1}^{n}z_j\frac{\partial^2W}{\partial z_j\partial z_i}+[\gamma-(\alpha_i+\beta_i+1)z_i]\frac{\partial W}{\partial z_i}-\alpha_i\beta_iW=0, j=\overline{1,n} \tag{2}$$

полученное при $n=3, i=1$ и $j=2,3$.

Осуществляя предельный переход по β_1, получим уравнение (1_2), а после предельного перехода по α_2, получим уравнение (1_3). Требуется изучить особенности построения решений полученной системы $(1_t),(t=1,2,3)$. Справедливо утверждение.

Теорема 1. Пусть задано вырожденная гипергеометрическая система состоящая из трёх уравнений $(1_t),(t=1,2,3)$. Тогда она имеет 2^3-1 линейно-независимых частных решений, одним из которых является функция В.И. Художникова [2]

$$\Phi_{B,3}^{(1,1)}\left(\begin{matrix}(\alpha_1),(\beta_1),(\alpha_2)\\ \gamma\end{matrix}|(z_3)\right)=\sum_{m_1,m_2,m_3=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_{m_1}(\beta_1)_{m_1}(\alpha_2)_{m_2}}{(\gamma)_{m_1+m_2+m_3}}\frac{z_1^{m_1}}{m_1!}\frac{z_2^{m_2}}{m_2!}\frac{z_3^{m_3}}{m_3!}, \tag{3}$$

где использованы обозначения $(z_3) = (z_1 z_2 z_3), (a)_m = a(a+1)...(a+m-1)$.

Решения построим вблизи регулярной особенности $(0,0,0)$, методом Фробениуса-Латышевой [3] в виде обобщенного степенного ряда от трёх переменных

$$W(z_1, z_2, z_3) = z_1^{\rho_1} z_2^{\rho_2} z_3^{\rho_3} \sum_{m_1, m_2, m_3 = 0} A_{m_1, m_2, m_3} z_1^{m_1} z_2^{m_2} z_3^{m_3}, A_{0,0,0} \neq 0 \tag{4}$$

где неизвестные постоянные $\rho_l (l = 1, 2, 3), A_{m_1, m_2, m_3} (m_1, m_2, m_3 = 0, 1, 2, ...)$ определяются из системы рекуррентных последовательностей [3].

Свойства 2. Уравнение типа Куммера (1_2) имеет регулярную особенность $(0,0,0)$ и иррегулярную особенность (∞, ∞, ∞).

Это определяет общее свойство заданной системы.

Свойства 3. Система $(1_l), l = 1, 2, 3$ наряду с иррегулярной особенностью $(0,0,0)$ имеет также иррегулярную особенность (∞, ∞, ∞).

Теорема 4. Вырожденная гипергеометрическая система $(1_l), l = 1, 2, 3$ вблизи иррегулярной особенности (∞, ∞, ∞) имеет нормально-регулярное решение, для которой справедливо соотношение

$$e^{z_2} \Phi_{B,3}^{(1,1)} \left(\begin{matrix} (\alpha_1), (\beta_1), (\alpha_2) \\ \gamma \end{matrix} | (z_3) \right) = U(z_1, z_2, z_3),$$

где обобщенный степенной ряд от трёх переменных $U(z_1, z_2, z_3)$ также выражаются через функцию Художникова.

Ключевые слова: вырожденная, гипергеометрическая система, особеность, функция Художникова, нормально-регулярное, утверждение.

2010 Mathematics Subject Classification: 33C65, 33C10, 35G50

Литература

[1] Appell P., Kampe de Feriet J. *Fonctions Hypergeometriques et Hyperspheriques*, polynomes d Hermite. – Paris:Gauthier-Villars (1926).

[2] Художников В.И. Две новые вырожденные гипергеометрические функции многих переменных и интегральные уравнения с ними, *Дифф.уравнения*, **39**:6 (2003), 835–843.

[3] Тасмамбетов Ж.Н. *Построение нормальных и нормально-регулярных решений специальных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка*, ИП Жанадилова С.Т., Актобе (2015).

Нелокальная условная задача Стефана для квазилинейного уравнения параболического типа

Р.Н. ТУРАЕВ[1], Ф.С. МИРЗАЕВ[2]

[1,2]*Термезский государственный университет, г. Термез, Узбекистан*

[1]fayzullamirzayev95@mail.com

Классическая теория диффузии математически выражается с помощью уравнения теплопроводности и, в более общем смысле, параболическими уравнениями, обычно линейного типа. Такой подход имел огромный успех и теперь является фундаментом в науке и технике. Во второй половине прошлого столетия наблюдалась интенсивная активность и прогресс в теориях нелинейной диффузии, примерам которых является проблемы Стефана для нелинейного параболического уравнения. В более общем плане, исследования нелокальных задач имеют традицию, задачи со свободной границей, и в последнее десятилетие стали свидетелями быстрого расширения, когда они привлекли внимание экспертов линейных и нелинейных параболических уравнений, которые принесли новые проблемы и методы в эту область. Эта область ставит новые задачи, как для теоретиков, так и для прикладных математиков. В настоящее время она находится уравнений в частных производных, обеспечивая при этом новую парадигму в научном моделировании. Это взаимодействие между математикой и приложениями порождает новые концепции и методы и, как ожидается, приведет к появлению новых сложных математических проблем на многие годы вперед. В настоящей работе изучается нелокальная задача Стефана о распространения тепла в среде, агрегатное состояние, которого может меняется при определенных значениях темпратуры ее выделением или поглощением тепла. Примерами могут служить задачи о промерзании и плавлении. [1,2]

Постановка задачи. Требуется найти пару функций $(u(t,x),\ s(t))$ таких что $s(t)$ определена и непрерывно дифференцируема на отрезке $0 \le t \le T, s(0) = s_0 > 0,\ 0 < \dot{s}(t) \le N, s(t) -$удовлетворяет условию Гельдера, а функция $u(t,x)$ в области

$$D = \{(t,x) : 0 < t \le T,\ 0 < x < s(t)\}$$

удовлетворяет уравнению

$$u_t\,(t,x) = a\,(u)\,u_{xx}\,(t,x) + bu_x,\ (t,x) \in D, \tag{1}$$

и седующим начальным и граничным условиям

$$u\,(x,0) = \varphi\,(x)\,,\ 0 \le x \le s_0 \tag{2}$$

$$u\,(t,0) = \alpha u\,(t,x_0)\,,\ 0 \le t \le T \tag{3}$$

,

$$u\,(t,s\,(t)) = 0,\ 0 \le t \le T \tag{4}$$

,

$$\dot{s}\,(t) = -\beta u_x\,(t,s\,(t))\,,\ 0 \le t \le T \tag{5}$$

. Относительно данных задач в работе предполагаем, что для заданных функций выполнены следующие условия:

1. Функция $a\,(u)$ определены и непрерывны для любого значения аргумента и $a\,(u) \ge a_0 > 0$.

2. Положительные постоянные удовлетворяют неравенствам $s\,(0) = s_0 > 0,\ \ 0 < \alpha < 1$, $\beta > 0$, $0 < x_0 < s_0$, $b = const$.

3. $\varphi'\,(x) -$ непрерывно дифференцируемая функция, $\varphi'\,(x)$ удовлетворяют условию Гельдера;

4. Выполнены условия согласования в угловых точках (в т.ч.рассматриваемых вспомогательных задачах). В частности, $\varphi\,(0) = \alpha\varphi\,(x_0)\,,\ \varphi\,(s_0) = 0$.

Сначала устанавливаются априорные оценки для решений $(s\,(t)\,, u\,(t,x))$ и их производных.

Лемма 1. Пусть выполнены условия 1.- 4. Тогдав $\overline{D}$ для решения $u\,(t,x)\,, s\,(t)$ задачи (1)-(5) справедливы оценки

$$0 \le u\,(t,x) \le M_1 = \max_{0 \le x \le s_0} |\varphi\,(x)|\,,$$

$$0 < \dot{s}\,(t) \le M_2 = \beta N,\ 0 \le t \le T,$$

$$0 \le x \le N\,(s\,(t) - x)\,,\ 0 \le x \le s\,(t)\,,\ 0 \le t \le T.$$

Далееустановлены априорные оценки Шаудеровского типа норм Гельдера. На основе установленных априорных оценок доказанатеорема единственности, а существование решения доказана при помощи методом неподвижной точки Шаудера [2].

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № BR20281002).

Ключевые слова: квазилинейного параболического уравнения, задача Стефан, начальное состояние, локальная неоднородность, прозрачные граничные условия.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

Литература

[1] Douglas, Jr. A uniqueness theorem for the solution of the Stefan problem. // Proc. Amer.Math.Soc. 1957.Vol.8, No.4. P.402-408.

[2] Тахиров Ж.О., Тураев Р.Н. Нелокальная задача Стефана для квазилинейного параболического уравнения. Вест.Самарского Гос.Тех.Универ.Сер."Физ.- мат. Науки".2012. №26. С.99-106.

О краевых условиях, содержащих производные высокого порядка

Е.М. ХАЙРУЛЛИН[1], А.С. АЖИБЕКОВА[2]

[1,2]*Satbayev University, Алматы, Казахстан*

[1]khairullin_42_42@mail.ru, [2]aliya_azhibek@mail.ru

Рассматривается краевая задача для уравнения теплопроводности в полупространстве:

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = a^2 \Delta U(x,t),\ \Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \tag{1}$$

в области

$$Q_T = \left\{(x,t) = (x', x_n, t) : x' \in R^{n-1},\ x_n \in R_+,\ t > 0\right\},$$

удовлетворяющее начальному условию

$$U(x,0) = 0, \tag{2}$$

и граничному условию

$$L_m(U)|_{x_n=0} = f(x', t), \tag{3}$$

где

$$L_m(U) = \sum_{|k|<=m} a_k D_x^k U(x,t), \quad k = (k_1, k_2, \dots, k_n),$$

$$|k| = k_1 + k_2 + \dots + k_n, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad D_x^k = D_{x_1}^{k_1} D_{x_2}^{k_2} \dots D_{x_n}^{k_n}, \quad D_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i},$$

$a_k = a_{k_1,k_2,\dots,k_n}$ - заданные постоянные, $a_{0,0,\dots,m} \neq 0, \quad m \in N$.

Решение задачи (1)-(3) ищется в виде теплового потенциала с неизвестной плотностью [1]. Приводится Лемма о нахождении пределов производных функции $U(x,t)$ в окрестности гиперплоскости $x_n = 0$. Используя граничное условие (3) и Лемму, получено интегро-дифференциальное уравнение (ИДУ) с оператором теплопроводности, когда порядок производной под знаком интеграла выше, чем порядок производной вне интеграла. Характеристическая часть ИДУ решена методом интегральных преобразований Фурье-Лапласа при выполнении условия разрешимости.

Теорема 1. *Если $f(x', t) \in C_{x',t}^{2,0}(Q_T)$ и корни $q_k(\sigma^1)$ характеристического уравнения $\sum_{\alpha=0}^{m} b_\alpha(\sigma^1)\lambda^{m-\alpha}$ удовлетворяют неравенству $Re[q_k^2(\sigma^1)] > -1$, то существует функция $U(x,t) \in C_{x,t}^{m,[\frac{m}{2}]}(Q_T)$.*

Ключевые слова: тепловые потенциалы, граничные условия, производные высокого порядка, условия разрешимости, регуляризация.

2010 Mathematics Subject Classification: 35K45, 58J35

Литература

[1] Ким Е.И. Об условиях разрешимости одной граничной задачи уравнения теплопроводности, *Доклады АН СССР*, **3**:36 (1961), 253–258.

К расчету теплового нагрева электрода выключателя с нелинейностью теплофизических параметров

Ю.Р. Шпади

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

yu-shpadi@yandex.ru

Рассматривается задача прогрева электрода коммутационного аппарата под воздействием электрической дуги и внутреннего источника тепла. Математическая модель базируется на квазистационарном уравнении теплопроводности со сферической симметрией

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\lambda(r,t,\theta)\frac{\partial\theta}{\partial r}\right)+\frac{q(r,t)}{r^4}=0,\quad \theta=\theta(r,t), \tag{1}$$

заданном в области со свободной границей $\Omega=\{(r,t)|0<b<r<\alpha(t)<\infty,\ 0<t<t_a\}$, при краевых условиях:

$$\alpha(0)=b, \tag{2}$$

$$-\lambda(r,t;\theta)\frac{\partial\theta}{\partial r}\bigg|_{r=b}=P(t), \tag{3}$$

$$\theta(\alpha(t),t)=\theta_\alpha(t), \tag{4}$$

$$-\lambda(r,t;\theta)\frac{\partial\theta(r,t)}{\partial r}\bigg|_{r=\alpha(t)}=L(t;\theta_\alpha(t))\frac{d\alpha(t)}{dt}. \tag{5}$$

В начальный момент $t=0$ область Ω ввиду условия (2) вырождена (обращается в точку). Для расчета закона движения свободной границы $\alpha(t)$ и температурного поля $\theta(r,t)$ внутри области Ω задача (1) — (5) редуцируется к эквивалентной системе двух нелинейных интегральных уравнений с переменными пределами интегрирования.

Доказано, что при условии непрерывности и положительности функций $\lambda(r,t;\theta)$, $P(t)$, $q(r,t)$, $L(t;\theta_\alpha(t)$ а также непрерывности функции $\theta_\alpha(t)$ и липшицевости функции $\lambda(r,t;\theta)$ по переменной θ, система интегральных уравнений однозначно разрешима и ее решение является решением краевой задачи (1) — (5).

Разработан численный алгоритм итеративного решения системы интегральных уравнений. Проведен вычислительный эксперимент на тестовой краевой задаче с точным аналитическим решением и представлены результаты сходимости итераций в метрике непрерывных функций полных пространств.

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № BR20281002).

Ключевые слова: нелинейное уравнение теплопроводности, сферическая симметрия, краевые условия, проблема Стефана, интегральные уравнения, электрические контакты.

2010 Mathematics Subject Classification: 35G30, 34B08, 45G10, 80A22

Литература

[1] Kharin S.N., Nauryz T.A. One-phase spherical Stefan problem with temperature dependent coefficients, Eurasian Mathematical Journal, Volume 12, Number 1 (2021), 49-56с. DOI: https://doi.org/10.32523/2077-9879-2021-12-1-49-56.

[2] Shpadi Yu.R. Quasistationary nonlinear problem of thermal conduction with spherical symmetry in the region with a free boundary, *Kazakh Mathematical Journal, 22(4) (2022). 6–18.* DOI: https://doi.org/10.70474/v7695v88

[3] Хольм Р. Электрические контакты, ИЛ, Москва (1961). -– 464с.

[4] Лыков, А.В. Теория теплопроводности, Москва: Высшая школа (1967). — 600с.

Обтекание плоского клина потоком вязкоупругой жидкости

Г.Н. ШУКУРОВ

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

g.shukurov@g.nsu.ru

Рассматривается задача об обтекании клина стационарным потоком несжимаемой полимерной жидкости. Течение вязкоупругой полимерной жидкости описывается при помощи реологической модифицированной модели Виноградова–Покровского [1]. Обтекание плоского клина стационарным потоком является классической задачей гидродинамики. Известны стационарные решения такой задачи, содержащие поверхности сильного разрыва, симметрично расположенные по обоим сторонам клина. Для того, чтобы исследовать аналогичные решения у задачи о течении вязкоупругой жидкости и соединить набегающий на клин стационарный поток с условиями прилипания на поверхности клина, используются соотношения на сильном разрыве для модели Виноградова–Покровского, предложенные в [2].

Литература

[1] Алтухов, Ю. А. Введение в мезоскопическую теорию текучих полимерных систем. Ю. А. Алтухов, А. С. Гусев, Г. В. Пышнограй. — Барнаул: *АлтГПА*, 2012.

[2] Блохин, А. М. Исследование соотношений на стационарном плоском сильном разрыве для полимерной жидкости . А. М. Блохин, Р. Е. Семенко. *Математическое моделирование.* — 2021, Т. 33, № 1, с. 89-104.

Обратная задача восстановления нелинейного коэффициента в краевом условии третьего рода для уравнения параболического типа

А.Ю. ЩЕГЛОВ[1], Гуаньчжэн ЛЮ[2], Чжичэнь ЛЮ[3]

[1,2,3]*Университет МГУ-ППИ, Шэньчжэнь, Китай*

[1]*МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*

[1]shcheg@cs.msu.ru, [2]ccchair233@gmail.com, [3]1120210025@smbu.edu.cn

В качестве прямой рассматривается следующая смешанная краевая задача для уравнения в частных производных второго порядка параболического типа с квазилинейным коэффициентом в краевом условии третьего рода:

$$\left\{\begin{array}{c} u_t(x,t)=a^2u_{xx}(x,t)-\gamma u(x,t), \quad (x,t)\in Q_T=\big\{(x,t): x\in[0,l],\, t\in[0,T]\big\}, \\ u_x(0,t)=0, \qquad k\big(u(l,t)\big)+u_x(l,t)=\mu(t), \qquad t\in[0,T], \\ u(x,0)=\varphi(x), \qquad x\in[0,l], \end{array}\right. \tag{1}$$

где заданы $\gamma \geqslant 0$, $\varphi(x) \in C^2[0,l]$, $\mu(t) \in C^1[0,T]$, $k(s) \in C^1(\mathbb{R})$, и $\exists\, k_1, k_2, k_3 = \mathrm{const} > 0$, для которых выполняются условия

$$k_1 \leqslant |k(s)| \leqslant k_2, \quad |k'(s)| \leqslant k_3, \ \forall s \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(0) = 0, \quad k\big(\varphi(l)\big) + \varphi'(l) = \mu(0).$$

Задача (1) используется при моделировании теплофизических процессов с значительным перепадом температур и в гидрогеологических исследованиях.

Начало исследованиям математических моделей теплопереноса было заложено работой [1]. Условия однозначной разрешимости задачи (1) устанавливаются для более общего случая постановки смешанной начально-краевой задачи в работе [2] и с представлением методов построения решения в работах [3] и [4].

Для данной постановки задачи (1) выделены свойства решения, включающие ограниченность и монотонность функции $u(x,t)$ на области её определения при дополнительных ограничениях на исходные данные, произведено уточнение условий однозначной разрешимости задачи (1), а также представлена редукция задачи (1) к следующему нелинейному интегральному уравнению Вольтерра

$$\begin{aligned} u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \Bigg(& \frac{1}{\lambda_n^*} e^{-(a^2\lambda_n^*+\gamma)\,t} \int_0^l \big(\varphi(s) - \varphi(l) - \varphi'(l)\big) \cos\big(\sqrt{\lambda_n^*} s\big)\, ds - \\ & - \frac{1}{\lambda_n^*} e^{-(a^2\lambda_n^*+\gamma)\,t} \big(\varphi(l) + \varphi'(l)\big) - \Big(a^2 - \frac{\gamma}{\lambda_n^*}\Big) \int_0^t e^{-(a^2\lambda_n^*+\gamma)(t-\tau)} \Big(k\big(u(l,\tau)\big) - u(l,\tau) - \\ & - \mu(\tau)\Big)\, d\tau \Bigg) \frac{\cos\big(\sqrt{\lambda_n^*}\, l\big)}{\int_0^l \big(\cos\big(\sqrt{\lambda_n^*} s\big)\big)^2 ds} \cos\big(\sqrt{\lambda_n^*} x\big), \quad (x,t) \in \overline{Q}_T, \end{aligned} \tag{2}$$

где λ_n^* – положительные корни уравнения $\operatorname{ctg}\Big(\sqrt{\lambda}\, l\Big) = \sqrt{\lambda}$, $n \in \mathbb{N}$, упорядоченные по возрастанию:

$$0 < \lambda_1^* < \lambda_2^* < \dots < \lambda_n^* < \dots, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Уравнение (2) позволяет осуществить приближённое получение решения задачи (1) при помощи метода простой итерации с использованием рекуррентной формулы на базе уравнения (2) для построения итерационного процесса приближения решения.

В постановке обратной задачи, формируемой на основе рассматриваемой модели (1), известными полагаются значение $\gamma > 0$, функции $\varphi(x)$, $\mu(t)$, $k(s) = \overline{k}(s)$, такие что

$$\varphi(x) \in C^2[0,l] \quad \varphi'(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in [0,l], \quad \varphi'(0) = 0, \tag{3}$$

$$\mu(t) \in C^1[0,T], \quad \mu'(t) > 0 \quad \forall t \in [0,T], \tag{4}$$

$$\overline{k}(s) \in C[\varphi(0), \varphi(l)], \quad \overline{k}(s) > 0 \ \ \forall s \in [\varphi(0), \varphi(l)], \quad k\big(\varphi(l)\big) + \varphi'(l) = \mu(0). \tag{5}$$

В обратной задаче по дополнительно известной функции $h(t)$, такой что

$$h(t) = u(l,t), \qquad t \in [0,T], \tag{6}$$

где $u(x,t)$ – решение прямой задачи (1), и выполняются условия

$$h(t) \in C[0,T], \quad h(0) = \varphi(l), \quad 0 \leqslant h(\tau) < h(t) \leqslant \mu(t) \ \ \forall \tau, t \in [0,T]: \ \tau < t, \tag{7}$$

требуется восстановить коэффициент

$$k(s) \in C[h(0), h(T)], \tag{8}$$

для которого с некоторыми значениями k_4, k_5 и k_6 выполняются условия

$$0 < k_4 \leqslant k(s) \leqslant k_5, \quad |k(s) - k(\xi)| \leqslant k_6, \quad s, \xi \in \big[h(0), h(T)\big], \qquad k(\varphi(l)) = \overline{k}(\varphi(l)), \tag{9}$$

и найти решение $u(x,t)$ задачи (1).

Некоторые схожие обратные задачи для уравнения теплопроводности с квазилинейными кусочно-аналитическими коэффициентами изучались в работах [5], [6].

Обратная задача восстановления функции $k(s)$ с учётом замены $\xi = h(t)$, $t = h^{-1}(\xi)$ $\forall t \in [0,T]$, редуцируется к интегральному уравнению

$$k(\xi) = \mu\left(h^{-1}(\xi)\right) + \sum_{n=1}^{+\infty}\Bigg(\frac{1}{\lambda_n^*} e^{-(a^2\lambda_n^*+\gamma)\,h^{-1}(\xi)} \int_0^l \big(\varphi(s) - \varphi(l) - \varphi'(l)\big)\cos\big(\sqrt{\lambda_n^*}s\big)\,ds -$$
$$- \frac{1}{\lambda_n^*}\, e^{-(a^2\lambda_n^*+\gamma)h^{-1}(\xi)}\left(\varphi(l) + \varphi'(l)\right) - \left(a^2 - \frac{\gamma}{\lambda_n^*}\right)\int_0^{h^{-1}(\xi)} e^{-(a^2\lambda_n^*+\gamma)(h^{-1}(\xi)-\tau)}\Big(k\big(h(\tau)\big) -$$
$$- h(\tau) - \mu(\tau)\Big)\,d\tau\Bigg)\,\frac{\Big(\cos\big(\sqrt{\lambda_n^*}\,l\big)\Big)^2}{\int_0^l\big(\cos\big(\sqrt{\lambda_n^*}s\big)\big)^2 ds} \quad \xi \in \big[h(0), h(T)\big]. \quad (10)$$

Уравнение (10) при выполнении условий (3) – (9) на исходные данные обратной задачи, позволяет сформулировать теорему о единственности восстановления функций $k(s)$, $u(x,t)$, а также предложить итерационный метод построения приближённого решения обратной задачи (1), (6), основанный на использовании уравнения (10) в виде рекуррентной формулы для построения приближения коэффициента $k(s)$. После восстановления коэффициента $k(s)$ получение приближения $u(x,t)$ – решения прямой задачи (1), осуществляется, например, с помощью итерационного алгоритма на основе уравнения (2).

Финансирование: Работа выполнена при частичной поддержке National Natural Science Foundation of China (No. 12171036) и Beijing Natural Science Foundation (Key Project No. Z210001).

Ключевые слова: уравнение параболического типа, обратная задача, квазилинейный коэффициент, третье краевое условие, некорректно поставленная задача.

2010 Mathematics Subject Classification: 35R30, 65M32, 80A23.

Литература

[1] Fourier J. Théorie analytique de la chaleur, Didot, Paris (1822).

[2] Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, Наука, Москва (1967).

[3] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики, Гос. изд-во тех.-теор. лит., Москва (1953).

[4] Курант Р. Уравнения в частных производных, Мир, Москва (1964).

[5] Muzylev N.V. Uniqueness theorems for some inverse problems of heat transfer, U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys., 20:2 (1980), 120–134.

[6] Щеглов А.Ю. Об одной обратной задаче для квазилинейного уравнения теплопроводности, Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика, 2 (1987), 8–11.

On the solution of two-phase Dirichlet problem for the heat equation

N.T. ABDYRAKHIMOV[1], U.K. KOILYSHOV[2]

[1,2]*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[1,2]*Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*
[1]nabdyrakhimov@mail.ru, [2]koylyshov@math.kz

Problem statement:

We consider an initial boundary value problem for the heat equation with a piecewise constant coefficient

$$\begin{cases} u_t - k_1^2 u_{xx} = 0, & \Omega_1 = \{(x,t) : l_0 < x < l_1, \quad 0 < t < T\}, \\ u_t - k_2^2 u_{xx} = 0, & \Omega_2 = \{(x,t) : l_1 < x < l_2, \quad 0 < t < T\} \end{cases} \tag{1}$$

in the domain $\Omega = \cup\Omega_j \ (j = 1, 2)$, with the initial condition

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad (l_0 \leq x \leq l_2), \tag{2}$$

and with the Dirichlet boundary conditions

$$u(l_0,t) = 0, \quad u(l_2,t) = 0, \tag{3}$$

and with the conjugation conditions

$$\begin{cases} k_1 u_x(l_1 - 0, t) = k_2 u_x(l_1 + 0, t) \\ k_1 u_x(l_1 - 0, t) = h(\theta u(l_1 + 0, t) - u(l_1 - 0, t)), \end{cases} \tag{4}$$

where point l_1 is strictly internal point of the interval $0 < x_0 < l$ and $k_i > 0$, $(i = 1, 2)$, $\theta > 0, h > 0$.

Theorem 1. *If $\varphi(x)$ is a twice continuously differentiable function satisfying the conditions*

$$\varphi(l_0) = 0,\ \varphi(l_2) = 0,\ k_1\varphi'(l_1 - 0) = k_2\varphi'(l_1 + 0),\ k_1\varphi'(l_1 - 0) = h(\theta\varphi(l_1 + 0) - \varphi(l_1 - 0)),$$

then the function

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n X_n(x) e^{-\lambda_n t}$$

is the unique classical solution of the problem (1)-(4), where the coefficient φ_n is given by the formula

$$\varphi_n = \int_{l_0}^{l_2} \varphi(x) Y_n(x) dx.$$

Where $X_n(x)$ are the eigenfunctions of the corresponding spectral problem to the given problem, and $Y_n(x)$ are the eigenfunctions of the adjoint spectral problem.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. BR20281002).

Keywords: heat equation, spectral problem, Riesz basis, classical solution, Fourier method.

2010 Mathematics Subject Classification: 35P10, 35K05, 35K20

References

[1] Koilyshov U.K., Sadybekov M.A. *Two-phase heat conduction problems with Sturm-type boundary conditions.*, Boundary Value Problems, 149 (2024).

Artificial Neural Networks and Hopfield Type Modeling

H. AKCA[1], Zh.Kh ZHUNUSSOVA[2]

[1,2]*Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*
[2]*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[1]akcahy@yahoo.com, [2]zhunusova@math.kz

This talk covers the general neural networks dynamical systems with various form of the Hopfield type modeling. The results obtained in this paper extend and generalize the corresponding results existing in previous literature. One of the most widely used techniques in the study of models involving ordinary differential equations. It has been shown by several authors that the dynamics of numerical discretizations of differential equations can differ significantly from those of the original differential equations. In the modeling and analysis of dynamical phenomena various types of systems ranging downward in complexity from partial differential equations, functional differential equations, integro-differential equations, stochastic differential equations with hereditary term, difference equations and algebraic equations have been used. It is common to approximate models of higher levels of complexity by models of lower levels of complexity.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP23486576).

Keywords: Neural Networks, Dynamical Systems, Hopfield-Type Modeling

2010 Mathematics Subject Classification: 68T05, 92B20, 37N99

References

[1] Akça H., Alassar R., Covachev V., Covacheva Z., Al-Zahrani E.A. *Continuous-time additive Hopfield-type neural networks with impulses*, J. Math. Anal. Appl., **290**: 436–451 (2004).

[2] Akça H., Alassar R., Covachev V., Covacheva Z. *Discrete counterparts of continuous-time additive Hopfield-type neural networks with impulses*, Dyn. Syst. Appl., **13**: 75–90 (2004).

[3] Covachev V., Akça H., Yeniçerioğlu F. *Difference approximations for impulsive differential equations*, Appl. Math. Comput., **121**: 383–390 (2001).

[4] Freeman J., Sakura D. *Neural Networks: Algorithms, Applications, and Programming Techniques*, Addison–Wesley, Reading, Mass. (2001).

[5] Gopalsamy K. *Stability of artificial neural networks with impulses*, Appl. Math. Comput., **154**: 783–813 (2004).

[6] Gopalsamy K., He X.Z. *Stability in asymmetric Hopfield nets with transmission delays*, Physica D, **76**: 344–358 (1994).

[7] Gopalsamy K., Issic K.C., Leung I.K.C., Liu P. *Global Hopf-bifurcation in a neural netlet*, Appl. Math. Comput., **94**: 171–192 (1998).

Quadratic integrals for geodesic flows of two dimensional metrics near singular points

D. AKPAN

[1]*FSU Jena, Germany*

[1]*Institute of mathematics and mathematical modeling, Almaty, Kazakhstan*

dinmukhammed.akpan@uni-jena.de

Let (M^2, g) be a 2-dimensional (pseudo-)Riemannian manifold. The geodesic flow of the metric g is said to be *integrable* if:

- There exists a function $F : T^*M^2 \to \mathbb{R}$ on the cotangent bundle that is functionally independent of the Hamiltonian $H := \frac{1}{2}g^{-1}(p, p)$, where $p = (p_x, p_y)$ are coordinates on the cotangent space;

- The functions F and H are in involution, i.e., they Poisson commute: $\{F, H\} = 0$.

In this case, F is called a *first integral.* A key case of interest arises when F is a homogeneous polynomial in the variables p_x and p_y, expressed as $F = \sum_{i,j=0}^{n} a_{ij}(x, y)p_x^i p_y^j$.

The question of the integrability of geodesic flows is a classical problem in differential geometry and integrable systems. We consider the case of *quadratically integrable* metrics, where the first integral F in local coordinates has the form:

$$F = a(x, y)p_x^2 + b(x, y)p_x p_y + c(x, y)p_y^2.$$

For metrics g with quadratically integrable geodesic flows, there locally exists a non-trivial metric $\bar{g}$ such that g and $\bar{g}$ share the same unparametrized geodesics. Such metrics are called *geodesically equivalent*. This is a very old topic, in particular the problem of describing geodesically equivalent metrics was explicitly stated by E. Beltrami 1865. From the context it is clear that he ment dimension two and wanted a local description. Many prominent mathematicians contributed to the solution of special cases of this problem.

In 1869, Dini provided a local classification of all Riemannian metrics admitting quadratic integrability. Later, Levi-Civita generalized this result to arbitrary dimensions. The Dini and Levi-Civita cases represent the *non-singular* situation, i.e., in the neighborhood of an algebraically stable point. In his dissertation, Kolokoltsov and subsequently in a series of works by Bolsinov, Matveev, and Fomenko, the singular cases for 2-dimensional Riemannian metrics were analyzed.

The pseudo-Riemannian case proves to be significantly richer and more intriguing. The non-singular case (near a regular point) was addressed in a 2009 work by Bolsinov, Matveev, and Pucacco.

This talk will focus on singularities of quadratic integrals in the pseudo-Riemannian case. We provide a complete description of pairs (two-dimensional metric, quadratic integral) and normal formas for them. In view of relation to geodesically equivalent metrics to quadratic integrals, this solves the last unsolved part of the Beltrami problem 1865.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP23483476) and by the DFG 529233771.

Keywords: integrable systems, geodesic flow, geodesically equivalent metrics, Beltrami problem.

2010 Mathematics Subject Classification: 37J35, 37D40, 53D25

Robin's problems for the heat equation on linear multilink thermal graphs and their solutions

L.A. ALEXEYEVA[1], D.A. PRIKAZCHIKOV[2], N.Zh. AINAKEYEVA[3]

[1,3]*Joldasbekov Institute of Mechanics and Engineering, Kazakhstan, Almaty*
[2]*Keele University, Staffordshire, United Kingdom*

[1]alexeeva@math.kz, [2]d.prikazchikov@keele.ac.uk, [3]nursaule_math@mail.ru

Graph theory has wide applications in subjects such as economics, logistics, sociology, optimal control and navigation. The properties of graphs are also actively used to solve boundary value problems (BVPs) on network-like structures, e.g., oil pipelines, gas pipelines, and electrical networks. With the development of mechanical engineering, complex multi-link rod structures operating under various thermal conditions began to be actively used. They are widely used in structural mechanics, mechanical engineering, robotics, and many other fields.

An urgent scientific and technical task is to study the thermally stressed state of network systems for various purposes under dynamic and thermal influences, taking into account their thermoelastic properties under dynamic and thermal influences, including impact types. Here, boundary value problems are considered on a line thermal graph, which can be used to study various mesh structures under conditions of volume and thermal heating (cooling).

The novelty of the present work lies in the fact that a generalized function method is used to solve boundary value problems, leading to a differential equation solution with a singular right-hand side. The solution is constructed as the convolution of the Green's function of the equation with the appropriate right-hand side. To determine the unknown boundary values of the solution and its derivatives on each segment, resolving boundary equations are constructed at the ends, employing the asymptotic properties of Green's function and its derivative at zero. To construct a closed system of equations, the obtained algebraic equations for each edge of the graph are supplemented with transmission conditions at the nodes and linear boundary conditions at its ends. These conditions can be either locally or not locally connected. Thus, the proposed method applies to a wide range of BVPs, including those on mesh structures.

We consider an thermal linear graph which contains N edges (A_0, Aj) of the length $L_j \quad (j = 1, 2, ..., N)$ with a common node A_0. On each edge $S_j = \left\{x \in R^1 : 0 \leq x \leq L_j\right\}$ there is own coordinate system (x_j, t) with the origin at point $A_0 : \ x = 0$. A temperature $\theta_j(x, t)$ satisfy the heat conduction equation at S_j:

$$\frac{\partial \theta_j}{\partial t} - \kappa_j \frac{\partial^2 \theta_j}{\partial x^2} = F_j(x, t), \ j = 1, ..., N. \tag{1}$$

Here κ_j is the thermal diffusivity coefficient on the j-th segment, $F_j(x, t)$ describes the action of heat source, $\theta_1^j(t), \theta_2^j(t)$ are the temperature in the ends of the j-th edge.
The initial conditions at t = 0 for the temperature of a graph are known:
(Cauchy conditions)

$$\begin{array}{l} \theta_j(x, 0) = {\theta_0}^j(x), \quad 0 \leq x \leq L_j, \quad t = 0, \\ \theta_j(0) = \theta_0, \ \forall j, \quad {\theta_0}^j(x) \in C^2(R_+) \end{array} \tag{2}$$

Here we consider the two boundary value problems (BVP), $R_+^1 = \{t \in [0, \infty)\}$

Roben's conditions (BVP1). Temperature values are known at the ends of the graph:

$$\begin{array}{l} \alpha_1 \theta_1^1(t) + \beta_1 \Pi_1^1(t) = \Lambda_1(t), \ t \geq 0, \ \Lambda_1(t) \in L(R_+^1), \\ \alpha_N \theta_1^N(t) + \beta_N \Pi_1^N = \Lambda_N(t), \ t \geq 0, \ \Lambda_2(t) \in L(R_+^1). \end{array} \tag{3}$$

Here and further $\theta_1^j(t) = \theta_j(0, t)$, $\theta_2^j(t) = \theta_j(L_j, t)$ $q_1^j(t) = \left.\frac{\partial \theta_j}{\partial x}\right|_{x=0}$, $\quad q_2^j(t) = \left.\frac{\partial \theta_j}{\partial x}\right|_{x=L_j}$, $\Pi_j^i(t) = \kappa_i q_j^i(t)$.
The following continuity conditions and transmission conditions are specified in the nodes A_j of the graph, $j = 2, ..., N-1$.

Transmission conditions:

$$\begin{array}{l} \theta_2^j(t) = \theta_1^{j+1}(t), \quad j = 1, ..., N-1, \quad t \geq 0, \\ \theta_1^1(0) = \theta(0, 0), \quad \theta_2^N(0) = \theta_N(L_N, 0) \end{array} \tag{4}$$

$$\Pi_2^i(t) = \Pi_1^{j+1}(t) + Q^j(t), \ j = 1, ..., N-1, \ t \geq 0. \tag{5}$$

We find the solutions of these BVP by use Generalized Function Method [1, 2]. The next theorem has been proved.

Theorem 1. *The Fourier transform of boundary value problem solution* (1) - (5) *on the thermal graph has the form:*

$$\begin{array}{r} \bar{\theta}_j(x_j, \omega) H(L - x_j) H(x_J) = \\ = H(x_j) \int\limits_0^{L_j} \bar{U}\left(x_j - y, \omega\right) F_j(y, \omega) dy + \kappa_j H(x_j) \int\limits_0^{L} \bar{U}(x_j - y, \omega) \theta_0^j(y) dy + \\ + \kappa_j \bar{q}_2^j(\omega) H(x) \bar{U}_j(L_j - x, \omega) - \kappa_j \bar{q}_1^j(\omega) H(L_j - x_j) \bar{U}_j(x_j, \omega) - \\ - \kappa_j \bar{\theta}_2^j(\omega) H(x_j) \bar{U}_{j, x_j}(L_j - x_j, \omega) - \kappa_j \bar{\theta}_1^j(\omega) H(L_j - x_j) \bar{U}_{j, x_j}(x_j, \omega). \end{array} \tag{6}$$

Here Fourier transform over time of Green's function of heat equation is equal to

$$\bar{U}_j(x, \omega) = -\frac{\sin(k_j |x|)}{2 k_j \kappa_j}, \ \bar{U}_{j,x}(x, \omega) = -\frac{sgn x}{2\kappa_j} \cos(k_j |x|), \ k_j = (1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa_j}}$$

The boundary temperatures and the derivative on each edges of graphs

$$\left(\bar{\theta}_1^1(\omega), \bar{q}_1^1(\omega), \bar{\theta}_2^1(\omega), \bar{q}_2^1(\omega), ..., \bar{\theta}_1^N(\omega), \bar{q}_1^N(\omega), \bar{\theta}_2^N(\omega), \bar{q}_2^N(\omega)\right) = B(\omega),$$

are the solution of resolving an algebraic system of equations:

$$\mathbf{A}(\omega) \times B(\omega) = C(\omega),$$

where $C(\omega)$ defined by acting heat sources $F_j(x,t)$ (1) and boundary and transmission condition (3), (4).

The matrix $\mathbf{A}(\omega)$ of the boundary value problem has been constructed by analogy [3]. Then, by using the formula of inverse Fourier transformations, we calculate the original solution – the temperature at every point of the graph. So BVPs have been solved.

This algorithm can be used to study various network-like structures under conditions of thermal heating (cooling). A unified technique has been developed for solving various boundary value problems typical for practical applications.

Funding: This research is funded by the Science Committee the Ministry of Science and Higher Education and of the Republic of Kazakhstan (Grant AP23488145 2024-2026).

Keywords: thermoelasticity, rod, boundary conditions, transmission condition, fundamental and generalized solutions, Fourier transform, resolving boundary equations.

2010 Mathematics Subject Classification: 35M10, 35K05, 35L05, 94C15

BIBLIOGRAPHY

[1] Vladimirov V.S. *Generalized functions in mathematical physics*, Nauka, Moscow, (1978).

[2] Alexeyeva, L.A. Distributions method in nonstationary boundary value problems for wave equations, *Mathematical Journal*, - 2006 - vol. 6(1), pp.16–32.
Retrieved from https://math.kz/media/journal/journal2017-06-0785859.pdf

[3] Alexeyeva L.A., Dadayeva A.N., Ainakeyeva N.Zh. Periodic boundary value problems on thermoelastic star graphs and their solutions by use general function method, *Acceloron aerospace journal (AAJ)*, - 2024 - vol. 3, Issue 6. https://acceleron.org.in/index.php/aaj/article/view/200.

Comparison principle for nonlinear parabolic equations with nonlocal source and gradient absorption and applications

Z. AMIRZHANKYZY

SDU, Kaskelen, Kazakhstan

zhaniyaamirzhankyzy@gmail.com

In this talk, we consider the following initial-boundary value problem:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \\ \quad \alpha |u|^{k-1} u \displaystyle\int_\Omega |u|^s dx - \beta |u|^{l-1} u |\nabla u|^q + \gamma u^m + \mu |\nabla u|^r \\ \quad - \nu |u|^{\sigma - 1} u, \qquad x \in \Omega,\ t > 0, \\ u = 0, \qquad x \in \partial\Omega,\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

where Ω is a bounded domain of $\mathbb{R}^N, N \geq 1$ with a smooth boundary $\partial\Omega$, α, l, $\sigma > 0$, β,$\nu \geq 0$, k,m,$s \geq 1$, $r \geq p-1 \geq \frac{p}{2}$, γ, $\mu \in \mathbb{R}$.

In this talk, we present the comparison principle for problem (1). Moreover, we discuss its application to the study of global well-posedness and blow-up properties of weak solutions to problem (1). Our research is inspired by the works [1], [2], [3], and [4].

This talk is based on joint research with Nurgissa Yessirkegenov (KIMEP University and Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Kazakhstan).

Keywords: nonlinear parabolic equation, comparison principle, sub- (super-) solution, global well-posedness, blow-up, weak soultion.

2010 Mathematics Subject Classification: 35K55

References

[1] Li Y., Zhang Z., Zhu L.Classification of certain qualitative properties of solutions for the quasilinear parabolic equations *Sci. China Math.*, **61** (2018), 855-868.

[2] Chaouai Z. and El Hachimi A.Qualitative properties of weak solutions for p-laplacian equations with nonlocal source and gradient absorption *Bull. Korean Math.*, **57** (2020), no. 4, 1003-1031.

[3] Zhang Z.,Li Y.Blowup and existence of global solutions to nonlinear parabolic equations with degenerate diffusion *Electronic Journal of Differential Equations* **2013** (2013), no.264, 1-17.

[4] Lin H.,Li F., Nie Z.Blowup property of solutions in the parabolic equation with p-Laplacian operator and multi-nonlinearities, Applicable Analysis *An International Journal, Applicable Analysis*, **102** (2023) 3842-3860.

Solution of multilayer problems for the heat equation by the Fourier method

S.M. BARMAGAMBETOV[1], U.K. KOILYSHOV[2]

[1,2]*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[1,2]*Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*
[1]saginish.2000@mail.ru, [2]koylyshov@math.kz

In the works [1-2] Sturm type boundary value problems for the heat equation with discontinuous coefficients were considered in the case of one discontinuity point. This work is devoted to the substantiation of the Fourier method for solving multilayer diffusion problems. Mathematical models of diffusion in layered materials arise in the many industrial, environmental, biological, medical applications and in the theory of thermal conductivity of composite materials.

Let us consider an initial-boundary value problem for the heat conduction equation with a discontinuous coefficient

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k_i^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1}$$

in the domain $\Omega = \bigcup \Omega_i$ $\Omega_i = \{(x,t) : l_{i-1} < x < l_i, 0 < t < T\}, \quad (i = 1, 2, ..., m)$ with the initial conditions

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad l_0 \le x \le l_m, \tag{2}$$

and the boundary conditions of the following type

$$\begin{cases} \alpha_1 \frac{\partial u_1(l_0,t)}{\partial x} + \beta_1 u_1(l_0, t) = 0 \\ \alpha_2 \frac{\partial u_m(l_m,t)}{\partial x} + \beta_2 u_m(l_m, t) = 0 \end{cases} \quad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

and the conjugation conditions

$$u_i(l_i - 0, t) = u_{i+1}(l_i + 0, t), \quad 0 \le x \le T, \tag{4}$$

$$k_i \frac{\partial u_i(l_i - 0, t)}{\partial x} = k_{i+1} \frac{\partial u_{i+1}(l_i + 0, t)}{\partial x}, \quad 0 \le x \le T, \quad (i = 1, 2, ..., m - 1) \tag{5}$$

Coefficients $k_i > 0, \alpha_j, \beta_j, (i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2)$ are real numbers. Moreover $|\alpha_1| + |\beta_1| > 0, |\alpha_2| + |\beta_2| > 0$. The following theorem holds.

Theorem 1. *Let $\varphi(x)$ be a twice continuously differentiable function satisfying the conditions*

$$\alpha_1\varphi'(l_0)+\beta_1\varphi(l_0)=\alpha_2\varphi'(l_m)+\beta_2\varphi(l_m)=0,$$

$$\varphi(l_i-0)=\varphi(l_i+0), \quad k_i\varphi'(l_i-0)=k_{i+1}\varphi'(l_i+0), \quad (i=1,2,...,m-1).$$

Then the function $u(x,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi_n X_n(x)e^{-\lambda_n t}$, *where the coefficients* φ_n *are determind by the formula* $\varphi_n=\int_{l_0}^{l_m}\varphi(x)X_n(x)dx$, *is the only classical solution to problem (1)-(5), where*

$$X_n(x)=C_n\begin{cases}\Phi(\lambda_n,\frac{x-l_0}{k_1}), & l_0<x<l_1,\\ \Phi(\lambda_n,s_1+\frac{x-l_1}{k_2}), & l_1<x<l_2,\\ \Phi(\lambda_n,s_2+\frac{x-l_2}{k_3}), & l_2<x<l_3,\\ \dots\dots\dots\dots\dots & \\ \Phi(\lambda_n,s_{m-2}+\frac{x-l_{m-2}}{k_{m-1}}), & l_{m-2}<x<l_{m-1},\\ \Phi(\lambda_n,s_{m-1}\frac{x-l_{m-1}}{k_m}), & l_{m-1}<x<l_m,\end{cases}$$

$$s_m=\sum_{i=1}^{m}\frac{l_i-l_{i-1}}{k_i}, \quad \Phi(\lambda_n,x)=\alpha_1 cos(\sqrt{\lambda_n}x)-\beta_1\frac{k_1}{\sqrt{\lambda_n}}sin(\sqrt{\lambda_n}x), \quad C_n=\Big(\int_{l_0}^{l_m}X_n^2(x)dx\Big)^{-\frac{1}{2}}$$

where λ_n- are the roots of the following characteristic equation:

$$\Delta(\lambda_n)=\alpha_1\alpha_2\lambda_n sin\Big(s_m\sqrt{\lambda_n}\Big)-(\alpha_1\beta_2k_2-\alpha_2\beta_1k_1)\sqrt{\lambda_n}cos\Big(s_m\sqrt{\lambda_n}\Big)+\beta_1\beta_2k_1k_m sin\Big(s_m\sqrt{\lambda_n}\Big)=0.$$

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. BR20281002).

Keywords: Heat equation, Fourier method, spectral problem, orthonormal basis.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

References

[1] Koilyshov U.K., Sadybekov M.A Two-phase tasks of thermal conductivity with boundary conditions of the Sturm type. Sixth International Conference on Analysis and Applied Mathematics. Abstract book of the conference ICAAM, 31.10.2022-06.11.2022, Antalya, Turkey.

[2] Koilyshov U.K., Sadybekov M.A Two-phase heat conduction problems with Sturm-type boundary conditions, *Boundary Value Problems*, **2024**:149 (2024).https://doi.org/10.1186/s13661-024-01964-x

Diffusion Equation and Dunkl–Laplacian Operator

B. BEKBOLAT[1], A. ZHAKSYLYKOVA[2]

[1,2]*SDU University, Kaskelen, Kazakhstan*

[1]bayan.bekbolat@sdu.edu.kz, [2]241101001@sdu.edu.kz

A diffusion equation describes how things like heat or particles spread over time. The Dunkl operator is a mathematical tool that helps analyze equations with symmetry and reflection properties. This thesis studies how to solve diffusion equations using Dunkl operators in a domain with a missing point.

The Dunkl operator modifies traditional differentiation by adding reflection effects:

$$\Lambda_\alpha h(x)=\frac{d}{dx}h(x)+\frac{2\alpha+1}{x}\frac{h(x)-h(-x)}{2}.$$

This operator is useful in problems with symmetrical properties.

A fractional derivative extends the idea of differentiation to non-integer values, which helps model processes with memory effects:

$$D_{0+,t}^{\gamma}u(t,x,y)=\frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\int_0^t(t-\tau)^{-\gamma}\frac{\partial u}{\partial \tau}d\tau.$$

This is helpful for studying diffusion in complex systems.

We consider the equation:

$$D_{0+,t}^{\gamma}u(t,x,y)-\Lambda_\alpha^2 u(t,x,y)+\Delta_\theta u(t,x,y)=f(x,y).$$

Using Fourier and Dunkl transforms, we prove that a unique solution exists and find explicit formulas to describe it.

Sometimes, we know the result but not the cause. The inverse problem aims to determine the unknown function $f(x,y)$ based on given final observations. This is solved using eigenfunction expansions and stability techniques.

By using Dunkl operators and fractional derivatives, we solve diffusion equations in a domain with missing points. This method improves our understanding of diffusion processes and has applications in mathematical physics.

References

[1] C.F. Dunkl, "Differential-difference operators associated with reflection groups," Trans. Amer. Math. Soc., 1989.

[2] B. Bekbolat et al., "The diffusion equation involving the Dunkl–Laplacian operator in a punctured domain," Fractal Fract., 2024.

Optimal Exercise Boundaries for American Options and Greek Alphabets for Hedging

K.M. BERIKBAYEV

SDU University, Kaskelen, Kazakhstan

k.berikbayev@sdu.edu.kz

The study of optimal exercise boundaries for American options and their associated Greek alphabets for hedging has its roots in the foundational work of Black and Scholes [1] and Merton [2], who laid the groundwork for modern option pricing theory. The early exercise feature of American options, which distinguishes them from their European counterparts, was first rigorously analyzed by Kim [3], who provided an analytical framework for determining the optimal exercise boundary. In recent years, significant advancements have been made by Broadie and Detemple [4], who developed efficient numerical methods for pricing American options under various stochastic models. These contributions have paved the way for a deeper understanding of the interplay between optimal exercise strategies and the Greek alphabets, which are crucial for effective hedging in financial markets.

In this talk, we present a detailed analysis of optimal exercise boundaries for American options under stochastic models, along with their associated Greek alphabets for hedging. Our goal is to derive explicit formulas, develop efficient numerical methods, and provide practical insights into the behavior of these boundaries and Greeks under various market conditions. Building on the work of Longstaff and Schwartz [5], we propose a novel numerical algorithm for computing these boundaries and Greeks efficiently, even in high-dimensional settings.

This thesis is the result of collaborative research conducted with Rakhymzhan Kazbek (Nazarbayev University and SDU University).

Keywords: American options, optimal exercise boundaries, Greek alphabets, hedging, stochastic models.

References

[1] Black F., Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy*, **81**:3 (1973), 637–654.

[2] Merton R.C. Theory of rational option pricing, *Bell Journal of Economics and Management Science*, **4**:1 (1973), 141–183.

[3] Carr P., Jarrow R., Myneni R. Alternative characterizations of American put options, *Mathematical Finance*, **2**:2 (1992), 87–106.

[4] Broadie M., Detemple J. Option pricing: Valuation models and applications, *Management Science*, **50**:9 (2004), 1145–1177.

[5] Longstaff F.A., Schwartz E.S. Valuing American options by simulation: A simple least-squares approach, *Review of Financial Studies*, **14**:1 (2001), 113–147.

[6] Kazbek R., Erlangga Y., Amanbek Y., Wei D. Pricing convertible bonds with the penalty TF model using finite element method, *Computational Economics*, **2024**, 1–28.

Investigation of the solvability of the non-regular multidimensional boundary value problem for the parabolic equations

G.I. BIZHANOVA

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

galina_math@mail.ru

Here we study a nonlinear two-phase multidimensional problem for the parabolic equation with two small parameters $\varepsilon > 0,\ \kappa > 0$ on the free boundary.

The one-phase linear parabolic problem with one small parameter was investigated in [1].

After the transformation of the unknown domains into given ones with the help of the Hanzawa mapping [2], constructing auxiliary functions by the initial data of the problem and substitution of the unknown functions, the problem can be written conventionally in the form $A[w] = F + N[w]$, where $w = (u_1,\, u_2,\, \psi)$ are new unknown functions, ψ is a function of a free boundary, $A[w],\ N[w]$ are linear and nonlinear operators, F is a given vector-function.

On the basis of the solution to the linear problem $A[w] = F$, there is the corresponding model two-phase problem.

Let $D_1 := (x : x' \in \mathbb{R}^{n-1},\ x_n \in (-\infty, 0))$, $D_2 := (x : x' \in \mathbb{R}^{n-1},\ x_n \in (0, \infty))$, $R := (x : x' \in \mathbb{R}^{n-1},\ x_n = 0)$, $D_{jT} := D_j \times (0,T)$, $j = 1,2$, $R_T := R \times (0,T)$, $x = (x', x_n)$, $x' = (x_1, \ldots x_{n-1})$, $n \geq 2$.

It is required to find the solution $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$, $\psi(x',t)$ of the following problem:

$$\partial_t u_j - a_j \Delta u_j - b_j(\partial_t \psi - a_j \Delta' \psi) = f_j(x,t) \text{ in } D_{jT}, \quad j = 1,2, \tag{1}$$

$$\psi|_{t=0} = 0,\ u_j\,|_{t=0} = 0 \text{ in } D_j, \quad j = 1,2, \tag{2}$$

$$u_1|_{x_n=0} = \eta_1(x',t),\ u_2|_{x_n=0} = \eta_2(x',t), \quad t \in (0,T), \tag{3}$$

$$(\varepsilon\, \partial_t \psi + \kappa\, \bar{b}\, \nabla^T u_1 - \bar{c}\, \nabla^T u_2)\,|_{x=0} = \varphi_1(x',\, t) + \varepsilon\, \varphi_2(x',\, t) + \kappa\, \varphi_3(x',\, t) \ \text{ on } R_T. \tag{4}$$

Here $a_j > 0,\ b_j,\ j = 1,2$ are constant coefficients; all given functions satisfy zero initial data, that is the compatibility conditions of all admissible orders are fulfilled on the boundary R_T; $b = (b_1, \ldots, b_n)$, $c = (c_1, \ldots, c_n)$ are constant vectors; $\nabla = (\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_n})$, ∇^T is vector –column; $\Delta' = \partial^2_{x_1} \ldots + \partial^2_{x_{n-1}}$, $\partial_t^k = \partial^k / \partial t^k$, $\partial_{x_i}^k = \partial^k / \partial {x_i}^k$, $k = 1,2,...,$ $i = 1, \ldots, n.$.

This problem is studied in the Hölder space $\overset{\circ}{C}{}_{x\ \ t}^{k+\alpha, \frac{k+\alpha}{2}}(\overline{\Omega}_T)$ of the functions $v(x,t)$ satisfying zero initial conditions with the norm $|v|_{\Omega_T}^{(k+\alpha)}$, $\alpha \in (0,1)$, $k = 0,1,...$ [3].

In the problem (1)–(4) we make the substitution $u_j = v_j + \beta\psi$, $j = 1,2$, where $v_1,\, v_2$ are the new unknown functions, exclude the given functions in (1), (3) with the help of suitable change of the unknown functions, then we obtain equivalent problem with zero in the right – hand sides in (1)–(3) and nonhomogeneous condition (4).

Applying Laplace with respect to t and Fourier on x' integral transforms we find the solution of the obtained equivalent problem in the explicit form expressing via heat potentials. We estimate their norms in the Hölder space and establish theorems of the existence, uniqueness and coercive estimates. Returning to the problem (1)–(4) we obtain theorems for the original problem with unknown functions u_1, u_2, ψ.

Let the given functions of the problem (1)–(4) are subjected to the following conditions:

$$f_j(x,t) \in \overset{\circ}{C}{}_{x}^{k+\alpha,}{}_{t}^{\frac{k+\alpha}{2}}(\overline{D}_{jT}),\ j=1,2; \tag{5}$$

$$\eta_j(x',t) \in \overset{\circ}{C}{}_{x'}^{2+k+\alpha,1+}{}_{t}^{\frac{k+\alpha}{2}}(R_T);\ \ \varphi_p(x',t) \in \overset{\circ}{C}{}_{x'}^{1+k+\alpha,}{}_{t}^{\frac{1+k+\alpha}{2}}(R_T), \tag{6}$$

$p = 1,\ 2,\ 3,\ \ k = 0,1,\dots,\ \ \alpha \in (0,1)$.

We formulate the main results.

Theorem 1 (Bizhanova-1)**.** *Let* $b_n > 0,\ c_n > 0,\ \ \varepsilon \in (0,\,\varepsilon_0]\ \ \kappa \in (0,\,\kappa_0],\ \ k = 0,\,1,\dots,\ \alpha \in (0,1)$, *and the conditions* (5)*,* (6) *be fulfilled.*

Then the problem (1)*–*(4) *has a unique solution* $u_j(x,t) \in \overset{\circ}{C}{}_{x}^{2+k+\alpha,1+}{}_{t}^{\frac{k+\alpha}{2}}(\overline{D}_{jT}),\ j=1,2$, $\psi \in \overset{\circ}{C}{}_{x'}^{2+k+\alpha,1+}{}_{t}^{\frac{k+\alpha}{2}}(R_T)$, $\varepsilon\,\partial_t\psi \in \overset{\circ}{C}{}_{x'}^{1+k+\alpha,}{}_{t}^{\frac{1+k+\alpha}{2}}(R_T)$, *and it satisfies the estimate*

$$\sum_{j=1}^{2}|u_j|_{D_{jT}}^{(2+k+\alpha)} + |\psi|_{R_T}^{(2+k+\alpha)} + |\varepsilon\partial_t\psi|_{R_T}^{(1+k+\alpha)} \le C_1 M_{k+\alpha},$$

$$M_{k+\alpha} := \sum_{j=1}^{2}\left(|f_j|_{D_{jT}}^{(k+\alpha)} + |\eta_j|_{R_T}^{(2+k+\alpha)}\right) + |\varphi_1|_{R_T}^{(1+k+\alpha)} + \varepsilon|\varphi_2|_{R_T}^{(1+k+\alpha)} + \kappa|\varphi_3|^{(1+k+\alpha|_{R_T})},$$

where the constant C_1 *does not depend on* ε *and* κ*.*

Theorem 2 (Bizhanova-2)**.** *Let* $b_n > 0,\ c_n > 0,\ \ \varepsilon \in (0,\,\varepsilon_0]\ \ \kappa \in (0,\,\kappa_0],\ \ k = 0,\,1,\dots,\ \alpha \in (0,1)$ *and the conditions* (5)*,* (6) *be fulfilled.*

Then the time derivative $\varepsilon\,\partial_t\psi$ *in the conjunction condition* (4) *of the problem* (1)*–*(4) *satisfies the estimate*

$$|\varepsilon\,\partial_t\psi|_{C_{x'}^{1+k+\beta,}{}_{t}^{\frac{1+k+\beta}{2}}(R_T)} \le C_2\,\varepsilon^{\frac{\alpha-\beta}{2}}\,M_{k+\alpha},\ \ \beta \in (0,\alpha/2),$$

where the constant C_2 *does not depend on* ε *and* κ*.*

Theorems 1 and 2 are in the base of the proof of the existence, uniqueness, and coercive estimates of linearized $A[w] = F$, and nonlinear $A[w] = F + N[w]$ problems in the Hölder space, as well as of the proof of the convergence of the solution of a fully or partially perturbed nonlinear problems with respect to the small parameters $\varepsilon,\ \kappa$ to the solutions of the corresponding partially or completely unperturbed problems as $\varepsilon \to 0,\ \kappa \to 0$ without loss of smoothness of limit solutions.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. BR20281002).

Keywords: free boundary problem, parabolic equation, small parameters, existence, uniqueness, estimates of solution, Hölder space.

2010 Mathematics Subject Classification: 35R35, 35K10, 35B20, 35C05, 35A09

References

[1] Bizhanova G. Solution of the nonregular problem for a parabolic equation with the time derivative in the boundary condition, Asymptotic Analysis, 130 (2022), 53–87.

[2] Hanzawa E.I. Classical solutions of the Stefan problem, Tohoku Math. J., 33:3 (1981), 297-335.

[3] Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Uraltceva N.N. Linear and quasilinear equations of parabolic type, Nauka, Moscow (1967).

Behavior of solutions to semilinear evolution inequalities in an annulus: the critical cases

M.B. BORIKHANOV

Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University, Turkistan, Kazakhstan
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

meiirkhan.borikhanov@ayu.edu.kz

In this paper, we analyze parabolic and hyperbolic inequalities with singular potentials and critical nonlinearities in an annular domain. The study includes Neumann and Dirichlet boundary conditions, as well as systems of such problems. We establish the global nonexistence of solutions in critical cases, extending the results of Jleli and Samet [1,2]. The proofs utilize a test function method with logarithmic terms, applied for the first time in bounded domains.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP14972726).

Keywords: parabolic equations, hyperbolic equations, critical exponent, global solutions.

2010 Mathematics Subject Classification: 35K70, 35A01, 35B44.

References

[1] Jleli M., Samet B. Nonexistence criteria for systems of parabolic inequalities in an annulus. *J. Math. Anal. Appl.*, **514**:2 (2022), 126352.

[2] Jleli M., Samet B. Nonexistence for nonlinear hyperbolic inequalities in an annulus. *Anal. Math. Phys.*, **12** (2022), 1–18.

Gradient Gibbs measures of SOS model associated with H_A-boundary laws on Cayley trees

R.A. ILYASOVA[1], F.H. HAYDAROV[2]

[1]*National University of Uzbekistan,Tashkent, Uzbekistan*
[2]*V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan*

[1]ilyasova.risolat@mail.ru, [2]f.khaydarov@newuu.uz

It is known that the problem of expressing periodic Gibbs measures corresponding to various Hamiltonians typically reduces to solving systems of algebraic equations. Due to the lack of general formulas for solving such systems, many difficulties arise. Initially, we analyze the solutions of the following system of equations:

$$\begin{cases} x = \left(\dfrac{ay+b}{cy+a+b-c}\right)^k \\ y = \left(\dfrac{ax+b}{cx+a+b-c}\right)^k \end{cases}, \tag{1}$$

which is a generalization of systems of equations encountered in many papers [2,3,5,11]. As an example for the case $b \neq c$, one can apply the result of the following proposition to the system of equations (4.3) analyzed in [11]. Applications of our proposition for the case $b = c$ will be explored later in Theorems 1 and 2.

Proposition 1. *Let $a, b, c > 0$ be real numbers satisfying the condition $a + b - c > 0$. The number of positive solutions (x, y) to the system (1) is determined by the value of $k \in \mathbb{N}$ and the relationship between a and c:*

1. *If $a = c$ or $k = 1$, then the system has exactly one solution which is $(x, y) = (1, 1)$.*
2. *If $a > c$ and $k > \dfrac{a+b}{a-c}$, then the system has exactly three distinct solutions which satisfy $x = y$.*
3. *If $a < c$ and $k > \dfrac{a+b}{c-a}$, then the system also has exactly three distinct solutions one solution satisfies $x = y$ and the other two satisfy the condition $x \neq y$.*

Definition 2. A family of vectors $\{l_{xy}\}_{\langle x,y\rangle \in \vec{L}}$, where $l_{xy} \in (0, \infty)^{\mathbb{Z}}$, is called a *boundary law for the transfer operators* $\{Q_b\}_{b \in L}$ if for each $\langle x, y\rangle \in \vec{L}$, there exists a constant $c_{xy} > 0$ such that the consistency equation

$$l_{xy}(\omega_x) = c_{xy} \prod_{z \in \partial x \setminus \{y\}} \sum_{\psi_z \in \mathbb{Z}} Q_{zx}(\omega_x - \psi_z) l_{zx}(\psi_z) \tag{2}$$

holds for every $\omega_x \in \mathbb{Z}$. A boundary law is called *q-periodic* if $l_{xy}(\omega_x + q) = l_{xy}(\omega_x)$ for every oriented edge $\langle x, y\rangle \in \vec{L}$ and each $\omega_x \in \mathbb{Z}$.

Gradient measures and gradient Gibbs measures are constructed using q-periodic boundary laws on the space of gradient configurations (see Chapters 3 and 4 in [12]). Theorem 3.1 establishes that for a vertex $\Lambda \in \mathcal{N}$ and class label $s \in \mathbb{Z}_q$, any q-periodic boundary law $\{l_{xy}\}_{\langle x,y\rangle \in \vec{L}}$ for $\{Q_b\}_{b \in L}$ defines a consistent family of probability measures (pinned gradient measures) on Ω^{∇}. Chapter 4 discusses a spatially homogeneous boundary law, with the gradient Gibbs measure given by equation (4.3).

Let G_k be the free product of $k+1$ cyclic groups of order two, with generators $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$. It is known that there is a one-to-one correspondence between the set of vertices V of the Cayley tree Γ^k and the group G_k(see Proposition 1.1 in [13]).

Any element $x \in G_k$ has the following form

$$x = a_{i_1} a_{i_2} ... a_{i_n}, \quad \text{where} \quad 1 \leq i_m \leq k+1,\ m = 1, ..., n.$$

The number n is called the length of the word and the number of letters $a_i, i = 1, ..., k+1$, that enter the non contractible representation of the word x is denoted by $\omega_x(a_i)$. Let $N_k = \{1, \ldots, k+1\}$, and define the set

$$H_A = \left\{ x \in G_k \mid \sum_{i \in A} \omega_x(a_i) \text{ is even} \right\}.$$

By Proposition 1.2 in [13], for any $\emptyset \neq A \subseteq N_k$, the set $H_A \subset G_k$ is a normal subgroup of index two.

Now, we define a spatially inhomogeneous boundary law associated with H_A (a H_A-boundary law), i.e., $\{l_{xy}\}_{\langle x,y\rangle \in \vec{L}} = \{l^{(1)}, l^{(2)}\}$ assuming $A = N_k$ as follows

$$l_{xy} = \begin{cases} l^{(1)}, & \text{if } x \in H_A \text{ and } y \in G_k \setminus H_A \\ l^{(2)}, & \text{if } y \in H_A \text{ and } x \in G_k \setminus H_A \end{cases}. \tag{3}$$

It is essential to observe that when $l^{(1)} = l^{(2)}$, the boundary conditions are spatially homogeneous [5,7,12]. Conversely, when $l^{(1)} \neq l^{(2)}$, the boundary conditions become spatially inhomogeneous, a phenomenon that is further investigated.

Definition 3. A configuration ω is called a G-admissible configuration on the Cayley tree if $\{\omega_x, \omega_y\}$ is the edge of the graph G for any pair of nearest neighbors x, y in V.

Let Ω_G denote the set of G-admissible configurations, Ω_G^{∇} indicate the set of G-admissible gradient configuration space and $L(G)$ be the set of edges of a graph G. We let $A \equiv A^G = (a_{ij})_{i,j\in\mathbb{Z}}$ denote the adjacency matrix of the graph G, i.e.,

$$a_{ij} = a_{ij}^G = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad \{i,j\} \in L(G) \\ 0 & \text{if} \quad \{i,j\} \notin L(G) \end{cases}.$$

Applying the matrix A to the system of boundary law equations (2) for the SOS model, restricted to the set of G-admissible configurations, results in

$$\begin{cases} z_i = \left(\dfrac{a_{i0}\theta^{|i|} + \sum_{j\in\mathbb{Z}_0} a_{ij}\theta^{|i-j|} t_j}{a_{00} + \sum_{j\in\mathbb{Z}_0} a_{0j}\theta^{|j|} t_j} \right)^k \\ t_i = \left(\dfrac{a_{i0}\theta^{|i|} + \sum_{j\in\mathbb{Z}_0} a_{ij}\theta^{|i-j|} z_j}{a_{0,0} + \sum_{j\in\mathbb{Z}_0} a_{0j}\theta^{|j|} z_j} \right)^k \end{cases}, \tag{4}$$

where $i \in \mathbb{Z}_0 := \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

It should be noted that for any graph with the vertex set $\mathbb{Z}$, the system of equations (4) simplifies to the form (1). It is easily demonstrable that by altering the graph, one can derive parameter values b and c such that $b \neq c$. Specifically, the scenario where $b = c$ is examined for two selected graphs throughout the paper. Let G_1 be the complete graph with vertex set $\mathbb{Z}$, where each vertex has a loop, i.e., $a_{ij} = 1$ for all $i, j \in \mathbb{Z}$.

Theorem 4. *Let $\theta_{cr} = \dfrac{\sqrt{k}-1}{\sqrt{k}+1}$ with $k \geq 2$. Then 2-height periodic boundary law of the type (3) determines 2-height periodic spatially homogeneous boundary law. Consequently, for the SOS model on Cayley tree of order k with the parameter $\theta \in (0, \theta_{cr})$ there exist precisely three 2-height periodic GGMs on $\Omega_{G_1}^{\nabla}$.*

Keywords: SOS model, gradient configuration, G-admissible configuration, spin values, Cayley tree, gradient measure, gradient Gibbs measure, two periodic boundary law.

2010 Mathematics Subject Classification: 60K35 (primary); 82B05, 82B20 (secondary)

References

[1] Friedli S., Velenik Y. *Statistical mechanics of lattice systems. A concrete mathematical introduction*, Cambridge University Press, Cambridge, (2018).

[2] Ganikhodjaev N.N., Khatamov N.M., Rozikov U.A. Gradient Gibbs measures of an SOS model with alternating magnetism on Cayley trees, *Reports on Mathematical Physics*, **92**:3 (2023) 309–322.

[3] Haydarov F.H., Ilyasova R.A. Gradient Gibbs measures with periodic boundary laws of a generalised SOS model on a Cayley tree, *J. Stat. Mech. Theory Exp.*, vol. 123101 (2023), 12 pp.

[4] Henning F. Gibbs measures and gradient Gibbs measures on regular trees. PhD Thesis, Ruhr University, (2021), 109 pp.

[5] Haydarov F.H., Rozikov U.A. Gradient Gibbs measures of an SOS model on Cayley trees: 4-periodic boundary laws, *Reports on Mathematical Physics*, **90**:1 (2022) 81–101.

[6] Henning F., Külske C. Height-offset variables and pinning at infinity for gradient Gibbs measures on trees, DOI:10.48550/arXiv.2411.13465, (2024)

[7] Henning F., Külske C, Le Ny A, Rozikov U.A. Gradient Gibbs measures for the SOS model with countable values on a Cayley tree, *Electron. J. Probab*, **24**:104 (2019) 23 pp.

[8] Henning F., Külske C. Existence of gradient Gibbs measures on regular trees which are not translation invariant., *Ann. Appl. Probab*, **33**:4 (2023) 3010–3038.

[9] Henning F., Külske C. Coexistence of localized Gibbs measures and delocalized gradient Gibbe measures on trees, *Ann. Appl. Probab*, **31**:5 (2021) 2284–2310.

[10] Ilyasova R.A. Height-periodic gradient Gibbs measures for generalised SOS model on Cayley tree, *Uzbek Mathematical Journal*, **68**:2 (2024) 92–99.

[11] Khakimov R. M., Haydarov F. H. Translation-invariant and periodic Gibbs measures for the Potts model on the Cayley tree, *Theoretical and mathematical physics*, **289**:3 (2016) 286–295.

[12] Külske C., Schriever P. Gradient Gibbs measures and fuzzy transformations on trees, *Markov Process. Relat. Fields*, **23**:4 (2017) 553–590.

[13] Rozikov U.A. *Gibbs measures on Cayley trees*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, pp. xviii+385, 2013.

[14] Rozikov U.A. Mirror Symmetry of Height-Periodic Gradient Gibbs Measures of an SOS Model on Cayley Trees, *J. Stat. Phys.*, **188** (2022) 26 pp.

The amalgamatic curvature in isotropic spaces

Sh. ISMOILOV[1], G. KHOLMURODOVA[2]

[1,2] *Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan*

sh.ismoilov@nuu.uz

In classical curve geometry, a curve is termed a generalized helix if the ratio of its curvature to torsion remains constant. This concept naturally raises the question of whether such an idea can be applied to higher-dimensional geometric objects. Specifically, one might wonder if it's possible to study surfaces that show a similar relationship between mean curvature H and Gaussian curvature K. It could be worthwhile to explore both the ratios $\frac{K}{H}$ and $\frac{K}{H^2}$, and to investigate potential connections with curve theory. The origins of this idea can be traced back to the work of Weingarten [5,6]. Looking at the ratio $\frac{K}{H}$ in surface geometry could lead to interesting insights. Suppose we examine a surface patch where the mean curvature $H(p)$ equals 0 for all points p. In such a case, the ratio $\frac{K}{H}$ would define a function depending on the specific point on the surface, wherever it is applicable. If we denote the principal curvatures as κ_1 and κ_2, then this expression could also be interpreted as the harmonic ratio between the two real numbers κ_1 and κ_2. The goal is to define a geometric quantity that encapsulates the same information as this ratio. This led to the following definition in [4]:

Definition 1. Let $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ beasurface given by the smooth map φ. Then, the amalgamatic curvature at a point p on the surface is defined as [3]

$$A(p) = \frac{2|k_1||k_2|}{|k_1| + |k_2|}.$$

The amalgamatic curvature can be calculated as follows: $A = K/H$, where K is the Gaussian curvature and H is the mean curvature.

If the mean curvature at every point of the surface is $H(p) = 0$, the amalgamatic curvature encodes the surface's varying geometric properties and provides a balanced representation of the surface's curvature. These formulas and definitions can be used to explore analogies in surface geometry.

Let there be given a three-dimensional affine space A_3, set by an affine coordinate system. Let $X\{x_1, y_1, z_1\}$ and $Y\{x_2, y_2, z_2\}$ be vectors of the space A_3 in the coordinate system $Oxyz$.

We say the scalar product of vectors $X\{x_1, y_1, z_1\}$ and $Y\{x_2, y_2, z_2\}$ the number defined by the following rule:

$$(X,Y) = \begin{cases} (X,Y)_1 = x_1x_2 + y_1y_2 & if \ (X,Y)_1 \neq 0 \\ (X,Y)_2 = z_1z_2 & if \ (X,Y)_1 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Definition 2. The affine space A_3, in which the scalar product of vectors is calculated by formula (1), is called the isotropic space R_3^2. [1]

Let a regular surface F, given by the equation $z = f(x, y)$, be contained inside the sphere, and its boundary be the intersection of the sphere with a plane α.

We assume that the point $M(x_0, y_0, z_0) \in F$, and let π be the tangent plane to the surface at this point. Further we denote by M^* a point that is the dual image of the plane π with respect to $2z = x^2 + y^2$ sphere. When the point $M \in F$ changes on the surface F, then its image M^* generally forms a surface F^*.

Definition 3. We say the surface F^* the dual surface to the surface F with respect to isotropic sphere $2z = x^2 + y^2$. [2]

When F is regular and belongs to the class C^2, the dual surface has the equations:

$$\begin{cases} x^*(u, v) = f'_u(u, v), \\ y^*(u, v) = f'_v(u, v), \\ z^*(u, v) = u \cdot f'_u(u, v) + v \cdot f'_u(u, v) - f(u, v). \end{cases} \tag{2}$$

Where $(u, v) \in D \subset R_2$.

Theorem 4. *The amalgamatic curvature of the surface F in an isotropic space is equal to the inverse value of the mean curvature of the dual surface F^*, which is calculated with respect to an isotropic sphere.*

Keywords: Isotropic space, amalgamatic curvature, total curvature, mean curvature, dual surfaces.

2010 Mathematics Subject Classification: 39A14, 39A70, 53A25, 53A35, 53A40;

References

[1] Ismoilov, Sh. Sh. Geometry of the monge-ampere equation in an isotropic space. *Uzbek Mathematical Journal*, (2022), 65(2), 66 77.

[2] Artykbaev, A., Ismoilov, S. S. Special mean and total curvature of a dual surface in isotropic spaces. *International Electronic Journal of Geometry*, (2022), 15(1), 110.

[3] Brubaker, N.D.; Camero, J.; Rocha, O.R.; Suceava, B.D. A ladder of curvatures in the geometry of surfaces. *Int. Electron. J.* Geom. (2018), 11, 28–33 pp.

[4] Conley, C. T. R.; Etnyre, R.; Gardener, B.; Odom L.H.; and Suceavă, B.D., New Curvature Inequalities for Hypersurfaces in the Euclidean Ambient Space, *Taiwanese Journal of Mathematics*, 17 (2013), 885–895.

[5] Weingarten, J., Über eine Klasse auf einander abwickelbarer Flächen, *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 59 (1861), 382–393.

[6] Weingarten, J., Über die Flächen, derer Normalen eine gegebene Fläche berühren, *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 62, (1863), 61–63.

Synchronization of Fuzzy Reaction-Diffusion Neural Networks via Semi-intermittent Hybrid Control

S. KATHIRESAN[1], S.S. MOHANRASU[2], R. RAKKIYAPPAN[3], Ardak KASHKYNBAYEV[4]

[1]*Nazarbayev University, Astana, Kazakhstan*
[2,3,4]*Bharathiar university, Coimbatore, India*

kathiresan.sivakumar@nu.edu.kz

This paper addresses the problem of synchronizing fuzzy reaction-diffusion neural networks (FRDNNs) with time-varying transmission delays using aperiodic semi-intermittent hybrid controls and explores its application within the realm of image encryption. The main challenge in analyzing the dynamics of FRDNNs included diffusion terms with uncertainty, and the inclusion of fuzzy logic operations further increases the system's complexity. We propose a new concept called the average control width (ACW) for aperiodic semi-intermittent control (ASIC) systems; it is used in conjunction with the idea of average dwell time (ADT) for switched systems. A sufficient flexible condition for master-slave synchronization of neural networks using average-width semi-intermittent hybrid control assures ADT and ACW conditions. By utilizing these concepts, the proposed synchronization method can overcome the challenges posed by the diffusion terms and fuzzy logic operations in FRDNNs with time-varying transmission delays. Finally, the paper presents a theoretical framework for synchronizing FRDNNs with time-varying transmission delays using semi-intermittent hybrid control via LMI and suitable Lyapunov functional, validated through simulations. The proposed synchronization method is also applied to develop a novel chaos-based elliptic curve cryptography algorithm for medical image encryption.

Funding: This research is funded by the Committee of Science of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. BR21882172) and in part by the Nazarbayev University, Kazakhstan under Collaborative Research Program Grant No. 11022021CRP1509.

Keywords: Fuzzy reaction-diffusion neural networks, Synchronization, Semi-intermittent control, Linear matrix inequality, Image encryption

On the asymptotic of solution the electric-contact problem of Stefan's type in the spherical domain

A.A. KAVOKIN[1], S.A. KASSABEK[2]

[1]*SDU University, Kaskelen, Kazakhstan*
[2]*Astana IT University, Astana, Kazakhstan*

[1]kavokin-alex@yahoo.com , [2]samat.kassabek@astanait.edu.kz

In this work, an asymptotic representation of the solution of the problem with the free boundary (Stefan's type) is studied. Problem occurs during mathematical modeling of temperature in contact when its surface is heated by the electrical arcs, [1]. The mathematical model of process consists of the heat equations in spherical domains separated by the moving boundary $\alpha(t)$ between the liquid $D_1 : (r_0 < r < \alpha(t),\, t > 0)$ and solid $D_2 : (\alpha(t) < r < \infty,\, t > 0)$ phases of the contact material:

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} = \frac{a_i^2}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial T_i}{\partial r}\right), \quad i = 1, 2 \tag{1}$$

Initial and boundary conditions are:

$$T_2(r, 0) = f(r), \tag{2}$$

$$-\lambda \frac{\partial T_1\left(r_0, t\right)}{\partial r} = P\left(T_1\left(r_0, t\right), t\right), \tag{3}$$

$$T_1(\alpha(t), t) = T_2(\alpha(t), t) = 0, \tag{4}$$

Stefan's boundary condition:

$$\lambda_2 \frac{\partial T_2(\alpha(t), t)}{\partial r} - \lambda_1 \frac{\partial T_1(\alpha(t), t)}{\partial r} = \gamma \frac{\partial \alpha(t)}{\partial t}, \tag{5}$$

where $T_i(r, t)$ - the temperature, $a_i^2, \lambda_i, \gamma-$ he parameters of the contact material, $f(r), P\left(T_1, t\right)-$ known functions.

The most difficult part of the solving is to determine the boundary $\alpha(t)$ from the Stefan's condition. Suppose that for small values of t, an asymptotic formula takes place:

$$\alpha(t) \approx r_0 + c_1\theta + c_2\theta^2 + c_3\theta^3, \quad \theta = \sqrt{t}, \tag{6}$$

After replacement $T_i(r,t) = V_i(r,t)/r$, the heat equations take form:

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} = a_i^2 \frac{\partial^2 V_i}{\partial r^2}, \quad i = 1, 2. \tag{7}$$

From the initial and boundary conditions changes only the form of Stefan's condition:

$$\lambda_2 \frac{\partial V_2(\alpha(t), t)}{\partial r} - \lambda_1 \frac{\partial V_1(\alpha(t), t)}{\partial r} = \frac{\gamma}{2} \frac{\partial \alpha^2(t)}{\partial t}, \tag{8}$$

from which we get the asymptotic formula for $\alpha(t)$:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \alpha^2(t)}{\partial t} \approx \frac{r_0}{2\theta} c_1 + \left(\frac{1}{2} c_1^2 + r_0 c_2 \right) + \frac{3}{2} \left(r_0 c_3 + c_1 c_2 \right) \theta + O\left[\theta^2\right]. \tag{9}$$

For recurrent determination of the coefficients c_i, depending on the material parameters of contacts, taking into account the initial and boundary conditions, was used method described in [1], [2].

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AR19675480).

Keywords: Mathematical modelling, Stefan problem, asymptotic of the solution.

2010 Mathematics Subject Classification: 80A22, 74N20

References

[1] Kharin S.N. *Mathematical Models of Phenomena in Electrical Contacts*, Inst.of Information Systems SB RAS,(2017).

[2] Kavokin A.A. On the asymptotic continuity of solving the Stefan's problem of Stefan regarding the boundary conditions for small time, *Izvestia Academy of Sciences of the KazSSR Series Phys.-Mat.*, **1** (1976), 63–68.

Least-Square Monte Carlo methods for American options against Finite Difference Method

R. KAZBEK[1], M. BAIGALI[2]

[1]rakhymzhankazbek@gmail.com, [2]241101007@sdu.edu.kz

American options, exercisable at any time before expiration, present a significant valuation challenge due to the embedded optimal stopping problem. Traditional methods like the Finite Difference Method (FDM) face limitations in high-dimensional or path- dependent settings. This work rigorously compares the Least-Squares Monte Carlo (LSM) method, proposed by Longstaff and Schwartz (2001), with FDM, emphasizing mathematical foundations and computational efficiency.

The value of an American option is the supremum of expected discounted payoffs over all stopping times $\tau \leq T$:

$$V_0 = \sup_{\tau \leq T} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-r\tau} \Phi(S_\tau) \right],$$

where $\Phi(S_t)$ is the payoff function, and $\mathbb{Q}$ is the risk-neutral measure.

The Black-Scholes PDE for a put option with strike K and volatility σ is:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0,$$

with boundary conditions:

$$V(S,T) = \max(K - S, 0), \quad \lim_{S \to \infty} V(S,t) = 0, \quad V(0,t) = Ke^{-r(T-t)}.$$

Discretizing on a grid (S_i, t_j) yields a system of linear equations solved implicitly.

At each exercise time t_k, the continuation value $C(t_k, S_{t_k})$ is approximated using regression on basis functions $\{\psi_n(S)\}$:

$$C(t_k, S_{t_k}) \approx \sum_{n=0}^{N} \beta_n \psi_n(S_{t_k}),$$

where coefficients β_n minimize:

$$\min_{\{\beta_n\}} \sum_{m=1}^{M} \left(e^{-r\Delta t} V(t_{k+1}, S_{t_{k+1}}^{(m)}) - \sum_{n=0}^{N} \beta_n \psi_n(S_{t_k}^{(m)}) \right)^2 .$$

The exercise decision is:

$$\tau = \inf \left\{ t_k : \Phi(S_{t_k}) \geq C(t_k, S_{t_k}) \right\}.$$

The LSM method provides a flexible alternative to FDM for high-dimensional problems, albeit with higher computational cost. Its mathematical foundation in regression and Monte Carlo makes it particularly suited for path-dependent derivatives, while FDM remains superior for low-dimensional smooth problems.

Keywords: American Options, Least-Squares Monte Carlo (LSM), finite difference method (FDM), optimal stopping problem, Monte Carlo simulation, regression analysis, option Pricing

References

[1] Longstaff, F. A., Schwartz, E. S. Valuing American options by simulation: A simple least-squares approach. , *The Review of Financial Studies*, **14**:1 (2001), 113–147.

[2] Clément, E., Lamberton, D., Protter, P. An analysis of a least squares regression method for American option pricing., *Finance and Stochastics*, **6**:4 (2002), 449–471.

Mathematical models of heat and mass transfer in liquid electrical contact bridges

S.N. KHARIN

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakstan

staskharin@yahoo.com

The dynamics of a molten bridge appearing between electrical contacts at their opening can be described by two models. The first model describes bridging as the extension of a liquid metal zone appearing in the constriction region between opening contacts that is correct for easily melted materials such as Ag, Cu, and their alloys. The second one is based on the representation of a bridge formation as a result of the melting of a filament between contact surfaces. It is typical mainly for contacts at closure and for such refractory materials like W, Mo, C etc. Dynamics of heating, melting and evaporation of a micro-asperity which transforms to a liquid bridge can be estimated using this model. Both axisymmetric models of the evolution of a bridge with moving boundaries take into account rising temperature, electromagnetic and surface tension forces, thermoelectric effects and heat transfer exchange with the adjacent contact zone. All consecutive stages of bridge evolution including heating and melting of the constriction region (or the surface filaments), bridge extension and deformation, and its final rupture are considered in dynamics. It is shown that the main mechanism of bridging rupture is its explosion in a point where the temperature reaches the boiling value. In the range of low current this point may be shifted from the centre of the bridge due to Kohler and Thomson effects and its position defines the bridge material transfer. In the range of high current, the mechanism of the bridge rupture may be caused by compressed electromagnetic forces. The special form of a bridge, which appears for refractory contact materials at high current, is considered and modeled also. In this case, the melting of the contact spot begins from the edge of the contact spot and leads to a hollow cylindrical form of a bridge. For the quasi-stationary bridges the rupture may occur due to the forces of the surface tension. The form of such a bridge is defined using the variation principle of the minimum free energy required for the bridge formation.

The dependence of bridge dynamics on such parameters of contact materials as heat conductivity, electric resistivity, surface tension coefficient, specific heat of fusion and evaporation, inductance etc. are discussed. Results of calculation are compared with the experimental data.

Funding: These results are supported by the grant of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan No. AP BR20281002 for the years 2023-2025.

Keywords: electrical contacts, liquid bridges, mathematical modeling.

2010 Mathematics Subject Classification: 35R35, 80A22, 35K20

Kawahara equation in domains with moving boundaries

N.M. KOSHKARBAYEV

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

koshkarbayev@math.kz

The Kawahara equation was first derived by Kawahara in 1972 in [1] to describe long nonlinear waves in weakly dispersive media. It arises in study of the water waves with surface tension, in which the Bond number takes on the critical value, where the Bond number represents a dimensionless magnitude of surface tension in the shallow water regime (see [2, 3]).

For real $\tau \geq 0$, and D_τ is a time-moving interval: $D_\tau = \{\xi \in R \mid \alpha(\tau) < \xi < \beta(\tau)\}$ and Q_τ denote a bounded domain with moving boundaries: $Q_\tau = \{(\xi,\tau) \in R^2 \mid \xi \in D_\tau, \tau \in (0,T), T > 0\}$. In Q_τ we consider the classical Kawahara equation

$$\vartheta_\tau - \vartheta_{\xi\xi\xi\xi\xi} + \vartheta_{\xi\xi\xi} + \vartheta\vartheta_\xi = 0 \tag{1}$$

subject to initial and boundary conditions:

$$\vartheta(\xi,0) = \vartheta_0(\xi), \xi \in D_0. \tag{2}$$

$$\begin{aligned} &\vartheta(\alpha(\tau),\tau) = \phi_1(\tau), \vartheta(\beta(\tau),\tau) = \phi_2(\tau),\\ &\vartheta_\xi(\alpha(\tau),\tau) = \phi_3(\tau), \vartheta_\xi(\beta(\tau),\tau) = \phi_4(\tau),\\ &\vartheta_{\xi\xi}(\beta(\tau),\tau) = \phi_5(\tau) \end{aligned} \tag{3}$$

with $(\phi_1,\phi_2,\phi_3,\phi_4,\phi_5,\alpha,\beta)(\tau) \in C^2([0,\infty))$ and

$$0 < \alpha_0 \leq \beta(\tau) - \alpha(\tau) \leq \beta_0 < \infty$$

for all $\tau \geq 0$.

The obtain regular solutions, we impose the following compatibility conditions:

$$\begin{aligned} &\phi_1(0) = \vartheta_0(\alpha(0)), \phi_2(0) = \vartheta_0(\beta(0)), \phi_3(0) = \vartheta_0'(\alpha(0)),\\ &\phi_4(0) = \vartheta_0'(\beta(0)), \phi_5(0) = \vartheta_0''(\beta(0)). \end{aligned} \tag{4}$$

We adopt the usual notation $\|\cdot\|(\tau)$ to denote the norm in $L^2(D_\tau)$.

The main results of the paper are the following theorems.

Theorem 1. *Let $\vartheta_0 \in H^5(D_0)$ and compatibility conditions (4) hold. Then for all finite $T > 0$ there exists a unique strong solution to problem (1)-(3) such that*

$$\begin{aligned} &\vartheta \in L^\infty(0,T;H^5(D_\tau)),\\ &\vartheta_t \in L^\infty(0,T;L^2(D_\tau)) \cap L^2(0,T;H^1(D_\tau)). \end{aligned}$$

.

Theorem 2. *Suppose*

$$(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \phi_5, \alpha^{'}, \beta^{'})(\tau) \in L^1(0,\infty) \cap L^\infty(0,\infty),$$

and for all $\tau > 0$ *and any* $k > 0$ *one can find real numbers* $\gamma \in (0,k)$ *and* $\Phi_0 > 0$ *such that*

$$\int_0^\tau e^{ks}[|\phi_1| + |\phi_2| + |\phi_3| + |\phi_4| + |\phi_5| + |\alpha^{'}| + |\beta^{'}|](s)\, \mathrm{d}s \le \Phi_0 e^{\gamma\tau}.$$

Then there exist real numbers $\delta > 0, \zeta > 0$ *and* $V_0 > 0$ *such that is*

$$(\|\vartheta_0\| + \int_0^\infty [|\phi_1| + |\phi_2| + |\phi_3| + |\phi_4| + |\phi_5| + |\alpha^{'}| + |\beta^{'}|]\, \mathrm{d}\tau) \le \delta,$$

$$\|\vartheta\|(\tau) \le V_0 e^{-\zeta\tau}.$$

The paper considered an initial-boundary value problem in a bounded domain with moving boundaries and inhomogeneous boundary conditions for the Kawahara equation. The existence and uniqueness of strong global solutions are proved, as well as the exponential decrease of small solutions in asymptotically cylindrical domains.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP22686595).

Keywords: kawahara equation, moving boundary, qlobal solutions.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

References

[1] Kawahara T. Oscillatory solitary waves in dispersive media, J. Phys. Soc. Japan, 33 (1972), 260-264.

[2] A. V. Marchenko On long waves in shallow water under ice cover, Prikl. math. fur., 52 (1988), no. 2, 230-234.

[3] AT Il'ichev On the properties of a fifth-order nonlinear evolution equation describing wave processes in media with weak dispersion// Proceedings of MIAN, 186(1989), 222–226.

Threshold analysis of the Laplacian with non-local potential in four-dimensional lattice

O.I. KURBONOV

[1]*Chirchik state pedagogical university, Tashkent region, Uzbekistan*

oybekq330@gmail.com

Introduction. Eigenvalue behaviour of a family of discrete Schrödinger operators H_α depending on parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ is studied on the three-dimensional lattice $\mathbb{Z}^4$. The non-local potential is described by the Kronecker delta function and the shift operator. The characteristics of the Fredholm determinant at values of z below the essential spectrum and their dependence on the parameters are studied. We also show that the essential spectrum absorbs the threshold eigenvalue and threshold resonance. In this paper, we set a goal to explore the spectrum of the discrete Schrödinger operator with a non-local potential given at the points $x_0, -x_0 \in \mathbb{Z}^4$. We demonstrate the feature of the Fredholm determinant outside the essential spectrum depending on the parameter α, and the sum of coordinates of the point $x_0 \in \mathbb{Z}^4$. We show clearly by Theorem 1 that the existence conditions for the point $z = 0$ to be an eigenvalue or resonance for a given operator and their parameter α depend on them.

1. The discrete Schrödinger operator

For brevity, we use the following notations throughout the paper: $\mathbb{Z}^4$ is the 4–dimensional lattice and $\mathbb{T}^4 = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^4 = (-\pi,\pi]^4$ is the 4-dimensional torus (the first Brillouin zone, i.e., the dual group of $\mathbb{Z}^4$) equipped with the Haar measure.

Let $T(y), y \in \mathbb{Z}^4$ be the shift operator

$$(T(y)f)(x) = f(x+y), \quad f \in \ell_2(\mathbb{Z}^4), x \in \mathbb{Z}^4.$$

the discrete Laplacian $\widehat{\Delta}$ on the lattice $\mathbb{Z}^4$ is described by the self-adjoint (bounded) multidimensional Toeplitz-type operator on the Hilbert space $\ell_2(\mathbb{Z}^4)$ as

$$\widehat{\Delta} = \frac{1}{2}\sum_{\substack{s\in\mathbb{Z}^4\\|s|=1}}(T(s)-T(0)).$$

Let V_0 be a multiplication operator in $\ell_2(\mathbb{Z}^4)$ by the Kronecker delta function $\delta[\cdot,0]$:

$$V_0 f(x) = \delta[x,0]f(x).$$

Then, for a given point $x_0 \in \mathbb{Z}^4$, we define the non-local potential as

$$\widehat{V}_{x_0} = \frac{\alpha}{2}(V_0T(x_0) + T^*(x_0)V_0) + \frac{\alpha}{2}(V_0T(-x_0) + T^*(-x_0)V_0).$$

The discrete Schrödinger operator $\widehat{H}_\alpha$ acting in $\ell_2(\mathbb{Z}^4)$, in *the position representation*, is defined as a bounded self-adjoint perturbation of $-\widehat{\Delta}$ and is of the form

$$\widehat{H}_\alpha = -\widehat{\Delta} - \widehat{V}_{x_0}. \tag{1}$$

In *the momentum representation*, the one-particle Hamiltonian H_α can be expressed as

$$H_\alpha = H_0 - V_{x_0}, \tag{2}$$

where H_0 and V_{x_0} are respectively defined as

$$H_0 = \mathcal{F}^*(-\widehat{\Delta})\mathcal{F} \quad \text{and} \quad V_{x_0} = \mathcal{F}^*(\widehat{V}_{x_0})\mathcal{F},$$

with $\mathcal{F}$ being the standard Fourier transform $\mathcal{F}: L_2(\mathbb{T}^4) \to \ell_2(\mathbb{Z}^4)$ and $\mathcal{F}^*: \ell_2(\mathbb{Z}^4) \to L_2(\mathbb{T}^4)$ being its inverse. Explicitly, the non-perturbed operator H_0 acts on $L_2(\mathbb{T}^4)$ as a multiplication operator by the function $\mathfrak{e}(\cdot)$:

$$(H_0 f)(p) = \mathfrak{e}(p)f(p), \quad f \in L_2(\mathbb{T}^4),$$

where $\mathfrak{e}(p) = \sum_{j=1}^4(1-\cos p_j), p \in \mathbb{T}^4$. The function $\mathfrak{e}(\cdot)$, being a real valued-function on $\mathbb{T}^4$, is referred as the dispersion relation of the Laplace operator in the physical literature. The perturbation V_{x_0} acts on $f \in L_2(\mathbb{T}^4)$ as the two-dimensional integral operator:

$$(V_{x_0}f)(p) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int\limits_{\mathbb{T}^4}\alpha(\cos(x_0,p)+\cos(x_0,s))f(s)ds, \quad f \in L_2(\mathbb{T}^4).$$

2. The essential spectrum of H_α The perturbation V_{x_0} of H_0 is a two dimensional operator, therefore in accordance with the Weyl theorem on the stability of the essential spectrum, the equality $\sigma_{\text{ess}}(H_\alpha) = \sigma(H_0) = \sigma_{\text{ess}}(H_0)$ holds. As H_0 is the multiplication operator by the continuous function $\mathfrak{e}(\cdot)$,

$$\sigma_{\text{ess}}(H_\alpha) = [\mathfrak{e}_{min}, \mathfrak{e}_{max}] = [0,8].$$

3. The Fredholm determinant associated with H_α

First, for a complex number $z \in \mathbb{C} \setminus [0,8]$, let us introduce the following integrals

$$A(z) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int\limits_{\mathbb{T}^4} \frac{1}{\mathfrak{e}(t) - z} dt;\ B(z) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int\limits_{\mathbb{T}^4} \frac{\cos(x_0, t)}{\mathfrak{e}(t) - z} dt;\ C(z) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int\limits_{\mathbb{T}^4} \frac{\cos^2(x_0, t)}{\mathfrak{e}(t) - z} dt.$$

Then, for any $\alpha \in \mathbb{R}$, the Fredholm determinant associated to the operator H_α is defined as a regular function in $z \in \mathbb{C} \setminus [\mathfrak{e}_{min}, \mathfrak{e}_{max}]$:

$$\Delta(\alpha; z) = \frac{1}{D(z)} - 2\alpha \frac{B(z)}{D(z)} + \alpha^2, \quad D(z) = B^2(z) - A(z)C(z). \tag{3}$$

Lemma 1. *The number $z \in \mathbb{C} \setminus [0,8]$ is an eigenvalue of H_α if and only if $\Delta(\alpha; z) = 0$.*

Properties of $\Delta(\alpha; z)$ For a fixed $x \in \mathbb{Z}^4$ we consider the function

$$R(x, z) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int\limits_{\mathbb{T}^4} \frac{e^{\mathrm{i}(x,t)}}{\mathfrak{e}(t) - z} dt, \quad z \in (-\infty, \mathfrak{e}_{\min}), \tag{4}$$

then the functions $A(z)$, $B(z)$ and $C(z)$ can be expressed as $A(z) = R(0, z)$, $B(z) = R(x_0, z)$ and $C(z) = \frac{1}{2}\left(R(0, z) + R(x_0, z)\right)$ respectively.

Lemma 2. *(a) For any $z \in (-\infty, \mathfrak{e}_{\min})$, the numbers*

$$\alpha_2(z) = \frac{1}{B(z) + \sqrt{A(z)C(z)}} \quad \text{and} \quad \alpha_1(z) = \frac{1}{B(z) - \sqrt{A(z)C(z)}} \tag{5}$$

are α-intercepts.

(b) For any $\xi, z \in (-\infty, \mathfrak{e}_{\min})$ with $\xi < z$, the inequalities

$$\alpha_1(\xi) < \alpha_1(z) < 0 < \alpha_2(z) < \alpha_2(\xi) \tag{6}$$

and

$$|\alpha_1(z)| > \alpha_2(z) \tag{7}$$

hold.

Moreover, we have

$$\alpha_1^0 := \lim_{z \to \mathfrak{e}_{\min}-} \alpha_1(z) = \frac{1}{B_0 - \sqrt{A_0 C_0}} < 0, \quad \lim_{z \to -\infty} \alpha_1(z) = -\infty \tag{8}$$

and

$$\alpha_2^0 := \lim_{z \to \mathfrak{e}_{\min}-} \alpha_2(z) = \frac{1}{B_0 + \sqrt{A_0 C_0}}, \quad \lim_{z \to -\infty} \alpha_2(z) = +\infty. \tag{9}$$

4. Threshold eigenvalues and threshold resonances of H_α

So far, we have studied the equation $H_\alpha f = z f$ for $z \in (-\infty, \mathfrak{e}_{\min})$. Now, we consider it at the left edge $z = \mathfrak{e}_{\min}$ of the essential spectrum.

Definition 3. In the equation $H_\alpha f = \mathfrak{e}_{\min} f$, $\mathfrak{e}_{\min}$ is called

(1) *a lower threshold eigenvalue* if $f \in L_2(\mathbb{T}^4)$,

(2) *a lower threshold resonance* if $f \in L_1(\mathbb{T}^4) \setminus L_2(\mathbb{T}^4)$,

(3) *a lower super-threshold resonance* if $f \in L_\epsilon(\mathbb{T}^4) \setminus L_1(\mathbb{T}^4)$ for any $0 < \epsilon < 1$.

If $H_\alpha f = \mathfrak{e}_{\min} f$ has no solutions in $L_1(\mathbb{T}^4)$, then $\mathfrak{e}_{\min}$ is *a regular point* of H_α.

Lemma 4. *(a)*

For a continuous function

$$\varphi(p) = C_3 \cos(x_0, p) + C_4$$

(where $C_3, C_4 \in \mathbb{C}$ are fixed numbers) define

$$g(p) = \varphi(p)/\mathfrak{e}(p).$$

The function $1/\mathfrak{e}(p)$ has a unique singular point at the origin $p = 0$, and approximated as $\mathfrak{e}(p) \approx |p|^2$ at this point. The lemma below is a straightforward consequence of the definition of g and the properties of $\mathfrak{e}(\cdot)$

if $\varphi(0) = 0$, *then* $g \in L_2(\mathbb{T}^4)$.

(b) if $\varphi(0) \neq 0$, *then* $g \in L_1(\mathbb{T}^4) \setminus L_2(\mathbb{T}^4)$.

In the theorem below, we describe the conditions for $\mathfrak{e}_{\min} = 0$ to be a regular point, an eigenvalue or a threshold resonance.

Theorem 5. *(a) Let* $\Delta(\alpha, 0) \neq 0$. *The number* 0 *is a regular point of* H_α.

(b) Let $\Delta(\alpha, 0) = 0$.

(b1) The number 0 *is an embedded eigenvalue of* H_α, *if* $\alpha = \frac{1}{A_0+B_0}$;

(b2) The number 0 *is a threshold resonance of* H_α, *if* $\alpha \neq \frac{1}{A_0+B_0}$.

Keywords: Discrete Schrödinger operators, essential spectrum, threshold resonance, eigenvalues, lattice.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

Bernhard Riemann 1861 revisited: existence of flat coordinates for an arbitrary bilinear form

V.S. MATVEEV

[1] *Friedrich Schiller University Jena*

vladimir.matveev@uni-jena.de

I generalize the celebrated foundational results of Bernhard Riemann and Gaston Darboux: we give necessary and sufficient conditions for a bilinear form to be flat. More precisely, I give explicit necessary and sufficient conditions for a tensor field of type (0, 2) which is not necessarily symmetric or skew-symmetric, and is possibly degenerate, to have constant entries in a local coordinate system. This portion of results results is based on [1] and [2].

Special attention will be devoted to the question how smooth are the “flat” coordinate system. In particular I overview known results on the smoothness of isometries of Riemannian metrics, and generalize them to the Finslerian metrics. This portion of results if based on [3].

Funding: This research is partially funded by the DFG (projects 455806247 and 529233771), and by the ARC (Discovery Programme DP210100951).

Keywords: Flat coordinates , Degenerate metrics , Symplectic structure , Poisson structure , Hamiltonian vector fields , Curvature , Pfaffian systems , Darboux theorem , Pullback equation · Hartman Theorem

2010 Mathematics Subject Classification: 53B40, 53C60, 35B65

References

[1] Bandyopadhyay, S., Dacorogna, B., Matveev, V.S., Troyanov, M., *Bernhard Riemann 1861 revisited: existence of flat coordinates for an arbitrary bilinear form*, *Math. Zeit.* **305**:1 (2023), 12.

[2] Bandyopadhyay, S., Dacorogna, B., Matveev, V.S., Troyanov, M., *On the equation* $(Du)^t HDu = G$, *Nonlinear Analysis* **214** (2022), 112555.

[3] Matveev, V.S., Troyanov, M., *The Myers-Steenrod theorem for Finsler manifolds of low regularity*, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **145**:6 (2017), 2699–2712.

One phase Stefan type source coefficient and heat flux problem

T.A. NAURYZ

Kazakh-British Technical University, Almaty, Kazakhstan
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

targyn.nauryz@gmail.com

This work explores the Inverse Stefan problem, with a particular emphasis on identifying the time-dependent source coefficient in the parabolic heat equation that describes heat transfer and phase change in a semi-infinite rod. Given an arbitrary fixed time $T > 0$, we consider the following formulation:

$$\partial_t u = a^2 \partial_{xx} u + R(t) f(x,t), \quad (x,t) \in (0, s(t)) \times (0,T) \tag{1}$$

with initial condition

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad s(0) = s_0, \quad x \in [0, s_0], \tag{2}$$

and boundary conditions

$$u(0,t) = 0, \quad t \in [0,T], \tag{3}$$

$$u(s(t),t) = u^*, \quad t \in [0,T], \tag{4}$$

and subject to the Stefan condition

$$-k\partial_x u(s(t),t) = L\rho s'(t), \quad t \in [0,T], \tag{5}$$

Here, $\varphi(x)$ is a given function, k represents the thermal conductivity of the material, L denotes the latent heat of fusion, u^* is the phase change temperature, $s(t)$ defines the given phase change interface, a^2 corresponds to the thermal diffusivity, and ρ denotes the density of the material.

The objective of this study is to identify the source term coefficient $R(t)$ along with the function $u(x,t)$ for different. Additionally, the study aims to determine the heat flux function by modifying condition (3) with the following condition:

$$-k\partial_x u(0,t) = q(t), \quad t \in [0,T], \tag{6}$$

where $q(t)$ is an unknown function that needs to be determined.

We prove the existence and uniqueness of a weak solution obtained by using spectral methods and establish estimates for its continuous dependence.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. BR20281002).

Keywords: Inverse Stefan problem, parabolic heat equation, time-dependent coefficient, heat flux, spectral theory.

2010 Mathematics Subject Classification: 80A22, 35K05, 35P15

References

[1] Cannon G.R., Rundell W. Recovering a time dependent coefficient in a parabolic differential equation, *J. Math. Anal. Appl.*, **160** (1991), 572–582.

[2] Hazanee A., Lesnic D., Ismailov M.I., Kerimov N.B. Inverse time-dependent source problems for the heat equation with nonlocal boundary conditions, *Applied Mathematics and Computation*, **346** (2019), 800–815.

[3] Ivanchov M. Inverse Problems for Equations of Parabolic Type, *Math. Stud. Monogr. Ser.*, 10 VNTL Publishers, Lviv, 2003.

[4] Ismailov M.I., Ozawa T., Suragan D. Inverse problems of identifying the time-dependent source coefficient for subelliptic heat equations, *Inverse Problems and Imaging*, **4**:18 (2024), 813–823.

Numerical modeling of two-phase gas and liquid flow

M.K. OMARBAYEV[1], A.O. BEKETAYEVA[2]

[1]*National Center of Space Research and Technology JSC, Almaty, Republic of Kazakhstan*
[2]*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Republic of Kazakhstan*
[1]m.omarbayev@gmail.com, [2]azimaras10@gmail.com

Modeling and analysis of mixing and combustion of fuel components is necessary to understand the processes occurring in the combustion chamber in various power plants. In particular, such studies are necessary for the development of ramjet and liquid rocket engines (RAMJET, LRE). Mathematical modeling at the engine design stage saves money and time on physical experiments. Often, due to the transience of some processes in the combustion chamber, the implementation and detailed analysis of experiments is extremely difficult or even impossible.

Despite the existence of a number of similar works, the problem remains relevant, since not all physical mechanisms of mixing of gas and liquid phases have been comprehensively studied. Moreover, most studies consider air as the gas phase, and solid particles instead of liquid droplets [1, 2, 3, 4, 5], while in this study the behavior of pure oxygen and liquid kerosene is modeled.

In this work, numerical modeling of mixing liquid fuel (kerosene) with an oxidizer (oxygen) is performed using the Euler-Lagrangian approach. For the gas phase, the space-averaged Navier-Stokes equations are used, and for the dispersed phase, a system of ordinary differential equations is used. At this stage, the model does not consider interphase exchange. The initial equations for the carrier phase are solved using the third order essentially non-oscillatory (ENO) scheme. The trajectory, velocity, mass change and temperature of the fuel droplets are determined by the second order explicit Euler method.

The numerical experiment is carried out in a wide range of gas-dynamic parameters such as the temperature of the carrier phase, the convective Mach number and the angle of relative atomization of the fuel components. The work studies both the dynamics of the formation of a non-stationary vortex system and its effect on the distribution of liquid droplets in the mixing layer.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP19674992).

Keywords: numerical simulation, two-phase flow, kerosene, oxygen, Eulerian–Lagrangian approach, Essentially Non-Oscillatory (ENO) scheme.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q30, 76F65 , 76T10

References

[1] Wang, B., Ren, Z. Effects of Fuel Concentration Gradient on Stabilization of Oblique Detonation Waves in Kerosene–Air Mixtures., *Flow Turbulence Combust 111, 1059–1077 (2023). DOI:10.1007/s10494-023-00425-2*

[2] Ren, Z., Zheng, L. Numerical study on rotating detonation stability in two-phase kerosene-air mixture., *Combustion and Flame 231 (2021) 111484. DOI:10.1016/j.combustflame.2021.111484*

[3] LastName1 N1.S1., LastName2 N2.S2., LastName3 N3.S3. Numerical study on stabilization of wedge-induced oblique detonation waves in premixing kerosene-air mixtures, *Aerospace Science and Technology 107(2) :106245 (2020).*

[4] Beketayeva A., Naimanova A., Ashirova G. Numerical analysis of vortex formation and particle dispersion in a supersonic compressible particle-ladenmixing layer, *Comp. Part. Mech. 10, 1411–1429 (2023). https://doi.org/10.1007/s40571-023-00563-4.*

[5] Feng, Y., Ma, L., Xia, Z., Huang, L., Yang, D. Ignition and combustion characteristics of single gas-atomized AleMg alloy particles in oxidizing gas flow, *Energy, 196, (2020), 117036, ISSN 0360-5442. https://doi.org/10.1016/j.energy.2020.117036.*

Pricing European Options on Non-Uniform Stretched Grids

U. OZBEK

SDU University, Kaskelen, Kazakhstan

241101004@sdu.edu.kz

In this talk, we discuss the application of non-uniform stretched grids for pricing European options using the finite difference method (FDM). Standard uniform grids may fail to capture rapid changes in option values near the strike price efficiently. By employing a stretching transformation, we aim to improve the accuracy while maintaining computational efficiency. We present the mathematical formulation, grid construction, and implementation details of this approach.

The valuation of a European option follows the Black-Scholes partial differential equation (PDE) [1]:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, \tag{1}$$

where $V(S,t)$ is the option price, S is the underlying asset price, σ is the volatility, and r is the risk-free interest rate.

Using the finite difference method, we discretize the PDE on a spatial grid. Instead of a uniform grid, we apply a stretching transformation [2]:

$$x_i = f(i), \quad i = 0, 1, \ldots, N \tag{2}$$

where $f(i)$ is a function that clusters points near regions of high curvature, typically near the strike price. Choices for $f(i)$ include exponential, tanh, or power-law transformations [3].

The advantages of non-uniform grids include improved resolution in critical regions and reduced numerical errors [4]. We compare different grid strategies and their impact on pricing accuracy.

This research contributes to the numerical analysis of financial derivatives, with potential extensions to American options and multi-asset models.

Keywords: European options, finite difference method, non-uniform grids, Black-Scholes equation.

References

[1] Tavella, D., & Randall, C. (2000). *Pricing Financial Instruments: The Finite Difference Method*. Wiley.

[2] Brandimarte, P. (2006). *Numerical Methods in Finance and Economics: A MATLAB-Based Introduction*. Wiley.

[3] Hull, J. C. (2017). *Options, Futures, and Other Derivatives*. Pearson.

[4] Wilmott, P. (2006). *Paul Wilmott on Quantitative Finance*. Wiley.

Translation-invariant ground states for the Kittel model on the Cayley tree

M.M. RAHMATULLAEV[1], M.A. RASULOVA[2]

[1,2]*V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan*
[1]*Namangan State University, Namangan, Uzbekistan*
[1]mrahmatullaev@rambler.ru, [2]m_rasulova_a@rambler.ru

Let $\Gamma^k = (V, L)$ be a Cayley tree of order $k \geq 1$ with the root x^0, where V is the set of vertices and L is the set of edges (see [1]). Consider spin values from $\Phi = \{0, 1, \cdots, q\}$, where $q \geq 1$. A configuration is any mapping $\sigma : x \in V \to \sigma(x) \in \Phi$.

The Hamiltonian of the Kittel model has the form [2]

$$H(\sigma) = \epsilon \sum_{x \in W_1} (1 - \delta_{0,\sigma(x)}) + \sum_{x \in V \setminus V_1} (\epsilon + J\delta_{0,\sigma(x_\downarrow)})(1 - \delta_{0,\sigma(x)}), \tag{1}$$

where $\epsilon, J \in \mathbb{R}$ are parameters, δ is the Kronecker delta.

Let M be the set of unit balls with vertices in V. We denote the restriction of a configuration σ to the ball $b \in M$ by σ_b. We let c_b denote the center of the unit ball b.

Lemma 1. *For the energy of any configuration σ_b we have*

$$U(\sigma_b) = \begin{cases} \frac{\epsilon}{k+2} \sum\limits_{x \in b} (1 - \delta_{0,\sigma(x)}) \text{ if } c_b = x^0, \\ \frac{\epsilon}{k+2} \sum\limits_{x \in b} (1 - \delta_{0,\sigma(x)}) + \frac{J}{2} \sum\limits_{x_\downarrow, x \in b} \delta_{0,\sigma(x_\downarrow)}(1 - \delta_{0,\sigma(x)}) \text{ if } c_b \neq x^0, \end{cases}$$

where

$$U(\sigma_b) \in \begin{cases} \{U_i^{(1)}, i = \overline{1, k+2}\} \text{ if } c_b = x^0, \\ \{U_j, j = \overline{1, k+3}\} \text{ if } c_b \neq x^0, \end{cases}$$

$U_i^{(1)} = \frac{i-1}{k+2}\epsilon$, $i = \overline{1, k+2}$; $U_j = \frac{j-1}{k+2}\epsilon + \frac{j-1}{2}J$, $j = \overline{1, k+1}$; $U_{k+2} = \frac{k+1}{k+2}\epsilon + \frac{1}{2}J$, $U_{k+3} = \epsilon$.

Definition 2. A configuration $\varphi \in \Omega$ is called a *ground state* for the Hamiltonian (1), if

$$U(\varphi_b) = \begin{cases} \min\{U_i^{(1)}, i = \overline{1, k+2}\} \text{ if } c_b = x^0, \\ \min\{U_j, j = \overline{1, k+3}\} \text{ if } c_b \neq x^0, \end{cases}$$

for any $b \in M$.

We denote $A_1 = \{(\epsilon, J) \in \mathbb{R}^2 : \epsilon \geq 0,\ J \geq -\frac{2\epsilon}{k+2}\}$.

Theorem 3. *The following statements hold for the Kittel model on a Cayley tree of order $k \geq 2$:*
i) if $(\epsilon, J) \in A_1$, then there is a unique translation-invariant ground state $\varphi(x) = 0\, \forall x \in V$;
ii) if $(\epsilon, J) \in \mathbb{R}^2 \setminus A_1$, then there is no translation-invariant ground state.

Funding: This research is funded by the Ministry of Higher Education, Science, and Innovation of the Republic of Uzbekistan (Grant No. F-FA-2021-425).

Keywords: Cayley tree, zipper-admissible configuration, Kittel model, ground state, translation-invariant ground state.

2010 Mathematics Subject Classification: 82B26, 60K35

References

[1] Rozikov U.A. *Gibbs Measures on Cayley Trees*, World Scientific, Singapore (2013).

[2] Rozikov U.A. Kittel's molecular zipper model on Cayley trees, *Reviews in Mathematical Physics*, **36**:1 (2024), 2350034 (13 pages).

A diffusive logistic model with free boundary in ecology

M.S. RASULOV

V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan

rasulovms@bk.ru

The spreading of an invasive or new species is a crucial topic in mathematical ecology. Numerous mathematicians have worked on developing various invasion models and have studied them from the perspective of mathematical ecology. In 2010, Y. Du and Zh.Lin have proposed a new reaction-diffusion model with free boundary to better understand the spreading of an invasive or new species. They have established the existence and uniqueness of global solutions and, furthermore, derived various interesting results about the asymptotic behavior of solutions. One of very remarkable results is a spreading-vanishing dichotomy of the species. Since then there has been extensive works for the reaction-diffusion model with free boundary [1, 2].

In this work, we investigate a free boundary problem for a diffusive logistic model:

$$k(u)u_t - du_{xx} - muu_x = u(a - bu), \quad (t,x) \in D \tag{1}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad 0 \le x \le s(0) \equiv s_0, \tag{2}$$

$$u(t,0) = \sigma, \quad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

$$u(t,s(t)) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{4}$$

$$s'(t) = -\mu u_x(t,s(t)) - \rho, \quad 0 \le t \le T, \tag{5}$$

where $D = \{(t,x) : 0 < t \le T, 0 < x < s(t)\}$; $x = s(t)$ is the free boundary, which is defined together with the function $u(t,x)$. d, m, a, b, s_0, μ are positive constants, $k(u) \ge k_0 > 0$ for any $u > 0$. The initial function $u_0(x)$ satisfies $u_0 \in C^2([0,s_0])$, $u_0 = \sigma$, $u_0(s_0) = 0$, $u_0 > 0$ in $[0,s_0)$ and $\lim\limits_{x\to s_0} \frac{u_0(x)}{s_0-x} = 0$.

Problem (1)-(5) arises in the modeling of the propagation of a new or invasive species, with the free boundary representing the propagation front. $u(t,x)$ is the density of the species, the moving interval $[0,s(t)]$ is the region occupied by the invasive species. Moreover, the environment at the boundary also affects the spreading of the species, if the environment is against spreading, this will result in spreading resistant force at the boundary, we use $\rho > 0$ to denote the decay rate at such boundary. We now explain $\rho > 0$ in the boundary condition from the view of propagation of species. When the species spreads to a new place, there usually exists some resistance to the diffusion boundary caused by hunter or bad environment, this results in a decay rate. Even so, they must move to the new place since the density in the existence interval $[0,s(t)]$ is so large (caused by $u(t,0) = \sigma$). Obviously, it is more easier to spread when $\sigma = 0$ than $\sigma > 0$.

Theorem 1. *Let $s(t)$, $u(t,x)$ be a solution to problem* (1)-(5). *Then there exist positive constants M_1, M_2 independent T such that*

$$]0 < u(t,x) \le M_1 \equiv \max\left\{\sigma, \|u_0(x)\|, \frac{a}{b}\right\}, \quad (t,x) \in \overline{D}, \tag{6}$$

$$] -\rho < s'(t) \le M_2 \equiv \mu N - \rho, \quad 0 \le t \le T, \tag{7}$$

where $N \ge \max\left\{\frac{aM}{m}, \max\limits_x \left|\frac{u_0}{s_0-x}\right|, \frac{\sigma}{s_0}\right\}$.

Keywords: reaction-diffusion, free boundary, advection.

2010 Mathematics Subject Classification: 35K20, 35K57, 35K59, 35R35

References

[1] Ding N., Cai J., Xu L. A free boundary problem with nonlinear advection and Dirichlet boundary condition, *Nonlinear analysis: Real world applications*, **69** (2023), 103719.

[2] Ren H., Cai J., Xu L. On a multistable type of free boundary problem with a flux at the boundary, *Advances in Mathematical Physics*, **1**, (2023).

H_A-periodic ground states for the Chui-Weeks model on the Cayley tree of order three

M.A. RASULOVA[1], M.A. HAKIMOVA[2]

[1] *V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan*
[2] *Namangan State University, Namangan, Uzbekistan*

[1]m_rasulova_a@rambler.ru, [2]hakimovamuslimaxon@gmail.com

The Cayley tree Γ^k (see [1,2]) of order $k \geq 1$ is an infinite tree. It is known (see [2]) that there exists a one-to-one correspondence between the set V of vertices of the Cayley tree of order $k \geq 1$ and the group G_k of the free products of $k+1$ cyclic groups $\{e, a_i\}$, $i = 1, ..., k+1$ of the second order (i.e. $a_i^2 = e$, $a_i^{-1} = a_i$) with generators $a_1, a_2, ..., a_{k+1}$.

We consider model where the spin takes values in the set $\Phi = \{0, 1, 2\}$. For $A \subseteq V$ a spin *configuration* σ_A on A is defined as a function $x \in A \mapsto \sigma_A(x) \in \Phi$; the set of all configurations coincides with $\Omega_A = \Phi^A$. Denote $\Omega = \Omega_V$ and $\sigma = \sigma_V$.

The Chui-Weeks model (see [3]) is defined by the following Hamiltonian

$$H(\sigma) = J \sum_{\langle x,y\rangle \in L} \mid \sigma(x) - \sigma(y) \mid + \alpha \sum_{x \in V} \delta_{\sigma(x),0},$$

where $J, \alpha \in \mathbb{R}$, α is an external field and $\sigma \in \Omega$.

We study all H_A-periodic ground states for the Chui-Weeks model on the Cayley tree of order three, where

$$H_A = \{x \in G_3 : \sum_{i \in A} \omega_x(a_i) \text{ is an even number}\},$$

where $\emptyset \neq A \subseteq N_3 = \{1, 2, 3, 4\}$, and $\omega_x(a_i)$ is the number of letters a_i in a word $x \in G_3$. Any normal subgroup of index two in G_3 is of the form H_A (see [1,2]). If $A = \{1, 2, 3, 4\}$, then the normal subgroup H_A coincides with the group $G_3^{(2)}$.

The following theorem describes all H_A-periodic ground states for the three-state Chui-Weeks model.

Theorem 1. *Let $k = 3$. Then for the Chui-Weeks model the following assertions hold*
i) if $(J, \alpha) \in \{(J, \alpha) \in \mathbb{R}^2 : J = 0, \alpha \geq 0\}$, then the following six H_A-periodic configurations

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1, \text{ if } x \in H_A, \\ 2, \text{ if } x \in G_3 \setminus H_A, \end{cases} \quad \sigma(x) = \begin{cases} 2, \text{ if } x \in H_A, \\ 1, \text{ if } x \in G_3 \setminus H_A, \end{cases} \quad \mid A \mid = 1, 2, 3$$

are H_A-periodic ground states;
ii) all H_A-periodic ground states except the ground states found in i) are either translation-invariant or $G_3^{(2)}$-periodic.

Keywords: Cayley tree, Chui-Weeks model, ground state, translation-invariant ground state, periodic ground state.

2010 Mathematics Subject Classification: 82B26, 60K35

References

[1] Rozikov U.A. *Gibbs Measures on Cayley Trees*, World Scientific, Singapore (2013).

[2] Ganikhodzhaev N. N. Group representation and automorphisms of the Cayley tree, *Dokl. Akad. Nauk Resp. Uzbekistan*, **4** (1994), 3–5.

[3] Cuesta J. A., Sanchez A. General non-existence theorem for phase transitions in one-dimensional systems with short range interactions, and physical examples of such transitions, *Journal of Statistical Physics*, **115** (2004), 869–893.

Parallel surfaces in Galilean space

B.M. SULTANOV[1], N.O. MAHMUDOVA[2], B. MADAMINOV[3], M. DAVRONBEKOVA[4]

[1,4]*Urgench State University, Urgench, Uzbekistan*
[2]*Urgench State Pedagogical Institute, Urgench, Uzbekistan.*
[3]*Mamun University, Khorezm, Uzbekistan.*

[1]sultanov.b@urdu.uz, [2]nazokatmahmudova7@gmail.com,
[3]madaminov_bekzod@mamunedu.uz, [4]bek_4747@bk.ru

This thesis is dedicated to studying the differential properties and geometric characteristics of parallel surfaces in three-dimensional Galilean space. In the article, parallel surfaces are studied in relation to the main surface, and the first introduces to concept of a parallel surface.

Surface theory, as a fundamental concept in geometry, is widely applied in various fields such as differential geometry, physics, engineering, and mathematical modeling. The study of surface properties and their interrelationships is particularly significant in special geometric spaces like Galilean space.

A. Artikbaev and N. Ye. Pankina were among the first to address problems of total geometry in Galilean space [1,2]. Also, the theory of three-dimensional Galilean space is described in O. Rochelle's monograph [3]. Over time, many papers have been published on the surface theory in Galilean space, contributing to the study of its differential geometry [4;5;6]. This thesis focuses on the differential properties of parallel surfaces in three-dimensional Galilean space.

Let A_3 be a three-dimensional affine space, $Oxyz$ be an affine coordinate system with the origin at the point $O\,(0,0,0)$, and $\{i,j,k\}$ be the basis vectors of this space. The scalar product of given vectors $\vec{X}\{x_1,y_1,z_1\}$ and $\vec{Y}\{x_1,y_1,z_1\}$ is defined by the following formula:

$$(\vec{X}\vec{Y}) = \begin{cases} x_1x_2, & if\ x_1x_2 \neq 0, \\ y_1y_2 + z_1z_2, & if\ x_1x_2 = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Definition 1. An affine space where the scalar product of vectors $\vec{X}\{x_1,y_1,z_1\}$ and $\vec{Y}\{x_1,y_1,z_1\}$ is defined by formula (1) is called a Galilean space and is denoted as R_3^1 or G_3 [7].

The scalar product in (1) is referred to as a degenerate scalar product.

A surface in a three-dimensional space is defined as a set of points satisfying the equation:

$$F(x,y,z) = 0.$$

Locally, around a regular point, this equation can be rewritten in the form: $z = f(x,y)$.

In Galilean space, this equation takes the form:

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(u,v) = u\,\overrightarrow{i} + y(u,v)\,\overrightarrow{j} + z(u,v)\,\overrightarrow{k}. \tag{2}$$

Let us consider a given surface in three-dimensional Galilean space, defined by equation (2) [1].

Let M and M^λ be two surfaces in Galilean space G_3.

Definition 2. The function

$$f : r(u,v) \to r^\lambda(u,v),$$
$$p \to f(p) = [p_1;\ p_2 + \lambda a_2(p);\ p_2 + \lambda a_3(p)]$$

is called the parallelization function between the surfaces M and M^λ, where $p = (p_1, p_2, p_3)$ and $n = (0, a_2, a_3)$ is the unit normal vector on M, and M^λ is the parallel surface to M in G_3, and λ is a given positive real number.

It is known that surfaces that share a common normal are called parallel surfaces. Based on this, we can give following definition.

Let M and M^λ be two surfaces in Galilean space G_3.

Definition 3. The function

$$r^\lambda(u,v) = r(u,v) + \lambda n$$

is called the equation of the surface M^λ, which is parallel to base surface M at a distance λ.

It is clear from the above definitions that the parallel surface M^λ is studied in direct relation to the base surface M. Let M and M^λ be two parallel surfaces in Galilean space.

Theorem 4. *The first quadratic form for a parallel surface is given by:*

$$ds^2 = I_1^\lambda = du^2,$$

If $I_1^\lambda = 0$, then

$$ds^2 = I_2^\lambda = \left(\frac{(G-\lambda N)^2}{G} + \left(\Gamma_{22}^2\right)^2 \lambda^2\right) dv^2 = G^\lambda dv^2.$$

Theorem 5. *The total curvature for a parallel surface is given by:*

$$K^\lambda = \frac{(G-N\lambda)^2 K + (G-N\lambda)\left(\left(\Gamma_{22}^2\right)^2 L + \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 N - 2\Gamma_{21}^2\Gamma_{22}^2 M\right)\lambda}{(G-N\lambda)^2 + \left(\Gamma_{22}^2\right)^2 G\lambda^2} + \\ + \frac{(GK-N)N\lambda + \left(\left(\Gamma_{22}^2\right)^3\Gamma_{11}^2 - \left(\Gamma_{22}^2\Gamma_{11}^2\right)^2\right)\lambda^2}{(G-N\lambda)^2 + \left(\Gamma_{22}^2\right)^2 G\lambda^2}.$$

Keywords: Galilean space, parallel surface, quadratic form, normal curvature, total curvature, mean curvature.

2010 Mathematics Subject Classification: 53A35, 35A30, 46L87

References

[1] Artykbaev A., Sokolov D.D. *Geometry as a whole in flat space-time*, Fan, Tashkent, (1991). - 180 pp.

[2] Makarova N. M. On the theory of cycles of parabolic geometry on the plane, *Sibirsk. math. zhurn*, **2**:1 (1961), 68–81

[3] Roschel O. *Die Geometrie des Galileischen Raumes*, Habilitationsschrift, Institutfür Math. und Angew. Geometrie, Leoben, 1984. -114 pp.

[4] M.Dede, C.Ekici, A.Ceylan. On the parallel surfaces in Galilean space, *Hacettepe Journal of Math and Statistics*, **42**:6 (2013), 605–615

[5] Milin-Sipus, Z. Ruled Weingarten surfaces in Galilean space, *Periodica Mathematica Hungarica*, **56**:2 (2008), 213–225

[6] Dede M., Ekici C., Goemans W. Surfaces of revolution with vanishing curvature in Galilean 3-space, *Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry*, **14**:2 (2018), 141–152

[1] Artykbaev A., Sultanov B.M., Ismoilov Sh.Sh. *eometry of semi-Euclidian space: isotropic and Galilean.*, "Transport", Tashkent, (2024). - 225 pp.

Besicovitch–type inequality for closed geodesics on 2-dimensional spheres

T.K. TALIPOV

[1]*University of Toronto, Toronto, Canada*

talant.talipov@mail.utoronto.ca

In this talk, we explore a question posed Y. Liokumovich in [1], which asks whether there exists a constant $C > 0$ such that for any 2-dimensional Riemannian sphere (S^2, g), there exist two distinct closed geodesics with lengths L_1 and L_2 satisfying

$$L_1 L_2 \leq C \,\mathrm{Area}(S^2, g).$$

We establish that this conjecture holds for any C^3-smooth bumpy metric.

The study of bounds on the lengths of closed geodesics has a rich history. In [2], M. Gromov established the systolic inequality, which bounds the length of the shortest non-contractible loop on a essential Riemannian manifold relative to its volume. Optimal constants for the systolic inequality have been determined for specific surfaces: the 2-dimensional torus by L.C. Lowner, the real projective plane by P.M. Pu (see [3]), and the Klein bottle by C.B. Croke and M. Katz (see [4]). However, the sphere is not an essential manifold. The first bound on the length of the shortest closed geodesic on a Riemannian 2-sphere in terms of area was established by C.B. Croke [5]. This result was later improved, with the most recent enhancement made by R. Rotman, who provided the best currently known constant in [6]. Furthermore, in [7], Y. Liokumovich, A. Nabutovsky, and R. Rotman proved the existence of three distinct simple closed geodesics on a 2-dimensional Riemannian sphere, with their lengths bounded by the diameter of the sphere. Notably, it is known that the length of the second shortest closed geodesic cannot be bounded purely in terms of the square root of the area, as demonstrated by the example of long ellipsoids. Our result can be seen as a spherical analog of the Besicovitch inequality, which provides a bound on the product of distances between opposite sides of a Riemannian square in terms of its area.

Funding: This research is partly funded by the German Research Foundation (DFG).

Keywords: geometric inequalities, closed geodesics, min-max methods.

2010 Mathematics Subject Classification: 53C22, 58E10

References

[1] Liokumovich Y. Geometric inequalities, [Lecture notes], University of Toronto, 2020.

[2] Gromov M. Filling Riemannian manifolds, *J. of Differential Geom.*, vol. 18, 1983, 1–147.

[3] Pu P.M. Some inequalities in certain nonorientable Riemannian manifold, *Pacific J. Math.*, vol. 2, 1952, 55–71.

[4] Croke C.B., Katz M. Universal volume bounds in Riemannian manifolds, *Surv. in Differ. Geom.*, vol. 8, 2002, 109–137.

[5] Croke C.B. Area and the length of the shortest closed geodesic, *J. of Differential Geom.*, vol. 27, 1988, 1–21.

[6] Rotman R. The length of a shortest closed geodesic and the area of a 2-dimensional sphere, *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 134, 2006, 3041–3047.

[7] Liokumovich Y., Nabutovsky A., Rotman R. Lengths of three simple periodic geodesics on a Riemannian 2-sphere, *Math. Ann.*, vol. 367, no. 1–2, 2017, 831–855.

Forecasting Asthma Incidence in Kazakhstan using ARIMA and SARIMA Models

A.A. TURAPBAY

[1]SDU University, Almaty, Kazakhstan

231101007@sdu.edu.kz

Introduction. Millions of people worldwide suffer from bronchial asthma (BA), a chronic inflammatory disease of the airways that causes substantial morbidity and medical expenses. Over the past ten years, the incidence of BA has increased in Kazakhstan, making accurate forecasting methods necessary to support healthcare planning and resource allocation. Time series techniques like ARIMA (AutoRegressive Integrated Moving Average) and SARIMA (Seasonal ARIMA) are more suited for predictive analytics since traditional epidemiological models are unable to capture the intricate temporal relationships of asthma incidence rates.

This work builds asthma incidence prediction models using historical data from the Kazakhstan Ministry of Health. Preprocessing time series data, doing stationarity tests, and choosing the best parameters for ARIMA and SARIMA models using the Akaike Information Criterion (AIC) are all part of the methodology.

Mathematical Framework. The general form of the ARIMA model is given by

$$Y_t = c + \sum_{i=1}^{p} \phi_i Y_{t-i} + \sum_{j=1}^{q} \theta_j \epsilon_{t-j} + \epsilon_t, \tag{1}$$

where Y_t is the observed time series, ϕ_i are autoregressive coefficients, θ_j are moving average coefficients, and ϵ_t is white noise. The differencing order d ensures stationarity.

The SARIMA model extends ARIMA to account for seasonality:

$$(1 - \sum_{i=1}^{p} \phi_i B^i)(1 - B^s)^D Y_t = c + (1 + \sum_{j=1}^{q} \theta_j B^j)\epsilon_t, \tag{2}$$

where B is the backshift operator, s is the seasonal period, and D represents seasonal differencing.

Theorem 1. *The optimal parameters (p, d, q, P, D, Q, s) for SARIMA minimize the Akaike Information Criterion (AIC), given by $AIC = -2\log L + 2k$, where L is the likelihood function and k is the number of estimated parameters.*

Corollary 2. *For a stationary time series with a known seasonal component, SARIMA(p, d, q) $(P, D, Q)_s$ provides an asymptotically unbiased estimate of future values, given a sufficient historical dataset.*

Lemma 3. *If a time series has a strong seasonal pattern, then the inclusion of seasonal differencing $D > 0$ significantly reduces residual autocorrelation, improving model accuracy.*

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. BR20281002).

Keywords: time series forecasting, asthma, ARIMA, SARIMA, epidemiology.

References

[1] Smith, J., Brown, L. *Seasonal Forecasting of Respiratory Diseases Using Time-Series Models*, Journal of Public Health Statistics, **18**:3 (2020), 45–60.

[2] Johnson, R., Davis, M. Asthma Incidence Prediction with Machine Learning Approaches, *International Respiratory Journal*, **12**:5 (2019), 88–102.

[3] Lee, H., Kim, Y. Impact of Environmental Factors on Asthma Prediction in Urban Areas, *Asian Journal of Epidemiology*, **20**:4 (2021), 132–147.

[4] Patel, S., Mehta, R. Analyzing Air Pollution Effects on Respiratory Diseases using SARIMA, *Environmental Health Reports*, **15**:7 (2022), 210–225.

Kinetic and Hydrodynamic description of an anisotropic interaction model

Zh.M. TURAROV[1], Zh.T. SUGIRBAYEVA[2]

[1]*RPTU Kaiserslautern-Landau, Kaiserslautern, Germany*
[2]*Eurasian National University, Astana, Kazakhstan*

[1]turarov@mathematik.uni-kl.de, [2]sugirbayeva_zht@enu.kz

The thesis is devoted to developing and investigating models describing the interaction dynamics of agents, such as pedestrians, incorporating anisotropic interaction mechanisms. The research spans from microscopic interaction models to kinetic and hydrodynamic descriptions.

We consider a microscopic model describing the motion of N agents in a two-dimensional space. The dynamics of each agent are governed by second-order ordinary differential equations:

$$\frac{d}{dt}x_i = v_i, \quad \frac{d}{dt}v_i = \tau(w_i - v_i) - \frac{1}{N}\sum_{j\neq i} M(v_i, v_j)K(x_i, x_j), \tag{1}$$

with the initial conditions $x_i(0) = x_i^0, v_i(0) = v_i^0$, where $x_i, v_i \in \mathbb{R}^2$ represent positions and velocities respectively, w_i the desired velocity, and $\tau > 0$ a relaxation parameter. The collision avoidance mechanism is modeled using the rotation matrix:

$$M(v_i, v_j) = \begin{pmatrix} \cos\alpha_{ij} & -\sin\alpha_{ij} \\ \sin\alpha_{ij} & \cos\alpha_{ij} \end{pmatrix}, \quad \alpha_{ij} = \begin{cases} \lambda \arccos\left(\frac{v_i \cdot v_j}{\|v_i\|\|v_j\|}\right), & v_i \neq 0, v_j \neq 0, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

where λ indicates the collision avoidance direction. By integrating the rotation matrix, we transform an isotropic model into an anisotropic. $K : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ is a pairwise interaction force between the agents i and j. Well-posedness of this system (1) is shown in [1].

To formally derive the candidate of the mean-field equation from the microscopic model, we define the empirical distribution of the system (1) as $f_t^N(x, v) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta(x - x_i(t), v - v_i(t))$ on $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, where δ is the Dirac delta at (x_i, v_i).

Let us consider a test function $\varphi \equiv \varphi(x, v) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$. We assume that there exists $f_t^N \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ such that

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left\langle f_t^N(x, v), \varphi\right\rangle &= \frac{d}{dt}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \varphi(x_i, v_i) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \left(\nabla_x\varphi(x_i, v_i)\cdot\frac{d}{dt}x_i + \nabla_v\varphi(x_i, v_i)\cdot\frac{d}{dt}v_i\right) \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N v_i\cdot\nabla_x\varphi(x_i, v_i) + \nabla_v\varphi(x_i, v_i)\cdot\left(\tau(w_i - v_i) - \frac{1}{N}\sum_{j\neq i} M\left(v_i, v_j\right)K\left(x_i, x_j\right)\right) \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N v_i\cdot\nabla_x\varphi(x_i, v_i) + \nabla_v\varphi(x_i, v_i)\cdot\left(\tau\left(w_i - v_i\right) - \int M\left(v_i, \bar{v}\right)K\left(x_i, \bar{x}\right)df_t^N(\bar{x}, \bar{v})\right) \\
&= \left\langle v\cdot\nabla_x\varphi(x, v) + \nabla_v\varphi(x, v)\left(\tau\left(w - v\right) - \int M\left(v, \bar{v}\right)K\left(x, \bar{x}\right)df_t^N(\bar{x}, \bar{v})\right), f_t^N\right\rangle.
\end{aligned}$$

Assuming more regularity and integrating by parts, we arrive at the equation

$$\partial_t f_t^N + v\cdot\nabla_x f_t^N = \nabla_v\cdot\left[\left(-\tau\left(w - v\right) + \int M\left(v, \bar{v}\right)K\left(x, \bar{x}\right)df_t^N(\bar{x}, \bar{v})\right)f_t^N(\bar{x}, \bar{v})\right] \tag{2}$$

with initial condition $f_t^N(x, v)|_{t=0} = f_0^N(x, v)$.

With the increasing number of agents, employing concise modeling techniques becomes more feasible compared to individually tracking each agent's trajectory. We introduced the kinetic model operating at the mesoscopic level, which fundamentally bridges microscopic particle-based models with continuum mechanics systems representing the macroscopic level.

We define hydrodynamic variables, the macroscopic density and the momentum respectively as

$$\rho(x,t) := \int f_t(x,v)dv, \qquad \rho u(x,t) = \int v f_t(x,v)dv. \tag{3}$$

Then, integrating (2) with respect to dv we obtain the evolution equation for the macroscopic density

$$\partial_t \rho + \nabla_x \cdot (\rho u) = 0.$$

Note that the mass of pedestrians is conserved and the equation depends on the momentum.

The first step towards the momentum equation is obtained by integrating (2) with respect to vdv as follows

$$\begin{aligned}&\int v\partial_t f_t dv + \int v \cdot v \nabla_x f_t dv \\ &\quad = -\int \nabla_v \cdot [\tau(w-v) f_t]\, vdv + \int \nabla_v \cdot \left[\int M(v,\bar{v})\, K(x,\bar{x})\, df_t(\bar{x},\bar{v}) f_t(x,v) \right] vdv.\end{aligned} \tag{4}$$

Note that the interaction term can not be rewritten in terms of ρu and ρ. We, therefore, discuss the monokinetic closure.

To close the momentum equation we employ the well-known monokinetic ansatz [2]:

$$f_t(x,v) = \rho(x,t)\delta(v - u(x,t)), \tag{5}$$

where δ stands for the Dirac delta distribution.

Using the macroscopic quantities (3) and formally integrating by parts we rewrite (4) as

$$\begin{aligned}&\partial_t(\rho u) + \nabla_x \cdot (\rho u \otimes u) + \nabla_x \cdot \int (v-u) \otimes (v-u) f_t dv \\ &\quad = \tau(w-u)\rho - \int M(u(x,t), u(\bar{x},t))\, K(x,\bar{x})\, \rho(\bar{x},t) d\bar{x} \cdot \rho.\end{aligned}$$

Then, using monokinetic closure (5) the mean-field equation reduces to the following set of hydrodynamic equations:

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla_x \cdot (\rho u) = 0, \\ \partial_t u + (u \cdot \nabla_x) u = \tau(w-u) - \int M(u(x,t), u(\bar{x},t))\, K(x,\bar{x})\, \rho(\bar{x},t) d\bar{x}. \end{cases} \tag{6}$$

The system (6) is complemented by initial conditions $\rho(x,0) = \bar{\rho}(x)$ and $u(x,0) = \bar{u}(x)$, for $x \in \Omega$.

Lemma 1. *Given $\rho(x,t)$ and $u(x,t)$ as smooth as needed. Then, the ansatz* (4) *is a distributional solution of the kinetic equation* (2) *if and only if (ρ, u) is a solution of the system* (5).

We derive a hydrodynamic description of interaction dynamics using a moment approximation of the kinetic equation (2). The hydrodynamic description enables us to analyze the stationary states of the mean-field (kinetic) equation. Additionally, solving hydrodynamic equations numerically is less time-consuming than solving the kinetic equation, as it reduces dimensionality.

Keywords: anisotropic interaction model, kinetic equation, hydrodynamic description.

References

[1] Turarov, Z.M., Totzeck, C. Gradient-based parameter calibration of an anisotropic interaction model for pedestrian dynamics. *European Journal of Applied Mathematics*, **35**:2 (2024), 203-224.

[2] Carrillo, J. A., Fornasier, M., Toscani, G., & Vecil, F. Particle, kinetic, and hydrodynamic models of swarming. *Mathematical modeling of collective behavior in socio-economic and life sciences*, (2010), 297-336.

Traveling Wave Speed and Profile of Rabies Model: Insights from the "Go or Grow" Hypothesis

Aisha TURSYNKOZHA[1], Yang KUANG[2], Ardak KASHKYNBAYEV[3]

[1,3]*Nazarbayev University, 010000 Astana, Kazakhstan*
[2]*Arizona State University, Tempe, USA*

[1]aisha.tursynkozha@nu.edu.kz, [2]atyxk@asu.edu, [3]ardak.kashkynbayev@nu.edu.kz

Rabies is a viral infection that affects the central nervous system, primarily transmitted through direct contact with infected animals. The disease exhibits a characteristic traveling wave pattern of spread, which can be effectively captured through mathematical modeling. In this work, we propose a two-population reaction–diffusion model for the red fox based on the "Go or Grow" hypothesis, which incorporates the movement and interaction between susceptible and infectious populations. Using approximation methods, we analyze various traveling wave solutions and provide new insights into the progression of the infection, offering a more accurate representation of rabies spread.

Chaoticity in Cohen-Grossberg neural networks

A. ZHAMANSHIN

K.Zhubanov Aktobe Regional University, Aktobe, Kazakhstan

akylbek78@mail.ru

Cohen–Grossberg neural networks (CGNNs) were first proposed by Cohen M. and Grossberg S. in 1983 [1]. The class of networks has intensive applications within various engineering and scientific fields such as neuro-biology, population biology, and computing technology. Such applications strongly depend on the dynamic behavior of networks, so the analysis of the dynamics of the model is necessary.

As is known, CGNNs include many well-known neural networks, such as the Lotka-Volterra system, cellular neural networks, Hopfield neural networks, and are described as follows:

$$x_i'(t) = -a_i(x_i(t))\Big[b_i(x_i(t)) - \sum_{j=1}^{n} c_{ij}(t) f_j(x_j(t)) + v_i(t)\Big], \tag{1}$$

where $i = 1, 2, \cdots, n$, is the number of neurons; $x_i(t)$ is the state of ith neuron at time t; $a_i(x_i(t))$ is an amplification function; $b_i(x_i(t))$ is the rate with which the unit self-regulates or resets its potential, when isolated from other units and inputs; $c_{ij}(t)$ is the strengths of connectivity between cell i and j at time t; the function $v_i(t)$ is an external input source introduced from outside the network to cell i at time t.

Let us commence with the definitions of Poisson stable and alpha unpredictable functions.

Definition 1. [2] A bounded function $g(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ is called Poisson stable if there exists a sequence t_p, $t_p \to \infty$ as $p \to \infty$, such that $\|g(t + t_p) - g(t)\| \to 0$ uniformly on compact subsets of $\mathbb{R}$.

Definition 2. [3] A bounded function $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ is said to be alpha unpredictable if there exist positive numbers ϵ_0, δ and sequences $t_p \to \infty$, $s_p \to \infty$ as $p \to \infty$, such that $\|g(t + t_p) - g(t)\| \to 0$ uniformly on compact subsets of $\mathbb{R}$ and $\|g(t+t_p) - g(t)\| > \epsilon_0$ for each $t \in [s_p - \delta, s_p + \delta]$ and $p \in \mathbb{N}$.

The sequence $t_p, p = 1, 2, \ldots,$ in Definitions 1,2 is called *the convergence sequence*, and correspondingly we shall say about *the convergence property*, while the existence of positive numbers ϵ_0, δ and sequence s_p is said to be *the separation property*.

In our research, the alpha unpredictable (chaotic) dynamics of Cohen-Grossberg neural network (1) is investigated. To approve Poisson stability and alpha unpredictability in neural network, the method of included intervals and contraction mapping principle are used. The existence, uniqueness, and exponential stability of alpha unpredictable and Poisson stable outputs are discussed. Examples with numerical simulations that support the theoretical results are provided. The dependence of the neural network dynamics on the numerical characteristic, the degree of periodicity, is shown.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP23487275).

Keywords: Cohen-Grossberg neural networks, alpha unpredictable inputs and outputs, Poisson stability, chaotic dynamics.

2010 Mathematics Subject Classification: 92B20, 34C28, 34D20

References

[1] Cohen M., Grossberg S. Absolute stability and global pattern formation and parallel memory storage by competitive neural networks, *IEEE Trans Syst Man Cybernet*, **13** (1983), 815–826.

[2] Sell G. *Topological dynamics and ordinary differential equations*, Van Nostrand Reinhold Company, London (1971).

[3] Akhmet M., Fen M. Poincare chaos and unpredictable functions, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **48** (2017), 85–94.

Discrete HJB PDEs for European Options by Finite Difference Method

A. ZHUMABAYEVA

SDU University, Kaskelen, Kazakhstan

aigulzhumabayeva21@gmail.com

In this research, we study the numerical solution of the Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) equation for European options using the finite difference method (FDM). The HJB equation is an essential tool in optimal control theory, especially for option pricing. A special case of this equation leads to the well-known Black-Scholes model [1]:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, \tag{1}$$

where $V(S,t)$ represents the option price, S is the underlying asset price, σ is volatility, and r is the risk-free interest rate. This equation is derived as a particular form of the HJB equation under an optimal investment strategy [2].

We apply the finite difference method to solve the HJB equation numerically. The method involves discretizing time and asset price space, transforming the partial differential equation (PDE) into a system of algebraic equations.

Moreover, we analyze the transition from the classical Black-Scholes equation to more advanced models incorporating transaction costs and stochastic volatility, which lead to nonlinear HJB equations [3]. These generalizations require special numerical methods because of their increased complexity.

The numerical solution of the HJB equation using the finite difference method provides a solid basis for option pricing under more complex market conditions.

Keywords: HJB equation, Black-Scholes model, finite difference method, option pricing, numerical analysis.

References

[1] Black F., Scholes M. *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, Journal of Political Economy, 81:3 (1973), 637–654.

[2] Øksendal B. Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications, *Springer*, (2013).
[3] Kushner H., Dupuis P. Numerical Methods for Stochastic Control Problems in Continuous Time, *Springer*, (2001).

Computational Study on Thermal Conductivity of Carbon-Carbon Composites Based on Time-Dependent Heat Transfer

K.Kh. ZHUNUSSOV[1], A. SARVAROV [2]

[2]*Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*
[1,2]*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[1]*Satbayev University, Almaty, Kazakhstan*
[1]khaf_kan19@mail.ru, [2]akyl.sarvarov@gmail.com

Carbon-Carbon (C/C) composites exhibit exceptional thermal properties, making them ideal for aerospace, nuclear, and high-temperature applications. Accurate determination of their thermal conductivity is crucial for optimizing performance under extreme conditions. This study numerically investigates thermal conductivity of C/C composites through time-dependent heat transfer simulations performed with COMSOL Multiphysics. A multilayer composite structure was modeled, and transient temperature distributions were analyzed using controlled boundary conditions.

Thermal conductivity was calculated by analyzing temperature profiles correlated with heat flux and material properties, using numerical differentiation and interpolation methods. The computed thermal conductivity profile demonstrates clear anisotropic behavior with significant differences in in-plane and through-the-thickness directions. Simulation results were compared with literature data, confirming accuracy and reliability of the computational approach.

The presented method provides a robust, non-destructive alternative to traditional experimental techniques, enabling efficient evaluation of thermal characteristics for composite material optimization.

Funding: This work was supported by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (grant no. AP23486576).

Keywords: Carbon-Carbon Composites, Thermal Conductivity, COMSOL Multiphysics, Time-Dependent Heat Transfer, Thermal Protection Systems, Computational Modeling, Anisotropy.

2010 Mathematics Subject Classification: 93A30, 00A72

References

[1] Zhunussova, Z.K., Parveen, R., Dosmagulova, K.A., & Zari, I. (2024). *Optimizing Convective Heat Transfer in a Magnetized Couple Stress Fluid over a Stretched Tube.* Journal of Thermal Analysis and Calorimetry.

[2] Ohlhorst, C.W., Vaughn, W.L., Ransone, P.O., & Tsou, H.T. (1997). *Thermal Conductivity Database of Various Structural Carbon-Carbon Composite Materials.* NASA Technical Memorandum 4787. Langley Research Center.

[3] Milton, G.W. (2002). *The Theory of Composites.* Milton & Patton Publishing Company. ISBN: 978-1-4835-6919-2.

4 Алгебра, математическая логика

Руководители: академик НАН РК Байжанов Б.С.
академик НАН РК Джумадильдаев А.С.

Секретарь: Умбетбаев О.А.

Семантикалық дерлік қосарлардың қасиеті

А.Р. ЕШКЕЕВ[1], Г.Е. ЖУМАБЕКОВА[2], А.К. КОШЕКОВА[3]

[1,2,3]*Академик Е.А. Бөкетов атындағы Қарағанды университеті, Қарағанды, Қазақстан*

[1]aibat.kz@gmail.com, [2]zhumabekovag1990@mail.ru, [3]koshekova1998@mail.ru

Бірінші ретті L саналымды тіліндегі йонсондық теорияларды зерттейміз.

Анықтама 1. T теориясы йонсондық деп аталады, егер келесі шарттарды қанағаттандырса:

1) T теориясы ең құрығанда бір шексіз модельге ие болса;
2) T теориясы индуктивті, яғни T теориясы $\forall\exists$-сөйлемдер жиынына эквивалентті болса;
3) T теориясы үйлесімді енгізу қасиетіне ие болса (JEP);
4) T теориясы амальгама қасиетіне ие болса (AP).

Анықтама 2 (Ешкеев А.Р.)**.** $X \subseteq C_T$ орындалатындай X ішкі жиынын йонсондық дерлік жиын деп атаймыз, егер келесі шарттар орындалса:

1) X дегеніміз $\exists$-анықталған жиын болады;
2) $cl(X) = M \in Mod(T)$;
3) $Th_{\forall\exists}(M)$ дегеніміз йонсондық теория болады, мұндағы, $Th_{\forall\exists}(M)$ — L тіліндегі M моделінде ақиқат болатын барлық әмбебап-экзистенциалды сөйлемдер жиыны.

Анықтама 3. Егер M моделі N моделінің экзистенциалды тұйық ішкі моделі болса, онда (N, M) қосары экзистенциалды тұйық қосар деп аталады.

Анықтама 4. (C_T, M) экзистенциалды тұйық қосары семантикалық дерлік қосар деп аталады, егер келесі шарттарды қанағаттандырса:

1) M моделі $|T|^+_\exists$-қаныққан болады, мұндағы, $|T|^+_\exists$-қаныққан экзистенциалды типтерге дейін шектелген дегенді білдіреді;

2) кез келген $\bar{a} \in C_T$ кортежі үшін T мағынасында $M \cup \{\bar{a}\}$ йонсондық дерлік жиын аясындағы әрбір $\exists$-типі C_T моделінде жүзеге асады.

X йонсондық жиынының фрагменті $Fr(X) = Th_{\forall\exists}(M)$ түріндегі йонсондық теория екенін білеміз. Осыған байланысты келесі ұғымды енгізейік.

Анықтама 5 (Ешкеев А.Р.)**.** Кез келген йонсондық дерлік $X \subseteq C_T$ жиыны үшін $C_{Fr(X)} \in Mod(T)$ және $C_{Fr(X)}$ моделі C_T семантикалық моделінің экзистенциалды тұйық ішкі моделі болатындай шарт орындалатын болса, онда T йонсондық теориясы нормалдық деп аталады.

Анықтама 6 (Ешкеев А.Р.)**.** Айталық, T теориясы йонсондық теория болсын.

L-структурасының K_T класы T теориясының Кайзер класы деп аталады, егер

$$K_T = \{M \mid M \in Mod(T) \text{ және } Th_{\forall\exists}(M) \text{ — йонсондық теория}\}.$$

Теорема 7. *Айталық, T йонсондық теориясы $\exists$-толық, J-стабильді және нормалдық теория, ал (C_T, M_1) және (C_T, M_2) семантикалық дерлік қосарлар болсын, $M_1, M_2 \in K_T$. Және де, T^* теориясы T йонсондық теориясының центрі болсын. (C_T, M_1) және (C_T, M_2) семантикалық дерлік қосарлары элементарлы эквивалентті болады, егер олардың $\exists$-типтері T^* теориясының фунтаменталды реті бойынша эквивалентті болса.*

Жұмыстағы анықтамасы берілмеген ұғымдар, сонымен қатар келтірілген ұғымдар туралы толығырақ мәліметті [1] және [2] жұмыстарынан таба аласыздар.

Қаржыландыру: Бұл зерттеуді Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім Министрлігінің Ғылым комитеті (грант № AP22686827) қаржыландырады.

Кілтті сөздер: йонсондық теория, йонсондық дерлік жиын, нормалдық теория, семантикалық дерлік қосарлар.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C45, 03C68

Әдебиеттер тізімі

[1] Ешкеев А.Р. *Теории и их модели*, Издательства Карагандинского университета имени академика Е.А.Букетова, Караганда (2024).

[2] Yeshkeyev A.R., Ulbrikht O.I., Omarova M.T. Double factorization of the Jonsson spectrum, *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series*, **4**:116 (2024), 185–196.

Исследование двудольных графов через анализ формальных понятий

А.О. БАШЕЕВА[1], Е.К. НУРЛИБАЕВ[2], А.Т. ЖУСУПОВА[3]

[1,2,3]*Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан*

[1]basheyeva3006@gmail.com, [2]ynurlibayev@gmail.com, [3]aiman.zhusupova1990@mail.ru

Эта работа исследует теорию граф через анализ формальных понятий (АФП), с акцентом на понимание структуры и представления решёток концептов, полученных из двудольных графов. Мы устанавливаем связи между полными формальными контекстами и соответствующими им двудольными графами, предлагая основу для изучения модулярных решёток. Полученные результаты показывают, что решётка концептов полного формального контекста изоморфна модулярной решётке высоты 2 тогда и только тогда, когда соответствующий ей двудольный граф представляет собой несвязное объединение биклик. Приводятся некоторые примеры.

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № AP23485395).

Ключевые слова: формальный контекст, решётка концептов, двудольный граф, модулярная решётка.

2010 Mathematics Subject Classification: 05C20, 06B23

Литература

[1] Ganter, B., Wille, R. *Formal Concept Analysis: Mathematical Foundations*, Springer, Berlin (1999).

[2] Bondy, J. A., Murty, U. S. R. *Graph Theory with Applications*, Elsevier Science Ltd, New York (1976).

[3] Wille, R. Restructuring lattice theory: An approach based on hierarchies of concepts, *Rival (ed.) Ordered Sets*, (1982), 445–470.

[4] Basheyeva, A.O., Mustafa, M., and Nurakunov, A.M. Properties not retained by pointed enrichments of finite lattices, *Algebra Universalis 81(4)*, (2020), Article 56.

Алгебры бинарных изолирующих формул для теорий модулярных произведений графов

Д.Ю. ЕМЕЛЬЯНОВ

[1]*Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Россия*
[2]*Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия*

dima-pavlyk@mail.ru

Продолжается исследование алгебр бинарных изолирующих формул, обозначенных в источнике [2], для произведений графов. Представлены результаты для модулярных произведений. Работа включает в себя изучение структуры и свойств таких алгебр, что позволяет не только лучше понять их внутренние механизмы, но и выявить потенциальные зависимости и корреляции между различными графами и их алгебрами.

Определение 1. Множество вершин модульного произведения G и H является декартовым произведением $V(G) \times V(H)$. Любые две вершины (u, v) и (u', v') являются смежными в модулярном произведении G и H тогда и только тогда, когда u отличается от u', v отличается от v', и либо u смежно с u', а v смежно с v', или u не смежно с u', а v не смежно с v'.

Алгебру для модулярного произведения графов $G \times H$ обозначим через $\mathfrak{M}_{\mathfrak{o}}$, с метками $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, где n — нечетное число, равное диаметру полученного при умножении графа. Алгебра задается следующей таблицей:

$*$	0	1	2	3	4	...	n
0	{0}	{1}	{2}	{3}	{4}	...	{n}
1	{1}	{0,2}	{1,3}	{0,2}	{1,3,5}	...	{0,2,4,..., n }
2	{2}	{1,3}	{0,2,4}	{1,3,5}	{0,2,4,6}	...	{1,3,5, ..., n-1 }
3	{3}	{0,2}	{1,3,5}	{0,2,4,6}	{1,3,5, ..., n-1 }	...	{0,2,4,..., n }
4	{4}	{1,3,5}	{0,2,4,6}	{1,3,5, ... n-1 }	{0,2,4,...,n}	...	{1,3,5, ..., n-1 }
...	...	...	...	...	...	...	...
n	{n}	{0,2,4,..., n}	{1,3,5, ..., n-1}	{0,2,4,..., n}	{1,3,5, ..., n-1 }	...	{0,2,4,... n}

Алгебру для модулярного произведения графов $H \times G$ обозначим через $\mathfrak{M}_{\mathfrak{e}}$, с метками $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, где n — четное число, равное диаметру полученного при умножении графа. Получим две одинаковые алгебры, задающиеся следующей таблицей:

$*$	0	1	2	3	4	...	n
0	{0}	{1}	{2}	{3}	{4}	...	{n}
1	{1}	{0,2}	{1,3}	{0,2}	{1,3,5}	...	{1,3,5, ..., n-1}
2	{2}	{1,3}	{0,2,4}	{1,3,5}	{0,2,4,6}	...	{0,2,4, ..., n}
3	{3}	{0,2}	{1,3,5}	{0,2,4,6}	{1,3,5, ..., n-1}	...	{1,3,5, ..., n-1}
4	{4}	{1,3,5}	{0,2,4,6}	{1,3,5, ..., n-1}	{0,2,4,..., n}	...	{0,2,4,..., n}
...	...	...	...	...	...	...	...
n	{n}	{1,3,5, ..., n-1}	{0,2,4,..., n}	{1,3,5, ..., n-1}	{0,2,4,..., n}	...	{0,2,4,..., n}

Теорема 2. *Если T — теория модулярного произведения графов, $\mathfrak{M}$ — алгебра бинарных изолирующих формул теории T, то агебра $\mathfrak{M}$ изоморфна алгебре $\mathfrak{M}_{\mathfrak{o}}$ или $\mathfrak{M}_{\mathfrak{e}}$.*

Финансирование: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект №. 24-21-00096.(https://rscf.ru/project/24-21-00096/).

Ключевые слова: графы, алгебра бинарных изолирующих формул, теория моделей, произведение графов, модулярное произведение.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C07, 03C13, 03C30

Литература

[1] Barrow, H.; Burstall, R. Subgraph isomorphism, matching relational structures and maximal cliques, Information Processing Letters, 4 (4): 83–84, doi:10.1016/0020-0190(76)90049-1.

[2] Д. Ю. Емельянов, Б. Кулпешов, С. В. Судоплатов *Алгебры бинарных формул : монография* . - Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2023. - 330 с. - ISBN 978-5-7782-5028-4. - DOI: 10.17212/978-5-7782-5028-4.

[3] Емельянов Д. Ю. Алгебры распределений бинарных изолирующих формул для теорий симплексов. Algebra and Model Theory 11: Collection of papers. Novosibirsk : NSTU Publisher, 2017. — P. 66–74.

Об алгебрах бинарных изолирующих формул для теорий произведений Кронекера для графов

Д.Ю. Емельянов

[1]*Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия*

dima-pavlyk@mail.ru

Осуществляется анализ алгебраических структур бинарных изолирующих формул [2] для теорий произведений графов. Проведено исследование алгебр, полученных путем применения произведения Кронекера для графов n-угольников. Получены графы, таблицы Кэлли для алгебр. Замечено, что при умножении графа ребра на n-угольник с четным количеством вершин получаются два одинаковых графа и, соотвественно, две алгебры.

Определение 1. Пусть даны два графа $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$. *Произведение Кронекера [1]* графов G_1 и G_2, обозначаемое как $G_1 \otimes G_2$, определяется как граф $G = (V, E)$, где:

- Множество вершин V является декартовым произведением множеств вершин V_1 и V_2:

$$V = V_1 \times V_2 = \{(u, v) \mid u \in V_1, v \in V_2\}.$$

- Множество рёбер E определяется следующим образом:

$$E = \{((u_1, v_1), (u_2, v_2)) \mid (u_1, u_2) \in E_1 \text{ и } (v_1, v_2) \in E_2\}.$$

Таким образом, в графе $G_1 \otimes G_2$ вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда соответствующие вершины в G_1 и G_2 соединены рёбрами в своих исходных графах.

Алгебру для произведения Кронекера двух графов $G \otimes H$ обозначим через $\mathfrak{Kr}_{\mathfrak{o}}$ с метками $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, где n — нечетное число, равное диаметру полученного при умножении графа. Алгебра задается следующей таблицей:

$*$	0	1	2	3	4	...	n
0	{0}	{1}	{2}	{3}	{4}	...	{n}
1	{1}	{0,2}	{1,3}	{0,2}	{1,3,5}	...	{0,2,4,..., n }
2	{2}	{1,3}	{0,2,4}	{1,3,5}	{0,2,4,6}	...	{1,3,5, ..., n-1 }
3	{3}	{0,2}	{1,3,5}	{0,2,4,6}	{1,3,5, ..., n-1 }	...	{0,2,4,..., n }
4	{4}	{1,3,5}	{0,2,4,6}	{1,3,5, ...n-1 }	{0,2,4,...,n}	...	{1,3,5, ..., n-1 }
...	...	...	...	...	...	...	...
n	{n}	{0,2,4,..., n}	{1,3,5, ..., n-1}	{0,2,4,..., n}	{1,3,5, ..., n-1 }	...	{0,2,4,...n}

Алгебру для произведения Кронекера двух графов $H \otimes G$ обозначим через $\mathfrak{Kr}_{\mathfrak{e}}$ с метками $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, где n — четное число, равное диаметру полученного при умножении графа. Получим алгебру, которая задается следующей таблицей:

$*$	0	1	2	3	4	...	n
0	{0}	{1}	{2}	{3}	{4}	...	{n}
1	{1}	{0,2}	{1,3}	{0,2}	{1,3,5}	...	{1,3,5, ..., n-1}
2	{2}	{1,3}	{0,2,4}	{1,3,5}	{0,2,4,6}	...	{0,2,4, ..., n}
3	{3}	{0,2}	{1,3,5}	{0,2,4,6}	{1,3,5, ..., n-1}	...	{1,3,5, ..., n-1}
4	{4}	{1,3,5}	{0,2,4,6}	{1,3,5, ..., n-1}	{0,2,4,..., n}	...	{0,2,4,..., n}
...	...	...	...	...	...	...	...
n	{n}	{1,3,5, ..., n-1}	{0,2,4,..., n}	{1,3,5, ..., n-1}	{0,2,4,..., n}	...	{0,2,4,..., n}

Теорема 2. *Если T — теория для произведений Кронекера для графов, $\mathfrak{M}$ — алгебра бинарных изолирующих формул теории T, то агебра $\mathfrak{M}$ изоморфна алгебре $\mathfrak{Kr}_{\mathfrak{o}}$ или $\mathfrak{Kr}_{\mathfrak{e}}$.*

Замечание 3. *Если в результате произведения Кронекера на графах получается хотя бы один симплекс, то алгебра для результата будет изоморфна алгебре симплексов [3].*

Финансирование: Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С.Л. Соболева, проект № FWNF-2022-0012.

Ключевые слова: графы, алгебра бинарных изолирующих формул, теория моделей, произведение графов, Кронекера произведение.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C07, 03C13, 03C30

Литература

[1] Tracy, D. S.; Singh, R. P. A New Matrix Product and Its Applications in Matrix Differentiation. Statistica Neerlandica. 26 (4): 143–157

[2] Д. Ю. Емельянов, Б. Кулпешов, С. В. Судоплатов *Алгебры бинарных формул : монография* . - Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2023. - 330 с. - ISBN 978-5-7782-5028-4. - DOI: 10.17212/978-5-7782-5028-4.

[3] Емельянов Д. Ю. Алгебры распределений бинарных изолирующих формул для теорий симплексов. Algebra and Model Theory 11: Collection of papers. Novosibirsk : NSTU Publisher, 2017. — P. 66–74.

О некоторых обобщениях о-минимальности

К.Ж. КУДАЙБЕРГЕНОВ

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

kanatkud@gmail.com

Напомним определение классического понятия о-минимальности [1]. Модель $(M, <, \dots)$, где $(M, <)$ — линейный порядок, называется о-минимальной, если любое определимое подмножество этой модели является объединением конечного числа интервалов.

Мы рассмотрим обобщения о-минимальности, в которых конечность числа интервалов ослабляется до существования в каждом определимом множестве (или в некоторых определимых множествах) максимального интервала (или чего-то подобного). Приведем один из полученных результатов.

Модель $(M, <, \dots)$ назовем плотно-λ-о-минимальной, если $(M, <)$ – плотный линейный порядок и любое бесконечное определимое подмножество этой модели содержит максимальный интервал мощности не менее λ.

Доказана следующая

Теорема. *Любая плотно-2-о-минимальная модель является о-минимальной.*

Заметим, что для плотно-1-о-минимальных моделей это не так.

Финансирование: Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант №BR20281002).

Ключевые слова: обобщение о-минимальности.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C15

Литература

[1] Pillay A., Steinhorn C. Definable sets in ordered structures. I, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **295**:2 (1986), 565–592.

О продолжении частичных автоморфизмов

К.Ж. КУДАЙБЕРГЕНОВ

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

kanatkud@gmail.com

Рассматривается вопрос о возможности продолжения частичных автоморфизмов до автоморфизмов в конечных турнирах (графах специального вида: турнир — это ориентированный граф, полученный из неориентированного полного графа путём назначения направления каждому ребру; таким образом, турнир — это орграф, в котором каждая пара вершин соединена одной направленной дугой).

Доказано, что для любого конечного турнира $\mathcal{V}$ и любого его частичного автоморфизма f существует конечный турнир $\mathcal{V}^* \supseteq \mathcal{V}$ такой, что f продолжается до автоморфизма турнира $\mathcal{V}^*$. Получена оценка размера турнира $\mathcal{V}^*$.

Финансирование: Автор был поддержан грантом BR20281002 МНВО РК.

Ключевые слова: продолжение частичных автоморфизмов, конечный турнир.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C15

Типы предгеометрий семейства предикатных структур

С.Б. МАЛЫШЕВ

Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Россия

sergei2-mal1@yandex.ru

В работе рассматриваются регулярные обогащения и обеднения предикатных структур, образующие естественную булеву алгебру [1]. Приводится описание видов предгеометрий [2] с алгебраическим оператором замыкания для семейства структур в данной булевой алгебре. Данное исследование продолжает и развивает подходы, представленные в статье [3].

Определение 1. *Предгеометрией* называется множество S вместе с определённой операцией замыкания $\mathrm{cl} : P(S) \to P(S)$, удовлетворяющей следующим условиям:
1) для любого $X \subseteq S$ выполняется $X \subseteq \mathrm{cl}(X)$;
2) для любого $X \subseteq S$ выполняется $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(X)) = \mathrm{cl}(X)$;
3) для любого $X \subseteq S$ и любых $a, b \in S$ если $a \in \mathrm{cl}(X \cup \{b\}) - \mathrm{cl}(X)$, то $b \in \mathrm{cl}(X \cup \{a\})$;
4) для любого $X \subseteq S$ если $a \in \mathrm{cl}(X)$, то $a \in \mathrm{cl}(Y)$ для некоторого конечного $Y \subseteq X$.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{B}(M)$ — булева алгебра регулярных расширений и ограничений предикатной структуры M. Если структуры в $\mathcal{B}(M)$ наделены предгеометрией с алгебраическим оператором замыкания, то для любых двух структур одного типа предгеометрии $M_1, M_2 \in \mathcal{B}(M)$, предгеометрия их пересечения $M_1 \cap M_2$ также наследует данный тип.*

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{B}(M)$ — булева алгебра регулярных расширений и ограничений бинарной предикатной структуры M, где структуры $M_1, M_2 \in \mathcal{B}(M)$ представляют собой графовые структуры. Тогда объединение $M_1 \cup M_2$ наследует тип предгеометрии при выполнении следующих условий:*

1) Если предгеометрии $\langle M_1, cl\rangle$ и $\langle M_2, cl\rangle$ являются локально конечными, то предгеометрия $\langle M_1 \cup M_2, cl\rangle$ также является локально конечной, при условии, что ни одна из структур M_1 и M_2 не содержит бесконечно связного подграфа.

2) Если предгеометрии $\langle M_1, cl\rangle$ и $\langle M_2, cl\rangle$ являются вырожденными, то предгеометрия $\langle M_1 \cup M_2, cl\rangle$ наследует данный тип, если:

M_1 и M_2 не содержат бесконечно связных подграфов;

бесконечное число одинаковых конечных подграфов не формирует бесконечно связный граф в объединённой структуре.

Финансирование: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект №. 24-21-00096.(https://rscf.ru/project/24-21-00096/).

Ключевые слова: предгеометрия, вырожденная предгеометрия, локально конечная предгеометрия, булева алгебра предикатных структур.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C30, 03C65, 51D05

Литература

[1] Sudoplatov S.V. *Expansions and restrictions of structures and theories, their hierarchies*, arXiv:2502.03051 [math.LO], 2025.

[2] Pillay A. *Geometric Stability Theory*, Clarendon Press, Oxford (1996).

[3] Малышев С.Б. Наследуемость типов предгеометрий относительно композиций структур, *Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика*, (2025). (Печать)

Ribbon decomposition formulas for dual stable Grothendieck polynomials

A.M. ADILZHAN[1], D.A. YELIUSSIZOV[2]

[1]*KBTU, Almaty, Kazakhstan*
[2]*KBTU, Almaty, Kazakhstan*

[1]alibek.adilzhanov@gmail.com, [2]yeldamir@gmail.com

There are well known formulas for Schur polynomials called Hamel-Goulden identities where each identity corresponds to some ribbon decomposition of a given Young diagram. It generalizes Jacobi-Trudi formulas, Giambelli identity and Lascoux-Pragacz formula. We derive Hamel-Goulden identities for dual stable Grothendieck polynomials by finding novel Schur expansion of these polynomials.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP23489146).

Keywords: symmetric polynomials, algebraic combinatorics, dual stable Grothendieck polynomials, Jacobi-Trudi, Giambelli, Hamel-Goulden

2010 Mathematics Subject Classification: 05E05

On algebras of binary formulas for weakly circularly minimal theories: monotonic-to-right case

A.B. ALTAYEVA[1], B.Sh. KULPESHOV[2], S.V. SUDOPLATOV[3]

[1]*International Information Technology University, Almaty, Kazakhstan*
[2]*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[2]*Kazakh-British Technical University, Almaty, Kazakhstan*
[3]*Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia*
[3]*Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia*

[1]vip.altayeva@mail.ru, [2]kulpesh@mail.ru, [3]sudoplat@math.nsc.ru

Algebras of binary formulas are a tool for describing relationships between elements of the sets of realizations of an one-type at the binary level with respect to the superposition of binary definable sets. A *binary isolating formula* is a formula of the form $\varphi(x, y)$ such that for some parameter a the formula $\varphi(a, y)$ isolates a complete type in $S(\{a\})$. The concepts and notations related to these algebras can be found in the papers [1, 2].

Let L be a countable first-order language. Throughout we consider L-structures and assume that L contains a ternary relational symbol K, interpreted as a circular order in these structures (unless otherwise stated).

Let $M = \langle M, \leq\rangle$ be a linearly ordered set. If we connect two endpoints of M (possibly, $-\infty$ and $+\infty$), then we obtain a circular order.

The notion of *weak circular minimality* was studied initially in [3]. Let $A \subseteq M$, where M is a circularly ordered structure. The set A is called *convex* if for any $a, b \in A$ the following property is satisfied: for any $c \in M$ with $K(a, c, b)$, $c \in A$ holds, or for any $c \in M$ with $K(b, c, a)$, $c \in A$ holds. A *weakly circularly minimal structure* is a circularly ordered structure $M = \langle M, K, \ldots\rangle$ such that any definable (with parameters) subset of M is a union of finitely many convex sets in M.

A *cut* $C(x)$ in a circularly ordered structure M is maximal consistent set of formulas of the form $K(a, x, b)$, where $a, b \in M$. A cut is said to be *algebraic* if there exists $c \in M$ that realizes it. Otherwise, such a cut is said to be *non-algebraic*. Let $C(x)$ be a non-algebraic cut. If there is some $a \in M$ such that either for all $b \in M$ the formula $K(a, x, b) \in C(x)$, or for all $b \in M$ the formula $K(b, x, a) \in C(x)$, then $C(x)$ is said to be *rational*. Otherwise, such a cut is said to be *irrational.* A *definable cut* in M is a cut $C(x)$ with the following property: there exist $a, b \in M$ such that $K(a,x,b) \in C(x)$ and the set $\{c \in M \mid K(a,c,b)$ and $K(a,x,c) \in C(x)\}$ is definable. The *definable completion* $\overline{M}$ of a structure M consists of M together with all definable cuts in M that are irrational (essentially $\overline{M}$ consists of endpoints of definable subsets of the structure M).

Let f be a unary function from M to $\overline{M}$. We say that f is *monotonic-to-right (left) on* M if it preserves (reverses) the relation K_0, i.e. for any $a, b, c \in M$ such that $K_0(a,b,c)$, we have $K_0(f(a), f(b), f(c))$ $(K_0(f(c), f(b), f(a)))$.

Let $E(x,y)$ be an $\emptyset$–definable equivalence relation partitioning M into infinite convex classes. Suppose that y lies in $\overline{M}$ (non-obligatory in M). Then

$$E^*(x,y) := \exists y_1 \exists y_2 [y_1 \neq y_2 \wedge \forall t (K(y_1,t,y_2) \rightarrow E(t,x)) \wedge K_0(y_1,y,y_2)].$$

Let M be an 1-transitive structure. Following [2] we denote every binary isolating formula acting in M by a label $u \in \rho_M$, where ρ_M denotes the set of all labels for the algebra $\mathcal{P}_M$ of binary isolating formulas of the structure M. The algebra $\mathcal{P}_M$ is said to be *deterministic* if $u_1 \cdot u_2$ is a singleton for any labels $u_1, u_2 \in \rho_M$.

Generalizing the last definition, we say that the algebra $\mathcal{P}_M$ is *m-deterministic* if the product $u_1 \cdot u_2$ consists of at most m elements for any labels $u_1, u_2 \in \rho_M$. We also say that an m-deterministic algebra $\mathcal{P}_M$ is *strictly m-deterministic* if it is not $(m-1)$-deterministic.

The following theorem characterizes up to binarity $\aleph_0$–categorical 1-transitive non-primitive weakly circularly minimal structures M of convexity rank greater than 1 having both a trivial definable closure and a convex-to-right formula $R(x,y)$ such that $r(y) := \text{rend } R(M,y)$ is monotonic-to-right on M:

Theorem 1. [4] *Let M be an $\aleph_0$–categorical 1-transitive non-primitive weakly circularly minimal structure of convexity rank greater than 1, $dcl(\{a\}) = \{a\}$ for some $a \in M$. Suppose that there exists a convex-to-right formula $R(x,y)$ such that $r(y) := \text{rend } R(M,y)$ is monotonic-to-right on M. Then M is isomorphic up to binarity to*

$$M'_{s,m,k} := \langle M, K^3, E_1^2, E_2^2, \ldots, E_s^2, E_{s+1}^2, R^2 \rangle,$$

where M is a circularly ordered structure, M is densely ordered, $s \geq 1$; E_{s+1} is an equivalence relation partitioning M into m infinite convex classes without endpoints; E_i for every $1 \leq i \leq s$ is an equivalence relation partitioning every E_{i+1}-class into infinitely many infinite convex E_i-subclasses without endpoints so that the induced order on E_i-subclasses is dense without endpoints; $R(M,a)$ has no right endpoint in M and $r^k(a) = a$ for all $a \in M$ and some $k \geq 2$, where $r^k(y) := r(r^{k-1}(y))$; for every $1 \leq i \leq s+1$ and any $a \in M$

$$M'_{s,m,k} \models \neg E_i^*(a, r(a)) \wedge \forall y (E_i(y,a) \rightarrow \exists u [E_i^*(u, r(a)) \wedge E_i^*(u, r(y))]),$$

$m = 1$ or k divides m.

Here we describe algebras of binary isolating formulas for $\aleph_0$-categorical weakly circularly minimal theories of convexity rank greater than 1 with a 1-transitive non-primitive automorphism group and a trivial definable closure having a monotonic-to-right function to the definable completion of a structure.

Theorem 2. *The algebra $\mathfrak{P}_{M'_{s,m,k}}$ of binary isolating formulas with monotonic-to-right function r has $2sk + m + k + 1$ labels, is commutative and strictly $(2s+3)$-deterministic for all valid values s, m and k.*

Funding: The authors were supported by Science Committee of Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP22685890), and in the framework of the State Contract of the Sobolev Institute of Mathematics, Project No. FWNF-2022-0012.

Keywords: algebra of binary formulas, $\aleph_0$-categorical theory, weak circular minimality, circularly ordered structure, convexity rank.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C30, 03C45, 03C52

References

[1] Shulepov I.V., Sudoplatov S.V. *Algebras of distributions for isolating formulas of a complete theory,* Siberian Electronic Mathematical Reports, ***11** (2014), 380–407.*

[2] Sudoplatov S.V. *Classification of countable models of complete theories, Novosibirsk: NSTU, 2018 (in Russian).*

[3] Kulpeshov B.Sh., Macpherson H.D. *Minimality conditions on circularly ordered structures,* Mathematical Logic Quarterly, ***51**:4 (2005), 377–399.*

[4] Kulpeshov B.Sh. *Definable functions in the $\aleph_0$-categorical weakly circularly minimal structures,* Siberian Mathematical Journal, ***50**:2 (2009), 282–301.*

On non-finitely based quasivarieties of modular lattices

M.A. ARAPBAY[1], A.M. ASANBEKOV[2], A.O. BASHEYEVA[3], A.M. NURAKUNOV[4]

[1,3]*L. N. Gumilev Eurasian National University, Astana, Kazakhstan*
[2,4]*Institute of Mathematics of NAS of KR, Bishkek, Kyrgyzstan*

[1]meruertarapbay@gmail.com, [2]amantai.asanbekov.1@gmail.com,
[3]basheyeva3006@gmail.com, [4]a.nurakunov@gmail.com

In 1984, V.I. Tumanov conjectured that a proper quasivariety generated by a finite modular lattice lacks a finite basis for its quasi-identities. We confirm this conjecture for wider classes of modular lattices.

A class $\mathcal{K}$ of algebras is called a *variety* if it is closed under subalgebras, homomorphic images, and direct products. *A quasivariety* is a class $\mathcal{K}$ of algebras closed under subalgebras, direct products and ultraproducts.

Let M_3 be the least non-distributive modular lattice and let $M_{3,3}$ be an 8 element modular lattice of height 3. By $\mathbf{Q}(L)$ $(\mathbf{V}(L))$ we denote the quasivariety (variety) generated by L.

A triple $\langle A, \sigma, \tau\rangle$ is called a *topological algebra* if $\langle A, \sigma\rangle$ is an algebra of the signature σ, $\langle A, \tau\rangle$ is a topological space and every operation from σ is continuous with respect to topology τ.

A topology τ is called *Boolean* if it is compact, Hausdorff and totally disconnected. A topological algebra $A_\tau = \langle A, \sigma, \tau\rangle$ is *Boolean* if its topology is Boolean.

A finite lattice A equipped with discrete topology τ generates a *topological quasivariety* $\mathbf{Q}_\tau(A)$ consisting of all topologically closed subalgebras of non-zero direct powers of A endowed with the product topology.

Profinite algebras are exactly those that are isomorphic to inverse limits of finite algebras. Such algebras are naturally equipped with Boolean topologies.

A topological quasivariety $\mathbf{Q}_\tau(A)$ is *standard* if every Boolean topological algebra with the algebraic reduct in $\mathbf{Q}(A)$ is profinite. In this case, we say that algebra A generates a standard topological quasivariety.

Theorem 1. *Let L be a finite modular lattice. If $\mathbf{V}(M_3) \subset \mathbf{Q}(L) \subset \mathbf{V}(M_{3,3})$, then $\mathbf{Q}(L)$ is not finitely based as well as not standard.*

Corollary 2. *Let L be a finite modular lattice. If $\mathbf{V}(M_3) \subset \mathbf{Q}(L)$ and $M_{3,3} \notin \mathbf{Q}(L)$, then $\mathbf{Q}(L)$ is not finitely based as well as not standard.*

Funding: The work is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan ([1], [2] Grant No. AP23485395).

Keywords: lattice, quasivariety, topological quasivariety.

2020 Mathematics Subject Classification: 08C15, 06C99

References

[1] Gorbunov V.A., Smirnov D.M. Finite algebras and the general theory of quasivarieties, *Colloq. Mathem. Soc. Janos Bolyai. Finite Algebra and Multipli-valued Logic*, 28, (1979), 325-–332.

[2] Clark D.M., Davey B.A., Jackson M.G., Pitkethly J.G. The axiomatizability of topological prevarieties, *Advances in Mathematics*, 218, (2008), 1604–1653.

On the structure and properties of a locally finite quasivariety of lattices

M.A. ARAPBAY[1], A.O. BASHEYEVA[2], S.M. LUTSAK[3]

[1,2]*L. N. Gumilev Eurasian National University, Astana, Kazakhstan*
[3]*M. Kozybayev North Kazakhstan University, Petropavlovsk, Kazakhstan*

[1]meruertarapbay@gmail.com, [2]basheyeva3006@gmail.com, [3]sveta_lutsak@mail.ru

There are two fundamental and interconnected problems in lattice theory: identifying which finite lattices generate finitely based quasivarieties and which generate standard quasivarieties. These questions are pivotal in understanding the structural and logical characteristics of lattices and their impact on the quasivarieties they produce.

In this work, we establish a sufficient condition for a locally finite quasivariety of lattices that ensures it is neither finitely axiomatizable nor profinite.

Our findings include multiple examples of finite lattices that generate quasivarieties lacking these properties. These examples highlight the complex interplay between the internal structure of finite lattices and the resulting properties of the quasivarieties they define.

Funding: The work is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan ([1], [2] Grant No. AP23485395).

Keywords: lattice, quasivariety, topological quasivariety.

2020 Mathematics Subject Classification: 08C15, 06C99

References

[1] Gorbunov V.A., Smirnov D.M. Finite algebras and the general theory of quasivarieties, *Colloq. Mathem. Soc. Janos Bolyai. Finite Algebra and Multipli-valued Logic*, 28, (1979), 325-–332.

[2] Clark D.M., Davey B.A., Jackson M.G., Pitkethly J.G. The axiomatizability of topological prevarieties, *Advances in Mathematics*, 218, (2008), 1604–1653.

On Expansions of Trivial Strongly Minimal Models by Unary and Binary Predicates

B.S. BAIZHANOV[1], S.S. BAIZHANOV[2]

[1,2]*Institute of mathematics and mathematical modelling, Almaty, Kazakhstan*

[1]baizhanov@hotmail.com, [2]sayan-5225@mail.ru

Strongly minimal theories play a fundamental role in model theory due to their simplicity and definability properties. In this study, we explore the effects of expanding a trivial strongly minimal model by unary and binary predicates, focusing on stability and Morley rank.

First, we consider the expansion of a trivial strongly minimal model M in a countable language L by a family of unary predicates $A_1, A_2, \dots \subset M$. The resulting structure $(M, A_1, A_2, \dots)$ remains superstable.

Next, we examine the expansion of a countable saturated strongly minimal model $\mathfrak{M} = (M; L)$ by a binary relation $E^2(x, y)$, defined as $x \in \text{acl}(y) \backslash \text{acl}(\emptyset)$, where $\text{acl}(a)$ denotes the algebraic closure of an element a. In the expanded model $\mathfrak{M}^+ = (M; L \cup \{E^2\})$, we demonstrate that the Morley rank of the formula $x = x$ increases to 2. This rise is attributed to the infinite number of strongly minimal equivalence classes induced by E^2, each defined over elements algebraic over some y but not over the empty set. We establish this result using properties of E^2 as an equivalence relation and the strong minimality of associated formulas, such as $E^2(x, a)$ and $K(x) := \neg\exists y\, E^2(x, y)$.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP19677434).

Keywords: expansion, definability, types, strongly minimal theories.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C45, 03C50

References

[1] Baizhanov, B.S., Baldwin, J.T. Local Homogeneity. The Journal of Symbolic Logic, 69:(4) (2004), 1243–1260.

[2] Baldwin, J.T., Lachlan, A.H. On Strongly Minimal Sets. The Journal of Symbolic Logic, 36:(1) (1971), 79–96.

Expansion of models of dp-minimal theories

B.S. BAIZHANOV[1], A.M. NURLANOVA[2]

[1]*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[2]*SDU University, Kaskelen, Kazakhstan*
[1]baizhanov@math.kz, [2]231101001@sdu.edu.kz

All classes of Model theories are divided into different classes: NIP, IP, SOP, NSOP.

The report is devoted to the study of various types of expansion, when expansion retains certain properties, or passes from one class to another without retaining properties.

SOP+NIP	SOP+IP
NSOP+NIP	NSOP+IP

Definition 1. We have a structure $\mathcal{M} =< M : \sum >$ and then we regard $\{\mathcal{M}^+ =< M : \sum \cup \{U\} >\}$ then it will expansion. If for any M-formula $\phi(x, \bar{a})$

$$(\{U\}(\mathcal{M}^+) \neq \phi(\mathcal{M}, \bar{a})) \tag{1}$$

Definition 2. A theory has $dp - rank \geq n$ if there are formulas $\phi_1(x, y), ..., \phi_n(x, y)$ and mutually indiscernible sequences $(a_i^1)_{i<\omega}, ..., (a_i^n)_{i<\omega}$ such that for any function $\sigma : \{1, ..., n\} \to \omega$, the type

$$\{\phi_k(x, a^k_{\sigma(k)}) : k \leq n\} \cup \{\neg\phi_k(x, a_i^k) : I \neq \sigma(k), k \leq n\} \tag{2}$$

is consistent. A theory is **dp-minimal** if it has **dp-rank 1**.

Observation of our report. We take a structure from superstable class $(\mathbb{Z}, +, 0, 1)$ let us add connections from o-minimal $(\mathbb{Z}, +, <, 0, 1)$. We have new formula sets (¡). But at the same time the dp-minimal remains. But also initially it was in the class of NIP and NSOP. Afterwards it moved to NIP, SOP. As you can see, the NIP has been preserved but not stable. We get another new structure when we add a predicate for a fixed finitely generated multiplicative submonoid $(\mathbb{Z}, +, 0, \Gamma)$. It goes beyond dp-minimal, but NIP remains. If we add new formula sets $(\cdot)$, then it loses its NIP properties. Expansion by adding new connections, after which the structure and properties of formal sets may change.

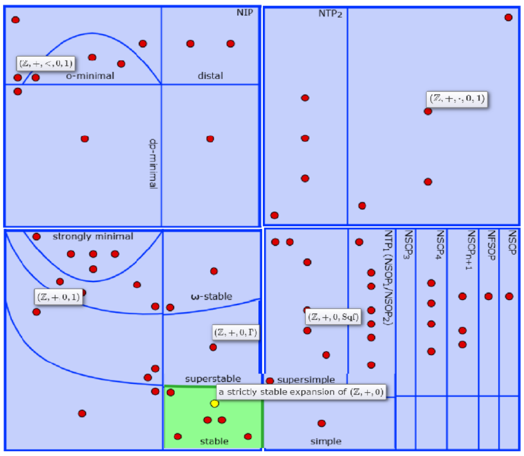


Figure 1: Example of expansion

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant BR20281002).

Keywords: expansion, dp-minimal, NIP, IP, SOP, NSOP, stable.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C64, 03C45, 03C10

References

[1] Conant G. *Dividing Lines in Unstable Theories*, (2012).

[2] Conant G., Pillay A. *Stable Groups and Expansions of (Z,+,0)*, arXiv preprint arXiv:1601.05692v3 (2017).

[3] Weiss W., D'Mello C. *Fundamentals of Model Theory*, University of Toronto, Toronto (1997).

Externally definaable expansion, quasi-neighborhood and neighborhood

B. BAIZHANOV[1], F. SARGULOVA[2]

[1,2]*Institute of mathematics and mathematical modeling, Almaty, Kazakhstan*

[1]baizhanov@hotmail.com, [2]fsargulova@gmail.com

External definability. Let $\mathfrak{M}$ be elementary substructure of $\mathfrak{N}$. It is said that pair of models is *beautiful*, if $\mathfrak{N}$ is saturated over M. Let $\bar{\alpha} \in N \setminus M$ and $p := tp(\alpha|M)$. Then for any formula $\psi(\bar{x}, \bar{y})$ define the predicate $R_{(\psi,p)}(\bar{y})$ on the set M, $\models R_{(\psi,p)}(\bar{a})$ iff $\psi(\bar{x}, \bar{a}) \in tp(\bar{\alpha}|M)$ iff $\mathfrak{N} \models \psi(\bar{\alpha}, \bar{a})$. Denote by $\mathfrak{M}^+ = \langle M; \Sigma^+\rangle$, where $\Sigma^+ := \{R_{(\psi,p)}(\bar{y}) | p \in S(M),\ \psi \in \Sigma\}$. It follows from definition that if a pair of models (M, N) is conservative pair (type of any tuple elements from N over M is definable), then the structure $\mathfrak{M}^+$ is the structure obtained from $\mathfrak{M}$ scolemization of $\mathfrak{M}$. We will consider the cases when $\mathfrak{M}^+$ constructed from one 1-type for non-stable theory.

Let $\mathfrak{M}$ be a model of an arbitrary complete theory T of the signature Σ. We say that $\mathfrak{M}^+_p$ is expansion of $\mathfrak{M}$ by type $p \in S_1(M)$, if $\mathfrak{M}^+_p := \langle M; \Sigma^+_p\rangle$, where $\Sigma^+_p := \{R_{(\psi.p)}(\bar{y}) | \psi \in \Sigma\}$.

Externally definable expansion $\mathfrak{M}^+ = \langle M; \Sigma \cup \{U^1\}\rangle$ is uniformly externally definable expansion, if for some $\mathfrak{N} \succ \mathfrak{M}$, for any $\varphi(\overline{x})$ of Σ^+, there is $K_\varphi(\overline{x}, \overline{\alpha})$ of Σ, $\overline{\alpha} \in N$, such that for all $\overline{a} \in M$

$$[\mathfrak{M}^+ \models \varphi(\overline{a}) \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models K_\varphi(\overline{a}, \overline{\alpha})].$$

In the first time the uniformly external definable considered in the paper Macpherdson-Marker-Steinhorn [1] for cut in submodel of o-minimal model with universe of real numbers. numbers. In the paper Baizhanov B.S. [2] was proved that expansion of model of weakly o-minimal theory by family convex sets is weakly o-minimal and uniformly external definable. S. Shelah [3] proved that external definable expansion of a model dependent theory (NIP) by external definable relation is uniformly external definable.

The analysis of approaches shows that the using the theory of orthogonality we can control the set of realizations of one-types. The generalization of notions of quasi-neighborhood and neighborhood it is possible to formulate the next

Theorem 1. *Let T be a complete theory such that for any set A the following holds:*

1) For any $p \in S_1(A)$, for any $\bar{\gamma}$, $QV_p(\bar{\gamma}) = V_p(\bar{\gamma})$

2) For any $p, q \in S_1(A)$ the following holds. If $p \not\perp^a q$, then $q \not\perp^a p$.

Then for model of the theory T the expansion by all externally definable subsets is uniformly external definable.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP19677434).

Keywords: externally definable expansion, ordered structure, irrational cut, convex set.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C15, 03C64

References

[1] Macpherson D., Marker D., Steinhorn Ch. Weakly o-minimal structures and real closed fields, Translations of the American Mathematical Society, 352 (2000), 5435–5483.

[2] Baizhanov B. Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicates, The Journal of Symbolic Logic, 66 (2001), 1382–1414.

[3] Shelah S. Dependent first order theories. Continued, emphIsrael Journal of Mathematics 173: 1. (2009) https://doi.org/10.1007/s11856-009-0082-1

Conservative extensions of NIP non-dp-minimal theories

B.S. BAIZHANOV[1], N.S. RASSAYEVA[2]

[1]*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[2]*SDU University, Kaskelen, Kazakhstan*

[1]baizhanov@math.kz, [2]nurzhainar.rassayeva@sdu.edu.kz

Definition 1. $q \in S(A), q(\bar{x})$ is definable, if for any $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ there is $d_\varphi(\bar{y}, \bar{a}), \bar{a} \in A$ such that for any $\bar{b} \in A, \varphi(\bar{x}, \bar{b}) \in q$ iff $\mathfrak{M} \models d_\varphi(\bar{a}, \bar{b})$.

Let q be a type. For the formula $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ there is a control formula $d_\varphi(\bar{a}, \bar{b})$ and $\varphi(\bar{x}, \bar{b}) \in q$ and only the truth $d_\varphi(\bar{a}, \bar{b})$. If I take $\bar{c}$ and we have a question, what does $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ belong to q? Of course, if it passes the control d_φ. In conservative extension is always a control for any type and formula.

Definition 2. $\mathfrak{M}$-model of T. Let $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$. $\mathfrak{N}$-conservative extension of $\mathfrak{M}$, if for any $\bar{\alpha} \in \mathfrak{M} - \mathfrak{N}, \mathrm{tp}(\bar{\alpha}/\mathfrak{M})$ is definable.

Theorem 3. *$T-$ stable $\Leftrightarrow \forall p \in S(N), \forall \varphi(x, \bar{y}) \exists d_\varphi(\bar{y}, \bar{a})\, \bar{a} \in M$ such that*
$\forall \bar{b} \in M \left[\varphi(x, \bar{b}) \in p \Leftrightarrow M \models d_\varphi(\bar{a}, \bar{b})\right].$

There is also a control formula where T-stable only if for any p here from N, for any formula $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ exists a control formula $d_\varphi(\bar{y}, \bar{a})$ here from M such that for any b of M$\varphi(x, \bar{b})$ belongs to p only if for M truth $d_\varphi(\bar{a}, \bar{b})$.

In other words, in conservative extension each type is definable.

A theory is stable if no formula has the order property $\vDash \varphi(a_i, b_j) \Leftrightarrow i < j$. Also here doesn't exist infinite tree of formulas with 2 branching. There is a n tree where it doesn't go any further. It means that there is no complete $n+1$ tree of formulas.

In Figure (1) NIP+NSOP is always stable and it divides into dp-minimal and non dp-minimal. Now our task is to consider for these structures when there is dp-minimal and when there is non dp-minimal and find conservative extension for unstable classes.

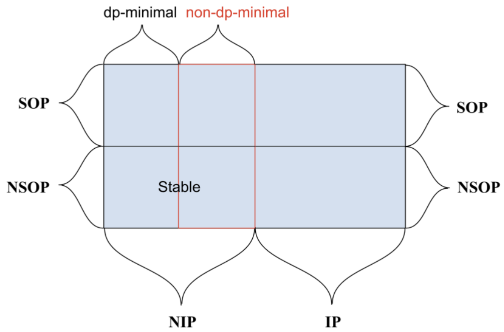


Figure 2:

Observation of our report: We will discuss the construction of non dp-minimal, NIP theory with dp-rank equal to n ($n > 1$).

$$\mathfrak{M}_1 = (M_1; <_1), \mathfrak{M}_2 = (M_2; <_2), \ldots, \mathfrak{M}_n = (M_n; <_n).$$

This involves the structure of linear order, interpreted as n-tuples of $\mathfrak{M}_i$, along with n total orders $<_1, <_2, \ldots, <_n$. Each order $<_i$ compares the i-th coordinate of the tuples. This setup is used to illustrate the concepts of *dp-minimality*, *dp-rank*, and the *NIP (Not the Independence Property)*.

The structure is defined as:

$$\mathfrak{M} := (M, <_1, <_2, \ldots, <_n)$$

where:

- $M = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) | a_i \in M_i\}$.
- $<_i$ is a binary relation that compares the i-th coordinates of two tuples.

Next

$$\mathfrak{M} \vDash (a_1, a_2, \ldots, a_n) <_i (b_1, b_2, \ldots, b_n) \iff \mathfrak{M}_i \vDash (a_i < b_i)$$

$$\mathfrak{M} \vDash \urcorner (a_1, a_2, \ldots, a_n) <_i (b_1, a_2, b_2, \ldots, b_n)$$

$$\mathfrak{M} \vDash E_i(a, b) \iff \urcorner(a <_i b) \wedge \urcorner(b <_i a)$$

$$\mathfrak{M} \vDash \forall x \forall y (E_i(x, y) \to E_i(y, x))$$

$$\mathfrak{M} \vDash \forall x \forall y \forall z ((E_i(x, y) \wedge E_i(y, z)) \to E_i(x, z))$$

In this report, we consider the conservative extensions of elementary pairs of the theory of $\mathfrak{M}$.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant BR20281002).

Keywords: NIP theories, dp-minimality, conservative extensions, definability.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C40, 03C45, 03C52

References

[1] Alfred Dolich, John Goodrick and David Lippel. *Dp-minimality: basic facts and examples*, 2011: 267-288.

[2] Bektur S. Baizhanov. Conservative extensions of models with weakly o-minimal theories, *Siberian Journal of Pure and Applied Mathematics 7.3*, 2007: 13-44.

Overview of essential kinds of 1-types over sets of models of weakly ordered minimal theories

B. S. BAIZHANOV[1], N. S. TAZABEKOVA[2]

[1,2]*Institute of mathematics and mathematical modeling, Almaty, Kazakhstan*
[2]*Kazakh British Technical University, Almaty, Kazakhstan*
[1,2]*SDU University, Kaskelen, Kazakhstan*

[1]baizhanov@hotmail.com, [2]tazabekova.nargiz@gmail.com

We examine the recognized classification of 1-types in the setting of weakly ordered minimal theories. We introduce and analyze essential classes of non-algebraic 1-types.

Definition 1. (B.S. Baizhanov, [1], [2]) Let $p \in S_1(A)$. We say that a formula $\Phi(x, y, \bar{a})$, $\bar{a} \in A$, is p-stable (p-preserving) if

$$\text{for any } \alpha \models p, \text{ there exist } \gamma_1, \gamma_2 \models p \text{ such that } \gamma_1 < \Phi(\mathcal{M}', \alpha, \bar{a}) < \gamma_2.$$

Definition 2. Let $p \in S_1(A)$ be a non-algebraic type.

We say that p is *semi-quasisolitary to the right* if there is the greatest p-preserving convex to the right 2-A-formula $F(x, y, \bar{a})$, where $\bar{a} \in A$.

We say that p is *semi-quasisolitary to the left* if there is the greatest p-preserving convex to the left 2-A-formula $G(x, y, \bar{a})$, where $\bar{a} \in A$.

We say that p is *quasisolitary* if it is semi-quasisolitary to the right and to the left.

Definition 3. Let $p \in S_1(A)$. We say that a p-preserving convex to the right 2-A-formula $F(x, y, \bar{a})$ is locally p-decreasing if for any $\alpha \in p(\mathcal{M}')$ there exist $\alpha_1, \alpha_2 \in p(\mathcal{M}')$ such that:

1. $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$;
2. for any β_1 and β_2 with $\alpha_1 < \beta_1 < \beta_2 < \alpha_2$ it holds that $\sup F(\mathcal{M}', \beta_1) > \sup F(\mathcal{M}', \beta_2)$, or, that is the same,
$$\mathcal{M}' \models \exists x (x > \beta_2 \wedge F(x, \beta_1, \bar{a}) \wedge \neg F(x, \beta_2, \bar{a})).$$

Note 4. *Let $p \in S_1(A)$ be semi-quasisolitary to the right. If $\beta > \alpha$, $tp(\beta/A) = tp(\alpha/A) = p$, and $\mathcal{M}' \models \neg F(\beta, \alpha, \bar{a})$, where F is the greatest p-preserving convex to the right formula, then for any formula $\Phi(x, y, \bar{c})$, where $\bar{c} \in A$, the following holds:*

$$\mathcal{M}' \models \Phi(\beta, \alpha, \bar{c}) \implies \mathcal{M}' \models \Phi(\beta_1, \alpha, \bar{c}) \text{ for all } \beta_1 \in F(\mathcal{M}', \alpha, \bar{a})^+ \cap p(M').$$

Let $p \in S_1(A)$ be semi-quasisolitary to the left. If $\beta < \alpha$, $tp(\beta/A) = tp(\alpha/A) = p$, and $\mathcal{M}' \models \neg G(\beta, \alpha, \bar{a})$, where G is the greatest p-preserving convex to the left formula, then for any formula $\Phi(x, y, \bar{c})$, where $\bar{c} \in A$, the following holds:

$$\mathcal{M}' \models \Phi(\beta, \alpha, \bar{c}) \implies \mathcal{M}' \models \Phi(\beta_1, \alpha, \bar{c}) \text{ for all } \beta_1 \in G(\mathcal{M}', \alpha, \bar{a})^- \cap p(M').$$

Lemma 5. *Let $p \in S_1(A)$ be a non-algebraic type. Then:*

1. *If $F(y,x,\bar{a})$ is the greatest p-preserving convex to the right or to the left 2-A-formula, then $F(y,x,\bar{a})$ is not locally p-decreasing. Moreover, for any $\alpha < \beta \in p(\mathcal{M}')$ it holds that* $\sup F(\mathcal{M}',\alpha,\bar{a}) \le \sup F(\mathcal{M}',\beta,\bar{a})$ *for the case F is convex to the right, and* $\inf F(\mathcal{M}',\alpha,\bar{a}) \le \inf F(\mathcal{M}',\beta,\bar{a})$ *for the case F is convex to the left.*

2. *If p is semi-quasisolitary then it is quasisolitary.*

Lemma 6. 1. *Let $p \in S_1(A)$, then for any convex to the right (or to the left) p-preserving 2-A-formula $F(x,y,\bar{a})$ there is a $F_1(x,y,\bar{a})$ that is convex to the right (or to the left) p-preserving formula such that for all $\alpha \in p(M')$ the following holds:*

$$F(\mathcal{M}',\alpha,\bar{a}) \subset F_1(\mathcal{M}',\alpha,\bar{a}) \text{ and } F_1(x,y,\bar{a}) \text{ is not locally } p\text{-decreasing}.$$

2. *Let $p \in S_1(A)$ be quasisolitary. The set of all $E_p(x,y,\bar{c}_p)$-classes of equivalence in $\mathcal{M}'$ is densely ordered. A set of representatives of $E_p(x,y,\bar{c}_p)$-classes in $\mathcal{M}'$ is ordered 2-indiscernible.*

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP19677434).

Keywords: weakly o-minimal theories, convex set, quasisolitary type, quasirational type, irrational type.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C64

References

[1] Baizhanov B.S. One-types in weakly o-minimal theories, Proceedings of Informatics and Control Problems Institute, Almaty, 1996, pp. 77–90.

[2] Baizhanov B.S. Types in weakly o-minimal theories, 1st Congress of Kazakhstan Mathematicians (11–14 September 1996), Shymkent, 1996, p. 177.

[3] Baizhanov B.S. Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicates, The Journal of Symbolic Logic, 66 (2001), 1382–1414.

[4] Baisalov E., Poizat B. Paires de structure o-minimal, prepublications de L'institut Girard Desargues, UPRES-A 5028, 1996, pp. 1–16.

[5] Baldwin J. Fundamentals of stability theory, Springer-Verlag, 1988.

[6] Kulpehsov B.Sh. Weak o-minimality of a linearly ordered structure, Researches in theory of algebraic systems, Karaganda, 1995, pp.: 61–67.

[7] Baizhanov B.S., Sudoplatov S.V., Verbovskiy V.V. Conditions for Non-symmetric Relations of Semi-isolation, Siberian Electronic Mathematical Reports, vol. 9 (2012), pp. 161–184.

[8] Marker D., Steinhorn Ch. Definable types in o-minimal theories, The Journal of Symbolic Logic, vol. 59 (1994), pp. 185–198.

[9] Pillay A., Steinhorn C. Definable sets in ordered structures I, Trans. Amer. Math. Soc., 295 (1986), pp. 565-592.

[10] Verbovskiy V. On formula depth of weakly o-minimal structures. Algebra and Model Theory (collection of scientific papers edited by K. Ponomarev and A. Pinus), Novosibirsk, 1997, 209–224.

Non-orthogonality of 1-types in theories with a linear order

B.S. BAIZHANOV[1], O.A. UMBETBAYEV[2], T.S. ZAMBARNAYA[3]

[1,2,3]*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[2]*Kazakh-British Technical University, Almaty, Kazakhstan*
[1]baizhanov@math.kz, [2]umbetbayev@math.kz, [3]zambarnaya@math.kz

Previously, two types of orthogonality were considered – weak and almost orthogonality. The non-orthogonality of complete types is an important concept for such classes of first-order theories as o-minimal, weakly o-minimal and quite o-minimal theories.

Now, we introduce generalized notions of convex orthogonality – convex weak and convex almost orthogonality. These definitions are formulated in terms of convex closures of types. The connections between different kinds of orthogonality, as well as their properties – such as symmetry and the preservation of quasirationality and definability of types – have been studied.

Definition 1. 1) The *convex closure* of a formula $\varphi(x, \bar{a})$ is the following:

$$\varphi^c(x, \bar{a}) := \exists y_1 \exists y_2 \big(\varphi(y_1, \bar{a}) \wedge \varphi(y_2, \bar{a}) \wedge (y_1 \leq x \leq y_2)\big).$$

2) The *convex closure* of a type $p(x) \in S_1(A)$ is the following type:

$$p^c(x) := \{\varphi^c(x, \bar{a}) \mid \varphi(x, \bar{a}) \in p\}.$$

Definition 2. We say that p^c is *not weakly convex-orthogonal* to q^c and write $p^c \not\perp^{cw} q^c$ for this, if there exists a convex monotonic on $p^c(\mathfrak{N})$ A-definable formula $\varphi(x, y)$, such that for each $\alpha \in p^c(\mathfrak{N})$, there exist $\beta_1, \beta_2 \in q^c(\mathfrak{N})$ with $\beta_1 \in \varphi(\mathfrak{N}, \alpha)$, $\beta_2 \notin \varphi(\mathfrak{N}, \alpha)$ and $\beta_1 < \beta_2$.

Theorem 3. *Let $A \subset N$, $\mathfrak{N}$ be an $|A|^+$-saturated, and $p, q \in S_1(A)$ be non-principal types such that $p^c \not\perp^{cw} q^c$. Then p^c is quasirational if and only if q^c is quasirational.*

Theorem 4. *Let $A \subset N$, $\mathfrak{N}$ be an $|A|^+$-saturated model of a theory with a linear order, p and $q \in S_1(A)$ be non-algebraic types such that $p^c \not\perp^{cw} q^c$. Then if p^c is definable, then q^c is definable.*

Theorem 5. *Let $A \subset N$, $\mathfrak{N}$ be an $|A|^+$-saturated, $p, q \in S_1(A)$ be non-principal types. Then $p^c \not\perp^{cw} q^c \Leftrightarrow q^c \not\perp^{cw} p^c$.*

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP14971869).

Keywords: linear order, convex closure, weak orthogonality, almost orthogonality, definable type, quasirational type.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C64

References

[1] Alibek A., Baizhanov B.S., Kulpeshov B.Sh., Zambarnaya T.S. Vaught's conjecture for weakly o-minimal theories of convexity rank 1, *Annals of Pure and Applied Logic*, **169** (2018), 1190–1209.

[2] Baizhanov B.S. Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicates, *The Journal of Symbolic Logic*, **66** (2001), 1382–1414.

[3] Baizhanov B., Umbetbayev O. Constant expansion of theories and the number of countable models, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, **20**:2 (2023), 1037–1051.

Infinite number of 1-types with the same convex closure

B. BAIZHANOV[1], T. ZAMBARNAYA[2]

[1,2]*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[1]*SDU University, Kaskelen, Kazakhstan*
[1]baizhanov@math.kz, [2]zambarnaya@math.kz

We consider linearly ordered theories, that is, theories T with a definable relation of a linear order "$<$".

Definition 1. [1] 1) A *convex closure* of a formula $\varphi(x, \bar{a})$ is the following formula:

$$\varphi^c(x, \bar{a}) := \exists y_1 \exists y_2 \big(\varphi(y_1, \bar{a}) \wedge \varphi(y_2, \bar{a}) \wedge (y_1 \leq x \leq y_2)\big).$$

2) A *convex closure* of a type $p(x) \in S_1(A)$ is the type

$$p^c(x) := \{\varphi^c(x, \bar{a}) \mid \varphi(x, \bar{a}) \in p\}.$$

Denote $S_p^c := \{q \in S_1(A) \mid q^c = p^c\}$. The relation $q \in S_p^c$ is an equivalence relation on the set $S_1(A)$.

Definition 2. A 1-A-formula H *generates* a type $p \in S_1(A)$, if p is the only type from S_p^c such that $H(x) \in p(x)$.

Definition 3. [2] Let T be a small complete theory, $p(\bar{x})$ be a non-principal type over a finite subset A of some model of T. The type p is *extremely trivial*, if for every natural number $n \geq 1$ and every sequence of realizations $\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, ..., \bar{\beta}_n$ of p, $p(M(\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, ..., \bar{\beta}_n, \bar{a})) = \{\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2 ... \bar{\beta}_n\}$, where $\bar{a}$ is some enumeration of the set A, and $M(\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, ..., \bar{\beta}_n, \bar{a})$ is a prime model of T over $\bar{\beta}_1 \cup \bar{\beta}_2 \cup ... \cup \bar{\beta}_n \cup \bar{a}$.

Linearly ordered theories with a non-principal extremely trivial 1-type over a finite set have $2^{\aleph_0}$ countable pairwise non-isomorphic models [2].

Proposition 4. *Let T be a small linearly ordered theory, A be a finite subset of some model of T, $p \in S_1(A)$ be a non-principal type, and $H(x)$ be an A-formula generating the type p. Then the type p is not extremely trivial.*

Corollary 5. *Let T be a small linearly ordered theory, A be a finite subset of some model of T, and $p \in S_1(A)$ be a non-principal type such that S_p^c is finite, then p is not extremely trivial.*

Note that if p is such that S_p^c is infinite, then p is not necessary extremely trivial.

Example 6. *Let $\mathcal{L} = \{=, <, c_i P_i\}_{i<\omega}$, and T be an $\mathcal{L}$-theory such that $<$ is a dense linear order without endpoints, $c_i < c_{i+1}$ for all $i < \omega$, and P_i's are dense mutually dense disjoint unary predicates.*

Then for each $j < \omega$ the type $p_j(x) := \{x > c_i \wedge P_j(x) \mid i < \omega\}$ is not extremely trivial, the type $p(x) := \{x > c_i \wedge \neg P_i(x) \mid i < \omega\}$ is extremely trivial, and the theory T has $2^{\aleph_0}$ countable non-isomorphic models. In this example, $p^c = p_j^c$ for all $j < \omega$, and $|S_p^c(\emptyset)| = \aleph_0$.

Definition 7. [2] An A-definable formula $\varphi(\bar{x}, \bar{y}_1, \bar{y}_2, ..., \bar{y}_n, \bar{a})$, $\bar{a} \in A$, is said to be *p-n-preserving*, if for every realizations $\bar{\beta}_1$, $\bar{\beta}_2$, ..., $\bar{\beta}_n$ of the type p, $\varphi(\bar{x}, \bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, ..., \bar{\beta}_n, \bar{a}) \vdash p(\bar{x})$.

Proposition 8. *[2] Let T be a countable complete theory, $p(\bar{x}) \in S(A)$ be a non-principal type over a finite subset A of some model of T. Then the type p is extremely trivial if and only if for every $n \geq 1$ every p-n-preserving A-definable formula is trivial.*

In this talk we present a maximality condition for the number of countable non-isomorphic models of a countable complete linearly ordered theory T with a non-principal type $p \in S_1(A)$ over a finite subset A of some model of T, such that S_p^c is infinite.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. BR20281002).

Keywords: small theory, linear order, extremely trivial type, convex closure.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C15, 03C64

References

[1] Baizhanov B.S., Verbovskiy V.V. O-Stable Theories, *Algebra and Logic*, **50**:3 (2011), 303–325.

[2] Baizhanov B., Baldwin J.T., Zambarnaya T. Finding $2^{\aleph_0}$ countable models for ordered theories, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, **15**:7 (2018), 719–727.

On o-minimality of the Cartesian square of the ordered set of rationals as a lattice

A.B. DAULETIYAROVA[1], V.V. VERBOVSKIY[2]

[1]*SDU University, Kaskelen, Kazakhstan*
[1,2]*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[1]aigera95@mail.ru, [2]verbovskiy@math.kz

Partially ordered structures are one of the classical mathematical objects. Here we continue studying the notion of o-minimality for partially ordered structures.

We consider $\mathcal{M} = (\mathbb{Q}^2, \prec)$, where we define the partial order $<$ as

$$(a_1, a_2) \prec (b_1, b_2) \text{ iff } a_1 < b_1 \wedge a_2 < b_2.$$

Definition 1. A subset of $\mathcal{M}$ is said to be a *generalized interval* if it is of the following form:

$$\bigcup_{a,b \in A} (a, b)$$

where A is a definable subset in $\mathcal{M}$.

Definition 2. A partially ordered structure is said to be o-minimal if each of its definable subsets is a finite union of generalized intervals and points.

We show partial quantifier elimination in the appropriate language of the elementary theory of $\mathcal{M}$. After that, we check that a definable subset of $\mathcal{M}$ is a finite union of generalized intervals. So, we prove the following.

Theorem 3. $\mathcal{M}$ *is o-minimal.*

Funding: The first author was supported by Science Committee of Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. BR20281002).

Keywords: partially ordered structure, o-minimal structure, lattice, generalized interval.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C64, 06A06

3-nil alternative, pre-Lie and assosymmetric operads

Y. DUISENBAY[1], B. SARTAYEV[2], A. TEKEBAY[3]

[1,3]*SDU University, Kaskelen, Kazakhstan*
[2]*Narxoz University, Almaty, Kazakhstan*
[1]yerlanduisenbay@gmail.com, [2]baurjai@gmail.com, [3]alpamystekebay@gmail.com

An algebra is called alternative if it satisfies the following identities:

$$(ab)c - a(bc) = -(ac)b + a(cb), \tag{1}$$

$$(ab)c - a(bc) = -(ba)c + b(ac). \tag{2}$$

A natural source of alternative algebras is Artin's theorem, which states that every two-generated subalgebra of alternative algebra is associative [1].

The variety of alternative algebras is a natural generalization of the variety of associative algebras. On the other side, the dual operad of the alternative operad is an associative operad with additional identity $x^3 = 0$. So, we obtain

$$\mathcal{A}lt^! = \mathcal{A}s + \{x^3 = 0\}.$$

Also, we obtain the following trivial result which immediately follows from the definitions given above:

Theorem 1. *Let $\mathcal{A}lt_3$ be a variety of alternative algebras defined by identity $x^3 = 0$. Then every two-generated algebra from $\mathcal{A}lt_3$ lies in $\mathcal{A}lt^!$, i.e., $\mathcal{A}lt + \{x^3 = 0\} = \mathcal{A}lt^!{}_2$.*

All described motivations can be illustrated as inclusions of the varieties as follows:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{A}s & \supset & \mathcal{A}s + \{x^3 = 0\} & = & \mathcal{A}lt^! \\ \cap & & \cap & & \cap \\ \mathcal{A}lt & \supset & \mathcal{A}lt + \{x^3 = 0\} & = & \mathcal{A}lt^!{}_2 \end{array}$$

We consider Koszul dual operad ${\mathcal{P}_2}^!$, where $\mathcal{P}_2$ is a variety of binary perm algebra, i.e., it is an alternative operad with additional identity $(ab)c + (cb)a = (ac)b + (ca)b$. It turns out that ${\mathcal{P}_2}^!$ is a variety of pre-Lie algebras with two additional independent identities, where one of them is $x^3 = 0$.

In addition, we compute polarizations of ${\mathcal{P}_2}^!$ and 3-nil alternative algebras, self-dual operads: $\mathcal{A}lt_3$, an assosymmetric operad with identity $\sum_{\sigma \in S_3} (-1)^\sigma (x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)}) x_{\sigma(3)}$; not Koszul operads: ${\mathcal{P}_2}^!$, the operad governed by the variety of 3-nil assosymmetric algebras, an assosymmetric operad with identity $x^3 = 0$.

Funding: The authors were supported by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP26193761).

Keywords: alternative algebra, pre-Lie algebra, assosymmetric algebra, polynomial identities.

2010 Mathematics Subject Classification: 17A30, 17A50, 17D05.

References

[1] Zhevlakov K.A., Slinko A.M., Shestakov I.P., Shirshov A.I. *Rings That Are Nearly Associative*, Nauka, Moscow (1976).

Phylogenetic operad

A.S. DZHUMADIL'DAEV

Institute of mathematics and mathematical modeling, Almaty, Kazakhstan

dzhuma@hotmail.com

Phylogenetic trees appear in biology when considering protein sequence data. The root of a binary phylogenetic tree corresponds to a common ancestor in an evolutionary tree. Phylogenetic trees have many applications in studying the genetic and statistical properties of protein data sequences.

We consider phylogenetic trees from a purely algebraic point of view. We give a description of phylogenetic trees as a base of algebraic structures with interesting identities. Let $[a, b] = ab - ba$, $\{a, b\} = ab + ba$ be Lie and Jordan commutators and

$$\{a, b, c\} = \{a, \{b, c\}\} - \{\{a, b\}, c\}$$

associator of Jordan product. An algebra with identities

$$\{ab, c\} - \{ac, b\} = 0, \quad \{a, bc\} - \{b, ac\} = 0$$

is called *phylogenetic.*

Theorem. *Let $\mathcal{A}$ be phylogenetic operad and $\mathcal{A}^!$ is its Koszul dual. Then*

$$\mathcal{A} = \langle \ \{a, b, c\} = 0, \ \{[a, b], c\} = 0 \ \rangle,$$

$$\mathcal{A}^! = \langle \ [[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b] = 0, \ \ \{ab, c\} = 0 \ \rangle.$$

The operads $\mathcal{A}$ and $\mathcal{A}^!$ are Koszul.

Dimension sequences can be defined by the following formulas

$$d_1 = 1, \quad d_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} d_k d_{n-k}, \quad n > 1,$$

$$d_n^! = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (n-i-1)! \binom{n}{2i} (2i-1)!! \,.$$

We see that the dimensions sequence of multilinear parts of the operad $\mathcal{A}$ coincides with the sequence of numbers of phylogenetic trees

$$1, 2, 7, 41, 346, 3797, 51157, 816356, 15050581, \ldots \text{(OEIS } A006677.)$$

It is the reason why we call operad $\mathcal{A}$ phylogenetic.

Note that the phylogenetic operad is not Lie-admissible, but associative admissible and satisfies 1-Alia identity

$$\{[a,b],c\} + \{[b,c],a\} + \{[c,a],b\} = 0.$$

Funding: The first author was supported by Science Committee of Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. BR20281002).

Keywords: operad, phylogenetic tree, multilinear part, identity, Lie-admissible.

2010 Mathematics Subject Classification: 18M05, 17Bxx

Selmer Ranks of Elliptic Curves With a Rational 2-Torsion

M.M. JAFARI

[1] *Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*

dzhafari_mokhammad_m@live.kaznu.kz

The study of elliptic curves plays a fundamental role in arithmetic geometry, as the first non-trivial case of curves over a number field. From the Mordell-Weil theorem, it is known that the structure of an elliptic curve E over a number field K is of the form

$$E/K \simeq E_{Tors} \oplus \mathbb{Z}^r \tag{1}$$

Where E_{Tors} is the finite torsion group of the curve. No algorithm is known for calculation of r, the rank of the curves, but the we can bound the rank by the Selmer group as

$$rank(Sel_p(E/K)) = rank(E/K) + rank(Ш(E/K)[p^\infty]) \tag{2}$$

Where Sel_p (Selmer group) and Ш (Tate-Shafarevich group) lie in the following sequence

$$0 \longrightarrow E(K)/mE(K) \longrightarrow Sel_m(E/K) \longrightarrow Ш(E/K)[m] \longrightarrow 0 \tag{3}$$

Yielding a method to compute the ranks of elliptic curves.

In this work, we consider families of elliptic curves of the form

$$E_r : y^2 = x^3 + tx - r(t + r^2) \tag{4}$$

equipped with a rational 2-torsion at $(r, 0)$, which can be shifted to $(0, 0)$ as

$$E : y^2 = x^3 + 2rx + (t + r^2)x$$
$$E' : y^2 = x^3 - 6rx - (3r^2 + 4t)x$$

In [1] it is shown that the 2-Selmer ranks of elliptic curves with a marked 2-torsion is unbounded; this is achieved through study of distribution of Tamagawa ratios of such curves and the rational isogeny associated to the multiplication by 2 map.

A number of methods are available to compute the 2-Selmer ranks in practice, specially for the case $r = 0$. In this work, we expand upon these methods to investigate these ranks as r, t. In particular, we calculate the exact difference in rank in relation to $ord_2(r)$, as this value makes the most significant change in the average size of Selmer groups and ranks of these families.

Keywords: Elliptic Curves, Selmer group

2010 Mathematics Subject Classification: 11G05, 14H52, 14G05,

References

[1] Klagsburn Z., Lemke Oliver R.K. The distribution of the Tamagawa ratio in the family of elliptic curves with a two-torsion point, *Research In Mathematical Sciences*, **1**:15 (2014).

Graph polynomials on Join-Union Graphs

Medet JUMADILDAYEV

Nazarbayev University, Astana, Kazakhstan

medetdzhuma@gmail.com

The union of graphs $G = (V, E)$ and $H = (U, F)$ is a graph with vertex set $V \bigcup U$ and edge set $E \bigcup F$. We denote graph union operation as $G \bigcup H$. The join operation of graphs with disjoint vertex sets V and U, and disjoint edge sets E and F, is the graph union $G \cup H$ along with edges joining all pairs $(v, u) \in V \times U$. We denote it as $G \triangledown H$.

The matching polynomial. Let $\Phi_k(G)$ be the number of k-matchings in graph G. The matching polynomial is defined by:

$$m(G, t) = \sum_{k=0}^{n/2} \Phi_k(G) t^{n-2k}$$

Path-coverings polynomial. A k-path covering is a collection of k vertex-disjoint directed paths that cover the whole vertex set V. Let $p_k(G)$ be the number of k-path coverings of G. The path-covering polynomial is defined by:

$$P(G, t) = \sum_{k=1}^{n} p_k(G) t^k$$

Chromatic polynomial. $\chi(G, t)$ is the number of ways to color G in t colors so that no two adjacent vertices share the same color.

It is simple to see that $m(G, t = 0)$ is the number of *perfect matchings*, and $\partial_t P(G, t = 0)$ is twice the number of Hamiltonian Paths. It was shown by Stanley [2] that $\chi(G, -1)$ is the number of acyclic orientations.

Theorem 1. *Let $p(G, t)$ be one of the graph polynomials mentioned above. Then, for any graphs G and H, there exists a linear operator ϕ for which the following holds:*

$$p(G \triangledown H, t) = \phi(\phi^{-1}(p(G, t))\phi^{-1}(p(H, t))$$

Moreover, $\phi(t^n)$ is the graph polynomial for complete graph K_n:

$$\phi(t^n) = p(K_n, t)$$

Theorem 2. *Let ϕ_m, ϕ_P, and ϕ_χ denote operators corresponding matching, path-coverings, and chromatic polynomials. Then,*

$$\phi_m = e^{\partial_t^2/2}$$
$$\phi_P = e^{t\partial_t^2}$$
$$\phi_\chi(t^n) = \prod_{i=0}^{n-1}(t-i)$$

Our main result can be applied to compute graph polynomials for cographs in polynomial time $O(n^2 \log n)$. Moreover, it is possible to compute perfect matchings, hamiltonian graphs, number of acyclic orientations, or number of proper colorings of cographs. It is also possible to compute in $O(n \log n)$ time the graph polynomials for graphs such as Complete k-partite graph, wheel graph, star graph, n-dipyramidal graph, cone graph, fan graph, windmill graph, etc. For general graphs, these problems are NP-complete.

Keywords: cographs, join, hamiltonian paths, path covering, perfect matchings, chromatic polynomial

2010 Mathematics Subject Classification: 05C15, 05C31, 05C38, 05C45, 05C70, 05C85

References

[1] Makowsky J.A., Rotics U., Averbouch I., Godlin B. Computing Graph Polynomials on Graphs of Bounded Clique-Width, *32nd International Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science*, (2006), Lecture Notes in Computer Science, vol. 4271, Springer.

[2] Stanley R.P. Acyclic orientations of graphs, *Discrete Mathematics*, (1973), 5:171–178.

Multipartite Labeled Series-Reduced Trees

Medet JUMADILDAYEV

Nazarbayev University, Astana, Kazakhstan

medetdzhuma@gmail.com

Definition 1. A multipartite labeled series-reduced tree is a rooted tree with labeled leaves and colored unlabeled inner nodes.

Let $d(T,v)$ and $col(T,v)$ denote the outdegree and the color of a vertex v in a tree T. The weight $w(T)$ is defined as follows:

$$w(T) = \frac{t^s}{s!}\prod_{v=1}^{n} x_{col(T,v),d(T,v)}$$

The generating function for series-reduced trees $p_m(x)$ is defined as the sum of weights over all series-reduced trees and m colors.

Theorem 2. *Refined generating function for labeled series-reduced trees with m colors enumeration up to vertex degree and color sequence is defined using compositional inverse by t as follows:*

$$p_m(t,x) = \left(t(1-m) + \sum_{c=1}^{m} x_c^{-1}(t)\right)^{-1}$$

Theorem 3. *Generating function for labeled series-reduced trees with s leaves and m colors:*

$$p_m^s(x) = \sum_{k=0}^{s}(-1)^{s+k-1}B_{s+k-1,k}\left(0, \left\{\sum_{c=1}^{m} x_{c,i}^{-1}\right\}_{i=1}^{\infty}\right)$$

$$x_{c,i}^{-1} = (-1)^{i-1}\sum_{k=0}^{i} B_{i+k-1,k}(0, x_{c,2}, -x_{c,3}, \ldots)$$

Finally, we give a way to compute the number of multipartite labeled series-reduced trees with s leaves and m colors.

Theorem 4. *Let $!n_k$ denote the number of derangements of length n which have k cycles. Then, the number of m-partite series-reduced trees with s leaves is given as*

$$p_m^s = \sum_{k=0}^{s} (-1)^{s+k-1} m^k (!(s+k-1)_k)$$

Setting $m = 2$ gives the number of series-parallel networks/cographs/bipartite labeled series-reduced trees. A similar result for the bipartite case can be found in the work of Riordan [2].

Corollary 5. *Number of bipartite series-reduced trees:*

$$p_2^s = \sum_{k=0}^{s} (-1)^{s+k-1} 2^k (!(s+k-1)_k)$$

where $!(s+k-1)_k$ is the number of derangements with length $s+k-1$ with k cycles.

Keywords: multipartite labeled trees, vertex degree refinement, bell polynomials, derangements

2010 Mathematics Subject Classification: 05C05, 05C07, 05C15, 11B73

References

[1] Bergeron F., Labelle G., Leroux P. *Combinatorial Species and Tree-like Structures*, Cambridge University Press, Cambridge (1997).

[2] Riordan J. The blossoming of Schröder's fourth problem, *Acta Mathematica*, 137.1 (1976), 1–16.

Properties of Elementary Polynomial Automorphisms

R.K. KERIMBAYEV[1], B. YUAN[2]

[1,2]*Al-Farabi kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*

[1]ker_im@mail.ru, [2]06littleluck06@gmail.com

In 1972 Nagata constructed his famous automorphism. In 2004 Shestokov and Umirbaev proved its wildness. In 2022 Kerimbayev R.K. established the algebraicity of the Nagata automorphism and elementary polynomial automorphisms. In this regard, the question of the algebraicity of the superposition of two elementary polynomial automorphisms may arise. We will try to answer this question.

Theorem 1. *(Kerimbayev R. K.) Elementary Polynomial Automorphisms are Quadratic, that is,* $\varphi^2 - (\alpha+1)\varphi + \alpha\varepsilon = 0$. $\varphi(x_i) = \alpha x_i + f,\ \varphi(x_k) = x_k,\ k \neq i.$

Corollary 1. For $\alpha = 1$, the elementary automorphism φ has a unique proper invariant subspace, namely $(\varphi - \varepsilon)\mathbb{R}[x_1, ..., x_n]$. For $\alpha \neq 1$, it has two distinct invariant subspaces, namely $(\varphi - \varepsilon)\mathbb{R}[x_1, ..., x_n]$, $(\varphi - \alpha\varepsilon)\mathbb{R}[x_1, ..., x_n]$.

2. Let two different elementary polynomial automorphisms φ and ψ be given.

$$\varphi(x_i) = \alpha x_i + \beta x_j + f(x_1, ..., \hat{x_i}, ..., \hat{x_j}, ..., x_n), \tag{1}$$

$$\varphi(x_k) = x_k, k \neq i, 1 \leq i, j, \leq n,\ i < j, \alpha \neq 0, \tag{2}$$

$$\psi(x_j) = \gamma x_i + \delta x_j + g(x_1, ..., \hat{x_i}, ..., \hat{x_j}, ..., x_n), \tag{3}$$

$$\psi(x_k) = x_k, k \neq j, 1 \leq i, j, k \leq n,\ i < j, \delta \neq 0. \tag{4}$$

Where ˆ means that the given variable is absent.

Theorem 2. *The superposition $\varphi \circ \psi$ is cubic:*

$$(\varphi \circ \psi)^3 - (1 + \alpha + \delta + \beta\gamma)(\varphi \circ \psi)^2 + (\alpha + \delta + \beta\gamma + \alpha\delta)(\varphi \circ \psi) - \alpha\delta\varepsilon = 0, \tag{5}$$

where ε—identity transformation.

Corollary 2. If $\varphi(x_i) = \alpha x_i + f(..., \hat{x_i}, ..., \hat{x_j}, ...)$, $\varphi(x_k) = x_k$, $k \neq i$, $\psi(x_j) = \beta x_j + g(..., \hat{x_i}, ..., \hat{x_j}, ...)$, $\psi(x_k) = x_k$, $k \neq j$. Then we have the following equality:

$$(\varphi \circ \psi)^3 - (1 + \alpha + \beta)(\varphi \circ \psi)^2 + (\alpha + \beta + \alpha\beta)(\varphi \circ \psi) - \alpha\beta\varepsilon = 0, \tag{6}$$

where ε—identity maps.

Funding: This study was funded by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan as part of the grant project No. AP19679799 “Development of a modified methodology for assessing spatial growth factors and overcoming differences between regions”.
The second author is supported by Chinese Governmental scholarship (China-Kazakhstan intergovernmental agreement).

Keywords: Polynomial automorphism, Nagata automorphism, elementary automorphism.

2010 Mathematics Subject Classification: 12Y99, 08A05, 08A35

References

[1] Nagata M. *On the automorphism group of* $k[x, y]$, Tyoto University, Tokyo (1972).

[2] Shestakov Ivan P., Umirbaev Ualbai U. The Nagata automorphism is wild, *Proceedings of the National Academy of Sciences, USA*, **100**:22 (2003), 12561-12563.

[3] Kerimbayev R.K. One property of Nagata automorphism, *Traditional International April Mathematical Conference (The Institute of Mathematics and Mathematical Modelling),Almaty, Kazakhstan.* : (2022), P33.

Cohomological dimension of group homomorphisms

N. KUANYSHOV

Suleyman Demirel University, Kaskelen, Kazakhstan

nursultan.kuanyshov@sdu.edu.kz

The *Lusternik-Schnirelmann category (for short, LS-category)*, denoted as $cat(X)$, of a topological space X is defined as the minimum number k such that X admits an open cover $\{U_0, U_1, \dots, U_k\}$ by $k+1$ contractible sets in X. This concept provides a lower bound on the number of critical points for smooth real-valued functions on closed manifolds [2].

Let us recall that given a discrete group Γ, a classifying space (Eilenberg-MacLane space) $B\Gamma = K(\Gamma, 1)$ is defined to be a path-connected space such that $\pi_1(B\Gamma) = \Gamma$ and $\pi_k(B\Gamma) = 0$ for all $k \neq 1$. Since $B\Gamma$ is the unique up to homotopy equivalence, we define that LS-category of a discrete group to be LS-category of its classifying space, i.e $cat(\Gamma) := cat(B\Gamma)$. In the 1950s, Eilenberg and Ganea [5] established the equality between LS-category and cohomological dimension, $cat(\Gamma) = cd(\Gamma)$, for discrete group Γ, where

$$cd(\Gamma) = sup\{k | H^k(B\Gamma; M) \neq 0\}$$

for some $Z\Gamma$-module M [1].

Similarly, one can define the LS-category of group homomorphism $\phi : \Gamma \to \Lambda$, $cat(\phi) := cat(B\phi)$ where $B\phi : B\Gamma \to B\Lambda$ is the map between classifying spaces. Considering the Eilenberg-Ganea equality $cd(\Gamma) = cat(\Gamma)$, a natural conjecture arises:

Conjecture 1. *For any group homomorphism $\phi : \Gamma \to \Lambda$, it is always the case that $cat(\phi) = cd(\phi)$.*

In this talk, we discuss the recent progress on this conjecture (see [3,4,6,7], for more details). In particular, we give the characterisation of cohomological dimension of group homomorphisms [6].

Theorem 2. *Let $\phi : \Gamma \to \Lambda$ be an epimorphism between discrete groups. Then*

$$cat(\phi) = cd(\phi) = 1$$

if and only if ϕ factors through the free group F_n via epimorphisms $\Gamma \to F_n \to \Lambda$.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP25796111).

Keywords: Cohomological dimension, group homomorphisms, Lusternik-Schnirelmann category.

2020 Mathematics Subject Classification: 20J05, 20J06, 20K30, 55M30

References

[1] Brown, K. *Cohomology of groups*, Vol. 87. Springer Science & Business Media, (2012).

[2] Cornea O., Lupton G., Oprea J., Tanre D. *Lusternik-Schnirelmann Category*, AMS, 2003.

[3] De Saha, A., Dranishnikov, A.On cohomological dimension of homomorphisms. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 2024. 152(11), pp.4607-4621.

[4] Dranishnikov, A., Kuanyshov, N. On the LS-category of group homomorphisms. *Mathematische Zeitschrift*, 2023. 305(1), p.14.

[5] Eilenberg S., Ganea T., *On the Lusternik-Schnirelmann Category of Abstract Groups. Annals of Mathematics, 65, (1957), 517-518.*

[6] Kuanyshov, N. On the sequential topological complexity of group homomorphisms. *Topology and its Applications 356 (2024): 109045.*

[7] Kuanyshov, N. On the LS-category of homomorphisms of groups with torsion. *Algebra Discrete Math.36(2), 166–178 (2023).*

On type-preserving formulas in weakly o-minimal theories

B.Sh. KULPESHOV

[1]*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[1]*Kazakh British Technical University, Almaty, Kazakhstan*

b.kulpeshov@kbtu.kz

Let L be a countable first-order language. Throughout this lecture we consider L–structures and suppose that L contains a binary relation symbol $<$ which is interpreted as a linear order in these structures. This paper concerns the notion of *weak o-minimality* which was initially deeply studied by H.D. Macpherson, D. Marker and C. Steinhorn in [1]. A subset A of a linearly ordered structure M is *convex* if for all $a, b \in A$ and $c \in M$ whenever $a < c < b$ we have $c \in A$. A *weakly o-minimal structure* is a linearly ordered structure $M = \langle M, =, <, \ldots \rangle$ such that any definable (with parameters) subset of M is a union of finitely many convex sets in M. Real closed fields with a proper convex valuation ring provide an important example of weakly o-minimal structures.

Let A and B be arbitrary subsets of a linearly ordered structure M. Then the expression $A < B$ means that $a < b$ whenever $a \in A$ and $b \in B$, and $A < b$ means that $A < \{b\}$. For an arbitrary subset A of M we introduce the following notations: $A^+ := \{b \in M \mid A < b\}$ and $A^- := \{b \in M \mid b < A\}$. For an arbitrary one-type p we denote by $p(M)$ the set of realizations of p in M. If $B \subseteq M$ and E is an equivalence relation on M then we denote by B/E the set of equivalence classes (E–classes) which have representatives in B. If f is a function on M then we denote by $Dom(f)$ the domain of f. A theory T is said to be *binary* if every formula of the theory T is equivalent in T to a boolean combination of formulas with at most two free variables.

Further throughout the lecture we consider an arbitrary complete theory T (if unless otherwise stated), where M is a sufficiently saturated model of T.

Definition 1. [2] Let T be a weakly o-minimal theory, $M \models T$, $A \subseteq M$, $p \in S_1(A)$ be non-algebraic.

(1) An L_A-formula $F(x,y)$ is said to be *p-preserving* if there exist α, γ_1, $\gamma_2 \in p(M)$ such that

$$[F(M,\alpha) \setminus \{\alpha\}] \cap p(M) \neq \emptyset \text{ and } \gamma_1 < F(M,\alpha) \cap p(M) < \gamma_2.$$

(2) A p-preserving formula $F(x,y)$ is said to be *convex-to-right (left)* if there exists $\alpha \in p(M)$ such that $F(M,\alpha) \cap p(M)$ is convex, α is the left (right) endpoint of the set $F(M,\alpha) \cap p(M)$ and $\alpha \in F(M,\alpha)$.

Definition 2. [3] Let $F(x,y)$ be a p–preserving convex-to-right (left) formula. We say that $F(x,y)$ is said to be *equivalence-generating* if for any $\alpha, \beta \in p(M)$ such that $M \models F(\beta,\alpha)$ the following holds:

$$\sup[F(M,\alpha) \cap p(M)] = \sup[F(M,\beta) \cap p(M)]$$

$$(\text{resp. } \inf[F(M,\alpha) \cap p(M)] = \inf[F(M,\beta) \cap p(M)]).$$

The class of weakly o-minimal theories is an object for active research. In [4], a formula calculating the countable spectrum for weakly o-minimal theories of finite convexity rank was found. Here we discuss properties of p-preserving convex-to-right (left) formulas in weakly o-minimal theories, where p is a non-algebraic 1-type. It is established that in the case of an existence of a p-preserving convex-to-right (left) formula that is not equivalence-generating, there exists a p-preserving convex-to-left (right) formula that is also not equivalence-generating; it was shown how it is built from the original formula.

Proposition 3. *Let T be a weakly o-minimal theory of convexity rank 1, $M \models T$, $A \subseteq M$, $p \in S_1(A)$ be non-algebraic, $F(x,y)$ be a p-preserving convex-to-right (left) formula. Then $G(x,y) := F(y,x)$ is a p-preserving convex-to-left (right) formula.*

Example 4. Let $M := \langle M, <, E^2, f^1 \rangle$ be a linearly ordered structure, where $M = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ is ordered lexicographically.

We define E as follows: for any $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2) \in M$ we have $E(a,b)$ iff $a_1 = b_1$. Obviously, $E(x,y)$ is an equivalence relation partitioning M into infinitely many infinite convex classes so that the induced ordering on E-classes is dense.

We define f as follows: for any $a = (a_1, a_2) \in M$ we have

$$f(a) = (a_1 + 1, -a_2).$$

Then f is strictly decreasing on each E-class and f is strictly increasing on M/E.

It can be proved that $T = Th(M)$ is a weakly o-minimal theory, and M is 1-transitive.

Let $p(x) := \{x = x\}$. Obviously, $p \in S_1(\emptyset)$, p is non-algebraic and $p(M) = M$. Consider the following formula:

$$F(x,y) := y \leq x \leq f(y).$$

Obviously, $F(x,y)$ is a p-preserving convex-to-right formula that is not equivalence-generating. Observe that for any $\alpha \in p(M)$ there exists $\beta \in p(M)$ such that $\alpha < \beta$ and

$$M \models F(\beta,\alpha) \wedge \exists x[F(x,\alpha) \wedge \neg F(x,\beta)].$$

Let $G(x,y) := F(y,x)$. Since f is strictly increasing on M/E, $G(x,y)$ is p-preserving. Observe also that $F(\gamma, M)$ consists of two convex sets for any $\gamma \in p(M)$. Then $G(M,\gamma)$ is not convex, whence $G(x,y)$ is not convex-to-left. Let

$$G'(x,y) := \exists t[F(y,t) \wedge t \leq x \leq y].$$

It can be checked that $G'(x,y)$ is a p-preserving convex-to-left formula that is not equivalence-generating.

Proposition 5. *For each natural $n \geq 1$ there exist a weakly o-minimal theory T, $M \models T$, non-algebraic $p \in S_1(\emptyset)$ and a p-preserving convex-to-right (left) formula $F(x, y)$ such that for any $\gamma \in p(M)$ the set $F(\gamma, M)$ consists of n convex sets in $p(M)$.*

Theorem 6. *Let T be a weakly o-minimal theory, $M \models T$, $A \subseteq M$, $p \in S_1(A)$ non-algebraic, $F(x, y)$ a p-preserving convex-to-right formula that is not equivalence-generating. Then*

$$G(x, y) := \exists t[F(y, t) \wedge t \leq x \leq y]$$

is a p-preserving convex-to-left formula that is also not equivalence-generating.

Funding: The author was supported by Science Committee of Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. BR20281002).

Keywords: weak o-minimality, type-preserving formula, convex-to-right (left) formula, equivalence relation, convexity rank.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C64, 03C07, 03C15

References

[1] Macpherson H.D., Marker D., and Steinhorn C. Weakly o-minimal structures and real closed fields, *Transactions of The American Mathematical Society*, **352**:12 (2000), 5435–5483.

[2] Baizhanov B.S. Orthogonality of one-types in weakly o-minimal theories, *Algebra and Model Theory II*, (editors A.G. Pinus and K.N. Ponomaryov), Novosibirsk State Technical University, 1999, 3–28.

[3] Baizhanov B.S., Kulpeshov B.Sh. On behaviour of 2-formulas in weakly o-minimal theories, *Mathematical Logic in Asia*, Proceedings of the 9th Asian Logic Conference (editors S. Goncharov, R. Downey, H. Ono), Singapore, World Scientific, 2006, 31–40.

[4] Kulpeshov B.Sh. The countable spectrum of weakly o-minimal theories of finite convexity rank, *Doklady Mathematics*, **110**:3 (2024), 486-–496.

On strongly minimal partial orderings with infinite non-trivial width

B.Sh. KULPESHOV[1], E.K. NETALIYEVA[2]

[1]*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[1,2]*Kazakh-British Technical University, Almaty, Kazakhstan*
[1]b.kulpeshov@kbtu.kz, [2]e_netalieva@kbtu.kz

In the present lecture, we study strongly minimal partial orderings in the signature containing only the symbol of binary relation for a partial order. We use for partial orderings such characteristics as the height of a structure that is the supremum of lengths of ordered chains, and the width of a structure that is the supremum of lengths of antichains, where an antichain is the set of pairwise incomparable elements. We also differ trivial width and non-trivial width. Recently in [1], B.Sh. Kulpeshov, In.I. Pavlyuk and S.V. Sudoplatov described strongly minimal partial orderings having a finite non-trivial width. Here we study strongly minimal partial orderings having an infinite non-trivial width.

Recall [2] that an infinite structure $\mathcal{M}$ is said to be *minimal* if for any formula $\varphi(x, \overline{a})$ of the language of $\mathcal{M}$, with parameters $\overline{a}$, either $\varphi(\mathcal{M}, \overline{a})$ or $\neg\varphi(\mathcal{M}, \overline{a})$ is finite. A theory T without finite models is said to be *strongly minimal* if any model $\mathcal{M} \models T$ is minimal. Models of a strongly minimal theory are said to be *strongly minimal*, too. In the present time, the class of strongly minimal theories is an object of active investigations. In [3], rank properties for families of strongly minimal theories were studied. In [4], some interesting results on strongly minimal structures were obtained that lead to a finer classification of strongly minimal structures with flat geometry.

Recall that a *partial order* on a set is a binary relation $<$ satisfying:

Asymmetry $\forall x \forall y [x < y \to \neg(y < x)]$;

Transitivity $\forall x \forall y \forall z [(x < y \wedge y < z) \to x < z]$.

A set equipped with a partial order on it is said to be a *partially ordered set* or *partial ordering.*

Let $\mathcal{M} = \langle M, < \rangle$ be an infinite partial ordering. Assuming that $\mathcal{M}$ is strongly minimal we have only finite $\leq$-chains and the lengths of these chains are bounded, since unbounded lengths imply existence of structures $\mathcal{N} \equiv \mathcal{M}$ with infinite chains $\{a_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$, $a_i < a_j$ for $i < j$, that violate the strong minimality by any formula $x < a_i$. Thus, the *height* $h(\mathcal{M})$, that is the supremum of lengths of $\leq$-chains in $\mathcal{M}$, must be finite for a strongly minimal structure $\mathcal{M}$. Therefore, further we consider here only infinite partial orderings with finite $\leq$-chains.

Also, since $\mathcal{M}$ is infinite, it has an infinite *width* $w(\mathcal{M})$ that is the supremum of cardinalities of $\leq$-antichains.

For any infinite partial ordering with finite $\leq$-chains $\mathcal{M} = \langle M, < \rangle$ we can consider the corresponding graph structure $\mathcal{M}_R = \langle M, R^2 \rangle$, where $R(a, b)$ iff either a is an immediate predecessor of b or a is an immediate successor of b with regard to the partial order $<$ for any $a, b \in M$. We say a subset A of a partial ordering $\mathcal{M} = \langle M, < \rangle$ is a *connected component* if A is a connected component in $\mathcal{M}_R = \langle M, R^2 \rangle$.

We say a connected component is *trivial* if it is a chain. We say a trivial connected component is an *n-component* if it is a chain of length n, where $1 \leq n < \omega$. We say a 1-component is a *singleton.*

The value $w(\mathcal{M})$ is witnessed by both trivial connected components and collections of maximal antichains in non-trivial connected components. Indeed, let $\mathcal{M}$ consist of both $\bigsqcup\limits_{i \in I} \mathcal{A}_i$ and $\bigsqcup\limits_{j \in J} \mathcal{B}_j$, where each $\mathcal{A}_i$ is a trivial connected component, and each $\mathcal{B}_j$ is a non-trivial connected component. Then obviously $w(\mathcal{M}) = w_0(\mathcal{M}) + w_1(\mathcal{M})$, where $w_0(\mathcal{M})$ is the width of trivial part $\bigsqcup\limits_{i \in I} \mathcal{A}_i$ (trivial width) and $w_1(\mathcal{M})$ is the width of non-trivial part $\bigsqcup\limits_{j \in J} \mathcal{B}_j$ (non-trivial width).

The following theorem describes strongly minimal partial orderings with finite non-trivial width:

Theorem 1. [1] *An infinite partial ordering $\mathcal{M} = \langle M, < \rangle$ with finite non-trivial width is strongly minimal iff $\mathcal{M}$ has infinitely many singletons and additionally can have only finitely many finite connected components which are not singletons.*

Recall that an element a of a partial ordering $\mathcal{M}$ is said to be *minimal* if there is no element in $\mathcal{M}$ that is less than a. Also, an element a of a partial ordering $\mathcal{M}$ is said to be *maximal* if there is no element in $\mathcal{M}$ that is greater than a. Observe that any singleton of a partial ordering is both maximal and minimal element of the ordering. Also, any maximal (minimal) element of a non-trivial connected component of a partial ordering is not minimal (maximal).

Example 2. Let $\mathcal{M} = \langle M, < \rangle$ be a partial ordering consisting of exactly one infinite non-trivial connected component of height two having exactly one maximal element. Then, obviously, $\mathcal{M}$ contains infinitely many minimal elements. Then $\mathcal{M}$ is a strongly minimal structure having an infinite non-trivial width.

We say that an element a of a partial ordering $\mathcal{M}$ has *up-degree* (*down-degree*) m for some $m \in \omega$ if there exist exactly m elements of $\mathcal{M}$ being an immediate successor (predecessor) of a. If there are infinitely many elements of $\mathcal{M}$ being an immediate successor (predecessor) of a then we say a has infinite up-degree (down-degree). Obviously, a has both up-degree 0 and down-degree 0 iff a is a singleton.

The following theorem is a criterion for strong minimality of an infinite partial ordering of height two having an infinite non-trivial width.

Theorem 3. *Let $\mathcal{M} = \langle M, < \rangle$ be an infinite partial ordering of height two having an infinite non-trivial width. Then $\mathcal{M}$ is strongly minimal iff the following holds:*

(1) $\mathcal{M}$ contains exactly one non-trivial connected component of height two having both an infinite set of maximal (minimal) elements and a non-empty finite set of minimal (maximal) elements;

(2) If $\mathcal{M}$ contains exactly m minimal (maximal) elements of infinite up-degree (down-degree) for some $1 \le m < \omega$ then almost all maximal (minimal) elements have down-degree (up-degree) m;

(3) $\mathcal{M}$ contains only finitely many finite connected components of height at most two.

Recall that a first-order theory is said to be *totally categorical* if it has exactly one model in each infinite power.

Corollary 4. *Any strongly minimal partial ordering of height two with an infinite non-trivial width is totally categorical.*

Funding: The first author was supported by Science Committee of Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. BR20281002).

Keywords: strongly minimal structure, partial ordering, connected component, maximal element, minimal element.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C30, 03C45, 03C52

References

[1] Kulpeshov B.Sh., Pavlyuk In.I., Sudoplatov S.V. *Pseudo-strongly-minimal structures and theories,* Lobachevskii Journal of Mathematics, ***45**:12 (2024), 6515–6525.*

[2] Baldwin J.T., Lachlan A.H. *On strongly minimal sets,* The Journal of Symbolic Logic, ***36**:1 (1971), 79–96.*

[3] Kulpeshov B.Sh., Sudoplatov S.V. *Properties of ranks for families of strongly minimal theories,* Siberian Electronic Mathematical Reports, ***19**:1 (2022), 120–124.*

[4] Baldwin J.T., Verbovskiy V.V. *Towards a finer classification of strongly minimal sets,* Annals of Pure and Applied Logic, ***175** (2024), Number 103376.*

On expansions and restrictions of structures with given degrees of rigidity

B.Sh. KULPESHOV[1], S.V. SUDOPLATOV[2]

[1]*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*

[1]*Kazakh British Technical University, Almaty, Kazakhstan*

[2]*Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia*

[2]*Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia*

[1]kulpesh@mail.ru, [2]sudoplat@math.nsc.ru

We study some hierarchy properties of expansions and restrictions of structures with given degrees of rigidity.

Following [1] we consider *regular* structures, i.e. relational structures without repetitions of interpretations of signature symbols. Let $\mathcal{M}$ be a regular structure, $\overline{\mathcal{M}}$ be a maximal regular expansion of $\mathcal{M}$ preserving the universe M. We denote by $B(\mathcal{M})$ the set of all restrictions of $\overline{\mathcal{M}}$ preserving the universe M. The set-theoretic operations on the Boolean $\mathcal{P}(\Sigma(\overline{\mathcal{M}}))$, forming its Cantor algebra, induce the *regular* atomic Boolean algebra $\mathcal{B}(\mathcal{M})$ on $B(\mathcal{M})$, with the greatest element $\overline{\mathcal{M}}$, the least element $\mathcal{M}_0$ with the empty signature, and $|\Sigma(\overline{\mathcal{M}})|$ atoms each of which has exactly one signature symbol. Here unions $\mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2$ and intersections $\mathcal{N}_1 \cap \mathcal{N}_2$, for $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2 \in B(\mathcal{M})$, preserve the universe M and consists of unions of their signature relations, common signature symbols, respectively. The unions can be considered both as *combinations* [2] and *fusions* [3], in a broad sense, of structures.

Recall that for a lattice $\mathcal{L}$ and its element a the *upper cone* $\nabla(a) = \nabla_a$ consists of all elements b in L with $a \le b$, and the *lower cone* $\triangle(a) = \triangle_a$ consists of all elements b in L with $b \le a$.

Following [4, 5], for a set A in a structure $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}$ is called *semantically A-rigid* or *automorphically A-rigid* if any A-automorphism $f \in \mathrm{Aut}(\mathcal{N})$ is identical. The structure $\mathcal{N}$ is called *syntactically A-rigid* if $N = \mathrm{dcl}(A)$.

A structure $\mathcal{N}$ is called *$\forall$-semantically / $\forall$-syntactically n-rigid* (respectively, *$\exists$-semantically / $\exists$-syntactically n-rigid*), for $n \in \omega$, if $\mathcal{N}$ is semantically / syntactically A-rigid for any (some) $A \subseteq N$ with $|A| = n$.

The least n such that $\mathcal{N}$ is Q-semantically / Q-syntactically n-rigid, where $Q \in \{\forall, \exists\}$, is called the *$Q$-semantical / Q-syntactical degree of rigidity*, it is denoted by $\deg_{\mathrm{rig}}^{Q\text{-sem}}(\mathcal{N})$ and $\deg_{\mathrm{rig}}^{Q\text{-synt}}(\mathcal{N})$, respectively. Here if a set A produces the value of Q-semantical / Q-syntactical degree then we say that A *witnesses* that degree. If such n does not exists we put $\deg_{\mathrm{rig}}^{Q\text{-sem}}(\mathcal{N}) = \infty$ and $\deg_{\mathrm{rig}}^{Q\text{-synt}}(\mathcal{N}) = \infty$, respectively.

Proposition 1. *For any structures $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2 \in B(\mathcal{M})$ and $A \subseteq M$ if $\mathcal{N}_1 \in \nabla(\mathcal{N}_2)$, i.e. $\mathcal{N}_1$ is an expansion of $\mathcal{N}_2$, then* $\mathrm{Aut}(\langle \mathcal{N}_1, c_a \rangle_{a\in A}) \leqslant \mathrm{Aut}(\langle \mathcal{N}_2, c_a \rangle_{a\in A})$ *and* $\mathrm{dcl}_{\mathcal{N}_1}(A) \supseteq \mathrm{dcl}_{\mathcal{N}_2}(A)$.

Corollary 2. *For any structures $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2 \in B(\mathcal{M})$, $A \subseteq M$, $Q \in \{\forall, \exists\}$ if $\mathcal{N}_1 \in \nabla(\mathcal{N}_2)$ then* $\deg_{\mathrm{rig}}^{Q\text{-sem}}(\mathcal{N}_1) \leq \deg_{\mathrm{rig}}^{Q\text{-sem}}(\mathcal{N}_2)$ *and* $\deg_{\mathrm{rig}}^{Q\text{-synt}}(\mathcal{N}_1) \leq \deg_{\mathrm{rig}}^{Q\text{-synt}}(\mathcal{N}_2)$. *In particular, if $\mathcal{N}_2$ is semantically / syntactically A-rigid then $\mathcal{N}_1$ is semantically / syntactically A-rigid, too.*

Let $P_{\mathrm{semr}} \subseteq B(\mathcal{M})$, $P_{\mathrm{syntr}} \subseteq B(\mathcal{M})$ be the properties of semantic / syntactic $\emptyset$-rigidity, respectively.

Proposition 3. *For any structure $\mathcal{M}$, $P_{\mathrm{semr}} = P_{\mathrm{syntr}}$ iff M is finite.*

Theorem 4. *The family $P_{\mathrm{semr}} \subseteq B(\mathcal{M})$ of semantically rigid structures, respectively, the family $P_{\mathrm{synt}} \subseteq B(\mathcal{M})$ of syntactically rigid structures, is represented as the union of upper cones of all its elements. Each of these families is closed under permutations, contains some atomic elements of $\mathcal{B}(\mathcal{M})$, and closed under intersections iff $|M| = 1$.*

Below we consider concatenations $\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$ of linearly ordered sets $\mathcal{M}_1$ and $\mathcal{M}_2$. Since in the Boolean algebra $\mathcal{B}(\mathcal{M})$ all structures have the same universe M, when considering $\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$ we assume that the original structures $\mathcal{M}_i$ on the set M have partial orders in which one connected component gave a linear order for $\mathcal{M}_i$, and all other components are singletons and there $|M_{3-i}|$ many of them, $i = 1, 2$. After connecting $\mathcal{M}_1$ and $\mathcal{M}_2$, considered as a union, two connected components are formed with respect to the relation $\leq_1 \cup \leq_2$ of orders $\leq_1$ and $\leq_2$ in $\mathcal{M}_1$ and $\mathcal{M}_2$, respectively. This relation is then replaced by its extension to the desired linear order for $\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$.

Proposition 5. *Let $\mathcal{M}_1 = \langle M_1, < \rangle$ be a linear ordering with* $\deg_4(\mathcal{M}_1) = (\infty, \infty, \infty, \infty)$. *Then* $\deg_4(\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2) = (\infty, \infty, \infty, \infty)$ *for any linear ordering $\mathcal{M}_2 = \langle M_2, < \rangle$.*

Proposition 6. *For any infinite linear orderings $\mathcal{M}_1 = \langle M_1, < \rangle$ and $\mathcal{M}_2 = \langle M_2, < \rangle$ such that* $\deg_4(\mathcal{M}_1) = \deg_4(\mathcal{M}_2) = (0, 0, 0, 0)$ *the following holds:*

$$\deg_4(\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2) \textit{ equals } (0,0,0,0),\ (1,1,m,m) \textit{ for some natural } m \geq 1 \textit{ or } (1,1,\infty,\infty).$$

Proposition 7. *For any natural $m_1, m_2 \geq 1$ and for any infinite linear orderings $\mathcal{M}_1 = \langle M_1, < \rangle$, $\mathcal{M}_2 = \langle M_2, < \rangle$ such that* $\deg_4(\mathcal{M}_1) = (m_1, m_1, \infty, \infty)$ *and* $\deg_4(\mathcal{M}_2) = (m_2, m_2, \infty, \infty)$ *the following holds:* $\deg_4(\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2) = (m, m, \infty, \infty)$, *where $m_1 + m_2 \leq m \leq m_1 + m_2 + 1$.*

Funding: The authors were supported by Science Committee of Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP19674850), and in the framework of the State Contract of the Sobolev Institute of Mathematics, Project No. FWNF-2022-0012.

Keywords: hierarchy, property, expansion of structure, restriction of structure, degree of rigidity.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C30, 03C45, 03C52

References

[1] Sudoplatov S.V. *Expansions and restrictions of structures and theories, their hierarchies*, arXiv:2502.03051 [math.LO], 2025.

[2] Sudoplatov S.V. Combinations of structures, *Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, **24** (2018), 82–101.

[3] Hasson A., Hils M. Fusion over sublanguages, *The Journal of Symbolic Logic*, **71**:3 (2006), 361–398.

[4] Sudoplatov S.V. Variations of rigidity, *Bulletin of Irkutsk State University, Series Mathematics*, **47** (2024), 119–136.

[5] Kulpeshov B.Sh., Sudoplatov S.V. Variations of rigidity for ordered theories, *Bulletin of Irkutsk State University, Series Mathematics*, **48** (2024), 129–144.

Some Questions on Pseudofinite Abelian Groups

J. FAZYL[1], N. MARKHABATOV[2]

[1,2]*L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan*

[1]fzhebei@gmail.com, [2]markhabatov@gmail.com

Ax [1] proved a beautiful purely algebraic characterisation for pseudofinite fields. While no such characterisation exists for pseudofinite groups, there is a tight correspondence between pseudofinite fields and simple pseudofinite groups, Wilson proved that a simple pseudofinite group is elementarily equivalent to a (twisted) Chevalley group over a pseudofinite field.

It is known [7, Theorem 8.4.10] that two abelian groups are elementary equivalent if and only if they have same Szmielew invariants.

We denote by $\mathbb{Q}$ the additive group of rational numbers, $\mathbb{Z}_{p^k}$ – the cyclic group of the order p^k, $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ – the quasi-cyclic group of all complex roots of 1 of degrees p^k for all $k \geq 1$, R_p – the group of irreducible fractions with denominators which are mutually prime with p. The groups $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}_{p^k}, R_p, \mathbb{Z}_{p^\infty}$ are called *basic*. Below the notations of these groups will be identified with their universes.

Since abelian groups with same Szmielew invariants have same theories, any abelian group $\mathcal{A}$ is elementary equivalent to a group

$$\oplus_{p,k}\mathbb{Z}_{p^k}^{(\alpha_{p,k})} \oplus \oplus_p \mathbb{Z}_{p^\infty}^{(\beta_p)} \oplus \oplus_p R_p^{(\gamma_p)} \oplus \mathcal{Q}^{(\varepsilon)} \tag{1}$$

Yu. L. Ershov [3] axiomatized pseudofinite Abelian groups in terms of Szmielew invariants and proved their solvability. Later, independently, S. Basarab [2] proved that an abelian group is pseudofinite if and only if the numbers of p-Prufer groups and of p-adics occurring in a saturated model are the same for every prime p.

A complete criterion for pseudofiniteness and approximations of Abelian groups is given by In.I. Pavluk and S.V. Sudoplatov [4] and [5].

Theorem 1 (In.I. Pavluk and S.V. Sudoplatov)**.** *For any theory T of abelian groups, the following conditions are equivalent:*

(1) $T \in \mathbb{T}_{A,pf}$, where $\mathbb{T}_{A,pf}$ is a family of pseudofinite abelian group theories;

(2) T has some infinite $\alpha_{p,n}$, or some $\beta_p = \gamma_p = \omega$, or $\varepsilon = 1$, moreover, for all nonzero values β_p and γ_p, $\beta_p = \gamma_p = \omega$;

(3) T has infinite models, and all nonzero values β_p and γ_p imply $\beta_p = \gamma_p = \omega$.

Corollary 2. *Infinite extra-special p-groups of odd exponent p are pseudofinite.*

Question. When is a direct product of groups pseudofinite?

Theorem 3 (Paola D'Aquino and Macintyre Angus). *Let I be an index set (either finite or infinite). If $(M_i)_{i\in I}$ are pseudofinite L-structures then $\prod_{i\in I} M_i$ is pseudofinite.*

Corollary 4. $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{\omega}$ *is pseudofinite.*

Proposition 1. i) Let $G = \bigoplus_{i<\omega} \mathbb{Z}_{p^\infty} \oplus \bigoplus_{j<\omega} R_p$. Then G is divisible iff i=j;
ii) Let $G = (\bigoplus_{i<\omega} \mathbb{Z}_{p^\infty} \oplus \bigoplus_{j<\omega} R_p)^{n\in\omega}$. Then G is pseudofinite iff i=j.

Proposition 2. Let G be a group and $G = \prod_{i,j<\omega} G_i \times G_j$, where G_i is divisible and G_j is non-divisible abelian groups. Then G is divisible if $i = j$. That is, the number of divisible groups in $\prod G_i$ is equal to the number of non-divisible groups.

Corollary 5. *Every direct product of pseudofinite divisible groups is divisible.*

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP19674850).

Keywords: pseudofinite theory, pseudofinite group, abelian group, divisible group.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

References

[1] Ax, J., *The Elementary Theory of Finite Fields*, Annals of Mathematics, 88(2), 239–271, 1968. https://doi.org/10.2307/1970573

[2] Basarab Ş., The models of the elementary theory of finite abelian groups, Stud. Cerc. Mat. 27(4) (1975) 381–386 (in Romanian).

[3] Ershov Yu. L., Decidability of elementary theories of some classes of Abelian groups, Algebra and Logic. Seminar, 1:6 (1963), 37–41

[4] Pavlyuk In. I., Sudoplatov S. V., Ranks for families of theories of abelian groups, Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics, 28 (2019), 95–112

[5] Sudoplatov, S.V., Approximations of theories, Siberian Electronic Mathematical Reports, 17, 715–725, 2020. https://doi.org/10.33048/semi.2020.17.049

[6] Paola D'Aquino and Macintyre Angus. Products of pseudofinite structures. (2024). https://doi.org/10.48550/arXiv.2411.08808

[7] Szmielew W. Elementary properties of Abelian groups. Fund. Math., 1955, vol. 41, pp. 203-271. https://doi.org/10.4064/fm-41-2-203-271

On the generalized Poisson and transposed Poisson algebras

F.A. MASHUROV

SICM, Southern University of Science and Technology, Shenzhen, China.

f.mashurov@gmail.com

This talk presents the main results on the characterization and interplay of generalized Poisson algebras and transposed Poisson algebras within the associative commutative algebras endowed with a Lie bracket. We establish that an algebra $(L, \cdot, [,])$ can be both a generalized Poisson algebra and a transposed Poisson algebra if it satisfies the identities $a[b, c] = aD(b)c - abD(c)$ and $[ab, c] = D(a)bc + aD(b)c - abD(c)$ for all elements $a, b, c \in L$. This result shows that the generalized Poisson and transposed Poisson algebras structures are inherently linked when a differential operator D is present. We establish defining identities for algebras that are both generalized Poisson and transposed Poisson admissible algebras. Furthermore, we generalize the simplicity criterion for transposed Poisson algebras, proving that a transposed Poisson n-Lie algebra is simple if and only if its associated n-Lie algebra is simple. This talk is based on the articles [1] and [2].

Keywords: transposed Poisson algebra, n- polynomial identity, Lie algebra, simple algebra.

2010 Mathematics Subject Classification: 15A15, 17A30, 17A42, 17B63

References

[1] Mashurov, F.A. On the transposed poisson n-Lie algebras, arXiv preprint arXiv:2501.01714 (2025).

[2] Dzhumadil'daev, A., Ismailov, N. and Mashurov, F. On the generalized Poisson and transposed Poisson algebras. arXiv preprint arXiv:2501.18410. (2025).

On pseudofinite unar theories with arbitrary number of semichains and antichains

A. NURALY[1], N. MARKHABATOV[2], Ye. BAISALOV[3]

[1,2,3]*L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan*

[1]adilnur@gmail.com, [2]markhabatov@gmail.com, [3]baisal59@gmail.com

The work concerns approximations of structures by finite structures [1] and types of approximation [2,3].

Question. When is a direct product of unars pseudofinite?

Theorem 1 (Paola D'Aquino and Macintyre Angus)**.** *Let I be an index set (either finite or infinite). If $(M_i)_{i\in I}$ are pseudofinite L-structures then $\prod_{i\in I} M_i$ is pseudofinite.*

Proposition 2. $(\mathbb{N}; succ) \times (\mathbb{N}; pred)$ *is pseudofinite and strongly minimal.*

Remark 3. $(\mathbb{N}; succ)$ *and* $(\mathbb{N}; pred)$ *are not pseudofinite. They are strongly minimal. Moreover, their direct product has an arbitrary number of semichains and antichains.*

Elementary equivalence of pseudofinite unars with n semichains and m antichains, where $n \neq m$, remained an interesting question.

Jointly with Prof. Ye. Baisalov we constructed a pseudofinite omega stable, but not strongly minimal unar theory with an arbitrary number of semichains and antichains.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP19677451).

Keywords: pseudofinite theory, pseudofinite unar, omega stable unar, strongly minimal unar.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C13, 03C45, 03C52, 03C60

References

[1] Ax, J., *The Elementary Theory of Finite Fields*, *Annals of Mathematics, 88*(2), 239–271, 1968. https://doi.org/10.2307/1970573

[2] Paola D'Aquino and Macintyre Angus. Products of pseudofinite structures. (2024). https://doi.org/10.48550/arXiv.2411.08808

[3] Sudoplatov, S.V., *Approximations of theories*, *Siberian Electronic Mathematical Reports, 17*, 715–725, 2020. https://doi.org/10.33048/semi.2020.17.049

Complexity estimates of theories of some semantic classes and their sentence algebras

M.G. PERETYAT'KIN

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

peretyatkin@math.kz

We consider theories in first-order predicate logic and use general concepts of model theory, algorithm theory, Boolean sentence (Lindenbaum) algebras, and constructive models, see [1]. We fix a finite rich signature σ together with a Gödel numbering Φ_n, $n \in \mathbb{N}$, of the set of closed formulas.

First, we consider sentence algebras of some Hanf's semantic classes of models.

Theorem 1. *The following assertions hold for the class $M_{dec}(\sigma)$ of all models with decidable theories in the signature σ :*

(a) *$\mathcal{L}(M_{dec})$ is a Boolean Π^0_3-algebra,*

(b) *there is a numbering υ such that $(\mathcal{L}(M_{dec}), \upsilon)$ is a Boolean Σ^0_2-algebra,*

(c) *for an arbitrary Boolean Π^0_3-algebra $\mathcal{B}$, there is a sentence Θ of signature σ, such that $\mathcal{B} \cong \mathcal{L}\big(\mathrm{Th}(\mathrm{Mod}(\Theta) \cap M_{dec})\big)$, where γ is a Gödel numbering of sentences of signature σ.*

Theorem 2. *The following assertions hold for the class $M_{nd}(\sigma) = M_{nfa}(\sigma) \cap M_{dec}(\sigma)$ of all models with non-finitely axiomatizable decidable theories of the signature σ :*

(a) *$\mathcal{L}(M_{nd})$ is a Boolean Π^0_4-algebra,*

(b) *there is a numbering υ such that $(\mathcal{L}(M_{nd}), \upsilon)$ is a Boolean Σ^0_3-algebra,*

(c) *for an arbitrary Boolean Π^0_4-algebra $\mathcal{B}$, there is a sentence Θ of signature σ, such that $\mathcal{B} \cong \mathcal{L}\big(\mathrm{Th}(\mathrm{Mod}(\Theta) \cap M_{nd})\big)$.*

Now, we give some characterization to a subclass of the class of prime models of signature σ.

Theorem 3. *The following complexity estimates take place for the class $\check{P}^{\omega}_{s.c.}$ consisting of all prime strongly constructivizable models having infinite dimensions with algebraic elements of signature σ :*

(a) *$\{n \mid \Phi_n$ has a $\check{P}^{\omega}_{s.c.}$-model$\} \approx \Sigma^0_4$,*

(b) $\mathrm{Th}(\check{P}^{\omega}_{s.c.}) \approx \Pi^0_4$.

Theorem 4. *Let $\mathcal{L}(\check{P}^{\omega}_{s.c.})$ be the class of all prime strongly constructivizable models having infinite algorithmic dimensions with algebraic elements of the signature σ. The following assertions hold:*

(a) *$\big(\mathcal{L}(\check{P}^{\omega}_{s.c.}), \gamma\big)$ is a Boolean Π^0_4-algebra,*

(b) *computable ultrafilters of $\mathcal{L}(\check{P}^{\omega}_{s.c.})$ form a dense subset in the set of arbitrary ultrafilters in the algebra,*

(c) *$\mathcal{L}(\check{P}^{\omega}_{s.c.})$ is a Boolean Σ^0_3-algebra,*

(d) *for an arbitrary Boolean Σ^0_2-algebra $(\mathcal{B}, \nu)$ whose computable ultrafilters form a dense subset in the set of all ultrafilters, there is a sentence Θ such that $(\mathcal{B}, \nu) \cong \big(\mathcal{L}\big(\mathrm{Th}(\mathrm{Mod}(\Theta) \cap \check{P}^{\omega}_{s.c.})\big), \gamma\big)$,*

(e) *$\mathcal{L}(\check{P}^{\omega}_{s.c.})$ is a Σ^0_2-universal Boolean algebra.*

A natural *question* arises from difference in Part (c) and Part (d) of Theorem 4: is the algebra $\mathcal{L}(\check{P}^{\omega}_{s.c.})$ a Σ^0_3-universal Boolean algebra? Actually, there is a number of semantic classes of models admitting exact estimates of the complexity of elementary theories but the problems of characterizing their sentence algebras were not solved or has been solved only partially. It would be interesting to study possible obstacles preventing us from obtaining a characterization of the sentence algebras.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. BR20281002).

Keywords: semantic class, elementary theory, complexity estimate, sentence algebra, computable isomorphism.

2010 Mathematics Subject Classification: 03B10, 03D35.

References

[1] Peretyat'kin M.G., Selivanov V.L. Universal Boolean algebras with applications to semantic classes of models, Conf. on Computability in Europe, Springer Nature Switzerland, 2024, 205-217.

On kinds of preservations for properties

T.E. RAJABOV[1], S.V. SUDOPLATOV[2]

[1,2]*Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia*
[2]*Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia*
[1]temurboy264@gmail.com, [2]sudoplat@math.nsc.ru

We study various properties [1] which are preserved under given conditions. These preservations generalize the notion of (p,q)-preserving formula [2, 3, 4] and its variations for correspondent type-definable sets.

Definition. Let $\mathcal{M}$ be a structure, $P_1 \subseteq M^{k_1}, \ldots, P_n \subseteq M^{k_n}$, $Q \subseteq M^m$ be properties, $\Phi = \Phi(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n, \overline{y})$ be a type with $l(\overline{x}_1) = k_1, \ldots, l(\overline{x}_n) = k_n$, $l(\overline{y}) = m$. We say that the tuple $(P_1, \ldots, P_n, Q)$ is (*totally*) Φ-*preserved*, or Φ is (*totally*) $(P_1, \ldots, P_n, Q)$-*preserving*, if for any $\overline{a}_1 \in P_1, \ldots, \overline{a}_n \in P_n$, $\Phi(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n, \mathcal{M}) \subseteq Q$. Here we also say on *universal* Φ- and $(P_1, \ldots, P_n, Q)$-preservation.

If $\Phi(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n, \mathcal{M}) \subseteq Q$ for some $\overline{a}_1 \in P_1, \ldots, \overline{a}_n \in P_n$, then we say that $(P_1, \ldots, P_n, Q)$ is *existentially* Φ-*preserved*, or Φ is *existentially* $(P_1, \ldots, P_n, Q)$-*preserving*.

If $\Phi(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n, \mathcal{M}) \cap Q \neq \emptyset$ for some $\overline{a}_1 \in P_1, \ldots, \overline{a}_n \in P_n$ and $(P_1, \ldots, P_n, Q)$ is not existentially Φ-preserved by these tuples $\overline{a}_i$, then we say that $(P_1, \ldots, P_n, Q)$ is $\exists$-*partially* Φ-*preserved*, or Φ is $\exists$-*partially* $(P_1, \ldots, P_n, Q)$-*preserving*. If this property holds for any $\overline{a}_1 \in P_1, \ldots, \overline{a}_n \in P_n$, we say that $(P_1, \ldots, P_n, Q)$ is $\forall$-*partially* Φ-*preserved*, or Φ is $\forall$-*partially* $(P_1, \ldots, P_n, Q)$-*preserving*.

We say that the tuple $(P_1, \ldots, P_n, Q)$ is $\exists$-*partially* Φ-*non-preserved*, or Φ is $\exists$-*partially* $(P_1, \ldots, P_n, Q)$-*non-preserving*, if $\Phi(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n, \mathcal{M}) \cap \overline{Q} \neq \emptyset$ for some $\overline{a}_1 \in P_1, \ldots, \overline{a}_n \in P_n$, where $\overline{Q} = M^m \setminus Q$. If this property holds for any $\overline{a}_1 \in P_1, \ldots, \overline{a}_n \in P_n$, we say that $(P_1, \ldots, P_n, Q)$ is $\forall$-*partially* Φ-*non-preserved*, or Φ is $\forall$-*partially* $(P_1, \ldots, P_n, Q)$-*non-preserving*.

We say that the tuple $(P_1, \ldots, P_n, Q)$ is *totally* Φ-*non-preserved*, or Φ is *totally* $(P_1, \ldots, P_n, Q)$-*non-preserving*, if $\Phi(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n, \mathcal{M}) \cap \overline{Q} \neq \emptyset$ for any $\overline{a}_1 \in P_1, \ldots, \overline{a}_n \in P_n$.

If $\Phi(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n, \mathcal{M}) \subseteq \overline{Q}$ for some $\overline{a}_1 \in P_1, \ldots, \overline{a}_n \in P_n$, then we say that $(P_1, \ldots, P_n, Q)$ is *existentially* Φ-*disjoint*, or Φ is *existentially* $(P_1, \ldots, P_n, Q)$-*disjointing*.

If $\Phi(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n, \mathcal{M}) \subseteq \overline{Q}$ for any $\overline{a}_1 \in P_1, \ldots, \overline{a}_n \in P_n$, then we say that $(P_1, \ldots, P_n, Q)$ is *totally* Φ-*disjoint* or *universally* Φ-*disjoint*, or Φ is *totally* $(P_1, \ldots, P_n, Q)$-*disjointing*, or *universally* $(P_1, \ldots, P_n, Q)$-*disjointing*.

If Φ is a singleton $\{\varphi\}$ then totally/existentially/partially Φ-(non-)preserved/disjoint tuples are called *totally/existentially/partially* φ-*(non-)preserved/disjoint*, respectively, and φ is *totally/existentially/partially* $(P_1, \ldots, P_n, Q)$-*(non-)preserving/disjointing*.

If $P_1 = \ldots = P_n = Q$ then $(P_1, \ldots, P_n, Q)$-preserving type Φ is called $(P_1, \ldots, P_n, Q)$-*idempotent* and $(P_1, \ldots, P_n, Q)$ is Φ-*idempotent*. If $\Phi = \{\varphi\}$ then we replace Φ by φ in the definition of idempotency.

Proposition 1. 1. *If a type* Φ *is totally* $(P_1, \ldots, P_n, Q)$*-preserving/disjointing and* $P_1 \times \ldots \times P_n \neq \emptyset$ *then* Φ *is existentially* $(P_1, \ldots, P_n, Q)$*-preserving/disjointing.*

2. *If a type* Φ *is* $\forall$*-partially* $(P_1, \ldots, P_n, Q)$*-(non-)preserving and* $P_1 \times \ldots \times P_n \neq \emptyset$ *then* Φ *is* $\exists$*-partially* $(P_1, \ldots, P_n, Q)$*-(non-)preserving.*

Proposition 2. *For any type* Φ *and definable or non-definable relations* $P_1, \ldots, P_n, Q$ *in a structure* $\mathcal{M}$ *the following conditions are equivalent:*

1) Φ *is totally/existentially* $(P_1, \ldots, P_n, Q)$*-preserving;*

2) Φ *is totally/existentially* $(P_1, \ldots, P_n, \overline{Q})$*-disjointing.*

Proposition 3. *For any* $(P_1, \ldots, P_n, Q)$ *and* Φ, $(P_1, \ldots, P_n, Q)$ *is totally/existentially/partially* Φ*-(non-)preserved/disjoint iff* $(P_1 \times \ldots \times P_n, Q)$ *is totally/existentially/partially* Φ*-(non-)preserved/disjoint, where* $(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n, \overline{y})$ *in* Φ *is replaced by* $(\overline{x}_1\hat{}\ldots\hat{}\overline{x}_n, \overline{y})$.

Definition [2, 3, 4]. Let T be a complete theory, $\mathcal{M} \models T$. Consider types $p(\overline{x}), q(\overline{x}) \in S(\emptyset)$, realized in $\mathcal{M}$, and all (p, q)-*preserving* formulae $\varphi(\overline{x}, \overline{y})$ of T, i. e., formulae for which there is $\overline{a} \in M$ such that $\models p(\overline{a})$ and $\varphi(\overline{a}, \overline{y}) \vdash q(\overline{y})$. For each such a formula $\varphi(\overline{x}, \overline{y})$, we define a relation $R_{p,\varphi,q} \rightleftharpoons \{(\overline{a}, \overline{b}) \mid \mathcal{M} \models p(\overline{a}) \wedge \varphi(\overline{a}, \overline{b})\}$. If $(\overline{a}, \overline{b}) \in R_{p,\varphi,q}$, then the pair $(\overline{a}, \overline{b})$ is called a (p, φ, q)-*arc*.

Proposition 4. *For any types $p(\overline{x}), q(\overline{y}) \in S(\emptyset)$ and a formula $\varphi(\overline{x}, \overline{y})$ the following conditions are equivalent:*

1) *the formula φ is (p, q)-preserving;*
2) *the pair $(p(\mathcal{M}),\ q(\mathcal{M}))$ is totally φ-preserved;*
3) *the pair $(p(\mathcal{M}),\ q(\mathcal{M}))$ is existentially φ-preserved.*

Proposition 5. *If some conjunction of formulae in a type Φ is totally/existentially $(P_1, \dots, P_n, Q)$-preserving/disjoint then Φ is totally/existentially $(P_1, \dots, P_n, Q)$-preserving/disjoint.*

Proposition 6. *If a type Φ is α-partially $(P_1, \dots, P_n, Q)$-(non-)preserving, where $\alpha \in \{\forall, \exists\}$, then any conjunction of formulae in a type Φ is α-partially $(P_1, \dots, P_n, Q)$-(non-)preserving.*

Proposition 7. *If properties $P_1, \dots, P_n, Q$ are type-definable in a saturated structure then a type Φ is partially $(P_1, \dots, P_n, Q)$-preserving/disjoint iff some conjunction of formulae in Φ is totally/existentially/partially $(P_1, \dots, P_n, Q)$-preserving/disjoint.*

Proposition 8. (Monotony) *If $(P_1, \dots, P_n, Q)$ is Φ-preserved, $P_1 \supseteq P'_1, \dots, P_n \supseteq P'_n$, $Q \subseteq Q'$, $\Phi \subseteq \Phi'$ then $(P'_1, \dots, P'_n, Q')$ is Φ'-preserved.*

For types Φ and Ψ we denote by $\Phi \vee \Psi$ the type $\{\varphi \vee \psi \mid \varphi \in \Phi, \psi \in \Psi\}$, and by $\Phi \wedge \Psi$ the type $\Phi \cup \Psi$, if it is consistent.

Proposition 9. (Union) *If $(P_1, \dots, P_n, Q)$ is Φ-preserved and $(P_1, \dots, P_n, Q')$ is Ψ-preserved, with $Q, Q' \subseteq M^m$, then $\Phi \vee \Psi$ is $(P_1, \dots, P_n, Q \cup Q')$-preserving and $\Phi \wedge \Psi$, if it is consistent, is $(P_1, \dots, P_n, Q \cap Q')$-preserving.*

Corollary 10. *If there is a $(P_1, \dots, P_n, Q)$-preserving type Φ then the set $Z_\Phi(P_1, \dots, P_n, Q)$ of all $(P_1, \dots, P_n, Q)$-preserving types, which are contained in Φ, forms a distributive lattice $\langle Z_\Phi(P_1, \dots, P_n, Q); \vee, \wedge\rangle$ with the least element Φ.*

Using the assertions above one can describe series of type-definable structures, in particular, classes of (ordered) semigroups, groups, rings and fields, including spherically ordered ones [5, 6], rectangular bands of groups, graded algebras, etc., their subalgebras and quotients.

Funding: The second author was supported in the framework of the State Contract of the Sobolev Institute of Mathematics, Project No. FWNF-2022-0012.

Keywords: partially (totally) preserved property, partially (totally) disjoint property.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C30, 03C50

References

[1] Sudoplatov S.V. Formulas and properties, their links and characteristics, *Mathematics*, **9**:12 (2021). 1391.

[2] Baizhanov B.S., Sudoplatov S.V., Verbovskiy V.V. Conditions for non-symmetric relations of semi-isolation, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, **9** (2012), 161–184.

[3] Sudoplatov S.V. *Classification of countable models of complete theories. Part 1*, NSTU, Novosibirsk (2018).

[4] Emelyanov D.Yu., Kulpeshov B.Sh., Sudoplatov S.V. *Algebras of binary formulae*, NSTU, Novosibirsk (2023).

[5] Kulpeshov B.Sh., Sudoplatov S.V. Spherical orders, properties and countable spectra of their theories, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, **20**:2 (2023), 588–599.

[6] Sudoplatov S.V. Spherically ordered groups, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, **21**:2 (2024), 1337–1346.

On some spectra of spherical orderability of finite groups

A.S. SAVIN

Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia

savin.2020@stud.nstu.ru

We continue to study spectra of spherical orderability of groups [1, 2].

Let $\overline{x}$ be a n-tuple $(x_1, \ldots, x_n)$, σ be a permutation of degree n. Then the tuple $(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$ is denoted by $\overline{x_\sigma}$.

Definition 1. [1] The following generalization of linear and circular orders produces an n-ball, or n-spherical, or n-circular order relation, for $n \geq 2$, which is described by an an n-ary relation K_n satisfying the following conditions:

(nso1) If $\overline{x} \in A^n$ and σ is a transposition on $\{1, 2, \ldots, n\}$, then $\overline{x} \in K_n$ or $\overline{x_\sigma} \in K_n$;

(nso2) If $\overline{x} \in A^n$ and σ is a transposition on $\{1, 2, \ldots, n\}$, then $\overline{x} \in K_n$ or $\overline{x_\sigma} \in K_n$ iff there are distinct indices i and j such that $x_i = x_j$;

(nso3) For any $\overline{x} \in K^n$ and any element $t \in A$, there is an index i such that

$$(x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in K_n$$

Definition 2. [1] A group G is called *n-spherically ordered*, or *n-s-ordered*, if G is provided with a n-spherical order K_n such that for any $(x_1, \ldots, x_n) \in K_n$ and any $y \in G$ the tuples $(x_1 y, \ldots, x_n y)$ and $(y x_1, \ldots, y x_n)$ belong to K_n.

A group G is called *n-spherically orderable*, or *n-s-orderable*, if G has a n-spherically ordered expansion. A group G is called *spherically orderable* if it is n-spherically orderable for some n.

For a group G we define its *spectrum Sp_{so}* of spherical orderability, or spherical spectrum, as follows:

$$Sp_{so}(G) = \{n \in \omega \setminus \{0, 1\} \mid G \text{ is } n\text{-spherically orderable}\}.$$

A group G is called totally spherically orderable, or totally s-orderable, if G has maximal spectrum of spherical orderability, i.e. $Sp_{so}(G) = \omega \setminus \{0,\ 1\}$.

A group G is called almost totally spherically orderable, or almost totally sorderable, if $Sp_{so}(G)$ is a cofinite subset of ω.

A group G is (almost) not s-orderable in any way if $Sp_{so}(G)$ is empty (respectively, finite).

If $|G| = n$, then $\omega \setminus n \subseteq Sp_{\rm so}(G)$.

The following are new results complement those previously presented. Also new results obtained taking into account the fact that
if $\varepsilon_{\overline{x_{\sigma 1}}} = 1$ and $\varepsilon_{\overline{x_{\sigma 2}}} = 1 \Longrightarrow \overline{x_{\sigma 1}}$ is representable as $\overline{x_{\sigma 2}}$ by some $\overline{x_\sigma}$, where $\varepsilon_{\overline{x_\sigma}} = 1$.

$$Sp_{so}(Z_2^3) = \omega \setminus \{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7\} \tag{1}$$
$$Sp_{so}(Z_3^2) = \omega \setminus \{0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8\} \tag{2}$$
$$Sp_{so}(D_3) = \omega \setminus \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \tag{3}$$
$$Sp_{so}(D_4) = \omega \setminus \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \tag{4}$$
$$Sp_{so}(D_5) = \omega \setminus \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \tag{5}$$
$$Sp_{so}(Q_8) = \omega \setminus \{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7\} \tag{6}$$

2010 Mathematics Subject Classification: 20F60

References

[1] Sudoplatov S.V. Spherically ordered groups, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, **21**:2 (2024), 1337–1346.

[2] Savin A.S. some spectra of spherical orderability of finite groups, *Model Theory and Algebra 2024*, NSTU, Novosibirsk (2024), 127–135.

Axiomatizability and completeness of the class of pseudofinite acts

A.A. STEPANOVA[1], E.L. EFREMOV[2], S.G. CHEKANOV[3]

[1,2,3]*Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russia*

[1]stepltd@mail.ru, [2]efremov-el@mail.ru, [3]chekanov.sg@dvfu.ru

A model $\mathfrak{M}$ of a theory T in a language L is called T-pseudofinite if every sentence in a language L true in $\mathfrak{M}$ has a finite model, which is a model of the theory T. It is clear that T-pseudofiniteness implies pseudofiniteness, and pseudofiniteness implies T-pseudofiniteness for every finite axiomatizable theory T. In [1-4] the model-theoretic properties of theories of pseudofinite fields, groups, rings, and unars are studied.

Theorem 1. *Let T be a theory of a language L, K be the class of all pseudofinite (T-pseudofinite) models of this theory. Then K is an axiomatizable class.*

Let S be a monoid. A set A is a left S-act (or S-act) if there is a map $S \times A \to A, (s, a) \mapsto sa$, such that for all $a \in A$ and $s, t \in S$, we have $1a = a$ and $s(ta) = (st)a$. In [4-9], the questions of axiomatizability, completeness, and model completeness of some classes of S-acts, such as free, flat, projective, injective, regular, and others, are considered. Here we disribe monoids S over which class of all T-pseudofinite acts is complete (model complete, categorical), where T is a theory of S-acts.

Theorem 2. *Let T be a theory of S-acts, K be the class of all T-pseudofinite S-acts. Then the following properties are equivalent:*

(1) the class K is complete;

(2) the class K is model complete;

(3) the class K is totally categorical;

(4) every pseudofinite S-act is a coproduct of one-element S-acts;

(5) if α is a proper congruence of ${}_SS$, then the S-act ${}_SS/\alpha$ is infinite.

Funding: This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education (agreement № 075-02-2025-1638/1)

Keywords: Axiomatizable class of L-structures, complete class of L-structures, pseudofinite L-structure, S-act.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C52, 03C35, 08A60

References

[1] Ax J. The elementary theory of finite fields, *Annals of Mathematics*, **88**:2 (1968), 239–271.

[2] Macpherson D. Model theory of finite and pseudofinite groups, *Arch. Math. Logic*, **57** (2018), 159–184.

[3] Bello-Aguirre R. Model Theory of Finite and Pseudofinite Rings : PhD thesis, *University of Leeds*, (2016).

[4] Efremov E.L., Stepanova A.A., Chekanov S.G. Pseudofinite unars, *Algebra and Logic*, (in press)

[5] Gould V., Mikhalev A.V., Palyutin E.A., Stepanova A.A. Model-theoretic properties of free, projective, and flat S-acts, *J. Math. Sci. (New York)*, **164**:2 (2010), 195–227.

[6] Stepanova A.A. Axiomatisability and completeness in some classes of S-polygons, *Algebra and Logic*, **30**:5 (1991), 379–388.

[7] Stepanova A.A. Axiomatizability and model completeness of classes of regular polygons *Sib. Math. J.*, **35**:1 (1994), 181–193.

[8] Efremov E.L. Completeness and stability of the class of injective S-acts, *Algebra and Logic*, **59**:2 (2020), 48–65.

[9] Stepanova A.A. Axiomatizability and completeness of the class of injective acts over a commutative monoid or a group, *Sib. Math. J.*, **56**:3 (2015), 516–525.

On expansions and restrictions of structures and theories

S.V. SUDOPLATOV

[1]*Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia*
Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia

sudoplat@math.nsc.ru, sudoplatov@corp.nstu.ru

We introduce and study some general principles and hierarchical properties of expansions and restrictions of structures and their theories. These principles are based on upper and lower cones, lattices, and permutations. The general approach is applied to describe these properties for classes of ω-categorical theories and structures, Ehrenfeucht theories and their models, strongly minimal, ω_1-categorical, and stable ones. Here all these classes are closed under permutations. It is proved that any fusions of strongly minimal structures are strongly minimal, too, whereas the properties of ω-categoricity, Ehrenfeuchtness, ω_1-categoricity, and stability can fail under fusions. It is also shown that the classes of ω-categorical, strongly minimal and stable regular structures are closed under lower cones of all their elements, whereas the classes of Ehrenfeucht and ω_1-categorical structures do not have that property, with some infinite chains of expansions alternating Ehrenfeuchtness and non-Ehrenfeuchtness, and other infinite chains alternating ω_1-categoricity and non-ω_1-categoricity.

We consider *regular* structures, i.e. relational structures without repetitions of interpretations of signature symbols. Let $\mathcal{M}$ be a regular structure, $\overline{\mathcal{M}}$ be a maximal regular expansion of $\mathcal{M}$ preserving the universe M. We denote by $B(\mathcal{M})$ the set of all restrictions of $\overline{\mathcal{M}}$ preserving the universe M. The set-theoretic operations on the Boolean $\mathcal{P}(\Sigma(\overline{\mathcal{M}}))$, forming its Cantor algebra, induce the *regular* atomic Boolean algebra $\mathcal{B}(\mathcal{M})$ on $B(\mathcal{M})$, with the greatest element $\overline{\mathcal{M}}$, the least element $\mathcal{M}_0$ with the empty signature, and $|\Sigma(\overline{\mathcal{M}})|$ atoms each of which has exactly one signature symbol. Here unions $\mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2$ and intersections $\mathcal{N}_1 \cap \mathcal{N}_2$, for $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2 \in B(\mathcal{M})$, preserve the universe M and consists of unions of their signature relations, common signature symbols, respectively. The unions can be considered both as *combinations* [1] and *fusions* [2], in a broad sense, of structures.

Recall that for a lattice $\mathcal{L}$ and its element a the *upper cone* $\nabla(a) = \nabla_a$ consists of all elements b in L with $a \leq b$, and the *lower cone* $\triangle(a) = \triangle_a$ consists of all elements b in L with $b \leq a$.

Theorem 1. *The family $P_{\omega\text{-cat}} \subseteq B(\mathcal{M})$ of countably categorical structures is represented as the union of lower cones of all their elements and all these elements are not maximal. This family is closed under permutations and not closed under unions.*

Theorem 2. *Any Boolean algebra $\mathcal{B}(\mathcal{M})$ with a countable universe M contains structures with the property $P_{\rm Ehr}$ of Ehrenfeuchness (i.e. the property of all structures whose elementary theories have finitely many and at least three countable models), without the least and the greatest elements of $\mathcal{B}(\mathcal{M})$. This property is closed under permutations and can fail under restrictions and expansions. There are infinite chains alternating the Ehrenfeuchtness and the complement of this property. There are atomic structures $\mathcal{N} \in B(\mathcal{M})$ belonging to $P_{\rm Ehr}$.*

Recall [3] that a structure $\mathcal{N}$ is called *strongly minimal* if for any $\mathcal{N}' \equiv \mathcal{N}$ and any formula $\varphi(x, \overline{a})$ in the language of $\mathcal{N}$ with parameters $\overline{a} \in N'$ the set $\varphi(\mathcal{N}', \overline{a}) = \{b \mid \mathcal{N}' \models \varphi(b, \overline{a})\}$ is either finite or cofinite in N. A theory T is called *strongly minimal* if $T = {\rm Th}(\mathcal{N})$ for a strongly minimal structure $\mathcal{N}$.

Theorem 3. *Any Boolean algebra $\mathcal{B}(\mathcal{M})$ with an infinite universe M contains a distributive sublattice $\mathcal{B}_{\rm sm}(\mathcal{M})$ of all strongly minimal structures $\mathcal{N} \in B(\mathcal{M})$. This sublattice closed under permutations and forms a Boolean algebra with the least element $\mathcal{N}_0$ and the greatest element $\mathcal{SM}$ forming $\triangle(\mathcal{SM})$ which is equal to $B_{\rm sm}(\mathcal{M})$.*

Theorem 4. *Any Boolean algebra $\mathcal{B}(\mathcal{M})$ with an infinite universe M contains structures with the property $P_{\omega_1\text{-cat}}$ of ω_1-categoricity, including the least element of $\mathcal{B}(\mathcal{M})$. This property is closed under permutations and can fail under restrictions and expansions. There are infinite chains* *alternating the ω_1-categoricity and the complement of this property. There are structures $\mathcal{N} \in B(\mathcal{M})$ of finite signatures with $\triangledown_{\mathcal{N}} \cap P_{\omega_1\text{-cat}} = \emptyset$.*

Recall [4] that a formula $\varphi(\overline{x}, \overline{y})$ of a theory T is called *stable* if there are no tuples $\overline{a}_i, \overline{b_i} \in N$, where $i \in \omega$, $\mathcal{N} \models T$, such that $\mathcal{N} \models \varphi(\overline{a}_i, \overline{b}_j) \Leftrightarrow i \leq j$. The theory T is called *stable* if all its formulae are stable. Models of a stable theory are called *stable*, too. Is a formula/theory/structure is not stable, it is called *unstable* or having the *order property*.

Following [4] it is said that a formula $\varphi(\overline{x}, \overline{y})$ has the *strict order property* if there are parameters $\overline{a}_i \in N$, $i \in \omega$, such that the sets $\varphi(\overline{a}_i, \mathcal{N})$, $i \in \omega$, form a strictly descending chain with $\varphi(\overline{a}_i, \mathcal{N}) \supsetneqq \varphi(\overline{a}_{i+1}, \mathcal{N})$, $i \in \omega$.

Again following [4] it is said that an unstable formula $\varphi(\overline{x}, \overline{y})$ has the *independence property* if in every/some model $\mathcal{N}$ of T there is, for each $n \in \omega$, a family of tuples $\overline{a}_i$, $i \in n$, such that for each of the 2^n subsets X of n there is a tuple $\overline{b} \in N$ for which $\mathcal{N} \models \varphi(\overline{a}_i, \overline{b}) \Leftrightarrow i \in X$.

Theorem 5. *The family $P_{\rm st} \subseteq B(\mathcal{M})$ of stable structures is represented as the union of lower cones of all its elements. This family is closed under permutations and not closed under unions, and these unions can produce both the strict order property and the independence property.*

Funding: The work was carried out in the framework of Russian Scientific Foundation, Project No. 24-21-00096 (https://rscf.ru/project/24-21-00096/).

Keywords: hierarchy, property, expansion of structure, restriction of structure, theory.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C30, 03C45, 03C52

References

[1] Sudoplatov S.V. Combinations of structures, *Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, **24** (2018), 82–101.

[2] Hasson A., Hils M. Fusion over sublanguages, *The Journal of Symbolic Logic*, **71**:3 (2006), 361–398.

[3] Baldwin J.T., Lachlan A.H. On strongly minimal sets. *The Journal of Symbolic Logic*, **36**:1 (1971), 79–96.

[4] Shelah S. *Classification theory and the number of non-isomorphic models*, North-Holland, Amsterdam (1990).

On the solvability of Graded Bicommutative and Zinbiel algebras

K.M. TULENBAEV

[1]*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Qazaqstan*

kaysart1@mail.ru

The article is dedicated to the study of the solvability and nilpotency of graded Bicommutative and Zinbiel algebras. The solvability of graded Novikov algebras was studied by V.N. Zhelyabin and U.U. Umirbaev [1].

It was shown in [1] for every n of the form $n = 2^k 3^l$ that a Z_n- graded Novikov algebra

$$N = N_0 \oplus \ldots \oplus N_{n-1}$$

over a field of characteristic not equal to $2, 3$ is solvable if N_0 is solvable. In [1], it was proved that, if L is a right nilpotent subalgebra of a Novikov algebra N, then the right ideal of N generated by L^2 is right nilpotent. Also in [2] was shown that, if N is a G-graded Novikov algebra with solvable 0-component N_0, where G is a finite additive abelian group and the characteristic of the field F does not divide the order of the group G, then N is solvable.

Definition 1. The algebra A is called *G-graded* if there exists a decomposition $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ such that $\forall g, h \in A$ we have $A_g A_h \subseteq A_{g+h}$.

Definition 2. *Bicommutative* algebras are defined by the identities $a \circ (b \circ c) = b \circ (a \circ c)$ and $(a \circ b) \circ c = (a \circ c) \circ b$.

Definition 3. *Zinbiel* algebras are given by the identity $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c + c \circ b)$.

Theorem 4. *Let A be a G-graded Bicommutative algebra and A_0 solvable then A^2 is nilpotent*

Theorem 5. *Let A be a G-graded Zinbiel algebra. A_0 is solvable with solvability index m then A is solvable with solvability index $n^2 m - nm$*

Funding and Acknowledgments: This research was supported by grant № BR20281002 SC MSEH RK. I am grateful to Professor U. U. Umirbaev for helpful discussions and comments.

Keywords: Nonassociative algebras, bicommutative algebras, Zinbiel algebra, solvability. **2010 Mathematics Subject Classification:** 16R10, 17A50, 17A30, 17D25, 17C50

Literature

[1] Umirbaev U.U., Zhelyabin V.N. On the Solvability of graded Novikov Algebras, International Journal of algebra and computation, 1:7, v.31 (2021), 1405–1418. [2] Umirbaev U.U., Zhelyabin V.N. On the Solvability of $\mathbb{Z}_3$-Graded Novikov, Algebras. Symmetry, 312:2 (2021), 13.

The number of prime and limit models of finitely generated quasi u-semigroups

I.Q. UKTAMALIEV

Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia

i.uktamaliev@g.nsu.ru

In the monograph [1], the problem of describing the distribution of primes over finite sets, as well as the limit and other countable models for various natural classes of theories of algebraic systems, is posed.

For theories T with a continuum number of types, the number of countable models is 2^ω, and thus at least one of the values $P(T)$, $L(T)$, or NPL(T) equals 2^ω.

Definition 1. The triple $(P(T), L(T), NPL(T))$, consisting of the number of prime models, the number of limit models, and the number of other countable models of a theory T, is called the *distribution triple of the number of countable models of the theory* T and is denoted by $cm_3(T)$.

Definition 2. Let $\mathfrak{M} = \langle M, * \rangle$ be a finitely generated commutative semigroup, $P = \{p_1, \dots, p_n\} \subseteq M$ and M be generated by P. Let $P = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$. Here, the set $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ is obtained by rearranging the elements of the set $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ in a different order. If for every $a = q_1^{r_1} q_2^{r_2} ... q_k^{r_k}$ in M the equation $x_1^{r_1} x_2^{r_2} ... x_k^{r_k} = a$ has a unique solution $(x_1, x_2, ..., x_k) = (q_1, q_2, ..., q_k)$, then we call the semigroup $\mathfrak{M}$ a *quasi u-semigroup*, where $r_1, r_2, ..., r_k$ are natural numbers and $1 \le k \le n$.

Theorem 3. *Let $\mathfrak{M} = \langle M, * \rangle$ be a finitely generated commutative semigroup, and M be generated by $P = \{p_1, \dots, p_n\}$. Then $\mathfrak{M} \cong \langle N^n, + \rangle$, where $N^n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in \omega,\ a_1^2 + \dots + a_n^2 > 0\}$, and the operation "+" is defined as the addition of corresponding coordinates.*

Theorem 4. *If $T = Th(\langle \mathbb{N}^n, + \rangle)$, then $P(T) = 2^\omega$ and $L(T) = 2^\omega$.*

Corollary 5. *Let $\mathfrak{M} = \langle M, * \rangle$ be a finitely generated commutative semigroup. Then $P(Th(\mathfrak{M})) = L(Th(\mathfrak{M})) = 2^\omega$.*

Keywords: quasi u-semigroups, prime model, limit model, distribution triple of the number of countable models of the theory.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C07, 03C15, 03C30

References

[1] Sudoplatov S. V. *Classification of countable models of complete theories,* Litres (2022).

[2] Popkov R.A., Sudoplatov S. V. Distributions of countable models of theories with continuum many types, , *Siberian Electronic Mathematical Reports*, **12** (2015), 267–291.

Pure linear orderings of Morley o-rank 1 and o-degree 2

V.V. VERBOVSKIY[1], A.D. YERSHIGESHOVA[2]

[1,2]*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*

[1]verbovskiy@math.kz, [2]aisha.yershigeshova@sdu.edu.kz

We consider an ordered structure.

Definition 1. Let $s(x)$ be a partial 1-type, and let $\varphi(x)$ and $\psi(x)$ be formulae. We say that $\varphi(x)$ and $\psi(x)$ are *s-inconsistent* if $s(x) \cup \{\varphi(x), \psi(x))\}$ is inconsistent.

Definition 2 (V. Verbovskiy)**.**

1. We say that Morley o-rank of a formula $\phi(x)$ inside a cut $\langle C, D\rangle$ in $\mathcal{M}$ is equal to or greater than 1 and write o-$RM_{\langle C,D\rangle,\mathcal{M}}(\phi) \geq 1$ for this, if $\big\{\phi(x)\big\} \cup \langle C, D\rangle$ is consistent.
2. o-$RM_{\langle C,D\rangle,\mathcal{M}}(\phi) \geq \alpha + 1$ if there are infinitely many pairwise $\langle C, D\rangle$-inconsistent formulae $\psi_i(x)$ such that $RM_{\langle C,D\rangle,\mathcal{M}}\big(\phi(x) \wedge \psi_i(x)\big) \geq \alpha$.
3. If α is a limit ordinal, then o-$RM_{\langle C,D\rangle,\mathcal{M}}(\phi) \geq \alpha$ if o-$RM_{\langle C,D\rangle,\mathcal{M}}(\phi) \geq \beta$ for all $\beta < \alpha$.
4. o-$RM_{\langle C,D\rangle,\mathcal{M}}(\phi) = \alpha$ if o-$RM_{\langle C,D\rangle,\mathcal{M}}(\phi) \geq \alpha$ and o-$RM_{\langle C,D\rangle,\mathcal{M}}(\phi) \ngeq \alpha + 1$.
5. We define Morley o-rank of a formula $\phi(x)$ inside $\mathcal{M}$ as follows:
$$\text{o-}RM_{\mathcal{M}}(\phi) = \sup\{\text{o-}RM_{\langle C,D\rangle,\mathcal{M}}(\phi) : \langle C, D\rangle \text{ is a cut in } \mathcal{M}\}.$$
6. We define Morley o-rank of a formula $\phi(x)$ as follows:
$$\text{o-}RM(\phi) = \sup\{\text{o-}RM_{\langle C,D\rangle,\mathcal{M}}(\phi) : \mathcal{M} \models T \text{ and } \langle C, D\rangle \text{ is a cut in } \mathcal{M}\}.$$

We define the Morley o-degree of a formula inside a cut

1. Let $\langle C, D\rangle$ be a cut in an ordered structure $\mathcal{M}$ and o-$RM_{\langle C,D\rangle,\mathcal{M}}(\phi) = \alpha$ for some formula ϕ. We say that Morley o-degree of $\phi(x)$ inside the cut $\langle C, D\rangle$ in $\mathcal{M}$ is equal to n and write o-$MD_{\langle C,D\rangle,\mathcal{M}}(\phi) = n$ for this, if there exist exactly n pairwise $\langle C, D\rangle$-inconsistent formulae $\psi_i(x)$ such that $RM_{\langle C,D\rangle,\mathcal{M}}\big(\phi(x) \wedge \psi_i(x)\big) = \alpha$.
2. We define Morley o-degree of a formula $\phi(x)$ inside $\mathcal{M}$ as follows:
$$\text{o-}RM_{\mathcal{M}}(\phi) = \sup\{\text{o-}RM_{\langle C,D\rangle,\mathcal{M}}(\phi) : \langle C, D\rangle \text{ is a cut in } \mathcal{M} \text{ and o-}RM_{\langle C,D\rangle,\mathcal{M}}(\phi) = \alpha\}.$$
3. We define Morley o-rank of a formula $\phi(x)$ as follows:
$$\text{o-}RM(\phi) = \sup\{\text{o-}RM_{\langle C,D\rangle,\mathcal{M}}(\phi) : \mathcal{M} \models T,\ \langle C, D\rangle \text{ is a cut in } \mathcal{M}, \text{ and } \text{o-}RM_{\langle C,D\rangle,\mathcal{M}}(\phi) = \text{o-}RM(\phi)\}.$$

B. Kulpeshov made a complete description of weakly o-minimal pure ordered structures. Let F be the set of all finite linear orderings, and

$$G = F \cup \{\omega, \omega^*, \omega + \omega^*, \omega^* + \omega, \mathbb{Q}\}$$

Also, let WO be the collection of all ordered sums of the form $C_1 + \cdots + C_m$, where C_i is elementarily equivalent to some member of G for each $i \leq m$.

Theorem 3 (B. Kulpeshov)**.** *Any weakly o-minimal structure $\mathcal{M}$ restricted to the signature $\{=, <\}$ is a member of WO, and conversely, the first-order theory of any member of WO is a weakly o-minimal theory of linear order.*

Here we give the complete description of pure ordered structures that have Morley o-rank 1 and Morley o-degree 2. This class is a proper extension of the class of weakly o-minimal pure ordered structures.

Funding: The first author was supported by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP22685272).

Keywords: partially ordered structure, o-minimal structure, lattice, generalized interval.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C64, 03C45

References

[1] Kulpeshov B.S. Weakly o-minimal structures and some of their properties, Journal of Symbolic Logic, 63:4 (1998), 1511–1528. DOI 10.2307/2586664

[2] Verbovskiy V.V. O-stable ordered groups. Siberian Advances in Mathematics 22 (2012), no. 1, 50–74.

[3] Verbovskiy V.V. On ordered groups of Morley o-rank 1. Siberian Electronic Mathematical Reports 15 (2018) 314–320.

PAC-learning and J-o-minimality

A.R. YESHKEYEV[1], A.K. ISSAYEVA[2], N.V. POPOVA[3]

[1,2,3]*Karaganda Buketov University, Karaganda, Kazakhstan*

[1]aibat.kz@gmail.com, [2]isaevaaiga@gmail.com

This paper explores the connection between J-o-minimality in Jonsson theories and PAC learning. Key definitions related to Jonsson theories, normality in pregeometry, and K_T-equivalence are introduced. The primary focus is on the JNIP property and its relationship with PAC learning. It is proven that every J-o-minimal Jonsson theory is a JNIP theory. The obtained results deepen the understanding of the structural properties of Jonsson theories and their applications in machine learning.

Definition 1 (A.R. Yeshkeyev)**.** A set $JSp(K)$ of Jonsson theories of signature σ, where

$$JSp(K) = \{\Delta \mid \Delta \text{ is Jonsson theory and } K \subseteq Mod(\Delta)\},$$

is called the Jonsson spectrum for class K.

Definition 2 (T.G.Mustafin)**.** T_1 and T_2 are said to be cosemantic Jonsson theories (denoted by $T_1 \bowtie T_2$), if $T_1^* = T_2^*$.

Definition 3 (A.R. Yeshkeyev)**.** Let τ be some given pregeometry in C_T with a closure operator $cl : P(C_T) \to P(C_T)$. A Jonsson theory T is called normal in pregeometry τ (cl-normal), if, for each almost Jonsson subset $X \subseteq C_T$, $C_{Fr(X)}$ is an existentially closed submodel of C_T.

Definition 4 (T.G.Mustafin)**.** Let T_1 and T_2 be complete theories. We will say that T_1 and T_2 are syntactically similar if exists bijection $f : F(T_1) \to F(T_2)$ such that

1. The restriction of f to $F_n(T_1)$ is an isomorphism of Boolean algebras $F_n(T_1)$ and $F_n(T_2)$, for $n < \omega$.
2. $f(\exists v_{n+1}\varphi) = \exists v_{n+1} f(\varphi)$, for $\varphi \in F_{n+1}(T)$, $n < \omega$.
3. $f(v_1 = v_2) = (v_1 = v_2)$.

Definition 5 (A.R. Yeshkeyev)**.** Let T be a Jonsson theory. A class K_T of L-structures is called a Kaiser class of T if

$$K_T = \{M \mid M \in Mod(T) \text{ and } Th_{\forall\exists}(M) \text{ is a Jonsson theory}\}.$$

Definition 6 (1)**.** Let T_1 and T_2 be Jonsson L-theories. T_1 and T_2 are called K_T-equivalent ($T_1 \overset{\sim}{\bowtie} T_2$), if $K_{T_1} = K_{T_2}$.

Definition 7 (A.R. Yeshkeyev)**.** Let T_1 and T_2 be arbitrary Jonsson theories. We say that T_1 and T_2 are Jonsson syntactically similar, if a bijection $f : E(T_1) \to E(T_2)$ exists such that:

1. restriction f to $E_n(T_1)$ is an isomorphism of lattices $E_n(T_1)$ and $E_n(T_2)$, $n < \omega$;
2. $f(\exists v_{n+1}\varphi) = \exists v_{n+1} f(\varphi)$, $\varphi \in E_{n+1}(T)$, $n < \omega$;
3. $f(v_1 = v_2) = (v_1 = v_2)$.

Well-known next facts about PAC-learning

Definition 8 (2)**.** Let X be a set and $\mathcal{F} \subseteq P(X)$. The pair $(X, \mathcal{F})$ is called a set system. We say that $A \subseteq X$ is shattered by $\mathcal{F}$ if for every $S \subseteq A$ there is $F \in \mathcal{F}$ such that $F \bigcap A = S$. A family $\mathcal{F}$ is said to be a VC-class on X if there is some $n < \omega$ such that no subset of X of size n is shattered by $\mathcal{F}$. In this case the VC-dimension of $\mathcal{F}$, denoted by $VC(\mathcal{F})$, is the smallest integer n such that no subset of X of size $n+1$ is shattered by $\mathcal{F}$. If no such n exists, we write $VC(F) = \infty$.

Theorem 9 (2)**.** *The following are equivalent for a hypothesis class H with domain X:*
(1) - *H has finite VC dimension.*
(2) - *H is PAC learnible(PAC stands for Probably Approximately Correct).*

Let T perfect normal $\exists$ complete theory for $\exists$-sentences.

Definition 10. Let T is perfect normal J-L-theory and $\phi(x, y)$ is a some $\exists$-formula (with a partition of the free variables). Say that $\phi(x, y)$ has the J-independence property (or JIP) if there are in $M, M \in K_T$ theory T $(a_i)_{i<\omega}$ and $(b_s)_{s\subseteq\omega}$ such that $\phi(a_i, b_s)$ holds iff $i \in s$. Say that ϕ is $JNIP$ if not. The theory T is $JNIP$ if all formulas are $JNIP$.

Definition 11. Jonsson theory T is J-o-minimal theory if T^*-o-minimal

Corollary 12. *If theory T is J-o-minimal theory, then T has a $JNIP$-formula.*

Proposition 13. *A formula is JNIP if and only if for every $M \in K_T$, the family $\{\phi(M^x, a) \mid a \in M^y\}$ is a VC-class.*

Let $[\dddot{\Delta}_{\mathfrak{U}}] \in JS_P(D)/..., D \subseteq K_T$, where $JS_P(D)/...$ is the factor set of the $JS_P(D)$ by the following equivalence relations: cosemanticness of jonsson theories, K_T-equivalence, and Jonsson syntactic similarity.

Definition 14. The class $[\dddot{\Delta}_{\mathfrak{U}}]$ is J-o-minimal theory if $\Delta^*_{\mathfrak{U}}$-o-minimal

Definition 15. $[\dddot{\Delta}_{\mathfrak{U}}]$ is $JNIP$-class if every theory in this class will be $JNIP$-theory

Theorem 16. *Let* $[\dddot{\Delta}_{\mathfrak{U}}] \in JS_P(D)/..., D \subseteq K_T$ *then if* $[\dddot{\Delta}_{\mathfrak{U}}]$*-J-o-minimal class we can conclude that* $[\dddot{\Delta}_{\mathfrak{U}}]$ *be JNIP-class*

Theorem 17 (Main result)**.** *A formula is* JNIP *iff for some/every* $M \in K_T$*, the family* $\{\phi(M^x, a) \mid a \in M^y\}$ *is a* VC*-class.*

All the necessary information about Jonsson theory which is uncertain in this thesis, can be extracted from the monograph[1].

Funding:

This research has been funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP23489523).

Keywords: Jonsson theory, J-o-minimality, Jonsson spectrum, pregeometry, PAC-learnible, NIP formula, VC-dimension.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

References

[1] YeshkeyevA.R. *Theories and their models.*, Karaganda, Kazakhstan: izd. KarU [in Russian], Volume 1,2. (2024).

[2] Vapnik V. N., Chervonenkis A. Ya. On the uniform convergence of relative frequencies of events to their probabilities, Reprint of Theor., Probability Appl., 16 (1971), no. 264–280.

Triple factorization of the Robinson spectrum and its hybrid

A.R. YESHKEYEV[1], N.M. MUSSINA[2], S.M. AMANBEKOV[3]

[1,2,3]*Karaganda Buketov university, Karaganda, Kazakhstan*

[1]modth1705@mail.ru, [2]mussinanazerke@gmail.com, [3]amanbekovsmath@gmail.com

We work within the framework of studying Jonsson theories [1]. Let T be a Jonsson L-theory, and C_T be a semantic model of the theory T. The center of a Jonsson theory T is defined as the elementary theory of the semantic model of this theory: $T^* = Th(\mathfrak{C}_T)$.

One of the main objects in this study is a perfect Jonsson theory. A perfect Jonsson theory is understood to be a Jonsson theory whose semantic model is saturated of power ω^+.

The concept of a semantic Jonsson quasivarieties of unars and undirected graphs, as well as their Robinson spectras were introduced in [2]. In [1], the concepts of Jonsson syntactic and semantic similarity of Jonsson theories were described. In [3], these relations were generalized for classes of the Jonsson spectrum. In [4], a theorem on the existence of a certain syntactically similar algebra (S-act) for hybrids of classes from the Jonsson spectrum was considered.

In this abstract, we introduce a new concept of Kaiser equivalence between two Jonsson theories. First, let us define the concept of the Kaiser class of theory.

Definition 1. A class K_T=$\{\mathfrak{A} \in Mod(T) : \forall \mathfrak{A},\ T^0(\mathfrak{A})$ is Jonsson theory$\}$ is said to be a Kaiser class of the theory T, where $T^0(\mathfrak{A}) = Th_{\forall\exists}(\mathfrak{A})$.

Next, we can consider the binary relation according to the Kaiser classes of two Jonsson theories T_1 and T_2.

Definition 2. Let T_1 and T_2 are Jonsson theories. We say that theories T_1 and T_2 are K_T-equivalent, if K_{T_1}=K_{T_2}.

Now, let us move on to the main results of this abstract.

Let $J\mathbb{C}_{\mathfrak{U}}$ and $J\mathbb{C}_{\mathfrak{G}}$ be semantic Jonsson quasivariety of Robinson unars and undirected graphs correspondingly. $RSp(J\mathbb{C}_{\mathfrak{U}})$ and $RSp(J\mathbb{C}_{\mathfrak{G}})$ be their Robinson spectrums.

Further, on these spectrums, we introduce the following relations:

1) equivalence of Jonsson syntactic and semantic similarity,

2) K_T-equivalent, and

3) cosemanticness relations.

It is obvious that all these relations are equivalence relations, so we obtain a factor-set of the Robinson spectrums of $J\mathbb{C}_{\mathfrak{U}}$ and $J\mathbb{C}_{\mathfrak{G}}$ with respect to the introduced relations, which we call triple factorization and denote as $RSp(J\mathbb{C}_{\mathfrak{U}})_{/\overset{SS}{\underset{K}{\bowtie}}}$ and $RSp(J\mathbb{C}_{\mathfrak{G}})_{/\overset{SS}{\underset{K}{\bowtie}}}$ respectively. $[\dddot{\Delta}_{\mathfrak{U}}]$ is an equivalence class of a theory $\Delta_{\mathfrak{U}}$ from $RSp(J\mathbb{C}_{\mathfrak{U}})_{/\overset{SS}{\underset{K}{\bowtie}}}$ and $[\dddot{\Delta}_{\mathfrak{G}}]$ is an equivalence class of a theory $\Delta_{\mathfrak{G}}$ from $RSp(J\mathbb{C}_{\mathfrak{G}})_{/\overset{SS}{\underset{K}{\bowtie}}}$.

Theorem 3. *Let $[\dddot{\Delta}_{\mathfrak{U}}]$ and $[\dddot{\Delta}_{\mathfrak{G}}]$ be a classes of ω-categorical Robinson theories of unars and undirected graphs respectively. Then their hybrid $H([\dddot{\Delta}_{\mathfrak{U}}],[\dddot{\Delta}_{\mathfrak{G}}])$ is also a ω-categorical Robinson theory.*

We can also consider the following result of work [4] in a new, extended case by applying triple factorization on Robinson spectrums of semantic Jonsson quasivarieties of unars and undirected graphs. As a result, we obtain a countably categorical theory of S-act that is syntactically similar to a hybrid of classes.

Theorem 4. *Let $[\dddot{\Delta}_{\mathfrak{U}}]$ and $[\dddot{\Delta}_{\mathfrak{G}}]$ be a classes of ω-categorical Robinson theories of unars and undirected graphs respectively. Then there exists a ω-categorical theory of S-act that is Jonsson syntactically similar to the hybrid $H([\dddot{\Delta}_{\mathfrak{U}}],[\dddot{\Delta}_{\mathfrak{G}}])$ of these classes.*

All definitions that were not given in the abstract can be found in [1].

Funding: This research has been funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP22686796 Hybrids of fragments and their small models).

Keywords: Jonsson theory, Robinson theory, hybrid, similarity, K_T-equivalence, cosemanticness relation.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C52, 03C50, 03C35

References

[1] Yeshkeyev, A.R. *Theories and their models: a monograph in 2 volumes*, KBU Publishing House, Karaganda (2024).

[2] Yeshkeyev, A.R., Yarullina, A.R., Amanbekov, S.M. On categoricity questions for universal unars and undirected graphs under semantic Jonsson quasivariety. *Bulletin of the Karaganda University-Mathematics, 111*3 (2023), 165–180.

[3] Yeshkeyev A.R., Ulbrikht O.I., Urken G.A.. Similarities of Jonsson spectras classes. *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series, 112*4 (2023), 130–143.

[4] Yeshkeyev A.R., O.I. Ulbrikht O.I., Mussina N. M. (2023). Similarities of Hybrids from Jonsson Spectrum and S-Acts. *Lobachevskii Journal of Mathematics, 44* (2023) 5502–5518.

The properties of cl-normal Jonsson theories and their Kaiser classes

A.R. YESHKEYEV[1], I.O. TUNGUSHBAYEVA[2], M.T. KASSYMETOVA[3]

[1,2,3]*Karaganda Buketov University, Karaganda, Kazakhstan*

[1]aibat.kz@gmail.com, [2]intng@mail.ru, [3]mairushaasd@mail.ru

We study Jonsson theories in the framework of a countable first-order language L. In this work, we introduce a new tool for analyzing Jonsson theories [1]: a specific semantic invariant associated with a given Jonsson theory T, which we call the Kaiser class of T. We establish some fundamental properties of the Kaiser class and demonstrate its relevance in the structural study of Jonsson theories. In particular, we apply this notion to investigate the cl-normality and perfectness [2] of Jonsson theories. Furthermore, the results concerning the axiomatizability of the Kaiser class are presented.

Let us give necessary definitions. All definitions of this abstract paper were introduced by the first author of this paper.

Definition 1. Let τ be some given pregeometry in C_T with a closure operator $cl : P(C_T) \to P(C_T)$. A Jonsson theory T is called normal in pregeometry τ (cl-normal), if, for each almost Jonsson subset $X \subseteq C_T$, $C_{Fr(X)}$ is an existentially closed submodel of C_T.

Definition 2. Let T be a Jonsson theory. A class K_T of L-structures is called a Kaiser class of T if

$$K_T = \{M \mid M \in Mod(T) \text{ and } Th_{\forall\exists}(M) \text{ is a Jonsson theory}\}.$$

Definition 3. Let T_1 and T_2 be Jonsson L-theories. T_1 and T_2 are called K_T-equivalent ($T_1 \overset{\sim}{\bowtie} T_2$), if $K_{T_1} = K_{T_2}$.

In the framework of the introduced concepts, we obtained the following results.

Theorem 4. *For any Jonsson theory T, the class K_T is closed under the joint embedding and amalgamation properties.*

Theorem 5. *Let T be a Jonsson theory and let K_T^0 be a finitely axiomatizable theory. Then there are finitely many theories in $[T]_{\overset{\sim}{\bowtie}}$, where $[T]_{\overset{\sim}{\bowtie}}$ is a class of all Jonsson L-theories that are K_T-equivalent to T.*

Theorem 6. *Let T be a Jonsson theory. Then the following conditions are equivalent:*
(1) T is a perfect Jonsson theory;
(2) $E_T = K_{T^*}$.

Theorem 7. *Let T be a perfect Jonsson theory. Then the following conditions are equivalent:*
(1) T is a cl-normal Jonsson theory;
(2) for any almost Jonsson set $X_i \subseteq C_T$, $i \in I$, $\bigcap_{i\in I} K_{Fr(X_i)} \neq \varnothing$.

All definitions that are not provided in this work can be found in [2].

Funding: This research was funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP23489523).

Key words: Jonsson theory, cl-normal Jonsson theory, Kaiser class, perfect Jonsson theory, axiomatizability, amalgamation property, joint embedding property.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C10, 03C50, 03C52

References

[1] J. Barwise, *Teoriya modelei: spravochnaia kniga po matematicheskoi logike. Chast' 1 [Model theory: Handbook of mathematical logic. Part 1].* Izdatel'stvo Nauka, Moscow, 1982. [in Russian].

[2] Yeshkeyev A.R. *Theories and their models. Volume 1*, Izdatel'stvo Karagandinskogo universiteta, Karaganda (2024). [in Russian].

Properties of #-companion with respect to K_T

A.R. YESHKEYEV[1], O.I. ULBRIKHT[2], A.K. KOSHEKOVA[3]

[1,2,3]*Karaganda Buketov University, Karaganda, Kazakhstan*

[1]aibat.kz@gmail.com, [2]ulbrikht@mail.ru, [3]koshekova1998@mail.ru

Definition 1. [1] A theory T is called a Jonsson theory if:

(i) T has at least one infinite model;

(ii) T is an inductive theory;

(iii) T has the amalgam property (AP);

(iv) T has the joint embedding property (JEP).

Definition 2. [2] A model C_T of the Jonsson theory T such that $|C_T| = 2^\omega$ is said to be a semantic model, if it is ω^+-homogeneous-universal.

Definition 3. [3] T^* is the center of a Jonsson theory T. T^* is the elementary theory of its semantic model C_T, such that $T^* = Th(C_T)$.

Definition 4. [3] The Jonsson theory T is said to be perfect if its semantic model is an ω^+-saturated model of T.

Definition 5. Let T be a Jonsson theory. A class K_T of L-structures is called a Kaiser class of T if

$$K_T = \{M \mid M \in Mod(T) \text{ and } Th_{\forall\exists}(M) \text{ is a Jonsson theory}\}.$$

Definition 6. [4] Let T be a Jonsson theory, C_T be its semantic model, $X \subseteq C_T$. X is called an almost Jonsson set, if the following conditions are hold:

(1) X is an $\exists$-definable set;

(2) $cl(X) = M \in Mod(T)$;

(3) $Th_{\forall\exists}(M)$ is a Jonsson theory, where $Th_{\forall\exists}(M)$ is a set of all universal-existential sentences of the language L that are true in the model M.

Definition 7. [3] Let T be a Jonsson theory. A #-companion of the Jonsson theory T is a theory $T^\#$ of the same signature that satisfies the following conditions:

(i) $(T^\#)_\forall = T_\forall$;

(ii) for any Jonsson theory T', if $T_\forall = T'_\forall$, then $T^\# = (T')^\#$;

(iii) $T_{\forall\exists} \subseteq T^\#$

Definition 8. Let τ be some given pregeometry in C_T with a closure operator $cl : P(C_T) \to P(C_T)$. A Jonsson theory T is called normal in pregeometry τ (cl-normal), if, for each almost Jonsson subset $X \subseteq C_T$, $C_{Fr(X)}$ is an existentially closed submodel of C_T.

Let T be a cl-normal Jonsson theory, $A \subseteq C_T$, where A is an almost Jonsson set, meaning $cl(A) = M \in K_T$, where K_T is the Kaiser class of the normal fixed Jonsson theory.

Let $Th_{\forall\exists}(M) = Fr(A) = M^0$, $M^0 \in JSp(C_T)$, where $JSp(C_T)$ denotes the Jonsson spectrum of C_T, i.e. $JSp(C_T) = \{T|T \text{ is a Jonsson theory and } \forall A \in C_T,\ A \models T\}$.

The following facts outline the properties of these fragments.

Theorem 9. *If $cl(A) \in K_T$, then the following conditions are equivalent:*

(i) M^0 is perfect;

(ii) $M^{0\#}$ is $\forall\exists$-axiomatizable.

Theorem 10. *Let $cl(A) \in K_T$, then the following conditions are equivalent:*

(i) M^0 is perfect;

(ii) M^0 has a model companion.

Funding: This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP23489523).

Keywords: Jonsson theory, semantic model, *cl*-normal Jonsson theory, #-companion, Kaiser class.

2010 Mathematics Subject Classification: 35Q79, 35K05, 35K20

References

[1] Barwise, J. *Teoriya modelei: spravochnaia kniga po matematicheskoi logike. Chast 1 [Model theory: Handbook of mathematical logic. Part 1]*, Izdatelstvo Nauka, Moscow [in Russian] (1982).

[2] Mustafin, Y. Quelques proprietes des theories de Jonsson, *Journal of Symbolic Logic*, **67**:2 (2002), 528–536.

[3] Yeshkeyev A.R. *Teorii i ikh modeli. Tom 1 / Monografiia v 2 tomakh*, Karaganda: Izdatelstvo KarU im. akademika E.A. Buketova, (2024). [in Russian].

[4] Yeshkeyev A.R., Ulbricht O.I., Omarova M.T. Double factorization of the Jonsson spectrum, *Bulletin of the Karaganda University-Mathematics*, **116**:4 (2024), 185–196.

On Kaiser class of unars in expanded signature

A.R. YESHKEYEV[1], A.R. YARULLINA[2], M.T. KASSYMETOVA[3]

[1,2,3]*Karaganda Buketov University, Karaganda, Kazakhstan*

[1]aibat.kz@gmail.com, [2]linka14221@mail.ru, [3]mairushaasd@mail.ru

Definition 1. [1] A theory T is said to be Jonsson, if it satisfies the following conditions:

1) T has at least one infinite model; 2) T is $\forall\exists$-axiomatisable; 3) T has JEP property; 4) T has AP property.

Definition 2. [2] Let T be a Jonsson theory. A model $\mathfrak{C}_T$ of power 2^ω is called to be a semantic model of the theory T if $\mathfrak{C}_T$ is a ω^+-homogeneous ω^+-universal model of the theory T.

Definition 3. [1] The elementary theory of a semantic model of the Jonsson theory T is called the center of this theory. The center is denoted by T^*, i.e. $Th(\mathfrak{C}_T) = T^*$.

Given work is associated with the Jonsson universal of unars in the frame first-order language L of the signature $\sigma =< f >$, where f is unary functional symbol.

Definition 4. [3] 1) If $T = T_\forall$, then $T_\forall$ is said to be universal;

Lemma 5. *[3] For any unar $\mathfrak{A}$ the following is satisfied $\mathfrak{A} \models T_\forall \Leftrightarrow \mathfrak{A}$ embeds in $\mathfrak{C}_{T_\forall}$, where $\mathfrak{C}_{T_\forall}$ is a semantic model of Jonsson universal of unars $T_\forall$.*

Definition 6. [3] A fourset $(\Omega, \nu, \mu, \varepsilon)$ is called a characteristic $\mathfrak{C}_{T_\forall}$ and denoted as $char(\mathfrak{C}_{T_\forall})$, if

$\Omega = \{\chi(a) : a \in \mathfrak{C}_{T_\forall}\}$;

$\nu \;\; \omega \setminus \{0\} \to \omega \cup \{\infty\}$ such that $\forall m > 0$,

$$\nu(m) = \begin{cases} k, \text{if the quantity } \; m-\text{loops in } \; \mathfrak{C}_{T_\forall} \; \text{ is equal to } \; k < \omega, \\ \infty, \text{otherwise;} \end{cases}$$

$\mu : \Omega \to \omega \cup \{\infty\}$ such that if $\alpha \in \Omega$ and $\alpha \in \chi(a)$, then $\mu(\alpha) = k(a)$, if $k(a) < \omega$ and $\mu(\alpha) = \infty$, if $k(a) = |\mathfrak{C}_{T_\forall}|$;

$$\varepsilon = \begin{cases} 0, \text{if } \; |\{a \in \mathfrak{C}_{T_\forall} : \chi(a) = \omega\}| = 0, \\ \infty, \text{otherwise.} \end{cases}$$

Let $\mathbb{T}_U$ be the theory of all unars. It is known that $\mathbb{T}_U$ is an empty theory (the set of axioms of this theory is empty), i.e. it is a set of all sentences in the language L of the signature $\sigma =< f >$, where f is unary functional symbol. It was proven in the work [4] that the theory of all unars is a Jonsson theory. Let $\mathfrak{C}_{\mathbb{T}_U}$ be its semantic model.

Definition 7. [5] Let T be a Jonsson theory. A class of models $K_T \subseteq Mod(T)$ such that $K_T = \{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \in Mod(T)$ and $Th_{\forall\exists}(\mathfrak{A})$ is a Jonsson theory $\}$ is called a Kaiser class of the theory T.

Theorem 8. *[5] Let $\mathbb{T}_U$ be the Jonsson theory of all unars, and let $\mathfrak{M}$ be its model. $\mathfrak{M}$ is a component of the theory $\mathbb{T}_U$ if and only if $\mathfrak{M} \in K_{\mathbb{T}_U}$, where $K_{\mathbb{T}_U}$ is the Kaiser class of the theory $\mathbb{T}_U$.*

Definition 9. [5] A Jonsson theory T is called a normal theory if for any $\mathfrak{M} \in K_T : \mathfrak{M}^0 = Th_{\forall\exists}(\mathfrak{M})$, and $\mathfrak{C}_{\mathfrak{M}^0}$ is an existentially closed submodel of $\mathfrak{C}_T$ ($\mathfrak{C}_{\mathfrak{M}^0}$ is a semantic model of $\mathfrak{M}^0$, $\mathfrak{C}_T$ is a semantic model of T).

Theorem 10. *[5] The theory of all unars $\mathbb{T}_U$ is a normal Jonsson theory.*

Let us consider first-order language L of the signature $\sigma =< f >$, where f is unary functional symbol and expand it by symbols of new constant c and unary predicate P^1.

Let $\sigma'' = \sigma \cup \sigma'$, where $\sigma =< f >$, $\sigma' = (P^1, c)$. We consider a theory $\overline{T}_\forall$ in the new expanded signature σ'' as follows: [4] $\overline{T}_\forall = T_\forall \cup Th_\forall(\mathfrak{C}_{T_\forall}, a)_{a \in P^1(\mathfrak{C}_{T_\forall}) \cup P^1(c)} \cup \{P^1, \subseteq\} \cup P^1(c)$.

Here P^1 is a new unary predicate symbol, $\{P^1, \subseteq\}$ is an infinite set of sentences, which are expressing the fact that in $\mathfrak{C}_{T_\forall}$ the predicate P^1 distinguishes existentially closed submodel of $\mathfrak{C}_{T_\forall}$, i.e. $P^1(\mathfrak{C}_{T_\forall}) = \mathfrak{M}, \mathfrak{M} \in K_{T_\forall}$, $Th_{\forall\exists}(\mathfrak{M})$ is a Jonsson theory, $K_{T_\forall}$ is a Kaiser class of theory $T_\forall$. Let us denote the center of $\overline{T}_\forall$ as follows: $\overline{T}^*_\forall = Th(\overline{\mathfrak{C}}_{T_\forall}) = Th(\mathfrak{C}_{T_\forall}, c, a)_{c, a \in P^1(\mathfrak{C}_{T_\forall})}$

Definition 11. [6] A Jonsson theory is said to be *hereditary* if, in any of its permissible expansions, it preserves its Jonssonness.

Definition 12. [1] A Jonsson theory T is called perfect if its semantic model $\mathfrak{C}_T$ is ω^+-saturated.

It was proven in the [7] that universal of unars is a perfect Jonsson theory. Hence, the following result was proven in [4].

Theorem 13. *[4] If Jonsson theory of unars $T_\forall$ is a perfect Jonsson theory, $\overline{T}_\forall$ is its hereditary expansion, then $\overline{T}_\forall$ is also perfect Jonsson theory of unars.*

Thus, the following results were obtained for perfect Jonsson theories of unars and their hereditary expansions.

Theorem 14. *[5] If Jonsson theory of unars $T_\forall$ is normal perfect Jonsson theory, $\overline{T}_\forall$ is its hereditary expansion, then $\overline{T}_\forall$ is also normal perfect Jonsson theory of unars.*

Lemma 15. *[5] If $T_\forall$ is a normal perfect Jonsson universal of unars and $\overline{T}_\forall$ is its hereditary expansion, then $\overline{T}^*_\forall$ is a perfect Jonsson theory.*

Funding: This research has been/was/is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP23489523)).

Keywords: Model Theory, Jonsson theory, semantic model, center of Jonsson theory, normal Jonsson theory, semantic Jonsson quasivariety, Jonsson spectrum, cosemanticness class, unar, Kaiser class.

2010 Mathematics Subject Classification: 03C60, 08A60, 03C10

References

[1] Yeshkeyev A.R. *Teorii i ikh modeli. Tom 1 / Monografiia v 2 tomakh*, Karaganda: Izdetelstvo KarU im. akademika E.A. Buketova, (2024). [in Russian].

[2] Mustafin, Y. Quelques proprietes des theories de Jonsson, *Journal of Symbolic Logic*, **67**:2 (2002), 528–536.

[3] Yeshkeyev, A.R., Mustafin, T.G. Opisanie ionsonovskikh universalov unarov, *Issledovaniya v teorii algebraicheskih sistem — Research in the theory of algebraic systems*, (1995), 51—57 [in Russian].

[4] Yeshkeyev, A.R., Yarullina, A.R., Kassymetova M.T. Jonsson existentially closed unars of expanded signature, *Bulletin of Abai KazNPU - Mathematical and Physical Sciences*, **87**:3 (2024), 1—17.

[5] Yeshkeyev, A.R., Yarullina, A.R., Kassymetova M.T. On Kaiser class of unars in expanded signature, *Eurasian Mathematical Journal*, in Print.

[6] Yeshkeyev A.R., Omarova M.T. An essential base of the central types of the convex theory, *Bulletin of the Karaganda University-Mathematics*, **101**:1 (2021), 119—126.

[7] Yeshkeyev, A.R., Mustafin, T.G. Nekotorye svojstva jonsonovskih primitivov unarov, *Issledovaniya v teorii algebraicheskih sistem — Research in the theory of algebraic systems*, (1995), 58—61 [in Russian].

Предметный указатель

Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня науки

Алматы, 1–4 апреля 2025 года

Тезисы докладов

Подписано в печать 01.04.2025г.
Формат 60x84 1/16 Бумага офсетная
Тираж 150 экз.

Отпечатано в типографии ИМММ МНВО РК
050010, г. Алматы, ул Шевченко, 28

ISBN 978-601-08-5014-9