Автономная некоммерческая образовательная организация
высшего образования
Центросоюза Российской Федерации
СИБИРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПОТРЕБИТЕЛЬСКОЙ КООПЕРАЦИИ (СибУПК)

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА
С ЭЛЕМЕНТАМИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Учебное пособие

Новосибирск 2025

УДК 519:510.6
ББК 22.176
К632

Рецензенты:
Е. В. Казанцева, канд. физ.-мат. наук, доцент,
Новосибирский государственный технический университет
С. Л. Злобина, канд. физ.-мат. наук, доцент,
Сибирский университет потребительской кооперации (СибУПК)

Комиссаров, В. В.

К632 Дискретная математика с элементами математической логики : учебное пособие / В. В. Комиссаров, О. Н. Шаланова, М. Н. Пешкова, А. А. Яковлева ; АНОО ВО Центросоюза РФ «СибУПК». — Новосибирск, 2025. — 154 с.

ISBN 978–5–334–00326–2

Учебное пособие содержит разделы дискретной математики: элементы теории множеств, комбинаторика, теория графов, системы счисления, математическая логика. Снабжено большим количеством примеров и задачами для самостоятельного и аудиторного решения.

Издание предназначено для обучающихся по специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование.

УДК 519:510.6
ББК 22.176

Рекомендовано к изданию кафедрой статистики и математики, протокол от 29 августа 2024 г. № 1.

ISBN 978–5–334–00326–2

Оглавление

Предисловие **6**

1 Элементы теории множеств **8**

1.1 Понятие множества 8
1.2 Способы задания множеств 10
1.3 Отношения между множествами 11
1.4 Операции над множествами 14
1.4.1 Объединение множеств 14
1.4.2 Пересечение множеств 15
1.4.3 Свойства объединения и пересечения множеств 16
1.4.4 Разность двух множеств. Дополнение . . . 19
1.4.5 Свойства разности и дополнения 20
1.4.6 Декартово произведение множеств 23
1.4.7 Число элементов объединения, разности и декартова произведения двух конечных множеств 27
1.5 Разбиение множества на классы 28
1.6 Вопросы и упражнения 32

2 Элементы комбинаторики **41**

2.1 Соединения без повторений 41
2.1.1 Перестановки без повторений 44
2.1.2 Размещения без повторений 45
2.1.3 Сочетания без повторений 46
2.2 Соединения с повторениями 49

2.2.1 Перестановки с повторениями 49
2.2.2 Размещения с повторениями 51
2.2.3 Число подмножеств конечного множества . 52
2.2.4 Сочетания с повторениями 53
2.3 Вопросы и упражнения 55

3 Графы 62
3.1 Графическое представление графов 63
3.2 Аналитическое (дискретное) представление графов 67
3.3 Вопросы и упражнения 72

4 Системы счисления 77
4.1 Позиционные и непозиционные системы счисления 77
4.2 Перевод чисел из p-ичной системы счисления в десятичную 80
4.3 Перевод чисел из десятичной системы счисления в p-ичную 81
4.4 Представление информации в компьютере 82
4.5 Вопросы и упражнения 89

5 Способы математических доказательств 92
5.1 Метод математической индукции 92
5.2 Упражнения 95

6 Элементы математической логики 97
6.1 Логика высказываний 97
6.2 Логические связки 98
6.2.1 Связка НЕ 99
6.2.2 Связка И 99
6.2.3 Связка ИЛИ 99
6.2.4 Связка СЛЕДУЕТ 100
6.2.5 Связка ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА 100
6.2.6 Таблицы истинности 100

6.3 Квanторные конструкции 101
6.3.1 ДЛЯ ВСЕХ 101
6.3.2 СУЩЕСТВУЕТ 102
6.4 Предикаты и элементарные формулы 103
6.5 Алгебра логики 107
6.6 Канонические формы логических формул 116
6.6.1 Алгоритм построения СДНФ 119
6.6.2 Алгоритм построения СКНФ 120
6.6.3 Минимизация булевых функций 121
6.7 Алгебра Жегалкина 130
6.7.1 Сумма по модулю два 130
6.7.2 Многочлены Жегалкина 132
6.8 Алгебра переключательных схем 134
6.9 Элементы схемотехники. Логические схемы 136
6.10 Вопросы и задания 144

Библиографический список **151**

Предисловие

В настоящее время алгебра логики является частью дискретной математики. Дискретная математика занимается изучением свойств структур конечного характера, которые возникают как внутри математики, так и в её приложениях. Классическая математика в основном занимается изучением свойств объектов непрерывного характера, хотя само деление математики на классическую и дискретную в значительной мере условно. К числу структур, изучаемых дискретной математикой, могут быть отнесены конечные группы, конечные графы, математические модели преобразователей информации типа конечных автоматов или машин Тьюринга и др. Математический аппарат алгебры логики широко используется в информатике, в частности, в таких её разделах, как проектирование ЭВМ, теория автоматов, теория алгоритмов, теория информации, целочисленное программирование и др.

Интерес к дискретной математике неуклонно растет. Это объясняется тем, что современные информационные технологии переработки информации базируются на дискретных представлениях.

Целью данного учебного пособия является освоение методов дискретной математики, позволяющих моделировать, решать и анализировать профессиональные прикладные задачи, в том числе и с помощью компьютера.

В первой главе дается понятие теории множеств, рассматриваются понятия операции и отношения. Во второй главе излагаются основные теоретические аспекты и анализ различных комбинаторных конфигураций: перестановок, размещений и сочетаний. Третья глава рассматривает методы теории графов. В частности, даются ключевые понятия, определения и алгоритмы этой теории. В четвёртой главе рассматриваются вопросы представления чисел в различных системах счисления, перевод чисел из одной системы счисления в другую. Особое внимание уделяется представлению чисел в двоичной системе счисления и представлению информации в компьютере. В пятой главе затрагиваются вопросы теории доказательств.

В шестой главе рассматривается логика высказываний, охватывающая её логика предикатов и алгебра логики, изучающая строение логических формул.

Учебное пособие предназначено для студентов специальности 09.02.07 Информационные системы, обучающихся по дисциплине «Элементы математической логики». Каждая тема включает необходимый теоретический материал, формулы и примеры, а также блок задач, часть из которых может быть использована для проведения контрольных работ.

Глава 1

Элементы теории множеств

1.1 Понятие множества

Теория множеств является одной из сравнительно молодых математических дисциплин. Основоположником ее по праву считается немецкий математик Георг Кантор (1845 – 1918). В основе этой теории лежит понятие множества. Согласно Г. Кантору, «множество есть многое, мыслимое нами как единое». Таким образом, множество рассматривалось им как собрание каких-либо предметов реального мира (или объектов нашей интуиции), обладающих общим свойством. Другими словами, множество — это совокупность предметов, сама рассматриваемая как один предмет. Все сказанное не является определением множества, а всего лишь поясняет его. Множество — самое широкое понятие математики, оно не может быть определено через другие, более простые понятия [5–6, 8, 10–11, 14–4, 19].

Мыслящему человеку свойственно группировать различные предметы по какому-либо признаку в самостоятельный объект. В языке этот процесс достаточно полно отражается в словах «группа», «класс», «компания», «экипаж», «набор», «ансамбль» и других, близких по смыслу слову «множество».

В окружающей реальной действительности мы имеем дело с различными множествами. Так, можно говорить о множестве жителей данного города, о множестве простых чисел, о множестве букв в русском алфавите и т. п. Универсальность этого понятия сделала возможным применение теории множеств не только во всех областях математики, но и в экономике, биологии, лингвистике и других науках. В разговорной речи термин «множество» всегда связывается с большим числом предметов. В теории множеств это не обязательно. Мы будем рассматривать и бесконечные множества, и множества, содержащие любое конечное число предметов, и даже множество, не содержащее ни одного предмета, — пустое множество. Произвольные множества обозначим заглавными буквами латинского алфавита: $A, B, C, D, \ldots$; пустое множество — символом $\varnothing$. Всякое множество состоит из некоторых предметов, называемых его элементами. Элементы множества обозначим малыми буквами латинского алфавита $a, b, c, d, \ldots$ или какой-нибудь одной буквой с индексом, например, $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

Отношение между элементами и множеством выражают словами: «является элементом» или «принадлежит». Предложение «Элемент a принадлежит множеству A» запишем с использованием символа $\in$ ($a \in A$). Если же a не является элементом множества A, то будем писать $a \notin A$.

Обозначения наиболее часто используемых числовых множеств

- N — множество натуральных чисел;
- N_0 — множество целых неотрицательных чисел (или Z_+);
- Z — множество целых чисел;
- Q — множество рациональных чисел;
- R — множество действительных чисел;
- R_+ — множество неотрицательных действительных чисел;
- R_- — множество неположительных действительных чисел.

1.2 Способы задания множеств

Множество считается заданным, если о любом объекте можно сказать, принадлежит он этому множеству или не принадлежит. Множество можно задать непосредственным перечислением всех его элементов в произвольном порядке. В этом случае названия всех элементов множества записываются в строку, отделяются запятыми и заключаются в фигурные скобки. Например, если множество A состоит из однозначных нечетных чисел, то будем писать: $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Это множество можно записать и так: $A = \{3, 5, 1, 9, 7\}$ или $A = \{9, 7, 1, 3, 5\}$, или с перечислением элементов в каком-то другом порядке.

Следует отличать символы a и $\{a\}$. Так, a обозначает элемент множества, $\{a\}$ — одноэлементное множество.

Очевидно, что перечислением элементов можно задать только конечное множество, и то с небольшим числом элементов. Когда задать множество перечислением его элементов трудно или невозможно (в случае бесконечных множеств), применяют другой способ задания множества — через указание характеристического свойства его элементов.

Определение 1. *Характеристическим свойством, определяющим множество, называется такое свойство, которым обладает каждый элемент, принадлежащий данному множеству, и не обладает ни один элемент, ему не принадлежащий.*

Множество B, определяемое некоторым характеристическим свойством P, будем обозначать: $B = \{x|P(x)\}$, эта запись читается так: «B есть множество всех x таких, что x обладает свойством P», или «B есть множество всех x , обладающих свойством P».

Например, запись $B = \{x|x \in Z, -2 \leq x < 3\}$ означает, что множество B состоит из целых чисел, больших или равных -2 и меньших 3, а множество корней уравнения $2z^2 - z - 3 = 0$ можно описать: $C = \{z | 2z^2 - z - 3 = 0\}$.

Таким образом, чтобы задать некоторое множество, надо либо перечислить его элементы, либо указать характеристическое свойство его элементов. Часто одно и то же множество может быть задано и первым, и вторым способами. Например, заданные выше с помощью характеристического свойства множества B и C могут быть заданы и перечислением: $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $C = \{-1, 3/2\}$.

1.3 Отношения между множествами

Чтобы наглядно изображать множества, английский математик Джон Венн (1834 – 1923) предложил использовать замкнутые фигуры на плоскости. Намного раньше Леонард Эйлер (1707 – 1783) для изображения отношений между множествами использовал круги. Точки внутри круга считаются элементами множества. Позднее такие изображения получили название диаграмм Эйлера–Венна.

Пусть даны два произвольных множества A и B. Рассматривая вопрос об отношениях между ними, необходимо прежде всего отметить две возможности.

I. Множества A и B не имеют общих элементов, то есть из того, что $x \in A$ следует, что $x \notin B$, а из того, что $y \in B$ следует, что $y \notin A$. На диаграммах Эйлера–Венна нет точек (элементов), которые принадлежали бы одновременно A и B (рис. 1.1а).

II. Множества A и B имеют общие элементы, то есть существуют такие элементы x, для которых верно то, что $x \in A$ и $x \in B$. При этом возможны следующие четыре случая отношений между ними.

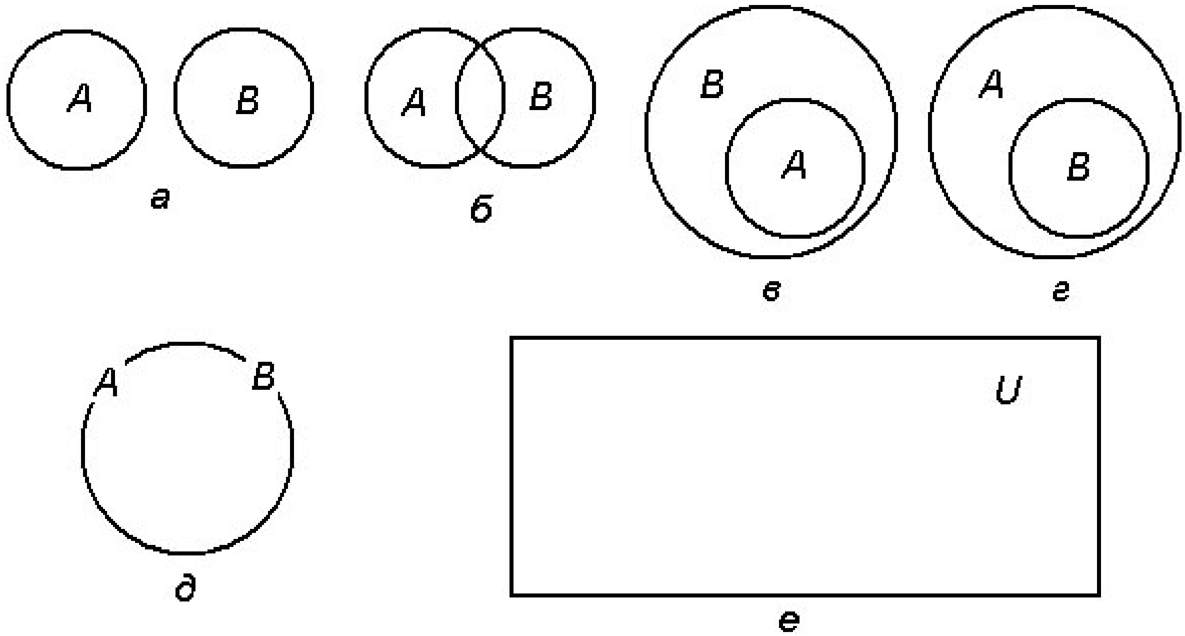


Рис. 1.1. Диаграммы Эйлера–Венна

1. Не все элементы множества A принадлежат множеству B, и не все элементы множества B принадлежат множеству A. В этом случае говорят, что множества A и B находятся в отношении *пересечения*. Диаграмма Эйлера–Венна для этих множеств представлена на рис. 1.1б.

Приведем примеры множеств, находящихся в отношении пересечения:

а) $A = \{$п, и, о, н, е, р$\}$; $B = \{$у, ч, е, н, и, к$\}$;

б) A — множество натуральных делителей числа 72; B — множество натуральных делителей числа 85.

2. Все элементы множества A принадлежат множеству B , но множество B может содержать элементы, не принадлежащие множеству A. В этом случае говорят, что множества A и B находятся в отношении *включения*. На диаграмме Эйлера–Венна каждая точка множества A находится внутри фигуры, изображающей множество B (рис. 1.1в)

Например, множества A — чисел, кратных четырем, и B —

чисел, кратных двум, находятся в отношении включения.

Определение 2. *Множество A называется подмножеством (или частью) множества B, если каждый элемент множества A является элементом множества B.*

Обозначают включение символом $\subset$: $A \subset B$ и читают «A включается в B» или «A — подмножество B».

Из определения 2 вытекают следующие свойства отношения включения:

1) рефлексивность: $A \subset A$, то есть всякое множество включается в себя, или всякое множество является подмножеством самого себя;

2) транзитивность: из того, что $A \subset B$ и $B \subset C$, следует, что $A \subset C$;

3) для всякого множества A справедливо включение $\varnothing \subset A$. Поскольку $\varnothing$ не имеет элементов, то естественно считать его подмножеством любого множества.

Само множество A и пустое множество $\varnothing$ называют *несобственными* подмножествами множества A. Все остальные подмножества множества A называются *собственными*.

3. Все элементы множества B принадлежат множеству A, но множество A может содержать элементы, не принадлежащие множеству B. В этом случае множество B включается во множество A. Диаграмма Эйлера–Венна для такого включения представлена на рис. 1.1г.

4. Все элементы множества A принадлежат множеству B, и все элементы множества B принадлежат множеству A. В этом случае говорят, что множества A и B *равны*.

Определение 3. *Два множества A и B называются равными или совпадающими, если $A \subset B$ и $B \subset A$.*

Равенство множеств обозначают символом $=$ ($A = B$), и читают «A равно B». На диаграмме Эйлера–Венна контуры множеств A и B совпадают (рис. 1.1д).

Пусть, например, A — множество гласных букв в слове «белок», B — множество гласных букв в слове «прогресс». Очевидно, что множества $A = \{$е, о$\}$ и $B = \{$о, е$\}$ равны между собой.

Можно дать и другое определение равенства множеств.

Определение 4. *Два множества A и B называются равными, если они состоят из одних и тех же элементов.*

Отношение равенства множеств обладает следующими свойствами:

1) рефлексивностью: $A = A$, то есть всякое множество равно самому себе;
2) симметричностью: если $A = B$, то и $B = A$;
3) транзитивностью: если $A = B$ и $B = C$, то $A = C$.

Определение 5. *Множество, относительно которого все множества, рассматриваемые в данной задаче, являются подмножествами, называется универсальным.*

Например, множество действительных чисел R является универсальным для рассмотренных выше числовых множеств. Универсальное множество будем обозначать буквой U, а на диаграммах Эйлера–Венна изображать в виде прямоугольника (рис. 1.1е).

1.4 Операции над множествами

1.4.1 Объединение множеств

Пусть даны два множества: $A = \{15, 30, 45, 60, 75, 90\}$ — множество двузначных чисел, кратных 15; $B = \{18, 36, 54, 72, 90\}$

— множество двузначных чисел, кратных 18. Образуем новое множество, состоящее из элементов этих множеств. Полученное множество $\{15, 18, 30, 36, 45, 60, 72, 75, 90\}$ называется объединением множеств A и B . Число 90 записали один раз, поскольку элементы множеств не должны повторяться.

Определение 6. *Объединением множеств A и B называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат множеству A или множеству B.*

Союз «или» здесь не выполняет разделительную функцию. Другими словами, если элемент принадлежит объединению множеств, то он принадлежит или A, или B, или обоим множествам одновременно. Обозначают объединение множеств A и B символом $\cup$: $A \cup B$. Аналогично определяется объединение трех и более множеств. Определение объединения можно записать в таком виде: $A \cup B := \{x | x \in A$ или $x \in B\}$. На рис. 1.2 объединению соответствует заштрихованная часть. На рис. 1.2б $B \subset A$; поэтому $A \cup B = A$.

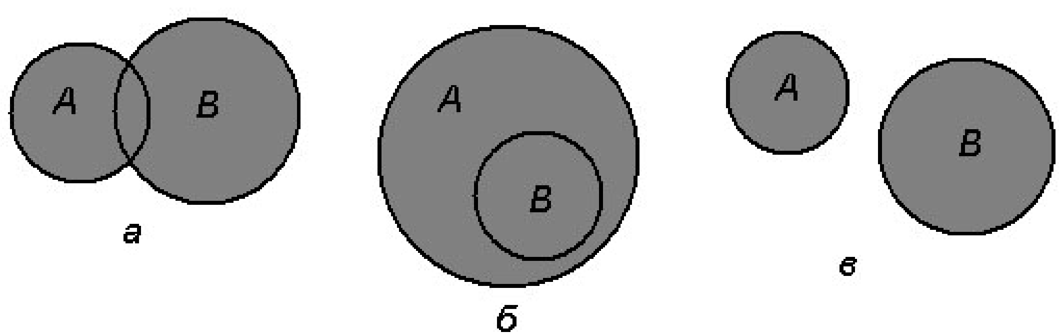


Рис. 1.2. Объединение множеств

1.4.2 Пересечение множеств

Пусть имеем два множества: $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ — множество натуральных делителей числа 12; $B = \{1, 3, 6, 9, 18\}$ — множество натуральных делителей числа 18. Образуем множество, состоящее из общих элементов множеств A и B. Вновь полученное множество $\{1, 3, 6\}$ называют пересечением множеств A и B.

Определение 7. *Пересечением множеств A и B называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат множеству A и множеству B одновременно.*

Пересечение множеств A и B обозначают символом $\cap$: $A \cap B$. Аналогично определяется пересечение трех и более множеств. Определение пересечения можно записать в таком виде: $A \cap B := \{x | x \in A \text{ и } x \in B\}$.

Как следует из определения пересечения, $x \in A \cap B$ тогда и только тогда, когда $x \in A$ и $x \in B$. Соответственно, $x \notin A \cap B$ тогда и только тогда, когда $x \notin A$ или $x \notin B$.

Если множества A и B изобразить при помощи диаграмм Эйлера–Венна, то пересечению будет соответствовать заштрихованная часть (рис. 1.3). На рис. 1.3б $B \subset A$, поэтому $A \cap B = B$. На рис. 1.3в $A \cap B = \varnothing$.

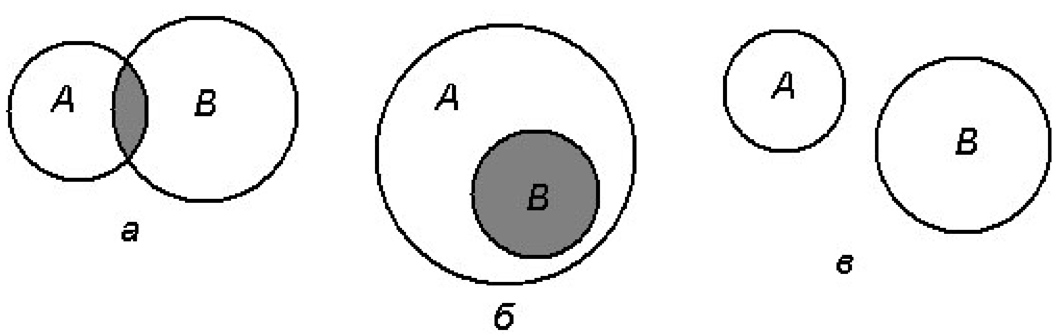


Рис. 1.3. Пересечение множеств

1.4.3 Свойства объединения и пересечения множеств

Из определений объединения и пересечения множеств вытекают свойства этих операций, представленные в виде равенств, справедливых для любых множеств A, B и C.

1. $A \cup B = B \cup A$ — коммутативность объединения.

2. $A \cap B = B \cap A$ — коммутативность пересечения.

3. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ — ассоциативность объединения.

4. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ — ассоциативность пересечения.

5. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ — дистрибутивность пересечения относительно объединения.

6. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ — дистрибутивность объединения относительно пересечения.

7. $A \cup A = A$.

8. $A \cap A = A$.

9. $A \cup \varnothing = A$.

10. $A \cap \varnothing = \varnothing$.

11. $A \cup U = U$.

12. $A \cap U = A$.

Свойства 7–12 называются законами поглощения.

Докажем аналитически справедливость дистрибутивности объединения относительно пересечения множеств (свойство 6). Введем следующие обозначения: $A \cup (B \cap C) = E_1$ и $(A \cup B) \cap (A \cup C) = E_2$. На основании определения равенства двух множеств достаточно показать справедливость включений: $E_1 \subset E_2$ и $E_2 \subset E_1$.

1. Покажем, что $E_1 \subset E_2$. Выберем произвольный элемент $x \in E_1$, тогда $x \in A \cup (B \cap C)$. На основании определения объединения имеем две возможности: $x \in A$ или $x \in B \cap C$. Если $x \in A$, то по определению объединения $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$, но тогда по определению пересечения $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Если же $x \in B \cap C$, то по определению пересечения $x \in B$ и $x \in C$, а по определению объединения $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$, но тогда по определению пересечения $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Итак, в обоих случаях из того, что $x \in E_1$, следует, что $x \in E_2$. В силу произвольности выбора элемента x можем утверждать, что каждый элемент множества E_1 является элементом множества E_2. А это по определению включения означает, что $E_1 \subset E_2$.

2. Выберем теперь произвольный элемент $y \in E_2$, тогда $y \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. На основании определения пересечения $y \in A \cup B$ и $y \in A \cup C$.

По определению объединения $y \in A$ или $y \in B$ и $y \in A$ или $y \in C$.

Если $y \in A$, то по определению объединения $y \in A \cup (B \cap C)$.

Если же $y \notin A$, то $y \in B$ и $y \in C$, и тогда по определению пересечения $y \in B \cap C$, а на основании определения объединения $y \in A \cup (B \cap C)$.

Следовательно, если $y \in E_2$, то $y \in E_1$, то есть $E_2 \subset E_1$.

Так как $E_1 \subset E_2$ и $E_2 \subset E_1$, то $E_1 = E_2$ и справедливость равенства 6 доказана.

Приведем графическое доказательство свойства

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

с помощью диаграмм Эйлера–Венна (рис. 1.4).

На рис. 1.4а $B \cap C$ заштриховано горизонтально, а множество A — вертикально. Область, обозначенная хотя бы одной штриховкой, соответствует множеству $A \cup (B \cap C)$. На рисунке 1.4б $A \cup B$ заштриховано горизонтальной штриховкой, а множество $A \cup C$ — вертикальной. Область, заштрихованная двояко, соответствует множеству $(A \cup B) \cap (A \cup C)$. При сравнении указанных областей легко увидеть, что $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

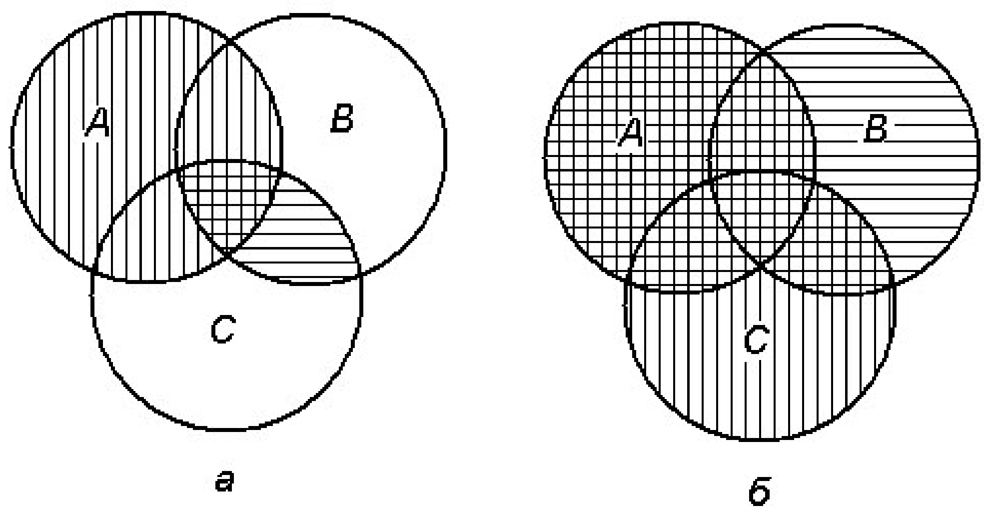


Рис. 1.4. Доказательство свойства 6 с помощью диаграмм Эйлера–Венна

1.4.4 Разность двух множеств. Дополнение

Пусть A — множество равнобедренных треугольников, B — множество треугольников, не имеющих прямого угла. Тогда множество равнобедренных прямоугольных треугольников состоит из тех и только тех элементов множества A, которые не принадлежат множеству B. Это множество называется *разностью* множеств A и B.

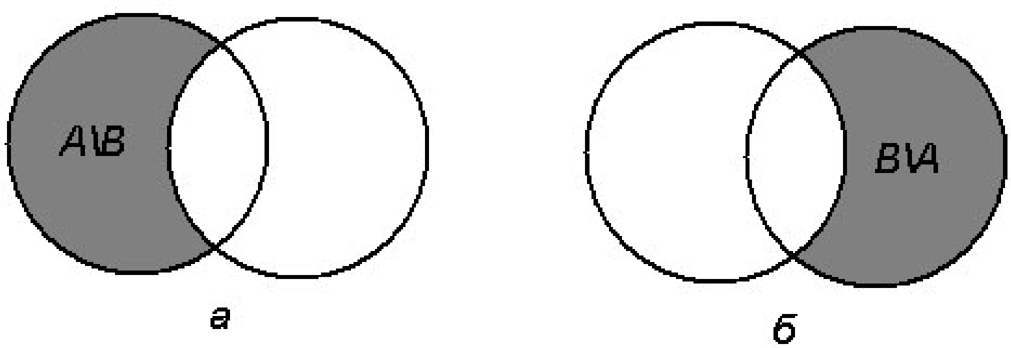


Рис. 1.5. Разность множеств

Определение 8. *Разностью множеств A и B называется множество, состоящее из тех и только тех элементов множе-*

ства A, которые не принадлежат множеству B.

Разность множеств A и B обозначают символом $\setminus$, $A \setminus B$: читается «A без B».

Определение разности можно записать в таком виде: $A \setminus B := \{x | x \in A$ и $x \notin B\}$.

Согласно определению разности $x \in A \setminus B$ тогда и только тогда, когда $x \in A$ и $x \notin B$. Соответственно, $x \notin A \setminus B$ тогда и только тогда, когда $x \notin A$ или $x \in B$. На диаграммах Эйлера–Венна (рис. 1.5) разности соответствует заштрихованная часть. Операция, при помощи которой находится разность множеств, называется *вычитанием.*

Если $B \subset A$, то разность $A \setminus B$ называется дополнением множества B до множества A.

Обозначают дополнение символом $\overline{B}_A$.

Если множество B является подмножеством универсального множества U, то дополнение B до U обозначается $\overline{B}$.

Итак, по определению $\overline{B} = U \setminus B$.

Из этого определения следует, что $x \in \overline{B}$ тогда и только тогда, когда $x \notin B$, и $x \notin \overline{B}$ тогда и только тогда, когда $x \in B$.

Замечания. В некоторых случаях удобно рассматривать симметричную разность двух множеств A и B, которая определяется как объединение разностей $A \setminus B$ и $B \setminus A$. Симметричную разность множеств A и B будем обозначать символом $\div$, $A \div B$ (или $A \triangle B$). Таким образом, по определению, $A \div B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Последовательность выполнения операций над множествами (операции даны по убыванию приоритетов): $\overline{A}$, $A \setminus B$, $A \cap B$, $A \cup B$, $A \div B$.

1.4.5 Свойства разности и дополнения

Прежде всего отметим, что разность не обладает свойствами коммутативности и ассоциативности, то есть $A \setminus B \neq B \setminus A$;

$A \setminus (B \setminus C) \neq (A \setminus B) \setminus C$. В этом легко убедиться, построив диаграммы Эйлера–Венна. Вместе с тем справедливы следующие свойства разности и дополнения:

1. $\overline{\varnothing} = U$.
2. $\overline{U} = \varnothing$.
3. $A \setminus \varnothing = A$.
4. $\overline{\overline{A}} = A$.
5. $\overline{A} \cap A = \varnothing$.
6. $\overline{A} \cup A = U$.
7. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
8. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
9. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.
10. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

Справедливость свойств 1–6 вытекает непосредственно из определений разности и дополнения. Приведем доказательство свойства 7.

1. Докажем, что $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. Пусть $x \in \overline{A \cup B}$. Тогда по определению дополнения $x \notin A \cup B$, откуда по определению объединения $x \notin \overline{A}$ и $x \notin \overline{B}$. Но тогда по определению дополнения $x \in \overline{A}$ и $x \in \overline{B}$. Следовательно, по определению пересечения $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$.

Итак, из того, что $x \in \overline{A \cup B}$, следует, что $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. В силу произвольности выбора x это означает, что $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

2. Докажем, что $\overline{A} \cap \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. Пусть $y \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Тогда по определению пересечения $y \in \overline{A}$ и $y \in \overline{B}$, откуда по определению дополнения $y \notin A$ и $y \notin B$. Но тогда по определению объединения $y \notin A \cup B$. Следовательно, по определению дополнения $y \in \overline{A \cup B}$.

Итак, из того, что $y \in \overline{A} \cap \overline{B}$, следует, что $y \in \overline{A \cup B}$, то есть $\overline{A} \cap \overline{B} \subset \subset \overline{A \cup B}$. Далее, исходя из определения равенства множеств, заключаем, что $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Легко доказывается это свойство на диаграммах Эйлера–Венна.

Примеры операций над множествами

1. Пусть $U = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{c, d, e, f\}$. Определить $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \div B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$.

Решение

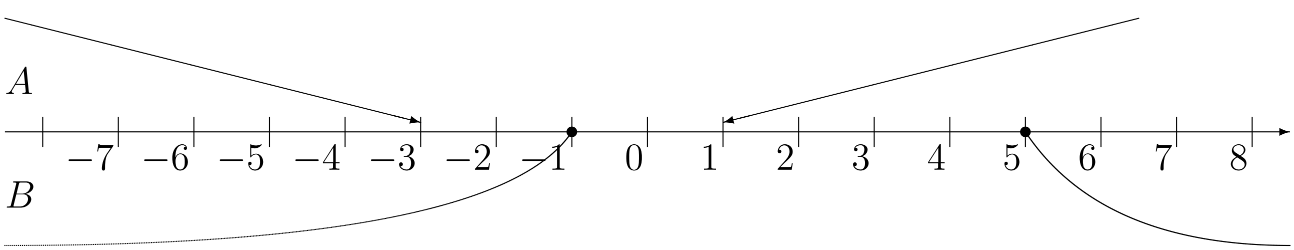
$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$; $A \cap B = \{c, d\}$; $A \setminus B = \{a, b\}$;
$B \setminus A = \{e, f\}$; $A \div B = \{a, b, e, f\}$; $\overline{A} = \{e, f, g\}$;
$\overline{B} = \{a, b, g\}$.

2. Найти множества: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, если $A = \{x | x \in R,\ x^2 + 2x - 3 > 0\}$, $B = \{x | x \in R, |x - 2| \geq 3\}$.

Решение

$$A = \{x | x \in R,\ x \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)\},$$

$$B = \{x | x \in R, x \in (-\infty; -1] \cup [5; +\infty)\}.$$



$$A \cup B = \{x | x \in R,\ x \in (-\infty; -1] \cup (1; +\infty)\};$$

$$A \cap B = \{x | x \in R,\ x \in (-\infty; -3) \cup [5; +\infty)\};$$

$$A \backslash B = \{x | x \in R,\ x \in (1; 5)\};\ B \backslash A = \{x | x \in R,\ x \in [-3; -1]\}.$$

1.4.6 Декартово произведение множеств

Пусть имеем число 46, записанное с помощью двух цифр 4 и 6. Цифры в числе следует записывать в определенном порядке. Если их поменять местами, то получится другое число 64. Говорят, что 4, 6 — упорядоченная пара цифр.

В общем случае под упорядоченной парой будем понимать два элемента, расположенные в определенном порядке. Упорядоченную пару с первым элементом a и вторым элементом b будем обозначать (a, b). Элементы a и b пары называют её компонентами. Две пары (a_1, b_1) и (a_2, b_2) считаются равными тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$. В общем случае, если $a \neq b$, то $(a, b) \neq (b, a)$, то есть две пары, отличающиеся только порядком расположения элементов, будут различны. Если же рассматривать двухэлементные множества $\{a, b\}$ и $\{b, a\}$, то они равны, то есть $\{a, b\} = \{b, a\}$.

Упорядоченные пары можно образовать и из элементов двух различных множеств. Пусть $A = \{t, p\}$; $B = \{a, o, e\}$. Составим всевозможные пары, первые элементы которых принадлежат множеству A, а вторые — множеству B.

Получим множество $\{(t, a), (t, o), (t, e), (p, a), (p, o), (p, e)\}$, которое называют декартовым (или прямым) произведением множеств A и B.

Определение 9. *Декартовым произведением двух непустых множеств A и B называется множество, состоящее из всех упорядоченных пар вида (a, b), где $a \in A$ и $b \in B$.*

Декартово произведение множеств A и B обозначают символом $\times$, $A \times B$. Приведенное определение можно записать короче: $A \times B = \{(a, b) | a \in A \text{ и } b \in B\}$.

Декартово произведение $A \times A$ называют декартовым квадратом множества A и обозначают A^2. Операция, с помощью которой находится декартово произведение множеств, называется декартовым умножением. Говоря о свойствах декартова умножения, прежде всего отметим, что оно не обладает свойствами коммутативности и ассоциативности.

1. Если $A \neq B$, то $A \times B \neq B \times A$.
2. Если ни одно из множеств A, B и C не является пустым, то $A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$.
3. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.
4. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.
5. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.
6. $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.
7. $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.
8. $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.

Справедливость утверждений 1–2 достаточно проверить на примере. Свойства 3–8 определяют дистрибутивность декартова умножения относительно объединения, пересечения и вычитания множеств.

Докажем справедливость равенства 3. Обозначим левую часть равенства через E_1, а правую — через E_2. Элементами множеств E_1 и E_2 являются упорядоченные пары.

1. Пусть (x, y) — любой элемент множества E_1, тогда $(x, y) \in$ $\in A \times (B \cup C)$. По определению декартова произведения $x \in A$ и $y \in B \cup C$, а по определению объединения $y \in B$ или $y \in C$. Если $x \in A$ и $y \in B$, то $(x, y) \in A \times B$, или, если $x \in A$ и $y \in C$, то $(x, y) \in A \times C$, по определению декартова произведения. Но тогда по определению объединения множеств $(x, y) \in$ $\in (A \times B) \cup (A \times C)$. Итак, любой элемент множества E_1 содержится в E_2, то есть $E_1 \subset E_2$.
2. Пусть теперь (x, y) — любой элемент множества E_2, тогда $(x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$. По определению объединения $(x, y) \in A \times B)$ или $(x, y) \in A \times C$. Отсюда по определению декартова произведения $x \in A$ и $y \in B$ или $x \in A$ и $y \in C$. Из этих утверждений вытекает, что $x \in A$ и $y \in B$ или $y \in C$, но тогда по определению объединения $x \in A$ и $y \in B \cup C$, а отсюда по определению декартова произведения $(x, y) \in A \times (B \cup C)$. То есть любой элемент множества E_1 содержится в E_2, а это означает, что $E_1 \subset E_2$.

На основании определения равенства множеств из пунктов 1 и 2 заключаем, что $E_1 = E_2$, и справедливость свойства 3 доказана. Доказательства остальных свойств проводятся аналогично.

Понятие упорядоченной пары естественным образом распространяется на наборы из n элементов. Под упорядоченной n-кой (читается «энка») будем понимать n элементов, расположенных в определенном порядке. Обозначают n-ку символом $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и называют кортежем длины n. Некоторые элементы кортежа, или даже все, могут оказаться равными. Два кортежа $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ называются равными, если они имеют одинаковую длину $n = m$ и равные компоненты на местах с одинаковыми номерами, то есть $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2, \ldots, a_n = b_n$.

Пользуясь понятием кортежа, определим декартово произведение n множеств.

Определение 10. *Декартовым произведением непустых множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называется множество всевозможных кортежей длины n, первая компонента которых принадлежит множеству A_1, вторая — множеству A_2, ..., n-я — множеству A_n.*

Декартово произведение множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ обозначают $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$.

Для наглядного представления декартова произведения двух числовых множеств используют прямоугольную систему координат. При этом элементы множества A считают абсциссами, а элементы множества B — ординатами точек на плоскости. Итак, если A и B — числовые множества, то элементами декартова произведения $A \times B$ будут упорядоченные пары чисел. Изобразив каждую такую пару чисел точкой на координатной плоскости, получим множество точек, наглядно представляющих декартово произведение множеств A и B.

Например, для множеств A и B, если $A = \{x | x \in R, -3 \leq x \leq 1\}, B = \{y | y \in Z, -2 \leq y \leq 3\}$, декартово произведение $A \times B$ состоит из всех точек плоскости, абсциссы которых удовлетворяют неравенству $-3 \leq x \leq 1$, а ординатами являются целые числа из отрезка $[-2; 3]$. Этим условиям удовлетворяют отрезки параллельных прямых.

В случае, если $A = \{x | x \in R, 1 \leq x \leq 4\}$, $B = \{y | y \in R, y \geq -1\}$, множество $A \times B$ состоит из всех точек плоскости, абсциссы которых удовлетворяют неравенству $1 \leq x \leq 4$, а ординаты неравенству $y \geq -1$. Полоса, не ограниченная в положительном направлении оси Oy.

1.4.7 Число элементов объединения, разности и декартова произведения двух конечных множеств

Пусть A и B — конечные множества. Если $A \cap B = \varnothing$, то вопрос о числе элементов объединения $A \cup B$ решается довольно просто.

Число элементов множества A условимся обозначать символом $mes(A)$ и называть численностью множества A. Численность множества B будем обозначать символом $mes(B)$. Если множества A и B не пересекаются, то

$$mes(A \cup B) = mes(A) + mes(B).$$

Таким образом, численность объединения конечных непересекающихся множеств равна сумме численностей этих множеств.

Пусть теперь $A \cap B \neq \varnothing$. В этом случае вопрос об определении численности объединения решается несколько сложнее. Поскольку множества A и B пересекаются, то в сумме $mes(A) + mes(B)$ число элементов пересечения $A \cap B$ содержится дважды: один раз в $mes(A)$, а другой — в $mes(B)$. Поэтому, чтобы найти численность объединения $mes(A \cup B)$, нужно из указанной суммы вычесть число элементов, учтённое дважды $mes(A \cap B)$. Итак, можем записать:

$$mes(A \cup B) = mes(A) + mes(B) - mes(A \cap B).$$

Справедливость легко проверить с помощью диаграмм Эйлера–Венна.

Далее определим численность разности множеств A и B. Если $A \cap B = \varnothing$, то $A \setminus B = A$, и поэтому $mes(A \setminus B) = mes(A)$.

Если же $B \subset A$, то $A \cap B = B$, и последнюю формулу можно записать в виде: $mes(A \setminus B) = mes(A) - mes(B)$.

Выразим теперь численность декартова произведения двух множеств через численность самих множеств. Пусть $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $(b_1, b_2, \ldots, b_k)$, тогда $m(A) = n$, $m(B) = k$. Для определения численности декартова произведения $A \times B$ расположим его элементы в виде следующей таблицы:

(a_1, b_1)	(a_1, b_2)	$\ldots$	(a_1, b_k)
(a_2, b_1)	(a_2, b_2)	$\ldots$	(a_2, b_k)
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
(a_n, b_1)	(a_n, b_2)	$\ldots$	(a_n, b_k)

Таблица состоит из n строк, в каждой из которых k элементов. Значит, общее число пар равно $n \cdot k$. Следовательно, $mes(A \times B) = mes(A) \cdot mes(B)$.

Можно показать, что последнее равенство распространяется на любое число n конечных множеств, то есть

$$mes(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) = mes(A_1) \cdot mes(A_2) \cdot \ldots \cdot mes(A_n)$$

.

1.5 Разбиение множества на классы. Классификация

В процессе изучения предметов и явлений окружающего мира мы постоянно сталкиваемся с классификацией. Классификация широко используется в биологии, химии, математике, языке и многих других науках. Она облегчает процесс усвоения знаний. Классификация в любой области человеческой деятельности связана с разбиением множества на подмножества (классы). Полученные подмножества должны обладать некоторыми свойствами:

1) они не должны быть пустыми;

2) не должны содержать общих элементов;

3) объединение всех подмножеств должно равняться самому множеству.

Определение 11. *Классификацией или разбиением множества на классы называется представление этого множества в виде объединения непустых попарно непересекающихся своих подмножеств.*

Таким образом, разбиение множества M на классы $K_1, K_2, \ldots, K_n$ определяется следующими тремя условиями:

1) $K_i \neq \varnothing$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$;
2) $K_i \cap K_j = \varnothing$, $(i, j = 1, 2, \ldots, n,\ i \neq j)$;
3) $\bigcup\limits_{i=1}^{n} K_i = M$.

Рассмотрим классификацию с помощью одного, двух и трех признаков.

Пусть U — множество всех обыкновенных дробей. С помощью свойства a — «быть правильной дробью» выделим подмножество A — правильных дробей и подмножество $\overline{A}$ — неправильных дробей. Эти два подмножества универсального множества U не пусты и не пересекаются, то есть $A \cap \overline{A} = \varnothing$. Объединение этих подмножеств составляет множество U, то есть $A \cup \overline{A} = U$. Так, с помощью одного свойства множество разбивается на два класса.

Пусть теперь U — множество всех грибов, свойство — «быть съедобным», свойство — «быть трубчатым». С помощью указанных свойств можно выделить следующие подмножества:

- A — множество съедобных грибов;
- $\overline{A}$ — множество несъедобных грибов;
- B — множество трубчатых грибов;
- $\overline{B}$ — множество нетрубчатых грибов.

Множество U в этом случае оказывается разбитым на следующие четыре класса (подмножества):

I. $A \cap B$ — съедобные трубчатые грибы;

II. $A \cap \overline{B}$ — съедобные нетрубчатые грибы;

III. $\overline{A} \cap B$ — несъедобные трубчатые грибы;

IV. $\overline{A} \cap \overline{B}$ — несъедобные нетрубчатые грибы.

На диаграмме Эйлера–Венна несложно показать, что указанные четыре класса не пересекаются, а их объединение образует все множество U. Это легко доказать аналитически. Например, покажем, что классы I и II не пересекаются. Действительно, используя свойства пересечения множеств:

$$(A \cap B) \cap (A \cap \overline{B}) = (A \cap A) \cap (B \cap \overline{B}) = A \cap \varnothing = \varnothing.$$

Аналогично доказывается справедливость остальных утверждений.

Если U — множество учащихся школы, свойство α — «быть мальчиком», свойство β — «быть спортсменом», свойство γ — «быть отличником», то на множестве U можно выделить следующие подмножества:

- A — множество мальчиков;
- $\overline{A}$ — множество девочек;
- B — множество спортсменов;
- $\overline{B}$ — множество неспортсменов;
- C — множество отличников;
- $\overline{C}$ — множество неотличников.

В рассматриваемом случае множество U оказывается разбитым на следующие восемь классов:

I. $A \cap B \cap C$ — множество мальчиков, являющихся спортсменами и отличниками.

II. $A \cap B \cap \overline{C}$ — множество мальчиков-спортсменов, не являющихся отличниками.

III. $A \cap \overline{B} \cap C$ — множество мальчиков-отличников, не являющихся спортсменами.

IV. $\overline{A} \cap B \cap C$ — множество девочек, являющихся спортсменками и отличницами.

V. $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ — множество мальчиков, не являющихся ни спортсменами, ни отличниками.

VI. $\overline{A} \cap \overline{B} \cap C$ — множество девочек-отличниц, не являющихся спортсменками.

VII. $\overline{A} \cap B \cap \overline{C}$ — множество девочек-спортсменок, не являющихся отличницами.

VIII. $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ — множество девочек, не являющихся ни спортсменками, ни отличницами.

На диаграмме Эйлера–Венна (рис. 1.6) видно, что указанные классы не пересекаются и их объединение составляет все множество U.

При рассмотрении конкретных примеров может оказаться, что некоторые из классов пусты. Тогда получим разбиение множества на меньшее число классов. Сколько же получится классов при разбиении множества с помощью одного, двух, трех (и т. д.) свойств? Мы видели, что в рассмотренных примерах таких классов получалось 2, 4, 8 соответственно.

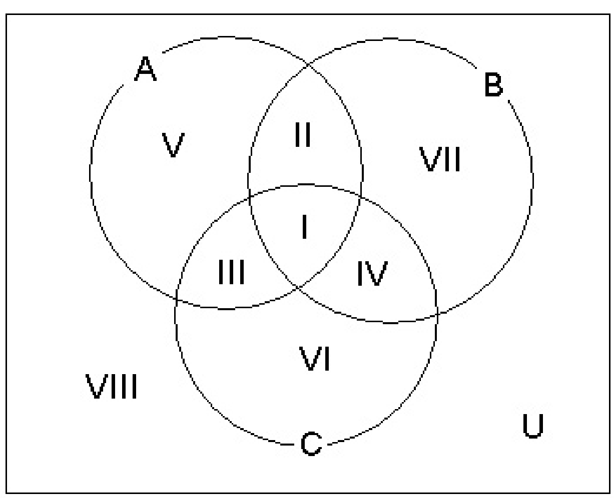


Рис. 1.6. Разбиение множеств на классы

Будем ставить в соответствие каждому классу последовательность из 0 и 1: 0 — если соответствующее свойство не выполняется, 1 — если выполняется. Такое соответствие является биективным, а значит, число всех подмножеств равно числу возможных последовательностей, составленных из нулей и единиц. Но каждая такая последовательность является размещением с повторениями из двух элементов по n. Следовательно, максимальное число классов равно $\overline{A}_2^n = 2^n$.

1.6 Вопросы и упражнения

Вопросы

1. Множества, способ их задания.
2. Отношение между множествами.
3. Подмножество, несобственное и собственное подмножества.
4. Равные множества. Универсальное множество.
5. Диаграммы Эйлера–Венна.
6. Числовые множества.
7. Операции над множествами: объединение множеств, пересечение множеств; свойства объединения и пересечения множеств.
8. Разность двух множеств. Дополнение. Свойства разности и дополнения.
9. Разбиение множества на классы. Классификация.
10. Что называется кортежем и какие кортежи называются равными?
11. Декартово произведение множеств; декартова степень некоторого множества A.

Упражнения

Запишите множества, перечислив их элементы.

1. Множество всех положительных простых чисел, меньших 40.
2. Множество всех целых положительных степеней числа 3, меньших 50.
3. Множество всех целых положительных чисел, кратных 5, которые меньше 47.
4. Множество букв кириллицы, имеющих одинаковое написание с буквами латиницы.

Запишите множества, используя разные формы их задания.

5. Целые числа, большие -3 и меньшие 5.
6. Натуральные числа, меньшие 7.
7. Натуральные делители числа 180.
8. Корни уравнения $3x^2 + x - 4 = 0$.

Перечислите элементы заданных множеств.

9. $M = \{x | x \in R,\ x^3 + 5x^2 + 6x = 0\}$.
10. $M = \{x | x \in R,\ x^2 - 5|x| + 6 = 0\}$.
11. $M = \{x | x \in Z,\ 0 \leq x^2 \leq 16\}$.
12. $M = \{x | x \in N,\ 0 \leq x^2 \leq 16\}$.

Изобразите на координатной прямой множества.

13. $A = \{x \in R | -3 < x < 8\}$.
14. $B = \{x \in R | \, x < 3,7\}$.
15. $C = \{x \in R | \, x \geq 5.2\}$.
16. $D = \{x \in R | \, x^2 - 4x - 21 < 0\}$.

17. $E = \{x \in R|\, 4x^2 - 12x + 9 < 0\}$.

18. $F = \{x \in R|\, \dfrac{x+3}{x-2} > 0\}$.

19. $G = \{x \in R|\, \left|\dfrac{x}{2} - 6\right| \leq 5\}$.

20. Принадлежат ли числа $2/5$; $17/20$; $-1/7$; $5/6$ множеству $A = \{x \in Q|\, x = \dfrac{n^2+1}{n^2+4},\, n \in N\}$?

21. Напишите 5 чисел, принадлежащих множеству $A = \{x \in Q|\, x = \dfrac{n^3+7}{n^3+15},\, n \in N\}$.

Укажите, по какому закону (порождающей процедуре) составлены следующие бесконечные множества.

22. $\dfrac{3}{4}; \dfrac{4}{9}; \dfrac{5}{16}; \dfrac{6}{25}; \ldots$

23. $\dfrac{2}{5}; \dfrac{4}{8}; \dfrac{6}{11}; \dfrac{8}{14}; \ldots$

24. $\dfrac{3}{2}; \dfrac{5}{4}; \dfrac{7}{8}; \dfrac{9}{16}; \ldots$

25. $\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{6}; \dfrac{1}{12}; \dfrac{1}{20}; \dfrac{1}{30}; \dfrac{1}{42}; \ldots$

26. $2; 12; 36; 80; 150; \ldots$

Укажите, какие множества имеют конечное число элементов, а какие бесконечное.

27. $A = \{$числа, кратные $8\}$.

28. $B = \{$окружности, проходящие через две заданные точки$\}$.

29. $C = \{(x, y)|\, x^2 + y^2 = 1\}$.

30. $D = \{(x, y)|\, 2x - y + 1 = 0\}$.

31. $E = \{x|\, 2x - y + 1 = 0,\, y$ — натуральное число$\}$.

32. $F = \{x \in R| \dfrac{x+3}{x-2} > 0\}$.

33. $G = \{x \in R| \left|\dfrac{x}{2} - 6\right| \leq 5\}$.

34. $H = \{(x, y)\, x > 2\}$.

35. $K = \{x : |x| = -x\}$.

36. $L =$ {прямые, проходящие через две точки $(1; 0)$, $(1; 1)$}.

37. $M =$ {прямоугольники, периметр которых равен 20}.

38. $N = \{x | x \in R, \operatorname{tg} x = 1\}$.

39. $P = \{x | x \in R, \cos^2 x - \sin 2x = 0\}$.

Определите отношения между множествами и изобразите их на диаграммах Эйлера–Венна.

40. Прямоугольных треугольников и равнобедренных треугольников.

41. Ромбов и квадратов.

42. Прямоугольников и четырехугольников с равными диагоналями.

43. Параллелограммов и ромбов.

44. Натуральных делителей чисел 42 и 36.

45. Простых и однозначных чисел.

46. Докажите, что если A есть множество корней уравнения $x^3 - 18x^2 + 99x - 162 = 0$ и $B = \{3, 6, 9\}$, то $A = B$.

47. Известно, что $A \subset B$. В каком отношении находятся множества A и B? Приведите графическую иллюстрацию с помощью диаграмм Эйлера–Венна.

Найдите объединения заданных множеств.

48. $A = \{x|x = 2n - 1,\ n \in N\}$, $B = \{x|x = 2n,\ n \in N\}$.

49. $A = \{x|x$ — простое число$\}$, $B = \{x|x = 2n - 1,\ n \in N\}$.

50. $A = \{x|x = 2n,\ n \in N\}$, $B = \{x|x = 2^n,\ n \in N\}$.

51. $A = \{x|x$ — простое число, больше либо равное 3 $\}$,
$B = \{x|x = 2n - 1,\ n \in N\}$.

52. $A = \{$ромбы$\}$, $B = \{$параллелограммы$\}$.

53. $A = \{x|x = 4n + 2,\ n \in N\}$, $B = \{x|x = 4n,\ n \in N\}$.

54. $A = Z$, $B = N$.

55. $A = \{x|x \in R, -1 \le x \le 0\}$, $B = \{x|x \in R, 0 \le x \le 1\}$.

56. $A = \{x|x \in R, -1 \le x < 0\}$, $B = \{x|x \in R, 0 < x \le 1\}$.

57. $A = Q$, $B = \{$множество конечных десятичных дробей$\}$.

Найдите пересечение заданных множеств.

58. $A = \{x|x$ — простое число, $x < 20\}$, $B = \{x|x = 2n - 1,$ $n \in N\}$.

59. $A = \{$ромбы$\}$, $B = \{$прямоугольники$\}$.

60. $A = Z$, $B = N$.

61. $A = \{x|x \in R, x \in [0, 1]\}$, $B = \{0; 0{,}5; 5; 7{,}5\}$.

Найдите и изобразите на числовой прямой множества: $A \cup B$; $A \cap B$; $A \setminus B$.

62. $A = \{x|x \in R, x^2 - 10x + 21 \le 0\}$,
$B = \{x|x \in R, 4 - 5x \ge 2x - 31\}$.

63. $A = \{x|x \in R, 2x(x + 4) \le 3(x + 4)\}$,
$B = \{x|x \in R, 2x - 4 \le 11x + 5\}$.

64. $A = \{x | x \in R, |x-3| \le 6\}$, $B = \{x | x \in R, |x| > 2\}$.

Докажите и подтвердите иллюстрациями на диаграммах Эйлера–Венна, что для любых множеств A, B, C имеют место следующие равенства.

65. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

66. $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C) = (A \cap B) \setminus C$.

67. $(A \setminus B) \setminus C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$.

68. $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$.

69. $(\overline{A} \cup B) \cap A = A \cup B$.

70. $A \cap (B \setminus A) = \varnothing$.

71. $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

С помощью диаграмм Эйлера–Венна проверьте, верны ли следующие равенства.

72. $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$.

73. $\overline{(A \cap B \cap C)} = (A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C)$.

74. $(A \setminus B) \cup (B \setminus C) = (A \setminus C) \cup (C \setminus B)$.

75. $(A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) = A \cup (B \cup C)$.

76. Даны множества $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x, y, z\}$, $C = \{\alpha, \beta\}$. Запишите декартовы произведения множеств: $A \times B$; $B \times A$; $B \times C$; $C \times B$; $A \times C$; $C \times A$.

77. Постройте множество A^2, если:

   a) $A = \{0, 1\}$;

   b) $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$;

   c) $A = \{\text{день, ночь}\}$;

d) $A = \{x, y, z\}$;

e) $A = \{1, 3, 5, 7\}$;

f) $A = \{a, b, c, d\}$.

Изобразите на координатной плоскости элементы декартова произведения $A \times B$.

78. $A = \{x | x \in N, 1 \leq x < 4\}$, $B = \{y | y \in R, 3 \leq y \leq 6\}$.

79. $A = \{x | x \in R, -2 \leq x \leq 3\}$, $B = \{y | y \in R, y \geq -4\}$.

80. $A = \{x | x \in R, x < 5\}$, $B = \{y | y \in Z, -2 \leq y \leq 3\}$.

81. $A = \{x | x \in N, x < 7\}$, $B = \{y | y \in Z, -3 \leq y \leq 5\}$.

82. Докажите, что $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$.

83. Докажите, что $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$.

84. На множестве всех углов задано свойство «быть острым углом». Определяет ли оно классификацию на указанном множестве?

85. Проверьте, выполнены ли условия классификации, если:

    a) множество существительных в русском языке разбили на существительные мужского, женского и среднего рода;

    b) множество книг в библиотеке разбили на учебную, научную, художественную, техническую и математическую литературу;

    c) множество натуральных чисел N разбили на простые и составные числа;

    d) множество студентов данной группы разбили на отличников, успевающих и неуспевающих.

86. С помощью свойств «иметь прямой угол» и «быть равнобедренным» разбейте множество треугольников на классы. Назовите полученные классы. Постройте диаграмму Эйлера–Венна.

87. Из 20 человек двое изучали только английский язык, трое — только немецкий, шестеро — только французский. Никто не изучал трех языков. Один изучал немецкий и английский, трое — французский и английский. Сколько человек изучали французский и немецкий языки?
88. Из 220 студентов 163 играют в баскетбол, 175 — в футбол, 24 не играют в эти игры. Сколько человек одновременно играют в баскетбол и футбол?
89. Из 64 студентов на вопрос, занимаются ли они в свободное время спортом, утвердительно ответили 40 человек; на вопрос, любят ли они слушать музыку, 30 человек ответили утвердительно, причем 21 студент занимается спортом и любит слушать музыку. Сколько человек не увлекаются ни спортом, ни музыкой?
90. В классе 30 учеников. Все, кроме двух, имеют оценки «5», «4» и «3». Число учащихся, имеющих оценки «5», — двенадцать, «4» — четырнадцать, «3» — шестнадцать. Трое учатся лишь на «5» и «3», трое — лишь на «5» и «4», четверо — лишь на «4» и «3». Сколько человек имеют одновременно оценки «5», «4» и «3»?
91. Среди 35 туристов только английским языком владеют 11 человек, английским и французским — 5 человек, 9 человек не владеют ни английским, ни французским. Сколько человек владеют только французским языком?
92. Анкетирование, проведенное среди 57 студентов, показало, что в шахматы умеют играть 35 человек, в шашки — 40 человек, в обе игры — 21 человек. Сколько студентов не умеют играть ни в шахматы, ни в шашки?
93. Из 100 студентов язык программирования C++ изучают 44 человека, PASCAL — 40 человек, BASIC — 30, C++ и PASCAL — 13, C++ и BASIC — 12, PASCAL и BASIC —

11. Все три языка изучают 5 студентов. Сколько студентов не изучают ни одного языка? Сколько студентов изучают только один язык?

94. В 92-процессорной ЭВМ 19 микропроцессоров обрабатывают текстовую информацию, 17 — графическую, 11 — символьную, 12 микропроцессоров одновременно обрабатывают графическую и текстовую, 7 — текстовую и символьную, 5 — графическую и символьную, а часть микропроцессоров универсальные, т. е. одновременно обрабатывают графическую, текстовую и символьную информацию. Сколько микропроцессоров являются универсальными, если не задействованы 67 микропроцессоров?

95. На втором курсе во время зимней сессии сдавали экзамены 264 студента. Из них 19 не сдали математику, 17 — физику, 11 — программирование, 12 — математику и физику, 7 — математику и программирование, 5 — физику и программирование; 237 студентов сдали математику, физику, программирование. Сколько студентов не сдали все три экзамена?

96. Из 300 жителей деревни Гадюкино 218 когда-либо выезжали в райцентр, 208 — в областной центр, 214 — за пределы области, 153 — в областной центр или в райцентр, 170 — в райцентр или за пределы области, 150 — в областной центр или за пределы области. Сколько жителей деревни не выезжало никогда за её пределы, если бывали и в райцентре, и в областном центре, и за пределами области 120 человек?

97. Решите задачу Льюиса Кэрролла, автора книг «Алиса в стране чудес» и «Алиса в Зазеркалье»: «В ожесточенном бою из 100 пиратов потеряли по одному глазу — 70, по одному уху — 75, по одной руке — 80, по одной ноге — 85 пиратов. Каково минимальное число пиратов, потерявших одновременно глаз, ухо, ногу и руку?»

Глава 2

Элементы комбинаторики

2.1 Соединения без повторений

Понятие о комбинаторной задаче. Комбинаторика (или теория соединений) — это раздел математики, в котором изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, удовлетворяющих тем или иным условиям, можно составить из имеющихся объектов [6–8, 10–12, 14–16, 19]. Представителям самых различных профессий приходится решать задачи, связанные с рассмотрением тех или иных комбинаций из элементов конечных множеств: диспетчеру надо составлять расписание, водителю — выбирать кратчайший путь, агроному — распределять посевы и так далее.

Обычно комбинаторные задачи связаны с операциями над конечными множествами. Рассмотрим некоторые из этих операций и задач.

1. Упорядочение конечного множества. Эта операция приводит к понятию *перестановки* из n элементов и к задаче определения числа всех возможных перестановок из n элементов.

2. Выбор подмножеств некоторого конечного множества. Приводит к понятию *сочетания* и к задаче определения числа всех возможных сочетаний из n элементов по k элементов.

3. Выбор упорядоченных подмножеств некоторого конечного множества. Приводит к понятию *размещения* и к задаче

определения числа всех возможных размещений из n элементов по k элементов.

Как раздел математики комбинаторика возникла в XVI веке. Одним из первых решением комбинаторных задач занялся итальянский математик Н. Тарталья (1500 – 1557). Дальнейшее развитие комбинаторики связано с трудами Б. Паскаля (1623 – 1662) и П. Ферма (1601 – 1665) по теории азартных игр. Позднее крупный вклад в развитие комбинаторных методов внесли Г. Лейбниц (1646 – 1716), Я. Бернулли (1654 – 1705) и Л. Эйлер (1707 – 1783). Возрождение интереса к комбинаторике относится к 50-м годам XX века. Это связано с развитием кибернетики и дискретной математики. Возможность использовать ЭВМ активизировала интерес к классическим комбинаторным задачам.

Правила суммы и произведения. Решение большинства задач в комбинаторике основано на применении двух основных правил — правила суммы и правила произведения.

Рассмотрим следующие задачи.

Задача 1. В отделе «Игрушки» имеются 4 вида кукол и 3 вида посудных наборов. Сколькими способами можно выбрать одну игрушку для девочки?

Задача 2. В вазе для фруктов лежат 8 слив и 6 абрикосов. Сколькими способами можно выбрать один плод?

Эти задачи можно перевести на язык теории множеств и сформулировать в общем виде: даны два конечных множества $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ и $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$, не имеющих общих элементов. Сколькими способами можно выбрать один объект, принадлежащий либо A, либо B?

Так как $A \bigcap B = \varnothing$, то $\{x | x \in A \bigvee x \in B\} = A \bigcup B$, а тогда $mes(A \bigcup B) = mes(A) + mes(B) = n + m$. Это утверждение в комбинаторике называют правилом суммы.

Правило суммы. Если элемент a можно выбрать n способами, а элемент b — m способами, причем ни один из способов выбора элемента a не совпадает со способом выбора элемента b, то выбор «либо a , либо b» («или a , или b») можно осуществить $n+m$ способами. Правило суммы легко распространяется на тот случай, когда число попарно непересекающихся множеств более двух. Используя правило суммы, легко решить рассмотренные выше задачи.

1. Поскольку имеется 4 вида кукол, то существует 4 способа выбрать одну из них. Аналогично, существует 3 способа выбрать один посудный набор. По правилу суммы выбрать «либо куклу, либо набор посуды» можно 7 способами $(4+3=7)$.
2. По правилу суммы существует $8+6=14$ способов выбрать один плод $(4+3=7)$.

Далее остановимся на следующих задачах.

Задача 3. В меню столовой имеются 4 вида первых блюд и 6 видов вторых. Сколькими способами можно выбрать обед, состоящий из двух блюд: одного первого и одного второго?

Задача 4. Сколькими способами можно составить команду из двух человек — одного юноши и одной девушки — для участия в соревнованиях по шахматам, если в группе 5 шахматистов и 3 шахматистки?

Решение этих задач сводится к подсчету числа упорядоченных пар, которыми можно выбрать первую и вторую компоненту.

Пусть имеем множества $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ и $B=\{b_1,b_2,\ldots,b_m\}$. Множество всех упорядоченных пар, составленных из элементов A и B, образует декартово произведение этих множеств. Известно, что $mes(A\times B)=mes(A)\cdot mes(B)=n\cdot m$. В комбинаторике это утверждение называют правилом произведения.

Правило произведения. Если элемент $a\in A$ можно выбрать n способами и если после каждого такого выбора элемент $b\in B$ можно выбрать m способами, то выбор упорядоченной пары (a,b) , то есть выбор «и a , и b» можно осуществить $n\cdot m$ способами. Правило произведения легко распространяется на случай выбора кортежа любой конечной длины. Используя правило произведения, решим задачи 3 и 4.

3. Поскольку существует 4 способа выбрать первое блюдо и 6 способов выбрать второе блюдо, то по правилу произведения выбор «первого и второго» блюд можно осуществить 24 способами ($4 \cdot 6 = 24$).

4. Аналогично, существует 15 способов составить команду для участия в соревнованиях по шахматам.

Рассмотренные комбинаторные правила сложения и умножения в дальнейшем часто будем использовать при решении задач и выводе специальных формул.

2.1.1 Перестановки без повторений

Пусть имеем множество M, состоящее из n различных элементов любой природы. Упорядочим это множество, пронумеровав некоторым образом его элементы. Получим кортеж длины n с попарно различными элементами, который называют перестановкой из n элементов.

Определение 12. *Всякое упорядоченное n-элементное множество называется перестановкой из n элементов.*

Одно и то же множество можно упорядочить различными способами. Например, множество студентов группы упорядочить по возрасту, росту, алфавиту, успеваемости и так далее. Возникает вопрос: сколькими способами можно упорядочить множество M, содержащее n элементов? Ответ сводится к решению комбинаторной задачи: определить число всех возможных перестановок из n элементов. Обозначают число всех перестановок из n элементов специальным символом P_n. Если множество $\{a, b\}$ состоит из двух элементов, то очевидно, что упорядочить его можно двумя способами: $\{a, b\}$ и $\{b, a\}$, то есть $P_2 = 2$. Если же множество $\{a, b, c\}$ состоит из трех элементов, то упорядочить его можно шестью способами. Действительно, существует 3 способа выбрать элемент на первое место, после этого выбора существует 2 способа выбрать элемент на второе место и один способ — на третье место. Всего по правилу произведения существует $3 \cdot 2 \cdot 1$ способов упорядочить множество $\{a, b, c\}$, то есть $P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Выписывая всевозможные перестановки из элементов этого множества, легко убедиться в справедливости проведенных рассуждений.

В общем случае справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Число различных перестановок из n элементов равно произведению последовательных натуральных чисел от 1 до n включительно, т. е.*

$$P_n = n! \tag{2.1}$$

Замечание. $n!$ — n-факториал — функция неотрицательного целого аргумента: $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$, $0! = 1$.

Задача 5. Сколько различных пятизначных чисел можно записать с помощью цифр 0, 1, 2, 3, 4, если ни одна цифра в записи числа не повторяется дважды?

Решение. Цифру, стоящую в старшем разряде, можно выбрать 4 способами, после того как выбор сделан, оставшиеся 4 цифры по формуле (2.1) можно упорядочить $P_4 = 4!$ способами. В результате по правилу произведения имеем: $4 \cdot P_4 = 4 \cdot 4! = 4 \cdot 24 = 96$.

2.1.2 Размещения без повторений

Рассмотрим комбинаторную задачу, связанную с выбором упорядоченных подмножеств некоторого конечного множества. Итак, имеется множество, состоящее из n различных элементов. Сколько можно составить упорядоченных подмножеств, содержащих k его элементов?

Определение 13. *Всякое упорядоченное k-элементное подмножество n-элементного множества $(k \leq n)$ называется размещением из n элементов по k.*

Как следует из определения, два размещения считаются различными, если они отличаются друг от друга хотя бы одним элементом или состоят из одних и тех же элементов, но расположенных в разном порядке. Число различных размещений из n элементов по k элементов обозначают символом A_n^k. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Число различных размещений из n элементов по k равно произведению k последовательных натуральных чисел, наибольшим из которых является n, то есть*

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} \qquad (2.2)$$

При доказательстве теоремы используется правило произведения.

Задача 6. Сколькими способами можно распределить 5 путевок в различные дома отдыха, если отдохнуть желают 12 человек?

Решение. Поскольку из 12 человек нужно выбрать 5, а затем распределить между ними различные путевки, здесь важен порядок. В результате имеем размещение из 12 по 5, искомое число способов определяется по формуле (2.2):

$$A_{12}^5 = \frac{12!}{(12-5)!} = \frac{12!}{7!} = 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 = 95040.$$

2.1.3 Сочетания без повторений

При составлении k-элементных подмножеств n-элементного множества нас не всегда интересует порядок, в котором располагаются элементы. Например, если имеется 10 сортов ткани и нужно выбрать 4 сорта, то порядок, в котором следует выбирать сорта, значения не имеет. В таких задачах речь идет о подмножествах, не являющихся упорядоченными.

Определение 14. *Всякое k-элементное подмножество n-элементного множества ($k \leq n$) называется сочетанием из n элементов по k.*

Как следует из определения, два сочетания считаются различными, если они отличаются друг от друга хотя бы одним элементом. Порядок элементов в сочетании значения не имеет. Число различных сочетаний из n элементов по k обозначается символом C_n^k.

Теорема 3. *Число сочетаний из n элементов по k элементов определяется по формуле*

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \tag{2.3}$$

Доказательство. Формула для числа сочетаний легко выводится из формул для числа размещений и числа перестановок. Действительно, составив сначала все сочетания из n элементов по k, а затем переставив входящие в каждое сочетание элементы всеми возможными способами, получим все размещения из n элементов по k элементов. Но из каждого такого сочетания можно составить $k!$ перестановок, а число этих сочетаний равно C_n^k . Таким образом, по правилу произведения, справедлива следующая формула: $k! \cdot C_n^k = A_n^k$. Из этой формулы следует справедливость (2.3). Тем самым теорема доказана.

Задача 7. Из группы студентов, насчитывающей 25 человек, надо составить команду из 4 человек для участия в забеге на 1000 м. Сколькими способами это можно сделать? Сколькими способами можно составить команду из 4 человек для участия в эстафете $100 + 200 + 300 + 400$?

Решение. Выбор участников бега на 1000 м можно осуществить $C_{25}^4 = \dfrac{25!}{4! \cdot (25-4)!} = 12650$ способами, так как порядок участников в этом случае не имеет значения. Выбор участников эстафеты можно осуществить $A_{25}^4 = \dfrac{25!}{(25-4)!} = 303600$ способами, так как в этом случае участников команды расставляют в определенном порядке.

Задача 8. В лифт шестиэтажного дома на 1 этаже вошло 4 человека, они могут выходить на любом из этажей, начиная со второго. Сколькими способами они могут из него выйти в случае, если трое выйдут на одном этаже, а оставшийся — на другом?

Решение. Из четырёх человек выбрать троих, которые выйдут вместе, можно C_4^3 (порядок не учитывается, повторений нет) выбрать этаж, на котором они выйдут, — 5 способов, выбрать этаж, на котором выйдет оставшийся, — 4 способа.

Т. к. выбор: и выбор троих, и выбор этажа для них, и выбор этажа для оставшегося $\Rightarrow$ правило произведения.

Количество комбинаций: $C_4^3 \cdot 5 \cdot 4 = \dfrac{4!}{3!(4-3)!} \cdot 5 \cdot 4 = 80.$

Ответ: 80.

Задача 9. Решите уравнение $C_n^{n-2} = 21$ $(n \in N)$.

Решение.

$$\frac{n!}{(n-2)!(n-(n-2))!} = 21; \frac{(n-1)n}{2} = 21, \ n^2 - n - 42 = 0.$$

$$n_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 42}}{2} = \frac{1 \pm 13}{2}, \ n_1 = -6, \notin N, \ n_2 = 7.$$

Ответ: $n = 7$.

Простейшие свойства числа сочетаний

1. $C_n^k = C_n^{n-k}$.

2. $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_n^k$.

3. $C_n^0 = C_n^n = 1$.

4. $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

Свойства 2, 3 позволяют вычислять значения C_n^k, зная C_{n-1}^k и C_{n-1}^{k-1}. Пользуясь этим свойством, можно последовательно вычислить C_n^k сначала при $n = 0$, затем при $n = 1$, при $n = 2$ и так далее. Вычисления удобно располагать в виде следующей треугольной таблицы (арифметический треугольник, или треугольник Паскаля):

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & C_0^0 & & & & & \\
 & & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & & \\
 & & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & & \\
 & & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & & \\
 & C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4 & \\
C_5^0 & & C_5^1 & & C_5^2 & & C_5^3 & & C_5^4 & & C_5^5 \\
 & & & & & \ldots & & & & &
\end{array}
$$

или

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \ldots & & & & &
\end{array}
$$

N-я строка треугольника Паскаля — коэффициенты бинома Ньютона:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^n b^n.$$

2.2 Соединения с повторениями

2.2.1 Перестановки с повторениями

Выше мы рассмотрели перестановки, размещения и сочетания, составленные из попарно различных элементов. В практике решения задач часто встречаются перестановки, размещения и сочетания, в которых элементы повторяются. Если среди переставляемых элементов есть одинаковые, то перестановок получается меньше, так как некоторые совпадают друг с другом. Например, переставляя буквы в слове ОНА, мы получим 6 различных перестановок: $\left|\begin{array}{c|c|c} \text{ОНА} & \text{НОА} & \text{ОАН} \\ \text{АНО} & \text{НАО} & \text{АОН} \end{array}\right|$. Если вместо слова ОНА взять слово ОНО и во всех выписанных перестановках заменить букву А буквой О, то некоторые перестановки окажутся одинаковыми. Так, из двух слов 1-го столбца получим одно слово ОНО, из двух слов 2-го столбца — НОО, а из двух слов 3-го столбца — ООН. Итак, число различных перестановок из букв слова ОНО равно 3 ($6 : 2 = 3$). В общем виде задача формулируется так. Имеются элементы k различных типов: $a, b, \ldots, l$. Определить число всех возможных перестановок из этих элементов, если элемент a повторяется n_1 раз, элемент b — n_2 раз (и так далее), элемент l — n_k раз.

Определение 15. *Перестановкой с повторениями из элементов $a, b, \ldots, l$, в которой эти элементы повторяются соответственно $n_1, n_2, \ldots, n_k$ раз, называется кортеж длины $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$, среди компонент которого элемент a встречается n_1 раз, элемент b — n_2 раз(и так далее), элемент l — n_k раз.*

Обозначачим $P(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ число перестановок с повторениями.

Теорема 4. *Число различных перестановок с повторениями из элементов $a, b, \ldots, l$, в которой эти элементы повторяются соответственно $n_1, n_2, \ldots, n_k$ раз, определяется по формуле*

$$P(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{(n_1 + n_2 + \ldots + n_k)!}{n_1! n_2! \ldots n_k!} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}. \qquad (2.4)$$

Доказательство. Если пронумеровать все элементы a: $a_1, a_2, \ldots, a_{n_1}$; все элементы b: $b_1, b_2, \ldots, b_{n_2}$ (и так далее); все элементы l: $l_1, l_2, \ldots, l_{n_k}$, и считать элементы с разными номерами различными, то число всех перестановок равно $(n_1+n_2+\ldots+n_k)! = n!$. Если снять номера, то среди $n!$ перестановок будут одинаковые. Перестановки, отличающиеся расположением элементов a, совпадут, таких перестановок будет $P_{n_1} = n_1!$. Перестановки, отличающиеся расположением элементов b, тоже совпадут, их будет $P_{n_2} = n_2!$. И так далее. Наконец, перестановки, отличающиеся расположением элементов l, также будут совпадать. Число их равно $P_{n_k} = n_k!$. Поскольку перестановки указанных типов можно делать независимо друг от друга, то по правилу произведения число их будет $n_1!n_2!\ldots n_k!$

Таким образом, в числе $n!$ каждая перестановка с повторениями встречается $n_1!n_2!\ldots n_k!$ раз. Поэтому число различных перестановок с повторениями равно

$$P(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}.$$

Теорема доказана.

Задача 10. Сколько восьмизначных чисел можно записать с помощью цифр 1, 3, 5 при условии, что цифра 1 повторяется в каждом числе четыре раза, цифры 3 и 5 — по 2 раза?

Решение. Искомое число очевидно является числом различных перестановок с повторениями из цифр 1, 3, 5, в которых цифра 1 повторяется четыре раза, а цифры 3 и 5 — по два раза. Поэтому по формуле (2.4) имеем:

$$P(4, 2, 2) = \frac{8!}{4!2!2!} = 420.$$

2.2.2 Размещения с повторениями

Пусть имеем множество M, состоящее из n элементов любой природы. Кортеж длины k, составленный из элементов этого множества, называется размещением с повторениями. Здесь необязательно $k < n$.

Определение 16. *Кортеж длины k, составленный из элементов n-элементного множества, называется размещением с повторениями из n элементов по k.*

Число всевозможных размещений с повторениями из n элементов по k будем обозначать $\overline{A}_n^k$.

Теорема 5. *Число различных размещений с повторениями из n элементов по k определяется по формуле:*

$$\overline{A}_n^k = n^k. \tag{2.5}$$

Доказательство. Первый элемент кортежа длины k можно определить n способами, второй элемент — n способами (и так далее), k-й элемент также n способами. В результате по правилу произведения имеем

$$n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^k = \overline{A}_n^k.$$

Задача 11. На диск секретного замка сейфа нанесены 10 цифр, шифр состоит из 4 цифр. Сколько неудачных попыток открыть сейф может сделать человек, не знающий шифра?

Решение. По формуле (2.5) общее число комбинаций равно $10^4 = 10\,000$. Значит, наибольшее число неудачных попыток равно 9999.

2.2.3 Число подмножеств конечного множества

Пусть M — конечное множество. Множество M имеет подмножества. В некоторых случаях приходится говорить не об отдельных подмножествах множества M, а о множестве всех его подмножеств. Множество всех подмножеств множества M называется множеством-степенью множества M и обозначается $P(M)$.

Например,
если $M = \varnothing$, то $P(M) = \{\varnothing\}$;
если $M = \{a\}$, то $P(M) = \{\varnothing, \{a\}\}$;
если $M = \{a, b\}$, то $P(M) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$;
если $M = \{a, b, c\}$, то $P(M) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.

Для приведенных случаев очевидно: если n — численность множества M, то численность множества $P(M)$ равна 2^n.

Теорема 6. *Если множество M содержит n элементов, то число всех подмножеств этого множества равно 2^n.*

Доказательство. Пусть множество $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Число всех подмножеств конечного множества M, состоящего из n элементов, можно определить, используя правило суммы:

$$C_n = C_n^0 + C_b^1 + \ldots + C_n^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i.$$

Используя формулу бинома Ньютона

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^n b^n$$

и положив $a = 1$, $b = 1$, получим: $(1 + 1)^n = 2^n = C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n$, которое выражает еще одно свойство числа сочетаний. Итак, число всех подмножеств конечного множества M, состоящего из n элементов, равно 2^n. Теорема доказана.

2.2.4 Сочетания с повторениями

Рассмотрим следующую комбинаторную задачу.

Задача 12. В почтовом отделении продаются открытки четырёх видов. Сколькими способами можно купить здесь 9 открыток?

Эта задача не является задачей на размещения с повторениями, так как порядок, в котором выбираются открытки, не является существенным. Она ближе к задачам на сочетания, но в сочетаниях элементы могут повторяться (например, можно купить все 9 открыток одинакового вида). Такие задачи называют задачами на сочетания с повторениями. Общая формулировка этих задач такова. Имеются элементы n различных типов. Сколько совокупностей, содержащих по k элементов каждая, можно составить из них, если не принимать во внимание порядок элементов в совокупности с учётом, что элементы могут быть одинаковыми?

Определение 17. *Сочетанием с повторениями из данных n различных типов элементов по k элементов называется всякая совокупность, содержащая k элементов, каждый из которых является одним из элементов указанных типов.*

Различные сочетания с повторениями из данных n элементов по k элементов, как и сочетания без повторений, отличаются друг от друга составом элементов, входящих в них. Число различных сочетаний с повторениями из n элементов по k элементов будем обозначать $\overline{C}_n^k$.

Теорема 7. *Число различных сочетаний с повторениями из n типов элементов по k элементов определяется по формуле:*

$$\overline{C}_n^k = \frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-1)!}. \tag{2.6}$$

Доказательство. Можно показать, что число различных сочетаний с повторениями из n элементов по k элементов равно числу различных перестановок с повторениями из элементов 0 и 1, в каждой из которых 0 повторяется $(n-1)$ раз, а 1 повторяется k раз, то есть (см. (2.4)).

$$\overline{C}_n^k = P(n-1, k) = \frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-1)!} = C_{n+k-1}^k.$$

Применим формулу (2.6) для решения задачи 12. В результате число способов купить открытки равно числу различных сочетаний с повторениями из 4 элементов по 9, то есть 220:

$$\overline{C}_4^9 = P(4-1,9) = \frac{(4+9-1)!}{9!\cdot(4-1)!} = \frac{12!}{9!3!} = 220.$$

2.3 Вопросы и упражнения

Вопросы

1. Понятие о комбинаторной задаче.
2. Правила суммы и произведения.
3. Перестановки без повторений.
4. Размещения без повторений.
5. Сочетания без повторений.
6. Простейшие свойства числа сочетаний.
7. Треугольник Паскаля, бином Ньютона.
8. Перестановки с повторениями.
9. Размещения с повторениями.
10. Число подмножеств конечного множества.
11. Сочетания с повторениями.

Упражнения

1. Предположим, что имеются 3 железные дороги, идущие от Б до Н, и 4 — от Н до Т. Сколькими способами можно выбрать дорогу от Б до Т через Н?
2. Сколькими способами можно рассадить 12 гостей за одним столом?

3. В конкурсе красоты участвуют 8 девушек. Сколькими способами могут распределиться между ними места, если каждое место может быть занято только одной участницей?

4. Сколькими способами могут быть присуждены первая и вторая премии двум лицам из группы претендентов в 9 человек?

5. Сколькими способами могут быть присуждены первая, вторая и третья премии трем лицам из 10 соревнующихся?

6. Сколько трехзначных чисел можно образовать из цифр 1, 2, 3 и 5, если каждую из этих цифр можно использовать только один раз?

7. Сколько трехзначных чисел можно образовать из цифр 1, 2, 3 и 5, если каждую из этих цифр можно использовать более одного раза?

8. Сколько шестизначных чисел, не кратных 5, можно образовать из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 при условии, что каждая цифра может быть включена в число только один раз?

9. Сколько четных пятизначных чисел можно образовать из цифр 1, 2, 3, 4, 5 при условии, что каждая цифра может быть включена в число только один раз?

10. На собрании должны выступить 5 человек: А, Б, В, Г и Д. Сколькими способами можно расположить их в списке ораторов при условии, что А должен выступать непосредственно перед Б?

11. Сколькими способами можно поставить на полку четырехтомник Пушкина, двухтомник Ахматовой и трехтомник Лермонтова так, чтобы книги каждого автора стояли рядом?

12. Сколько существует способов поставить на книжную полку в беспорядке книги из 7-томного собрания сочинений?

13. Сколькими способами можно присудить первую, вторую и третью премии трем лицам, если число соревнующихся равно 12? (Каждая премия присуждается только одному лицу).

14. Из 15 красных и 7 белых тюльпанов формируют букеты. Сколькими способами можно составить букеты из 4 красных и 3 белых тюльпанов?

15. Из 6 претендентов нужно выбрать двоих — одного посыльного и одного конторщика. Сколькими способами можно это сделать?

16. Из 35 учащихся нужно выбрать актив класса, состоящий из старосты, культорга и редактора стенгазеты. Сколькими способами это можно сделать?

17. Восемь юношей и четыре девушки участвуют в КВН. Сколькими способами они могут разбиться на две команды по шесть человек в каждой, если в команде должно быть хотя бы по одной девушке?

18. Студенту необходимо сдать 4 экзамена за 12 дней. Сколькими способами это можно сделать, если известно, что последний экзамен он сдает в 12-й день?

19. Рота состоит из 4 офицеров, 8 сержантов и 80 рядовых. Сколькими способами можно сформировать из них отряд, состоящий из одного офицера, трех сержантов и пятнадцати рядовых?

20. В купе железнодорожного вагона имеется два противоположных пятиместных дивана. Из 10 пассажиров четверо желают сидеть лицом к локомотиву, а трое — спиной, остальным трем безразлично, как сидеть. Сколькими способами могут разместиться пассажиры?

21. На вечеринке присутствуют 12 девушек и 15 юношей. Сколькими способами можно выбрать из них 4 пары для танца?

22. Хор состоит из 20 певцов. Сколькими способами можно в течение трех дней выбирать по 15 певцов так, чтобы каждый день были разные составы хора?

23. В меню столовой имеются 3 вида первых блюд и 5 видов вторых. Сколькими способами можно выбрать обед, состоящий из одного первого, одного второго и одного третьего блюда, если на третье предлагали только кофе или чай? Сколькими способами можно выбрать обед, состоящий из одного третьего и двух вторых неповторяющихся блюд?

24. На стене расположено 5 тумблеров. Каждый может быть либо включен, либо выключен. Сколько существует положений тумблеров?

25. Если подбросить одновременно четыре монеты разного достоинства, то сколько различных комбинаций их падения возможно?

26. Сколько разных комбинаций ответов можно дать на n разных вопросов, допускающих только ответы «да» и «нет»:
    а) если каждый вопрос должен получить ответ;
    б) если не обязательно отвечать на каждый вопрос?

27. Сколькими способами можно рассадить 7 человек за круглым столом? Рассматривается только относительное расположение сидящих друг относительно друга.

28. Сколькими способами можно расположить 7 шайб различного диаметра на кольце для ключей?

29. Алхимик использует 7 ингредиентов для приготовления эликсира жизни. Сколько существует различных порядков вливания их в сосуд?

30. Сколькими способами можно рассадить трёх человек за круглым столом?

31. Сколькими способами можно расположить три ключа на кольце для ключей?

32. Найдите число различных перестановок букв в слове «веер».

33. Найдите число различных перестановок букв в слове «Mississippi».

34. Имеется 5 мест на флагштоке и 5 флагов, из которых 2 красных и 3 белых. Сколько можно изобразить различных сигналов, если использовать все флаги одновременно?

35. Сколькими способами можно рассадить вокруг круглого стола 5 мальчиков и 5 девочек, если каждый мальчик должен сидеть между двумя девочками?

36. Сколько результатов может встретиться при бросании трех игральных костей?

37. Сколькими способами можно рассадить 10 человек вокруг круглого стола, если два определенных лица должны сидеть друг против друга?

38. Сколько чисел больше 100 можно записать с помощью цифр 0, 2, 4, 6 и 8 так, чтобы ни в одном числе ни одна цифра не повторялась и ни одно число не начиналось с 0?

39. Сколько четных чисел меньше 500 можно записать с помощью цифр 2, 3, 4, 5 и 6 так, чтобы ни одна цифра не повторялась ни в одном числе?

40. Если в классе имеется 10 мест, то сколькими способами можно разместить на них трех учеников?

41. Сколько различных вариантов можно получить, переставляя буквы в словах: а) «математика», б) «кукуруза», в) «молоко»?

42. Сколько существует треугольников, длины сторон которых принимают одно из значений 4, 5, 6, 7?

43. Сколько нечетных четырехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если каждую цифру использовать несколько раз?

44. Двое ребят собрали 10 подберезовиков, 16 подосиновиков и 15 маслят. Сколькими способами они могут разделить между собой эти грибы?

45. Четверо студентов сдают экзамен. Сколькими способами им могут быть выставлены оценки, если известно, что ни один из них не получит «неудовлетворительно»?

46. Сколько чисел меньших, чем миллион, можно записать с помощью цифр 9, 8, 7?

47. На товарном складе имеется обивочная ткань шести сортов. Сколькими способами можно обить ею 36 стульев для общежития?

48. Сколько различных четырехзначных чисел можно записать с помощью цифр 0, 1, 2?

49. Трое юношей и четыре девушки выбирают вуз для поступления. В городе есть два военных училища (туда принимают только юношей), университет и две академии. Сколькими способами могут распределиться выпускники между вузами города?

50. Автомобильные номера состоят из трех букв и трех цифр. Сколько можно составить номеров, если использовать 28 букв русского алфавита?

51. В почтовом отделении имеется четыре вида конвертов без марок и пять видов марок нужного достоинства. Сколькими способами можно выбрать три конверта с маркой для отправки писем?

52. Из 10 юношей и 15 девушек необходимо набрать группу в количестве 6 человек так, чтобы в ней было не менее 2 юношей. Сколькими способами это можно сделать?

53. Сколькими способами можно переставлять буквы в слове «молоко» так, чтобы три буквы 'о' не стояли рядом?

54. В меню столовой 4 первых, 6 вторых и 5 третьих блюд. Сколькими способами можно выбрать 2 обеда из трех блюд?

55. Сколько миноров порядка $s = 3$ можно выбрать из матрицы размером $m \times n = 8 \times 6$?

56. Когда Гулливер попал в Лилипутию, он обнаружил, что там все вещи ровно в 12 раз короче, чем на родине. Сколько лилипутских спичечных коробков поместится в спичечном коробке Гулливера?

Глава 3

Графы

Теория графов — область дискретной математики, особенностью которой является геометрический подход к изучению объектов [5–7, 10–16, 4]. Множество самых разнообразных задач формулируется в терминах точек и связей между ними, т. е. в терминах графов. Так, например, могут быть сформулированы задачи составления расписания, анализа сетей в электротехнике, анализа цепей Маркова в теории вероятностей, в программировании, в проектировании электронных схем, в экономике, в социологии и др. Поэтому эффективные алгоритмы решения задач теории графов имеют большое практическое значение.

Определение 18. *Конечным графом называется тройка* $\Gamma = (X, U, \Phi)$*, где* X *— конечное множество вершин;* U *— конечное множество ребер (дуг);* Φ *— отношение инцидентности;* $X \cap U = \varnothing$.

На рис. 3.1 представлены графы с тремя вершинами и двумя ребрами.

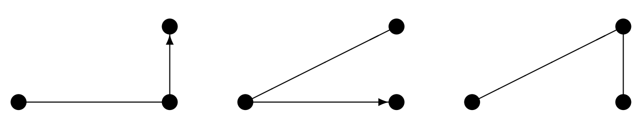


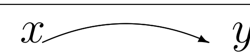
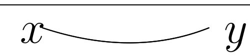
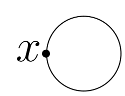
Рис. 3.1. Графы с тремя вершинами и двумя ребрами

Отношение инцидентности Φ является трехместным отношением $\Phi(x, u, y)$, где $x, y \in X$, $u \in U$, которое может либо выполняться (быть истинным), либо не выполняться (быть ложным) и удовлетворяет свойствам:

1) $\forall u \in U \exists x, y \in X\, \Phi(x,u,y)$ — ребро всегда соединяет пару вершин;

2) $(\Phi(x,u,y) \wedge \Phi(x',u,y')) \Rightarrow ((x = x' \wedge y = y') \vee (x = y' \wedge y = x'))$ — ребро u соответствует не более чем одной паре вершин x, y.

3.1 Графическое представление графов

Элемент графа	Геометрическое изображение элемента
$x \in X$ — вершина	$\bullet$ — точка в пространстве
$\Phi(x,u,y) \wedge \overline{\Phi(y,u,x)}$ — ориентированное ребро, дуга	 направленный «отрезок»
$\Phi(x,u,y) \wedge \Phi(y,u,x)$ — неориентированное ребро, дуга	 «отрезок»
$\Phi(x,u,x)$ — петля	 «замкнутый отрезок»

Пусть x, y — вершины, $u = (x,y)$ — соединяющее их ребро. Тогда вершина x и ребро u инцидентны, вершина y и ребро u также инцидентны. Два ребра, инцидентные одной вершине, называются смежными; две вершины, инцидентные одному ребру, также называются смежными.

Определение 19. *Графы* $\Gamma_1 = (X_1, U_1, \Phi_1)$ *и* $\Gamma_2 = (X_2, U_2, \Phi_2)$ *называются изоморфными* ($\Gamma_1 \equiv \Gamma_2$)*, если существуют два взаимно однозначных соответствия* $\varphi : X_1 \to X_2$ *и* $\psi : U_1 \to U_2$*, сохраняющих отношение инцидентности:*

$$\Phi_2(\varphi(x_1), \psi(u_1), \varphi(y_1)) = \Phi_1(x_1, u_1, y_1).$$

Из определения следует, что изоморфные графы можно одинаково изображать графически, и отличаться они будут только метками вершин.

Изоморфизм графов есть отношение эквивалентности. Действительно, изоморфизм обладает всеми необходимыми свойствами: рефлексивностью, симметричностью, транзитивностью. Графы рассматриваются с точностью до изоморфизма (рис. 3.2).

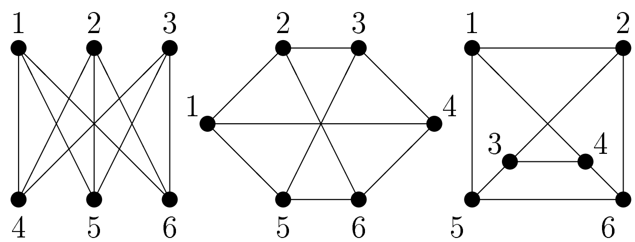


Рис. 3.2. Изоморфные графы

Определение 20. *Граф называется ориентированным (орграф), если каждое его ребро ориентировано:* $\forall x \neq y \in X, \forall u \in U$, $\Phi(x,u,y) \Rightarrow \overline{\Phi(y,u,x)}$.

Иногда удобно преобразовать неориентированный граф в ориентированный — заменой каждого неориентированного ребра парой ориентированных ребер с противоположной ориентацией.

Определение 21. *Подграфом графа* $\Gamma = (X, U, \Phi)$ *называется такой граф* $\Gamma' = (X', U', \Phi)$, *что* $X' \subset X$, $U' \subset U$. *Обозначают* $\Gamma' \subset \Gamma$.

Определение 22. *Граф называется псевдографом, если в нем допускаются петли и кратные ребра, т. е. две вершины могут быть соединены более чем одним ребром. Псевдограф без петель называется мультиграфом* (рис. 3.3).

Определение 23. *Неориентированный граф называется простым, если он не имеет петель и любая пара вершин соединена не более чем одним ребром.*

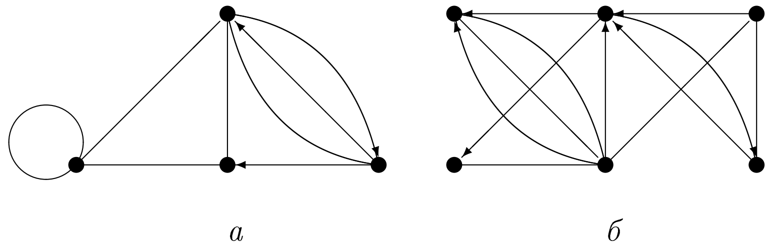


Рис. 3.3. Псевдограф (*а*) и мультиграф (*б*)

Определение 24. *Простой граф называется полным, если каждая пара вершин соединена ребром. Такой граф с n вершинами содержит C_n^2 ребер* (рис. 3.4).

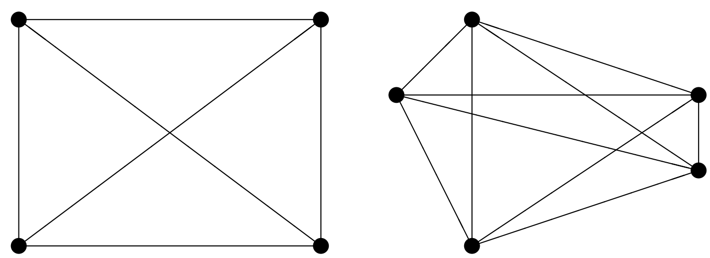


Рис. 3.4. Полные неориентированные графы

Определение 25. *Дополнением простого графа* Γ *называется граф* $\overline{\Gamma}$, *имеющий те же вершины, а его ребра являются дополнением* Γ *до полного графа* (рис. 3.5).

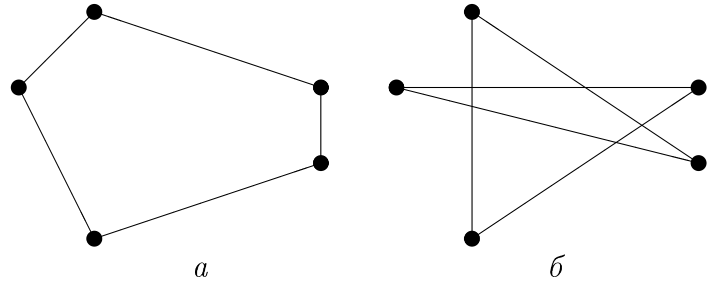


Рис. 3.5. Исходный граф Γ (*а*) и дополнительный $\overline{\Gamma}$ (*б*)

Определение 26. *Граф называется плоским (планарным), если он может быть изображен на плоскости так, что все пересечения ребер являются его вершинами.*

Определение 27. *Степенью вершины (валентностью) графа называется количество ребер, инцидентных данной вершине. Вершина графа, имеющая степень* 0*, называется изолированной, а если степень ее равна* 1*, то такая вершина называется висячей.*

Определение 28. *Граф называется помеченным, если его вершины отличаются друг от друга какими-либо метками.*

Определение 29. *Путь (маршрут) на графе* $\Gamma = (X, U, \Phi)$ *определяется последовательностью вершин и ребер* $x_1 u_1 x_2 u_2 x_3 \dots x_n u_n x_{n+1}$*, где* $x_i \in X$*,* $u_i \in U$*. Ребро* u_i *соединяет вершину* x_i *с вершиной* x_{i+1}*, т. е. выполняется отношение инцидентности* $\Phi(x_i, u_i, x_{i+1})$*.*

- Маршрут называется **цепью**, если все его ребра различные.
- Маршрут называется **замкнутым**, если $x_1 = x_{n+l}$.
- Замкнутая цепь называется **циклом**.
- Цепь называется **простой**, если не содержит одинаковых вершин.
- Простая замкнутая цепь называется **простым циклом**.
- **Гамильтоновой цепью** называется простая цепь, содержащая все вершины графа.
- **Гамильтоновым циклом** называется простой цикл, содержащий все вершины графа.
- Цикл в графе называется **эйлеровым**, если он содержит все ребра графа.

Определение 30. *Граф $\Gamma = (X, U, \Phi)$ называется* ***связным****, если для всех $x, y \in X$ существует путь из вершины x в вершину y (вершины x и y связаны маршрутом). Связный ориентированный граф называется* ***сильно связным****. Орграф называется* ***слабо связным****, если соответствующий ему неориентированный граф (игнорируется ориентация ребер) связный.*

Связный граф, в котором есть эйлеров цикл, называется **эйлеровым графом**. Его можно изобразить, не отрывая карандаша от бумаги, одной линией.

Определение 31. *Связный неориентированный ациклический граф называется* ***деревом****, множество деревьев называется* ***лесом****.*

3.2 Аналитическое (дискретное) представление графов

Наиболее известный и популярный способ представления графов состоит в геометрическом изображении точек (вершин) и линий (ребер) на бумаге. При численном решении задач на вычислительных машинах граф должен быть представлен дискретным способом. Существует довольно много способов такого рода представления графов. Однако простота использования представления графа, как и эффективность алгоритма, в основе которого он лежит, в полной мере зависит от конкретного выбора этого представления. Одно из направлений теории графов связано с их матричным представлением. Существуют различные виды матриц, ассоциированные с графами. Эти алгебраические формы используются для решения многих задач теории графов. Ниже рассмотрены две такие матричные формы и несколько нестандартных представлений, которые наиболее широко используются в алгоритмах на графах.

Определение 32. *Матрицей смежности ориентированного помеченного графа с n вершинами называется матрица*

$A = [a_{i,j}]$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, *в которой,* $a_{i,j} = 1$, *если существует ребро* (x_i, x_j), $a_{i,j} = 0$, *если вершины* x_i, x_j *не связаны ребром* (x_i, x_j).

Матрица смежности однозначно определяет структуру графа. Примеры орграфа и его матрицы смежности приведены соответственно на рис. 3.6 и рис. 3.7. Отметим, что петля в матрице смежности может быть представлена соответствующим единичным диагональным элементом. Кратные ребра можно представить, позволив элементу матрицы быть больше 1, но это не принято, обычно же представляют каждый элемент матрицы одним двоичным разрядом.

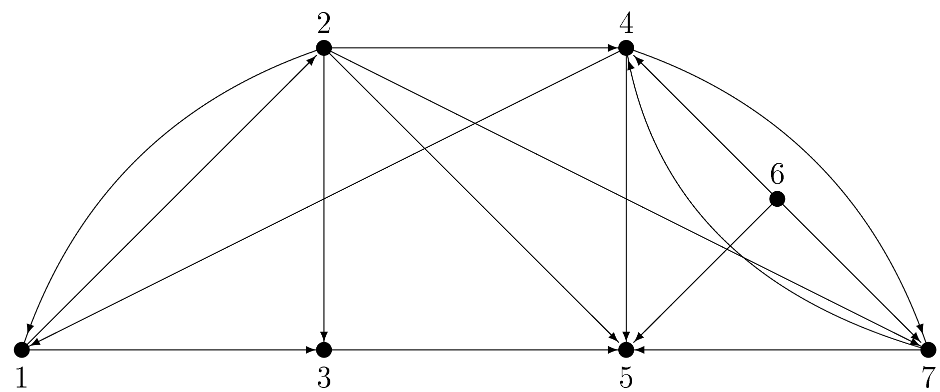


Рис. 3.6. Ориентированный граф

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Рис. 3.7. Матрица смежности ориентированного графа (рис. 3.6)

Определение 33. *Матрицей инцидентности для неориентированного графа с* n *вершинами и* m *ребрами называется мат-*

рица $B = [b_{i,j}]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$, строки которой соответствуют вершинам, а столбцы — ребрам. Элементы $b_{i,j} = 1$, если вершина x_i инцидентна ребру u_j; $b_{i,j} = 0$, если вершина x_i не инцидентна ребру u_j.

Определение 34. *Матрицей инцидентности для ориентированного графа с n вершинами и m ребрами называется матрица $B = [b_{i,j}]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$, строки которой соответствуют вершинам, а столбцы — ребрам. Элементы $b_{i,j} = +1$, если ребро u_j выходит из вершины x_i; $b_{i,j} = -1$, если ребро u_j входит в вершину x_i; $b_{i,j} = 0$, если вершина x_i не инцидентна ребру u_j.*

Матрица инцидентности однозначно определяет структуру графа. На рис. 3.8 представлена такая матрица для орграфа, приведенного на рис. 3.6, она содержит 7 строк (по количеству вершин) и 16 столбцов (по количеству ребер): 1/2, 1/3 — и т. д.

$$B = \begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccccccccccccc} 1/2 & 1/3 & 2/1 & 2/3 & 2/4 & 2/5 & 2/7 & 3/5 & 4/1 & 4/5 & 4/7 & 6/4 & 6/5 & 6/7 & 7/4 & 7/5 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} &
\begin{pmatrix}
+1 & +1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & +1 & +1 & +1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & +1 & +1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & +1 & +1
\end{pmatrix}
\end{array}$$

Рис. 3.8. Матрица инцидентности ориентированного графа (рис. 3.6)

Определение 35. *Граф называется взвешенным, если каждому его ребру сопоставлено число. Простой взвешенный граф может быть представлен своей матрицей весов $W = [w_{ij}]$, где w_{ij} — вес ребра, соединяющего вершины x_i и x_j, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Веса несуществующих ребер полагают равными 0 или ∞ — в зависимости от приложений.*

Заметим, что матрица весов является простым обобщением матрицы смежности.

Список ребер графа. При описании графа списком его ребер каждое ребро представляется парой инцидентных ему вершин. Это представление можно реализовать двумя массивами: $r = (r_l, r_2, \ldots, r_m)$ и $t = (t_1, t_2, \ldots, t_m)$, где m — количество ребер в графе. Каждый элемент в массиве есть метка вершины, а i-е ребро графа выходит из вершины r_i и входит в вершину t_i. Например, соответствующие массивы представления графа, изображённого на рис. 3.6, будут иметь вид:

$$r = (1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 6, 6, 6, 7, 7),$$
$$t = (2, 3, 1, 3, 4, 5, 7, 5, 1, 5, 7, 4, 5, 7, 4, 5).$$

Данное представление позволяет легко описать петли и кратные ребра.

Структура смежности графа. Ориентированный или неориентированный граф может быть однозначно представлен структурой смежности своих вершин. Структура смежности состоит из списков $Adj[x]$ вершин графа, смежных с вершиной x. Списки $Adj[x]$ составляются для каждой вершины графа. В качестве примера опишем структуру смежности графа, представленного на рис. 3.6.

x_i	$Adj[x_i]$
1	2,3
2	1,3,4,5,7
3	5
4	1,5,7
5	
6	4,5,7
7	4,5

Структуры смежности могут быть удобно реализованы массивом из n (число вершин в графе) линейно связанных списков.

В примере таких списков 7. Каждый список содержит вершины, смежные с вершиной, для которой составляется список. Хранить же списки смежности памяти желательно в алгоритмах, в основе которых лежат операции добавления и удаления вершин из списков. Следует отметить, что во многих задачах выбор представления графа является решающим для эффективности алгоритмов.

Метод поиска в глубину. Один из наиболее естественных способов систематического исследования всех вершин графа исходит из процедуры прохождения графа методом поиска с возвращением, при котором граф исследуется в глубину.

На неориентированном графе $\Gamma = (X, U, \Phi)$ поиск в глубину осуществляется следующим образом. Когда посещаем вершину $x \in X$, то далее идем по одному из ребер (x, y), инцидентному вершине $y \in X$. Если вершина y уже пройдена (посещалась ранее), то возвращаемся в x и выбираем другое ребро. Если вершина y не пройдена, то заходим в нее и применяем процесс прохождения рекурсивно уже с вершиной y. Если все ребра, инцидентные вершине x, просмотрены, то идем назад по ребру (s, x), по которому пришли в x, и продолжаем исследование ребер, инцидентных вершине $s \in X$. Процесс заканчивается, когда попытаемся вернуться из вершины, с которой начали просмотр графа.

Поиск в глубину можно также осуществлять и на ориентированном графе. Если граф ориентированный, то, находясь в узле x, необходимо выбирать ребро (x, y), только выходящее из x. Исследовав все ребра, выходящие из y, возвращаемся в x даже тогда, когда в y входят другие ребра, еще не рассмотренные. Данная техника просмотра в глубину полезна при определении различных свойств как ориентированных, так и неориентированных графов.

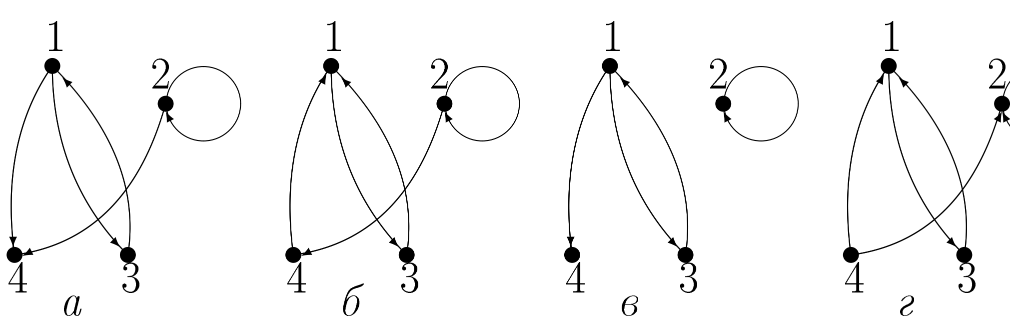
3.3 Вопросы и упражнения

Вопросы

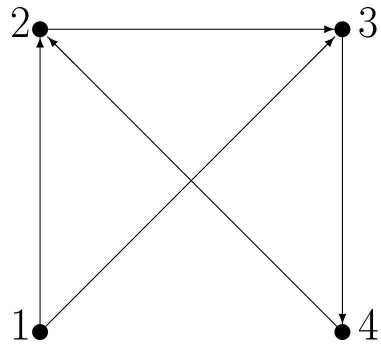
1. Что называется графом, ориентированным графом?
2. Что такое степень вершины?
3. Основные понятия, связанные с неориентированными графами.
4. Основные понятия, связанные с орграфами.
5. В чем состоит аналитический способ задания графа?
6. В чем состоит геометрический способ задания графа?
7. Какая матрица называется матрицей смежности графа?
8. Какая матрица называется матрицей инцидентности графа?
9. Что называется маршрутом, циклом и цепью графа?
10. Понятие связности графа. Какой граф называют связным?
11. Какие два графа называются изоморфными?
12. Какой граф называют гамильтоновым?
13. Определение эйлерова графа.

Упражнения

1. Реализацией графа с множеством вершин $V = \{1, 2, 3, 4\}$ и списком дуг $E = \{(1;4), (1;3), (2;2), (2;4), (3;1)\}$ является:



2. Матрица смежности ориентированного графа

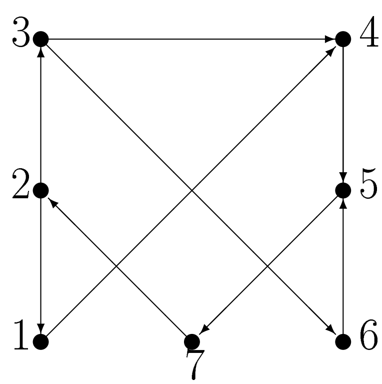


равна:

1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3. Постройте матрицу смежности и инцидентности для данного графа



Дайте графическое представление графа, заданного матрицей смежности. Постройте матрицу инцидентности для *данного графа.*

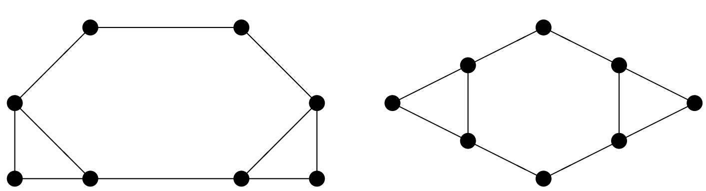
4. $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

5. $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

6. $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

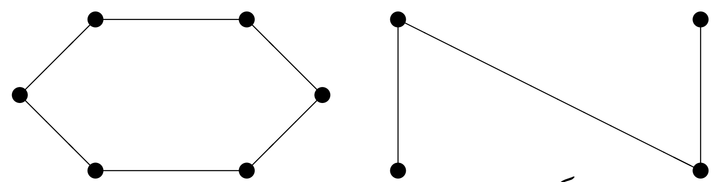
7. $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

8. Докажите, что на рисунках a и $б$ изображены разные графы.



a $\qquad$ $б$

9. Изобразите графы $\overline{\Gamma}$, являющиеся дополнением графов Γ, изображенных на рисунках *а* и *б*.



а *б*

10. Возможна ли компания из пяти человек, в которой каждый знаком с двумя и только двумя другими?

11. Изобразите полный граф с n вершинами, если:
a) $n = 2$; b) $n = 3$; c) $n = 5$.

12. Скольким ребрам инцидентна вершина в полном графе с n вершинами?

13. Докажите, что в полном графе с $n\,(n > 2)$ вершинами $n(n-1)/2$ ребер.

14. Найдется ли граф с пятью вершинами, у которого одна вершина изолированная, а другая имеет степень 4?

15. Изобразите граф с пятью вершинами, две из которых имеют одинаковую степень.

16. Если в графе с пятью вершинами ровно две вершины имеют одинаковую степень, то могут ли они быть обе изолированными или иметь степень 4?

17. Имеются три листа бумаги. Некоторые из них разрезают на 3 части, некоторые из полученных частей опять разрезают на три части и т. д. Сколько всего получилось листов, если было сделано k разрезаний?

18. Имеется m листов бумаги. Некоторые из них разрезают на n частей, некоторые из полученных частей опять разрезают

на n частей и т. д. Сколько всего получилось листов, если было сделано k разрезаний?

19. Имеется m ящиков, в некоторых из них также по m ящиков, в которых в свою очередь снова m ящиков и т. д. Сколько всего ящиков, если заполненных k?

20. Изобразите при помощи графа множество двузначных чисел, которые можно записать с помощью цифр 1, 2, 3. Сколько элементов оно имеет?

21. Изобразите при помощи графа множество трехзначных чисел, которые можно записать с помощью цифр 3 и 5. Сколько элементов оно имеет?

22. Изобразите при помощи графа множество четырехзначных чисел, которые можно записать с помощью цифр 2 и 7. Сколько элементов оно имеет?

23. Семеро студентов, разъезжаясь на каникулы, договорились, что каждый пошлет электронное письмо трем из них. Может ли оказаться, что каждый получит письма от тех, кому написал сам?

24. В футбольном турнире, проводимом в один круг, участвует 29 команд. Докажите, что в любой момент найдется команда, сыгравшая четное число матчей. Может ли быть, что какая-то из команд не сыграла ни одного матча?

Глава 4

Системы счисления

4.1 Позиционные и непозиционные системы счисления

Определение 36. *Система счисления (нумерация) — это принятый способ записи чисел, сопоставления этим записям реальных значений и выполнения действий над ними.*

Для записи натуральных чисел применялись различные системы счисления, которые можно разбить на две группы: **непозиционные системы** и **позиционные** [8, 9, 17].

В непозиционных системах счисления значение каждого применяемого знака не зависит от его места в записи числа. Из многочисленных непозиционных систем счисления до настоящего времени сохранила некоторое значение только римская нумерация.

Римская нумерация возникла в Средние века и до сих пор используется для обозначения глав книги, чисел на циферблате часов и т. д. В этой системе для записи чисел используются буквы латинского алфавита: I — единица, V — пять, X — десять, L — пятьдесят, C — сто, D — пятьсот, M — тысяча.

Римская система счисления имеет целый ряд очевидных недостатков: записи длинные, умножение и деление в письменном виде невозможно и т. д.

Определение 37. *Система счисления называется позиционной, если количественный эквивалент цифры зависит от её положения в записи числа.*

Основным преимуществом позиционных систем счисления является то, что любое какое угодно большое натуральное число x записывается с помощью небольшого набора символов.

Символы, при помощи которых записываются числа, называют **цифрами**, а их совокупность — **алфавитом** системы счисления. Количество цифр, составляющих алфавит, называют его **размерностью**.

В привычной нам десятичной системе значение числа образуются следующим образом: значения цифр умножаются на «веса» соответствующих разрядов и все полученные значения складываются.

Например, $5047 = 5 \cdot 1000 + 0 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 7 \cdot 1$.

Такой способ образования значения числа называется **аддитивно-мультипликативным**.

Последовательность чисел, каждое из которых задаёт «вес» соответствующего разряда, называется **базисом** позиционной системы счисления. Позиционную систему счисления называют **традиционной**, если её базис образуют члены геометрической прогрессии, а значения цифр есть целые неотрицательные числа.

Например, в десятичной системе счисления базис образуют числа: 1, 10, 100, 1000, ...

Определение 38. *Знаменатель p геометрической прогрессии называют* ***основанием*** *этой системы счисления.*

В качестве основания может быть принято любое натуральное число $p \geq 2$. Система счисления с основанием p называется p-ичной. В таких системах размерность алфавита равна основанию системы счисления.

Определение 39. *Записью произвольного натурального числа x в системе счисления с основанием p называется представление его в виде:*

$$x = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0,$$

где $0 \le a_i \le p-1\,(i=0,1,2,\ldots,n)$, $a_n \ne 0$,

Символически эту формулу записывают в виде последовательности цифр с чертой наверху и индексом p: $x = \overline{a_n a_{n-1}\ldots a_1 a_0}_p$. При записи конкретных чисел черта опускается, если $p=10$, то индекс 10 не ставится.

Так, запись 3546_7, которую следует читать: «Три, пять, четыре, шесть в семеричной системе счисления», — обозначает число $3\cdot 7^3 + 5\cdot 7^2 + 4\cdot 7 + 6 = 1308$.

В системе счисления с основанием p место, занимаемое цифрой, называется разрядом. Разряды считаются справа налево, начиная с 0.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 8. *Любое натуральное число x может быть записано в системе счисления с основанием $p \ge 2$, причем единственным образом.*

Определение 40. *В p-ичной системе счисления любое неотрицательное действительное число x можно записать в виде*

$$x = a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0 + a_{-1}p^{-1} + a_{-2}p^{-2} + \ldots = \sum_{i=-\infty}^{n} a_i p^i,$$

где $p \ge 2$ — основание позиционной системы счисления, a_i — цифры числа в p-ичной системе счисления $a_n \ne 0$.

Некоторые позиционные системы счисления

Система счисления	Основание	Цифры
Двоичная	2	0, 1
Троичная	3	0, 1, 2
Восьмеричная	8	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
Десятичная	10	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
Шестнадцатеричная	16	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 A, B, C, D, E, F

4.2 Перевод чисел из *p*-ичной системы счисления в десятичную

Алгоритм перевода целых чисел из p-ичной системы счисления в десятичную:

1. Каждая цифра p-ичного числа переводится в десятичную систему.
2. Полученные числа нумеруются справа налево, начиная с нуля.
3. Число p переводится в десятичную систему.
4. Десятичное число, соответствующее каждой p-ичной цифре, умножается на p^k, где k — номер этого числа; результаты складываются, причем все арифметические действия проводятся в десятичной системе.

Пример. Переведем двоичное число 1001101_2 в десятичное.

$$1001101_2 = 2^0 + 2^2 + 2^3 + 2^6 = 77_{10}.$$

Алгоритм перевода конечной p-ичной дроби в десятичную:

1. Целая часть числа переводится в десятичную систему отдельно.
2. Каждая цифра дробной части p-ичного числа переводится в десятичную систему.
3. Полученные числа нумеруются слева направо, начиная с единицы.
4. Число p переводится в десятичную систему.
5. Десятичное число, соответствующее каждой p-ичной цифре, умножается на p^{-k}, где k — номер этого числа; результаты складываются, причем все арифметические действия проводятся в десятичной системе.

Пример. Переведем число $0,13_{15}$ из системы счисления по основанию 15 в десятичную систему счисления.

$$0,13_{15} = 1 \cdot 15^{-1} + 3 \cdot 15^{-2} = \frac{1}{15} + \frac{3}{225} = \frac{18}{225} = 0,08.$$

4.3 Перевод чисел из десятичной системы счисления в p-ичную

Алгоритм перевода целых чисел из десятичной системы счисления в p-ичную:

1. Делим исходное число x на p нацело в десятичной системе счисления и записываем в качестве нового значения десятичного числа x целую часть результата от деления.
2. Остаток от деления заменяем на соответствующую цифру в p-ичной системе счисления и приписываем её слева к полученным ранее цифрам p-ичной записи числа x (первая полученная цифра соответствует младшему разряду).
3. Выполняем пункты 1 и 2 до тех пор, пока число x не станет равным 0.

Пример. Переведем число 123 в троичную систему счисления.

$$\begin{array}{rcrcrl}
123 & : & 3 & = & 41 & (0) \\
41 & : & 3 & = & 13 & (2) \\
13 & : & 3 & = & 4 & (1) \\
4 & : & 3 & = & 1 & (1) \\
1 & : & 3 & = & 0 & (1)
\end{array}$$

В скобках указаны остатки от целочисленного деления, которые являются соответствующими цифрами в троичном представлении числа.
В результате: $123 = 11120_3$.

Алгоритм перевода правильной конечной десятичной дроби в p-ичную систему счисления:

1. Умножим исходное число на p (основание системы счисления), целая часть полученного произведения является первой цифрой после запятой в искомом числе.
2. Если дробная часть произведения не равна 0, умножим её на p, целую часть полученного числа заменим на цифру в p-ичной системе и припишем её справа к результату.

3. Выполняем пункт 2 до тех пор, пока дробная часть произведения не станет равной нулю или не выделится период (дробная часть окажется равной уже получавшейся ранее дробной части произведения).

Пример. Переведем число $0,123$ в пятеричную систему счисления.

$$\begin{array}{lcccll}
0,123 & \cdot & 5 & = & 0,615 & (0) \\
0,615 & \cdot & 5 & = & 3,075 & (3) \\
0,075 & \cdot & 5 & = & 0,375 & (0) \\
0,375 & \cdot & 5 & = & 1,875 & (1) \\
0,875 & \cdot & 5 & = & 4,375 & (4) \\
0,375 & \cdot & 5 & = & 1,875 & (1) \\
0,875 & \cdot & 5 & = & 4,375 & (4) \\
\text{и т. д.} & & & & &
\end{array}$$

В скобках указаны целые части результата умножения.
В результате: $0,123 = 0,030(14)_5$.

4.4 Представление информации в компьютере

Рассмотрим представление целых положительных чисел. Для получения компьютерного представления беззнакового целого числа в k-разрядной ячейке памяти достаточно перевести его в двоичную систему счисления и дополнить полученный результат слева нулями до k разрядов. Понятно, что существует ограничение на числа, которые мы можем записать в k-разрядную ячейку.

Максимально представимому числу соответствуют единицы во всех разрядах ячейки (двоичное число, состоящее из k единиц). Для k-разрядного представления оно будет равно $2^k - 1$. Минимальное число представляется нулями во всех разрядах ячейки, оно всегда равно нулю. Ниже приведены максимальные числа для беззнакового представления при различных значениях k:

Количество разрядов	Максимальное число
8	$2^8 - 1 = 255$
16	$2^{16} - 1 = 65535$
32	$2^{32} - 1 = 4294967295$
64	$2^{64} - 1 = 18446744073709551615$

При знаковом представлении целых чисел возникают такие понятия, как прямой, обратный и дополнительный коды.

Представление числа в форме «знак-величина», при которой старший разряд ячейки отводится под знак, а остальные $k-1$ разрядов под цифры числа, называется **прямым кодом**.

Для представления в компьютере целых отрицательных чисел используют дополнительный код, который позволяет заменить арифметическую операцию вычитания операцией сложения, что существенно увеличивает скорость вычислений. Прежде чем вводить определение дополнительного кода, сделаем следующее важное замечание.

В k-разрядной целочисленной компьютерной арифметике $2^k \equiv 0$.

Объяснить это можно тем, что двоичная запись числа 2^k состоит из одной единицы и k нулей, а в ячейку из k разрядов может уместиться только k цифр, в данном случае только k нулей. Поэтому говорят, что значащая единица вышла за пределы разрядной сетки.

Следует помнить: k-разрядный **дополнительный код** отрицательного числа $|m|$ — это запись в k разрядах положительного числа $2^k - |m|$, где $|m|$ — модуль отрицательного числа m, $|m| \le 2^{k-1}$.

Дополнительный код отрицательного числа m — это дополнение модуля этого числа до 2^k (или до нуля в k-разрядной арифметике):

$$(2^k - |m|) + |m| = 2^k \equiv 0.$$

Алгоритм получения дополнительного k-разрядного кода отрицательного числа:

1. Модуль числа представить прямым кодом в k двоичных разрядах.
2. Значения всех разрядов инвертировать (все нули заменить на единицы, а единицы — на нули), получив таким образом k-разрядный обратный код исходного числа.
3. К полученному обратному коду, трактуемому как k-разрядное неотрицательное двоичное число, прибавить единицу.

Обратный код является дополнением исходного числа до числа $2^k - 1$, состоящего из k двоичных единиц. Поэтому прибавление единицы к инвертированному коду позволяет получить его искомый дополнительный код.

Целые числа со знаком, представимые в k разрядах, принадлежат диапазону $[-2^{k-1}, 2^{k-1} - 1]$, который не является симметричным относительно 0. Это следует учитывать при программировании. Если, например, изменить знак у наибольшего по модулю отрицательного числа, то полученный результат уже не будет представим в том же числе разрядов.

Ниже приведены значения границ диапазонов для знаковых представлений в ячейках с различной разрядностью:

Разрядность	Минимальное число	Максимальное число
8	-128	127
16	-32768	32767
32	-2147483648	2147483647
64	-9223372036854775808	9223372036854775807

Пример 1. Получим дополнительный код числа -52 для восьми- и шестнадцатиразрядного представления.

Для восьмиразрядного представления:
0011 0100 — прямой код числа $|-52| = 52$;
1100 1011 — обратный код числа -52;
1100 1100 — дополнительный код числа -52.
Для шестнадцатиразрядного представления:
0000 0000 0011 0100 — прямой код числа $|-52|$;
1111 1111 1100 1011 — обратный код числа -52;
1111 1111 1100 1100 — дополнительный код числа -52.

Пример 2. Получить десятичное значение числа по его дополнительному коду: 11011011_2.

Решение

1) $11011011_2 - 1 = 11011010_2$ — обратный код;
2) инвертируем $0 \to 1,\ 1 \to 0$: 00100101_2 — модуль отрицательного числа; $00100101_2 = 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^5 = 37$;
3) $m = -37$.

Ответ: -37.

Пример 3. При проведении арифметических операций на ЭВМ в 8-разрядной знаковой арифметике какое значение будет получено при выполнении следующей операции $100_{10} + 40_{10}$?

Решение

$$\begin{array}{rcccrl}
100 & : & 2 & = & 50 & (0) \\
50 & : & 2 & = & 25 & (0) \\
25 & : & 2 & = & 12 & (1) \\
12 & : & 2 & = & 6 & (0) \\
6 & : & 2 & = & 3 & (0) \\
3 & : & 2 & = & 1 & (1) \\
1 & : & 2 & = & 0 & (1)
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rcccrl}
40 & : & 2 & = & 20 & (0) \\
20 & : & 2 & = & 20 & (0) \\
10 & : & 2 & = & 5 & (0) \\
5 & : & 2 & = & 2 & (1) \\
2 & : & 2 & = & 1 & (0) \\
1 & : & 2 & = & 0 & (1)
\end{array}$$

В скобках указаны остатки от целочисленного деления, которые являются соответствующими цифрами в двоичном представлении числа. В результате: $100_{10} = 01100100_2$; $40_{10} = 00101000_2$.

$$01100100_2 + 00101000_2 = 10001100_2.$$

В старшем разряде стоит 1 $\Rightarrow$ дополнительный код.

1) $10001100_2 - 1 = 10001011_2$ — обратный код;
2) инвертируем $0 \to 1,\ 1 \to 0$: 01110100_2 — модуль отрицательного числа; $01110100_2 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^6 = 116$;
3) $m = -116$.

Ответ: в результате операции будет получено -116.

Пример 4. Для заданных чисел выполнить операцию $249-48$ (в двухбайтовом знаковом представлении).

Решение

$$249_{10} = 00000000\ 011111001_2.$$

Дополнительный код числа -48:

1) $|-48| = 48_{10} = 00000000\ 00110000_2$ — прямой код;
2) инвертируем $0 \to 1,\ 1 \to 0$: $11111111\ 11001111_2$ — обратный код;
3) $11111111\ 11001111_2 + 1 = 11111111\ 11010000_2$ — дополнительный код.

$$249 - 48 = 00000000\ 011111001_2 + 11111111\ 11010000_2 =$$
$$= 1\ 00000000\ 11001001_2.$$
$$11001001_2 = 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^7 = 201.$$

Ответ: $249 - 48 = 201$.

Вещественные числа в компьютере хранятся в формате с плавающей запятой, который опирается на нормализованную форму записи чисел.

Если при представлении целых чисел в компьютере ограничением может служить лишь величина записываемого числа, то при записи вещественного числа речь в первую очередь идет о точности его представления, т. е. о количестве значащих цифр, которые удается сохранить в ограниченном числе разрядов.

Любое вещественное число a в экспоненциальной форме представляется в виде: $a = \pm m \times p^q$, где p — основание системы счисления, m — мантисса числа, q — порядок числа.

Нормализованная запись отличного от нуля вещественного числа — это запись вида $a = \pm m \times p^q$, где q — целое число (положительное, отрицательное или ноль), m — правильная p-ичная дробь, у которой первая цифра после запятой не равна нулю, т. е. $1/p \leq m < 1$.

Заметим, что число ноль не может быть записано в нормализованной форме так, как она была определена. Поэтому относительно нормализованной записи нуля приходится прибегать к особым соглашениям. Условимся, что запись нуля является нормализованной, если и мантисса, и порядок равны нулю.

В нормализованной форме все числа записываются одинаково в том смысле, что запятая у них ставится в одном и том же месте — перед первой (самой левой) значащей цифрой мантиссы. Заметим, что в двоичной системе счисления первая цифра мантиссы нормализованного числа всегда равна 1 (за исключением числа ноль). Величина же числа (т. е. ее порядок) указывается отдельно, с помощью соответствующей степени основания системы счисления, в которой это число было записано изначально. Количество цифр в мантиссе может оказаться меньше, чем количество значащих цифр в исходном числе. Часто в нормализованной записи мантисса p-ичного числа записывается в p-ичной системе счисления, а порядок и само число p — в десятичной.

Использование в компьютере представления чисел в формате с плавающей запятой усложняет выполнение арифметических операций. При сложении и вычитании чисел сначала производится подготовительная операция, называемая выравниванием порядков. Она состоит в том, что мантисса числа с меньшим порядком сдвигается в своей ячейке вправо на количество разрядов, равное разности порядков данных чисел. После этой операции одноименные разряды мантисс оказываются расположенными в одноименных разрядах обеих ячеек, и теперь уже сложение или вычитание мантисс выполняется достаточно просто — так же, как над числами с фиксированной запятой.

После операций над порядками и мантиссами мы получаем порядок и мантиссу результата, но последняя может не удовлетворять ограничениям, накладываемым на мантиссы нормализованных чисел. Поскольку от результата арифметических операций в компьютере требуется, чтобы он также был нормализованным числом, необходимо дополнительное преобразование результата — нормализация.

При умножении двух чисел с плавающей запятой их порядки необходимо просто сложить, а мантиссы — перемножить (предварительное выравнивание не производится). При делении из порядка делимого надо вычесть порядок делителя, а мантиссу делимого разделить на мантиссу делителя.

Пример 5. Записать десятичное число в нормализованной экспоненциальной форме: $0,00537$.

Решение

$0,00537 = 0,537 \cdot 10^{-2}$.

Пример 6. Выполнить операции с вещественными числами, результат записать в нормализованной экспоненциальной форме:

$a)\ 0,127 \cdot 10^{-1} + 0,315 \cdot 10^{2} = 0,0127 \cdot 10^{0} + 31,5 \cdot 10^{0} =$
$= 31,5127 \cdot 10^{0} = 0,315127 \cdot 10^{2};$
$b)\ 0,1214 \cdot 10^{2}\ \cdot\ 0,2 \cdot 10^{1} = 0,1214 \cdot 0,2 \cdot 10^{2+1} = 0,2428 \cdot 10^{3}.$

4.5 Вопросы и упражнения

Вопросы

1. Что такое система счисления?

2. Определение аддитивно-мультипликативной системы счисления.

3. Что такое основание системы счисления?

4. Сколько цифр нужно для записи чисел в двенадцатеричной системе счисления?

5. Сколько цифр нужно для записи чисел в двадцатеричной системе счисления?

6. Докажите, что для p-ичных систем счисления минимальным основанием является число 2.

7. Алгоритм перевода p-ичного числа в десятичное.

8. Алгоритм перевода целого десятичного числа в p-ичное.

9. Алгоритм перевода рационального десятичного числа в p-ичное.

10. Определение k-разрядного дополнительного кода отрицательного числа m.

11. Почему в компьютере отрицательные числа хранятся с помощью дополнительного кода?

12. Определение нормализованного экспоненциального представления вещественного числа.

13. Определение процедур дискретизации и квантования непрерывной информации. Привести примеры.

Упражнения

1. Записать таблицу умножения для системы счисления по основанию 3.

2. Записать таблицу умножения для системы счисления по основанию 4.

3. Во сколько увеличится заданное число, если приписать к нему справа ноль:
a) 325_6; b) 427_8; c) 132_4; d) 356_7; e) 10001_2; f) 1334_5?

4. Целое число, записанное в десятичной системе счисления, записать в двоичной, восьмеричной, шестнадцатеричной системах счисления. Результаты проверить:
a) 507; b) 434; c) 499; d) 455; e) 511; f) 473.

5. Вещественное число, записанное в десятичной системе счисления, записать в двоичной системе счисления до шестого знака после запятой. Результат проверить:
a) $258,347$; b) $198,603$; c) $301,555$; d) $207,909$; e) $311,575$; f) $457,457$.

6. Выполнить действия над числами, записанными в двоичной системе счисления. Результаты проверить:

   a) $1101110111 - 1010011$; $11101,1 \cdot 101$;

   b) $10011111 - 1000101$; $10101,1 \cdot 1,1$;

   c) $101011110 + 1111000$; $111111 \cdot 10,1$;

   d) $11110000 + 1010101$; $11000,1 \cdot 111$;

   e) $10000011 + 1111,11$; $101010 \cdot 1,11$;

   f) $10000111 - 111000$; $11001 \cdot 10,01$.

7. Получите десятичное значение числа по его дополнительному коду:

a) 10100111_2; b) 10100001_2; c) 10010001_2;
d) 10000111_2; e) 11001000_2; f) 11010010_2.

8. При проведении арифметических операций на ЭВМ в 8-разрядной беззнаковой арифметике какое значение будет получено в результате выполнения следующей операции:
a) $190_{10} + 69_{10}$; b) $234_{10} + 35_{10}$; c) $123_{10} + 155_{10}$?

9. При проведении арифметических операций на ЭВМ в 8-разрядной знаковой арифметике какое значение будет получено в результате выполнения следующей операции:
a) $88_{10} + 45_{10}$; b) $108_{10} + 32_{10}$; c) $55_{10} + 80_{10}$?

10. В двоичной системе счисления для заданных чисел выполните операцию (в восьмиразрядном знаковом представлении):
a) $120 - 99$; b) $113 - 54$; c) $101 - 73$.

11. В двоичной системе счисления для заданных чисел выполните операцию (в двухбайтовом знаковом представлении):
a) $199 - 85$; b) $201 - 113$; c) $155 - 37$.

12. Запишите десятичное число в нормализованной экспоненциальной форме:
a) $248,537$; b) $0,000331$; c) $23548,537$; d) $0,00537$; e) $2,718281828459045$; f) $3,141592654$.

Глава 5

Способы математических доказательств

В математике, как и в других науках, широко используются дедуктивные рассуждения. При этом доказательство истинности того или иного высказывания представляет собой цепочку умозаключений, проводимых по правилам вывода. В переводе на русский язык слово «дедукция» означает вывод.

По способу ведения доказательства делятся на прямые и косвенные. Прямое доказательство основывается на истинных фактах, из которых выводится истинность доказываемого утверждения. К прямым относятся все те доказательства, в которых не используются рассуждения «от противного».

При косвенном доказательстве истинность утверждения обосновывается с помощью опровержения противоречащего утверждения. То есть в ходе косвенного доказательства устанавливается ложность отрицания утверждения, что (согласно закону исключенного третьего) означает истинность самого утверждения. Примерами косвенных доказательств являются все доказательства способом от противного.

5.1 Метод математической индукции

Наряду с дедуктивными рассуждениями в математике, физике, биологии и других науках большую роль играют рассуждения, основанные на опыте и интуиции, так называемые индуктивные рассуждения.

Индукция — умозаключение, в котором на основе частных случаев выводятся общие суждения. Индукцией называется метод доказательства, при котором на основе частных случаев делается заключение относительно общего случая. Например, многочисленные опыты показывают, что камень, брошенный с некоторой высоты, падает вниз. Отсюда делается вывод, что брошенный камень всегда должен падать. Этот метод используется в естественных науках, где им приходится довольствоваться, так как все возможные варианты опробовать нельзя. Однако в математике такая индукция не может быть принята в качестве метода доказательства.

Умозаключение называется индуктивным [13, 4], если на основании того, что некоторые объекты класса обладают определенным свойством, делается вывод о том, что этим свойством обладают все объекты данного класса. Слово «индукция» в переводе на русский язык означает «наведение». Различают **полную** и **неполную индукцию**.

Полная индукция заключается в том, что общий случай разделяется на конечное число частных случаев, каждый из которых рассматривается отдельно. Поскольку при разделении и доказательстве каждого отдельного случая используются общие положения логики, то метод полной индукции на самом деле является дедуктивным.

Демонстрация любого конечного множества числовых примеров не является доказательством того, что утверждение справедливо для всех пар чисел, а поэтому рассуждения по неполной индукции могут привести к неправильным выводам.

Особое место в ряду способов математических доказательств занимает **метод математической индукции**, имеющий следующую формулировку.

Теорема 9. *Если утверждение $P(n)$ с целой неотрицательной переменной n истинно для числа 0 и из того, что оно истинно* *для некоторого произвольно выбранного целого неотрицательного числа k , следует его истинность для числа k' ($k' = k+1$), непосредственно следующего за k, то утверждение $P(n)$ истинно для любого целого неотрицательного числа n.*

Как следует из теоремы 9, доказательство методом математической индукции состоит из трех частей:

1. Сначала доказывают справедливость утверждения для $n = 0$ (или для минимально возможного значения n), то есть доказывают истинность высказывания $P(0)$.
2. Предполагают, что утверждение справедливо для $n = k$, где k — некоторое произвольно выбранное целое неотрицательное число, то есть предполагают истинность высказывания $P(k)$.
3. Пользуясь предположением, доказывают справедливость утверждения для $n = k + 1$, то есть доказывают истинность высказывания $P(k + 1)$.

Если условия 1 — 3 выполнены, т. е. $P(0) \wedge (P(k) \Rightarrow (P(k+1))$ — истинное высказывание, делают вывод о том, что утверждение $P(n)$ справедливо для любого целого неотрицательного числа n.

Метод математической индукции применим к утверждениям, содержащим свободную переменную по натуральным числам. Итак, в математической индукции имеются базис — утверждение, что свойство выполнено для самого маленького из рассматриваемых чисел, и шаг — обоснование перехода от числа n к числу $n + 1$.

Пример. Докажем, что для любого целого неотрицательного числа $n \geq 1$ истинно равенство $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n \cdot (n+1) = n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2)/3$.

Доказательство

1. Проверим истинность равенства для $n = 1$. В этом случае левая часть равенства состоит из одного слагаемого

$1 \cdot 2\,(1 \cdot 2 = 2)$, а правая часть имеет вид: $1 \cdot (1+1) \cdot (1+2)/3 = 1 \cdot 2 \cdot 3/3 = 2$. Так как $2 = 2$, то для $n = 1$ равенство истинно.

2. Предположим, что данное равенство истинно для $n = k$, где k — некоторое произвольно выбранное целое неотрицательное число, то есть предположим истинность равенства $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + k \cdot (k+1) = k \cdot (k+1) \cdot (k+2)/3$.

3. Пользуясь предположением, докажем, что данное равенство истинно для $n = k' = k+1$, то есть $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + k \cdot (k+1) + (k+1) \cdot (k+2) = (k+1) \cdot (k+2) \cdot (k+3)/3$. По предположению сумма первых k слагаемых левой части последнего равенства равна $k \cdot (k+1) \cdot (k+2)/3$, и левую часть можно записать в виде:

$$k \cdot (k+1) \cdot (k+2)/3 + (k+1) \cdot (k+2).$$

Правая часть равенства представима в виде:

$$(k+1) \cdot (k+2) \cdot (k+3)/3 = k \cdot (k+1) \cdot (k+2)/3 + (k+1) \cdot (k+2).$$

Следовательно, истинность равенства для $n = k+1$ доказана.

Таким образом, выполнены все условия метода математической индукции, значит, данное равенство истинно для любого целого неотрицательного числа $n > 1$.

5.2 Упражнения

Используя метод математической индукции, докажите, что для любого целого неотрицательного числа $n > 1$ истинны приведённые утверждения.

1. $1 + 5 + 9 + \ldots + (4n-3) = n \cdot (2n-1)$.

2. $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \ldots + n \cdot (3n+1) = n \cdot (n+1)^2$.

3. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)/6$.

4. $1/(1 \cdot 2) + 1/(2 \cdot 3) + \ldots + 1/(n \cdot (n+1)) = n/(n+1)$.

5. $(n^3 + 5 \cdot n)\, mod\, 6 = 0$, здесь mod — остаток от деления.
6. $(6^{2n-1} + 1)\, mod\, 7 = 0$.
7. $(4^n + 15 \cdot n - 1)\, mod\, 9 = 0$.
8. $(5^{2n-1} + 1)\, mod\, 6 = 0$.
9. $(n^3 - 7 \cdot n + 6)\, mod\, 6 = 0$.
10. $(1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3)\, mod\, 9 = 0$, $n > 1$.
11. Сумма первых n нечетных чисел равна n^2.
12. Докажите по индукции неравенство Бернулли $(1 + a)^n \geq$ $\geq 1 + an$ для всех $n \in N$ и $a > -1$, $a \in R$.
13. Докажите, используя метод математической индукции, что в полном графе с $n\,(n > 2)$ вершинами $n(n-1)/2$ ребер.

Глава 6

Элементы математической логики

6.1 Логика высказываний

Логика — наука, изучающая «понятия» с формальной точки зрения: методы их определения и преобразования, суждения о них и структуры доказательных рассуждений. Исследования в логике тесно связаны с изучением «высказываний» [5, 6, 8–11, 13, 15, 17–18, 20]. С помощью высказываний устанавливаются свойства, взаимосвязи между объектами. Высказывание истинно, если оно адекватно отображает эту связь, в противоположном случае оно ложно.

Определение 41. ***Высказывание*** *— повествовательное предложение (утверждение об объектах), имеющее однозначный, точно определенный смысл, о котором можно говорить: оно истинно или ложно.*

Это определение не математическое. С чисто математической точки зрения понятия высказывания и объекта являются исходными.

Определение 42. *Высказывание называется* ***простым*** *(элементарным, атомарным), если никакая его часть не является высказыванием.*

Сложные высказывания образуют из простых применением трех видов операций.

- **Логические связки** применяются к высказываниям, в результате образуют новое высказывание.
  Например: «не», «или», «не только ..., но и ...» и др.

- **Модальности** применяются к высказываниям и изменяют наше отношение к ним.
  Например: «по сведениям Западно-Сибирского гидрометцентра ...», «Маша сказала, что ...» и др.

- **Кванторные конструкции** применяются к совокупности однородных (отличающихся лишь значениями некоторых параметров) высказываний либо выражений и дают единое высказывание либо выражение, которые не зависят от упомянутых выше параметров.
  Например: «большинство...», «все...», «найдется...» и др.

Помимо высказываний, в естественном языке имеется множество предложений такой же грамматической структуры, которые принципиально не могут иметь четкой и однозначной интерпретации — истина это или ложь. Их мы называют **квазивысказываниями**.

- Единственными логическими значениями высказываний являются **истина** и **ложь**, обозначаемые 1 и 0 либо T и $\perp$ соответственно (TRUE и FALSE; ДА и НЕТ).

- Логическое значение сложного высказывания зависит лишь от логических значений его компонентов, а не от его смысла.

6.2 Логические связки

Для обозначения высказываний обычно используются прописные или строчные буквы латинского алфавита: A, B, C, X, Y, p, q, r, s, t и др. Составные высказывания получаются из простых при помощи так называемых логических связок (операций):

НЕ (отрицание), И (конъюнкция), ИЛИ (дизъюнкция), СЛЕДУЕТ (импликация), ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА, КОГДА (эквивалентность).

6.2.1 Связка НЕ

Утверждение «не А» символически записывается $\overline{A}$. Знак над буквой называется **отрицанием**. Эта же связка используется при переводе выражений «A неверно», «A ложно», «A не может быть» и т. п. $\overline{A}$ истинно, когда ложно A, и ложно, когда истинно A.

6.2.2 Связка И

Высказывание «A и B» символически записывается $A \wedge B$. Союзу И сответствует логическая связка $\wedge$. Символ $\wedge$ называется **конъюнкцией**. Эта связка применяется при переводе на формальный язык утверждений вида «A и B», «A, но и B также», «A вместе с B», «A, несмотря на B», «не только A, но и B», «как A, так и B», «A, хотя и B» и т. п. Все они переводятся одинаково: $A \wedge B$.

Утверждение $A \wedge B$ истинно в том и только том случае, когда истинны как A, так и B, и ложно во всех остальных случаях.

6.2.3 Связка ИЛИ

Высказывание «A или B» символически записывается $A \vee B$. Знак $\vee$ называется **дизъюнкцией**. Эта же связка применяется при переводе утверждений: «A или B, или оба вместе», «либо A, либо B», «A и (или) B» и т. п.

Утверждение $A \vee B$ считается истинным, если хотя бы одно из двух составляющих утверждений истинно, и ложным лишь тогда, когда они оба ложны.

6.2.4 Связка СЛЕДУЕТ

«Из A следует B» символически записывается: $A \Rightarrow B$. Знак $\Rightarrow$ называется **импликацией**. Другими вариантами содержательных утверждений, так же точно переводимых, служат: «A — достаточное условие для B», «B — необходимое условие для A», «A, только если B», «B, если A», «в случае, если A выполнено, то B», «A есть B».

Высказывание A называется условием (или посылкой), B — заключением (следствием).

Высказывание $A \Rightarrow B$ ложно тогда и только тогда, когда из истины следует ложь.

6.2.5 Связка ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА

«A тогда и только тогда, когда B» символически записывается $A \Leftrightarrow B$. Знак $\Leftrightarrow$ называется **эквивалентностью**. С использованием этой же связки записывают предложения: «A эквивалентно B», «A — необходимое и достаточное условие для B», «если A, то и B, и наоборот», и т. п.

Часто встречающееся выражение «тогда и только тогда, когда» будем сокращать ттт.

$A \Leftrightarrow B$ истинно ттт истинностные значения A и B совпадают, и ложно ттт их истинностные значения различны.

6.2.6 Таблицы истинности

Способы вычисления истинностных значений высказываний $\overline{A}$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \Rightarrow B$, $A \Leftrightarrow B$ можно резюмировать следующими таблицами:

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

6.3 Кванторные конструкции

6.3.1 ДЛЯ ВСЕХ

Утверждение «для всех x верно $A(x)$» символически записывается $\forall x A(x)$. Символ $\forall$ называется **квантором всеобщности** [5, 6, 11, 13, 17, 18]. Эта же связка используется при переводе утверждений: «A верно при любом значении x», «для произвольного x имеет место $A(x)$», «каково бы ни было x, справедливо $A(x)$» и т. п.

Утверждение $\forall x A(x)$ истинно ттт $A(x)$ истинно при любом фиксированном значении x.

Утверждение $\forall x A(x)$ ложно ттт имеется хотя бы одно конкретное значение x, — такое, что $A(x)$ ложно.

Заметим, что таблицы истинности для связок исчисления высказываний можно применять чисто механически, в частности, вычислять логические значения формул на ЭВМ. Определение же истинностного значения формулы $\forall x A(x)$ не всегда сводится к простому вычислению. Например, при данных конкретных натуральных x, y, z, n утверждение $x^{n+2} + y^{n+2} \neq z^{n+2}$ можно проверить простым вычислением, а проблема, верно или неверно на множестве N утверждение $\forall x \, \forall y \, \forall z \, \forall n (x^{n+2} + y^{n+2} \neq z^{n+2})$, сформулировано более 300 лет назад, и только в девяностые годы XX века найден способ его доказательства. Эта проблема известна под названием великой теоремы Ферма. На обычном математическом языке она формулируется следующим образом:

уравнение $x^n + y^n = z^n$ при $n > 2$ не имеет решений в положительных целых числах.

6.3.2 СУЩЕСТВУЕТ

Утверждение «существует такое x, что $A(x)$» записывается на языке математики как $\exists x A(x)$. Знак $\exists$ называется **квантором существования** [5, 6, 11, 13, 17, 18]. Эта же запись применяется при переводе утверждений: «$A(x)$ верно при некоторых x», «$A(x)$ иногда верно», «есть такое x, при котором $A(x)$», «можно найти такое x, при котором $A(x)$» и т. п.

Высказывание $\exists x A(x)$ истинно, если в нашем универсе найдется хотя бы одно значение c, при котором $A(c)$ истинно. $\exists x A(x)$ ложно, если при любом значении c ложно $A(c)$. Нахождение истинностного значения $\exists x A(x)$ также может составлять проблему. Например, натуральное число n называется совершенным, если сумма его делителей (исключая само n) равна n. Например: 6 — совершенное число, т. к. $6 = 1 + 2 + 3$; 28 также совершенное число, т. к. $28 = 1+2+4+7+14$. Ясно, что при данном n проверка условия «n — совершенное число» является чисто механическим процессом; ее можно поручить компьютеру. Но проблема «существует ли нечетное совершенное число?» стоит уже более 2000 лет, и пока нет способа ее решения.

Заметим, что утверждение $\exists x A(x)$ не отрицает того, что $\forall x A(x)$. В жизни же порою словом «некоторые» подчеркивают смысл «не все». Итак, кванторы $\forall$ и $\exists$ всегда употребляются вместе с переменной x и заставляют ее «пробегать» весь универс.

Различные обозначения логических связок и кванторов

Конъюнкция:

$$A \wedge B,\ A\&B,\ A \cdot B,\ A\, and\, B.$$

Дизъюнкция:

$$A \vee B,\ A + B,\ A\, or\, B.$$

Импликация:

$$A \Rightarrow B,\ A \supset B,\ A \to B,\ A\, impl\, B,$$

Эквивалентность:

$$A \Leftrightarrow B,\ A \equiv B,\ A \leftrightarrow B,\ A = B,\ A \sim B,\ A\, eq\, B.$$

Отрицание:

$$\overline{A},\ -A,\ \neg A,\ \sim A,\ not\, A.$$

Всеобщность:

$$\forall x A(x),\ (x)A,\ \Pi_x A,\ \wedge_x A,\ (\underline{A}x)A.$$

Существование:

$$\exists x A(x),\ (Ex)A,\ \Sigma_x A,\ \vee_x A,\ (\underline{E}x)A.$$

6.4 Предикаты и элементарные формулы

Пусть имеется совокупность некоторых объектов (предметов). Чтобы образовать высказывание из предметов, нужно соединить их **отношением**; n-местное отношение — это операция, сопоставляющая n предметам высказывание.

В логике для единообразия будем пользоваться записью $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, чтобы обозначить высказывание, образованное применением n-местного отношения к предметам $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Символ P, обозначающий отношение, называется предикатом [5, 6, 10, 11, 13, 15–18]. «Предикат» и «отношение» соотносятся как имя и предмет, им обозначаемый. Но в математике эти два понятия употребляются часто как синонимы.

Элементарные формулы имеют вид: $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, где P — n-местный предикат, $t_1, t_2, \ldots, t_n$ — термы (аргументы). В обычной математике элементарные формулы называются просто формулами. Сложные формулы строятся из элементарных. Задавая язык конкретной математической теории, непосредственно определяют именно элементарные формулы и их смысл. Для того чтобы задать элементарные формулы, необходимо определить предикаты и термы. А чтобы задать термы, нужно определить сорта объектов, константы и операции. В совокупности предикаты, сорта, константы, операции составляют словарь (сигнатуру) теории как способ записи высказываний.

Логика предикатов — новая логическая система, являющаяся развитием логики высказываний. Предикат — это то, что высказывается (утверждается или отрицается) в суждении об объекте, предмете.

Логические формулы. Выражения, с помощью которых записываются высказывания в формальном языке, называются логическими формулами, или просто формулами. Обычные математические формулы являются простейшим случаем логических (так называемые элементарные формулы).

С чисто формальной точки зрения предикаты (отношения) можно рассматривать как функции, сопоставляющие своим аргументам истинностные значения, т. е. функции, принимающие всего два значения: **истина** и **ложь**.

Функция, сопоставленная предикату «$<$», «перерабатывает» пару чисел x, y в 1, если $x < y$, и в 0, если $x \geq y$. Таким образом, принимается следующая гипотеза.

- Как только будет задана интерпретация и зафиксированы значения всех встречающихся в элементарной формуле переменных, становится известным и логическое значение элементарной формулы.

Предикат называется разрешимым, если существуют такие кортежи, компоненты которых обращают предикат в истинное высказывание.

Если предикат при подстановке **любых** конкретных элементов из соответствующих множеств обращается в истинное высказывание, то он называется тождественно **истинным**.

Если предикат при подстановке **любых** конкретных элементов из соответствующих множеств обращается в ложное высказывание, то он называется тождественно **ложным**.

К предикатам, определенным на одном и том же множестве, можно применять операции алгебры высказываний: конъюнкцию, дизъюнкцию, импликацию, эквивалентность, отрицание — и получать новые предикаты.

Конечную последовательность букв, знаков операций и скобок, выражающую логическую структуру высказывания, называют **формулой логики высказываний**. Дадим строгое определение формулы логики высказываний.

1. Символы логических констант 1 и 0 являются формулами.

2. Каждая логическая переменная A, B, C, D,... является формулой.

3. Если A и B — формулы, то $\overline{A}$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \Rightarrow B$, $A \Leftrightarrow B$ — формулы.

4. Других формул в логике высказываний нет.

Формулы, указанные в пунктах 1 и 2, называются элементарными формулами. Скобки в формуле указывают порядок выполнения операций (как в алгебре). Для уменьшения количества скобок и сокращения записи принят следующий порядок выполнения операций: 1) отрицание; 2) конъюнкция; 3) дизъюнкция; 4) импликация; 5) эквивалентность.

Каждая формула задает логическую функцию — функцию от логических переменных, которая сама может принимать только два логических значения. Логические функции могут быть заданы табличным способом или аналитически — в виде соответствующих формул.

Если формула не содержит кванторов и переменных, то ее значение полностью определяется конечным набором значений элементарных формул, из которых она построена. Если таких строительных блоков n, то достаточно перебрать 2^n их значений, чтобы выяснить характер зависимости значения формулы от значений ее компонентов. Систематический перебор всех вариантов значений элементарных блоков и вычисление для них значений формулы и дает таблицу истинности.

В качестве примера построим таблицу истинности для формулы $(A \Rightarrow B \vee C) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$.

A	B	C	$B \vee C$	$A \Rightarrow B \vee C$	$A \Rightarrow B$	Формула
0	0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	1
1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

Здесь три логических переменных: A, B, C, следовательно, имеется 2^3 различных комбинаций их значений, размещенных в трёх первых столбцах. Остальные столбцы заполняются согласно таблице истинности для соответствующих высказываний.

Перебрав восемь возможных значений переменных, мы отыскали то единственное, при котором формула ложна. Если бы такового не оказалось, то формула могла бы считаться логически истинной и применяться невзирая на интерпретацию, а в обычной математике вообще безусловно. Поэтому в логике интересны формулы, тождественно истинные при любой интерпретации, им дали название **тавтологии**. Особое место среди тавтологий занимают эквивалентности — тавтологии вида $A \Leftrightarrow B$.

Установленная эквивалентность дает возможность повсюду заменять выражения A и B друг на друга.

Определение 43. *Замкнутые формулы, не содержащие кванторов, называются **пропозициональными**. Подъязык логики предикатов, состоящий из пропозициональных формул, называется пропозициональным языком или языком логики высказываний.*

Рассмотренная выше формула $(A \Rightarrow B \vee C) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ является пропозициональной.

Оценивание пропозициональной формулы — это нахождение функции, ставящей в соответствие всем ее различным элементарным подформулам **истину** либо **ложь**. Таблица истинности — это функция, которая сопоставляет каждому возможному оцениванию значение формулы при этом оценивании. Поскольку элементарных подформул у формулы конечное число и каждая из них может принимать лишь два значения, то составление таблицы истинности — конечная процедура (см. пример, рассмотренный выше).

Пропозициональная формула является **тавтологией** тогда и только тогда, когда ее таблица истинности является функцией, тождественно равной истине, т. е. 1. Она является **противоречием**, если таблица тождественно равна лжи, т. е. 0.

Тавтологии и противоречия важны для логики потому, что они не зависят от конкретной формализации предметной области. Далее, применение тавтологий дает общие средства вывода следствий и преобразования формул.

6.5 Алгебра логики

Алгебра логики как раздел математической логики изучает строение сложных логических высказываний (логических формул) и способы установления их истинности с помощью алгебраических методов [5–7, 9–11, 14, 15, 17–18]. Основные объекты, изучаемые в этом разделе, — формулы алгебры логики, состоящие из букв, знаков логических операций и скобок.

Алгебра логики — алгебра, образованная множеством $B = \{0, 1\}$ вместе со всеми возможными операциями на нем. В математической логике, как и в алгебре, операции подчиняются определенным законам, с помощью которых можно упрощать составные высказывания. Имеют место следующие формулы.

1. Идемпотентность дизъюнкции и конъюнкции: $x \vee x \Leftrightarrow x$, $x \wedge x \Leftrightarrow x$.

2. Коммутативность дизъюнкции и конъюнкции: $x \vee y \Leftrightarrow y \vee x$, $x \wedge y \Leftrightarrow y \wedge x$.

3. Ассоциативность дизъюнкции и конъюнкции: $x \vee (y \vee z) \Leftrightarrow (x \vee y) \vee z$, $x \wedge (y \wedge z) \Leftrightarrow (x \wedge y) \wedge z$.

4. Дистрибутивность операций дизъюнкции и конъюнкции относительно друг друга: $x \vee (y \wedge z) \Leftrightarrow (x \vee y) \wedge (x \vee z)$, $x \wedge (y \vee z) \Leftrightarrow (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

5. Двойное отрицание: $\overline{\overline{x}} \Leftrightarrow x$.

6. Законы де Моргана: $\overline{x} \vee \overline{y} \Leftrightarrow \overline{x \wedge y}$, $\overline{x} \wedge \overline{y} \Leftrightarrow \overline{x \vee y}$.

7. Склеивание: $(x \vee y) \wedge (x \vee \overline{y}) \Leftrightarrow x$, $(x \wedge y) \vee (x \wedge \overline{y}) \Leftrightarrow x$.

8. Поглощение: $x \vee (x \wedge y) \Leftrightarrow x$, $x \wedge (x \vee y) \Leftrightarrow x$.

9. Действия с логическими константами 0 и 1: $x \vee 0 \Leftrightarrow x$, $x \wedge 0 \Leftrightarrow 0$, $x \vee 1 \Leftrightarrow 1$, $x \wedge 1 \Leftrightarrow x$, $x \wedge \overline{x} \Leftrightarrow 0$, $\overline{1} \Leftrightarrow 0$, $\overline{0} \Leftrightarrow 1$.

10. Закон исключения третьего: $x \vee \overline{x} \Leftrightarrow 1$.

11. Тождество: $x \Leftrightarrow x$.

12. Отрицание противоречия: $\overline{x \wedge \overline{x}} \Leftrightarrow 1$.

13. Контрапозиция: $(x \Rightarrow y) \Leftrightarrow (\overline{y} \Rightarrow \overline{x})$.

14. Цепное заключение: $((x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow z)) \Leftrightarrow (x \Rightarrow z)$.
15. Противоположность: $(y \Rightarrow x) \Leftrightarrow (\overline{x} \Rightarrow \overline{y})$.
16. Модус поненс (*modus ponens* — правило вывода):
    $(x \wedge (x \Rightarrow y)) \Rightarrow y \Leftrightarrow 1$.

Все данные законы проверяются с помощью таблиц истинности. При исследовании высказываний на эквивалентность (равносильность) логическую связку $\Leftrightarrow$ можно заменять обычным знаком равенства $=$.

Некоторые эквивалентные формулы с кванторами.

1. Законы де Моргана:
   $\overline{\forall\, x \in M,\, P(x)} \Leftrightarrow \exists\, x \in M,\, \overline{P(x)}$;
   $\overline{\exists\, x \in M,\, P(x)} \Leftrightarrow \forall\, x \in M,\, \overline{P(x)}$.

Квантор всеобщности является обобщённым аналогом конъюнкции, а квантор существования — обобщённым аналогом дизъюнкции на любое (не обязательно конечное) множество. Действительно, пусть $P(x)$ — предложение с переменной x, определенное на множестве $M = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Тогда справедливы утверждения:

2. $\forall\, x \in M,\, P(x) \Leftrightarrow P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \ldots \wedge P(a_n)$;
   $\exists\, x \in M,\, P(x) \Leftrightarrow P(a_1) \vee P(a_2) \vee \ldots \vee P(a_n)$.

Любую логическую функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можно задать таблицей истинности, в левой части которой выписаны все возможные наборы значений ее аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а правая часть представляет собой столбец значений функций, соответствующих этим наборам. Набор значений переменных, на котором функция принимает значение $f = 1$, называется единичным набором функции f; множество всех единичных наборов — единичным множеством функции f. Аналогично: набор значений, на котором $f = 0$, называется нулевым набором функции f, а множество нулевых наборов — нулевым множеством.

Число всех возможных различающихся наборов значений n переменных логической функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ равно 2^n (числу всех возможных двоичных векторов длины n). Число всех различных функций n переменных равно числу возможных расстановок нулей и единиц в столбце с 2^n строками, т. е. равно $\overline{A}_2^{2^n} = 2^{2^n}$.

Рассмотрим множество всех логических функций одной переменной ($n = 1$), так называемых унарных логических операций. Число таких функций: $2^{2^1} = 2^2 = 4$. Далее в таблице: в первом столбце — значение переменной x, в нижней строке — обозначение логических операций для каждой из 4 функций:

x	f_0	f_1	f_2	f_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1
	0	x	$\overline{x}$	1

Функции f_0 и f_3 — константы 0 и 1 соответственно. Значения этих функций не зависят от переменной x; в таких случаях говорят, что переменная x для этих функций является несущественной (фиктивной); функции $f_1(x) = x$ — повторение переменной, $f_2(x) = \overline{x}$ — отрицание переменной.

Число всех логических функций двух переменных — бинарных логических операций — равно $2^{2^2} = 2^4 = 16$, из которых шесть имеют фиктивные переменные. В нижний дополнительной строке таблицы указаны обозначения логических операций, осуществляемых этими функциями:

x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1
		0	$x_1 \wedge x_2$	$\overline{x_1 \Rightarrow x_2}$	x_1	$\overline{x_2 \Rightarrow x_1}$	x_2	$x_1 \oplus x_2$	$x_1 \vee x_2$

x_1 x_2	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0 0	1	1	1	1	1	1	1	1
0 1	0	0	0	0	1	1	1	1
1 0	0	0	1	1	0	0	1	1
1 1	0	1	0	1	0	1	0	1
	$x_1 \downarrow x_2$	$x_1 \Leftrightarrow x_2$	$\overline{x}_2$	$x_2 \Rightarrow x_1$	$\overline{x}_1$	$x_1 \Rightarrow x_2$	$x_1 \vert x_2$	1

Среди полученных функций имеются ранее не определенные логические операции (связки): $f_6 = x_1 \oplus x_2$ — сложение по модулю 2 (исключающее ИЛИ); $f_8 = x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1 \vee x_2}$ — стрелка Пирса; $f_{14} = x_1|x_2 = \overline{x_1 \wedge x_2}$ — штрих Шеффера.

Таким образом, формула наряду с таблицей служит способом задания и вычисления функции. В общем случае формула описывает логическую функцию как суперпозицию других более простых функций.

Эквивалентными, или равносильными, называются формулы, представляющие одну и ту же функцию (эквивалентность формул в алгебре логики обозначается знаком =).

Стандартный метод установления эквивалентности двух формул:

1) для каждой формулы составляется таблица истинности;
2) полученные таблицы сравниваются по каждому набору значений переменных (стандартный метод требует $2 \cdot 2^n$ вычислений).

Одна и та же логическая функция может быть задана формулами, включающими различные наборы логических операций. Например:

$$x_1 \mid x_2 = \overline{x_1 \wedge x_2} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2}.$$

Рассмотрим некоторые важнейшие алгоритмы преобразования формул — формулировки отрицаний и построения двойственных функций.

Алгоритм формулировки отрицаний. Под формулировкой отрицаний подразумевается эквивалентное преобразование формулы $\overline{A}$ таким образом, чтобы операция отрицания применялась лишь к элементарным формулам. Рассмотренные законы (стр. 108) приводят к следующему алгоритму.

1. Если мы пришли к элементарной формуле, оставляем перед ней отрицание и заканчиваем работу.

2. Если A есть $B \vee C$, заменяем $\vee$ на $\wedge$ и формулируем отрицания B, C.

3. Если A есть $B \wedge C$ или $B \Rightarrow C$, заменяем $\wedge$ либо $\Rightarrow$ друг на друга, формулируем отрицание заключения C, оставляя посылку B без изменения.

4. Если A есть $\overline{B}$, отбрасываем оба отрицания и оставляем B без изменения.

5. Если A есть $\forall x B$ или $\exists x B$, то заменяем кванторы друг на друга и формулируем отрицание B.

Например, рассмотрим тождественное преобразование формулы

$$\overline{A \Rightarrow (B \vee C)} = A \wedge \overline{(B \vee C)} = A \wedge \overline{B} \wedge \overline{C}.$$

Несложно проверить с помощью таблиц истинности эквивалентность полученных формул.

Формулировка отрицания является также шагом проверки переводов на формальный язык и выбора из них более приемлемого.

Принцип двойственности булевых функций. Двойственность — это термин математической логики, применяемый в случае таких пар понятий, как конъюнкция и дизъюнкция, квантор общности и квантор существования. Двойственная функция — это функция, полученная из исходной путём замены в ней всех переменных на противоположные. Закон двойственности гласит: если формулы A и B равносильны, то и двойственные им формулы A^* и B^* также равносильны. В теории исчисления высказываний этот закон назван принципом двойственности.

Определение 44. *Функция $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется* ***двойственной*** *функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)}$, и обозначается f^*.*

Пример построения двойственной функции:

$$(x \wedge y)^* = \overline{(\overline{x} \wedge \overline{y})} = x \vee y.$$

Несложно показать, что функция, двойственная к двойственной функции f, равна самой функции f.

Рассмотрим, что происходит с таблицей двойственной функции. Замена набора $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ соответствует «переворачиванию» таблицы истинности. Действительно, наборы $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ расположены симметрично относительно середины таблицы. Теперь остаётся применить операцию отрицания к результату функции, т. е. поменять 0 на 1 и 1 на 0. Вектор значений функции, двойственной к исходной, получается из вектора исходной функции переворачиванием и заменой 0 на 1, 1 на 0.

Функции $x \wedge y$ и $x \vee y$, задаваемые векторами значений $(0, 0, 0, 1)$ и $(0, 1, 1, 1)$, двойственны друг к другу. Также двойственными являются $x \oplus y$ и $x \Leftrightarrow y$, задаваемые векторами $(0, 1, 1, 0)$ и $(1, 0, 0, 1)$. Каждая из функций x и $\overline{x}$ (векторы $(0, 1)$ и $(1, 0)$ соответственно) двойственна сама себе. Если в логическом тождестве заменить каждую функцию на двойственную ей, снова получится верное тождество.

Пример. С помощью эквивалентных преобразований сформулировать отрицание и найти функцию двойственную заданной, результат проверить с помощью таблицы истинности.

$$f(x,y,z) = (x \vee y) \Rightarrow (y \wedge \overline{z}).$$

Решение

$\overline{f(x,y,z)}$ — отрицание.

$$\overline{f(x,y,z)} = \overline{(x \vee y) \Rightarrow (y \wedge \overline{z})} = (x \vee y) \wedge \overline{(y \wedge \overline{z})} = (x \vee y) \wedge (y \Rightarrow \overline{\overline{z}}) =$$

$$= (x \vee y) \wedge (y \Rightarrow z).$$

$f^*(x,y,z)$ — двойственная функция.

$$f^*(x,y,z) = \overline{f(\overline{x},\overline{y},\overline{z})} = \overline{(\overline{x} \vee \overline{y}) \Rightarrow (\overline{y} \wedge \overline{\overline{z}})} =$$

$$= \overline{(\overline{x} \vee \overline{y}) \Rightarrow (\overline{y} \wedge z)} = (\overline{x} \vee \overline{y}) \wedge \overline{(\overline{y} \wedge z)} = (\overline{x} \vee \overline{y}) \wedge (\overline{y} \Rightarrow \overline{z}).$$

Проверка

x	y	z	$x \vee y$	$\overline{z}$	$y \wedge \overline{z}$	$f(x,y,z)$	$y \Rightarrow z$	$\overline{f(x,y,z)}$
0	0	0	0	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	0	1	1	0
0	1	0	1	1	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	1	1	0	0	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1	0	0
1	1	1	1	0	0	0	1	1

x	y	z	$\overline{x}$	$\overline{y}$	$\overline{z}$	$\overline{x} \vee \overline{y}$	$\overline{y} \Rightarrow \overline{z}$	$f^*(x,y,z)$
0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1	0	0
0	1	0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0	0
1	1	0	0	0	1	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0	1	0

x	y	z	$f(x,y,z)$	$\overline{f(x,y,z)}$	$f^*(x,y,z)$
0	0	0	1	0	1
0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	0	1	0

Существуют наборы логических функций (операций), с помощью которых можно выразить любые другие логические функции. Такие наборы называют **функционально полными системами**, или **базисами**. Функционально полные системы характеризуются определенным набором свойств составляющих их функций.

Систему S функций $f_1, f_2, \ldots, f_m$ алгебры логики называют функционально полной, если любую функцию алгебры логики можно записать с помощью суперпозиции некоторого набора логических функций $f_1, f_2, \ldots, f_m$.

Очевидно, что если S — функционально полная система, то добавление любого числа функций не изменит статуса системы как функционально полной. Функционально полная система функций называется базисом в пространстве P_2, если удаление хотя бы одной из функций, входящих в неё, превращает эту систему в функционально неполную.

Наиболее изученным является базис $\{\wedge, \vee, ^-\}$.

Формулы, содержащие кроме переменных (и скобок) только знаки функций конъюнкции, дизъюнкции и отрицания $\{\wedge, \vee, ^-\}$ (И, ИЛИ, НЕ), называются **булевыми**. Справедлива следующая теорема.

Теорема 10. *Всякая логическая функция может быть пред-*

ставлена булевой формулой, т. е. как суперпозиция дизъюнкции, конъюнкции и отрицания.

Из этой теоремы следует, что система булевых функций (операций) $\Sigma = \{\wedge, \vee, ^{-}\}$ функционально полна.

Наряду с определением свойств функций набора для доказательства его функциональной полноты достаточно показать, что через функции набора можно выразить дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание.

Алгебра $(P_2; \wedge, \vee, ^{-})$, основным множеством которой является множество всех логических функций P_2, а операциями — конъюнкция, дизъюнкция и отрицание, называется **булевой алгеброй логических функций**. Операции и формулы булевой алгебры часто называют булевыми.

6.6 Канонические формы логических формул

Формулу называют **элементарной конъюнкцией**, если она является конъюнкцией одной или нескольких переменных, взятых с отрицанием или без отрицания. Одну переменную или её отрицание считают одночленной элементарной конъюнкцией.

Формула называется **дизъюнктивной нормальной формой** (ДНФ), если она является дизъюнкцией неповторяющихся элементарных конъюнкций. ДНФ записывается в виде $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$, где каждое A_i — элементарная конъюнкция.

Примеры ДНФ: $x_2 \vee (x_1 \wedge x_3)$; $\overline{x}_2 \vee (x_2 \wedge x_1) \vee \overline{x}_1$.

Формула A от k переменных называется **совершенной дизъюнктивной нормальной формой** (СДНФ), если:

1) A является ДНФ, в которой каждая элементарная конъюнкция A_i есть конъюнкция k переменных $x_1, x_2, \ldots, x_k$, причем на i-м месте этой конъюнкции стоит либо переменная x_i, либо её отрицание;
2) все элементарные конъюнкции A_i в такой ДНФ попарно различны.

Например, формула $A = x_1 \wedge \overline{x}_2 \vee x_1 \wedge x_2$ есть СДНФ от двух переменных. Формулы $B = x_1 \vee x_2 \wedge x_3$ и $C = x_1 \wedge x_2 \vee x_2 \wedge \overline{x}_2$ не являются СДНФ. Формула B зависит от трех переменных, но количество переменных в элементарных конъюнкциях x_1 и $x_2 \wedge x_3$ меньше трех. В формуле C переменная x_2 дважды входит в одну и ту же элементарную конъюнкцию.

Формулу называют **элементарной дизъюнкцией**, если она является дизъюнкцией одной или нескольких переменных, взятых с отрицанием или без отрицания. Одну переменную или её отрицание считают одночленной элементарной дизъюнкцией.

Формула называется **конъюнктивной нормальной формой** (КНФ), если она является конъюнкцией неповторяющихся элементарных дизъюнкций. КНФ записывается в виде $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$, где каждое A_i — элементарная дизъюнкция.

Примеры КНФ: x_2, $\overline{x}_2$, $x_1 \vee x_2$, $(\overline{x}_2 \vee x_1) \wedge x_3$, $(\overline{x}_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_3)$.

Формула A от k переменных называется **совершенной конъюнктивной нормальной формой** (СКНФ), если:

1) A является КНФ, в которой каждая элементарная дизъюнкция A_i есть дизъюнкция k переменных $x_1, x_2, \ldots, x_k$, причем на i-м месте этой дизъюнкции стоит либо переменная x_i, либо её отрицание;
2) все элементарные дизъюнкции A_i в такой КНФ попарно различны.

Например, формула $A = (x_1 \vee \overline{x}_2) \wedge (x_1 \vee x_2)$ есть СКНФ от двух переменных. Формула $B = (x_1 \vee \overline{x}_1) \wedge (x_2 \vee x_3)$ не является СКНФ, поскольку в первую дизъюнкцию x_1 входит дважды, кроме того, функция зависит от трех переменных, а в каждой элементарной дизъюнкции переменных только две.

Любую булеву функцию, не равную тождественно 0 или 1, можно представить в виде СДНФ или СКНФ. Справедливы следующие две теоремы.

Теорема 11. *Пусть f — булева функция от n переменных,* *не равная тождественно нулю. Тогда существует совершенная дизъюнктивная нормальная форма, выражающая функцию f.*

Для каждой функции СДНФ единственна (с точностью до перестановок переменных или конъюнкций).

Теорема 12. *Пусть f — булева функция от n переменных, не равная тождественно единице. Тогда существует единственная совершенная конъюнктивная нормальная форма, выражающая функцию f.*

На основании этих утверждений существуют алгоритмы приведения ДНФ к СДНФ и КНФ к СКНФ, и наоборот.

Рассмотрим алгоритм приведения ДНФ к СДНФ. Если в какой-либо элементарной конъюнкции переменных меньше, то в неполную элементарную конъюнкцию необходимо ввести дополнительный множитель, включающий дизъюнкцию отсутствующей переменной и её отрицание. Это всегда можно сделать, так как согласно закону инверсии $\overline{x} \vee x = 1$, а $1 \wedge x = x$.

Далее для удобства операцию конъюнкции $\wedge$ будем обозначать точкой. Например, в ДНФ $x_1 \vee x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3$ в первой элементарной конъюнкции необходимо иметь x_2 и x_3 или их отрицание. Для этого дважды умножим x_1 на 1, чтобы затем эти единицы заменить дизъюнкциями $x_2 \vee \overline{x}_2$ и $x_3 \vee \overline{x}_3$ соответственно:

$$\begin{gathered}
F(x_1, x_2, x_3) = x_1 \vee x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3 = x_1 \cdot 1 \cdot 1 \vee x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3 = \\
= x_1 \cdot (x_2 \vee \overline{x}_2) \cdot (x_3 \vee \overline{x}_3) \vee x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3 = \\
= (x_1 \cdot x_2 \vee x_1 \cdot \overline{x}_2) \cdot (x_3 \vee \overline{x}_3) \vee x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3 = \\
= x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \vee x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot x_3 \vee x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x}_3 \vee x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3 \vee x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3 = \\
= x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \vee x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot x_3 \vee x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x}_3 \vee x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3.
\end{gathered}$$

Полученная ДНФ является совершенной.

6.6.1 Алгоритм построения СДНФ по таблице истинности

1. В таблице истинности функции отмечаем наборы переменных, соответствующих значению 1 (*единичные наборы переменных*).
2. Записываем для каждого отмеченного набора конъюнкцию всех переменных следующим образом: если значение некоторой переменной в этом наборе равно 1, то в конъюнкцию включаем саму переменную, в противном случае — её отрицание.
3. Все полученные конъюнкции связываем операциями дизъюнкции.

Например, построим СДНФ для функции, $f(x_1, x_2, x_3) = (\overline{x}_1 \vee x_2) \Rightarrow\Rightarrow (x_1 \wedge x_3)$.

x_1	x_2	x_3	$\overline{x}_1$	$\overline{x}_1 \vee x_2$	$x_1 \wedge x_3$	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	1	1	0	0
1	**0**	**0**	0	0	0	**1**
1	**0**	**1**	0	0	1	**1**
1	1	0	0	1	0	0
1	**1**	**1**	0	1	1	**1**

СДНФ имеет вид: $x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3 \vee x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot x_3 \vee x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = f(x_1, x_2, x_3)$.

Алгоритм приведения КНФ к СКНФ: если в какой-либо элементарной дизъюнкции переменных меньше, то неполную элементарную дизъюнкцию дополним логическим нулем, который в следующем шаге заменяется на конъюнкцию недостающей переменной и её отрицания: $\overline{x} \wedge x = 0$.

Для примера рассмотрим функцию

$$F(x_1, x_2, x_3) = (\overline{x}_1 \vee x_3) \cdot (x_2 \vee \overline{x}_3) \cdot (x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3).$$

Это КНФ, в первых скобках нет x_2, а во вторых x_1. В результате имеем:

$$F(x_1, x_2, x_3) = (\overline{x}_1 \vee 0 \vee x_3) \cdot (0 \vee x_2 \vee \overline{x}_3) \cdot (x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3) =$$

$$= (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \cdot x_2 \vee x_3) \cdot (\overline{x}_1 \cdot x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3) \cdot (x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3) =$$

$$= ((\overline{x}_1 \vee x_2) \cdot (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2) \vee x_3) \cdot ((x_1 \vee x_2) \cdot (\overline{x}_1 \vee x_2) \vee \overline{x}_3) \cdot (x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3) =$$

$$= (\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \cdot (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3) \cdot (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3) \cdot (\overline{x}_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3) \cdot (x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3).$$

Полученная конъюнктивная нормальная форма является совершенной.

6.6.2 Алгоритм построения СКНФ по таблице истинности

1. В таблице истинности функции отмечаем все наборы переменных, соответствующих значению 0 (*нулевые наборы переменных*).
2. Записываем для каждого отмеченного набора дизъюнкцию всех переменных следующим образом: если значение некоторой переменной в этом наборе равно 0, то в дизъюнкцию включаем саму переменную, в противном случае — её отрицание.
3. Все полученные дизъюнкции связываем операциями конъюнкции.

Замечание. Функция алгебры логики однозначно может быть задана таблично, но этот способ достаточно громоздкий, более компактное её представление — *числовая форма.* Например:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bigvee_1 (0, 1, 3, 6, 7).$$

Эта запись означает, что функция трёх переменных принимает значения, равные 1, на наборах переменных, номера которых $0, 1, 3, 6, 7$, т. е. её единичное множество:

$$\{(0,0,0);(0,0,1);(0,1,1);(1,1,0);(1,1,1)\}.$$

Ту же функцию можно записать, зафиксировав нулевые наборы:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bigwedge_0 (2, 4, 5).$$

Рассмотренные булевы функции представлены в виде суперпозиции элементарных функций И, ИЛИ, НЕ. Используя законы алгебры логики, можно заменить громоздкие булевы функции им равносильными, но более простыми. Такой процесс называется **минимизацией булевых функций**. Её проводят для упрощения сложных логических выражений в программах, а также для того, чтобы построенные на их основе функциональные схемы не содержали лишних элементов.

6.6.3 Минимизация булевых функций. Карты Карно

Минимизировать нормальные формы можно различными способами: методом каскадов, с помощью карт Карно и другими. Минимальная (сокращенная) нормальная форма получается из совершенной конъюнктивной (дизъюнктивной) нормальной формы удалением некоторых элементарных дизъюнкций (конъюнкций).

Тупиковой нормальной формой называется КНФ (ДНФ), из которой нельзя удалить ни одной элементарной конъюнкции (дизъюнкции) так, чтобы сохранить неизменной заданную булеву функцию. Для представления булевой функции в таком виде необходимо сначала представить её в совершенном виде и только затем минимизировать до минимальной из всех тупиковых форм.

Карты Карно являются одним из наиболее удобных способов минимизации. Они впервые были представлены в статье Мориса Карно в 1953 г. Это специальные таблицы, дающие возможность упростить процесс поиска минимальной формы булева выражения с помощью графического представления для $n \le 6$. Они имеют вид прямоугольника, разделенного на 2^n клеток, каждая из которых содержит двоичный n-мерный набор значений функции F из таблицы истинности.

Для $n = 2$ карта Карно имеет вид таблицы, состоящей из $2^2 = 4$ клеток.

изменение x_1

изменение x_2

$\overline{x}_1\overline{x}_2$	$x_1\overline{x}_2$
$\overline{x}_1 x_2$	$x_1 x_2$

или

00	10
01	11

При $n = 3$ карты Карно имеют вид с $2^3 = 8 = 2 \times 4$ клетками.

Карта Карно для булевых функций трех переменных:

изменение x_2x_3

изменение x_1

$\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3$	$\overline{x}_1\overline{x}_2 x_3$	$\overline{x}_1 x_2 x_3$	$\overline{x}_1 x_2\overline{x}_3$
$x_1\overline{x}_2\overline{x}_3$	$x_1\overline{x}_2 x_3$	$x_1 x_2 x_3$	$x_1 x_2\overline{x}_3$

или

000	001	011	010
100	101	111	110

Для $n = 4$ карты Карно имеют вид с $2^4 = 16 = 4 \times 4$ клетками.

Карта Карно для булевых функций четырех переменных:

изменение x_1x_2

изменение x_3x_4

$\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4$	$\overline{x}_1 x_2\overline{x}_3\overline{x}_4$	$x_1 x_2\overline{x}_3\overline{x}_4$	$x_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4$
$\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 x_4$	$\overline{x}_1 x_2\overline{x}_3 x_4$	$x_1 x_2\overline{x}_3 x_4$	$x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 x_4$
$\overline{x}_1\overline{x}_2 x_3 x_4$	$\overline{x}_1 x_2 x_3 x_4$	$x_1 x_2 x_3 x_4$	$x_1\overline{x}_2 x_3 x_4$
$\overline{x}_1\overline{x}_2 x_3\overline{x}_4$	$\overline{x}_1 x_2 x_3\overline{x}_4$	$x_1 x_2 x_3\overline{x}_4$	$x_1\overline{x}_2 x_3\overline{x}_4$

или

0000	0100	1100	1000
0001	0101	1101	1001
0011	0111	1111	1011
0010	0110	1110	1010

Логическая функция F на карте Карно представлена совокупностью клеток, заполненных единицами (1) — для всех клеток, соответствующих единичным наборам переменных, или пустотами (0) — для нулевых наборов переменных, если известны ее значения при всем наборе аргументов, т. е. известна таблица истинности или СДНФ.

Для построения минимальной ДНФ производится «склеивание» единиц. «Склеиваются» только соседние клетки, которые отличаются значением одной переменной. Процесс сводится к объединению в группы единичных клеток карт Карно. При этом общие переменные сохраняются, а различные опускаются.

Рассмотрим более подробно процедуру минимизации с помощью карт Карно. Алгоритм «склеивания» с помощью карт Карно имеет следующий вид.

1. Привести булеву функцию к СДНФ.
2. Нанести единицы на карту Карно.
3. Объединить соседние единицы контурами, охватывающими 2^m клеток, где $m = 0, 1, 2, 3$. При этом может оказаться, что единица попадает одновременно в два контура. Если контур охватывает более одной пары единиц одновременно, то предпочтительнее его не дробить на пары, а рассматривать как единый целый контур, например квадрат.
4. Провести упрощения, т. е. исключить члены, дополняющие друг друга до 1 внутри контура, следя за тем, чтобы переменные внутри контура были связаны операцией конъюнкции.
5. Объединить оставшиеся члены (по одному в каждом контуре) функцией ИЛИ, т. е. дизъюнкцией.

6. Записать полученное упрощенное булево выражение в ДНФ.

При работе с картами Карно необходимо обратить внимание на порядок заполнения строк и столбцов значениями переменных. Последовательность значений переменных должна сохраняться. При этом каждые две соседние клетки отличаются лишь значением одной переменной. Нарушение порядка заполнения строк или столбцов возможно, но это может не дать ожидаемого результата.

Рассмотрим примеры минимизации булевых функций с помощью карт Карно.

Пусть $f(A, B, C) = \overline{A}B\overline{C} \vee \overline{A}BC \vee AB\overline{C} \vee ABC$.

	$\overline{A}\,\overline{B}$	$\overline{A}\,B$	$A\,B$	$A\,\overline{B}$
C		1	1	
$\overline{C}$		1	1	

Нанесем единицы на карту и обведем их сначала попарно двумя контурами. Такое действие соответствует заключению в скобки слагаемых $(\overline{A}B\overline{C} \vee \overline{A}BC)$ и $(AB\overline{C} \vee ABC)$. Вынося за скобки одинаковые конъюнкции согласно распределительному закону, в скобках получаем дизъюнкцию противоположных значений одной из переменных. В данном примере этому шагу соответствуют конъюнкции $\overline{A}B(\overline{C} \vee C)$ и $AB(\overline{C} \vee C)$. Объединение двух соседних единиц всегда приводит в действие закон инверсии, согласно которому дизъюнкция противоположных значений переменной равна 1.

Поэтому при записи ответа после применения карты Карно переменные, заключенные в общий контур, связываются конъюнкцией (как и общий множитель при вынесении за скобки), а такие отдельные конъюнкции, т. е. различные контуры, объединяются между собой дизъюнкцией.

Если записать полученный результат, то к нему вновь можно применить то же правило: $f(A, B, C) = \overline{A}B \vee AB = B$. Однако в данном примере удобнее рассмотреть целиком весь квадрат из четырех единиц и сравнить переменные, записанные в горизонтальных и вертикальных клетках. Очевидно, общие множители сохранятся после упрощения (ведь их можно было вынести за скобки), а инвертируемые уйдут согласно закону инверсии. Поэтому целесообразнее опустить инвертируемые пары $\overline{A} \vee A$ и $\overline{C} \vee C$, а в ответе сохранить общую для всех клеток переменную B. В результате $f(A, B, C) = B$.

Рассмотрим примеры минимизации булевой функции, содержащей четыре переменные.

$$f(A, B, C, D) = A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} \vee \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} \cdot D \vee \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot D \vee$$

$$\vee \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C \cdot D \vee \overline{A} \cdot B \cdot C \cdot D \vee A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot D.$$

Занесем единицы в соответствующие клетки карты Карно.

	$\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{C}\,D$	$C\,D$	$C\,\overline{D}$
$\overline{A}\,\overline{B}$		1	1	
$\overline{A}\,B$		1	1	
$A\,B$				
$A\,\overline{B}$	1	1		

Рассмотрим переменные, заключенные контуром в прямоугольник. Среди них есть повторяющиеся в соседних клетках ($\overline{A}$ и D) и инвертируемые (пары B, $\overline{B}$ и C, $\overline{C}$). Повторяющиеся переменные как общий множитель мы сохраним, а инвертируемые опустим. Из контура, содержащего две единицы, вынесем переменные A, $\overline{B}$, расположенные на одной строке, а также одинаковую для первых двух столбцов переменную $\overline{C}$, при этом опустим инвертируемую пару D, $\overline{D}$. После преобразований булева функция примет вид:

$$f(A, B, C, D) = \overline{A} \cdot D \vee A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}.$$

Проверка. Группируем элементарные конъюнкции: первую с последней, вторую с третьей и четвёртую с пятой.

$$f(A,B,C,D) = A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot(\overline{D}\vee D)\vee\overline{A}\cdot\overline{C}\cdot D\cdot(\overline{B}\vee B)\vee$$

$$\vee\overline{A}\cdot C\cdot D\cdot(\overline{B}\vee B) = A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\vee\overline{A}\cdot D\cdot(\overline{C}\vee C) = \overline{A}\cdot D\vee A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C},$$

т. е. результаты минимизации совпали.

Рассмотрим ещё пример.

Пусть $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_2\overline{x}_3\overline{x}_4\vee\overline{x}_1x_2\overline{x}_3\overline{x}_4\vee\overline{x}_1x_2x_3\overline{x}_4\vee x_1x_2x_3\overline{x}_4$.

Заполним таблицу:

	$\overline{x}_3\overline{x}_4$	$\overline{x}_3x_4$	x_3x_4	$x_3\overline{x}_4$
$\overline{x}_1\overline{x}_2$				
$\overline{x}_1x_2$	1			1
x_1x_2	1			1
$x_1\overline{x}_2$				

Чередование переменных в строках и столбцах ничем не ограничено. Такой порядок был введен для удобства последующего упрощения. Поэтому надо сделать так, чтобы все единицы в данном случае оказались рядом. Для этого достаточно отождествить, т. е. «склеить» крайние левую и правую колонки. Фактически это соответствует свертыванию карты в вертикальный цилиндр, в котором левый край совмещается с правым. При их совмещении единицы первого и последнего столбцов окажутся соседними, и для них можно будет применить алгоритм «склеивания».

Из всей четверки единиц по вертикали сохранится общая переменная второй и третьей строк x_2, а по горизонтали — общая переменная первого и последнего столбцов $\overline{x}_4$: $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_2\overline{x}_4$.

В следующем примере (по аналогии с предыдущим) удобно переставить переменные в столбце, что соответствует свертыванию карты в горизонтальный цилиндр.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3x_4 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3x_4.$$

	$\overline{x}_3\overline{x}_4$	$\overline{x}_3x_4$	x_3x_4	$x_3\overline{x}_4$
$\overline{x}_1\overline{x}_2$	1	1		
$\overline{x}_1x_2$				
x_1x_2				
$x_1\overline{x}_2$	1	1		

В этом примере контуры объединены «через край» при свертывании карты Карно в горизонтальный цилиндр так, чтобы совмещались верхний и нижний края карты, и клетки, содержащие единицы, образовывали прямоугольник. В первой и последней строках сохраняется общая переменная $\overline{x}_2$, а в первом и втором столбцах — общая переменная $\overline{x}_3$. Их конъюнкция и является ответом: $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x}_2\overline{x}_3$.

Пусть $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2x_3\overline{x}_4 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4 \vee x_1\overline{x}_2x_3\overline{x}_4$.

Заполним карту Карно:

	$\overline{x}_3\overline{x}_4$	$\overline{x}_3x_4$	x_3x_4	$x_3\overline{x}_4$
$\overline{x}_1\overline{x}_2$	1			1
$\overline{x}_1x_2$				
x_1x_2				
$x_1\overline{x}_2$	1			1

В результате: $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x}_2\overline{x}_4$.

Пусть $f(x_1, x_2) = \overline{x}_1x_2 \vee x_1\overline{x}_2 \vee x_1x_2$. Карта Карно имеет вид:

	$\overline{x}_2$	x_2
$\overline{x}_1$		1
x_1	1	1

Получилось два контура, один из которых дает x_1, а второй x_2. Попадание единицы в два контура и более соответствует закону идемпотентности $x = x \vee x$, поэтому каждое слагаемое (элементарная конъюнкция) может быть предоставлено столько раз, сколько нужно для упрощения. При этом они группируются независимо с другими слагаемыми, с которыми попали в один контур. Фактически сделано следующее:

$$f(x_1, x_2) = \overline{x}_1 x_2 \vee x_1 x_2 \vee x_1 \overline{x}_2 \vee x_1 x_2 = x_2(\overline{x}_1 \vee x_1) \vee x_1(\overline{x}_2 \vee x_2) = x_1 \vee x_2.$$

Карты Карно дают более рациональный путь минимизации булевых функций.

Пример. Функцию алгебры логики, заданную в числовой форме, минимизировать, пользуясь картами Карно.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bigvee_1 (4, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15).$$

Решение

	x_1	x_2	x_3	x_4	f
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	**1**
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	0
8	1	0	0	0	**1**
9	1	0	0	1	**1**
10	1	0	1	0	**1**
11	1	0	1	1	**1**
12	1	1	0	0	**1**
13	1	1	0	1	0
14	1	1	1	0	**1**
15	1	1	1	1	**1**

СДНФ:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3 \overline{x}_4 \vee x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 \overline{x}_4 \vee x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 x_4 \vee x_1 \overline{x}_2 x_3 \overline{x}_4 \vee$$

$$\vee x_1 \overline{x}_2 x_3 x_4 \vee x_1 x_2 \overline{x}_3 \overline{x}_4 \vee x_1 x_2 x_3 \overline{x}_4 \vee x_1 x_2 x_3 x_4.$$

	$\overline{x}_3\overline{x}_4$	$\overline{x}_3 x_4$	$x_3 x_4$	$x_3\overline{x}_4$
$\overline{x}_1\overline{x}_2$				
$\overline{x}_1 x_2$	1			
$x_1 x_2$	1		1	1
$x_1\overline{x}_2$	1	1	1	1

Тупиковая ДНФ:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1\overline{x}_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2\overline{x}_3\overline{x}_4.$$

Базис $\{\wedge, \vee, ^{-}\}$ не единственно возможный, существует довольно много функционально полных систем. Например, булевы функции можно выразить только через $\{\vee, ^-\}$, так как, воспользовавшись правилом де Моргана, имеем: $x_1 \wedge x_2 = \overline{\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2}$.

Примеры основных функционально полных систем булевых функций:

- *конъюнкция, дизъюнкция, отрицание:* $S_1 = \{\wedge, \vee, ^-\}$;
- *конъюнкция, отрицание:* $S_2 = \{\wedge, ^-\}$;
- *дизъюнкция, отрицание:* $S_3 = \{\vee, ^-\}$;
- *штрих Шеффера:* $S_4 = \{|\}$;
- *стрелка Пирса:* $S_5 = \{\downarrow\}$;
- *сумма по модулю два, конъюнкция,* 1: $S_6 = \{\oplus, \wedge, 1\}$;
- $x_1\overline{x}_2$, *отрицание:* $S_7 = \{x_1\overline{x}_2, \overline{x}_2\}$;
- *импликация, отрицание:* $S_8 = \{\Rightarrow, ^-\}$.

Заметим, что полная система функций $S_1 = \{\wedge, \vee, ^-\}$ будет избыточной; удалив из неё одну функцию, можно получить новую функционально полную систему $S_2 = \{\wedge, ^-\}$ или $S_3 = \{\vee, ^-\}$.

Можно построить различные формальные системы (алгебры) — в зависимости от выбранных в качестве базисных логических операций. Так, базис функций $S_1 = \{\wedge, \vee, ^-\}$ образует **булеву алгебру**. Множество булевых функций в базисе $S_6 = \{\oplus, \wedge, 1\}$ образует **алгебру Жегалкина**.

6.7 Алгебра Жегалкина

6.7.1 Сумма по модулю два

По определению, сумма по модулю два ($M2$), или антиэквивалентность:

$$x \oplus y = \overline{x \Leftrightarrow y}.$$

Таблица истинности суммы по модулю два:

x	y	$x \oplus y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Сумма по модулю два подчиняется законам:

- переместительному: $x_1 \oplus x_2 = x_2 \oplus x_1$;
- сочетательному: $(x_1 \oplus x_2) \oplus x_3 = x_1 \oplus (x_2 \oplus x_3)$, поэтому скобки можно опустить;
- распределительному (дистрибутивности конъюнкции относительно $M2$): $x_1 \wedge (x_2 \oplus x_3) = x_1 \wedge x_2 \oplus x_1 \wedge x_3$.

Операции с константами имеют вид:

- $x \oplus x = 0$;
- $x \oplus 0 = x$;
- $x \oplus \overline{x} = 1$;
- $x \oplus 1 = \overline{x}$.

Возможно разложение в СДНФ:

- $x_1 \oplus x_2 = \overline{x}_1 x_2 \vee x_1 \overline{x}_2$.

Для суммы по модулю два справедлива формула отрицания:

- $\overline{x_1 \oplus x_2} = \overline{x}_1 \oplus x_2 = x_1 \oplus \overline{x}_2$.

6.7.2 Многочлены Жегалкина

Согласно сформулированным утверждениям, можно говорить, что система булевых функций $S_6 = \{\oplus, \wedge, 1\}$ полна. Тогда любую булеву функцию можно представить в виде многочлена от своих переменных, и такой многочлен называется многочленом Жегалкина.

Многочлен Жегалкина является суммой константы и различных одночленов, в которые каждая из переменных входит не выше, чем в первой степени.

- Многочлен Жегалкина константы равен самой же константе;
- многочлен Жегалкина булевой функции одной переменной:
$$f(x) = a_0 \oplus a_1 x;$$
- многочлен Жегалкина булевой функции двух переменных:
$$f(x_1, x_2) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus a_{12} x_1 x_2;$$
- многочлен Жегалкина булевой функции трех переменных:
$$f(x_1, x_2, x_3) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus a_3 x_3 \oplus$$
$$\oplus a_{12} x_1 x_2 \oplus a_{13} x_1 x_3 \oplus a_{23} x_2 x_3 \oplus a_{123} x_1 x_2 x_3; \text{ и др.}$$

Коэффициенты $a_{i,\, \dots\, ,j}$ и свободный член a_0 принимают значения 0 или 1, а число слагаемых в формуле равно 2^n, где n — число переменных. Знак $\oplus$ — сумма Жегалкина, или сумма по модулю два.

Теорема 13. ***(Жегалкина)***. *Каждая булева функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ может быть представлена в виде многочлена Жегалкина, и притом единственным образом, с точностью до порядка слагаемых.*

Сформулируем алгоритм построения многочлена Жегалкина. Любую функцию, отличную от константы 0, можно представить в виде СДНФ. Если сравним таблицы истинности дизъюнкции и суммы по модулю два, увидим, что они отличаются только последней строкой, т. е. на наборе переменных 11. Так как в СДНФ на каждом наборе переменных только одна конъюнкция равна 1, то все дизъюнкции можно заменить суммами по модулю два. Кроме того, известно, что $x \oplus 1 = \overline{x}$. На этом и основан алгоритм построения многочлена Жегалкина для функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

1. По таблице истинности для функции f находим множество тех двоичных наборов переменных, на которых функция принимает значение 1.

2. Составляем СДНФ.

3. В СДНФ каждый знак дизъюнкции $\vee$ меняем на знак суммы Жегалкина $\oplus$.

4. Упрощаем, если можно, полученное выражение, используя тождество $x_i \oplus \overline{x}_i = 1$.

5. В полученной формуле каждое отрицание $\overline{x}_i$ заменяем на $x_i \oplus 1$.

6. Раскрываем скобки в полученной формуле, содержащей только функции $\wedge$, $\oplus$ и константу 1.

7. Приводим подобные члены, используя тождество $x_i \oplus x_i = 0$.

Например, построим многочлен Жегалкина для функции, СДНФ которой имеет вид: $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1\overline{x}_2x_3 \vee \overline{x}_1x_2\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3$.

$$
\begin{gathered}
f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1\overline{x}_2x_3 \oplus \overline{x}_1x_2\overline{x}_3 \oplus x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 = \\
= (x_1 \oplus 1)(x_2 \oplus 1)x_3 \oplus (x_1 \oplus 1)x_2(x_3 \oplus 1) \oplus x_1(x_2 \oplus 1)(x_3 \oplus 1) = \\
= (x_1 \oplus 1)(x_2x_3 \oplus x_3) \oplus (x_1x_2 \oplus x_2)(x_3 \oplus 1) \oplus (x_1x_2 \oplus x_1)(x_3 \oplus 1) = \\
= x_1x_2x_3 \oplus x_1x_3 \oplus x_2x_3 \oplus x_3 \oplus x_1x_2x_3 \oplus x_2x_3 \oplus \oplus x_1x_2 \oplus x_2 \oplus \\
\oplus x_1x_2x_3 \oplus x_1x_3 \oplus x_1x_2 \oplus x_1 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_1x_2x_3.
\end{gathered}
$$

Полученная формула — многочлен Жегалкина. Эквивалентность полученной формулы легко проверить, построив для неё таблицу истинности.

6.8 Алгебра переключательных схем

Одним из практических применений алгебры логики является построение параллельно-последовательных переключательных схем [7, 9, 10, 15, 17, 4].

Определение 45. ***Переключательная схема*** *— это изображение некоторого устройства, содержащего только двухпозиционные переключатели, которые могут находиться в одном из двух состояний: замкнутом (ток проходит) или разомкнутом (ток не проходит).*

Очевидно, что состояние переключателя можно кодировать числами 1 и 0. Большинство переключательных схем можно разбить на участки из последовательно или параллельно соединенных переключателей. Каждому переключателю поставим в соответствие логическую переменную, принимающую значение «истина» тогда, когда переключатель замкнут, и «ложь», если переключатель разомкнут. На схемах переключатели будем обозначать теми же буквами, что и соответствующие им переменные.

При описании переключательных схем будем придерживаться следующих соглашений.

1. Переключатели, всегда либо одновременно замкнутые, либо одновременно разомкнутые, обозначаются одной и той же буквой.

2. Переключателям, соединенным параллельно, поставим в соответствие операцию дизъюнкции: ток в этой цепи (рис. 6.1a) будет протекать или при замкнутом переключателе A, или при замкнутом переключателе B, или при замкнутых переключателях A и B одновременно.

3. Переключателям, соединенным последовательно, поставим в соответствие операцию конъюнкции: ток в цепи (рис. 6.1b) потечет только тогда, когда будут замкнуты оба переключателя — A и B.
4. Два переключателя, работающие так, что один из них замкнут, когда другой разомкнут, и наоборот, описываются формулами A и $\overline{A}$ соответственно (рис. 6.1c).

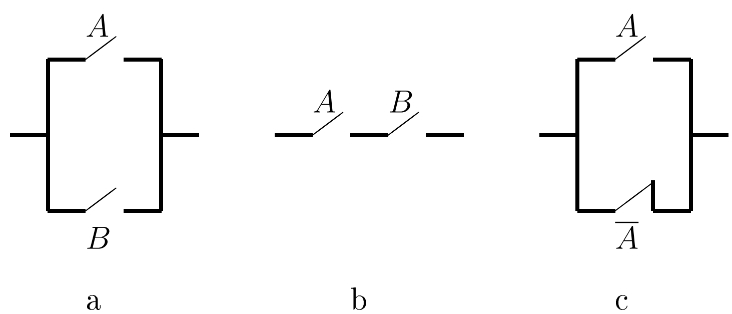


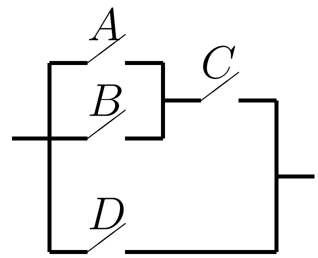
Рис. 6.1. Переключательные схемы

Прочитать переключательную схему — значит определить, протекает по ней ток или нет при указанных состояниях переключателей.

Определение 46. *Две схемы, содержащие одни и те же переключатели A, B, ..., будем считать* ***эквивалентными*** *(равными), если при одном и том же состоянии переключателей обе схемы одновременно пропускают или не пропускают ток. Из двух эквивалентных схем более простой будем считать ту, которая содержит меньше переключателей.*

Каждой переключательной схеме можно поставить в соответствие формулу, истинную тогда и только тогда, когда схема проводит ток. В алгебре переключательных схем выполняются все законы алгебры логики. В этом достаточно просто убедиться, если построить и прочитать соответствующие этим законам схемы, а затем сравнить столбец состояния каждой схемы с результирующим столбцом таблицы истинности для соответствующей логической формулы.

Пример. Составим формулу для схемы:



Переключатели A и B соединены параллельно, следовательно, этот участок схемы описывается как дизъюнкция переменных: $A \vee B$. Далее следует последовательное соединение с переключателем C: $(A \vee B) \wedge C$. Рассмотренный участок цепи параллельно соединяется с переключателем D: $(A \vee B) \wedge C \vee D$.

Синтез переключательной схемы — это разработка схемы, условия работы которой заданы таблицей истинности или словесным описанием. Упрощение (минимизация) переключательной схемы сводится к упрощению соответствующей ей формулы на основании законов алгебры логики.

6.9 Элементы схемотехники. Логические схемы

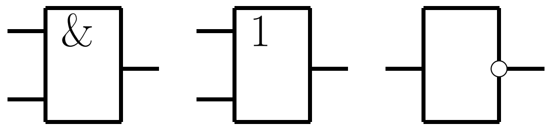
Любое устройство компьютера, выполняющее арифметические или логические операции, может рассматриваться как преобразователь двоичной информации: значения входных переменных для него — последовательность нулей и единиц, а значения выходной функции — новая двоичная последовательность. Необходимые преобразования информации в блоках компьютера производятся логическими устройствами двух типов: комбинационными схемами и цифровыми автоматами с памятью [7, 9, 15, 4].

В комбинационной схеме набор выходных сигналов в любой момент времени полностью определяется набором входных сигналов.

Определение 47. *Дискретный преобразователь, который выдает после обработки двоичных сигналов значение одной из ло-*

гических операций, называется ***логическим элементом*** *(вентилем) (ЛЭ).*

Условные обозначения (схемы) логических элементов, реализующих:
a) логическое умножение; b) логическое сложение; c) отрицание:



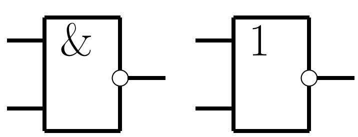
a b c

Логический элемент И (**конъюнктор**) реализует операцию логического умножения. Единица на выходе этого элемента появится тогда и только тогда, когда на всех входах будут единицы.

Логический элемент ИЛИ (**дизъюнктор**) реализует операцию логического сложения. Если хотя бы на одном входе будет единица, то на выходе элемента также будет единица, иначе — на выходе будет ноль.

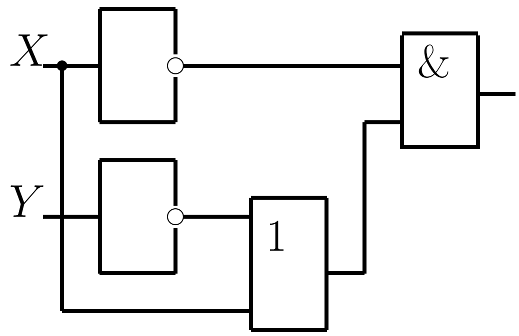
Логический элемент НЕ (**инвертор**) реализует операцию отрицания. Если на входе элемента ноль, то на выходе единица, и наоборот.

Базовыми в микроэлектронике являются также логические элементы И-НЕ и ИЛИ-НЕ, реализующие функции: штрих Шеффера, стрелка Пирса. Их условные обозначения:



Цепочки из ЛЭ, в которых выходы одних элементов являются входами других, называют **логическими устройствами** (ЛУ). Схему соединения логических элементов, реализующую логическую функцию, называют **функциональной схемой**. Формой описания функции, реализуемой ЛУ, является **структурная формула**.

Например, структурная формула $F(x, y) = \overline{x} \wedge (x \vee \overline{y})$ соответствует функциональной схеме, изображённой ниже.



Из отдельных логических элементов можно составить, например, устройства, производящие арифметические операции над двоичными числами.

Определение 48. *Электронная логическая схема, выполняющая суммирование двоичных кодов, называется* ***сумматором****.*

Рассмотрим схему сложения двух n-разрядных двоичных чисел.

$$\begin{array}{cccccccc} \multirow{2}{*}{+} & a_n & \ldots & a_i & \ldots & a_1 & a_0 \\ & b_n & \ldots & b_i & \ldots & b_1 & b_0 \\ \hline s_{n+1} & s_n & \ldots & s_i & \ldots & s_1 & s_0 \end{array}$$

При сложении цифр i-го разряда складываются a_i и b_i, к ним прибавляется p_i — признак переноса из (i–1)-го разряда. Результатами сложения будут s_i и p_{i+1} — признак переноса в следующий разряд.

Таким образом, одноразрядный двоичный сумматор — это устройство с тремя входами и двумя выходами. Его работа описывается следующей таблицей истинности:

Входы			Выходы	
a_i	b_i	p_i	s_i	p_{i+1}
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Выходные функции можно восстановить по таблице в виде СДНФ или СКНФ и упростить с помощью тождественных преобразований. В результате преобразований искомые функции приобретают, например, следующий вид:

$$p_{i+1} = a_i \wedge b_i \vee a_i \wedge p_i \vee b_i \wedge p_i;$$
$$s_i = (\overline{p}_{i+1} \vee a_i \wedge b_i \wedge p_i) \wedge (a_i \vee b_i \vee p_i).$$

Заметим, что функции p_{i+1} и s_i можно выразить другими формулами, что, естественно, приведет к другим логическим схемам. Так, наиболее короткой формулой для s является следующая: $s_i = a_i \oplus b_i \oplus p_i$.

Одноразрядный двоичный сумматор можно реализовать схемой, изображённой на рис. 6.2.

Сложение n-разрядных двоичных чисел осуществляется с помощью комбинации одноразрядных сумматоров. В зависимости от способа ввода/вывода данных и организации переносов многоразрядные сумматоры бывают последовательного и параллельного принципа действия.

В цифровых автоматах с памятью набор выходных сигналов зависит не только от набора входных сигналов, но и от внутреннего состояния данного устройства. Такие устройства всегда имеют память.

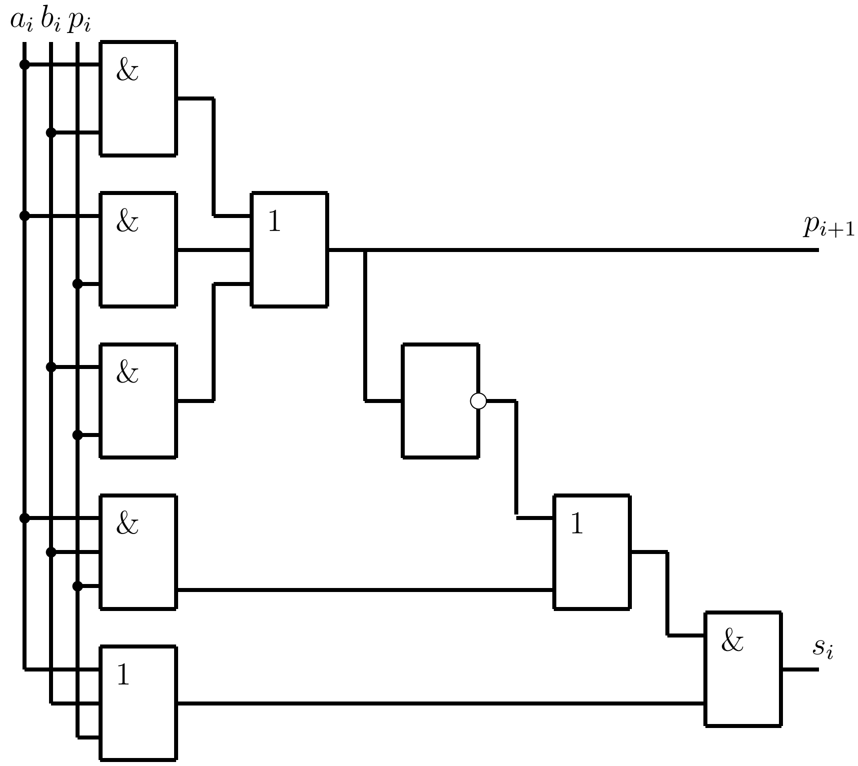


Рис. 6.2. Одноразрядный двоичный сумматор

Определение 49. *Логический элемент, способный хранить один разряд двоичного числа, называют* ***триггером****.*

Триггер был изобретен в 1918 г. М. А. Бонч-Бруевичем (1888 – 1940). Самый простой — RS-триггер. Он состоит из двух элементов ИЛИ-НЕ, входы и выходы которых соединены кольцом: выход первого соединен со входом второго, выход второго — со входом первого (рис. 6.3).

Принцип работы RS-триггера иллюстрирует следующая таблица истинности:

Режим работы триггера	R	S	Состояние триггера Q
Хранение предыдущего состояния	0	0	Q
Установка триггера в 1	0	1	1
Установка триггера в 0	1	0	0
Запрещенное состояние	1	1	Недопустимо

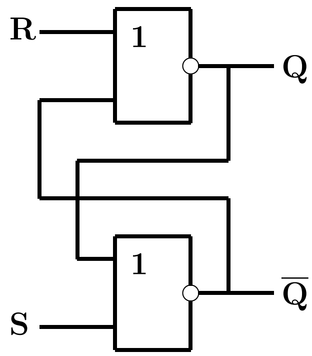


Рис. 6.3. Схема RS-триггера:
вход S (set) — установка триггера в 1, вход R (reset) — установка триггера в 0

Обычно на входы поступают сигналы R $= 0$ и S $= 0$, и триггер хранит старое состояние. Если на вход S поступает на короткое время сигнал 1, то триггер переходит в состояние 1, и после того, как сигнал S станет равен 0, триггер будет сохранять состояние 1. При подаче 1 на вход R триггер перейдет в состояние 0. Подача на оба входа логической единицы может привести к неоднозначному результату, поэтому такая комбинация входных сигналов запрещена. Для хранения 1 байта информации необходимо 8 триггеров, 1 килобайта — 8×1024 триггера. Таким образом, оперативная память современных компьютеров содержит миллионы триггеров. В целом же компьютер состоит из огромного числа логических элементов, образующих все его узлы и память.

Пример. Для заданной булевой функции трех переменных

$$f(x, y, z) = \overline{\overline{x} \vee \overline{y}} \Rightarrow (x \oplus z):$$

а) составить таблицу истинности и записать функцию в виде СДНФ;
б) найти многочлен Жегалкина;
в) привести функцию к тупиковой ДНФ;
г) построить функциональную схему.

Решение

Таблица истинности:

x	y	z	$\overline{x}$	$\overline{y}$	$\overline{x}\vee\overline{y}$	$\overline{\overline{x}\vee\overline{y}}$	$x\oplus z$	f
0	0	0	1	1	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1	0	0	1
1	1	0	0	0	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0	0	0

СДНФ:

$$f(x,y,z)=\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\vee\overline{x}\,\overline{y}z\vee\overline{x}y\overline{z}\vee\overline{x}yz\vee x\,\overline{y}\,\overline{z}\vee x\,\overline{y}\,z\vee x\,y\,\overline{z}.$$

Многочлен Жегалкина:

$$f(x,y,z)=\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\oplus\overline{x}\,\overline{y}z\oplus\overline{x}y\overline{z}\oplus\overline{x}yz\oplus x\,\overline{y}\,\overline{z}\oplus x\,\overline{y}\,z\oplus x\,y\,\overline{z}=$$

$$=(1\oplus x)\,(1\oplus y)\,(1\oplus z)\oplus(1\oplus x)\,(1\oplus y)z\oplus(1\oplus x)y(1\oplus z)\oplus(1\oplus x)yz\oplus$$

$$\oplus x\,(1\oplus y)\,(1\oplus z)\oplus x\,(1\oplus y)\,z\oplus x\,y\,(1\oplus z)=$$

$$=x\,y\,z\oplus y\,z\oplus x\,z\oplus z\oplus x\,y\oplus y\oplus x\oplus 1\oplus$$

$$\oplus x\,y\,z\oplus y\,z\oplus x\,z\oplus z\oplus x\,y\,z\oplus y\,z\oplus x\,y\oplus y\oplus$$

$$\oplus x\,y\,z\oplus y\,z\oplus x\,y\,z\oplus x\,z\oplus x\,y\oplus x\oplus x\,y\,z\oplus x\,z\oplus x\,y\,z\oplus x\,y=$$

$$=1\oplus x\,y\,z.$$

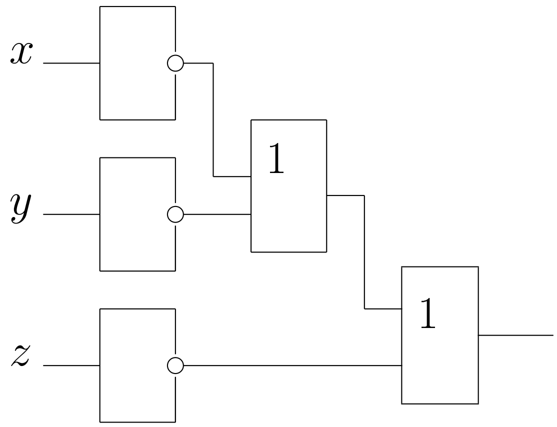
Минимизация СДНФ с помощью карты Карно:

	$\overline{x}\,\overline{y}$	$\overline{x}\,y$	$x\,y$	$x\,\overline{y}$
$\overline{z}$	1	1	1	1
z	1	1		1

$$f(x,y,z)=\overline{x}\vee\overline{y}\vee\overline{z}.$$

Замечание. Этот результат можно получить, записав СКНФ.

Функциональная схема:



6.10 Вопросы и задания

Вопросы

1. Простейшие высказывания, квазивысказывания, модальности.
2. Сложные высказывания, логические связки, логические формулы.
3. Таблицы истинности. Исчисление высказываний.
4. Математическая интерпретация высказываний. Запись высказываний.
5. Алгебра логики предикатов, исчисление предикатов.
6. Применение логики предикатов к естественному языку.
7. Кванторные конструкции.
8. Тавтологии, противоречия. Простейшие преобразования классических формул.
9. Функции алгебры логики.
10. Формулировка отрицаний.
11. Двойственные функции.
12. Канонические формы логических формул.
13. Полные системы булевых функций. Свойства элементарных булевых функций.
14. Теорема о функциональной полноте.
15. Совершенная дизъюнктивная и совершенная конъюнктивная нормальные формы (СДНФ и СКНФ).
16. Задача минимизации булевых функций. Карты Карно.
17. Многочлен Жегалкина.

18. Алгебра переключательных схем.

19. Элементы схемотехники. Логические схемы.

Задания

1. Определите значение истинности следующих высказываний:

   1) $\overline{5 < 6}$;

   2) $\overline{6 \geq 3}$;

   3) $5 \geq -5$;

   4) $4 \leq 2 \leq 5$.

Выделите высказывания и квазивысказывания.

2. У меня одна рука.

3. У меня расстройство желудка.

4. У меня болит спина.

5. У меня нет денег.

6. Программа написана плохо.

7. Программа написана неправильно.

8. Сколько различных смыслов имеет предложение: «Предложение рабочих бригад вызвало осуждение товарища Иванова».

Выделите логические связки, модальности и кванторы.

9. Каждая программа содержит ошибку.

10. Если программа не содержит ошибок, то неверен применённый алгоритм.

11. Если программа на самом деле полностью и абсолютно правильна, она никому не нужна.

12. По словам преподавателя, у студента Петрова в каждой программе не менее десяти ошибок.

13. Завтра взойдёт Солнце, если не будет светопреставления.

14. Как мне сообщила Маша, наш преподаватель собирается завалить на экзамене не менее половины группы.

15. Мне кажется, что Иванов думает, что я намерен подложить ему свинью.

16. Мне передали, что Иванов думает, что я намерен подложить ему свинью.

Переведите на формальный язык, используя логические связки и кванторы.

17. Ни одному лысому не нужна расчёска.

18. Все мои тётки несправедливы.

19. Каждый, кто упорно работает, добивается успеха.

20. Ни один бездельник не станет знаменитостью.

21. Не все углы, синус которых больше $1/2$, больше $\pi/2$.

22. Квадратные корни из некоторых рациональных чисел иррациональны.

23. Число делится на 25 в том и только том случае, когда оно делится на 50 либо даёт при делении на 50 остаток 25.

24. Точки A, B, C являются вершинами равнобедренного треугольника.

Запишите высказывания, воспользовавшись кванторами.

25. Всякое число равно самому себе.

26. Каково бы ни было число y, квадрат его неотрицателен.

27. По крайней мере одно число x является корнем уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

28. Существует x такое, что $x - 3 = 7$.

Проверьте на таблицах истинности, тавтологии ли указанные формулы.

29. $(A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow C) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B \vee C)$.

30. $((A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow C) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow C))$.

31. $((A \Leftrightarrow B) \wedge (C \Leftrightarrow D)) \Leftrightarrow ((A \Leftrightarrow C) \wedge (B \Leftrightarrow D))$.

32. $\overline{A \vee B} \Leftrightarrow \overline{A} \wedge \overline{B}$.

33. $\overline{A \wedge B} \Leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}$.

34. $(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow (A \wedge C \Leftrightarrow B \wedge C)$.

35. $(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow (A \vee C \Leftrightarrow B \vee 1C)$.

Составьте таблицы истинности.

29. $(p \vee q) \wedge (p \vee \overline{q}) \Leftrightarrow p \wedge q$.

30. $p \Rightarrow \overline{q} \vee p$.

31. $p \Rightarrow \overline{q} \wedge p$.

32. $\overline{p} \vee \overline{q} \Rightarrow \overline{r}$.

33. $\overline{p \vee q} \vee r$.

34. $p \wedge q \Leftrightarrow (q \vee r \Rightarrow p)$.

35. $p \wedge q \Leftrightarrow \overline{q} \vee r$.

36. $p \vee q \Rightarrow r$.

37. $(p \Rightarrow q \vee r) \wedge (p \wedge q) \Leftrightarrow \overline{p \wedge r} \Rightarrow p$.

38. Убедитесь, что следующие шесть функций тождественны, т. е. принимают одинаковые значения на одинаковых наборах переменных:

    1) $f_1(x_1, x_2, x_3) = x_3 \wedge x_1 \vee x_2$;
    2) $f_2(x_1, x_2, x_3) = x_2 \wedge 1 \vee x_1 \wedge x_3$;
    3) $f_3(x_1, x_2, x_3) = x_2 \vee x_1 \wedge x_3 \vee 0$;
    4) $f_4(x_1, x_2, x_3) = x_2 \vee x_1 \wedge x_3 \wedge (x_1 \vee \overline{x}_1)$;
    5) $f_5(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2 \vee x_1 \wedge x_3 \vee x_4 \wedge \overline{x}_4$;
    6) $f_6(x_1, x_2, x_3) = x_2 \vee x_1 \wedge x_3$.

39. Сформулируйте отрицания заданных функций:

    1) $f(x, y, z) = (x \Rightarrow y) \vee \overline{z}$;
    2) $f(x, y, z) = (x \wedge \overline{y}) \vee (\overline{y} \wedge z)$;
    3) $f(x, y, z) = (x \vee \overline{y}) \Rightarrow (y \wedge \overline{z})$;
    4) $f(x) = \forall x(A(x) \wedge B(x))$;
    5) $f(x) = \exists x(A(x) \Rightarrow \overline{B}(x))$.

40. Найдите функции, двойственные заданным:

    1) $f(x, y) = x \Rightarrow \overline{y}$;
    2) $f(x, y) = \overline{x} \wedge y$;
    3) $f(x, y, z) = (x \vee \overline{y}) \Rightarrow (y \wedge \overline{z})$;
    4) $f(x, y, z) = (x \Rightarrow y) \vee \overline{z}$;
    5) $f(x, y, z) = (x \wedge \overline{y}) \vee (\overline{y} \wedge z)$;
    6) $f(x, y, z) = x \wedge (y \wedge z \vee 0)$;
    7) $f(x, y, z, t) = (x \vee y \vee \overline{z}) \wedge \overline{t}$.

41. По заданным значениям функций постройте их СКНФ и СДНФ, упростите полученные формулы, пользуясь картами Карно:

1) $f(0,0,0)=f(0,0,1)=f(1,0,0)=1$;
2) $f(0,0,0)=f(0,0,1)=f(1,0,0)=0$;
3) $f(1,0,1)=f(0,1,1)=f(1,1,0)=1$;
4) $f(1,0,1)=f(0,1,1)=f(1,1,0)=0$;
5) $f(0,1,0)=f(1,1,0)=f(1,1,1)=0$;
6) $f(0,0,0)=f(0,1,0)=f(1,1,1)=1$;
7) $f(0,0,1)=f(1,0,0)=f(1,1,0)=1$;
8) $f(0,0,1)=f(1,0,0)=f(1,1,0)=0$;
9) $f(0,0,0)=f(0,0,1)=f(1,0,0)=0$;
10) $f(0,1,0)=f(1,0,0)=f(0,0,0)=1$.

42. Для заданной булевой функции трех переменных:
а) постройте таблицу истинности, найдите двоичную форму булевой функции и приведите функцию к СДНФ и СКНФ;
б) найдите многочлен Жегалкина;
в) с помощью эквивалентных преобразований приведите функции к ДНФ, КНФ.

1) $(x \vee \overline{y}) \Rightarrow (\overline{z} \oplus \overline{x})$;
2) $\overline{(x \vee \overline{y})} \Rightarrow (z \oplus \overline{x})$;
3) $(\overline{x} \vee \overline{y}) \Rightarrow \overline{(z \oplus x)}$;
4) $(\overline{x} \vee \overline{y}) \Rightarrow \overline{(z \Leftrightarrow \overline{x})}$;
5) $\overline{(\overline{x} \vee \overline{y}) \Rightarrow (z \Leftrightarrow \overline{x})}$;
6) $\overline{(\overline{x} \,|\, \overline{y}) \oplus (z \Leftrightarrow \overline{x})}$;
7) $\overline{(z \Rightarrow x) \Leftrightarrow (y \,|\, x)}$;
8) $(x \,|\, \overline{y}) \oplus (\overline{z} \Leftrightarrow x)$;
9) $(\overline{z} \Rightarrow x) \Leftrightarrow (\overline{x} \,|\, y)$;
10) $(z \Rightarrow x) \oplus (x \,|\, \overline{y})$;
11) $((x \downarrow y) \Rightarrow z) \oplus y$;
12) $(\overline{(x \Leftrightarrow y)} \Rightarrow \overline{z}) \,|\, y$;
13) $(\overline{(x \vee \overline{y})} \Rightarrow (\overline{z} \Leftrightarrow y)$;
14) $\overline{((x \downarrow y) \Rightarrow \overline{z}) \Leftrightarrow y}$;
15) $\overline{(x \downarrow y)} \Rightarrow (z \Leftrightarrow \overline{y})$;
16) $\overline{((x \Leftrightarrow y) \Rightarrow \overline{z}) \oplus y}$;
17) $(\overline{x} \vee y) \Rightarrow \overline{(\overline{z} \Leftrightarrow x)}$;
18) $\overline{((x \downarrow y) \Rightarrow z) \Leftrightarrow x}$;
19) $\overline{(x \,|\, y) \oplus (\overline{z} \Rightarrow y)}$;
20) $\overline{(x \vee y) \Rightarrow (\overline{z} \Leftrightarrow y)}$;
21) $\overline{(x \downarrow y)} \Rightarrow \overline{z}) \oplus y$;
22) $\overline{((x \downarrow y) \Rightarrow \overline{z}) \Leftrightarrow y}$;

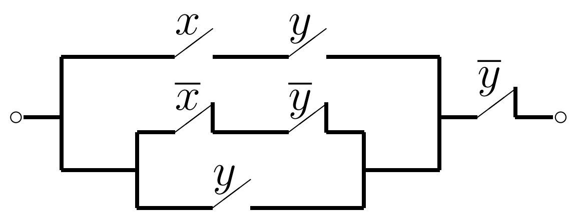
23) $\overline{(x \downarrow y) \Rightarrow \overline{z})} \Leftrightarrow y$;

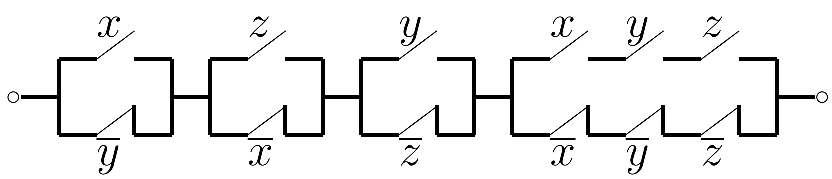
24) $\overline{\overline{(x \downarrow y)} \Rightarrow \overline{z}) \oplus y}$;

25) $\overline{(x \mid y) \Rightarrow z)} \oplus y$;

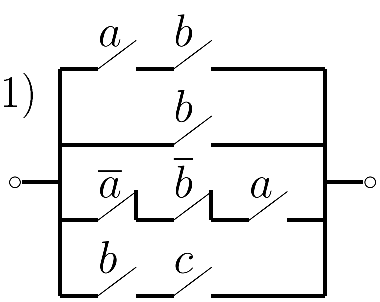
26) $\overline{(\overline{x} \vee \overline{y})} \Rightarrow (z \oplus x)$.

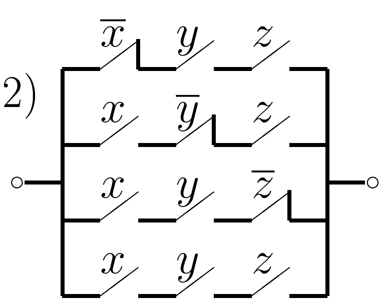
43. Для заданных переклчательных схем составьте логические формулы, упростите их и по ним постройте упрощённые схемы:

1) 

2) 

44. Упростите схемы:

1) 

2) 

45. По структурным формулам постройте функциональные схемы:

1) $F(x, y) = \overline{\overline{x} \vee y} \wedge x$;

2) $F(x, y, z) = x \wedge y \wedge z \vee (x \vee y \vee z) \wedge \overline{y}$;

3) $F(x, y, z) = x \wedge y \wedge z \vee \overline{(x \vee y \vee z) \wedge \overline{y}}$;

4) $F(x, y, z) = (x \vee \overline{y}) \wedge (\overline{x} \vee z) \vee (y \vee \overline{z})$;

5) $F(A, B, C) = (\overline{A} \wedge B \vee C) \wedge (\overline{B} \vee A)$;

6) $F(A, B, C) = (A \vee \overline{B} \vee C) \wedge \overline{C} \vee \overline{A} \wedge B$.

Библиографический список

1. *Pruцков, А. В.* Математическая логика и теория алгоритмов : учебник / А. В. Пруцков, Л. Л. Волкова. — Москва : КУРС: ИНФРА-М, 2017. — 152 с.
2. *Канцедал, С. А.* Дискретная математика : учеб. пособие / С. А. Канцедал. — Москва : ФОРУМ : ИНФРА-М, 2017. — 224 с.
3. *Игошин, В. И.* Математическая логика: Учебное пособие / В. И. Игошин — Москва : НИЦ ИНФРА-М, 2017. — 398 с.
4. *Спирина, М. С.* Дискретная математика / М. С. Спирина, П. А. Спирин. — 11-е изд., испр. — Москва : Академия, 2015. — 368 с.
5. *Москинова, Г. И.* Дискретная математика. Математика для менеджера в примерах и упражнениях : учеб. пособие / Г. И. Москинова. — Москва : Логос, 2007. — 240 с.: ил.
6. *Судоплатов, С. В.* Элементы дискретной математики : учебник / С. В. Судоплатов, Е. В. Овчинников. — Москва : ИНФРА-М; Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2002. — 280 с.
7. *Яблонский, С. В.* Введение в дискретную математику : учеб. пособие для вузов / С. В. Яблонский; под ред. В. А. Садовничего. — Москва : Высш. шк., 2001. — 384 с.
8. *Аматова, Г. М.* Математика / Г. М. Аматова, М. А. Аматов. — Москва : Московский психолого-социальный институт, 1999. — 488 с.
9. *Андреева, Е. В.* Математические основы информатики : учеб. пособие / Е. В. Андреева, Л. Л. Босова, И. Н. Фалина. — Москва : БИНОМ: Лаборатория знаний, 2005. — 328 с.

10. *Асеев, Г. Г.* Дискретная математика : учеб. пособие / Г. Г. Асеев, О. М. Абрамов, Д. Э. Ситников. — Ростов-на-Дону : Феникс; Харьков : Торсинг, 2003. — 144 с.

11. *Галушкина, Ю. И.* Конспект лекций по дискретной математике : учеб. издание / Ю. И. Галушкина, А. Н. Марьямов. — Москва : Айрис-пресс, 2007. — 176 с.

12. *Иванов, Б. Н.* Дискретная математика. Алгоритмы и программы : учеб. пособие. — Москва : Лаборатория базовых знаний, 2001. — 288 с.

13. *Непейвода, Н. Н.* Прикладная логика : учеб. пособие. — Новосибирск : Изд-во Новосиб. ун-та, 2000. — 521 с.

14. *Новиков, Ф. А.* Дискретная математика для программиста. — Санкт-Петербург : Питер, 2001. — 304 с.

15. *Плотников, А. Д.* Дискретная математика : учеб. издание / А. Д. Плотников. — Москва : Новое знание, 2006. — 304 с.

16. *Романовский, И. В.* Дискретный анализ : учеб. пособие. — Санкт-Петербург : Невский диалект, 2000. — 240 с.

17. *Рояк, М. Э.* Основы дискретной математики : учеб. пособие / М. Э. Рояк, С. Х. Рояк. — Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2003. — 127 с.

18. *Бочаров, В. А.* Основы логики : учеб. пособие / В. А. Бочаров, В. И. Маркин. — Москва : ИНФРА-М, 2000. — 296 с.

19. *Комиссаров, В. В.* Математика. Дискретная математика : учеб. пособие / В. В. Комиссаров, Т. Т. Баланчук, С. Л. Злобина. — АНОО ВО Центросоюза РФ «СибУПК». — Новосибирск, 2023. — 188 с.

20. *Комиссаров, В. В.* Математика. Математическая логика и теория алгоритмов: учеб. пособие / В. В. Комиссаров, Н. В. Шаланов, А. А. Яковлева. — АНОО ВО Центросоюза РФ «СибУПК». — Новосибирск, 2024. — 118 с.

Учебное издание

Комиссаров Валентин Владиславович
Шаланова Оксана Николевна
Пешкова Мария Николаевна
Яковлева Алла Анатольевна

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

С ЭЛЕМЕНТАМИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Учебное пособие

Редактор В. И. Дмитриева

Компьютерная вёрстка авторская.

Подписано в печать 11.03.2025. Формат $60 \times 84/16$. Бумага офсетная.
Тираж 40 экз. Печ. л. 9,75. Уч.-изд. л. 9,06. Заказ № 3.
Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета.
630073, Новосибирск, пр. К. Маркса, 20.